《理论力学 A》（2023 年秋季）第一次期中考试参考答案

考试时间：2023 年 11 月 02 日，14:00–15:30　(90 分钟)

1. **变分法**。（25 分）考虑一个修正的最速下降线问题，其中粒子具有非零初始速度 v_0。试证明在这种初始条件下，最速下降线仍然为圆滚线，但曲线的尖端点（最高点）比初始的位置高 $h = v_0^2/2g$。 $v = \sqrt{v_0^2+2gy}$ −2

   解：

$$t_{01} = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{v_0^2+2gy}}dx \equiv \int_0^{x_1} f(y,y')dx \tag{1}$$

−6

被积函数 $f(y,y')$ 不显含 x，存在首积分：

$$H = \frac{\partial f}{\partial y'}y' - f = \frac{-1}{\sqrt{(v_0^2+2gy)(1+y'^2)}} = \text{常数} \tag{2}$$

−6

令：$v_0^2 = 2gh$，根据上式有：

$$(h+y)(1+y'^2) = 2a \tag{3}$$

−2

分离变量有：

$$\int_0^y \sqrt{\frac{h+y}{2a-h-y}}dy = x \tag{4}$$

−2

积分变量代换：

$$h+y = a(1-\cos\phi), \quad dy = a\sin\phi d\phi \tag{5}$$

−2

于是有：

$$x = a\int_{\phi_0}^{\phi}(1-\cos\phi)d\phi = a[(\phi-\sin\phi)-(\phi_0-\sin\phi_0)] \tag{6}$$

−2　4

上式显然是圆滚线方程，尖端点位置为：$\phi = 0$，即：

$$x = -a(\phi_0 - \sin\phi_0) \tag{7}$$

$$y = -h \equiv -v_0^2/2g \tag{8}$$

−3

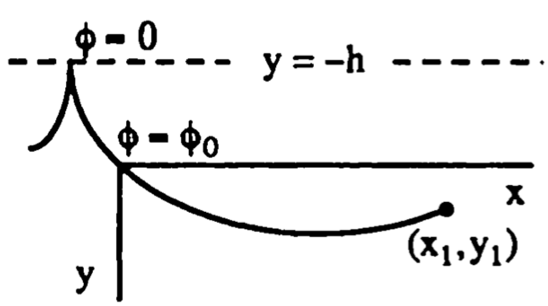

图 1: 第一题

2. **拉格朗日力学**。（25 分）考察悬挂点按 $y = h(t)$ 规律运动的简单平面摆问题，其中 $h(t)$ 是给定的时间函数。

   (a) 求单摆的拉格朗日量，取摆与垂线的夹角 θ 作为广义坐标。

   (b) 根据欧拉 - 拉格朗日方程，推导出系统的动力学方程。该结果表明单摆等价于在引力场 $g + \ddot{h}(t)$ 中的单摆一样摆动（等效原理，类似爱因斯坦电梯），其中 $\ddot{h}(t) \equiv d^2h(t)/dt^2$。

解：

13 (a)

$$x = l\sin\theta, \quad y = h(t) - l\cos\theta \quad -4 \tag{9}$$

系统的动能为：

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{h}l\dot{\theta}\sin\theta + \dot{h}^2) \quad -2 \tag{10}$$

系统的势能为：

$$V = mgy = mg(h - l\cos\theta) \quad -2 \tag{11}$$

最终的拉氏量为：

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{h}l\dot{\theta}\sin\theta + \dot{h}^2) - mg(h - l\cos\theta) \quad -5 \tag{12}$$

12 (b)

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m(l^2\dot{\theta}) + \dot{h}l\sin\theta), \quad Q_\theta = \frac{\partial L}{\partial\theta} = m\dot{h}l\dot{\theta}\cos\theta - mgl\sin\theta \quad -4 \tag{13}$$

代入 E-L 方程，得到：$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta}\right] = 0$ -5

$$ml^2\ddot{\theta} = -m(g + \ddot{h})\sin\theta = -mg_{\text{eff}}\sin\theta \quad -3 \tag{14}$$

其中：$g_{\text{eff}} \equiv g + \ddot{h}$。

3. **哈密顿定理**。（25 分）考察一自由粒子的运动。

   (a) 假设粒子从 $(t_0, \vec{x}_0)$ 到 $(t_1, \vec{x}_1)$ 的运动分为两段：以匀直线运动从 $(t_0, \vec{x}_0)$ 到 $(t', \vec{x}')$；以匀直线运动从 $(t', \vec{x}')$ 到 $(t_1, \vec{x}_1)$。一般来说，这两段的速度是不一样的。试写出 $S(t', \vec{x}')$ 的表达式。

   (b) 假设给定 $t_0 < t' < t_1$，通过调整 $\vec{x}'$ 的值，使得 $S(t', \vec{x}')$ 取极小值，证明在这种情况下，粒子在这两段路径中速度相等。

解：

5

(a) 粒子的拉氏量为：$L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}^2|$，则有：

$$S = \int_{t_0}^{t_1} Ldt = \frac{m}{2}\frac{|\vec{x}' - \vec{x}_0|^2}{t' - t_0} + \frac{m}{2}\frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}'|^2}{t_1 - t'} \quad 10 \tag{15}$$

(b)

$$0 = \frac{\partial S}{\partial\vec{x}'} = m\frac{\vec{x}' - \vec{x}_0}{t' - t_0} - m\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}'}{t_1 - t'} \quad 10 \tag{16}$$

因此，两段路径粒子的速度相等。

4. **Noether 定理**。(25 分) 一维简谐振子 (SHO) 的拉格朗日量为:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \ . \tag{17}$$

(a) 证明在如下的双参数 (ϵ_1, ϵ_2) 变换下 (可以理解为两个独立的单参数变换),

$$x(t; \epsilon_1, \epsilon_2) = x + \epsilon_1 \sin\omega t + \epsilon_2 \cos\omega t \ , \tag{18}$$

系统具有对称性。

(b) 根据 Noether 定理, 得到系统的两个运动积分。

(c) 利用 (b) 的结果写出 SHO 运动方程的通解, 即谐振子的通解。

解:

(a) 在参数 ϵ_1 变换下:

$$\delta x = \sin\omega t, \quad \delta\dot{x} = \omega\cos\omega t. \tag{19}$$

3

则有:

$$\begin{aligned}\delta L &= m\dot{x}\delta\dot{x} - m\omega^2 x\delta x = m\dot{x}\omega\cos\omega t - m\omega^2 x\sin\omega t \\ &= \frac{d}{dt}\left[mx\omega\cos\omega t\right] \equiv \frac{dl_1}{dt}\end{aligned} \tag{20}$$

5

即系统在 $x \to x + \epsilon_1 \sin\omega t$ 的操作下, 拉氏量 "不变", 具有对称性。

同理, 在参数 ϵ_2 变换下:

$$\delta x = \cos\omega t, \quad \delta\dot{x} = -\omega\sin\omega t. \tag{21}$$

3

则有:

$$\begin{aligned}\delta L &= m\dot{x}\delta\dot{x} - m\omega^2 x\delta x = -m\dot{x}\omega\sin\omega t - m\omega^2 x\cos\omega t \\ &= \frac{d}{dt}\left[-mx\omega\sin\omega t\right] \equiv \frac{dl_2}{dt}\end{aligned} \tag{22}$$

5

即系统在 $x \to x + \epsilon_2 \cos\omega t$ 的操作下, 拉氏量 "不变", 具有对称性。

(b) 根据 Noether 定理, 两个守恒量 (Noether 荷) 为:

$$Q_1 = p\delta x - l_1 = m\dot{x}\sin\omega t - mx\omega\cos\omega t \tag{23}$$

2

$$Q_2 = p\delta x - l_2 = m\dot{x}\cos\omega t + mx\omega\sin\omega t \tag{24}$$

2

(c) 由上两式得到:

$$m\omega x(t) = -Q_1\cos\omega t + Q_2\sin\omega t, \quad m\dot{x}(t) = Q_1\sin\omega t + Q_2\cos\omega t. \tag{25}$$

上两式即为 SHO 的标准解。

5

《理论力学 A》(2023 年秋季)第二次期中考试参考答案

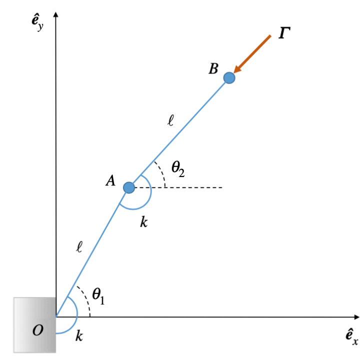

图 1: 第 1 题:双连杆问题。

1. **有策动力的阻尼振动(25 分)**。如图所示的轻质双连杆。双连杆的长度都为 l,质量可以忽略,O 点和 A 点通过弹性铰链连接,弹性铰链扭转系数都为 k,例如,O 点的扭转势能为 $k\theta_1^2/2$。A 和 B 两点各有一个质量为 m 的质点,它们都受到阻尼系数为 ζ 的阻尼力。B 点还受到了沿着杆方向的策动力 Γ,Γ 的大小不变。

   (a) 以 θ_1 和 θ_2 为广义坐标,写出系统的运动方程;

   (b) 在微振动近似下 $\theta_1, \theta_2 \ll 1$,求系统的振动频率。

   解:(a)

   A,B 粒子的坐标为:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\mathrm{A}} &= l(\cos\theta_1, \sin\theta_1) && (1) \\ \vec{r}_{\mathrm{B}} &= l(\cos\theta_1 + \cos\theta_2, \sin\theta_1 + \sin\theta_2) && (2) \end{aligned}$$

   A,B 粒子的速度为:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{\mathrm{A}} &= l(-\sin\theta_1, \cos\theta_1)\dot{\theta}_1 && (3) \\ \dot{\vec{r}}_{\mathrm{B}} &= l(-\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - \dot{\theta}_2\sin\theta_2, \dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2) && (4) \end{aligned}$$

   系统的动能为:…… 2 分

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right] \\ &= \frac{1}{2}ml^2\left[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right] && (5) \end{aligned}$$

   系统的势能为:…… 2 分

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k\theta_1^2 + \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}k(2\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2) && (6) \end{aligned}$$

系统的耗散函数 $\mathcal{F}$ 为:... ... 2 分

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{1}{2}\zeta(v_{\mathrm{A}}^2 + v_{\mathrm{B}}^2) \\ &= \frac{1}{2}\zeta l^2\left[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right] \qquad (7)\end{aligned}$$

广义力 Q_1, Q_2 分别为：... ... 2 分

$$Q_1 = \vec{F}_{\mathrm{B}}\cdot\frac{\partial\vec{r}_{\mathrm{B}}}{\partial\theta_1} = \Gamma l\sin(\theta_1-\theta_2) \qquad (8)$$

$$Q_2 = \vec{F}_{\mathrm{B}}\cdot\frac{\partial\vec{r}_{\mathrm{B}}}{\partial\theta_2} = 0 \qquad (9)$$

动力学方程：... ... 5 分

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial\theta_\alpha} = -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{\theta}_\alpha} + Q_\alpha, \quad (\alpha=1,2) \qquad (10)$$

因此有：... ... 4 分

$$\begin{aligned}&ml^2\left[2\ddot{\theta}_1 + \cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\right] &(11)\\ &+k(2\theta_1-\theta_2) + \zeta l^2\left[2\dot{\theta}_1 + \cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2\right] + \Gamma l\sin(\theta_2-\theta_1) = 0 &(12)\\ &ml^2\left[\ddot{\theta}_2 + \cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1 - \sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\right] &(13)\\ &+k(\theta_2-\theta_1) + \zeta l^2\left[\dot{\theta}_2 + \cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\right] = 0 &(14)\end{aligned}$$

(b)

在小角度振动近似下，... ... 4 分

$$ml^2\left[2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right] + k(2\theta_1-\theta_2) + \zeta l^2\left[2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] + \Gamma l(\theta_2-\theta_1) = 0 \qquad (15)$$

$$ml^2\left[\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\right] + k(\theta_2-\theta_1) + \zeta l^2\left[\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1\right] = 0 \qquad (16)$$

无量纲化上式，其中时间单位取：

$$[t] = \sqrt{\frac{ml^2}{k}} \qquad (17)$$

引入无量纲化的粘滞系数 λ 和外力 Σ:

$$\lambda \equiv \frac{\zeta l}{\sqrt{mk}}, \quad \Sigma \equiv \frac{\Gamma l}{k} \qquad (18)$$

则无量纲化的动力学方程为:

$$\left[2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right] + (2\theta_1-\theta_2) + \lambda\left[2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] + \Sigma(\theta_2-\theta_1) = 0 \qquad (19)$$

$$\left[\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\right] + (\theta_2-\theta_1) + \lambda\left[\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1\right] = 0 \qquad (20)$$

令：$\theta_1(t) = \theta_{10}e^{\omega t}, \theta_2(t) = \theta_{20}e^{\omega t}$ 代入上两式，得到：... ... 4 分

$$\begin{bmatrix} 2\omega^2 + 2 + 2\lambda\omega - \Sigma & \omega^2 - 1 + \lambda\omega + \Sigma \\ \omega^2 - 1 + \lambda\omega & \omega^2 + 1 + \lambda\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_{10}\\ \theta_{20}\end{bmatrix} = 0 \qquad (21)$$

系统存在非零解，要求上式中的行列式为零。解出满足条件的 ω 的实部为衰减因子，虚部为振动频率。

2. **泊松定理（25 分）**。二维谐振子的哈密顿量为：

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right). \tag{22}$$

(a) 证明：$A = p_x^2 + m^2\omega^2 x^2$ 和 $L = xp_y - yp_x$ 为运动积分；

(b) 利用泊松定理，证明：$B = p_x p_y + m^2\omega^2 xy$ 和 $C = p_x^2 - p_y^2 + m^2\omega^2\left(x^2 - y^2\right)$ 也是运动积分。

答：(a) ... ... 6+6 分

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= [A, H] = \frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial A}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x} \\
&= 2m\omega^2 x p_x - 2m\omega^2 x p_x = 0 \qquad (23) \\
\frac{dL}{dt} &= [L, H] = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \\
&= \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial L}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial L}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y} \\
&= \frac{1}{m}p_x p_y + m\omega^2 xy - \frac{1}{m}p_x p_y - m\omega^2 xy = 0 \qquad (24)
\end{aligned}$$

(b)... ... 6+7 分

$$\begin{aligned}
[A, L] &= = \frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial L}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial p_x} - \frac{\partial A}{\partial p_x}\frac{\partial L}{\partial x} \\
&= -2(p_x p_y + m^2\omega^2 xy) = -2B \qquad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B, L] &= \frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\frac{\partial L}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial B}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \\
&= \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial p_x} - \frac{\partial B}{\partial p_x}\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial p_y} - \frac{\partial B}{\partial p_y}\frac{\partial L}{\partial y} \\
&= m^2\omega^2(x^2 - y^2) + (p_x^2 - p_y^2) = C \qquad (26)
\end{aligned}$$

根据 Possion 定理，B, C 也为运动积分。

3. **正则变换（25 分）**。某系统的哈密顿量为：

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2}\left[(p - aq)^2 + \omega^2(q + bt)^2\right], \tag{27}$$

其中 a, b, ω 为常数。

(a) 证明如下的变换为正则变换，并求生成函数。

$$Q = q + bt, \quad P = p - aq + b. \tag{28}$$

(b) 求新的哈密顿量，$\tilde{H}(Q, P, t)$，并求解 $q(t), p(t)$；

(c) 证明下式为运动积分量：

$$R(q, p, t) = \frac{1}{2}(p - aq + b)^2 + \frac{\omega^2}{2}(q + bt)^2. \tag{29}$$

解：(a) ... ... 5+5 分

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{30}$$

选第二类生成函数：$F_2(q,P,t)$，则：

$$\delta F_2 = p\delta q + Q\delta P = (aq+P-b)\delta q + (q+bt)\delta P = \delta\left(\frac{1}{2}aq^2 + qP - bq + btP\right) \tag{31}$$

即：

$$F_2(q,P,t) = \frac{1}{2}aq^2 + qP - bq + btP \tag{32}$$

(b)... ... 10 分

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[(P-b)^2 + \omega^2 Q^2\right] + bP \\ &= \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 Q^2) + \frac{1}{2}b^2 \end{aligned} \tag{33}$$

新的哈密顿量就是谐振子哈密顿量。因此，

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega t + \phi_0), \quad P(t) = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \phi_0), \tag{34}$$

进一步得到：

$$\begin{aligned} q(t) &= Q - bt = Q_0\cos(\omega t + \phi_0) - bt \\ p(t) &= P + aQ - b(at+1) \\ &= -\omega Q_0\sin(\omega t + \phi_0) + aQ_0\cos(\omega t + \phi_0) - b(at+1) \end{aligned} \tag{35}$$

(c)... ... 5 分

$$R = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 Q^2) = \tilde{H} - \frac{1}{2}b^2 \tag{36}$$

$R(Q,P)$ 不显含时间 t，另有：$[R,\tilde{H}] = 0$，所以 R 为守恒量。

4. **哈密顿-雅可比方程（25 分）**。考察质量为 m，电荷为 e 的电荷在均匀磁场 $\vec{B}$ 中的运动。采用柱坐标（ρ,φ,z），其中磁场方向选为 z 方向，电磁势 $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$，即在直角坐标系中，$\vec{A} = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$。

   (a) 写出系统与时间无关的哈密顿-雅可比方程，即哈密顿特征函数 $W(\rho,\varphi,z)$ 满足的方程；

   (b) 通过分离变量法，求解哈密顿特征函数 $W(\rho,\varphi,z)$；

   (c) 通过 $W(\rho,\varphi,z)$，得到系统的运动方程，即 $\rho(t),\varphi(t),z(t)$ 的表达式，并说明运动轨迹为螺旋线或者沿着磁力线的匀速直线运动。

解：(a) 根据最小耦合原理，系统的哈密顿量为 (高斯单位制)：... ... 8 分

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \tag{37}$$

哈密顿-雅可比方程为:

$$\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla}W-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2=E \tag{38}$$

采用柱坐标，$\vec{A}=(0,B\rho/2,0)$，则:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\varphi}-\frac{eB}{2c}\rho\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]=E \tag{39}$$

(b)... ... 8 分

分量变量: $W(\rho,\varphi,z)=W_\rho(\rho)+W_\varphi(\varphi)+W_z(z)$，得到:

$$W_z(z) = \alpha_z z; \tag{40}$$

$$W_\varphi(\varphi) = \alpha_\varphi\varphi; \tag{41}$$

以及:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dW_\rho}{d\rho}\right)^2+\left(\frac{\alpha_\varphi}{\rho}-\frac{eB}{2c}\rho\right)^2+\alpha_z^2\right]=E \tag{42}$$

因此有:

$$W=\pm\int\sqrt{2mE-\alpha_z^2-\left(\frac{\alpha_\varphi}{\rho}-\frac{eB}{2c}\rho\right)^2}\,d\rho+\alpha_\varphi\varphi+\alpha_z z \tag{43}$$

(c) ... ... 9 分

$$\begin{aligned}\beta_\varphi&=\frac{\partial W}{\partial\alpha_\varphi}=\int\frac{-\left((\alpha_\varphi/\rho^2)-(eB/2c)\right)d\rho}{\sqrt{2mE-\alpha_z^2-((\alpha_\varphi/\rho)-(eB/2c)\rho)^2}}+\varphi,\\ \beta_z&=\frac{\partial W}{\partial\alpha_z}=-\alpha_z\int\frac{d\rho}{\sqrt{2mE-\alpha_z^2-((\alpha_\varphi/\rho)-(eB/2c)\rho)^2}}+z,\\ \beta_E+t&=\frac{\partial W}{\partial E}=m\int\frac{d\rho}{\sqrt{2mE-\alpha_z^2-((\alpha_\varphi/\rho)-(eB/2c)\rho)^2}}.\end{aligned} \tag{44}$$

为了得到第一个积分，分母尽量凑为 du 的形式，因此可令:

$$u=\frac{\alpha_\varphi}{\rho}+\frac{eB}{2c}\rho,\quad u^2=\left(\frac{\alpha_\varphi}{\rho}-\frac{eB}{2c}\rho\right)^2+2\frac{eB}{c}\alpha_\varphi,\quad du=-\left(\frac{\alpha_\varphi}{\rho^2}-\frac{eB}{2c}\right)d\rho \tag{45}$$

因此有:

$$\varphi-\beta_\varphi=\int\frac{-du}{\sqrt{2mE-\alpha_z^2+2(eB/c)\alpha_\varphi-u^2}}. \tag{46}$$

易得:

$$u=\frac{\alpha_\varphi}{\rho}+\frac{eB}{2c}\rho=\sqrt{2mE-\alpha_z^2+2\frac{eB}{c}\alpha_\varphi}\cos\left(\varphi-\beta_\varphi\right). \tag{47}$$

这是圆的方程。

如图所示:

$$R^2=\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\left(\varphi-\varphi_0\right) \tag{48}$$

其中 R 为圆的半径, ρ_0 为坐标原点到圆心的距离，φ_0 为圆心的方位角。将上式改写为:

$$\frac{\rho_0^2-R^2}{\rho}+\rho=2\rho_0\cos\left(\varphi-\varphi_0\right) \tag{49}$$

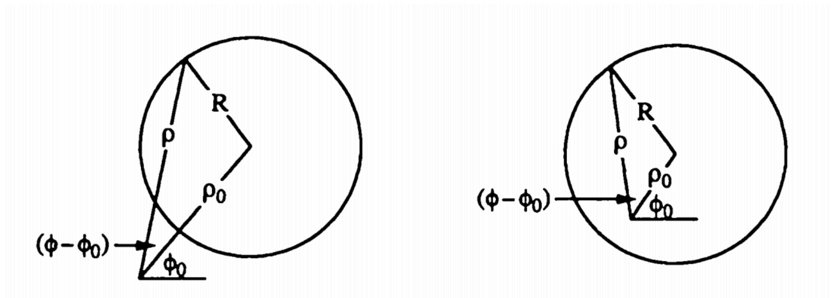

图 2: 第四题。如果 $\alpha_\varphi > 0$，则 $\rho_0 > R$；如果 $\alpha_\varphi < 0$，则 $\rho_0 < R$，其中圆的半径 $R = \frac{c}{eB}\sqrt{2mE - \alpha_z^2}$。

与式 (47) 对比，可得：

$$\alpha_\varphi = \frac{cB}{2c}\left(\rho_0^2 - R^2\right), \quad \sqrt{2mE - \alpha_z^2 + 2\frac{cB}{c}\alpha_\varphi} = \frac{eB}{c}\rho_0, \qquad \beta_\varphi = \varphi_0 \tag{50}$$

积分：

$$\begin{aligned}\beta_E + t &= m\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\left(2mE - \alpha_z^2\right)\rho^2 - \left(\alpha_\phi - (eB/2c)\rho^2\right)^2}} \\ &= \frac{mc}{cB}\int \frac{2\rho d\rho}{\sqrt{4R^2\rho^2 - \left(\rho_0^2 - R^2 - \rho^2\right)^2}} \\ &= \frac{mc}{cB}\int \frac{2\rho d\rho}{\sqrt{4R^2\rho_0^2 - \left(\rho_0^2 + R^2 - \rho^2\right)^2}}.\end{aligned} \tag{51}$$

令：$\rho_0^2 + R^2 - \rho^2 = 2\rho_0 R\cos\Omega$, 积分上式得到：

$$\Omega = \omega_c(t + \beta_E), \quad \omega_c = \frac{eB}{mc} \tag{52}$$

积分，得到：

$$z(t) = \beta_z + \frac{\alpha_z}{m}(t + \beta_E) \tag{53}$$

5. **作用变量和角变量理论（20 分）**。同上题。仅考虑电荷绕磁场的圆周运动，即电荷平行于磁场的运动速度 $v_z = 0$。因为哈密顿特征函数 $W(\rho, \varphi)$ 可以分量变量，易得系统的两个作用（量）变量 (I_ρ, I_φ) 的表达式。

   (a) 试写出系统能量作为 (I_ρ, I_φ) 的表达式，并求与 ρ, φ 相关的圆频率 $\omega_\rho, \omega_\varphi$;

   (b) 如果磁场随着时间缓慢增加：$B = B(t)$，试写出作用变量和角变量遵循的哈密顿正则方程。

答：(a)... ... 14 分

根据上题:

$$W = \int \sqrt{2mE - \left(\frac{L_z}{\rho} - \frac{eB}{2c}\rho\right)^2} d\rho + L_z\varphi \tag{54}$$

因此有:

$$p_\rho = \frac{\partial W}{\partial \rho} = \sqrt{2mE - \left(\frac{L_z}{\rho} - \frac{eB}{2c}\rho\right)^2} \tag{55}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = L_z \tag{56}$$

因此作用量 I_φ 为：

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = |L_z| \tag{57}$$

作用量 I_ρ 为：

$$\begin{aligned} I_\rho &= \frac{1}{\pi}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \sqrt{2mE - \left(\frac{L_z}{\rho} - \frac{eB}{2c}\rho\right)^2} d\rho \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \sqrt{2m\left(E + \omega_L L_z\right) - L_z^2/\rho^2 - m^2\omega_L^2\rho^2} d\rho \\ &\equiv \frac{1}{\pi}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \sqrt{R} d\rho \end{aligned} \tag{58}$$

其中：$\omega_L = eB/2mc = \omega_c/2$ 为回旋频率的一半。显然，$\rho_{\min}$ 和 $\rho_{\max}$ 是近心点和远心点，即 turnning points。经验告诉我们，开根号的项 $\sqrt{R}$ 在分母上，更容易得到积分值。因此将上式改写为：

$$\begin{aligned} I_\rho &= \frac{1}{\pi}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\sqrt{R}} \{ \\ & [m(E + \omega_L L_z) - m^2\omega_L^2\rho^2] \\ & +[m(E + \omega_L L_z) + m\omega_L|L_z|] \\ & - \left(L_z^2/\rho^2 + m\omega_L|L_z|\right)\} \end{aligned} \tag{59}$$

上式中的第一项可以凑成全微分：$d(\rho\sqrt{R}/2)$，在近心点和远心点 $R = 0$，因此该项积分值为零。

第二项的积分为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{m(E + \omega_L L_z) + m\omega_L|L_z|}{\sqrt{2m\left(E + \omega_L L_z\right)\rho^2 - L_z^2 - m^2\omega_L^2\rho^4}} d\rho^2 \\ = & \frac{m(E + \omega_L L_z) + m\omega_L|L_z|}{2\pi}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho^2}{\sqrt{2\left(E + \omega_L L_z\right)/m\omega_L^2\rho^2 - L_z^2/m^2\omega_L^2 - \rho^4}} \\ = & \frac{m(E + \omega_L L_z) + m\omega_L|L_z|}{2\pi}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho^2}{\sqrt{(\rho^2 - \rho_{\min}^2)(\rho_{\max}^2 - \rho^2)}} \\ = & \frac{m(E + \omega_L L_z) + m\omega_L|L_z|}{2} \end{aligned} \tag{60}$$

为了得到第三项积分值，令：

$$\begin{gathered} \eta = |L_z|/\rho + m\omega_L\rho, \quad d\eta = \left(|L_z|/\rho^2 + m\omega_L\right) d\rho, \\ \eta^2 = L_z^2/\rho^2 + m^2\omega_L^2\rho^2 - 2m|L_z|\omega_L. \end{gathered} \tag{61}$$

因此，第三项积分为：

$$-\frac{|L_z|}{\pi}\int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} \frac{d\eta}{\sqrt{2m(E + \omega_L L_z - \omega_L|L_z|) - \eta^2}} = -|L_z| \tag{62}$$

最终我们得到：

$$I_\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{\omega_L} + L_z - |L_z|\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{\omega_L} - 2|L_z|\right), \quad L_z < 0 \tag{63}$$

$$E = (2I_\rho + 2I_\varphi)\omega_L \tag{64}$$

$$\omega_\rho = \frac{\partial E}{\partial I_\rho} = 2\omega_L = \omega_c, \quad \omega_\phi = \frac{\partial E}{\partial I_\phi} = 2\omega_L = \omega_c \tag{65}$$

(b)... ... 6 分

$$\begin{aligned} F_2(\rho, \varphi, I_\rho, I_\varphi) &= \int^\rho \sqrt{2m\left(E + \omega_L L_z\right) - L_z^2/\rho^2 - m^2\omega_L^2\rho^2} d\rho - I_\varphi \varphi \\ &= \int^\rho \sqrt{2m\left(2I_\rho + I_\varphi\right)\omega_L - I_\varphi^2/\rho^2 - m^2\omega_L^2\rho^2} d\rho - I_\varphi \varphi \end{aligned} \tag{66}$$

角变量:

$$\psi_\rho = \frac{\partial F_2}{\partial I_\rho}, \quad \psi_\varphi = \frac{\partial F_2}{\partial I_\varphi} \tag{67}$$

新的哈密顿量为:

$$\tilde{H}(\psi_\rho, \psi_\varphi, I_\rho, I_\varphi) = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{68}$$

形式上写出新的正则方程:

$$\dot{\psi}_\rho = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I_\rho}, \quad \dot{I}_\rho = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_\rho} \tag{69}$$

$$\dot{\psi}_\varphi = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I_\varphi}, \quad \dot{I}_\varphi = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_\varphi} \tag{70}$$

中国科学技术大学物理学院

2023～2024 学年第一学期考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称：理论力学　　课程代码：

开课院系：物理学院　　考试形式：闭卷

姓　名：　　　　学　号：　　　　专　业：

题 号	一	二	三	四	五				总 分
得 分									

（装订线内不要答题）

一、(10 分) 力学系统的哈密顿函数是 $H=\frac{p^2}{2m}-\omega pq+m\omega^2q^2$（$m$，$\omega$均为已知常数），若进行线性变换：

$$Q=q-\frac{p}{m\omega},\quad P=m\omega q$$

1. 通过求第一类生成函数说明该变换是正则的；
2. 求变换后的系统新的哈密顿函数；
3. 应用新的哈密顿函数对应的正则方程结合初始条件 $P(t=0)=P_0$，$Q(t=0)=Q_0$ 求解 $P(t)$，$Q(t)$，再利用变换关系给出 $q(t)$。

答：

1. 由 $\delta F_1=p\delta q-P\delta Q=m\omega(q-Q)\delta q-m\omega q\delta Q=\delta m\omega\left(\frac{1}{2}q^2-qQ\right)$

可取 $F_1=m\omega\left(\frac{1}{2}q^2-qQ\right)$，因$pdq-PdQ$是全微分，故是正则变换。

2. $\tilde{H}=H=\frac{p^2}{2m}-\omega pq+m\omega^2q^2=\frac{1}{2m}(P-m\omega Q)^2-\omega(P-m\omega Q)\frac{P}{m\omega}+m\omega^2\left(\frac{P}{m\omega}\right)^2$

$$=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2$$

3. 正则方程：

$$\begin{cases}\dot{P}=-\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial Q}=-m\omega^2Q\\[2ex] \dot{Q}=\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial P}=\dfrac{P}{m}\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}Q=Q_0\cos(\omega t)+\dfrac{P_0}{m\omega}\sin(\omega t)\\ P=P_0\cos(\omega t)-Q_0m\omega\sin(\omega t)\end{cases}$$

回代得

$$q(t)=\frac{P}{m\omega}=\frac{P_0}{m\omega}\cos(\omega t)-Q_0\sin(\omega t)$$

二、(20 分)一个一维耗散体系由拉格朗日量$L=e^{\lambda t}(m\dot{q}^2/2-m\omega^2q^2/2)$描述。这里m是粒子质量，ω为角频率，q为广义坐标，λ为一常数。

1. 写出欧拉-拉格朗日方程；
2. 利用第二类生成函数$F_2(q,P,t)=e^{\lambda t/2}qP$，写出相应的正则变换；
3. 写出上述正则变换后的体系哈密顿量；
4. 利用哈密顿-雅可比方程求解体系的运动。仅讨论运动限于$\lambda<2\omega$的形式。

答：

1. 写出欧拉-拉格朗日方程，可以直接得到$\ddot{q}+\lambda\dot{q}+\omega^2q^2=0$。
2. 体系的哈密顿量为$H=e^{-\lambda t}\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2e^{\lambda t}$。利用题中的生成函数，得到正则变换为

$$p=\frac{\partial F_2}{\partial q}=e^{\lambda t/2}P\rightarrow P=pe^{-\lambda t/2}$$

$$Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}=e^{\lambda t/2}q\rightarrow q=Qe^{-\lambda t/2}$$

3. 正则变换后的哈密顿量为

$$\widetilde{H}=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2+\frac{\lambda}{2}QP=\tilde{E}=const.$$

4. 相应的哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial Q}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2+\frac{\lambda}{2}Q\frac{\partial W}{\partial Q}=\tilde{E}$$

定义$x=\sqrt{m\omega}Q$，$a=\frac{\lambda}{2\omega}$, $b=\sqrt{\frac{2\tilde{E}}{\omega}}$。其解为

$$\frac{dW}{dx}=-ax\pm\sqrt{b^2-(1-a^2)x^2}\rightarrow W=-\frac{ax^2}{2}+\int dx\sqrt{b^2-(1-a^2)x^2}$$

运动限于$\lambda<2\omega$, 即$a<1$，并因此定义$\gamma=\sqrt{1-a^2}$

$$S=-\tilde{E}t-\frac{ax^2}{2}+\int d\,x\sqrt{b(\tilde{E})^2-\gamma^2x^2}$$

因而求得

$$\beta=\frac{\partial S}{\partial\tilde{E}}=-t+\frac{1}{\omega}\int\frac{dx}{\sqrt{b^2-\gamma^2x^2}}$$

$$=-t+\frac{1}{\omega\gamma}\arcsin\frac{\gamma x}{b}$$

从上式反解出 $q=Ae^{-\lambda t/2}\sin\left(\Omega t+\delta\right)$，其运动为一阻尼振动。这里$\Omega=\sqrt{\omega^2-\frac{\lambda^2}{4}}$，A, δ为任意常数。

三、(25 分)根据泊松定理，可以将任一不显含时间t的物理量$f(q_\alpha,p_\alpha)$随时间的演化按时间泰勒展开为：

$$f(t)=f(t_0)+\dot{f}(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}\ddot{f}(t_0)(t-t_0)^2+\cdots$$

$$=f(t_0)+[f,H]_{t_0}(t-t_0)+\frac{1}{2}\left[[f,H],H\right]_{t_0}(t-t_0)^2+\cdots$$

一质量为m电荷为e的粒子在xy平面内运动，受到z方向的均匀磁场$\vec{B} = B\vec{e}_z$, 取磁场的矢量势为：$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$。利用以上泰勒展开的方法（Lie series）求解粒子的运动：x(t), y(t)。

答：

解：粒子的位矢为 $\vec{r} = x\hat{e_x} + y\hat{e_y}$，展开矢量势 $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} = \frac{B}{2}(-y\hat{e_x} + x\hat{e_y})$.

电磁场中粒子的哈密顿量为 $H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x + \frac{eB}{2c}y\right)^2 + \left(p_y - \frac{eB}{2c}x\right)^2 + p_z^2\right]$.

定义 $\omega = \frac{eB}{mc}$，上面的哈密顿量可以展开为

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{\omega}{2}\left(yp_x - xp_y\right) + \frac{1}{8}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

x 上的运动可以由泊松括号展开

$$x(t) = x_0 + [x, H]t + \frac{1}{2!}[[x, H], H]t^2 + \frac{1}{3!}[[[x, H], H], H]t^3 + \frac{1}{4!}[[[[x, H], H], H], H]t^4 + \cdots$$

为了方便计算，可以先求出

$[x, H] = \left[x, \frac{1}{2m}p_x^2\right] + \frac{\omega}{2}[x, yp_x] = \frac{p_x}{m} + \frac{\omega}{2}y = v_x$（或者：$\dot{x} = [x, H] = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} + \frac{\omega}{2}y$）

$$[y, H] = \left[y, \frac{1}{2m}p_y^2 - \frac{\omega}{2}xp_y\right] = \frac{p_y}{m} - \frac{\omega}{2}x = v_y$$

$[p_x, H] = \frac{1}{2}m\omega v_y$（或者：$[p_x, H] = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2}m\omega v_y$）

$$\left[p_y, H\right] = -\frac{1}{2}m\omega v_x$$

利用这些关系，可以计算

$$[[x, H], H] = \left[\frac{p_x}{m} + \frac{\omega}{2}y, H\right] = \frac{1}{m}[p_x, H] + \frac{\omega}{2}[y, H] = \omega v_y = \omega\left(\frac{p_y}{m} - \frac{\omega}{2}x\right)$$

$$[[[x, H], H], H] = \left[\omega\left(\frac{p_y}{m} - \frac{\omega}{2}x\right), H\right] = \omega\left(\frac{1}{m}\left[p_y, H\right] - \frac{\omega}{2}[x, H]\right) = -\omega^2 v_x = -\omega^2\left(\frac{p_x}{m} + \frac{\omega}{2}y\right)$$

$$[[[[x, H], H], H], H] = \left[-\omega^2\left(\frac{p_x}{m} + \frac{\omega}{2}y\right), H\right] = -\omega^3 v_y$$

x 方向运动为

$$x(t) = x_0 + [x, H]_0 t + \frac{1}{2!}\left[[x, H], H\right]_0 t^2 + \frac{1}{3!}\left[\left[[x, H], H\right], H\right]_0 t^3 + \frac{1}{4!}\left[\left[\left[[x, H], H\right], H\right], H\right]_0 t^4 + \cdots$$

$$= x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2!}\omega v_{y0}t^2 - \frac{1}{3!}\omega^2 v_{x0}t^3 - \frac{1}{4!}\omega^3 v_{y0}t^4 + \cdots$$

$$= x_0 + \frac{v_{x0}}{\omega}\left[(\omega t) - \frac{1}{3!}(\omega t)^3 + \cdots\right] + \left[\frac{v_{y0}}{\omega} - \frac{v_{y0}}{\omega}\left(1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} + \cdots\right)\right]$$

$$= x_0 + \frac{v_{x0}}{\omega}\sin\,\omega t + \frac{v_{y0}}{\omega} - \frac{v_{y0}}{\omega}\cos\,\omega t$$

类似的计算可以得到 $y(t) = y_0 + \frac{v_{y0}}{\omega}\sin\,\omega t - \frac{v_{x0}}{\omega} + \frac{v_{x0}}{\omega}\cos\,\omega t$ 。 粒子的运动轨迹为

$$\left(x - x_0 - \frac{v_{y0}}{\omega}\right)^2 + \left(y - y_0 + \frac{v_{x0}}{\omega}\right) = \frac{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}{\omega^2}$$

四、(25 分) 地球表面附近的抛物体的运动受到如下的哈密顿量的支配：

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)+mgy$$

其中 x 为横坐标，y 为纵坐标，p_x 和 p_y 是它们的共轭动量。

1. 建立与时间无关的哈密顿雅可比方程，就得到 $W(x,y)$ 的积分表达式；
2. 通过 $W(x,y)$ 求解 x 和 y 作为 t 的函数。

答:

1. 不含时的哈密顿-雅可比方程为:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]+mgy=E$$

尝试分离变量：

$$W(x,y)=W_x(x)+W_y(y)$$

代人不含时的哈密顿-雅可比方程，得到:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_x}{dx}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_y}{dy}\right)^2+mgy=E$$

分量变量:

$$\frac{dW_x}{dx}=\alpha$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_y}{dy}\right)^2+mgy=E-\frac{\alpha^2}{2m}$$

积分上两式，得到:

$$\begin{aligned}W_x(x)&=\alpha x\\ W_y(y)&=\int\sqrt{2m(E-\alpha^2/2m-mgy)}dy\\ &=-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2m}}{mg}(E-\alpha^2/2m-mgy)^{3/2}\end{aligned}$$

最终得到:

$$W(x,y)=\alpha x-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2m}}{mg}(E-\alpha^2/2m-mgy)^{3/2}$$

2. 根据生成函数 $S=-Et+W+A$ 得到:

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{\partial W}{\partial\alpha}=x+\frac{\alpha}{m^2g}\sqrt{2m(E-\alpha^2/2m-mgy)},\\ \beta_E+t&=\frac{\partial W}{\partial E}=-\frac{1}{mg}\sqrt{2m(E-\alpha^2/2m-mgy)},\\ p_x&=\frac{\partial W}{\partial x}=\alpha,\\ p_y&=\frac{\partial W}{\partial y}=\sqrt{2m(E-\alpha^2/2m-mgy)}.\end{aligned}$$

整理，得到:

$$\begin{aligned}x(t)&=\beta+(\alpha/m)(t+\beta_E),\\ y(t)&=\frac{(E-\alpha^2/2m)}{mg}-\frac{1}{2}g(t+\beta_E)^2,\\ p_x(t)&=-\alpha,\\ p_y(t)&=-mg(t+\beta_E).\end{aligned}$$

五、(20 分) 讨论考察在重力场中的对称陀螺的定点转动，即拉格朗日陀螺的运动。陀螺的重心高于定点，刚体的主转动惯量分别为: $I_1=I_2\neq I_3$ 。假设在 $t=0$ 时刻:

$$\theta=60^\circ,\ \dot\theta=0,\ \dot\varphi=2\left(\frac{mgl}{3I_1}\right)^{1/2},\ \dot\psi=(3I_1-I_3)\left(\frac{mgl}{3I_1I_3^2}\right)^{1/2}$$

其中 φ,θ,ψ 为刚体的三个欧拉角。

1. 试计算刚体运动的三个运动积分值： p_φ, p_ψ 以及能量 E；写出 θ 方向运动的等效势 $V_{\text{eff}}(\theta)$，并画出 $V_{\text{eff}}(\theta)$ 作为 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$ 函数的草图；定性分析刚体 θ 方向的运动；

2. 推导 θ 方向的运动方程为：

$$\dot{u}^2 = \frac{mgl}{I_1}(1-u)^2(2u-1)$$

其中 $u \equiv \cos\theta$ 。进一步证明该方程的解为：

$$\sec\theta = 1 + \text{sech}\left[\left(\frac{mgl}{I_1}\right)^{1/2} t\right]$$

提示：你可能用到的积分：

$$\int \frac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \text{const.} \quad = \text{sech}^{-1}(x) + \text{const.}$$

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + \text{const.} \quad = \text{sech}^{-1}(\cos\theta) + \text{const.}$$

答：

1. 两个正则动量是守恒的，将初始条件代人，得到：

$$p_\varphi = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = \sqrt{3}\sqrt{mglI_1}$$

$$p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = \sqrt{3}\sqrt{mglI_1}$$

刚体的能量为：

$$E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta)$$

其中：

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

将初始条件代人式（26），得到：

$$E' = mgl$$

$$E = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + V_{\text{eff}} \quad = mgl\left(1 + \frac{3I_1}{2I_3}\right)$$

无量纲化：

$$[E] = mgl,\ [t] = \sqrt{\frac{I_1}{mgl}},\ [L] = [p_\varphi] = [p_\psi] = \sqrt{mglI_1}$$

则无量化的等效势为：

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{\text{eff}}(\theta) &= \frac{(\tilde{p}_\varphi - \tilde{p}_\psi\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta} + \cos\theta \\ &= \frac{3(1-\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta} + \cos\theta \\ &= \frac{3(1-\cos\theta)}{2(1+\cos\theta)} + \cos\theta\end{aligned}$$

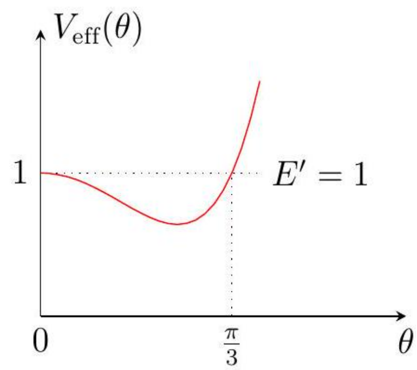

图 1：等效势图。当 $E' = 1$ 时，存在两个转折点：$\theta = 0$ 以及 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 。

如上图所示，当 $E' = 1$ 时，存在两个转折点：$\theta = 0$ 以及 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 。初始时刻 θ 位于转折点 $\theta = \frac{\pi}{3}$，之后 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 向另一个转折点 $\theta = 0$ 演化。在 $\theta = 0$ 附近，曲线比较平缓，系统达到 $\theta = 0$ 点需要的时间可能比较长。

2. 将 $E' = 1$ 代人式（26）对应的无量化的方程，得到：

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = 1 - \frac{3(1-\cos\theta)}{2(1+\cos\theta)} - \cos\theta$$

令：$u \equiv \cos\theta$，得到：

$$\dot{u}^2 = (1-u)^2(2u-1)$$

考察 $u = \frac{1}{2} \to 1$ 的演化，分量变量得到：

$$t = \int_{1/2}^{u} \frac{du}{(1-u)\sqrt{2u-1}}$$

令： $x = 1/u - 1$，得到：

$$t = \int_{1}^{x} \frac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sech}^{-1}(x)$$

即：

$$\sec\theta = 1 + \operatorname{sech}(t)$$

恢复量纲，得到：

$$\sec\theta = 1 + \operatorname{sech}\left[\left(\frac{mgl}{I_1}\right)^{1/2} t\right]$$

附录：可能用到的公式

欧拉-拉格朗日方程： $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$；**哈密顿正则方程：** $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

泊松括号的定义： $[f(q_\alpha, p_\alpha; t), g(q_\alpha, p_\alpha; t)] \equiv \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right)$

泊松定理： $\frac{d}{dt}A = \frac{\partial}{\partial t}A + [A, H]$

总角度速度$\vec{\omega}$在本体坐标系（随动惯性系）中的分量：

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\text{；}\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\text{；}\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

正则变换（第一类母函数）： $dF_1(q,Q,t) = pdq - PdQ + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt$

哈密顿-雅克比方程： $\frac{\partial}{\partial t}S(q_\alpha,t) + H\left(q_\alpha,\frac{\partial S}{\partial q_\alpha},t\right) = 0,\qquad \mathrm{S} = -\mathrm{Et} + \mathrm{W}(\mathrm{q}_\alpha) + \mathrm{A},\ H\left(q_\alpha,\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) = E$

在笛卡尔坐标系(x,y,z)，柱坐标系(r,ϕ,z)以及球坐标系(r,θ,ϕ)中两点之间的距离分别为：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dx^2 = dr^2 + r^2d\phi^2 + dz^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$