

# 《理论力学》讲义

袁业飞 编

中国科学技术大学天文学系



# 目录

<b>第一章 经典力学回顾</b>	<b>7</b>
1.1 力学简史 . . . . .	7
1.2 经典力学回顾 . . . . .	9
1.2.1 牛顿的绝对时空观 . . . . .	9
1.2.2 牛顿三定律 . . . . .	9
1.2.3 力学相对性原理 . . . . .	10
1.2.4 万有引力定律 . . . . .	10
1.2.5 惯性质量与引力质量 . . . . .	10
1.2.6 牛顿定律的适用范围 . . . . .	11
1.3 狭义相对论中的力学相对论原理 *	12
1.4 开普勒第一定律的几何证明 *	13
1.4.1 椭圆的三种定义 . . . . .	13
1.4.2 由圆构造椭圆 . . . . .	13
1.4.3 行星运动椭圆轨道的几何证明 . . . . .	14
<b>第二章 拉格朗日方程</b>	<b>17</b>
2.1 哈密顿原理 . . . . .	17
2.2 最小作用量原理: 历史借鉴 . . . . .	19
2.2.1 静力学中最小能量原理 . . . . .	19
2.2.2 最短时间原理: 费马原理 . . . . .	20
2.2.3 作用量与位相因子 . . . . .	21
2.3 约束和广义坐标 . . . . .	21
2.3.1 约束的分类 . . . . .	22
2.3.2 自由度与广义坐标 . . . . .	23
2.4 D'Alembert 原理与拉格朗日方程 . . . . .	23
2.4.1 虚位移 . . . . .	23
2.4.2 理想约束 . . . . .	24
2.4.3 虚功原理 . . . . .	24
2.4.4 达朗贝尔原理 . . . . .	26

2.4.5	虚功原理和达朗贝尔原理的应用	26
2.4.6	拉格朗日方程的推导	29
2.5	哈密顿原理与拉格朗日方程	32
2.5.1	泛函及其变分	32
2.5.2	泛函变分	32
2.5.3	泛函取极值的条件	32
2.5.4	欧拉方程	32
2.5.5	变分的例子	33
2.6	哈密顿原理和拉格朗日方程	37
2.6.1	哈密顿原理	37
2.6.2	拉格朗日方程	37
2.6.3	拉格朗日量的特性	37
2.6.4	一般情形的哈密顿原理	38
2.7	莫培督原理	38
2.8	拉格朗日力学: 例题	39
2.8.1	一维运动	39
2.8.2	二维向心力场中的运动	39
2.8.3	阿特伍德机 (The Atwood Machine)	40
2.8.4	盘被下落重物拖拉	41
2.8.5	滑动的楔劈上粒子的滑动	42
2.8.6	弹簧振子 + 单摆	43
2.8.7	双摆	44
2.8.8	啄	46
<b>第三章</b>	<b>拉格朗日量与 Noether 定理</b>	<b>49</b>
3.1	运动积分	49
3.2	正则 (广义) 动量和循环坐标	49
3.3	时空对称与守恒量	49
3.3.1	时间平移不变性与能量守恒	49
3.3.2	空间平移不变性与动量守恒	51
3.3.3	空间转动不变性与角动量守恒	51
3.4	对称性与 Noether 定理	52
3.4.1	时间平移不变性与能量守恒	53
3.4.2	空间平移不变性与动量守恒	54
3.4.3	空间转动不变性与角动量守恒	54
3.5	带电粒子在电磁场中的运动	57
3.5.1	分量形式	58

目录	5
3.5.2 矢量形式	59
3.5.3 四维协变的拉格朗日力学	59
<b>第四章 向心力场中的运动</b>	<b>61</b>
4.1 两体问题	61
4.2 运动方程	62
4.3 轨道微分方程	63
4.4 积分形式的轨道方程	64
4.5 Kepler 问题: 平方反比律	64
4.6 Laplace-Runge-Lenz 矢量	68
4.7 弯曲时空中检验粒子的运动	69
4.7.1 四维弯曲空间	69
4.7.2 弯曲空间中自由质点的运动	70
4.7.3 弯曲时空中检验粒子的运动: 弱场近似	71
4.7.4 从分析力学的角度讨论检验粒子在强引力场中的运动	71
4.7.5 径向运动方程	73
4.7.6 圆轨道运动	74
4.7.7 广义相对论的四大检验	75
4.7.8 讨论: 引力几何化	77
4.8 弹性碰撞	78
4.8.1 实验室参考系与质心参考系	78
4.8.2 L 系与 S 系中的散射角关系	79
4.8.3 单次散射	82
4.8.4 卢瑟福散射	84
<b>第五章 微振动</b>	<b>87</b>
5.1 简谐振动	87
5.1.1 一维振动	87
5.1.2 n 维振动	88
5.1.3 例题	90
5.2 受迫简谐振动	90
5.2.1 例题	92
5.3 阻尼简谐振动	92
5.4 简正模式	94
5.4.1 例题	96
5.5 参数共振	98

<b>第六章 哈密顿力学</b>	<b>101</b>
6.1 哈密顿正则方程 . . . . .	101
6.1.1 勒让德变换 . . . . .	101
6.1.2 哈密顿正则方程 . . . . .	102
6.1.3 修正的哈密顿原理与哈密顿正则方程 . . . . .	103
6.1.4 循环坐标与劳斯方程 . . . . .	105
6.1.5 例题 . . . . .	106
6.2 正则变换 . . . . .	108
6.2.1 正则变换 . . . . .	108
6.2.2 正则变换的生成函数 . . . . .	109
6.2.3 例题 . . . . .	109
6.2.4 正则变换的几何意义 . . . . .	113
6.3 泊松括号 . . . . .	114
6.3.1 泊松括号的定义 . . . . .	114
6.3.2 泊松括号的基本性质 . . . . .	114
6.3.3 泊松括号的应用 . . . . .	115
6.3.4 例题 . . . . .	117
6.4 哈密顿-雅可比方程 . . . . .	118
6.4.1 Hamilton-Jacobi equation . . . . .	118
6.4.2 S 的意义 . . . . .	118
6.4.3 哈密顿特征函数 . . . . .	119
6.4.4 H-J 方程求解: 分离变量法 . . . . .	122
6.4.5 转动黑洞时空中检验粒子的运动 * . . . . .	126
6.5 进阶论题 . . . . .	130
6.5.1 相空间与刘维尔定理 . . . . .	130
6.5.2 Virial 定理 . . . . .	133
6.5.3 波尔-索末菲量子化规则 . . . . .	134
6.5.4 定态薛定谔方程的建立 . . . . .	139
<b>第七章 刚体运动</b>	<b>141</b>
7.1 刚体运动描述 . . . . .	141
7.1.1 刚体运动自由度和运动分类 . . . . .	141
7.2 欧拉刚体运动学方程 . . . . .	143
7.2.1 欧拉角 . . . . .	143
7.2.2 刚体运动学方程 . . . . .	144
7.3 转动惯量张量和惯量主轴 . . . . .	145
7.3.1 转动惯量张量——刚体动能 . . . . .	145

7.3.2	转动惯量张量的性质 . . . . .	147
7.3.3	刚体角动量与转动惯量张量 . . . . .	151
7.3.4	惯量主轴 . . . . .	152
7.3.5	惯量椭球 . . . . .	154
7.4	欧拉动力学方程和应用 . . . . .	156
7.4.1	欧拉动力学方程的建立 . . . . .	156
7.4.2	自由刚体——欧拉陀螺的一般解 . . . . .	158
7.4.3	对称欧拉陀螺 . . . . .	160
7.4.4	地球纬度变迁角 . . . . .	162
7.4.5	转动的稳定性 ( $I_1 = I_2$ ) . . . . .	162
7.4.6	拉格朗日陀螺 . . . . .	163



# 序言

自从 2013 年秋季开始，我开始讲授物理学类及相关专业本科生基础课《理论力学》。中国科学技术大学理科专业《理论力学》课程主要包括分析力学的内容，大体相当于朗道的《力学》中的内容。如果从拉格朗日于 1788 年创立拉格朗日力学算起的话，分析力学已有 230 年的历史，发展基本成熟。从教学的角度来说，教学内容的编排也基本固化。因此在准备讲课内容之前，我给自己定了三条指导原则：第一、在教学过程中，尽量引入现代物理学中的新的思想和概念，站在一个更高的角度审视经典力学，梳理经典力学与现代物理的逻辑关系。例如，从量子论的费曼路径积分形式来理解最小作用量原理；对称性决定物理规律：如果利用对称性来构造作用量，发展新的物理理论；通过研究弯曲时空中检验粒子的运动，来阐述引力几何化的基本思想等等。第二、始终坚持物理思想、物理概念和物理图像第一，即使在分析力学中，也不要太过份强调分析工具的重要性。第三、教学内容不要添加很多研究生水平的内容，也就是不要超纲。在面对中国科大很多优秀的本科生的时候，更要照顾大多数初学者。

在将本讲义整理成 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 文件的过程中，我得到了如下同学和助教的帮助，他们分别是：史欣王月、王艺涵、袁铭，非常感谢他们无私的帮助！本讲义还将不断更新和修改，欢迎同学和老师们提出宝贵的修改意见。

袁业飞

2018 年 12 月于中国科大天文学系



# 第一章 经典力学回顾

经典力学的发展的主要阶段：

- 牛顿力学：受力分析-几何方法。代表人物：阿基米德、伽利略、斯蒂芬、开普勒、牛顿。
- 分析力学：能量变分-分析方法。代表人物：莱布尼茨、伯努利、达朗贝尔、莫培督、欧拉、拉格朗日、哈密顿、雅可比、泊松
- 现代分析力学：微分几何

## 1.1 力学简史

1. Aristotle, 亚里士多德 (公元前 387-公元前 322): 关于运动的分类
  - (a) 地面上物体的运动；力是维持物体运动的原因。
  - (b) 物体在空中下落的运动；属于天然运动。物体的重量越大，其趋向天然位置的倾向也越大，所以其下落的速度也越大。
  - (c) 天体的运动。天体的运动沿着最完美的曲线 - - 圆周，以最完美的速度 - - 匀速运动。
2. Euclid, 欧几里德 (公元前 330 年—前 275 年): 几何
3. Archimedes, 阿基米德 (公元前 287 年—公元前 212 年): 静力学, 递归推理
4. Ptolemy, 托勒密 (约 90 年—168 年): 地心说, 本轮和均轮, 新柏拉图主义
5. Fibonacci, 斐波那契 (1175 年-1250 年): 从北非引进代数和算术
6. Nicolaus Copernicus, 哥白尼 (1473-1531): 日心说
7. Tycho Brahe, 第谷 (1546-1601): 天文观测, 火星轨道 (大的偏心率)

8. Simon Stevin, 西蒙·斯蒂文 (1548/49? 年-1620 年): 引入 10 进制数; 力是矢量: 力的平行四边形法则
9. Descartes, 笛卡尔 (1596-1650): 将方程引入物理
10. Galileo Galilei, 伽利略 (1564-1642): 惯性定律, 望远镜: 伽利略发现了新宇宙
11. Johannes Kepler, 开普勒 (1571-1630): 开普勒三定律
12. Isaac Newton, 牛顿 (1642-1727): 《自然哲学的数学原理》(1686-87)。牛顿定律用于解释开普勒三定律。
13. Halley, 哈雷 (1656 1742): 根据引力定律, 计算了 1682 年大彗星 (哈雷彗星) 的轨道, 他还预言 1759 年这颗大彗星将再次出现!
14. 海王星的发现: Admas 和 Verrier 在 1845 年预言了海王星的存在, Berlin 天文台, Galle 于 1846 年 9 月 23 日发现!
15. 1859 年, 法国天文学家 Verrier 发现水星近日点进动的观测值, 新天体?
16. Albert Einstein, 爱因斯坦 (1879-1955): 广义相对论。1916 年 11 月引力场方程被建立。

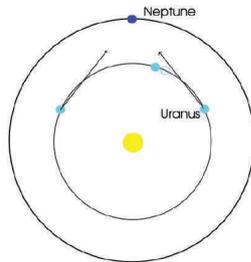


Figure 3.23 The orbit of Uranus in a frame of reference in which Neptune is stationary.

**小结:** 牛顿力学的发展模式: 实验与观测  $\rightarrow$  物理概念和经验定律  $\rightarrow$  第一性原理: 科学理论  $\rightarrow$  理论预言不断被证明是对的 (可证伪)  $\rightarrow$  理论预言与更高精度的实验/观测不符  $\rightarrow$  新的理论  $\rightarrow \dots$

分析力学: 牛顿力学的形式发展

1. 莱布尼茨 (Leibniz, 1646-1716, 德国): 提出活力 (相当于今动能的 2 倍) 概念; 提出活力的时间改变量 = 力做的功; 独立于牛顿创立微积分
2. 伯努力 (Johann Bernoulli, 1667-1748, 瑞士): 虚功原理; 最速下降线问题: 重力场, 光滑面, 小球从 A 点出发, 沿哪条路径最先到达 B?

3. 莫培督 (Maupertuis, 1698-1759, 法国): 提出作用量; 莫培督原理: 真实路径满足  $S$  极小。最小作用量原理之父。
4. 欧拉 (Euler, 1707-1783, 瑞士): 提出质点概念; 独立于莫培督获得了莫培督原理的数学表述; 有心力场的势函数; 刚体定点运动动力学; 创立变分法思想, 得到 E-L 方程。
5. 达朗贝尔 (d'Alembert, 1717-1783, 法国): 惯性力的引入; 达朗贝尔原理 (动静法)。
6. 拉格朗日 (Lagrange, 1736-1813, 法国): 创立变分法, 严格导出欧拉-拉格朗日方程; 创立分析力学。著有《分析力学》(1788 年出版, 全书没有出现一张图)。
7. 哈密顿 (Hamilton, 1805-1865, 爱尔兰): 哈密顿原理; 创立哈密顿力学。
8. 雅可比 (Jacobi, 1804-1851, 德国): 雅可比方程。
9. 泊松 (Poisson, 1781-1840, 法国): 泊松括号。

## 1.2 经典力学回顾

### 1.2.1 牛顿的绝对时空观

存在绝对空间和绝对时间 (真空: 以太?)。绝对时空的存在不依赖于物质的存在, 更不会受到宇宙中物质分布和运动的影响。惯性参考系: 相对绝对空间静止或者匀速直线运动的参考系。

惯性系的地位优越! 在狭义相对论中惯性系的优越地位保留! 但是, 如何找惯性系? - 惯性系根本就不存在!

在广义相对论中, 惯性系与非惯性系平等, 统称为参考系。

### 1.2.2 牛顿三定律

1. 惯性定律: 绝对空间的存在; 定义了惯性系; 惯性
2. 加速度定律: 动力学方程; 定义了惯性质量和力
3. 作用力和反作用力定律

物理理论两要素:

- 如何刻画物理系统的状态? 在经典力学中, 相空间中的一个点与力学系统的一个状态一一对应。

- 动力学方程：决定物理系统的状态如何随着时间演化（改变）。

### 1.2.3 力学相对性原理

力学规律在不同的惯性系之间形式不变。伽利略变换 ( $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ ):

$$r = r' + ut' \quad (1.1)$$

$$t = t' \quad (1.2)$$

其中  $u$  为两个惯性系之间的相对运动速度。牛顿第二定律在两个惯性系中一致:

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (1.3)$$

$$m' \frac{dv'}{dt'} = F' \quad (1.4)$$

其中  $m = m'$ ,  $F = F'$ 。

伽利略变换：牛顿绝对时空的对称性。

现代物理学中重要物理思想：**对称性决定物理规律!** 这一深刻思想来自爱因斯坦，狭义相对论的创立体现了这一点。

### 1.2.4 万有引力定律

引力是向心力，与引力质量成正比，与距离成平方反比；月亮受地球引力绕地球运动，与苹果下落受到的地球的引力相同。

地球-月亮系统基本参数。地球半径、月亮的轨道半径和月亮的轨道周期分别为：

$$R_E = 6371\text{km}, \quad R = 384000 \text{ km } 60R_E, \quad T_{\text{moon}} = 27.32\text{d} = 2.36 \times 10^6\text{s} \quad (1.5)$$

$$\frac{R_E}{R} = \frac{1}{60}, \quad \frac{g_{\text{moon}}}{g_E} = \frac{1}{3606} \simeq \left(\frac{R_E}{R}\right)^2 \quad (1.6)$$

物理学中的第一个统一理论：统一了亚里士多德的三种运动（地面的运动和天上的运动）。

### 1.2.5 惯性质量与引力质量

$$F = m_i a = m_g g \Rightarrow a = \frac{m_g}{m_i} g \quad (1.7)$$

牛顿单摆实验，以及厄缶（Eotvos, Roland, Baron von, 1848-1919）实验：惯性质量与引力质量相等。

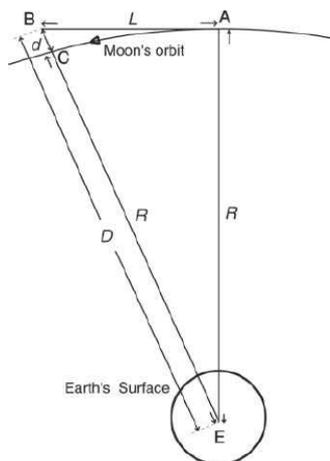


Figure 1.18 Geometry of the Earth-Moon system.

图 1.1: 地球-月亮系统：引力平方反比。

### 1.2.6 牛顿定律的适用范围

是一种超距相互作用；适用范围：宏观、低速

1. 高速运动：狭义相对论，洛伦兹变换， $v \sim c$
2. 强引力场：广义相对论。 $GM^2/R \sim Mc^2 \Rightarrow R_g \sim GM/c^2$
3. 微观尺度：量子力学，微观粒子没有轨道的概念  $\Delta x \Delta p \geq \hbar \Rightarrow \Delta x \geq \hbar/\Delta p$
4. 宇观尺度：广义相对论，引力以光速传播：宇宙年龄有限，宇宙存在视界！在宇宙大尺度上，牛顿力学失效！

以 Usain Bolt 为例。他的一些物理参数，体重： $m = 100\text{kg}$ ，身高： $L = 1.96\text{m} \simeq 2\text{m}$ ，百米速度： $v_{\max} = 10.37\text{m/s} \simeq 10\text{m/s}$ 。

分别计算得到：

- $v_{\max} \ll c$ ;
- $R_g \sim 1.5 \times 10^{-25}\text{m} \ll L$ ;
- $\Delta L \sim \hbar/\Delta p \sim 6.63 \times 10^{-37}\text{m} \ll L$

引力非常弱，但在大尺度上占主导。以两个质子为例，比较它们之间的电磁力和引力的大小之比为：

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2/4\pi\epsilon_0 r^2}{Gm_p^2/r^2} = \frac{\alpha}{\alpha_G} \simeq 10^{36}. \quad (1.8)$$

其中， $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137$  为精细常数，表征了电磁相互作用强度。 $\alpha_G = Gm_p^2/\hbar c \sim 10^{-38}$  是引力耦合常数，表征了引力相互作用强度。

### 1.3 狭义相对论中的力学相对论原理 \*

两个惯性系:  $\Sigma$  与  $\Sigma'$ , 其中  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  以速度  $v$  运动。

光速不变:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv c^2 d\tau^2 \\ ds'^2 &= -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \equiv -c^2 d\tau'^2 \\ ds^2 &= ds'^2 \end{aligned}$$

不失一般性, 不妨令  $\Sigma'$  沿着  $x$  轴方向运动, 则满足光速不变的坐标变换为 Lorentz 变换:

$$\begin{cases} t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \\ x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad (1.9)$$

其中  $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  为 Lorentz 因子。

改写为四维的形式:  $x^\mu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ , 则 Lorentz 变换 (线性变换, 整体变换: 仅与速度有关, 与时空点无关) 为:

$$x^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x'^\nu \quad (1.10)$$

其中 Lorentz 变换矩阵为:

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

下面我们根据力学的相对论性原理, 推导相对论性粒子的运动方程。假设  $\Sigma'$  为相对粒子瞬时静止的惯性系, 那么在该惯性系中, 牛顿力学适用:

$$m \frac{d}{dt'} \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \vec{f}' \quad (1.12)$$

改写为四维的形式:

$$m \frac{d}{d\tau'} \frac{dx'^\mu}{d\tau'} = f'^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (1.13)$$

与三维情况相比, 多出来一个方程 ( $\mu = 0$ )。为了该方程为恒等式, 我们要求四维力为:  $f'^\mu = (0, f', 0, 0)$ 。已选力的方向为  $x$  轴。那么经过 Lorentz 变换, 得到在实验室系  $\Sigma$  中四维力的形式:

$$f^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} f'^\nu = (\gamma f', \gamma \frac{v}{c} f', 0, 0) \quad (1.14)$$

于是，我们得到在  $\Sigma$  中相对论性版的牛顿第二定律为：

$$m \frac{d}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = f^\mu \quad (1.15)$$

当  $\mu = 0$  时，

$$m \frac{d}{d\tau} \frac{d(ct)}{d\tau} = \gamma \frac{v}{c} f' \quad (1.16)$$

可以改写为：

$$\frac{d}{dt} (\gamma mc^2) = \frac{d}{dt} E = v f' \quad (1.17)$$

该方程为能量方程。当  $\mu = 1$  时，

$$m \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} = \gamma f' \quad (1.18)$$

由此可见，四维的牛顿第二定律其实为能量-动量方程，三维的牛顿第二定律仅为动量方程。**对称性决定物理规律！**

## 1.4 开普勒第一定律的几何证明 \*

### 1.4.1 椭圆的三种定义

1. 到给定两个点（焦点）之间的距离为常数的曲线。
2. 从一个给定点（焦点）发的光经曲线反射到另一个给定点（焦点）的曲线。

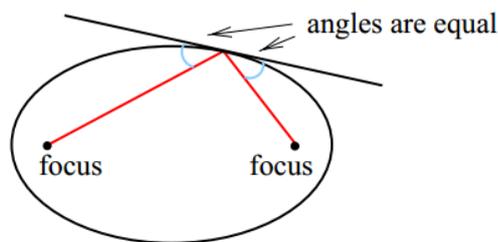


图 1.2: 椭圆的光学性质

3. 解析定义：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.19)$$

### 1.4.2 由圆构造椭圆

给定一个圆（圆心为  $O$ ， $B$  为圆上的一个活动点）和圆内的一个点  $A$ 。 $AB$  的中垂线与  $OB$  的交点就是新构造的椭圆上的一个点。沿着圆周移动  $B$  点就得到了一个椭圆。



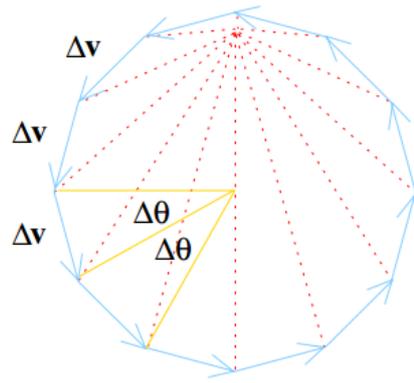


图 1.5: 速度图

到了一个新的椭圆（图中虚线表示）。容易证明，该椭圆就是行星的轨道！说明如下：椭圆的切线方向（ $PP'$ ）也就是行星轨道的速度方向显然垂直于直线  $AB$ ，而  $AB$  是经过 90 度旋转的行星的速度方向， $PP'$  与直线  $AB$  垂直等价于说  $PP'$  与速度图 1.5 中的速度方向平行，因此，该椭圆就是图 1.5 中速度场的积分曲线，最终证明了行星的轨道为椭圆。

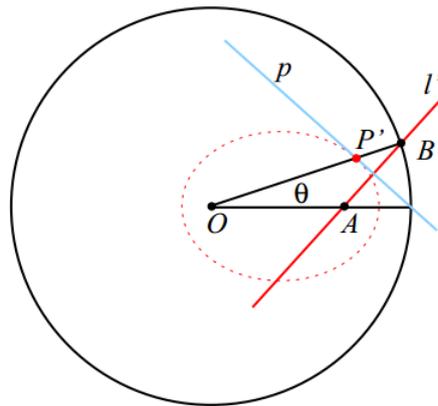


图 1.6: 由经过顺时针 90 度旋转的速度图（大圆）构造椭圆—行星的轨道。本质上就是由行星运动的速度场积分得到行星运动的轨道—速度场的积分曲线。

## 参考书

1. Prof. Masahiro Morii 的课件。<http://www.hepl.harvard.edu/~morii/phys151/lectures/>
2. 秦敢, 向守平, 《力学与理论力学 (下册)》, 中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书; 科学出版社, 2008
3. 金尚年, 马永利, 《理论力学》(第二版), 高等教育出版社, 2008 年
4. 朗道, 栗弗席兹, 《力学》(有中译本), 高等教育出版社, 2007
5. L. Hand and J. Finch, *Analytical Mechanics*, Cambridge, 1998
6. Goldstein, Poole, Safko, *Classical Mechanics*(3rd ed), Addison Wesley (高等教育出版社, 2002)
7. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (有中译本), 高等教育出版社, 2006

## 第二章 拉格朗日方程

### 2.1 哈密顿原理

以单质点为例子，最小作用量原理（哈密顿原理）表述为：

$$\delta S[\vec{q}(t)] = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

其中  $\vec{q}(t)$  为待求的质点的坐标随时间的演化。 $S$  为  $\vec{q}(t)$  的泛函。

牛顿力学中，求解质点运动方程，需要两个初始条件： $t_0 : q = q(t_0), \dot{q} = \dot{q}(t_0)$ 。也可以换成： $t_0 : q_0 = q(t_0), t_1 : q_1 = q(t_1)$ 。

定义拉格朗日量  $L$  (具有能量量纲)：

$$L \equiv T(\dot{q}(t)) - V(q(t)) \quad (2.2)$$

引入作用量  $S[q(t)]$ —泛函：

$$S[q] \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}, q, t) dt \quad (2.3)$$

对于单质点，它的作用量具体为：

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) dt \quad (2.4)$$

下面通过最小作用量原理得到质点的动力学方程。

假设  $q(t)$  为待求的质点的真实运动轨迹，则引入偏离该轨迹的假想的轨迹为：

$$q_\epsilon(t) = q(t) + \epsilon \delta q(t) \quad (2.5)$$

其中  $\epsilon$  为常数， $\delta q(t)$  为某任意时间  $t$  的函数，为了满足两个时间端点的初始和终点条件，对所有  $\delta q$  要求，

$$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0. \quad (2.6)$$

显然， $\epsilon$  逼近于零的过程就是变分的过程。根据最小作用量原理，我们要求：

$$\frac{d}{d\epsilon} S[q_\epsilon(t)]|_{\epsilon=0} = 0 \quad (2.7)$$

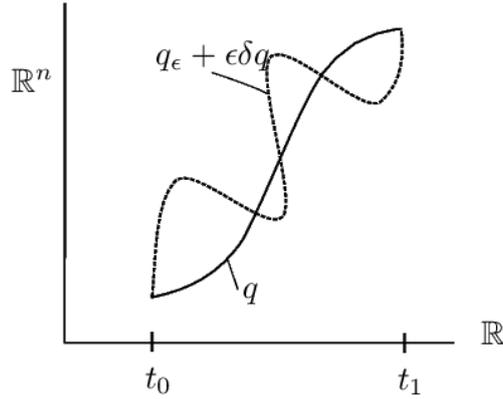


图 2.1: 质点挑选作用量最小的路径

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} S[q_\epsilon] \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m \dot{q}_\epsilon(t) \cdot \dot{q}_\epsilon(t) - V(q_\epsilon(t)) dt \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{d}{d\epsilon} \left[ \frac{1}{2} m \dot{q}_\epsilon(t) \cdot \dot{q}_\epsilon(t) - V(q_\epsilon(t)) \right] dt \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ m \dot{q}_\epsilon \cdot \frac{d}{d\epsilon} \dot{q}_\epsilon(t) - \nabla V(q_\epsilon(t)) \cdot \frac{d}{d\epsilon} q_\epsilon(t) \right] dt \Big|_{\epsilon=0} \end{aligned}$$

注意到  $dq_\epsilon/d\epsilon = \delta q(t)$ , 并且:

$$\frac{d}{d\epsilon} \dot{q}_\epsilon(t) = \frac{d}{d\epsilon} \frac{d}{dt} q_\epsilon(t) = \frac{d}{dt} \frac{d}{d\epsilon} q_\epsilon(t)$$

当我们令  $\epsilon = 0$  这个量就变为:

$$\frac{d}{dt} \delta q(t)$$

因此,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} S[q_\epsilon] \right|_{\epsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[ m \dot{q} \cdot \frac{d}{dt} \delta q(t) - \nabla V(q(t)) \cdot \delta q(t) \right] dt$$

分步积分, 并注意到边界条件:  $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$ :

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} S[q_\epsilon] \right|_{\epsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} [-m \ddot{q}(t) - \nabla V(q(t))] \cdot \delta q(t) dt$$

$\delta q$  任意, 因此:

$$-m \ddot{q}(t) - \nabla V(q(t)) = 0$$

因此, 轨迹  $q(t)$  是作用量  $S$  的极值点, 如果:

$$F = ma.$$

注意: 需要假设外力为保守力场。

## 2.2 最小作用量原理：历史借鉴

最小作用量原理：

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$$

思考：为什么作用量定义为  $\int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$ ？

由于能量守恒，如果动能占主导，则  $L = T - V$  大，如果势能占主导，则  $L$  小。动能表征正在发生的程度，而势能表征的是潜在的发生程度。 $L$  表征的是系统的活跃性。大自然希望  $L$  越小越好。

最小作用量原理解读：大自然尽可能懒惰！在  $L$  小的地方呆得时间长（动能小），在  $L$  大的地方呆得时间短（动能大）。

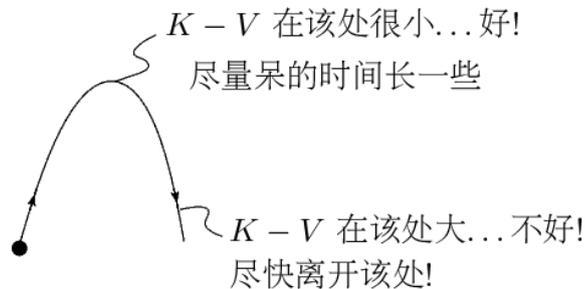


图 2.2: 质点取懒惰的运动：取作用量最小的路径

历史借鉴：静力学中的最小能量原理，以及光学中的最短时间原理。

### 2.2.1 静力学中最小能量原理

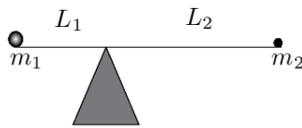


图 2.3: 虚功原理决定杠杆原理

阿基米德 (Archimedes)，静力学，杠杆原理：

$$m_1 L_1 = m_2 L_2.$$

D'Alembert 用他提出的“虚功原理”来理解上述结果：

$$dW_i = F_i dq_i$$

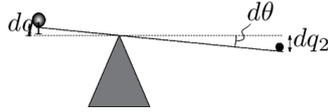


图 2.4: 虚功原理决定杠杆原理

引力做功:

$$dW_1 = m_1 g L_1 d\theta$$

同理:

$$dW_2 = -m_2 g L_2 d\theta$$

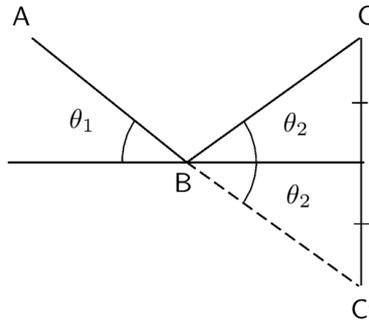
D'Alembert's 原理说: 系统平衡时, 则总虚功为零:  $dW = dW_1 + dW_2 = 0$  对所有的  $d\theta$ , 因此得到:

$$m_1 L_1 - m_2 L_2 = 0$$

### 2.2.2 最短时间原理: 费马原理

大自然偏爱极值: 光在真空中走直线。

镜面反射: 反射定律:  $\theta_1 = \theta_2$ ,



短程线: 选定  $A, C$  两点分别为光的入射点和出射点。  $C'$  为  $C$  的镜像点。镜面的反射点  $B$  满足  $AB + BC$  取极小值, 等价地说, 满足  $AB + BC'$  取极小值, 因此,  $A, B, C'$  在一条直线上, 即:  $\theta_1 = \theta_2$ 。

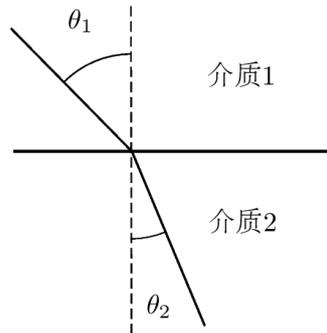
折射定律: Snell 及其后来者发现折射定律:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

介质中的光速:  $c/n$ , 根据费马原理, 光在介质中走的时间取极值, 而不是路程取极值。给定  $A, B$  两点, 光在介质中传播的总时间  $S$  为:

$$S[\vec{x}(t)] = \int_A^B \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_A^B n ds \quad (2.8)$$

根据费马原理, 要求:  $\delta S = 0$ 。费马原理统一了光的反射定律和折射定律。



### 2.2.3 作用量与位相因子

电子的杨氏双缝干涉实验无可辩驳地证明了电子（微观粒子）具有波动性。为了解释观测到的类似光的杨氏双缝干涉条纹，我们不得不接受这样一个事实：从电子枪发射出来的一个电子，经过两个缝同时穿过达到探测屏，一个电子经过两个不同的路径，产生了不同的位相，在探测屏处发生了干涉，这是电子与自身的干涉！

费曼建议：电子从电子枪处（A 点）跑到探测屏（B 点）的概率等其几率幅的模平方。而电子是同时从 A 点到 B 之间的所有可能的路径过去的，每个路径贡献一个几率幅，总的几率幅是所有路径几率幅的求和，即所谓的路径积分。费曼假设每个路径的几率是相等的，只是它们的位相不一样： $\phi[path] = S[path]/\hbar$ ，其中  $S[path]$  为不同路径所对应的经典力学里的作用量。因此，电子从 A 点到 B 点的总的几率幅就是如下的路径积分：

$$\phi[path] = \phi[path_1] + \phi[path_2] + \phi[path_3] + \dots = A \sum_{paths} e^{\frac{i}{\hbar} S[path]} \quad (2.9)$$

由于  $\hbar$  比较小，位相因子  $e^{\frac{i}{\hbar} S[path]}$  非常敏感地依赖于作用量  $S$ 。 $S$  非常小的变化导致位相因子剧烈地振荡，从而使得  $S$  稍有不同的近邻路径之间的几率幅相互抵消。而在  $S$  取极值

$$\delta S = 0 \quad (2.10)$$

的路径附近，它们的  $S$  基本相同，位相因子相对变化缓慢（这些路径之间作用量差小于  $\hbar$ ），从而导致几率幅基本同位相干涉相加。正如我们之前提到的，这就是哈密顿原理：给出经典路径。从路径积分量子力学的角度，电子是从所有可能的路径过去的，只不过在经典路径附近（ $\delta S \leq \hbar$ ）的路径贡献的几率最大。

## 2.3 约束和广义坐标

机械运动的分类：

1. 自由运动。坐标、速度完全取决于有明确形式的力和初始条件。

2. 有约束运动（非自由运动）。坐标和速度存在一些形式上不涉及任何力的限制关系—约束物体的坐标和速度（初始条件）之间存在的一些限制关系。例如，

$$f_m(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0, m = 1, 2, \dots, k \quad (2.11)$$

### 2.3.1 约束的分类

- 完整约束（几何约束），非完整约束（微分约束）
- 稳定约束，非稳定约束；
- 可解约束；不可解约束。

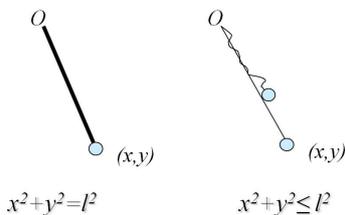


图 2.5: 可解约束与不可解约束

约束的类型：

1. 完整约束（几何约束）： $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0$ ，即仅与各质点坐标有关，而与各质点的速度无关。例如，质点被约束在约束在曲线或者曲面上运动，约束方程就是该曲线或者曲面。

(a) 稳定的几何约束： $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = 0$

(b) 不稳定的几何约束： $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0$

2. 非完整约束： $f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t) = 0$ ，且不可积分成完整约束。可以用拉格朗日未定乘子法处理。

微分形式的约束： $\sum c_i d\vec{r}_i + dt = 0$ 。

(a) 可积  $\Rightarrow$  完整约束

(b) 不可积

3. 可解约束： $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) \leq 0$  或  $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) \geq 0$  或双面可解

### 2.3.2 自由度与广义坐标

1. 自由度：系统独立变量数。

(a) 自由运动。 $N$  个质点共  $3N$  个独立参量描述，自由度为： $3N$ 。

(b) 约束运动。 $N$  个质点间存在  $k$  个完整约束。自由度为： $s = 3N - k$ 。

2. 广义坐标。如果可以用  $s$ (系统自由度) 个独立坐标来描述系统，这些独立变量称为广义坐标。例如：

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), i = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

对于可解约束，是将其视为不可解约束来处理，如果发生离开约束的情况，就放弃约束，增加一个独立坐标，重新处理。

位形空间：广义坐标张成的空间 ( $s$  维)。

广义坐标的选用：无数多种选取法！可以选为长度、角度（几何）、能量和角动量纲！选取遵循简洁的原则。

举例：双摆，斜靠墙的刚性杆

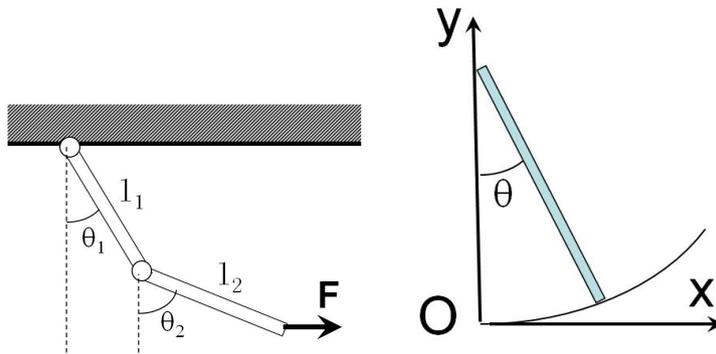


图 2.6: 广义坐标的选取

3. 广义速度： $\dot{q}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 。

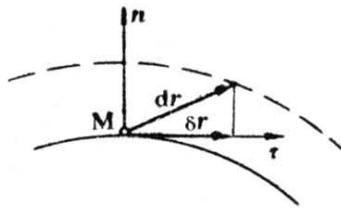
## 2.4 D'Alembert 原理与拉格朗日方程

### 2.4.1 虚位移

虚位移：假想系统的各质点瞬时发生了微小的符合约束条件的位移，称为虚位移。虚位移性质：1) 不需要时间；2) 不必实际发生，无限多种；满足约束条件。

符号表示：

1. 实位移:  $d\vec{r}$ , 全微分。
2. 虚位移:  $\delta\vec{r}$ , 等时变分:  $\delta t = 0$ 。



虚位移和实位移示意图

图 2.7: 虚位移与实位移的区别

虚位移（变分）与实位移（微分）的区别。

1. 虚位移是瞬时完成的 ( $dt = 0$ ) 或者说是假想的偏离真实物理位置的移动, 不需要时间; 而实位移需要一小段时间 ( $dt \neq 0$ )
2. 虚位移在满足约束的条件下可以任意选取, 并未真实发生, 而实位移一般与质点的真实运动相关。
3. 虚位移的方向无论是稳定约束还是非稳定约束, 都是沿着约束的切线方向, 而实位移在非稳定约束时, 不一定沿着约束的切线方向。(例如, 在膨胀着的气球上爬行的小虫)。

### 2.4.2 理想约束

理想约束满足:

$$\sum \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (2.13)$$

理想约束的例子:

1. 一物体在光滑曲面运动:  $\vec{R} \perp \delta\vec{r}$
2. 刚性约束: 约束力成对出现,  $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0$
3. 接触约束: 摩擦力? -当作主动力!

### 2.4.3 虚功原理

虚功原理: 在理想约束条件下, 主动力所做的总虚功为零。

虚功: 力在虚位移下所做的假想的功。

$$\delta W = \sum (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta\vec{r}_i \quad (2.14)$$

在虚位移过程中, 各个力保持不变!

虚功原理 (静力学): 所有质点都处在平衡态, 则:

$$F_i + R_i = 0 \quad (2.15)$$

$$\delta W = \sum (F_i + R_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.16)$$

对于理想约束:

$$\delta W = \sum F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.17)$$

此即虚功原理的数学表达式。

使用广义坐标, 方程可以化为:

$$\sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0 \quad (2.18)$$

由于广义坐标是独立变量, 因此有必要定义广义力

$$Q_\alpha \equiv \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \quad (2.19)$$

方程化为

$$\sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha = 0 \quad (2.20)$$

由于广义坐标的独立性, 可得

$$Q_\alpha = 0 \quad (2.21)$$

对于保守力体系,

$$F_i = -\nabla_i V \quad (2.22)$$

则

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (2.23)$$

对于保守力体系, 虚功原理可化为:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha = -\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = -\delta V = 0 \quad (2.24)$$

则系统的势能达到极值, 极小值时平衡是稳定的, 极大值时平衡是不稳定的。

### 2.4.4 达朗贝尔原理

达朗贝尔原理：主动力和惯性力所做的总虚功为零。

每一个质量的运动方程：

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (2.25)$$

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (2.26)$$

$$\sum (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.27)$$

代入理想约束条件：

$$\sum (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.28)$$

此即达朗贝尔原理。

### 2.4.5 虚功原理和达朗贝尔原理的应用

虚功原理举例：

例 1：双连杆的平衡问题

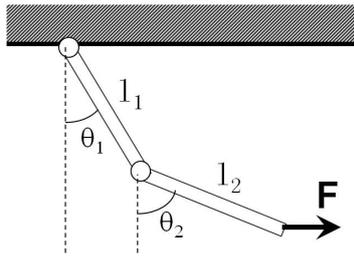


图 2.8: 虚功原理例题：双连杆的平衡问题

解：

$$\delta W = m_1 \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_2 + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_F \quad (2.29)$$

$$\vec{r}_1 = \frac{l_1}{2} \hat{e}_r(\theta_1),$$

$$\vec{r}_2 = l_1 \hat{e}_r(\theta_1) + \frac{l_2}{2} \hat{e}_r(\theta_2),$$

$$\vec{r}_F = l_1 \hat{e}_r(\theta_1) + l_2 \hat{e}_r(\theta_2)$$

$$\begin{aligned} \delta W &= -m_1 g l_1 \sin \theta_1 / 2 \delta \theta_1 - m_2 g l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 / 2 \delta \theta_2 \\ &\quad + F l_1 \cos \theta_1 \delta \theta_1 + F l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ &= \{-(m_1/2 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 + F l_1 \cos \theta_1\} \delta \theta_1 \\ &\quad + \{-m_2 g l_2 \sin \theta_2 / 2 + F l_2 \cos \theta_2\} \delta \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

在上面的计算中, 用到了  $\hat{e}_r$  和  $\hat{e}_\theta$  之间的如下关系:

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \hat{e}_\theta, \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\hat{e}_r \quad (2.31)$$

因为  $\delta\theta_1$  与  $\delta\theta_2$  独立, 得到:

$$-(m_1/2 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 + Fl_1 \cos \theta_1 = 0, \quad (2.32)$$

$$-m_2gl_2 \sin \theta_2/2 + Fl_2 \cos \theta_2 = 0 \quad (2.33)$$

进一步得到:

$$\tan \theta_1 = \frac{2F}{(m_1 + 2m_2)g}, \quad \tan \theta_2 = \frac{2F}{m_2g} \quad (2.34)$$

例 2: 虚功原理—圆弧中两球的平衡问题。

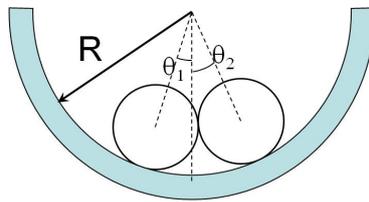


图 2.9: 虚功原理例题: 圆弧中两球的平衡问题

半径为  $R$  的固定圆弧上, 有两个同样大小但质量不同的匀质小球, 其半径为  $R/3$ , 求平衡时两球的位置。

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{2}{3}R\hat{e}_r(\theta_1) \\ \vec{r}_2 &= \frac{2}{3}R\hat{e}_r(\theta_2) \end{aligned}$$

其中  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/3$ 。则:

$$\delta W = \delta[-2/3Rm_1g \cos \theta_1 - 2/3Rm_2g \cos(\theta_1 - \pi/3)] = 0 \quad (2.35)$$

$$m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin(\theta_1 - \pi/3) = 0 \quad (2.36)$$

$$\cot \theta_1 = \sqrt{3}(2m_1/m_2 - 1) \quad (2.37)$$

这里三个球心正好构成正三角形。平衡时, 小球组的质心正好在铅垂线上, 是最低的。

例 3: 虚功原理 — 求约束面的形状。

解: 主动力为  $F = -mg\hat{e}_y$ , 虚位移:  $\delta r = \delta x_c\hat{e}_x + \delta y_c\hat{e}_y$ 。利用虚功原理得到:

$$y_c = \text{const.} = a/2 \quad (2.38)$$

其中  $a$  为杆子的长度。

$$x = a \sin \theta, y = a/2(1 - \cos \theta) \quad (2.39)$$

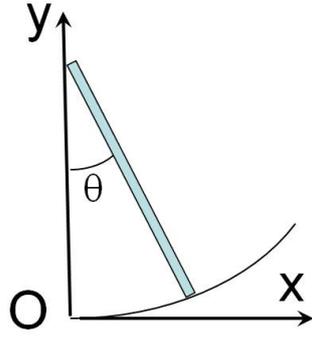


图 2.10: 虚功原理例题: 求约束面的形状

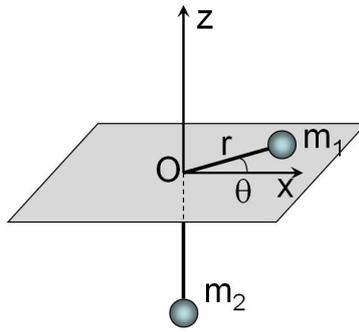


图 2.11: 达朗贝尔原理例题: 连线穿孔两小球的运动

$$(x/a)^2 + (2y/a - 1)^2 = 1 \quad (2.40)$$

例 4: 达朗贝尔原理 — 连线穿孔两小球的运动。

连线穿孔两小球的运动自由度为 2, 广义坐标选为:  $r, \theta$ 。

$$F_1 = -m_1 g \hat{e}_z, \quad F_2 = -m_2 g \hat{e}_z \quad (2.41)$$

$$r_1 = r \hat{e}_r, \quad r_2 = z \hat{e}_z = -(l - r) \hat{e}_z \quad (2.42)$$

$$\delta r_1 = \delta r \hat{e}_r + r \delta \theta \hat{e}_\theta, \quad \delta r_2 = \delta z \hat{e}_z = \delta r \hat{e}_z \quad (2.43)$$

$$\ddot{r}_1 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta, \quad \ddot{r}_2 = \ddot{r} \hat{e}_z \quad (2.44)$$

惯性力分别为:

$$-m_1 \ddot{r}_1 = -m_1 [(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta], \quad -m_2 \ddot{r}_2 = -m_2 \ddot{r} \hat{e}_z \quad (2.45)$$

代入到达朗贝尔方程:

$$0 = \{-m_1 g \hat{e}_r - m_1 [(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta]\} \cdot (\delta r \hat{e}_r + r \delta \theta \hat{e}_\theta) \\ + (-m_2 g \hat{e}_z - m_2 \ddot{r} \hat{e}_z) \cdot \delta r \hat{e}_z \quad (2.46)$$

$\delta r, \delta \theta$  独立、任意，因此，得到：

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1 r \dot{\theta}^2 + m_2 g = 0 \quad (2.47)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (2.48)$$

例 5：竖直圆环上质量的运动。

解法 1：

$$F = -mg\hat{e}_y, \quad \delta r = R\delta\theta\hat{e}_\theta, \quad -m\ddot{r} = -m(\ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y) \quad (2.49)$$

代入达朗贝尔方程：

$$[-mg\hat{e}_y - m(\ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y)] \cdot (R\delta\theta\hat{e}_\theta) = 0 \quad (2.50)$$

从而得到：

$$\ddot{x}y - \dot{y}x - gx = 0 \quad (2.51)$$

解法 2：选  $\theta$  为广义坐标：

$$-m\ddot{r} = -m(-R\dot{\theta}^2\hat{e}_r + R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta) \quad (2.52)$$

代入达朗贝尔方程，得：

$$R\ddot{\theta} + g \cos \theta = 0. \quad (2.53)$$

## 2.4.6 拉格朗日方程的推导

由达朗贝尔原理推导拉格朗日方程。

$$\delta r_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (2.54)$$

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \left[ \sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = 0 \quad (2.55)$$

$\delta q_\alpha$  独立，因此：

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.56)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.57)$$

其中，广义力  $Q_\alpha$ ：

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \quad (2.58)$$

左边改写为:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}) - \sum_{i=1}^N (m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\alpha}) \quad (2.59)$$

$$\dot{r}_i = \frac{d}{dt} r_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t) = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (2.60)$$

所以:

$$\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (2.61)$$

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t) \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (2.64)$$

因此, 有:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \quad (2.65)$$

最终, 得到拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (2.66)$$

对于保守系统:

$$Q_\alpha = - \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial V}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (2.67)$$

因此, 得到欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (2.68)$$

其中:

$$L = T - V = L(q, \dot{q}; t) \quad (2.69)$$

$L$  为系统的拉格朗日量, 或欧拉-拉格朗日函数。

对于保守力与非保守力共存,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (2.70)$$

其中  $Q_\alpha$  表征非保守力的部分。

拉格朗日力学的优势:

1.  $s$  自由度个二阶动力学方程；比牛顿力学简洁；抽象的位形空间讨论，坐标变换可能简化问题。
2. 牛顿力学分析对象是矢量方程（几何）；拉格朗日力学分析的对象是具有能量纲的拉格朗日量（分析）
3. 物理学各个领域中的普适性：能量是各种相互作用的普遍度量。
4. 构造新理论的起点：根据对称性，容易构造新的拉格朗日量，新物理！！

拉格朗日方程解法步骤：

1. 确定系统自由度
2. 选择广义坐标
3. 将各个质点的位置矢量用广义坐标表达
4. 计算各个质点的速度
5. 给出系统的总动能
6. 如果是保守系，给出势能，如果不是保守系，给出广义力
7. 相应得到拉格朗日方程组
8. 结合初始条件求解

例子：连线穿孔两小球的运动自由度为 2，广义坐标为： $r, \theta$ 。

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2, \quad V = m_2g(r - l) \quad (2.71)$$

代入欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}(m_1 + m_2)\dot{r} - m_1r\dot{\theta}^2 + m_2g = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \quad (2.73)$$

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \quad (2.74)$$

$$E = T + V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{h^2}{r^2} + m_2gr \quad (2.75)$$

## 2.5 哈密顿原理与拉格朗日方程

### 2.5.1 泛函及其变分

泛函 (函数的函数): 将函数映射到一个数值。

$$S : y(x) \rightarrow S[y(x)] \quad (2.76)$$

例子: 1) 作用量; 2) 竖直平面内两点之间物体下落所需要的时间; 3) 柔软的细绳围成的面积。

### 2.5.2 泛函变分

$J[y(x)]$  的变分, 等时变分:

$$\delta y(x) = y(x) - y_1(x) \quad (2.77)$$

边界条件:  $\delta y|_{x_1} = \delta y|_{x_2} = 0$ 。

泛函变分:

$$\delta J = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)] \quad (2.78)$$

$$\delta(J_1 + J_2) = \delta J_1 + \delta J_2 \quad (2.79)$$

$$\delta(J_1 J_2) = J_1 \delta J_2 + \delta J_1 J_2 \quad (2.80)$$

$$\delta \left( \frac{J_1}{J_2} \right) = \frac{J_2 \delta J_1 - J_1 \delta J_2}{J_2^2} \quad (2.81)$$

特别是:  $\delta(dy) = d(\delta y)$ , 即对等时变分, 变分和微分可交换次序。

### 2.5.3 泛函取极值的条件

$$\delta J|_{y=y_0(x)} = 0 \quad (2.82)$$

### 2.5.4 欧拉方程

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), \dot{y}(x), x) dx \quad (2.83)$$

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dx = 0 \quad (2.84)$$

因此, 得到单一宗量的欧拉方程:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (2.85)$$

## 2.5.5 变分的例子

最速下降线问题:

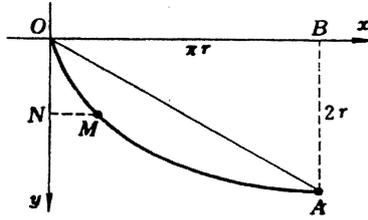


图 2.12: 最速下降线

上下两端点固定, 求哪种曲线的轨道能使质点从上端点由静止在最短时间内运动到下端点?

$$t_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}} dx \quad (2.86)$$

代入欧拉方程:

$$\frac{\ddot{y}}{\sqrt{2gy}(1 + \dot{y}^2)^3} + \frac{1}{\sqrt{8gy^3}(1 + \dot{y}^2)} = 0 \quad (2.87)$$

进一步化简:

$$\frac{2\ddot{y}}{1 + \dot{y}^2} + \frac{1}{y} = \frac{d\dot{y}^2/dy}{1 + \dot{y}^2} + \frac{1}{y} = 0 \quad (2.88)$$

$$(1 + \dot{y}^2)y = c_1, \quad dy\sqrt{\frac{y}{c_1 - y}} = dx \quad (2.89)$$

令:  $y = c_1 \sin^2 \theta$ , 最终解得:

$$x = c_1(\theta - \sin 2\theta/2) \quad (2.90)$$

$$y = c_1 \sin^2 \theta \quad (2.91)$$

旋轮线的一部分: 摆线。

### 悬链线方程

悬线的线质量密度 (单位长度的质量) 为:  $\rho$ 。则体系的势能为:

$$V = \int_{x_A}^{x_B} \rho g y ds = \rho g \int_{x_A}^{x_B} y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \quad (2.92)$$

保守系, 平衡时,  $\delta V = 0$ 。宗量为:  $f \equiv y\sqrt{1 + \dot{y}^2}$ 。

代入 E-L Eqs, 得到:

$$y\ddot{y} - (1 + \dot{y}^2) = 0 \quad (2.93)$$

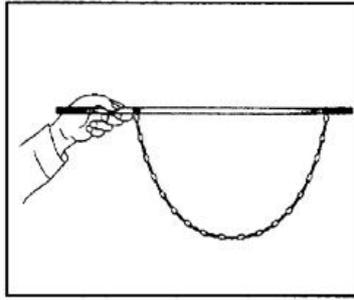


图 2.13: 悬链线

改写为:

$$\frac{2dy}{y} = \frac{dy^2}{1+y^2} \quad (2.94)$$

积分上式, 得到:

$$y^2 = c_1(1+y^2) \quad (2.95)$$

改写为:

$$\pm \frac{c_1 dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = dx \quad (2.96)$$

再积分, 得到:

$$\cosh \frac{y}{c_1} = \frac{1}{c-1}(x+c_2) \quad (2.97)$$

即:

$$y = c_1 \cosh \frac{x+c_2}{c_1} \quad (2.98)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad (2.99)$$

$$y = c_1 \cosh \frac{x}{c_1} \quad (2.100)$$

将  $(0, a)$  代入, 最终我们得到:

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (2.101)$$

链长:

$$l = \int_{-b}^b ds = \int_{-b}^b \sqrt{1+y'^2} dx = 2a \sinh \frac{b}{a} \quad (2.102)$$

原则上, 已知  $(l, b)$ , 我们可以得到积分常数  $a$ 。

### 光学中的费马原理

$$T = \int_0^L \frac{ds}{v} = \int_0^L \frac{n(x)}{c} \sqrt{1+y'^2} dx \quad (2.103)$$

$$f = n(x) \sqrt{1+y'^2} \quad (2.104)$$

代入 E-L Eqs, 得到:

$$\frac{n(x)\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = n(x) \sin \theta = \text{const.} \quad (2.105)$$

$$\dot{y} = \tan \theta \quad (2.106)$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.107)$$

### 球面上短程线问题

$$S = \int_A^B \sqrt{1 + \sin^2 \theta \phi'^2} d\theta, \quad \phi' \equiv \frac{d\phi}{d\theta} \quad (2.108)$$

$$f = f(\phi, \phi'; \theta) = \sqrt{1 + \sin^2 \theta \phi'^2} \quad (2.109)$$

代入 E-L 方程:

$$\frac{\sin^2 \theta \phi'}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \phi'^2}} = c_1 \quad (2.110)$$

如果我们选取在起点  $A$  位置处:  $\phi' = 0$ , 则:  $c_1 = 0$ 。从而得到:  $\phi = \text{const.}$ , 因此球面的短程线就是球面的大圆的一部分。

解析计算:

$$d\phi = \frac{c_1 d\theta}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - c_1^2}} \quad (2.111)$$

利用:

$$\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}} = -\arctan \frac{\cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}} (a^2 > 1) \quad (2.112)$$

(《常用积分表》, 科大出版社 (895) 公式)

$$\Rightarrow \phi = -\arctan \frac{\cos \theta}{\sqrt{\frac{1}{c_1^2} \sin^2 \theta - 1}} + c_2 \quad (2.113)$$

$$\Rightarrow \tan(c_2 - \phi) = \frac{c_1 \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - c_1^2}} \quad (2.114)$$

$$\Rightarrow c_3 \cdot \sin(c_2 - \phi) = c \tan \theta, \quad c_3 \equiv \frac{\sqrt{1 - c_1^2}}{c_1} \quad (2.115)$$

两边同乘以  $r \sin \theta$

$$c_3 \sin c_2 (r \sin \theta \cdot \cos \phi) - c_3 \cos c_2 \cdot (r \sin \theta \sin \phi) = r \cos \theta \quad (2.116)$$

$$x(c_3 \sin c_2) - y(c_3 \cos c_2) = z \quad (2.117)$$

过零点 (球心) 的平面。

### 带约束条件的变分问题

长度固定 ( $L$ ), 两端固定在  $x$  轴上, 与  $x$  轴围成的面积最大的曲线?

拉格朗日未定乘子法:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \quad (2.118)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx - L = 0 \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \int_{x_1}^{x_2} y dx + \lambda \left( \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx - L \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (y + \lambda \sqrt{1 + \dot{y}^2}) dx - \lambda L \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\delta S = 0 \quad (2.121)$$

$$f = y + \lambda \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (2.122)$$

$$\lambda \frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} - 1 = 0 \quad (2.123)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta, \Rightarrow x = \lambda \sin \theta + c_1 \quad (2.124)$$

$$\Rightarrow dy = \lambda \sin \theta d\theta \Rightarrow y = \lambda \cos \theta + c_2 \quad (2.125)$$

最终:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2 \quad (2.126)$$

$\lambda$  的含义:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\delta S}{\delta L} \quad (2.127)$$

### 球对称天体中的流体静力学平衡问题

球对称天体的总能量:

$$E[\rho, \phi] = \int_0^R d^3r \left[ \rho \epsilon + \rho \phi + \frac{(\nabla \phi)^2}{8\pi G} \right] \quad (2.128)$$

其中  $\rho$  为质量密度,  $\epsilon$  为流体单位质量的内能,  $\phi$  为流体单位质量的引力势能。上式中第一项为流体的总内能, 第二项为流体总势能 (流体与引力场相互作用能), 第三项为引力场的能量。给定天体的总质量:

$$M_0 = \int_0^R d^3r \rho(r) \quad (2.129)$$

求星体内部的质量密度分布和引力势能的分布。这是一个带约束条件的变分问题:

$$(\delta E)|_{M_0} = 0. \quad (2.130)$$

采用拉格朗日未定乘子法：

$$\delta E - \lambda \delta M_0 = 0 \quad (2.131)$$

分别对流体和引力场变分： $\delta\rho, \delta\phi$ ，得到：

$$\epsilon + \frac{p}{\rho} + \phi - \lambda = 0 \quad (2.132)$$

$$\rho - \frac{\nabla^2 \phi}{4\pi G} = 0 \quad (2.133)$$

不难看出，方程 (2.132) 为引力场的动力学方程：Poisson 方程。可以证明，方程 (2.133) 为流体静力学平衡方程： $\nabla p + \rho \nabla \phi = 0$  的积分方程。在星体的表面， $\rho = p = \epsilon = 0$ ，因此， $\lambda$  为星体表面的引力势能： $\lambda = \phi_s$ ，即：

$$\lambda = \frac{\delta E}{\delta M_0} = \phi_s \quad (2.134)$$

上式的物理意义是：如果某个星体已处于流体静力学平衡，如果再增加  $\Delta M_0$  的物质，当该星体重新达到新的流体静力学平衡之后释放的总能量居然非常简单：等于  $\Delta M_0$  的物质下落到星体表面释放的引力能。也就是说  $\Delta M_0$  落到星体表面之后到星体重新调整流体静力学平衡的过程中，星体的总能量是守恒的！星体由于质量增加而收缩所释放的引力能恰好等于星体内部流体内能的增加。

## 2.6 哈密顿原理和拉格朗日方程

### 2.6.1 哈密顿原理

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.135)$$

### 2.6.2 拉格朗日方程

由  $\delta S = 0$  易得：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (2.136)$$

### 2.6.3 拉格朗日量的特性

- $L$  的可加性：两个相互独立体系组成统一体系。

$$L_{\text{tot}} = L_A + L_B \quad (2.137)$$

- $L$  的非唯一性：两者之间可以差一个对时间的全微商。

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt} \quad (2.138)$$

$$S' = \int_1^2 L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_1^2 L(q, \dot{q}, t) dt + \int_1^2 \dot{f}(q, t) dt = S + f(q, t)|_{t_2} - f(q, t)|_{t_1} \quad (2.139)$$

$$\delta S' = \delta S \quad (2.140)$$

#### 2.6.4 一般情形的哈密顿原理

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha}) dt = 0. \quad (2.141)$$

得到:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha} \quad (2.142)$$

### 2.7 莫培督原理

莫培督 (Maupertuis, 1698-759, 法国)

作用量:

$$S = \int_A^B m v ds \quad (2.143)$$

$\delta S = 0$  得到真实路径。

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} [2T - (T + V)] dt \\ &= \delta \int_A^B \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{r}_i - E dt \right) \\ &= \delta \int_A^B \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{r}_i - E \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \\ &= \delta \int_{x_A}^{x_B} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{r}_i \end{aligned} \quad (2.144)$$

不是等时变分, 而是等能量变分: 虚位移过程中保持能量守恒。

$$\Delta \int_{x_A}^{x_B} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{r}_i = 0 \quad (2.145)$$

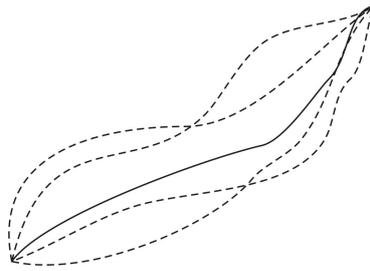


图 2.14: 莫培督原理

## 2.8 拉格朗日力学：例题

### 2.8.1 一维运动

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \quad (2.146)$$

正则动量：

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (2.147)$$

E-L 方程：运动方程。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} = F, \quad (2.148)$$

$$0 = \dot{x} \{ m\ddot{x} + V'(x) \} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \right\} \equiv \frac{dE}{dt} \quad (2.149)$$

能量守恒。

### 2.8.2 二维向心力场中的运动

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) - V(\rho) \quad (2.150)$$

其中： $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。由 E-L Eqs. 得到：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} &= 0 \Rightarrow m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - V'(\rho) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\rho\dot{\phi}^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.151)$$

角动量守恒：

$$p_\phi = m\rho\dot{\phi}^2 = \text{const.} \quad (2.152)$$

代入第一个 E-L 方程：

$$m\ddot{\rho} = \frac{p_\phi^2}{m\rho^3} - V'(\rho) \quad (2.153)$$

总能量:

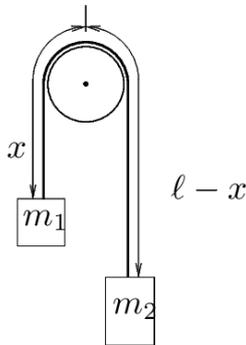
$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + V(\rho) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{p_\phi^2}{2m\rho^2} + V(\rho) \end{aligned} \quad (2.154)$$

容易验证, 能量守恒:

$$\frac{dE}{dt} = \left( m\ddot{\rho} - \frac{p_\phi^2}{m\rho^3} + V'(\rho) \right) \dot{\rho} = 0. \quad (2.155)$$

### 2.8.3 阿特伍德机 (The Atwood Machine)

无摩擦的滑轮两端悬挂质量分别为,  $m_1$  和  $m_2$ , 的物体: 得到:



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{d}{dt}(\ell - x)\right)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 \\ V &= -m_1gx - m_2g(\ell - x) \end{aligned}$$

因此

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_1gx + m_2g(\ell - x)$$

动量:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}$$

力:

$$F = \frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 - m_2)g$$

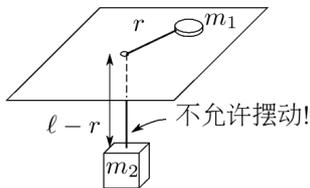
由 Euler-Lagrange 方程得到:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= F \\ (m_1 + m_2)\ddot{x} &= (m_1 - m_2)g \\ \ddot{x} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \equiv a \end{aligned}$$

其中:  $a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)g$ .

## 2.8.4 盘被下落重物拖拉

桌面没摩擦。



$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{d}{dt}(\ell - r)\right)^2$$

$$V = gm_2(r - \ell)$$

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + gm_2(\ell - r)$$

注意到  $\ell$  是常数，所以， $d/dt(\ell - r) = -\dot{r}$ 。

广义动量：

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2)\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1 r^2 \dot{\theta}.$$

广义力：

$$F_r = \frac{\partial L}{\partial r} = m_1 r \dot{\theta}^2 - gm_2$$

$$F_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (\theta \text{ is ignorable})$$

由 Euler-Lagrange 方程得到：

$$\dot{p}_r = F_r, \quad (m_1 + m_2)\ddot{r} = m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g$$

$$\dot{p}_\theta = 0, \quad p_\theta = m_1 r^2 \dot{\theta} = J = \text{a constant}.$$

从守恒方程中去掉  $\dot{\theta}$ ：

$$\dot{\theta} = \frac{J}{m_1 r^2}$$

因此：

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} = \frac{J^2}{m_1 r^3} - m_2 g$$

质量为  $m = m_1 + m_2$  物体受到的有效力：

$$F_r = \frac{J^2}{m_1 r^3} - m_2 g$$

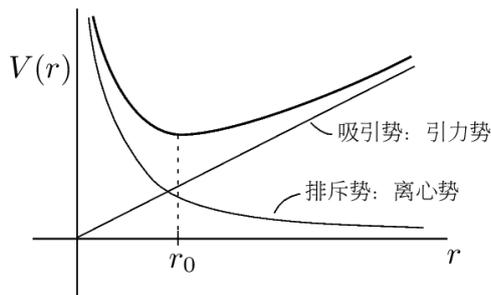


图 2.15: 有效势

相应的有效势:  $V(r)$  ( $dV/dr = -F_r$ ) . So integrate  $-F_r$  to find  $V(r)$ :

$$V(r) = \frac{J^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r$$

运动轨道讨论:

- 径向运动:  $\dot{\theta}(t=0) = 0$
- 圆运动:  $r = r_0$ , 势能  $V(r)$  极值处
- 非圆运动:

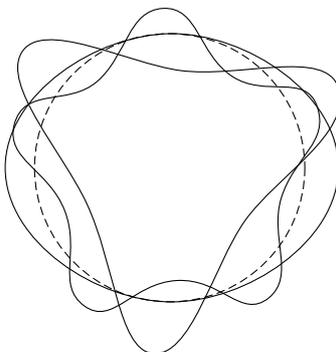


图 2.16: 运动轨道

### 2.8.5 滑动的楔劈上粒子的滑动

系统的动能:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{X} + \dot{x})^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{X}^2 + m \dot{X} \dot{x} + \frac{1}{2} m (1 + \tan^2 \alpha) \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (2.156)$$

系统的势能：

$$V = mgy = mgx \tan \alpha \quad (2.157)$$

系统的拉格朗日量：

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{X}^2 + m\dot{X}\dot{x} + \frac{1}{2}m(1 + \tan^2 \alpha)\dot{x}^2 - mgx \tan \alpha \quad (2.158)$$

由 E-L 方程得到：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} &= 0 = (M + m)\ddot{X} + m\ddot{x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 = m\ddot{X} + m(1 + \tan^2 \alpha)\ddot{x} = -mg \tan \alpha \end{aligned} \quad (2.159)$$

由第一式得到：

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M + m}\ddot{x} \quad (2.160)$$

代入第二式：

$$\ddot{x} = -\frac{(M + m)g \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad \ddot{X} = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (2.161)$$

### 2.8.6 弹簧振子 + 单摆

广义坐标：\$(x, \theta)\$。振子的坐标：\$(a + x, 0)\$。单摆的坐标：\$(x\_1, y\_1)\$，其中：

$$x_1 = a + x + l \sin \theta, \quad y_1 = -l \cos \theta \quad (2.162)$$

系统的动能：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left[ (\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta})^2 + (l \sin \theta \dot{\theta})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \dot{x}\dot{\theta}, \end{aligned} \quad (2.163)$$

系统的势能：

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}kx^2 - mgl \cos \theta \quad (2.164)$$

系统的拉格朗日量：

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \dot{x}\dot{\theta} - \frac{1}{2}kx^2 + mgl \cos \theta \quad (2.165)$$

正则动量：

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + ml \cos \theta \dot{\theta} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml \cos \theta \dot{x} + ml^2\dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.166)$$

正则力:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \\ F_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml \sin \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta \end{aligned} \quad (2.167)$$

动力学方程:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 &= -kx \\ ml \cos \theta \ddot{x} + ml^2 \ddot{\theta} &= -mgl \sin \theta \end{aligned} \quad (2.168)$$

**小振动: 线性振动:**  $\sin \theta \simeq \theta$ ,  $\cos \theta \simeq 1$ 。线性化的方程为:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kx &= 0 \\ ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.169)$$

无量纲化, 定义:

$$u \equiv \frac{x}{l}, \quad \alpha \equiv \frac{m}{M}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{M}, \quad \omega_1^2 \equiv \frac{g}{l} \quad (2.170)$$

得到无量纲化的方程:

$$\begin{aligned} (1+\alpha)\ddot{u} + \alpha\ddot{\theta} + \omega_0^2 u &= 0 \\ \ddot{u} + \ddot{\theta} + \omega_1^2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.171)$$

解的形式:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

代入上面线性化的方程, 得到:

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - (1+\alpha)\omega^2 & -\alpha\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_1^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上面  $2 \times 2$  的行列式为零, 得到振动频率:

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}(\omega_0^2 + (1+\alpha)\omega_1^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 2\alpha(\omega_0^2 + \omega_1^2)\omega_1^2} \quad (2.172)$$

## 2.8.7 双摆

广义坐标:  $(\theta_1, \theta_2)$ 。在笛卡尔坐标系中, 系统的动能和势能分别为:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (2.173)$$

$$V = m_1gy_1 + m_2gy_2 \quad (2.174)$$

坐标用广义坐标  $\{\theta_1, \theta_2\}$  表示： $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (2.175)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1, \quad y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (2.176)$$

笛卡尔坐标系中的速度分别为：

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \quad \dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (2.177)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (2.178)$$

因此，系统的动能和势能用广义坐标表示为：

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \{l_2^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2\} \quad (2.179)$$

$$V = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (2.180)$$

系统的拉格朗日量：

$$L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (2.181)$$

正则动量：

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (2.182)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \quad (2.183)$$

动力学方程：

$$\dot{p}_1 = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \\ = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad (2.184)$$

和

$$\dot{p}_2 = m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\ = -m_2 g l_2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \quad (2.185)$$

最终的动力学方程：

$$l_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 + g \sin \theta_1 = 0 \quad (2.186)$$

$$l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 - l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + g \sin \theta_2 = 0 \quad (2.187)$$

**小振动：线性振动：**线性化的运动方程

$$\ddot{\theta}_1 + \alpha \beta \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 \theta_1 = 0 \quad (2.188)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \beta \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 \theta_2 = 0 \quad (2.189)$$

无量纲化:

$$\alpha \equiv \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \beta \equiv \frac{l_2}{l_1}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l_1} \quad (2.190)$$

线性化的方程 Eq.2.188 加上 Eq.2.189 乘以待定系数  $r$ :

$$(1+r)\ddot{\theta}_1 + (\alpha+r)\beta\ddot{\theta}_2 + \omega_0^2(\theta_1 + r\theta_2) = 0 \quad (2.191)$$

我们要求  $\theta_2$  与  $\theta_1$  的比例系数等于  $\ddot{\theta}_2$  与  $\ddot{\theta}_1$  的比例系数:

$$\frac{(\alpha+r)\beta}{1+r} = r \Rightarrow r_{\pm} = \frac{1}{2}(\beta-1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1-\beta)^2 + 4\alpha\beta} \quad (2.192)$$

当时, 方程可以写为:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta_1 + r_{\pm}\theta_2) = -\frac{\omega_0^2}{1+r_{\pm}}(\theta_1 + r_{\pm}\theta_2) \quad (2.193)$$

定义简正模式:

$$\xi_{\pm} \equiv (\theta_1 + r_{\pm}\theta_2) \quad (2.194)$$

我们得到关于简正模式的方程:

$$\ddot{\xi}_{\pm} + \omega_{\pm}^2 \xi_{\pm} = 0 \quad (2.195)$$

其中简正频率为:

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+r_{\pm}}} \quad (2.196)$$

简正坐标, 简正频率, 方程解耦。

例如,  $l_1 = l_2 = l$ , 以及  $m_1 = m_2 = m$ , 我们得到:  $\alpha = 1/2$  和  $\beta = 1$ , 于是:

$$r_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \xi_{\pm} = \theta_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_2, \quad \omega_{\pm} = \sqrt{2 \mp \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.197)$$

### 2.8.8 啄

系统的动能:

$$\begin{aligned} T &= M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \\ &= \frac{1}{2}Ma^2\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (2.198)$$

系统的势能:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k(\delta X)^2 + \frac{1}{2}k(\delta Y)^2 \\ &= \frac{1}{2}ka^2\{(\sqrt{2}\cos\phi - 1)^2 + (\sqrt{2}\sin\phi - 1)^2\} \\ &= \frac{1}{2}ka^2\{3 - 2\sqrt{2}(\cos\phi + \sin\phi)\} \end{aligned} \quad (2.199)$$

系统的拉格朗日量：

$$L = T - V = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\phi}^2 + \sqrt{2}ka^2(\cos\phi + \sin\phi) + const \quad (2.200)$$

代入 E-L 方程：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} \Rightarrow Ma^2\ddot{\phi} = \sqrt{2}ka^2(\cos\phi - \sin\phi) \quad (2.201)$$

小振动：  $\phi = \pi/4 + \delta$

$$\ddot{\delta} + \omega_0^2 \sin\delta = 0 \quad (2.202)$$



# 第三章 拉格朗日量与 Noether 定理

## 3.1 运动积分

系统的自由度为:  $s$ , 动力学方程的个数:  $s$  个二阶常微分方程; 或  $2s$  个一阶常微分方程。需要  $2s$  个积分常数:  $C_1, C_2, \dots, C_{2s}$ 。

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(t; C_1, C_2, \dots, C_{2s}), \\ \dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(t; C_1, C_2, \dots, C_{2s}), \end{cases} \alpha = 1, 2, \dots, s$$

原则上, 可以求得:

$$C_i = C_i(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t), i = 1, 2, \dots, 2s \quad (3.1)$$

这些由  $q_\alpha$  和  $\dot{q}_\alpha$  组成的函数在运动过程中始终不变, 称之为“运动积分”(守恒量)。

## 3.2 正则 (广义) 动量和循环坐标

正则动量的定义:

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (3.2)$$

循环坐标:  $L$  中不显含广义坐标  $q_\alpha$ , 则称  $q_\alpha$  为循环坐标。由 E-L 方程易知, 与其共扼的正则动量守恒 (运动积分):

$$\dot{p}_\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (3.3)$$

因此:

$$p_\alpha = \text{const.} \quad (3.4)$$

## 3.3 时空对称与守恒量

### 3.3.1 时间平移不变性与能量守恒

力学系统具有时间平移不变性, 或具有时间的均匀性, 则该力学系统的拉格朗日量不显含时间, 因此:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

利用 E-L 方程:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

或者

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

引入守恒量  $H$  (具有能量量纲):

$$H \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (3.5)$$

$H$  为运动积分, 称之为系统的广义能量。

一个简单的例子:  $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$ , 则:

$$H = m\dot{q}^2 - \left[ \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \right] = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) = E \quad (3.6)$$

即, 哈密顿量就是系统的能量。

讨论:  $H=T+V$ ? (广义坐标中的动能表达式)

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

$$\dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (3.8)$$

因此,

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 = T_2 + T_1 + T_0. \quad (3.9)$$

其中:

$$\begin{aligned} T_2 &= A_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \\ T_1 &= B_\alpha \dot{q}_\alpha \\ T_0 &= C_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

哈密顿量为:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L = (2T_2 + T_1 + T_0) - (T_2 + T_1 + T_0) = T_2 - T_0 + V = \text{const.} \quad (3.11)$$

$H$  称之为广义能量。

对定常约束:  $\partial r_i / \partial t = 0$ , 所以:  $H = T + V = E = \text{const.}$  其中:  $T_1 = T_0 = 0$ , 即:  $T = T_2$ 。

### 3.3.2 空间平移不变性与动量守恒

力学系统具有空间平移不变性, 或具有空间的均匀性, 因此, 在等时变分条件 ( $\delta t = 0$ ) 下,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (3.12)$$

利用 E-L 方程, 改写为:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) \quad (3.13)$$

因为:

$$\dot{r}_i = \dot{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t) = \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (3.14)$$

所以:

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \quad (3.15)$$

于是:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \quad (3.16)$$

最后:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum_i \left( m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \dot{r}_i \cdot \delta r_i) \quad (3.17)$$

假设系统平移了一个无穷小的距离  $\epsilon$ , 而拉格朗日量不变。由于  $\epsilon$  与时间无关, 所以:

$$\delta L = \left( \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{r}_i \right) \cdot \epsilon = 0 \quad (3.18)$$

由于  $\epsilon$  的任意性, 我们得到:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{r}_i = 0 \quad (3.19)$$

所以封闭体系的总动量  $P$

$$P = \sum m_i \dot{r}_i = \text{const.} \quad (3.20)$$

为运动积分, 即动量守恒。

### 3.3.3 空间转动不变性与角动量守恒

力学系统具有空间转动不变性, 或空间具有各项同性, 当体系转动无限小的角度  $\delta\phi$  时, 第  $i$  个质点的位置移动为:

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta\phi \times \mathbf{r}_i \quad (3.21)$$

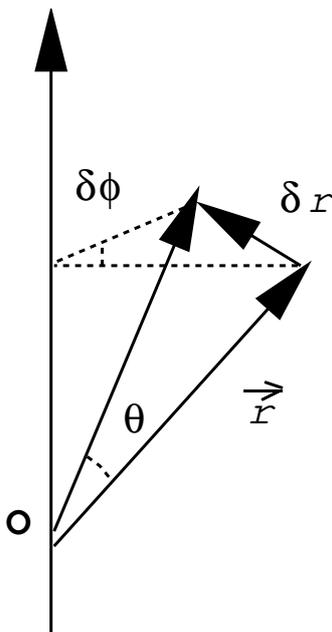


图 3.1: 空间转动不变性与角动量守恒

代入:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \dot{r}_i \cdot \delta r_i) = \frac{d}{dt} \sum_i [m_i \dot{r}_i \cdot (\delta \phi \times r_i)] = \delta \phi \cdot \frac{d}{dt} \sum_i (r_i \times m_i \dot{r}_i) = \delta \phi \cdot \frac{dJ}{dt} \quad (3.22)$$

由于  $\delta \phi$  的任意性, 得到:

$$J = \sum_i r_i \times m_i \dot{r}_i = \text{const.} \quad (3.23)$$

### 3.4 对称性与 Noether 定理

下面定义拉格朗日系统  $L$  的对称性, 即  $L$  存在单参数对称性变换群。映射  $F$  的定义如下:

$$F : \mathbb{R} \times \Gamma \longrightarrow \Gamma \\ (\epsilon, q) \longmapsto q_\epsilon, \quad \text{with } q_0 = q$$

(通俗地说, 映射  $F$  将一个单参数  $\epsilon$  和位形空间中的函数  $q$  映射到一个新的位形空间中的函数  $q_\epsilon$ 。)

如果存在一个函数  $\ell(q, \dot{q})$  满足:

$$\delta L = \frac{d\ell}{dt}$$

也就是说,

$$\delta L \equiv \frac{d}{d\epsilon} L(q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t)) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} \ell(q(t), \dot{q}(t))$$

则称  $F$  为拉格朗日系统  $L$  的单参数对称性变换群, 或者说, 拉格朗日系统  $L$  具有某种对称性  $F$ 。

**评注:**

最简单的情况:  $\delta L = 0$ , 也就是说: 在变换 ( $q \mapsto q_\epsilon$ ) 下, 拉格朗日量不变, 即:  $L$  明显具有某种对称性。实际上  $\delta L = \frac{d}{dt}\ell$  是系统具有某种对称性更一般的表述。

### Noether 定理

Noether 定理: 假设  $F$  是拉格朗日系统  $L(L: TQ \rightarrow \mathbb{R})$  的单参数对称群, 于是,

$$p_\alpha \delta q_\alpha - \ell = \text{const.}$$

即  $p_\alpha \delta q_\alpha - \ell$  是守恒量 (运动积分)。

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial q_\alpha} L(q_\epsilon, \dot{q}_\epsilon) \frac{d}{d\epsilon} q_\epsilon^\alpha(t) \Big|_{\epsilon=0} - \ell(q(t), \dot{q}(t)) \right] = 0$$

证明:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (p_\alpha \delta q^\alpha - \ell) &= \dot{p}_\alpha \delta q^\alpha + p_\alpha \delta \dot{q}^\alpha - \frac{d}{dt} \ell \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha - \delta L \\ &= \delta L - \delta L = 0. \end{aligned}$$

**评注:** 知道系统存在某个对称性  $F$ , 得到系统一个对应的守恒量:  $p_\alpha \delta q_\alpha - \ell$ , 也称之为守恒荷。即: 动力学系统存在连续对称性  $\leftrightarrow$  系统存在守恒荷。

#### 3.4.1 时间平移不变性与能量守恒

任何拉格朗日系统,  $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们有单参数的对称群:

$$q_\epsilon(t) = q(t + \epsilon)$$

因为:

$$\begin{aligned} \delta L &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{d\epsilon} L(q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t)) \Big|_{\epsilon=0} = \dot{L} \\ \delta q_\alpha &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{d\epsilon} q_\epsilon^\alpha(t) \Big|_{\epsilon=0} = \dot{q}_\alpha \end{aligned}$$

我们得到总能量, 或者 Hamiltonian,

$$H = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L \tag{3.24}$$

例如:  $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$ . 系统有:

$$p_\alpha \dot{q}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha = m \dot{q}^2 = 2T$$

于是:

$$H = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L = 2T - (T - V) = T + V$$

### 3.4.2 空间平移不变性与动量守恒

对一个自由粒子:  $L = T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ . 存在空间平移不变性。对任何速度:  $v \in \mathbb{R}^3$ , 我们进行平移操作:

$$q_\epsilon(t) = q(t) + \epsilon v$$

则:

$$\delta q = \left. \frac{\partial q_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = v \quad (3.25)$$

另外,  $\dot{q}_\epsilon(t) = \dot{q}(t)$ , 所以:  $\delta \dot{q} = 0$ . 因为对于自由粒子, 拉格朗日量仅仅是  $\dot{q}$  的函数, 所以:

$$\delta L = 0$$

于是, 我们得到  $v$  方向的动量为守恒量:

$$p_i \delta q^i = m \dot{q}_i v^i = m \dot{q} \cdot v$$

与正则动量的区别?  $\partial L / \partial \dot{q}^i = p_i$  在这里两者一致!

因为  $v$  任意, 所以:  $m\dot{q}$  守恒。

### 3.4.3 空间转动不变性与角动量守恒

自由粒子具有转动对称性。考虑:  $X \in SO(3)$  (这是一个反对称的  $3 \times 3$  矩阵), 给出如下的对称群:

$$q_\epsilon(t) = e^{\epsilon X} q(t)$$

因此

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i = m \dot{q}_i \delta \dot{q}^i$$

这里  $q_i$  可以忽略, 以及  $\partial L / \partial q^i = 0$ , 以及:  $\partial L / \partial \dot{q}^i = p_i$ , 于是:

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}^i &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \dot{q}_\epsilon^i \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \frac{d}{dt} \left( e^{\epsilon X} q \right) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{dt} X q \\ &= X \dot{q} \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\delta L &= m\dot{q}_i X_j^i \dot{q}^j \\ &= m\dot{\mathbf{q}} \cdot (X \dot{\mathbf{q}}) \\ &= 0\end{aligned}$$

最后一步利用了  $X$  的反对称性。于是我们得到一个守恒量： $X$  方向的角动量。

我们有,

$$p_i \delta q^i = m\dot{q}_i \cdot (X q)^i$$

( $\delta q^i = X q$  以及  $\delta \dot{q}^i = X \dot{q}$ ), 或者, 如果  $X$  除了在  $ij$  和  $ji$  为  $\pm 1$ , 其它分量为零。于是, 我们得到:

$$m(\dot{q}_i q^j - \dot{q}_j q^i)$$

“角动量的  $ij$  分量”。如果  $n = 3$  我们得到:

$$m\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q}$$

以系统沿  $z$  轴转动为例:

$$R_z(\epsilon) = \begin{bmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) & 0 \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \exp(\epsilon X)$$

其中:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例 1、(单参数变换群)

2-dim :

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r)\end{aligned}$$

$\vec{q} \rightarrow \vec{q}_\epsilon$  :

$$r_\epsilon = r$$

$$\phi_\epsilon = \phi + \epsilon\delta\phi$$

$\epsilon = 0$ ,  $r_\epsilon = r$  为恒等变换, 所以  $\delta L = \left. \frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$  ( $L$  不显含  $\phi$  并且  $r_\epsilon = r$ )

守恒荷:

$$\begin{aligned}Q &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \frac{\partial r_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \\ &= mr^2\dot{\phi}\delta\phi = \text{const}\end{aligned}$$

因为  $\delta\phi$  为任意“给定”操作，所以

$$mr^2\dot{\phi} \equiv J = \text{const}$$

在笛卡尔坐标系中讨论：

$$\begin{aligned} x_\epsilon &= x\cos(\epsilon) - y\sin(\epsilon) \\ y_\epsilon &= x\sin(\epsilon) + y\cos(\epsilon) \\ \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} &= -y_\epsilon, \quad \frac{\partial y_\epsilon}{\partial \epsilon} = x_\epsilon \end{aligned}$$

守恒荷：

$$\begin{aligned} Q &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \\ &= -m\dot{x}y_\epsilon \Big|_{\epsilon=0} + m\dot{y}y_\epsilon \Big|_{\epsilon=0} \\ &= m(xy\dot{y} - y\dot{x}x) = m\hat{e}_z \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= mr^2\dot{\phi} \end{aligned}$$

例二：

$$\begin{aligned} V &= V(\rho, \phi, z) = V(\rho, a\phi + z), \quad a = \text{const} \\ L &= \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, a\phi + z) \end{aligned}$$

对称性：

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon &= \rho \\ \phi_\epsilon &= \phi + \epsilon\delta\phi \\ z_\epsilon &= z + \epsilon\delta z \end{aligned}$$

如果：

$$\delta z = -a\delta\phi \tag{3.26}$$

则有：

$$a\phi_\epsilon + z_\epsilon = a\phi + z \tag{3.27}$$

那么

$$\begin{aligned}
 \delta L &= \left. \frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \\
 &= \left. \frac{\partial L_\epsilon}{\partial \phi_\epsilon} \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial L_\epsilon}{\partial \rho_\epsilon} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial L_\epsilon}{\partial z_\epsilon} \frac{\partial z_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \\
 &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi + 0 + \frac{\partial L}{\partial z} \delta z \\
 &= -\frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \\
 &= -\frac{\partial V}{\partial a\phi + z} \frac{\partial a\phi + z}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial V}{\partial a\phi + z} \frac{\partial a\phi + z}{\partial z} \delta z \\
 &= -\frac{\partial V}{\partial a\phi + z} a \delta \phi - \frac{\partial V}{\partial a\phi + z} \delta z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

守恒荷:

$$\begin{aligned}
 Q &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \frac{\partial z_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \\
 &= m\rho^2 \dot{\phi} \delta \phi - m a \dot{z} \delta \phi \\
 &= m(\rho^2 \delta \phi - a \dot{z}) \delta \phi = \text{const}
 \end{aligned}$$

因为  $\delta \phi$  为任意“给定”操作, 所以

$$m\rho^2 \dot{\phi} - m a \dot{z} = \text{const}$$

也可以从动力学方程直接检验  $Q$  为守恒量。利用动力学方程, 我们得到:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\phi}) = \frac{\partial L}{\partial \phi} = -a \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.29)$$

因此:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\phi}) - a \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = 0 \quad (3.30)$$

### 3.5 带电粒子在电磁场中的运动

带电粒子在电磁场中的拉格朗日量为:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (3.31)$$

其中电磁场用标量势  $\Phi(\vec{x}, t)$  和矢量势  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  联合刻画, 它们与通常的电磁矢量  $(\vec{E}, \vec{B})$  的关系为:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.32)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.33)$$

### 3.5.1 分量形式

我们先用分量形式推导带点粒子在磁场中的运动方程。位置矢量表示为： $\vec{r} = \{x^i\}$ 。在本文中，拉丁字母  $i, j, k, \dots$  取  $1, 2, 3$ ，并注意到在平直空间中，空间矢量的分量不分上下标，例如： $A^i = A_i$ 。

将  $L$  改写为：

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^i\dot{x}^i - e\Phi(x^j, t) + \frac{e}{c}\dot{x}^i \cdot A^i(x^j, t) \quad (3.34)$$

先计算：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}x^j = m\dot{x}^i + \frac{e}{c}A^i \quad (3.35)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}x^j = m\ddot{x}^i + \frac{e}{c}\dot{x}^j\partial_j A^i + \frac{e}{c}\partial_t A^i \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}\dot{x}^j = -e\partial_i\Phi + \frac{e}{c}\dot{x}^j\partial_i A^j \quad (3.37)$$

这里  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ ，以及  $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ 。代入欧拉-拉格朗日方程，整理后得到：

$$\begin{aligned} m\ddot{x}^i &= -e(\partial_i\phi + \frac{1}{c}\partial_t A^i) + \frac{e}{c}v^j(\partial_i A^j - \partial_j A^i) \\ &= eE^i + ev^j\epsilon_{ijk}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k \\ &= eE^i + e(\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))^i \\ &= eE^i + e(\vec{v} \times \vec{B})^i \end{aligned} \quad (3.38)$$

在上式第二步中，我们利用了：

$$\epsilon_{ijk}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \partial_i A^j - \partial_j A^i \quad (3.39)$$

也就是说：

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \quad (3.40)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 = \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 \quad (3.41)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 \quad (3.42)$$

方程 (3.39) 在三维欧几里德空间是显然的，我们还是很学究地证明如下。首先利用叉乘的定义：

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \epsilon_{klm}\partial_l A^m \quad (3.43)$$

因此：

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_l A^m \\ &= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_l A^m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_l A^m \\ &= (\partial_i A^j - \partial_j A^i) \end{aligned} \quad (3.44)$$

### 3.5.2 矢量形式

我们也可以用矢量的形式推导带点粒子的动力学方程。先计算：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A} \quad (3.45)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\ddot{\vec{r}} + \frac{e}{c}(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla)\vec{A} + \frac{e}{c}\partial_t \vec{A} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\nabla\Phi + \frac{e}{c}\nabla_A(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \quad (3.47)$$

代入到欧拉-拉格朗日方程，整理后得到：

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= -e \left[ \nabla\Phi + \frac{1}{c}\partial_t \vec{A} \right] + \frac{e}{c} \left[ \nabla_A(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla)\vec{A} \right] \\ &= e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (3.48)$$

第二步我们利用了：

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (3.49)$$

因此，

$$\begin{aligned} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla}_A(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ &= (\vec{\nabla}\vec{A}) \cdot \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \end{aligned} \quad (3.50)$$

注意，在方程 (3.50) 中， $\vec{\nabla}_A$  表示只对  $\vec{A}$  求偏导数，而对  $\vec{v}$  不求偏导数，因为方程的左边只出现对  $\vec{A}$  求偏导数的项！

### 3.5.3 四维协变的拉格朗日力学

取四维坐标为  $\{x^\mu\} = \{x^0 = ct, x^1, x^2, x^3\}$ ，其中希腊字母  $\mu, \nu, \dots$  取  $(0, 1, 2, 3)$ 。时空微元为：

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (3.51)$$

其中时空度规  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ 。在四维 Minkowski 时空中，电磁场用一个四维的电磁场矢量  $A^\mu$  表示：

$$A^\mu = \{\Phi, \vec{A}\}, \quad A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = \{-\Phi, \vec{A}\} \quad (3.52)$$

而通常大家熟悉的电场  $\vec{E}$  和磁场  $\vec{B}$  被统一到一个 2-form(二阶反对称协变张量)  $F_{\mu\nu}$  中:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ E^i &= F_{i0} = \partial_i A_0 - \frac{1}{c} \partial_t A_i = -\partial_i \Phi - \frac{1}{c} \partial_t A_i \\ B^i &= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \end{aligned} \quad (3.53)$$

即:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

下面讨论相对论性带电粒子在电磁场中的运动。协变的拉格朗日量为:

$$L = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{e}{c} \dot{x}^\mu A_\mu \quad (3.55)$$

这里  $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ , 并令:  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 。先计算:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\nu &= \eta_{\mu\nu} m \dot{x}^\nu + \frac{e}{c} A_\mu \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\nu &= \eta_{\mu\nu} m \ddot{x}^\nu + \frac{e}{c} \dot{x}^\nu \partial_\nu A_\mu \\ \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu &= \frac{e}{c} \dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu \end{aligned} \quad (3.56)$$

代入欧拉-拉格朗日方程, 得:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\nu - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu = \eta_{\mu\nu} m \ddot{x}^\nu - \frac{e}{c} \dot{x}^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (3.57)$$

整理得到最终的动力学方程:

$$\eta_{\mu\nu} m \ddot{x}^\nu = \frac{e}{c} \dot{x}^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{e}{c} \dot{x}^\nu F_{\mu\nu} \quad (3.58)$$

上式也可以改写为:

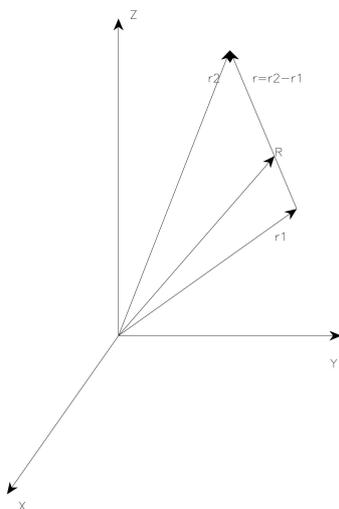
$$m \ddot{x}^\mu = \frac{e}{c} u_\nu F^{\mu\nu} \quad (3.59)$$

这里  $u^\mu \equiv \dot{x}^\mu$  为粒子的四维速度。其中方程的右边就是四维形式的 Lorentz 力。例如:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}^1 &= \frac{e}{c} (u_0 F^{10} + u_2 F^{12} + u_3 F^{13}) \\ &= \frac{e}{c} (u^0 F_{10} + u^2 F_{12} + u^3 F_{13}) \\ &= e \left[ E^1 + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B})^1 \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

# 第四章 向心力场中的运动

## 4.1 两体问题



考虑两个质点： $m_1, \vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1$ ； $m_2, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2$ 。系统的拉格朗日量为：

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (4.1)$$

坐标变换（选新的广义坐标）：

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{R}, \vec{r}) \quad (4.2)$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.3)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (4.4)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad (4.5)$$

系统的拉格朗日量为：

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r) \quad (4.6)$$

其中，引入了约化质量：

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.7)$$

或者:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (4.8)$$

从拉格朗日量可以看出,  $\vec{R}$  为循环坐标,

$$\dot{\vec{R}} = \text{const.} \quad (4.9)$$

两体问题退化为单体问题!

## 4.2 运动方程

质心系中的拉格朗日量为:

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \quad (4.10)$$

$\theta$  方向的正则动量为:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta},$$

$\theta$  方向的动力学方程:

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (4.11)$$

得到运动积分:

$$\mu r^2 \dot{\theta} = L = \text{const}, \quad (4.12)$$

$r$  向的运动方程:

$$\frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) - \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (4.13)$$

引入  $f(r) = -dV(r)/dr$ , 径向的动力学方程写为:

$$\mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 = f(r). \quad (4.14)$$

改写为:

$$\mu \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = f(r). \quad (4.15)$$

考虑总能量守恒:

$$E = T + V = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r). \quad (4.16)$$

$E$  是运动积分. 可以从动力学方程证明如下:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left[ V(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \right], \quad (4.17)$$

两边同乘以  $\dot{r}$ , 我们得到:

$$\mu \dot{r} \ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left[ V(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \right],$$

或者:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \right] = 0 .$$

于是:

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} = E = \text{const} \quad (4.18)$$

得证.

下面分别求解  $r$  和  $\theta$  方向的运动方程.

$$v_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - V - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}, \quad (4.19)$$

或者:

$$dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - V - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}} . \quad (4.20)$$

其中:  $r_0 = r(t = t_0)$ . 直接积分上式, 得到  $r$  方向的运动方程:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - V - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}} . \quad (4.21)$$

$\theta$  方向的运动:

$$d\theta = \frac{L dt}{\mu r^2} . \quad (4.22)$$

令:  $\theta_0 = \theta(t = t_0)$ , 我们得到:

$$\theta - \theta_0 = L \int_{t_0}^t \frac{dt}{\mu r^2(t)} . \quad (4.23)$$

### 4.3 轨道微分方程

$$L dt = \mu r^2 d\theta . \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} . \quad (4.25)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \right)$$

$r$  向运动方程:

$$\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{L}{\mu r^3} = f(r) . \quad (4.26)$$

由于:

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{d(1/r)}{d\theta} .$$

引入变量:  $u = 1/r$ , 我们得到:

$$\frac{L^2 u^2}{\mu} \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -f \left( \frac{1}{u} \right). \quad (4.27)$$

由于:

$$\frac{d}{du} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d}{dr} = -\frac{1}{u^2} \frac{d}{dr},$$

方程 (4.27) 改写为:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} V \left( \frac{1}{u} \right). \quad (4.28)$$

## 4.4 积分形式的轨道方程

也可以直接积分, 得到轨道方程:

$$d\theta = \frac{L dr}{\mu r^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[ E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}}, \quad (4.29)$$

或者:

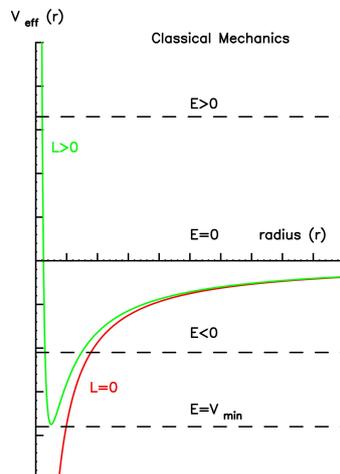
$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \cdot \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} - \frac{2\mu V}{L^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0. \quad (4.30)$$

引入:  $u = 1/r$ ,

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} - \frac{2\mu V}{L^2} - u^2}}, \quad (4.31)$$

这就是最终的轨道方程.

## 4.5 Kepler 问题: 平方反比律



万有引力:

$$f = -\frac{k}{r^2} \quad \text{or} \quad V = -\frac{k}{r}. \quad (4.32)$$

其中  $k \equiv Gm_1m_2$

定性讨论：径向运动的有效势

$$V_{\text{eff}} = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \quad (4.33)$$

圆轨道运动:

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} \right|_{r=r_c} = 0 \quad (4.34)$$

稳定圆轨道:  $\left. \frac{d^2V_{\text{eff}}(r)}{dr^2} \right|_{r=r_c} > 0$ 。易得:

$$r_c = \frac{L^2}{\mu k}, \quad E_{\text{min}} = V(r_c) = -\frac{\mu k^2}{2L^2} \quad (4.35)$$

微分形式的轨道方程（比耐方程）:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu f(1/u)}{L^2 u^2} = \frac{\mu k}{L^2}. \quad (4.36)$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,$$

$$y = B \cos(\theta - \theta_0),$$

其中  $B$  和  $\theta_0$  是相应的运动积分。方程的解:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)], \quad (4.37)$$

其中:

$$e = B \frac{L^2}{\mu k}.$$

即:

$$r = \frac{p \equiv L^2/\mu k}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (4.38)$$

也可以直接积分得到轨道方程:

$$\theta - \theta_0 = - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} - \frac{2\mu V}{L^2} - u^2}} = - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu k}{L^2} u - u^2}} \quad (4.39)$$

进一步化简为:

$$\theta - \theta_0 = - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{L^4} \left(1 + \frac{2L^2 E}{\mu k^2}\right) - \left(u - \frac{\mu k}{L^2}\right)^2}} \quad (4.40)$$

令:

$$u - \frac{\mu k}{L^2} = \frac{\mu k}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \cos \alpha \quad (4.41)$$

积分上式, 得到:

$$\alpha = \theta - \theta_0 \quad (4.42)$$

我们也可以直接利用如下积分公式:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left[ -\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \right], \quad (4.43)$$

其中:

$$q = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

引入:

$$\alpha = \frac{2\mu E}{L^2}, \quad \beta = \frac{2\mu k}{L^2}, \quad \gamma = -1,$$

其中  $q$  为:

$$q = \left( \frac{2\mu k}{L^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \right).$$

取  $u_0$  为近日点, 则:  $u_0 = (\beta + \sqrt{q})/2$ , 易得:

$$\theta - \theta_0 = -\arccos \left[ \frac{\frac{L^2 u}{\mu k} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}} \right].$$

对:  $u \equiv 1/r$ , 最终的轨道方程为:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right]. \quad (4.44)$$

比较得到  $e$  为:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}. \quad (4.45)$$

轨道类型依赖于运动积分  $E$ :

$$\begin{aligned} e > 1, \quad E > 0: & \quad \text{hyperbola,} \\ e = 1, \quad E = 0: & \quad \text{parabola,} \\ e < 1, \quad E < 0: & \quad \text{ellipse,} \\ e = 0, \quad E = -\frac{\mu k^2}{2L^2}: & \quad \text{circumference.} \end{aligned}$$

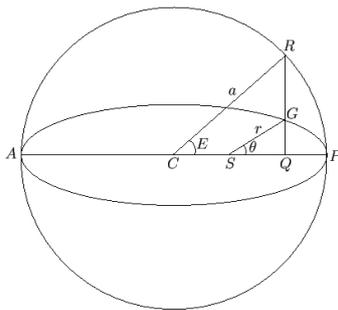


图 4.1: 偏近点角

小结如下：天体在万有引力的作用下，做圆锥曲线运动，圆锥曲线需要两个几何量： $a, e$  完全确定。从动力学的角度，系统存在两个运动积分： $E, L$ 。动力学量  $E, L$  与几何量  $a, e$  的关系是：

$$L = \sqrt{p\mu k} = \sqrt{\mu k a} \sqrt{1 - e^2} \quad (4.46)$$

$$E = -\frac{\mu k^2(1 - e^2)}{2L^2} = -\frac{k}{2a} \quad (4.47)$$

下面进一步讨论轨道半径  $r$  随着时间  $t$  的函数关系。由方程 4.21，我们得到：

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}}. \quad (4.48)$$

将  $E = -k/2a$  以及  $L^2 = \mu k a(1 - e^2)$ ，并取  $r_0$  为近日点： $r_0 = a(1 - e)$ ，以及用轨道半长轴  $a$  无量纲化半径  $r$ ： $\tilde{r} = r/a$ 。上式化为：

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \int_{(1-e)}^{\tilde{r}} \frac{\tilde{r} d\tilde{r}}{\sqrt{e^2 - (\tilde{r} - 1)^2}} \quad (4.49)$$

令：

$$\tilde{r} - 1 = -e \cos E \quad (4.50)$$

即：

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (4.51)$$

其中  $E$  为偏近点角 (eccentric anomaly)，其几何意义见图 4.1。积分上式得到：

$$t - t_0 = \frac{T}{2\pi} (E - e \sin E) \quad (4.52)$$

其中：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}} \quad (4.53)$$

为天体运动的周期。

## 4.6 Laplace-Runge-Lenz 矢量

引入 Laplace-Runge-Lenz 矢量:

$$\vec{A} = \vec{P} \times \vec{L} - \mu k \hat{r} \quad (4.54)$$

其中:  $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$  下面证明:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= 0. \\ \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \vec{P} \times \vec{L} - \mu k \hat{r} \right\} \\ &= \dot{\vec{P}} \times \vec{L} + \vec{P} \times \dot{\vec{L}} - \mu k \frac{r\dot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{r}}{r^2} \\ &= -\frac{k\vec{r}}{r^3} \times (\mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \mu k \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \mu k \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \\ &= -\mu k \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{r^3} + \mu k \frac{\dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r})}{r^3} - \mu k \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \mu k \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

其中  $\dot{\vec{r}} \cdot \hat{r}$  为径向加速度。显然,  $\vec{A}$  位于轨道平面内, 下面说明  $\vec{A}$  指向近心点。

假设  $\vec{A}$  的方位角为  $\theta_0$ , 则:

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos(\theta - \theta_0) = \vec{r} \cdot (\vec{P} \times \vec{L} - \mu k \hat{r}) = L^2 - \mu k r \quad (4.56)$$

从而得到:

$$r(\theta) = \frac{L^2}{\mu k + A \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p \equiv L^2/\mu k}{1 + \frac{A}{\mu k} \cos(\theta - \theta_0)} \quad (4.57)$$

其中:  $e \equiv A/\mu k$ 。显然,  $\vec{A}$  指向近日点。

对  $\vec{A}$  平方, 可以得到  $e$  与积分常数  $E, L$  的关系:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{A} &= (\vec{P} \times \vec{L})^2 - 2\mu k \hat{r} \cdot (\vec{P} \times \vec{L}) + \mu^2 k^2 \\ &= P^2 L^2 - 2\mu L^2 \frac{k}{r} + \mu^2 k^2 \\ &= 2\mu L^2 \left( \frac{P^2}{2\mu} - \frac{k}{r} + \frac{\mu k^2}{2L^2} \right) \\ &= 2\mu L^2 \left( E + \frac{\mu k^2}{2L^2} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

与  $A = \mu k e$  比较, 就可以得到:

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \quad (4.59)$$

## 4.7 弯曲时空中检验粒子的运动

### 4.7.1 四维弯曲空间

在欧几里德空间中, 若取笛卡尔坐标系  $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ , 则空间线元为:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= g_{ij} dx^i dx^j \end{aligned} \quad (4.60)$$

其中度规  $g_{ij} = \text{diag}\{+1, +1, +1\}$

如果在欧几里德空间中取球坐标  $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$ , 则空间线元为:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &= g_{ij} dx^i dx^j \end{aligned} \quad (4.61)$$

这时度规  $g_{ij} = \text{diag}\{+1, r^2, r^2 \sin^2 \theta\}$ 。显然, 空间的性质(平直空间)并不依赖于坐标系的选择(或坐标变换)。

在闵可夫斯基(Minkowski)空间中, 若空间部分的坐标仍取笛卡尔坐标,  $\{x^\mu\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, x, y, z\} (\mu = 0, 1, 2, 3)$ , 则时空线元为(已取  $c = 1$ ):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (4.62)$$

其中度规  $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, +1, +1, +1\}$ 。

如果在闵可夫斯基空间中, 空间部分的坐标取球坐标,  $\{x^\mu\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, r, \theta, \phi\}$ , 则时空线元为:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (4.63)$$

这时度规  $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, +1, r^2, r^2 \sin^2 \theta\}$ 。

在爱因斯坦的广义相对论中, 时空度规函数  $g_{\mu\nu}$  由爱因斯坦场方程决定。1915年在爱因斯坦场方程发表的当年, 史瓦兹(Karl Schwarzschild)就得到了场方程的第一个严格解, 该度规描述的是球对称天体在它外部周围产生的弯曲时空的性质。在史瓦兹坐标下, 该时空线元如下:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv -d\tau^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

即时空度规为:  $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-(1 - 2GM/r), (1 - 2GM/r)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta\}$ 。

### 4.7.2 弯曲空间中自由质点的运动

爱因斯坦建议, 在弯曲时空中, 检验粒子走短程线, 也就是检验粒子的作用量为:

$$S = m_0 c^2 \int_A^B d\tau = m_0 c^2 \int_A^B \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{1/2} d\tau \quad (4.65)$$

检验粒子的运动方程 (又称测地线方程) 由最小作用量原理  $\delta S = 0$  得到,

$$0 = \delta S = -m_0 c^2 \int_A^B \left\{ \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right\} g_{\lambda\nu} \delta x^\lambda d\tau \quad (4.66)$$

其中联络  $\Gamma$  定义为:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \{ \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} \} \quad (4.67)$$

测地线方程:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (4.68)$$

等价地说, 检验粒子的拉格朗日量  $L$  为:

$$L = m_0 c^2 \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{1/2} \quad (4.69)$$

动力学方程由欧拉-拉格朗日方程得到:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.70)$$

容易证明, 与上面的拉格朗日量完全等价, 但更方便操作的等效拉格朗日量 (“动能”) 为:

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x^\lambda) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} \quad (4.71)$$

即将  $L_{\text{eff}}$  代入欧拉-拉格朗日方程, 同样得到正确的测地线方程:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.72)$$

等效拉格朗日量可以看作弯曲空间中的动能项。因此, 在弯曲空间中, 检验粒子的拉格朗日量仅含动能项与检验粒子在弯曲空间中走短程线是等价的。

需要补充说明的是, 对无质量的粒子, 例如光子,  $d\tau = 0$ , 上式中的  $\tau$  用仿参数  $\lambda$  代替, 同时要求:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (4.73)$$

### 4.7.3 弯曲时空中检验粒子的运动：弱场近似

在球对称弯曲时空中，检验粒子的等效拉格朗日量为：

$$2L_{\text{eff}} = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \quad (4.74)$$

在弱场近似下，或者说时空弯曲不厉害的情况下， $\phi \ll 1$ ，粒子作非相对论性运动，粒子的动能与势能同为一阶小量，以及  $d\tau \simeq dt$ ，因此，等效拉格朗日量近似为：

$$2L_{\text{eff}} = -1 + \frac{2GM}{r} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \quad (4.75)$$

即：

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2 - \left(-\frac{GM}{r}\right) = T - V \quad (4.76)$$

在弱场近似下，等效拉格朗日量由只含弯曲时空中的纯动能项退化为平直空间的动能项减去引力势能项，即经典力学中的拉格朗日量。这很好地体现了引力几何化的物理思想：在弯曲时空中，检验粒子的运动完全由时空度规决定，即由时空的弯曲程度决定。在时空弯曲不明显的情况下，例如我们在我们的太阳系中，我们并没有觉察到时空的弯曲，但是测量到了检验粒子的加速，于是正如在经典力学中所采取的措施，我们引入万有引力来解释行星的运动，正如上面的讨论，这是一个很好的近似，取得了巨大的成功。但本质上行星的运动是由太阳周围被太阳弯曲了的四维时空的性质所决定的。

### 4.7.4 从分析力学的角度讨论检验粒子在强引力场中的运动

由于大家没有学过广义相对论，这里我们仅仅将强引力场中检验粒子的动力学作为分析力学中的一个真实的例子来讨论。检验粒子的广义坐标为史瓦兹坐标： $\{q^\alpha\} = \{x^\mu\}$ ，广义速度为： $\dot{q}^\alpha = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}$ 。这里  $\lambda$  为粒子在四维空间中的运动曲线的曲线参数。对有质量的粒子， $\lambda$  可以取为粒子的原时  $\tau$ 。对无质量的粒子，例如光子， $\lambda$  就是一般的曲线参数（仿射参数）。

在史瓦兹时空中，粒子的拉格朗日量为：

$$2L_{\text{eff}} = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \quad (4.77)$$

我们可以令：

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \quad (4.78)$$

代入欧拉-拉格朗日方程，得到粒子的动力学方程：

$\mu = \theta$ - 方向的动力学方程：

$$r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.79)$$

不失一般性，假设开始时粒子的赤道面内运动，即： $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$ ，由上式我们可以得到，粒子将一直保持在赤道面内运动。

$\mu = t$ - 方向的动力学方程：

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = E = \text{const.} \quad (4.80)$$

对有质量的粒子来说，如果取  $\lambda = \tau$ ，积分常数  $E$  的物理含义是  $r = \infty$  处粒子的单位质量的能量。

$\mu = \phi$ - 方向的动力学方程：

$$r^2 \dot{\phi} = L = \text{const.} \quad (4.81)$$

$L$  的物理含义是粒子单位质量的有效角动量。

$\mu = r$ - 方向的动力学方程：

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \ddot{r} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 + \frac{M}{r^2} \dot{t}^2 - r \dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.82)$$

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \ddot{r} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 + \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} E^2 - \frac{L^2}{r^3} = 0 \quad (4.83)$$

积分上式，得到：

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -\epsilon. \quad (4.84)$$

其中：

$$\epsilon \equiv -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \begin{cases} 0, & \text{massless particles} \\ 1, & \lambda = \tau, \text{ massive particles,} \end{cases} \quad (4.85)$$

小结如下，检验粒子在引力场中运动的四个运动积分都已经找到：

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (4.86)$$

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E, \quad (4.87)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L. \quad (4.88)$$

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -\epsilon. \quad (4.89)$$

四个运动积分： $E, L, \epsilon, \theta = \pi/2$ 。

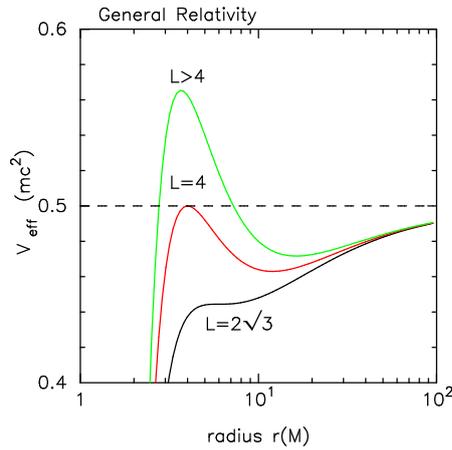


图 4.2: 有质量检验粒子在球对称弯曲时空中在不同初始角动量  $L$  情况下的径向等效势  $V_{\text{eff}}$  作为半径的函数。

#### 4.7.5 径向运动方程

类似牛顿力学，我们采用等效势的分析方法：

$$r^2 \dot{\phi} = L \quad (4.90)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} E^2 - V(r), \quad (4.91)$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}. \quad (4.92)$$

其中第四项与第三项之比为： $2M/r$ 。也就是说，只有当  $r \rightarrow 2M$  的时候，第四项才开始占主导。与牛顿力学的比较

$$r^2 \dot{\phi} = L \quad (4.93)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = E_N - V(r) \quad (4.94)$$

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} \quad (4.95)$$

$L$  为单位质量的角动量。

定性分析：径向运动有效势。

广义相对论情形： $m \neq 0$

$$V(r) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}. \quad (4.96)$$

$L \neq 0, r \rightarrow 0 \Rightarrow V(r) \rightarrow -\infty$

广义相对论情形： $m = 0$

$$V(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}. \quad (4.97)$$

$L \neq 0, r \rightarrow 0 \Rightarrow V(r) \rightarrow -\infty$

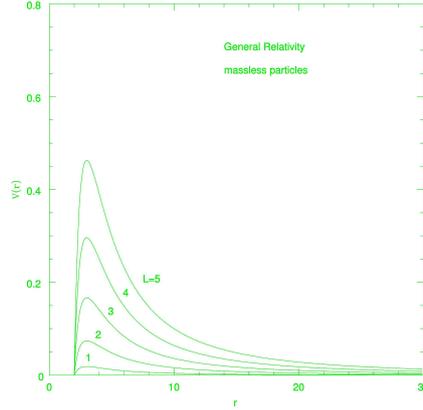


图 4.3: 无质量粒子在球对称弯曲时空中在不同初始角动量  $L$  情况下的径向等效势  $V_{\text{eff}}$  作为半径的函数。

#### 4.7.6 圆轨道运动

圆轨道条件

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 &= \frac{1}{2} E^2 - V(r) = 0 \\ \frac{dV(r)}{dr} &= 0 \end{aligned}$$

稳定圆轨道条件:  $d^2V(r)/dr^2 > 0$

$$\epsilon GM r_c^2 - L^2 r_c + 3GML^2 = 0 \quad (4.98)$$

对光子:

$$r_c = 3GM \quad (4.99)$$

对有质量粒子:

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2 M^2 L^2}}{2GM} . \quad (4.100)$$

当  $L_{\text{ms}} = \sqrt{12}GM$  时, 稳定圆轨道与不稳定圆轨道重合, 或者说, 势能曲线的局域极大值与极小值重合, 也就是拐点出现。该位置就是粒子的最小稳定圆轨道的半径。最后稳定圆轨道的半径为:

$$r_{\text{ms}} = 6GM = 3r_g , \quad (4.101)$$

处于最小稳定圆轨道上粒子的能量

$$E^2 = E^2(r_{\text{ms}}) = 2V(r_{\text{ms}}) = \frac{8}{9} \quad (4.102)$$

假设粒子从无穷远处 ( $E \simeq 1$ ) 被黑洞吸积, 最终落入黑洞周的最后稳定圆轨道处。则该吸积过程的产能率为:

$$\epsilon = \frac{1 - E}{1} = 5.7\% \quad (4.103)$$

与核反应产能率对比:

$$\epsilon = \frac{4m_p - m_\alpha}{4m_p} = 0.69\% \quad (4.104)$$

### 4.7.7 广义相对论的四大检验

- 引力红移  
检验的是等效原理
- 光线在引力场中的弯曲
- 水星近日点的进动
- 雷达回波延迟: Shapiro delay

#### 水星近日点的进动

推导微分形式的轨道方程:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 = \frac{E^2 - 1}{2L^2} + \frac{GM}{rL^2} - \frac{1}{2r^2} + \frac{GM}{r^3} \quad (4.105)$$

无量纲化:  $u = GM/r$ , 并对上式微分:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \left( \frac{GM}{L} \right)^2 + 3u^2 \quad (4.106)$$

对太阳水星系统来说, 基本参数如下:

$$GM_\odot = 1.5 \times 10^3 \text{m}, r \sim 5 \times 10^{10} \text{m} \quad (4.107)$$

即:  $u \sim 10^{-7}$ 。因此, 广义相对论中多出来的那项  $3u^2 \sim 10^{-14}$ , 可以作为微扰项处理。零级近似:

$$u_0 = \left( \frac{GM}{L} \right)^2 (1 + e \cos \phi) \quad (4.108)$$

代入轨道方程 ( $e \ll 1$ ):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \left( \frac{GM}{L} \right)^2 + 3 \left( \frac{GM}{L} \right)^4 (1 + e \cos \phi)^2 \simeq \left( \frac{GM}{L} \right)^2 + 3 \left( \frac{GM}{L} \right)^4 + 6 \left( \frac{GM}{L} \right)^4 e \cos \phi \quad (4.109)$$

右边第二项只是修正轨道轴的大小变化, 非常小, 可以略去。

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u \simeq \left( \frac{GM}{L} \right)^2 + 6 \left( \frac{GM}{L} \right)^4 e \cos \phi \quad (4.110)$$

方程的解:  $u = u_0 + u_1$

$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + u_0 = \left( \frac{GM}{L} \right)^2 \quad (4.111)$$

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = 6 \left( \frac{GM}{L} \right)^4 e \cos \phi \quad (4.112)$$

解得:

$$u_1 = 3 \left( \frac{GM}{L} \right)^4 e \phi \sin \phi \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} u = u_0 + u_1 &= \left( \frac{GM}{L} \right)^2 \left( 1 + e \cos \phi + 3 \left( \frac{GM}{L} \right)^2 e \phi \sin \phi \right) \\ &\simeq \left( \frac{GM}{L} \right)^2 \left\{ 1 + e \cos \left[ 1 - 3 \left( \frac{GM}{L} \right)^2 \right] \phi \right\} \end{aligned} \quad (4.114)$$

对近日点, 有:

$$\left[ 1 - 3 \left( \frac{GM}{L} \right)^2 \right] \phi = 2n\pi \quad (4.115)$$

$$\phi = \frac{2n\pi}{1 - 3 \left( \frac{GM}{L} \right)^2} \simeq 2n\pi \left[ 1 + 3 \left( \frac{GM}{L} \right)^2 \right] \quad (4.116)$$

一个轨道之后的进动角为:

$$\Delta\phi = 6\pi \left( \frac{GM}{L} \right)^2 \simeq 6\pi \frac{GM}{P} \quad (4.117)$$

其中  $P = L^2/GM$  为轨道的极轴。对水星来说,  $P \simeq 5.53 \times 10^7 \text{km}$ ,  $GM_{\odot} \simeq 1.475 \text{km}$ 。因此经过一个轨道周期, 进动角为:  $\Delta\phi = 0.1038''/\text{圈}$ 。水星每 100 年公转 415 圈, 因此, 广义相对论预言每百年水星近日点的进动角为:

$$\Delta\phi \simeq 43'' \quad (4.118)$$

详细参见温伯格《引力论与宇宙论》。

### 光线在引力场中的弯曲

基本方程

$$\left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E \quad (4.119)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L \quad (4.120)$$

$$\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad (4.121)$$

轨道方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = \left( \frac{E}{L} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad (4.122)$$

令:  $u = GM/r$ :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2 \quad (4.123)$$

零级近似:

$$u = u_0 \cos(\phi) \quad (4.124)$$

一级近似:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u_0^2 \cos^2 \phi \quad (4.125)$$

$$u = u_0^2(1 + \sin^2 \phi) \quad (4.126)$$

最终的解:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos \phi + u_0^2(1 + \sin^2 \phi) \\ &= u_0 \cos(\phi + \alpha) \\ &= u_0 \cos \phi + u_0 \sin \phi \cdot \alpha \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} \phi_\infty &= \pi/2 + 2u_0 \\ \phi_\infty &= -\pi/2 - 2u_0 \\ \Delta\phi &= 4u_0 = \frac{4GM_\odot}{R_\odot} = 1.75''(\text{SUN}) \end{aligned} \quad (4.128)$$

其中太阳的半径  $R_\odot \simeq 7 \times 10^5 \text{km}$ 。

### 4.7.8 讨论: 引力几何化

在平直空间中, 不受任何外力作用的检验粒子走匀速直线运动, 从最小作用量的角度, 该力学系统的作用量就是给定两点之间的距离。从分析力学的角度, 该力学系统的拉格朗日量就是该粒子的动能, 不含势能项。在广义相对论中, 引力几何化, 也就是说, 自然界没有万有引力这种“力”, 检验粒子的运动由时空的弯曲程度决定, 也就是由时空度规  $g_{\mu\nu}$  决定。在四维弯曲时空中, 检验粒子走匀速的短程线运动, 从最小作用量的角度, 该物理系统的作用量就是给定两点之间的距离 (“原时”)。因此, 根据我们的讨论, 从动力学的角度, 该系统的拉格朗日量就是该粒子在弯曲时空中的纯动能项, 不含所谓的引力势能项。在弱场近似下, 该弯曲时空中的纯动能项近似为平直空间的动能项减去引力势能项:  $L = T - V$ 。这很好地体现了引力几何化的物理思想: 在弯曲时空中, 检验粒子的运动完全由时空度规  $g_{\mu\nu}$  决定, 在弱场近似下, 时空弯曲程度不厉害, 非常近似于平直时空, 时空弯曲效果可以用引力势能  $\phi$ (与尺度有关) 模拟。在太阳系中时空弯曲最大的地方是太阳表面, 在太阳表面, 用引力势  $\phi = GM_\odot/r$  来模拟时空弯曲效应与真正的、完全的时空弯曲效相比, 误差近似为:  $GM_\odot/R_\odot c^2 \sim 10^{-6}$ , 因此, 在太阳系中, 牛顿力学是广义相对论的一个很好的近似描述, 在太阳系中我们只能在高于  $10^{-6}$  的精度下找到牛顿力学和广义相对论的差别。

广义相对论预言了黑洞和引力波的存在。黑洞周围的时空程度非常厉害，这时候用牛顿引力势来模拟时空的弯曲效应带来的误差接近 100%，甚至根本就完全无法描述，例如黑洞产生引力波。目前广义相对论在太阳系弱场条件下得到了很好的检验，到目前为止所有的天文观测或实验结果在误差范围之内都与广义相对论的理论预言吻合，为了在强引力场下对广义相对论进行检验，我们需要研究天体物理黑洞视界附近气体或恒星的动力学及其辐射特性，通过与天文观测对比，对广义在强场下进行检验，这是目前天体物理研究中重大的、基础性课题。

## 4.8 弹性碰撞

弹性碰撞：粒子内部状态碰撞前后保持不变，碰撞前后总动量和总机械能守恒。

### 4.8.1 实验室参考系与质心参考系

考虑两体碰撞，用下标 0 表示在实验室系 (L 系) 中的物理量，用上标 ' 表示碰撞过后的物理量，例如，碰撞前后粒子 1, 2 的速度分别为： $\vec{v}_{01}, \vec{v}_{02}$  和  $\vec{v}'_{01}, \vec{v}'_{02}$ 。

质心 (C) 的速度  $\vec{v}_{0C}$  为：

$$\vec{v}_{0C} = \frac{m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02}}{m_1 + m_2} \quad (4.129)$$

在质心系 (S 系) 中，粒子 1, 2 的速度  $\vec{v}_1$  和  $\vec{v}_2$  分别为：

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} - \vec{v}_{0C} = \frac{m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2} \quad (4.130)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{0C} = -\frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2} \quad (4.131)$$

其中  $\vec{v} = \vec{v}_{01} - \vec{v}_{02} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  为两个粒子的相对运动速度：粒子 1 相对粒子 2 的运动速度。

在 S 系中由总动量和总机械能守恒，得到：

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (4.132)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (4.133)$$

由上两式我们很容易得到，碰撞前后粒子的速率不变，即：

$$v'_1 = v_1, \quad v_2 = v'_2 \quad (4.134)$$

假设在质心系中，碰撞后粒子 1 相对粒子 1 入射前的速度方向为  $\vec{e}$ ，则在 S 系中粒子 1, 2 在碰撞后的速度可以形式地写为：

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{e}, \quad \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{e} \quad (4.135)$$

回到 L 系中,

$$\vec{v}'_{01} = \frac{m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02}}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{e} \quad (4.136)$$

$$\vec{v}'_{02} = \frac{m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02}}{m_1 + m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{e} \quad (4.137)$$

如果粒子 2 静止, 则:  $\vec{v}_{02} = 0, \vec{v}_{01} = \vec{v}$ , 上两式化简为:

$$\vec{v}'_{01} = \frac{m_1 \vec{v} + m_2 v \vec{e}}{m_1 + m_2} \quad (4.138)$$

$$\vec{v}'_{02} = \frac{m_1 (\vec{v} - v \vec{e})}{m_1 + m_2} \quad (4.139)$$

其中  $\vec{e}$  待定: 它与具体的相互作用性质、粒子的初始能量以及碰撞的几何位形有关。

### 4.8.2 L 系与 S 系中的散射角关系

S 系中粒子 1 的散射角  $\theta$ :  $\vec{v}'_1$  与  $\vec{v}_1$  的夹角, 即  $\vec{e}$  与  $\vec{v}$  的夹角。

L 系中的粒子 1 散射角  $\theta_0$ :  $\vec{v}'_{01}$  与  $\vec{v}_{01}$  的夹角。

在 S 系中的散射角  $\theta$  容易从理论上计算得到, 而实验上测量到的一般是  $\theta_0$ , 下面讨论两者之间的关系。

参考朗道《力学》第四章质点碰撞的讨论, 我们先从物理图像上讨论两者之间的关系。在 S 系中粒子 1, 2 的碰撞前后动量的大小都相等, 粒子 1 和粒子 2 的动量在碰撞前后方向都完全相反, 如下图所示。

碰撞之前:

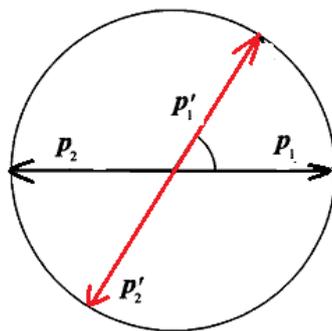


图 4.4: 在质心系中粒子 1, 2 在碰撞前后动量的改变

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \equiv \mu \vec{v} \quad (4.140)$$

$$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \equiv -\mu \vec{v} \quad (4.141)$$

其中  $\vec{v} = \vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}$ 。碰撞之后:

$$\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v \vec{e} \equiv \mu v \vec{e} \quad (4.142)$$

$$\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v \vec{e} \equiv -\mu v \vec{e} \quad (4.143)$$

为了得到在 L 系中粒子 1, 2 碰撞过后的动量  $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$ , 构造如下的图:

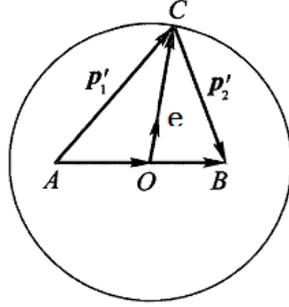


图 4.5: 构造在 L 系中碰撞过后粒子的动量  $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$

$$\vec{OC} = \mu v \vec{e}$$

$$\vec{AB} = m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} \equiv \vec{P}$$

$$\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P}; \quad \vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{P}$$

从图中容易得到:

$$\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P} + \mu v \vec{e} = m_1 \vec{v}'_{01} = \vec{p}'_1$$

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{P} - \mu v \vec{e} = m_2 \vec{v}'_{02} = \vec{p}'_2$$

假设  $m_2$  静止:  $\vec{v}_{02} = 0$ , 则:

$$\vec{AB} = m_1 \vec{v}_{01} = m_1 \vec{v}, \quad \vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} m_1 \vec{v} = \mu \vec{v} \quad (4.144)$$

因此, B 点在圆上。由于  $|AO|/|OB| = m_1/m_2$ , 因此, 如果  $m_1 < m_2, m_1 > m_2, m_1 = m_2$ , 点 A 分别位于圆内, 圆外以及圆上。从图中易得:

$$\tan \theta_0 = \frac{|CD|}{|AO| + |OD|} = \frac{\mu v \sin \theta}{m_1 / (m_1 + m_2) m_1 v + \mu v \cos \theta} = \frac{m_2 \sin \theta}{m_1 + m_2 \cos \theta} \quad (4.145)$$

由  $|AC|^2 = |CD|^2 + (|AO| + |OD|)^2$ , 得到:

$$v'_{01} = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta}}{m_1 + m_2} v \quad (4.146)$$

由等腰三角形  $\triangle OBC$  得到:

$$v'_{02} = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.147)$$

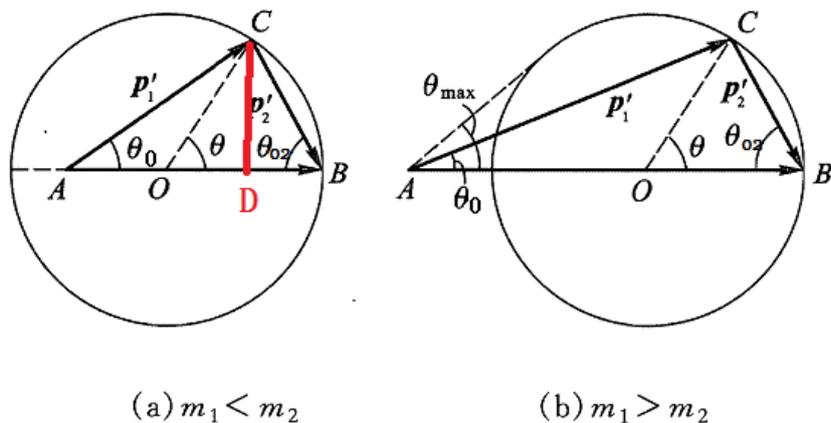


图 4.6:  $\vec{v}_{02} = 0$  时, L 系中碰撞过后粒子的动量  $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$

从图中还可以看到, 当  $m_1 < m_2$  时,  $\theta_0 + \theta_{02} > \pi/2$ ; 当  $m_1 > m_2$  时,  $\theta_0 + \theta_{02} < \pi/2$ 。

当  $m_1 = m_2 = m$  时, 显然:

$$\theta_0 = \theta/2, \theta_0 + \theta_{02} = \pi/2 \quad (4.148)$$

$$v'_{01} = v \cos \theta/2, \quad v'_{02} = v \sin \theta/2. \quad (4.149)$$

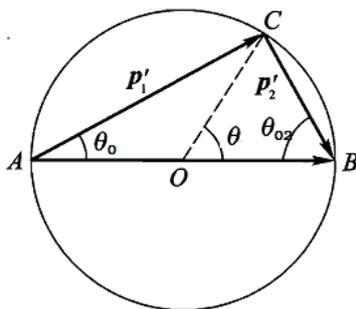


图 4.7:  $m_1 = m_2, \vec{v}_{02} = 0$  时, L 系中碰撞过后粒子的动量  $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$

我们也可以纯解析地得到  $\theta_0$  与  $\theta$  之间的关系。 $\theta_0$  为粒子 1 的散射角, 即碰撞前后速度之间的夹角, 因此:  $\cos \theta_0 = \frac{\vec{v}'_{01} \cdot \vec{v}_{01}}{v'_{01} v_{01}}$ 。若粒子 2 在 L 系中静止, 即:  $\vec{v}_{02} = 0$ , 则:

$$\cos \theta_0 = \frac{\vec{v}'_{01} \cdot \vec{v}_{01}}{v'_{01} v_{01}} = \frac{m_1 \vec{v} + m_2 v \vec{e}}{|m_1 \vec{v} + m_2 v \vec{e}|} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{m_1 + m_2 \cos \theta}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta}} \quad (4.150)$$

进一步得到:

$$\tan \theta_0 = \frac{m_2 \sin \theta}{m_1 + m_2 \cos \theta} \quad (4.151)$$

反解上式, 得到:

$$\cos \theta = -\frac{m_1}{m_2} \sin^2 \theta_0 \pm \cos \theta_0 \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_0} \quad (4.152)$$

在上式中, 当  $m_1 < m_2$  时, 取 “+” 号, 反之, 取 “-” 号。

### 4.8.3 单次散射

上面的讨论中还遗留一个问题，就是散射角  $\theta$  还不知道，它依赖于具体的相互作用。反过来，测量  $\theta$ ，可以帮助我们了解粒子之间相互作用的具体形式。

以库伦排斥为例，单次散射过程如下图所示。图中  $b$  为碰撞参数， $\theta$  为散射角。当具体相互作用形式给出之后，理论上可以计算两者之间的关系，例如： $b = b(\theta)$ 。

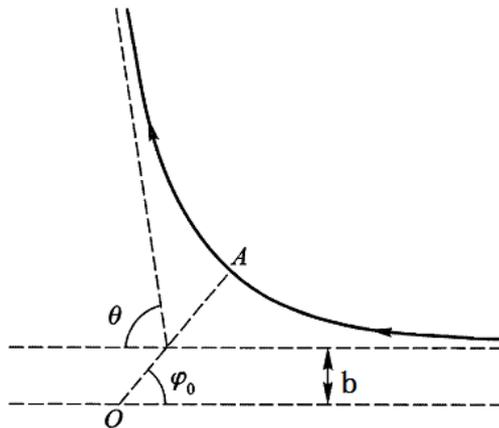


图 4.8: 单次散射示意图

实验过程中一般是很多入射粒子（粒子 1）与靶粒子（粒子 2）发生一次散射，实验上测量的是各个方位角被散射的入射粒子数。因此，我们需要考虑多个粒子的单次散射。为了与实验比较，我们需要引入微分散射截面（或散射截面）的概念。

首先引入入射粒子的入射流强  $n$  的定义，单位时间流过单位面积的粒子数：

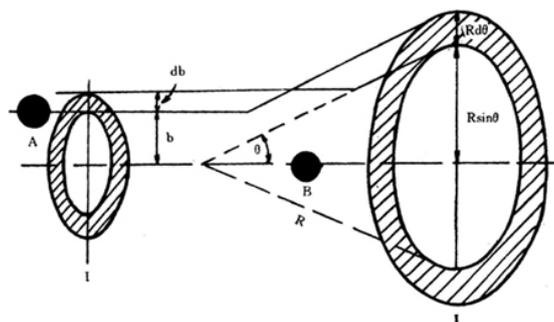


图 4.9: 微分散射截面

$$n = \frac{\text{粒子数}}{\text{时间} \times \text{面积}} \quad (4.153)$$

入射平面中碰撞参数在  $b \rightarrow b + db$  之间的圆环的面积  $d\sigma$  为：

$$d\sigma = 2\pi b(\theta)db(\theta) \quad (4.154)$$

$b \rightarrow b+db$  间的粒子被散射到  $\theta \rightarrow \theta+d\theta$  之间。被散射粒子位于立体角  $\Omega \rightarrow \Omega+d\Omega$  之间:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} (\sin \theta d\theta) d\varphi = 2\pi \sin \theta d\theta \quad (4.155)$$

被散射的粒子数  $dN$  为:

$$dN = n \cdot d\sigma \quad (4.156)$$

假设探测器安置在立体角  $\Omega \rightarrow \Omega + d\Omega$  之间, 探测器的立体角为  $\Delta\omega$ , 则探测器探测到的被散射粒子数  $\Delta N_{obs}$  为:

$$\Delta N_{obs} = \frac{dN}{d\Omega} \Delta\omega = n \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\omega \quad (4.157)$$

也就是说, 探测器探测到的粒子数与如下三个因素有关: 1) 入射粒子的流强; 2) 探测器的大小 (立体角); 3)  $d\sigma/d\Omega$  (与具体的相互作用有关)。

根据上式, 我们引入了微分散射截面的  $d\sigma/d\Omega$  定义:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{dN}{n d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (4.158)$$

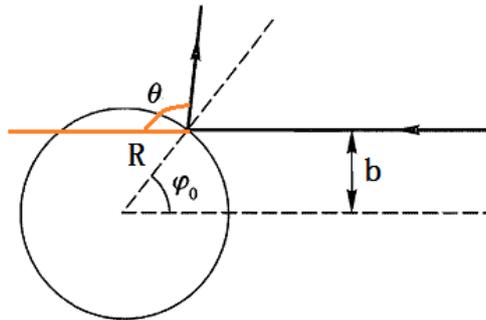


图 4.10: 刚球散射

例: 钢球势散射

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

质心系中:  $b = R \sin \varphi_0 = R \cos \frac{\theta}{2}$ , 因此,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}, \quad \sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = \pi R^2 \quad (4.159)$$

另:  $b_{max} = R$ , 因此, 也可以得到:  $\sigma_{tot} = \pi b_{max}^2 = \pi R^2$ 。

从 S 系回到 L 系, 即要得到在实验室参考系中的微分散射截面  $d\sigma/d\Omega_0$  时, 在一般情况下是非常复杂的。下面我们讨论两个特例: 1)  $m_1 = m_2$ ; 2)  $m_2 \gg m_1$ 。

当  $m_1 = m_2$  时,  $\theta_0 = \theta/2$ , 因此,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \frac{R^2}{4} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta_0 d\theta_0} = R^2 \cos \theta_0 \quad (4.160)$$

当  $m_1 \ll m_2$  时,  $\theta_0 \simeq \theta$ , 即:  $d\sigma/d\Omega_0 \simeq d\sigma/d\Omega = R^2/4$ 。

#### 4.8.4 卢瑟福散射

如图所示,  $\theta = \pi - 2\varphi_0$ 。下面计算相互作用为有心力场中的  $\varphi_0$ 。

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  守恒, 散射发生在某固定平面内, 取极坐标:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) \\ P_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = L \\ \dot{\varphi} &= \frac{L}{\mu r^2} \\ E &= \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) \\ \Rightarrow \dot{r} &= \pm \sqrt{\frac{2[E - V(r)]}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}} \end{aligned}$$

轨道方程:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{L/r^2}{\sqrt{2\mu(E - V) - L^2/r^2}}$$

积分上式得到:

$$\varphi = \pm \int \frac{Ldr/r^2}{\sqrt{2\mu(E - V) - L^2/r^2}} \quad (4.161)$$

用  $b, v_\infty$  替代  $E, L$ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu v_\infty^2, \quad L = \mu b v_\infty \\ \varphi_0 &= \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{bdr/r^2}{\sqrt{1 - b^2/r^2 - 2V(r)/\mu v_\infty^2}} \end{aligned} \quad (4.162)$$

其中  $r_{\min}$  与  $v(r_{\min})$  由下面的两个方程决定:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 = \frac{1}{2}\mu v_{\min}^2 + V(v_{\min}) \\ \mu b v_\infty = \mu r_{\min} v_{\min} \end{cases} \quad (4.163)$$

原则上可得,

$$r_{\min} = r_{\min}(b, v_\infty) \quad (4.164)$$

下面具体讨论  $\alpha$  粒子与原子核的碰撞。假设靶原子核的原子序数为  $Z$ , 则它们之间的库伦势为:

$$V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.165)$$

引入  $\alpha$ :

$$\alpha \equiv \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (4.166)$$

则势能简化为:  $V = \alpha/r$ . 选取如下的无量纲化参数:

$$\beta \equiv \frac{\alpha}{\mu b v_0^2}, \quad u \equiv b/r \quad (4.167)$$

易得:

$$r_{\min} = b(\beta + \sqrt{1 + \beta^2}), \quad u_{\min} = \sqrt{1 + \beta^2} - \beta \quad (4.168)$$

积分轨道方程:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \int_0^{u_{\min}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2 - 2\beta u}} \\ &= -\arccos \left[ \frac{\beta + u}{\sqrt{1 + \beta^2}} \right] \Big|_0^{u_{\min}} \\ &= \arccos \left[ \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \right] \end{aligned} \quad (4.169)$$

反解得到:

$$\beta = \cot \varphi_0 = \tan \frac{\theta}{2} \quad (4.170)$$

最后得到  $b = b(\theta)$ :

$$b = \frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (4.171)$$

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{\alpha}{2\mu v_{\infty}^2} \csc^2 \frac{\theta}{2} \quad (4.172)$$

则最终的散射截面为:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v_{\infty}^4} \csc^4 \frac{\theta}{2} \quad (4.173)$$

这就是著名的卢瑟福散射公式。由于参量  $\alpha$  以平方形式出现, 结果与吸引或排斥无关。

以上得到的是在质心系中的微分散射截面, 回到实验室系中时, 一般比较复杂。下面只讨论两种特殊情形: 1)  $m_1 = m_2$ ; 2)  $m_1 \ll m_2$ 。

当  $m_1 = m_2 = m$  时,  $\mu = m/2$ ,  $\theta_0 = \theta/2$ , 因此:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} = \frac{4\alpha^2}{m_1^2 v_{\infty}^2} \csc^4 \theta_0 \cdot \cos \theta_0 \quad (4.174)$$

当  $m_1 \ll m_2$  时,  $\mu = m_1$ ,  $\theta_0 \simeq \theta$ , 则:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} \simeq \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \csc^4 \frac{\theta_0}{2}}{4m_1^2 v_{\infty}^4} \quad (4.175)$$

讨论:  $\sigma_{\text{tot}}$  发散! 库伦相互作用是长程相互作用。



# 第五章 微振动

## 5.1 简谐振动

### 5.1.1 一维振动

势能函数  $V(q)$  的最低点为  $q_0$ 。假设力学系统在  $q_0$  附近做小振动。将势能  $V$  在点  $q_0$  附近做泰勒展开：

$$\begin{aligned} V(q) &\simeq V(q_0) + \left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right|_{q_0} (q - q_0)^2 + \dots \\ &\simeq \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right|_{q_0} (q - q_0)^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

上式中，我们利用了： $\left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{q_0} = 0$  ( $q_0$  为势能局域最低点)，以及  $V(q_0) = 0$  (取  $q_0$  点的势能为零)。

引入  $k$  为势能  $V(q)$  在  $q = q_0$  点处的二阶导数，并同时引入新的广义坐标  $x$ ：

$$x = q - q_0 \quad (5.2)$$

则系统的拉格朗日量为：

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 . \quad (5.3)$$

动力学方程为：

$$m \ddot{x} + kx = 0 ,$$

或者：

$$\ddot{x} + w^2 x = 0 , \quad (5.4)$$

其中  $w^2 = \sqrt{k/m}$ . 方程的解：

$$x = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt , \quad (5.5)$$

或者：

$$x = a \cos(wt + \alpha) . \quad (5.6)$$

其中

$$a = \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)}, \quad \tan\alpha = -c_1/c_2 .$$

用复数表示:

$$x = \operatorname{Re} [A \exp(i\omega t)]$$

其中  $A$  为复振幅:

$$A = a \exp(i\alpha) .$$

系统在做微振动时的能量为:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 ,$$

### 5.1.2 $n$ 维振动

下面考虑  $n$  个自由度情形。在平衡位置处:

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 . \quad (5.7)$$

在平衡位置  $q_\alpha = q_{\alpha 0}$  处泰勒展开, 并引入:

$$x_\alpha = q_\alpha - q_{\alpha 0} ,$$

则:

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = V(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}) + \sum \left( \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right)_{q_{\alpha 0}} x_\alpha + \frac{1}{2!} \sum \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_{q_{\alpha 0}} x_\alpha x_\beta + \dots \quad (5.8)$$

同样选取平衡点的势能为零, 则:

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta . \quad (5.9)$$

显然:  $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}$ .

动能的一般形式:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} m_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta . \quad (5.10)$$

$m_{\alpha\beta}$  仅是坐标的函数。由于  $q_\alpha$  为小量,  $\dot{q}_\alpha$  也为小量。显然  $T$  与  $V$  同量级, 因此,  $m_{\alpha\beta}(q_\alpha) = m_{\alpha\beta}(q_{\alpha 0}) = m_{\alpha\beta}$

系统拉格朗日量为:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (m_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta - k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta) . \quad (5.11)$$

代入 E-L 方程:

$$\sum (m_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + k_{ij} x_\beta) = 0 . \quad (5.12)$$

矩阵形式:

$$(M)(\ddot{X}) + (K)(X) = 0, \quad (5.13)$$

矩阵的定义:

$$(M) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$(K) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

$$(\ddot{X}) = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

$$(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

假设  $x_\beta(t)$  解的形式为:

$$x_\beta = A_\beta \exp(i\omega t), \quad (5.18)$$

其中  $A_\beta$  为待定常数. 将 (5.18) 代入: (5.12) 并处以  $\exp(i\omega t)$ , 得到:

$$\sum_{\beta} (-\omega^2 m_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}) A_\beta = 0. \quad (5.19)$$

若存在非零解:

$$|k_{\alpha\beta} - \omega^2 m_{\alpha\beta}| = 0. \quad (5.20)$$

这是关于  $\omega^2$  的  $n$  次方程. 一般来说, 存在  $n$  个不同的正实数解  $\omega_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ).  $\omega_\alpha$  称之为系统的本征频率. 乘以  $A_\alpha^*$  并对  $\alpha$  求和, 我们得到:

$$\sum_{\beta} (-\omega^2 m_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}) A_\alpha^* A_\beta = 0,$$

进一步得到:

$$w^2 = \sum k_{\alpha\beta} A_\alpha^* A_\beta / \sum m_{\alpha\beta} A_\alpha^* A_\beta .$$

由于系数  $k_{\alpha\beta}$  和  $m_{\alpha\beta}$  都是实对称的, 因此  $w^2$  都为正实数。

### 5.1.3 例题

双摆, 系统的自由度为 2。

$$V = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2) .$$

利用 (5.8), 我们得到:

$$V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2 .$$

对比 (5.9), 得到:

$$\begin{aligned} k_{11} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \\ k_{12} &= k_{21} = 0 \\ k_{22} &= m_2 g l_2 . \end{aligned}$$

系统的动能为:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 .$$

对比 (5.10), 易得:

$$\begin{aligned} m_{11} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \\ m_{12} &= m_{21} = m_2 l_1 l_2 \\ m_{22} &= m_2 l_2^2 . \end{aligned}$$

代入 (5.11) 得到系统的拉格朗日量, 最终得到动力学方程:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0 .$$

## 5.2 受迫简谐振动

外力作用与谐振动系统。

外力的势:  $V_e(x, t)$ , 对  $x$  泰勒展开:

$$V_e(x, t) \cong V_e(0, t) + x \left[ \frac{\partial V_e}{\partial x} \right]_{x=0} .$$

外力为:  $F(t) = - \left[ \frac{\partial V_e}{\partial x} \right]_{x=0}$ . 因此, 系统的拉格朗日量为:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + x F(t) . \quad (5.21)$$

相应的动力学方程:

$$m \ddot{x} + kx = F(t) ,$$

或者:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)/m , \quad (5.22)$$

通解与特解:

$$x = x_h + x_p .$$

周期性的外力, 外力的频率为  $\gamma$ :

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta) .$$

方程 (5.22) 的特解可以猜测为:  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$ . 代入方程得到:  $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$ .

一般解为:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + [f/m(\omega^2 - \gamma^2)] \cos(\gamma t + \beta) . \quad (5.23)$$

其中  $a, \alpha$  为由初始条件给出. 由上式可以看出, 受迫振动由两个振动组成: 一个是以谐振子的本征频率振动, 另一个以周期性外力的频率振动.

下面讨论共振情况 ( $\gamma \rightarrow \omega$ ). 将方程 (5.23) 改写为:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)] \quad (5.24)$$

注意, 这里的常数  $a$  与方程 (5.23) 的值不同. 当  $\gamma \rightarrow \omega$  时, 第二项变为 0/0 型, 利用洛必达法则, 得到:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{ft}{2m\omega} \sin(\gamma t + \beta) \quad (5.25)$$

从上式可以看出, 在共振条件下, 振幅开始随着时间线性增长, 一直演化到非线性阶段, 以上讨论不再适用.

**对任意一个外力, 可以直接积分方程 (5.22).** 将该方程改写为:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m} F(t) ,$$

并引入:  $\xi = \dot{x} + i\omega x$ , 我们得到:

$$\frac{d}{dt}\xi - i\omega\xi = F(t)/m .$$

方程的解为:  $\xi = A(t) \exp(i\omega t)$ ; 对  $A(t)$ ,

$$\dot{A} = F(t) \exp(-i\omega t)/m .$$

直接积分, 得到:

$$\xi = \exp(i\omega t) \int_0^t \frac{1}{m} F(t) \exp(-i\omega t) dt + \xi_0 . \quad (5.26)$$

函数  $x(t)$  由该通解的虚部除以  $\omega$  给出.

### 5.2.1 例题

在一个有限的时间  $T$  内,  $F_0 = \text{const.}$ , 积分得到:

$$\xi = \frac{F_0}{m} \exp(i\omega t) \int_0^T \exp(-i\omega t) dt ,$$

$$\xi = \frac{F_0}{i\omega m} [1 - \exp(-i\omega T)] \exp(i\omega t) .$$

利用:  $|\xi|^2 = a^2 \omega^2$  我们得到:

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin\left(\frac{1}{2}\omega T\right) .$$

## 5.3 阻尼简谐振动

振动过程在介质 (例如: 空气) 中发生, 存在能量耗散, 阻尼.

阻尼力: 当阻尼力较小的时候, 展开成速度的多项式. 非零最低项正比于速度:

$$f_r = -\alpha \dot{x} ,$$

这里  $x$  是广义坐标,  $\alpha$  是一个正系数. 存在阻尼时的运动方程为:

$$m \ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} ,$$

或者:

$$\ddot{x} = -kx/m - \alpha \dot{x}/m . \quad (5.27)$$

令  $k/m = \omega_0^2$  以及  $\alpha/m = 2\lambda$ :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + w_0^2 x = 0 .$$

假设解的形式为:  $x = \exp(rt)$ , 代入运动方程, 计算  $r$ . 得到:

$$r^2 + 2r\lambda + w_0^2 = 0 ,$$

$r$  的解为:

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{(\lambda^2 - w_0^2)} .$$

因此, 方程的解为:

$$x = c_1 \exp(r_1 t) + c_2 \exp(r_2 t) .$$

分类讨论:

(i)  $\lambda < w_0$ .

$$x = \operatorname{Re} \left\{ A \exp \left[ -\lambda t + i \sqrt{(w_0^2 - \lambda^2)} t \right] \right\} ,$$

其中  $A$  是任意复常数。表示为实数形式:

$$x = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{(w_0^2 - \lambda^2)} , \quad (5.28)$$

其中  $a$  和  $\alpha$  是实常数.

(ii)  $\lambda > w_0$ .  $r$  的两个解都为非负实数。

$$x = c_1 \exp \left\{ - \left[ \lambda - \sqrt{(\lambda^2 - w_0^2)} \right] t \right\} + c_2 \exp \left\{ - \left[ \lambda + \sqrt{(\lambda^2 - w_0^2)} \right] t \right\} .$$

非周期性解。

(iii)  $\lambda = w_0$ . 于是  $r = -\lambda$ , 通解为:

$$x = (c_1 + c_2 t) \exp(-\lambda t) .$$

**推广到  $n$  个自由度的系统。**

阻尼力为广义速度的线性函数:

$$f_{r,i} = \sum_j \alpha_{ij} \dot{x}_j . \quad (5.29)$$

利用  $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ ,

$$f_{r,i} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} ,$$

其中  $F = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$  为耗散函数. 动力学方程为:

$$\sum_j (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = - \sum_j \alpha_{ij} \dot{x}_i . \quad (5.30)$$

假设解的形式为:

$$x_k = A_k \exp(rt)$$

代入动力学方程, 得到关于  $A_j$  的线性代数方程:

$$\sum_j (m_{ij} r^2 + \alpha_{ij} r + k_{ij}) A_j = 0 .$$

方程存在非零解:

$$|m_{ij} r^2 + \alpha_{ij} r + k_{ij}| = 0 . \quad (5.31)$$

这是关于  $r$  的  $2n$  阶方程.

下面讨论耗散函数  $F$  的物理意义. 存在耗散时的 E-L 方程为:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (5.32)$$

系统的总能量随着时间的变化为:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \sum_i \dot{x}_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = -2F \quad (5.33)$$

即系统能量的减少率为 2 倍的耗散函数 ( $F > 0$ ).

## 5.4 简正模式

将方程 (5.13) 改写为如下的形式:

$$M |\ddot{X}\rangle + K |X\rangle = 0 ,$$

$M$  是非奇异的对称算子 (矩阵), 因此, 它的逆  $M^{-1}$  以及算子  $M^{1/2}$  和  $M^{-1/2}$  是有定义的.

$$\frac{d^2}{dt^2} M^{1/2} |X\rangle = -M^{-1/2} K M^{-1/2} M^{1/2} |X\rangle ,$$

或更紧凑的形式:

$$\frac{d^2}{dt^2} |\bar{X}\rangle = -\lambda |\bar{X}\rangle , \quad (5.34)$$

其中:

$$|\bar{X}\rangle = M^{1/2} |X\rangle$$

以及

$$\lambda = M^{-1/2} K M^{-1/2} .$$

因为  $M^{-1/2}$  和  $K$  都是对称算子，因此  $\lambda$  也是对称的。如果我们采用正交的本征矢量作为矢量基，则算子或矩阵是对角化的：

$$\lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} .$$

考虑如下的本征值问题：

$$\lambda |\rho_i\rangle = \lambda_i |\rho_i\rangle , \quad (5.35)$$

其中  $|\rho_i\rangle$  是正交的本征矢量基。或者：

$$M^{-1/2} K M^{-1/2} |\rho_i\rangle = \lambda_i |\rho_i\rangle .$$

本征值：

$$\lambda_i = \frac{\langle \rho_i | M^{-1/2} K M^{-1/2} | \rho_i \rangle}{\langle \rho_i | \rho_i \rangle} .$$

由于势能和动能为正，因此，

$$\langle \rho_i | M^{-1/2} K M^{-1/2} | \rho_i \rangle > 0$$

因此，

$$\lambda_i > 0 .$$

令：

$$\lambda_i = w_i^2 .$$

矢量  $|\bar{X}\rangle$  表示为  $\lambda$  的本征矢量的线性叠加，

$$|\bar{X}\rangle = \sum_i y_i |\rho_i\rangle ,$$

其中：

$$y_i = \langle \rho_i | \bar{X} \rangle . \quad (5.36)$$

将结果代入方程 (5.34)，得到：

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i y_i |\rho_i\rangle = -\lambda |\bar{X}\rangle = -\sum_i \lambda_i y_i |\rho_i\rangle .$$

用  $\langle \rho_j |$  作用与上式, 得到关于广义  $y_j$  的方程:

$$\frac{d^2}{dt^2} y_j = -w_j^2 y_j .$$

方程的解为:

$$y_j = A_j \cos(w_j t + \phi_j) . \quad (5.37)$$

采用新的广义坐标  $y_j$ , 得到一组相互独立的动力学方程.  $y_j$  和  $\bar{x}_i$  之间的关系为:

$$y_j = \langle \rho_i | \bar{X} \rangle = \rho_{j1} \bar{x}_1 + \rho_{j2} \bar{x}_2 + \dots + \rho_{jn} \bar{x}_n .$$

分量  $\rho_{jl}$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) 通过求解本征值问题得到.

新的坐标称之为简正坐标.  $w_j$  称之为简正频率.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cos(w_1 t + \phi_1) \\ A_2 \cos(w_2 t + \phi_2) \\ \vdots \\ A_n \cos(w_j t + \phi_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} . \quad (5.38)$$

在简正坐标下, 系统的动能为:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j \dot{y}_j^2 .$$

### 5.4.1 例题

动力学方程:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} .$$

求解本征值和本征矢量:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} .$$

特征值  $\lambda_i$  满足的方程为:

$$\det(\lambda - \lambda_i I) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

方程的解为:  $\lambda_i = 2, 4, 6$ . 对  $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$$

我们得到如下的方程:

$$\begin{aligned} (5 - 4)\rho_1 + \rho_3 &= 0 \\ 2\rho_2 - 4\rho_2 &= 0 \\ \rho_1 + (5 - 4)\rho_3 &= 0. \end{aligned}$$

利用归一化条件:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\rho_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \rho_2 &= 0. \end{aligned}$$

因此:

$$|\rho_{\lambda=4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

同理可得:

$$\begin{aligned} |\rho_{\lambda=6}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |\rho_{\lambda=2}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此新的矢量空间由下式得到:

$$|\rho_i\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\langle\rho_i| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 简正坐标由方程 (5.36) 给定:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}.$$

## 5.5 参数共振

参数共振: 系统一开始在一个不稳定的平衡位置, 例如,  $x = 0$ ; 如果稍微偏离平衡位置, 位移  $x$  将随着时间  $e$  指数增长。

假设  $m$  和  $k$  是时间的函数:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}) + kx = 0. \quad (5.39)$$

假设质量为常数:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2(t)x = 0. \quad (5.40)$$

假设  $w(t)$  为周期性函数:

$$w(t+T) = w(t),$$

方程在 (5.40) 在变换  $t \rightarrow t+T$  下是不变的. 因此, 假设  $x(t)$  是一个解, 则:  $x(t+T)$  也是一个解。

令  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  是方程的两个独立的解, 它们在  $t \rightarrow t+T$  变换下, 将变为它们的线性组合. 可以选择适当的  $x_1, x_2$ , 实在的时间变换下, 它们仅仅是:

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= \mu_1 x_1(t) \\ x_2(t+T) &= \mu_2 x_2(t), \end{aligned} \quad (5.41)$$

具有这种性质的一般解为:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \mu_1^{t/T} F(t) \\x_2(t) &= \mu_2^{t/T} G(t),\end{aligned}$$

其中  $F(t)$  和  $G(t)$  是周期为  $T$  的周期性函数。常数由下式决定：

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + w^2(t)x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + w^2(t)x_2 &= 0.\end{aligned}$$

分别用  $x_2$  和  $x_1$ , 乘以上式并相减, 得到:

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = 0,$$

或者:

$$\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = \text{const.}$$

$t + T$  代替  $t$ , 方程的右边乘以  $\mu_1 \mu_2$ , 因此,

$$\mu_1 \mu_2 = 1, \tag{5.42}$$

运动方程 (5.40) 中的系数都为实数, 因此, 如果  $x(t)$  是方程的解, 则  $x^*(t)$  也是方程的解。因此,  $\mu_1, \mu_2$  应该与  $\mu_1^*, \mu_2^*$  相同。这将导致  $\mu_1 = \mu_2^*$  或者  $\mu_1$  and  $\mu_2$  都为实数。第一种情况中, 基于方程 (5.42), 我们得到  $\mu_1 = 1/\mu_1^*$ , 等价于:  $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$ .

在第二种情况中, 两个解有如下的形式:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \mu^{t/T} F(t) \\x_2(t) &= \mu^{-t/T} G(t).\end{aligned}$$

其中  $\mu$  为模长不为 1 的数。随着时间 e 指数增长: 参数共振!



# 第六章 哈密顿力学

## 6.1 哈密顿正则方程

### 6.1.1 勒让德变换

对函数  $f = f(x, y)$  全微分, 得到:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \equiv u dx + v dy \quad (6.1)$$

其中

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \\ v &= v(x, y) \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.2)$$

下面作变换:

$$df = u dx + v dy = d(ux) - x du + v dy \quad (6.3)$$

令  $\tilde{f} = f - ux$ , 则

$$d\tilde{f} = d(f - ux) = -x du + v dy \quad (6.4)$$

即, 我们做了如下的坐标变换:

$$(x, y) \longrightarrow (u, y)$$

响应的函数  $f(x, y)$  变为新的函数  $\tilde{f}(u, y)$ :

$$\begin{aligned} f &\longrightarrow \tilde{f} = f - ux = \tilde{f}(u, y) \\ &= f(x(u, y), y) - u \cdot x(u, y) \\ &= \tilde{f}(u, y) \end{aligned} \quad (6.5)$$

此即勒让德变换!

比较

$$\begin{aligned} d\tilde{f} &= -x du + v dy \\ d\tilde{f} &= u dx + v dy \end{aligned} \quad (6.6)$$

我们有:

$$x = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \quad (6.7)$$

从上可以看出, 在勒让德变换中, 我们在做坐标变换  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  同时, 要求相应的函数也随着改变。勒让德变换的优点在于,  $(x, u), (v, y)$  互为偏导数!

同理, 继续做勒让德变换:

$$(x, y) \longrightarrow (u, v)$$

$$f \longrightarrow \tilde{f} = f - ux - vy \quad (6.8)$$

$$df = -xdu - ydv \longrightarrow d\tilde{f}(u, v) \quad (6.9)$$

即函数  $\tilde{f}$  是以  $(u, v)$  为自然变量的函数。

我们很容易推广到多维情形。对多维情形  $f = f(x^1, x^2, \dots, x^s; y^1, y^2, \dots, y^s)$ , 有:

$$\begin{aligned} df &= \sum_{\alpha} u_{\alpha} dx^{\alpha} + \sum_{\alpha} v_{\alpha} dy^{\alpha} \\ &= d\left(\sum_{\alpha} u_{\alpha} x^{\alpha}\right) - \sum_{\alpha} x^{\alpha} du_{\alpha} + \sum_{\alpha} v_{\alpha} dy^{\alpha} \end{aligned} \quad (6.10)$$

其中,

$$u_{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}, \quad v_{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}} \quad (6.11)$$

勒让德变换:

$$f \longrightarrow g = -f + \sum_{\alpha} u_{\alpha} x^{\alpha} \quad (6.12)$$

$$dg = \sum_{\alpha} x^{\alpha} du_{\alpha} - \sum_{\alpha} v_{\alpha} dy^{\alpha} \quad (6.13)$$

这里  $g = g(u_{\alpha}, y^{\alpha})$ , 且

$$x^{\alpha} = \frac{\partial g}{\partial u_{\alpha}}, \quad v_{\alpha} = -\frac{\partial g}{\partial y^{\alpha}} \quad (6.14)$$

### 6.1.2 哈密顿正则方程

记  $p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$ , 我们做如下勒让德变换:

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow H \\ (q_{\alpha}, \dot{q}_{\alpha}) &\longrightarrow (q_{\alpha}, p_{\alpha}) \end{aligned}$$

注意到（下面我们采用了爱因斯坦求和规则）：

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + d(\dot{q}_\alpha p_\alpha) - \dot{q}_\alpha dp_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$d(\dot{q}_\alpha p_\alpha - L) = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (6.16)$$

记

$$H \equiv \dot{q}_\alpha p_\alpha - L \quad (6.17)$$

则：

$$\begin{aligned} dH &= -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (6.18)$$

由上两式比较，得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = -\frac{d}{dt} p_\alpha = -\dot{p}_\alpha \\ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases} \quad (6.19)$$

整理后得：

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (6.20)$$

上式即为哈密顿方程。

注意， $H = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$  是相空间中的函数 - 态函数。

哈密顿力学中求解问题的步骤：

- (1)  $L$
- (2)  $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$
- (3)  $H = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$
- (4) 哈密顿正则方程（ $2s$  个一阶微分方程，也即动力学方程）

### 6.1.3 修正的哈密顿原理与哈密顿正则方程

下面我们讨论“修正的哈密顿原理”，注意：这是一个全新的原理。在修正的哈密顿原理中， $\delta q^\alpha$  和  $\delta p_\alpha$  是独立的，即是相空间的变分。

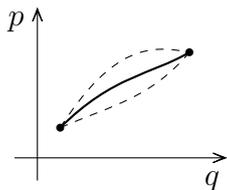


图 6.1: 修正的哈密顿原理: 相空间的变分。

给定哈密顿量  $H$ , 对应的作用量定义为:

$$S[q_\alpha, p_\alpha] \equiv \int_{t_1}^{t_2} [p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(q_\alpha, p_\alpha, t)] dt \quad (6.21)$$

在相空间中的变分, 分步积分, 并利用  $\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$ , 得到:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} [(-\dot{p}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}) \delta q_\alpha + (\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}) \delta p_\alpha] dt = 0 \quad (6.22)$$

由于  $\delta q_\alpha, \delta p_\alpha$  独立, 得到:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (6.23)$$

此式即动力学方程。

讨论:  $q_\alpha, \dot{q}_\alpha, p_\alpha, \dot{p}_\alpha$  能同时独立吗?  $p_\alpha$  与  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$  不是通过  $p_\alpha = p_\alpha(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$  相互定义的吗? 事实上, 此式是旧的 Lagrange 力学中的内容! 而在 Hamilton 力学中, 此式作为动力学方程的一部分而不是定义。因此修正的哈密顿原理中这些动力学变量的地位是完全独立的。

从另一个角度来看, 记  $f = p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(q_\alpha, p_\alpha)$ ,  $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} f dt$ 。我们把  $q_\alpha, p_\alpha$  视为独立的, 则带入欧拉-拉格朗日方程, 得到:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \implies \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \implies -\dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0 \quad (6.25)$$

在我们学习哈密顿原理时,  $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) dt$ , 该变分要求  $\delta q_\alpha|_{t_1} = \delta q_\alpha|_{t_2} = 0$ , 那么在修正的哈密顿原理中, 是否需要  $\delta q_\alpha|_{t_1} = \delta q_\alpha|_{t_2} = \delta p_\alpha|_{t_1} = \delta p_\alpha|_{t_2} = 0$ ? 由于  $f$  中不含  $\dot{p}_\alpha$ , 因此并不需要要求  $\delta p_\alpha|_{t_1} = \delta p_\alpha|_{t_2} = 0$ 。

当然, 我们也可以进一步要求  $\delta p_\alpha|_{t_1} = \delta p_\alpha|_{t_2} = 0$ 。要求  $\delta p_\alpha|_{t_1} = \delta p_\alpha|_{t_2} = 0$  的优点如下讨论。根据前面的讨论, 这里的  $f$  函数类似哈密顿原理里的  $L$ , 可以差一个以  $(q_\alpha, p_\alpha, t)$  为变量的函数对时间的全导数:

$$f \rightarrow f + \frac{dF(q_\alpha, p_\alpha, t)}{dt} \quad (6.26)$$

例如:  $F = -q_\alpha p_\alpha$ , 则

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [-\dot{p}_\alpha q_\alpha - H(q_\alpha, p_\alpha, t)] dt = 0 \quad (6.27)$$

$$\implies \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (6.28)$$

记  $f' = -\dot{p}_\alpha q_\alpha - H(q_\alpha, p_\alpha, t)$ , 这里  $f'$  与拉格朗日量毫无关系!

### 6.1.4 循环坐标与劳斯方程

注意, 若  $q_\alpha$  为  $L$  的循环坐标, 则它也为  $H$  的循环坐标<sup>1</sup>, 即  $H$  中不显含  $q_\alpha$ , 故

$$p_\alpha = \text{const} = c_\alpha \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} H &= H(q_1, \dots, q_s; p_1, \dots, p_s) \\ &= H(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s; p_1, \dots, p_{\alpha-1}, c_\alpha, p_{\alpha+1}, \dots, p_s) \end{aligned} \quad (6.30)$$

起到了降维的效果!

下面我们介绍劳斯函数, 它一半长得像  $H$ , 一半长得像  $L$ 。若  $q_1, \dots, q_m$  为循环坐标, 引入  $R$ :

$$\begin{aligned} R &= R(q_1, q_2, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_m; \dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_s, t) \\ &\equiv \sum_{\alpha=1}^m p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \end{aligned} \quad (6.31)$$

事实上,  $R$  中是不含  $q_1, \dots, q_m$  的, 这里只是形式上写为  $q_1, \dots, q_m$  的函数。

对  $R$  求全微分得:

$$dR = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^s \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial R}{\partial t} dt \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} & d\left(\sum_{\alpha=1}^m p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m (p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left[\left(p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) d\dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha\right] \\ &\quad - \sum_{\alpha=m+1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^m (\dot{q}_\alpha dp_\alpha - \dot{p}_\alpha dq_\alpha) - \sum_{\alpha=m+1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (6.33)$$

对比方程 (6.32) 与方程 (6.33), 得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha, & \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha, & \alpha = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (6.34)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, & \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, & \alpha = m+1, \dots, s \end{cases} \quad (6.35)$$

<sup>1</sup>这是因为各个  $p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}$  不显含  $q_\alpha$ , 反解得到的各  $\dot{q}_\beta = \dot{q}_\beta(q, p, t)$  中也不显含  $q_\alpha$ , 则  $H = p_\beta \dot{q}_\beta - L$  中也不显含  $q_\alpha$ .

把(6.35)代入 Euler-Lagrange's Equations, 得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = m+1, \dots, s \quad (6.36)$$

实际上:  $R = R(q_{m+1}, \dots, q_s; c_1, \dots, c_m; \dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_s; t)$ .

### 6.1.5 例题

#### 例 1

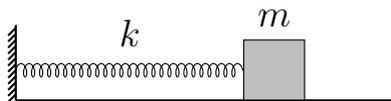


图 6.2: 弹簧振子

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (6.37)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (6.38)$$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} H = H(x, p) &= p\dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

正则方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \end{aligned} \right\} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \quad (6.41)$$

#### 例 2 向心力场

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad V = -\frac{k}{r} \quad (6.42)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \quad (6.43)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad (6.44)$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \\ &= T + V \end{aligned} \quad (6.46)$$

动力学方程:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} \end{cases} \quad (6.47)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{即 } p_\theta \equiv \beta) \end{cases} \quad (6.48)$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\beta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad (6.49)$$

H 所含的变量只剩下了  $(r, p_r)$ .

**例 3** 向心力场——劳斯方程

$$\begin{aligned} R = p_\theta \dot{\theta} - L &= p_\theta \dot{\theta} - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \\ &= -\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\beta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = -\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = -m\ddot{r} \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\beta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} \quad (6.52)$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0} -m\ddot{r} + \frac{\beta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} = 0 \quad (6.53)$$

**例 4**

$$L = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - eA_\mu\dot{x}^\mu \quad (6.54)$$

正则动量:

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m\dot{x}_\mu - eA_\mu \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} H = \dot{x}^\mu p_\mu - L &= \dot{x}^\mu(m\dot{x}_\mu - eA_\mu) \\ &\quad - \left( \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - eA_\mu\dot{x}^\mu \right) \\ &= \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\dot{x}^\mu = \frac{p^\mu + eA^\mu}{m} \quad (6.57)$$

$$H = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \frac{(p^\mu + eA^\mu)(p^\nu + eA^\nu)}{m} \quad (6.58)$$

## 6.2 正则变换

### 6.2.1 正则变换

我们所得到的哈密顿量中是否含有循环坐标, 这依赖于坐标系的选择 (我们可以回忆有心力场条件下的运动, 以  $(r, \theta)$  为广义坐标时会发现  $\theta$  是循环坐标而以  $(x, y)$  为广义坐标时却找不到循环坐标).

$$H(q_\alpha, p_\alpha) \longrightarrow H'(P_\alpha, Q_\alpha) \quad Q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s) \text{ 为循环坐标}$$

$$\implies P_\alpha = \beta_\alpha = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (6.59)$$

$$H' = H'(P_\alpha) = H'(\beta_\alpha) \quad (6.60)$$

$$\implies \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial \beta_\alpha} \equiv \gamma_\alpha(\beta) \quad (6.61)$$

$$\implies Q_\alpha = \gamma_\alpha t + \delta_\alpha \quad (6.62)$$

变换

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t) \end{cases}$$

是正则变换的条件: 如果我们能找到一个  $\tilde{H}(Q_\alpha, P_\alpha, t)$  使得

$$\begin{cases} \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\alpha} \end{cases}$$

则这样的变换称为正则变换.

下面我们使用修正的 Hamilton 原理来构造正则变换:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_\alpha \dot{q}_\alpha - H) dt &= 0 \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} (P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \tilde{H}) dt &= 0 \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} [(p_\alpha \dot{q}_\alpha - H) - (P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \tilde{H})] dt &= 0 \\ \implies (p_\alpha \dot{q}_\alpha - H) - (P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \tilde{H}) &= \frac{dF}{dt} \end{aligned} \quad (6.63)$$

即

$$(p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha) + (\tilde{H} - H) dt = dF \quad (6.64)$$

此即正则变换条件. 式中

$$F = F(q_\alpha, Q_\alpha, t)$$

若考虑等时变分:  $\delta t = 0$

$$\implies p_\alpha \delta q_\alpha - P_\alpha \delta Q_\alpha = \delta F \quad (6.65)$$

### 6.2.2 正则变换的生成函数

由前面推导可见,  $F$  给定  $\iff$  正则变换给定. 我们称  $F$  为生成函数, 又叫母函数. 它有  $2s$  个独立变量.

$$p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (\tilde{H} - H)dt = dF_1(q_\alpha, Q_\alpha, t) \quad (6.66)$$

$$p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (\tilde{H} - H)dt = d(F_1 + Q_\alpha P_\alpha) = dF_2(q_\alpha, P_\alpha, t) \quad (6.67)$$

$$-q_\alpha dp_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (\tilde{H} - H)dt = d(F_1 - p_\alpha q_\alpha) = dF_3(p_\alpha, Q_\alpha, t) \quad (6.68)$$

$$-q_\alpha dp_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (\tilde{H} - H)dt = d(F_1 - p_\alpha q_\alpha + Q_\alpha P_\alpha) = dF_4(p_\alpha, P_\alpha, t) \quad (6.69)$$

先以  $F_1 = F_1(q_\alpha, Q_\alpha, t)$  为例:

$$p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha} \implies Q_\alpha = Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t) \quad (6.70)$$

$$P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} \implies P_\alpha = P_\alpha(q_\alpha, Q_\alpha, t) = P_\alpha(q_\alpha, Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t), t) \quad (6.71)$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \implies \tilde{H} = H(q_\alpha, p_\alpha, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q_\alpha, Q_\alpha, t) \quad (6.72)$$

同样地:

- $F_2 = F_2(q_\alpha, P_\alpha, t)$

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (6.73)$$

- $F_3 = F_3(p_\alpha, Q_\alpha, t)$

$$q_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (6.74)$$

- $F_4 = F_4(p_\alpha, P_\alpha, t)$

$$q_\alpha = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (6.75)$$

### 6.2.3 例题

常见的三种基本变换:

(1) 恒等变换

$$F_2 = q_\alpha P_\alpha \quad (6.76)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = P_\alpha, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = q_\alpha, \quad \tilde{H} = H \quad (6.77)$$

(2) 相空间中的平移变换

$$F_2 = (q_\alpha + c_\alpha)(P_\alpha - d_\alpha) \quad (6.78)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = P_\alpha - d_\alpha, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = q_\alpha + c_\alpha, \quad \tilde{H} = H \quad (6.79)$$

(3) 广义坐标和广义动量互换变换 (dual, 即对偶变换)

$$F_1 = q_\alpha Q_\alpha \quad (6.80)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} = -q_\alpha \quad (6.81)$$

即

$$(q_\alpha, p_\alpha) \longrightarrow (Q_\alpha, P_\alpha) = (p_\alpha, -q_\alpha)$$

(4)  $q$  和  $p$  分别在位形空间和动量空间内的正交变换

$$F_2 = a_{\alpha\beta} P_\alpha q_\beta \quad (6.82)$$

其中  $aa^T = I$ , 即  $a_{\alpha\beta} a_{\beta\gamma}^T = a_{\alpha\beta} a_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}$ .

$$p_\beta = \frac{\partial F_2}{\partial q_\beta} = a_{\alpha\beta} P_\alpha, \quad Q_\beta = \frac{\partial F_2}{\partial P_\beta} = a_{\beta\alpha} q_\alpha \quad (6.83)$$

$$a_{\gamma\beta} p_\beta = a_{\gamma\beta} a_{\alpha\beta} P_\alpha = \delta_{\gamma\alpha} P_\alpha = P_\gamma \quad (6.84)$$

即:

$$P_\alpha = a_{\alpha\beta} p_\beta, \quad Q_\alpha = a_{\alpha\beta} q_\beta \quad (6.85)$$

若  $\det a_{\alpha\beta} = 1$ , 则  $(q_\alpha, p_\alpha) \longrightarrow (Q_\alpha, P_\alpha)$  为各自空间内的纯转动.

**例 1** 证明:  $Q = \ln(\frac{\sin p}{q})$ ,  $P = q \cot p$  为正则变换.

$$\begin{aligned} p\delta q - P\delta Q &= p\delta q - q \cot p \cdot \delta \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right) \\ &= p\delta q - q \cot p \cdot \left(\frac{\cos p}{\sin p} \delta p - \frac{1}{q} \delta q\right) \\ &= (p + \cot p)\delta q - q \cot^2 p \cdot \delta p \\ &= \delta[q(p + \cot p)] \end{aligned} \quad (6.86)$$

**例 2** 证明:  $Q = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ ,  $P = -\arctan(\frac{q}{p})$  为正则变换. 当  $H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$  时, 求解此问题.

$$\begin{aligned} p\delta q - P\delta Q &= p\delta q + \arctan\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \delta\left[\frac{1}{2}(q^2 + p^2)\right] \\ &= [p + q \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)]\delta q + p \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \delta p \end{aligned} \quad (6.87)$$

由于<sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial p} [p + q \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)] = \frac{\partial}{\partial q} [p \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)] = \frac{p^2}{p^2 + q^2} \quad (6.88)$$

<sup>1</sup> $[\tan^{-1} x]' = 1/(1+x^2)$

故  $p\delta q - P\delta Q$  可积, 即可以写成一个函数的全变分.

下面计算生成函数, 选择  $F_4 = F_4(p, P)$ .

$$q = -p \tan P = -\frac{\partial F_4}{\partial p} \quad (6.89)$$

$$Q = \frac{p^2}{2} \sec^2 P = \frac{\partial F_4}{\partial P} \quad (6.90)$$

$$\implies F_4 = \frac{p^2}{2} \tan P \quad (6.91)$$

故

$$\tilde{H} = H = Q \quad (6.92)$$

代入哈密顿正则方程:

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -1 \quad (6.93)$$

$$\implies \begin{cases} Q = \frac{A_0^2}{2} & A_0 = \text{const} \\ P = -t + t_0 & t_0 = \text{const} \end{cases} \quad (6.94)$$

$$\implies \begin{cases} p = \sqrt{2Q \cos^2 P} = A_0 \cos(t - t_0) \\ q = -p \tan P = A_0 \sin(t - t_0) \end{cases} \quad (6.95)$$

此即谐振子所满足的运动方程!

**例 3** 已知  $F_1 = mg(\frac{1}{6}gQ^3 + qQ)$ , 试分析重力场中的竖直上抛问题:  $H = \frac{p^2}{2m} + mgq$ .

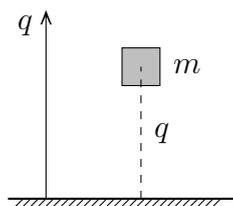


图 6.3: 重力场中的竖直上抛运动。

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = mgQ \quad (6.96)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -mg\left(\frac{g}{2}Q^2 + q\right) \quad (6.97)$$

$$\begin{cases} (6.97) \implies q = -\frac{P}{mg} - \frac{1}{2}gQ^2 \\ p = mgQ \end{cases} \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned}\tilde{H} = H &= \frac{1}{2m}(mgQ)^2 + mg\left(-\frac{P}{mg} - \frac{1}{2}gQ^2\right) \\ &= -P\end{aligned}\quad (6.99)$$

注意到  $Q$  为循环坐标, 故

$$\begin{cases} P = c_1 = \text{const} \\ \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = -1 \implies Q = -t + c_2, \quad c_2 = \text{const} \end{cases}\quad (6.100)$$

记  $c_2 = t_0$ , 得

$$\begin{cases} p = -mg(t - t_0) \\ q = -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 - \frac{c_1}{mg} \end{cases}\quad (6.101)$$

**例 4**  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$

作变换:

$$\begin{cases} q = Q \cos \theta + \frac{P}{m\omega} \sin \theta \\ p = -m\omega Q \sin \theta + P \cos \theta \end{cases}\quad (6.102)$$

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \frac{\sin \theta}{m\omega} \\ -m\omega \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1 \quad \text{正则变换!}\quad (6.103)$$

$$\begin{aligned}dF_2 &= pdq + QdP \\ &= (-m\omega q \tan \theta + \frac{P}{\cos \theta})dq + (\frac{q}{\cos \theta} - \frac{P}{m\omega} \tan \theta)dP \\ &= d[\frac{qP}{\cos \theta} - \frac{1}{2}m\omega(q^2 + \frac{P^2}{m^2\omega^2}) \tan \theta]\end{aligned}\quad (6.104)$$

$$\begin{aligned}H(q, p) &= \frac{1}{2m}(-m\omega Q \sin \theta + P \cos \theta)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(Q \cos \theta + \frac{P}{m\omega} \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2Q^2 = H(Q, P)\end{aligned}\quad (6.105)$$

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= H + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2Q^2 + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t}\end{aligned}\quad (6.106)$$

不妨取  $\theta = \omega t$ , 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} &= [qP \sin \theta - \frac{1}{2}m\omega(q^2 + \frac{P^2}{m^2\omega^2})] \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \\ &= \{(Q \cos \theta + \frac{P}{m\omega} \sin \theta)P \sin \theta \\ &\quad - \frac{1}{2}m\omega[(Q \cos \theta + \frac{P}{m\omega} \sin \theta)^2 + \frac{P^2}{m^2\omega^2}]\} \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \\ &= -(\frac{P^2}{2m\omega} + \frac{1}{2}m\omega Q^2)\dot{\theta} = -H(Q, P)\frac{\dot{\theta}}{\omega} \\ &= -H(Q, P)\end{aligned}\quad (6.107)$$

$$\implies \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} = 0 \quad (6.108)$$

$$\implies \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0 \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \quad (6.109)$$

$$\implies Q = Q_0, \quad P = P_0 \quad (6.110)$$

$$\begin{cases} q(t) = Q_0 \cos \omega t + \frac{P_0}{m\omega} \sin \omega t = A_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\ p(t) = -m\omega Q_0 \sin \omega t + P_0 \cos \omega t = -m\omega A_0 \sin(\omega t + \phi_0) \end{cases} \quad (6.111)$$

其中  $A_0 = \sqrt{Q_0^2 + \frac{P_0^2}{m^2\omega^2}}$ ,  $\tan \phi_0 = \frac{-P_0/m\omega}{Q_0}$ .

#### 6.2.4 正则变换的几何意义

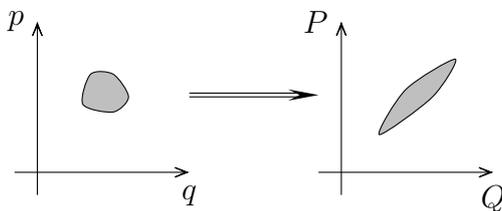


图 6.4: 正则变换: 相空间保面积变换。

对于正则变换  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ , 有

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = 1 \quad (6.112)$$

下面给出证明.

注意到

$$p\delta q - P\delta Q = \delta F \quad (6.113)$$

有

$$\begin{aligned} p\delta q - P\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\delta q + \frac{\partial Q}{\partial p}\delta p\right) &= \delta F \\ \left(p - P\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\delta q - P\frac{\partial Q}{\partial p}\delta p &= \delta F \end{aligned}$$

注意到上式等号左边可积, 故

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p}\left(p - P\frac{\partial Q}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(P\frac{\partial Q}{\partial p}\right) &= 0 \quad (6.114) \\ 1 - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - P\frac{\partial^2 Q}{\partial q\partial p} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} + P\frac{\partial^2 Q}{\partial q\partial p} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = 1 = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \quad (6.115)$$

### 6.3 泊松括号

哈密顿正则方程:  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ ,  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ , 形式上看起来不对称.

除此之外, 历史上泊松括号在从经典向量子过渡中扮演了重要角色.

#### 6.3.1 泊松括号的定义

对于相空间中的函数  $f = f(q, p, t)$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \\ &\equiv \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \end{aligned} \quad (6.116)$$

式中

$$[u, v] \equiv \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial(u, v)}{\partial(q_\alpha, p_\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_\alpha} \frac{\partial v}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} \frac{\partial v}{\partial q_\alpha} \right) \quad (6.117)$$

#### 6.3.2 泊松括号的基本性质

- (1)  $[u, v] = -[v, u]$
- (2)  $\frac{\partial}{\partial x}[u, v] = [\frac{\partial u}{\partial x}, v] + [u, \frac{\partial v}{\partial x}] \quad x = q_\alpha, p_\alpha, t$
- (3)  $[u, v + w] = [u, v] + [u, w]$
- (4)  $[u, vw] = [u, v]w + v[u, w]$
- (5) 显然:  $[q_\alpha, q_\beta] = 0$  (对易),  $[p_\alpha, p_\beta] = 0$  (对易),  $[q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$  (不对易)  
 $[q_\alpha, f] = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial(q_\alpha, f)}{\partial(q_\alpha, p_\alpha)}$ ,  $[p_\alpha, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial(p_\alpha, f)}{\partial(q_\alpha, p_\alpha)}$
- (6) Jacobi Identity

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad (6.118)$$

- (7) 若  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  为正则变换, 则  $[u, v]_{p,q} = [u, v]_{P,Q}$

证明<sup>1</sup>

$$[u, v]_{p,q} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(q, p)} \frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(Q, P)} \quad (6.119)$$

Jacobi Identity(6.118)的证明:

先计算  $[u, [v, w]]$ , 记  $v_q \equiv \frac{\partial v}{\partial q}$ , 则

$$[v, w] = v_q w_p - v_p w_q \quad (6.120)$$

<sup>1</sup>正则变换:  $[Q, P]_{q,p} = 1$

$$\begin{aligned}
[u, [v, w]] &= u_q[v, w]_p - u_p[v, w]_q \\
&= u_q(v_{qp}w_p + v_qw_{pp} - v_{pp}w_q - v_pw_{qp}) \\
&\quad - u_p(v_{qq}w_p + v_qw_{pq} - v_{pq}w_q - v_pw_{qq})
\end{aligned} \tag{6.121}$$

其中  $v_{qp}$  前面的系数为  $(u_qw_p + u_pw_q)$ ,  $w_{qp}$  系数为  $(-u_qv_p - u_pv_q)$ .

在上式中做如下轮换  $u \rightarrow w, w \rightarrow v, v \rightarrow u$ , 得  $[w, [u, v]]$  中  $v_{qp}$  的系数为  $(-w_qu_p - w_pu_q)$ , 故  $[u, [v, w]] + [w, [u, v]]$  中  $v_{qp}$  的系数为零. 而  $[v, [w, u]]$  中只会出现  $v$  的一阶偏导数, 显然其中的  $v_{qp}$  的系数为零. 综上, (6.118)式中  $v_{qp}$  的系数为零. 类似地, 可证得(6.118)式中其它二阶导数项前面的系数也为零.

我们使用另外一种写法来重复上面的推导, 记  $[u, v] \equiv u_i\epsilon_{ij}v_j$ , 其中

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}
[u, [v, w]] &= u_i\epsilon_{ij}[v, w]_j = u_i\epsilon_{ij}(v_k\epsilon_{kl}w_l)_j \\
&= u_i\epsilon_{ij}(v_k\epsilon_{kl}w_{lj} + v_{kj}\epsilon_{kl}w_l)
\end{aligned} \tag{6.122}$$

其中  $w$  的二阶导数项为:

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}u_iv_kw_{lj}$$

而

$$[v, [w, u]] = v_k\epsilon_{kl}(w_j\epsilon_{ji}u_i)_l \tag{6.123}$$

故其中  $w$  的二阶导数项为:

$$\epsilon_{ji}\epsilon_{kl}u_iv_kw_{jl}$$

注意到  $w_{lj} = w_{jl}$  (求偏导数可交换次序), 故含  $w$  二阶导数的项为两者之和:

$$(\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji})\epsilon_{kl}u_iv_kw_{lj} = 0 \tag{6.124}$$

### 6.3.3 泊松括号的应用

#### (1) 用泊松括号表示运动方程

若  $f = f(q, p)$ , 不显含时间, 则

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} = [f, H] \tag{6.125}$$

则哈密顿正则方程可表示为

$$\dot{q}_\alpha = [q_\alpha, H], \quad \dot{p}_\alpha = [p_\alpha, H], \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \tag{6.126}$$

形式上  $(q_\alpha, p_\alpha)$  是对称的.

## (2) 运动积分与泊松括号

若  $f$  守恒, 即

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \quad (6.127)$$

同时, 若  $f = f(q, p)$  不显含时间, 则

$$\dot{f} = [f, H] = 0 \quad (6.128)$$

故若  $H$  不显含时间, 则

$$\dot{H} = [H, H] = 0 \quad (6.129)$$

若  $H$  不显含  $q_\gamma$  (循环坐标), 则

$$\begin{aligned} \dot{p}_\gamma = [p_\gamma, H] &= \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial p_\gamma}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p_\gamma}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial(p_\gamma, H)}{\partial(q_\alpha, p_\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s (0 - \delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (6.130)$$

即  $p_\gamma$  为守恒量. 同理, 若  $H$  不显含  $p_\gamma$ , 则  $\dot{q}_\gamma = 0$ .

## (3) 泊松定理: 找新的运动积分

$$\left. \begin{aligned} u = u(q, p, t) = \text{const} \\ v = v(q, p, t) = \text{const} \end{aligned} \right\} \implies [u, v] = \text{const}$$

证明:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u, v] &= \frac{\partial}{\partial t}[u, v] + [[u, v], H] \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \left[ u, \frac{\partial v}{\partial t} \right] + [[u, v], H] \end{aligned} \quad (6.131)$$

若  $u$  为运动积分, 则

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [u, H] = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial t} = [H, u] \quad (6.132)$$

同理

$$\frac{\partial v}{\partial t} = [H, v] \quad (6.133)$$

故

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u, v] &= [[H, u], v] + [u, [H, v]] + [[u, v], H] \\ &= -[v, [H, u]] - [u, [v, H]] - [H, [u, v]] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.134)$$

## (4) 经典-量子对应

在量子力学中, 有

$$[q_\alpha, q_\beta] = 0, \quad [p_\alpha, p_\beta] = 0, \quad [q_\alpha, p_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta} \quad (6.135)$$

## 6.3.4 例题

**例 1**  $J_x, J_y, J_z, J$

- (1)  $[J_x, J_y] = ?$   $[J_x, J] = ?$
- (2) 证明:  $J_x, J_y$  不能同时成为这个系统的广义动量.
- (3)  $J_x, J_y = \text{const} \implies J_z = \text{const}$ .

**解:**

(1)

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] + [yp_z, -xp_z] + [-zp_y, zp_x] + [-zp_y, -xp_z] \quad (6.136) \\ &= -yp_x + 0 + 0 + xp_y = J_z \end{aligned}$$

同样地, 我们可以算出:  $[J_x, J_z] = -J_y$ ;  $[J_x, J^2] = 0 \implies [J_x, J] = 0$ .

综上,  $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$ ,  $[J_i, J^2] = 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

- (2) 由于  $[J_x, J_y] \neq 0$ , 故  $J_x$  与  $J_y$  不能同时成为广义动量  
而  $[J_x, J] = 0$ , 因此  $J_x, J$  可以.
- (3)  $J_z = [J_x, J_y] = \text{const}$  得证!

**例 2**  $H = p_1 p_2 + q_1 q_2$ , 试证明:  $p_1^2 + q_2^2 = \text{const}$ ,  $p_2^2 + q_1^2 = \text{const}$ .

由于  $H$  不显含时间  $t$ , 故  $H = c_0$ .

$$\begin{aligned} [p_1^2 + q_2^2, H] &= [p_1^2, q_1 q_2] + [q_2^2, p_1 p_2] = -2p_1 q_2 + 2p_1 q_2 = 0 \quad (6.137) \\ \implies p_1^2 + q_2^2 &= c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [p_2^2 + q_1^2, H] &= [p_2^2, q_1 q_2] + [q_1^2, p_1 p_2] = -2p_2 q_1 + 2p_2 q_1 = 0 \quad (6.138) \\ \implies p_2^2 + q_1^2 &= c_2 \end{aligned}$$

$$[p_1^2 + q_2^2, p_2^2 + q_1^2] = [p_1^2, q_1^2] + [q_2^2, p_2^2] = -2p_1 q_1 + 2p_2 q_2 \equiv 2c_3 \quad (6.139)$$

即  $c_3 = -p_1 q_1 + p_2 q_2$ .

而

$$[p_1^2 + q_2^2, -p_1 q_1 + p_2 q_2] = 2c_1 \quad (6.140)$$

$$[p_2^2 + q_1^2, -p_1 q_1 + p_2 q_2] = -2c_2 \quad (6.141)$$

不能再给出新的守恒量. 事实上,  $c_0, c_1, c_2, c_3$  并不独立, 它们之间存在关系

$$c_0^2 + c_3^2 = c_1 c_2 \quad (6.142)$$

**习题**  $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{k}{r}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $L = xp_y - yp_x = L_z$ .

记  $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mkr}{r}$ , 即  $\mathbf{A} = (A_x, A_y) = (p_y L - \frac{mkx}{r}, -p_x L - \frac{mky}{r})$ .

- (1)  $[L, H] = 0$ ,  $[A_x, H] = 0$ ,  $[A_y, H] = 0$ .
- (2)  $[A_x, L] = -A_y$ ,  $[A_y, L] = A_x$ ,  $[A_x, A_y] = -(2mH)L$ .
- (3) 若记  $H = -|E|$ , 引入:  $\mathbf{R} = (\frac{A_x}{\sqrt{2m|E|}}, \frac{A_y}{\sqrt{2m|E|}}, L)$ . 证明:  $R^2 = \frac{mk^2}{2|E|}$ .

## 6.4 哈密顿-雅可比方程

### 6.4.1 Hamilton-Jacobi equation

我们尝试寻找一个特殊的第二类生成函数  $F_2 = F_2(q, P, t)$ , 使得由它生成的正则变换带来的新的哈密顿函数  $\tilde{H}(Q, P, t) = 0$ . 若如此, 则

$$\begin{cases} \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha} = 0 & Q_\alpha = \text{const} \\ \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\alpha} = 0 & P_\alpha = \text{const} \end{cases} \quad (6.143)$$

注意到

$$\tilde{H} = H(q_1, \dots, q_s; p_1, \dots, p_s; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q_1, \dots, q_s; P_1, \dots, P_s; t) = 0 \quad (6.144)$$

而  $p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, s$ , 故

$$H(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_s}; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q_1, \dots, q_s; P_1, \dots, P_s; t) = 0 \quad (6.145)$$

令<sup>1</sup> $S(q, t) = F_2(q, P, t) + A$ , 则

$$H(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (6.146)$$

此即为哈密顿-雅可比方程, 其中  $S$  称为哈密顿主函数.

由数学知识,  $S$  中含有的独立的积分常数与自变量的个数相同, 为  $s+1$  个, 其中  $A$  已用了一个, 剩下的即为  $P_1, \dots, P_s$ .

### 6.4.2 S 的意义

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} = -H \quad (6.147)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial p_\alpha} \dot{P}_\alpha \\ &= -H + p_\alpha \dot{q}_\alpha = L \end{aligned} \quad (6.148)$$

上面用到了  $\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha$  以及  $\dot{P}_\alpha = 0$  这两条件.

$$\Rightarrow S = \int L dt \quad (6.149)$$

<sup>1</sup> $q$  代表  $q_1, \dots, q_s$ , 而  $P_1, \dots, P_s$  仅仅是求解 H-J 方程过程中得到的积分常数.

### 6.4.3 哈密顿特征函数

若  $H$  不显含  $t$ , 即  $H = E = \text{const}$ , 则有

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \quad (6.150)$$

$$S(q, t) = -Et + W(q_1, \dots, q_s) + A \quad (6.151)$$

而

$$S = \int (p_\alpha \dot{q}_\alpha - H) dt = \int p_\alpha dq_\alpha - Et + A \quad (6.152)$$

$$\Rightarrow W(q_1, \dots, q_s) = \int p_\alpha dq_\alpha \quad (6.153)$$

我们称  $W(q_1, \dots, q_s)$  为 Hamilton 特征函数.

将(6.151)代入 H-J 方程:

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \quad H + \frac{\partial S}{\partial t} = H + (-E) = 0 \quad (6.154)$$

H-J 方程可化为:

$$H(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}) = E \quad (6.155)$$

既然已知  $E$  是一个积分常数了, 那就不妨设  $P_1 = E$  喽! 这样问题就变为了解

$$W = W(q_1, \dots, q_s; E, P_2, \dots, P_s) \quad (6.156)$$

而  $S, F_2, W$  这些函数之间的关系为:

$$\begin{aligned} S &= F_2(q_1, \dots, q_s; P_1, \dots, P_s; t) + A \\ &= -Et + W(q_1, \dots, q_s; P_1, P_2, \dots, P_s) + A \\ &= -P_1 t + W(q_1, \dots, q_s; P_1, P_2, \dots, P_s) + A \end{aligned} \quad (6.157)$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha} = \begin{cases} -t + \frac{\partial W}{\partial E} & \alpha = 1 \\ \frac{\partial W}{\partial P_\alpha} & \alpha = 2, \dots, s \end{cases} \quad (6.158)$$

**例 1**  $H(p, q) = p + aq^2$

作变量替换:

$$p \rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} \quad H \rightarrow E$$

$$\frac{\partial W}{\partial q} + aq^2 = E \implies W = Eq - \frac{a}{3}q^3 \quad E = P \text{ (积分常数)} \quad (6.159)$$

$$S = -Et + W + A = -Et + Eq - \frac{a}{3}q^3 + A \quad (6.160)$$

$$\begin{cases} Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + q & \Rightarrow q = t + Q \\ p = \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{\partial S}{\partial q} = E - aq^2 & \Rightarrow p = E - a(t + Q)^2 \end{cases} \quad (6.161)$$

上式也是  $(q, p) \rightarrow (Q, E)$  的正则变换. 注意到  $Q$  为常数, 记  $Q = q_0$ , 得

$$\begin{cases} q(t) = t + q_0 \\ p(t) = (E - aq_0^2) - 2aq_0t - at^2 \end{cases} \quad (6.162)$$

如用哈密顿正则方程求解, 则有

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 1, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2aq \quad (6.163)$$

$$\Rightarrow q(t) = t + q_0, \quad p(t) = p_0 - 2aq_0t - at^2 \quad (6.164)$$

**例 2**  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = E \quad (6.165)$$

$$\Rightarrow W = \pm \int \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}kq^2)} dq \quad (6.166)$$

$$\Rightarrow S = -Et \pm \int^q \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}kq'^2)} dq' + A \quad (6.167)$$

其中已选择  $P = E$ .

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial P} = -t \pm \int \sqrt{\frac{m}{2E - kq^2}} dq = -t \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}q\right) \quad (6.168)$$

记  $\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$ , 注意到  $\omega^{-1}$  的量纲与  $t$  的相同. 再记

$$\omega Q = \phi_0 \longrightarrow Q = \frac{\phi_0}{\omega}$$

得

$$\Rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t + Q)\right] = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \phi_0) \quad (6.169)$$

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial S}{\partial q} &= \pm \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}kq^2)} = \pm \sqrt{2mE} \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t + Q)\right] \\ &= \pm \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \phi_0) \end{aligned} \quad (6.170)$$

**例 3** 用 H-J 方程求解 Kepler 问题.

**解:**

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + V(r) \quad (6.171)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right] + V(r) = E \quad (6.172)$$

$$\implies \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = r^2[2m(E - V(r)) - \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2] \quad (6.173)$$

分离变量, 令

$$W(r, \theta) = W_r(r) + W_\theta(\theta) \quad (6.174)$$

$$\implies \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 = r^2[2m(E - V(r)) - \left(\frac{\partial W_r(r)}{\partial r}\right)^2] = J^2 \quad (6.175)$$

这样我们就找到了一个运动积分!

$$\implies \begin{cases} W_\theta = J\theta + A \\ W_r = \int \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{J^2}{r^2}} dr \end{cases} \quad (6.176)$$

$$\implies W = W(r, \theta) = \int \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{J^2}{r^2}} dr + J\theta + A \quad (6.177)$$

由于  $Q_r, Q_\theta$  均为运动常数,

$$Q_r = -t + \frac{\partial W}{\partial E} = -t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - J^2/r^2}} \equiv -t_0 \quad (6.178)$$

此式给出了  $t = t(r)$ , 即轨迹方程; 而

$$Q_\theta = \frac{\partial W}{\partial J} = - \int \frac{J dr/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - J^2/r^2}} + \theta \equiv \theta_0 \quad (6.179)$$

给出了  $\theta = \theta(r)$ , 即轨道方程.

**例 4**

$$H = \frac{f_1(q_1, p_1) + \cdots + f_s(q_s, p_s)}{g_1(q_1, p_1) + \cdots + g_s(q_s, p_s)} = \frac{\sum_\alpha f_\alpha(q_\alpha, p_\alpha)}{\sum_\alpha g_\alpha(q_\alpha, p_\alpha)} \quad (6.180)$$

**解:**

$$\frac{\sum_\alpha f_\alpha(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha})}{\sum_\alpha g_\alpha(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha})} = E \quad (6.181)$$

$$\implies \sum_\alpha [f_\alpha(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}) - E g_\alpha(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha})] = 0 \quad (6.182)$$

下一步, 分离变量. 设:

$$W(q_1, \dots, q_s) = \sum_\alpha W_\alpha(q_\alpha) \quad (6.183)$$

$$\implies \sum_\alpha [f_\alpha(q_\alpha, \frac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha}) - E g_\alpha(q_\alpha, \frac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha})] = 0 \quad (6.184)$$

令

$$f_\alpha(q_\alpha, \frac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha}) - E g_\alpha(q_\alpha, \frac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha}) = C_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (6.185)$$

其中

$$\sum_{\alpha=1}^s C_\alpha = 0 \quad (6.186)$$

从(6.185)所含的每个方程中可解出

$$W_\alpha = W_\alpha(q_\alpha, E, C_\alpha, D_\alpha) \quad (6.187)$$

其中  $D_\alpha$  为  $\frac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha}$  带来的积分常数.

#### 6.4.4 H-J 方程求解: 分离变量法

在有些情况下,

$$H = \frac{1}{2}[A_1(q_1)\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 + A_2(q_2)\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 + \cdots + A_s(q_s)\left(\frac{dW_s}{dq_s}\right)^2] \\ + V_1(q_1) + V_2(q_2) + \cdots + V_s(q_s) = E \quad (6.188)$$

$$\implies \frac{1}{2}A_\alpha(q_\alpha)\left(\frac{dW_\alpha}{dq_\alpha}\right)^2 + V_\alpha(q_\alpha) = C_\alpha = \text{const} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (6.189)$$

其中  $C_1 + C_2 + \cdots + C_s = E$ .

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \cdots + W_s(q_s) \quad (6.190)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (6.191)$$

若取  $P_1 = E$ , 则

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E} \quad (6.192)$$

记  $Q_1 \equiv -t_0$ , 则有  $t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial E}$ .

$$Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial C_\alpha} \quad \alpha = 2, \dots, s \quad (6.193)$$

通过(6.193)中的  $s-1$  个形如

$$f_\alpha(q_1, \dots, q_s) = 0 \quad \alpha = 2, \dots, s \quad (6.194)$$

的方程, 我们可以反解出  $q_\alpha = q_\alpha(q_1)$ , 其中  $\alpha = 2, \dots, s$ , 即这  $s-1$  个方程给出了位形空间内的轨道方程.

(6.192)给出了

$$f(q_1, q_2, \dots, q_s) = t - t_0,$$

将刚才得到的结果代入, 可解出  $q_1 = q_1(t)$ , 进而得到各个  $q_\alpha(t)$ , 得到轨迹方程.

(6.191)则给出了

$$p_i = p_i(q_1, \dots, q_s) \quad i = 1, 2, \dots, s$$

这  $s$  个方程给出了相空间中轨道的描述, 把刚才得到的诸  $q_\alpha(t)$  代入可解出  $p_i = p_i(t)$ .

注：得到  $S$  就得到一切！

一般情况下，逐步分离：

若某  $q_i$  与  $\frac{\partial S}{\partial q_i}$  以  $\varphi(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i})$  的形式存在，则 H-J 方程可写为：

$$\Phi \left[ q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s; t; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{i-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{i+1}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; \frac{\partial S}{\partial t}; \varphi(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) \right] = 0 \quad (6.195)$$

设：  $S = S_i(q_i) + S'(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s)$ ，则

$$\Phi \left[ q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s; t; \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_{i-1}}, \frac{\partial S'}{\partial q_{i+1}}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}; \frac{\partial S'}{\partial t}; \varphi(q_i, \frac{\partial S_i}{\partial q_i}) \right] = 0 \quad (6.196)$$

$$\implies \varphi(q_i, \frac{\partial S_i}{\partial q_i}) = C_i \quad (6.197)$$

则方程变为了：

$$\Phi \left( q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s; t; \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_{i-1}}, \frac{\partial S'}{\partial q_{i+1}}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}; \frac{\partial S'}{\partial t}; C_i \right) = 0 \quad (6.198)$$

方程降低了 1 阶！

$H$  中有循环坐标是分离变量法的特殊情况：

$H$  中不显含  $q_i$  等价于说存在  $\varphi(q_i, \frac{\partial S_i}{\partial q_i})$ ，且  $\varphi$  中只含  $\frac{\partial S_i}{\partial q_i}$ 。结合前面的讨论，有

$$\frac{\partial S_i}{\partial q_i} = C_i \quad (6.199)$$

即  $S_i = C_i q_i$ 。因此，

$$S = C_i q_i + S'(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s; t) \quad (6.200)$$

与  $q_i$  共轭的广义动量  $p_i$  满足

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = C_i \quad (6.201)$$

注意，若  $H$  中不显含  $t$ ，则  $S$  中含有  $-Et$  这一项，可看做  $E \leftrightarrow t$  共轭。

**例** 向心力场中粒子的三维运动。

$$T = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \quad V = V(r) \quad (6.202)$$

相应的 H-J Eq.

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + V(r) = E \quad (6.203)$$

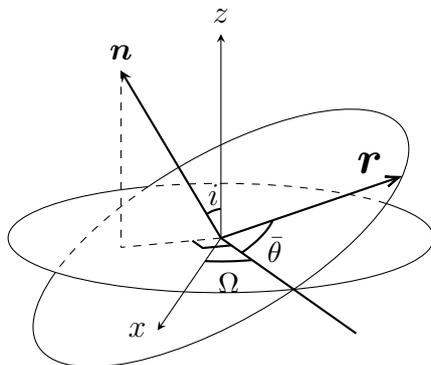
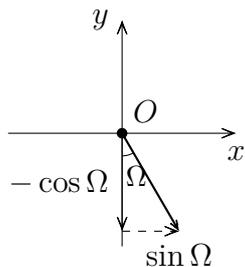


图 6.5: 轨道平面与赤道面

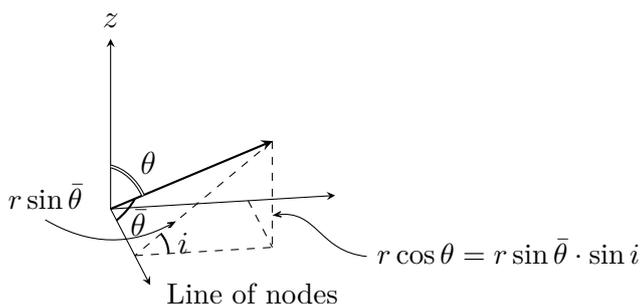


图 6.6: 轨道在 xy 平面的投影

分离变量，令：

$$S = -Et + p_\phi \phi + W_r(r) + W_\theta(\theta) \quad (6.204)$$

将其代入 H-J 方程，得到：

$$\begin{cases} \left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = J^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \\ \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r) = E \end{cases} \quad (6.205)$$

从而我们最终得到母函数  $S(r, \theta, \phi, t; E, J, J_z)$ ：

$$S = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{J^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \pm \int \sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}} dr \quad (6.206)$$

我们找到的运动积分为:  $E, J_z = p_\phi, J$ .

略去前式  $\pm$  中的负号, 我们得到的运动方程为:

$$Q_1 \equiv -t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int \frac{m}{\sqrt{2m[E - V(r)] - J^2/r^2}} dr \quad (6.207)$$

$$Q_2 \equiv \phi_0 = \frac{\partial S}{\partial J_z} = \phi + \int \frac{-J_z/\sin^2 \theta}{\sqrt{J^2 - J_z^2/\sin^2 \theta}} d\theta \quad (6.208)$$

$$Q_3 = \frac{\partial S}{\partial J} = \int \frac{J}{\sqrt{J^2 - J_z^2/\sin^2 \theta}} d\theta + \frac{-J/r^2}{\sqrt{2m[E - V(r)] - J^2/r^2}} dr \quad (6.209)$$

整理得:

$$t - t_0 = \int \frac{m}{\sqrt{2m[E - V(r)] - J^2/r^2}} dr, \quad r = r(t) \quad (6.210)$$

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{J_z}{\sqrt{J^2 - J_z^2/\sin^2 \theta}} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \quad \theta = \theta(\phi) \quad (6.211)$$

$$\int \frac{J d\theta}{\sqrt{J^2 - J_z^2/\sin^2 \theta}} = \int \frac{J dr/r^2}{\sqrt{2m[E - V(r)] - J^2/r^2}} \quad r = r(\theta) \quad (6.212)$$

下面考虑一个特殊情况:  $J_z = 0$ , 则由方程 (6.211), 得到:  $\phi - \phi_0 = 0$ , 即  $\phi = \phi_0 = \text{const.}$

由方程 (6.212), 得到:

$$\int \frac{J d\theta}{\sqrt{J^2 - J_z^2/\sin^2 \theta}} = \theta = \int \frac{J dr/r^2}{\sqrt{2m[E - V(r)] - J^2/r^2}} \quad (6.213)$$

对一般情形, 可以通过积分方程 (6.211) 得到:  $\theta = \theta(\phi)$ 。首先令  $J_z = J \cos i$ , 下面的讨论中不妨设  $i \in (0, \pi/2)$ 。

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &= \int \frac{\cos i d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - \cos^2 i / \sin^2 \theta}} = \int \frac{\cot i d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - \cot^2 i \cot^2 \theta}} \\ &= \bar{\phi} - \bar{\phi}_0 \end{aligned} \quad (6.214)$$

其中用到了变量代换  $\cot i \cot \theta \equiv \sin \bar{\phi}$ ,  $-\frac{\cot i d\theta}{\sin^2 \theta} = \cos \bar{\phi} d\bar{\phi}$ 。同时分母要有意义, 故  $\theta \in [\frac{\pi}{2} - i, \frac{\pi}{2} + i]$ 。注意, 在略去  $\pm$  中的负号时, 我们已经暗中要求了

$$d\phi = \frac{\cos i}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - \cos^2 i / \sin^2 \theta}} d\theta \implies \frac{d\phi}{d\theta} > 0$$

即  $\phi$  与  $\theta$  同增或同减, 而我们希望新变量  $\bar{\phi}$  能与  $\phi$  同增或同减, 这就需要  $\sqrt{\cos^2 \bar{\phi}} = -\cos \bar{\phi}$ 。由此,

$$\cot i \cot \theta = \sin[\phi - (\phi_0 - \bar{\phi}_0)] \implies \sin i \sin \theta \sin[\phi - (\phi_0 - \bar{\phi}_0)] = \cos i \cos \theta \quad (6.215)$$

考虑过原点的某一平面的法向:

$$\mathbf{n} = (\sin i \sin \Omega, -\sin i \cos \Omega, \cos i)$$

而物体的位置矢量为

$$\mathbf{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

若物体的运动始终位于该平面内, 则

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0 \Rightarrow \sin i \sin \theta \sin(\phi - \Omega) = \cos i \cos \theta$$

类比刚才得到的结果, 有

$$\Omega = \phi_0 - \bar{\phi}_0 \quad (6.216)$$

即物体的运动轨道的确被限制在了某一平面内.

再处理方程 (6.212), 注意到

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 i / \sin^2 \theta}} = \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 i}} = \bar{\theta} \quad (6.217)$$

其中  $\cos \theta \equiv \sin i \sin \bar{\theta}$ ,  $\sin \theta d\theta = -\sin i \cos \bar{\theta} d\bar{\theta}$ . 与前面的讨论类似, 我们希望  $\theta$  与  $\bar{\theta}$  同增或同减, 必须有  $\sqrt{\sin^2 i \cos^2 \bar{\theta}} = -\sin i \cos \bar{\theta}$ .

当  $V = -k/r$  时, 令  $u \equiv 1/r$ , 得

$$\bar{\theta} - \bar{\theta}_0 = -\arccos \left( \frac{J^2 u / mk - 1}{\sqrt{1 + 2mL^2 / mk^2}} \right) \quad (6.218)$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos(\bar{\theta} - \bar{\theta}_0)} \quad (6.219)$$

其中

$$p = \frac{J^2}{mk}, \quad e = \sqrt{1 + 2mL^2 / mk^2}$$

#### 6.4.5 转动黑洞时空中检验粒子的运动 \*

在四维时空中, 若时空坐标选为:  $\{x^\mu\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ , 对应的度规函数为  $g_{\mu\nu}$ , 则检验粒子在该时空中等效拉格朗日量为:

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (6.220)$$

其中:  $u^\mu \equiv \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ ,  $\tau$  为原时。

粒子的四维正则动量定义为:

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = g_{\mu\nu} p^\nu \quad (6.221)$$

通过勒让德变换, 我们得到粒子的哈密顿量  $H(x^\mu, p_\mu)$ :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \end{aligned} \quad (6.222)$$

其中,  $g^{\mu\nu}$  定义为  $g_{\mu\nu}$  的逆矩阵, 即:

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (6.223)$$

则粒子的哈密顿-雅可比方程为:

$$H + \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0 \quad (6.224)$$

$$2 \frac{\partial S}{\partial \tau} = -g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial S}{\partial x^{\nu}} = -g^{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} \quad (6.225)$$

下面我们具体讨论转动黑洞时空中检验粒子的运动情况。

在 Boyer-Lindquist 坐标  $\{x^{\mu}\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, r, \theta, \phi\}$  下, 质量为  $M$ , 单位质量的角动量为  $a$  的转动黑洞的时空度规 (Kerr 度规) 为 (取自然单位制:  $G = c = 1$ ):

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1 - 2Mr/\rho^2) & 0 & 0 & -2aMr \sin^2 \theta / \rho^2 \\ 0 & \rho^2 / \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -2aMr \sin^2 \theta / \rho^2 & 0 & 0 & [(r^2 + a^2) + 2a^2 Mr \sin^2 \theta / \rho^2] \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\Sigma^2 / \rho^2 \Delta & 0 & 0 & -2aMr / \rho^2 \Delta \\ 0 & \Delta / \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 / \rho^2 & 0 \\ -2aMr / \rho^2 \Delta & 0 & 0 & (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) / \rho^2 \Delta \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (6.226)$$

其中,  $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$ ,  $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Sigma^2 \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$ 。

特别要说明的是, 哈密顿量  $H$  不显含“时间”  $\tau$ , 它是个守恒量:

$$H = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon, \quad (6.227)$$

对于有质量粒子来说,  $\varepsilon = 1$ , 对于无质量粒子, 例如光子来说,  $\varepsilon = 0$ 。总之,  $\varepsilon$  可以看作我们得到的第一个运动积分, 类似于经典力学中的能量  $H = E$ 。

由于 Kerr 黑洞的时空度规函数不显含坐标  $t$  和  $\phi$ , 即  $t$  和  $\phi$  是循环坐标, 因为我们立即得到两个守恒量  $p_t = \frac{\partial L}{\partial t}$  和  $p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \phi}$ :

$$p_t = -(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}) \dot{t} - \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\phi} = -E \quad (6.228)$$

$$p_{\phi} = -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} + (r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr}{\rho^2} \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \dot{\phi} = L_z \quad (6.229)$$

因此, 到目前为止, 我们得到了四个运动积分中的三个 ( $\varepsilon, E, L_z$ )!

下面我们试图通过求解哈密顿-雅可比方程, 得到检验粒子在 Kerr 时空中的第四个运动积分, 也就是最后一个动量积分。在 Kerr 时空中, 哈密顿-雅可比方

程为:

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\Sigma^2}{\rho^2 \Delta} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{4aMr}{\rho^2 \Delta} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right) - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 \quad (6.230)$$

可以改写为如下的形式:

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho^2 \Delta} \left[ (r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \phi} \right]^2 - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \left[ (a \sin^2 \theta) \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \phi} \right]^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 \quad (6.231)$$

采用分离变量法求解哈密顿-雅可比方程。假设:

$$S(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{2} \varepsilon \tau - Et + L_z \phi + S_r(r) + S_\theta(\theta) \quad (6.232)$$

代入哈密顿-雅可比方程, 得到:

$$\varepsilon \rho^2 = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (aE \sin^2 \theta - L_z)^2 - \Delta \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 - \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 \quad (6.233)$$

利用如下恒等式:

$$(aE \sin^2 \theta - L_z)^2 \sin^{-2} \theta = (L_z^2 \sin^{-2} \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + (L_z - aE)^2 \quad (6.234)$$

整理方程 (6.233), 得:

$$\left\{ \Delta \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 + (L_z - aE)^2 + \varepsilon r^2 \right\} + \left\{ \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + (L_z^2 \sin^{-2} \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + \varepsilon a^2 \cos^2 \theta \right\} = 0 \quad (6.235)$$

因此, 我们得到第四个积分常数  $Q$ —Cartan 常数:

$$\Delta \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 + (L_z - aE)^2 + \varepsilon r^2 = -Q \quad (6.236)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + (L_z^2 \sin^{-2} \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + \varepsilon a^2 \cos^2 \theta = Q \quad (6.237)$$

即:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 &= \frac{1}{\Delta^2} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \frac{1}{\Delta} [Q + (L_z - aE)^2 + \varepsilon r^2] \\ &\equiv \frac{R(r)}{\Delta^2} \end{aligned} \quad (6.238)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 &= Q - (L_z^2 \sin^{-2} \theta - a^2 E^2 + \varepsilon a^2) \cos^2 \theta \\ &\equiv \Theta(\theta) \end{aligned} \quad (6.239)$$

最终母  $S$  函数为:

$$S = \frac{1}{2}\varepsilon\tau - Et + L_z\phi + \int^r \frac{\sqrt{R(r; Q)}}{\Delta} dr + \int^\theta \sqrt{\Theta(\theta; Q)} d\theta \quad (6.240)$$

下面由母函数  $S$  求检验粒子在 Kerr 时空中的测地线方程  $x^\mu(\tau)$ 。

由  $\frac{\partial S}{\partial Q} = C_1$ , 得:

$$\int^r \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} \quad (6.241)$$

由  $\frac{\partial S}{\partial E} = C_2$ , 得:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \int^r \frac{\partial R}{\partial E} \frac{dr}{\Delta\sqrt{R}} + \int^\theta \frac{\partial \Theta}{\partial E} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} \\ &= \tau E + 2M \int^r r [r^2 E - a(L_z - aE)] \frac{dr}{\Delta\sqrt{R}} \end{aligned} \quad (6.242)$$

由  $\frac{\partial S}{\partial L_z} = C_3$ , 得:

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{2} \int^r \frac{\partial R}{\partial L_z} \frac{dr}{\Delta\sqrt{R}} - \frac{1}{2} \int^\theta \frac{\partial \Theta}{\partial L_z} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} \\ &= a \int^r [(r^2 + a^2)E - aL_z] \frac{dr}{\Delta\sqrt{R}} + \int^\theta (L_z \sin^{-2} \theta - aE) \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} \end{aligned} \quad (6.243)$$

由  $\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = C_4$ , 得:

$$\tau = \int^r r^2 \frac{dr}{\sqrt{R}} + a^2 \int^\theta \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} \quad (6.244)$$

方程组 (6.241) - (6.244) 就是检验粒子在 Kerr 时空中积分形式形式的测地线方程。

检验粒子的四动量为  $p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$ :

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = -E \quad (6.245)$$

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} \quad (6.246)$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{\Theta(\theta)} \quad (6.247)$$

$$p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = L_z \quad (6.248)$$

进一步整理得到广义速度满足的方程为:

$$\rho^4 \dot{r}^2 = R \quad (6.249)$$

$$\rho^4 \dot{\theta}^2 = \Theta \quad (6.250)$$

$$\rho^2 \dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} [2aMrE + (\rho^2 - 2Mr)L_z \sin^{-2} \theta] \quad (6.251)$$

$$\rho^2 \dot{t} = \frac{1}{\Delta} (\Sigma^2 E - 2aMrL_z) \quad (6.252)$$

以上方程组就是广泛使用的 Kerr 时空中检验粒子微分形式的测地线方程。

## 6.5 进阶论题

### 6.5.1 相空间与刘维尔定理

我们先来看几个具体模型的相空间轨迹.

(1) 谐振子

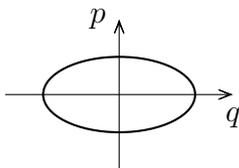


图 6.7: 谐振子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = E \implies \frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2} + \frac{q^2}{(\sqrt{2E/k})^2} = 1 \quad (6.253)$$

(2) 自由落体

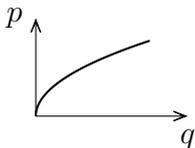
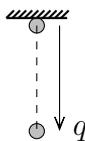


图 6.8: 自由落体

$$H = \frac{p^2}{2m} - mgq = 0 \quad (6.254)$$

下面我们介绍系综的概念. 定义相点密度函数

$$\rho = \frac{dN}{d\omega} \quad (6.255)$$

式中  $dN$  是单位相空间体积元中所含有的质点数目 (系统数目). 刘维尔定理:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (6.256)$$

证明:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} \quad (6.257)$$

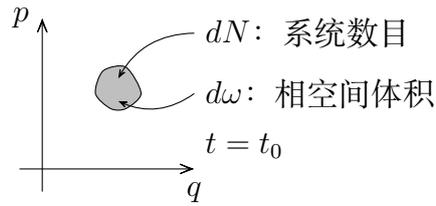


图 6.9: 相空间中系统的分布函数

由于粒子数（系统数）守恒：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6.258)$$

即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (\rho \dot{q}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial p_\alpha} (\rho \dot{p}_\alpha) = 0 \quad (6.259)$$

$$\implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \rho \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \rho \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} = 0 \quad (6.260)$$

考虑到

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

故

$$\implies \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (6.261)$$

对粒子数（系统数）守恒的解释：

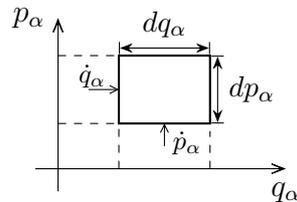


图 6.10: 刘维尔定理的证明

从左边流进的系统数：

$$\left(\rho \frac{dq_\alpha}{dt}\right)_{q_\alpha} dp_\alpha$$

从右边流进的系统数：

$$\left(\rho \frac{dq_\alpha}{dt}\right)_{q_\alpha + dq_\alpha} dp_\alpha$$

净流入：

$$-\frac{\partial}{\partial q_\alpha} (\rho \dot{q}_\alpha) dq_\alpha dp_\alpha$$

同理，从上下净流入：

$$-\frac{\partial}{\partial p_\alpha} (\rho \dot{p}_\alpha) dq_\alpha dp_\alpha$$

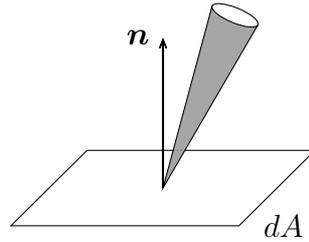


图 6.11: 辐射强度

而 local 增加量

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dq_\alpha dp_\alpha$$

应等于净流入量, 故

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\rho \dot{q}_\alpha) - \frac{\partial}{\partial p_\alpha}(\rho \dot{p}_\alpha) \quad (6.262)$$

此式即前述(6.259)式.

几个有关的实例:

(1) 统计物理: 系综的概念.

由于

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, H] = 0 \quad (6.263)$$

若系统处于平衡态, 即  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , 则

$$[\rho, H] = 0 \quad (6.264)$$

(2) Beaming 效应 我们考虑辐射场中的小面积元  $dA$ , 定义  $I_\nu$  为单位时间, 单

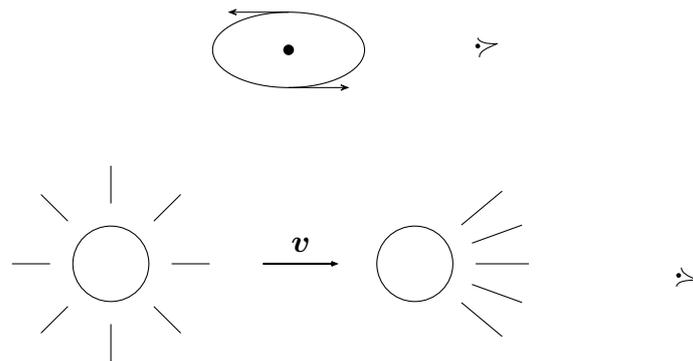


图 6.12: 相对论性的 Beaming (集束) 效应

位频率间隔  $d\nu$  内该面积元接收到的来自某特定方向周围单位立体角  $d\Omega$  内的辐射能量  $dE$ , 则

$$\begin{aligned} I_\nu &= \frac{dE}{dt \cdot dA \cdot d\nu \cdot d\Omega} \\ &= \frac{dn \cdot h\nu}{dt dA d\nu d\Omega} \end{aligned} \quad (6.265)$$

而  $d^3x = c dt dA$ ,  $p = \frac{h\nu}{c}$ ,  $d^3p = p^2 dp d\Omega = (\frac{h\nu}{c})^2 d\Omega d(\frac{h\nu}{c})$ , 故

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{dn}{d^3x d^3p} \\ &= \frac{dn}{c dt dA \cdot (\frac{h\nu}{c})^2 d\Omega d(\frac{h\nu}{c})} \\ &= \frac{c^2}{h^4} \left( \frac{I_\nu}{\nu^3} \right)\end{aligned}\quad (6.266)$$

而由 Lorentz 变换公式可证

$$(d^3x d^3p)_{\text{obs1}} = (d^3\tilde{x} d^3\tilde{p})_{\text{obs2}} \quad (6.267)$$

故对不同观测者来说有

$$\rho = \text{const} \quad \implies \quad \frac{I_\nu}{\nu^3} = \text{const} \quad (6.268)$$

### 6.5.2 Virial<sup>1</sup>定理

Virial 定理反映了系统的某种统计性质. 定义

$$S = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (6.269)$$

即

$$\frac{dS}{dt} = \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (6.270)$$

若各个  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$  均有界, 则

$$\overline{\frac{dS}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dS}{dt} dt = \frac{S(T) - S(0)}{T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty, \text{但 } S(T) \text{ 有界}} 0 \quad (6.271)$$

故

$$\overline{\mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i} = -\overline{\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i} \quad (6.272)$$

由于  $\mathbf{p}_i = m\dot{\mathbf{r}}_i$ , 故

$$\sum_i \overline{2T_i} = -\sum_i \overline{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} \quad (6.273)$$

$$\implies \quad \bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} \quad (6.274)$$

此式即 Virial 定理.

若各  $\mathbf{F}_i$  均为保守力, 则

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \nabla V_i \cdot \mathbf{r}_i} \quad (6.275)$$

若  $V = kr^{n+1} \implies \bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V}$ .

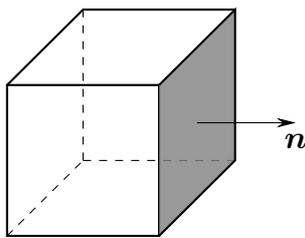


图 6.13: 由 Virial 定理导出理想气体状态方程.

对于引力或电磁力,  $n = -2 \Rightarrow \bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{V}$ , 而对谐振子,  $n = 1 \Rightarrow \bar{T} = \bar{V}$ .

注意, 该结论不适用于抛物轨道和双曲轨道, 因为此条件下粒子的位矢无界.

下面我们讨论由 Virial 定理导出理想气体状态方程. 我们的研究对象为气体分子. 下面用  $E_K$  表示总动能,  $T$  表示温度.

$$\overline{E_K} = \frac{3}{2}NkT \quad (6.276)$$

$$d\mathbf{F} = -f\mathbf{n}dS \quad (6.277)$$

其中  $\bar{f} \equiv P$ , 即器壁单位面积上受到的力.

$$\begin{aligned} \overline{E_K} &= -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = \frac{1}{2} \oint_S \bar{f}\mathbf{n}dS \cdot \mathbf{r} \\ &= \frac{P}{2} \oint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}dS \end{aligned} \quad (6.278)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P}{2} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{r}dV = \frac{3}{2}PV \\ \implies NkT &= PV \end{aligned} \quad (6.279)$$

下面讨论太阳内部温度的估算<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = -\frac{1}{2}\bar{V} = \frac{3}{10} \frac{GM_\odot^2}{R_\odot} \\ &= \frac{3}{2}NkT \end{aligned} \quad (6.280)$$

$$T \sim \frac{1}{5} \frac{GM_\odot^2}{NkR_\odot} \sim \frac{GM_\odot m_p}{kR_\odot} \sim 5 \times 10^6 K \quad (6.281)$$

事实上,  $T_{\text{core}} \sim 10^7 K$ .

### 6.5.3 波尔-索末菲量子化规则

**例 1** 各种势阱中检验粒子运动情况分析 (1-dim).

(1) 无限深方势阱

<sup>1</sup>Virial 在 Latin 文中为 force 之意, “fortis”=strength.

<sup>1</sup> $G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ ,  $M_\odot \approx 2 \times 10^{30} kg$ ,  $R_\odot \approx 7 \times 10^8 m$ ,  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} kg$ ,  $k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$ .

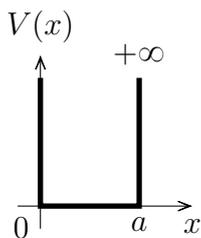


图 6.14: 一维无限深方势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ +\infty & x \leq 0, x \geq a \end{cases} \quad (6.282)$$

## (2) 反弹球

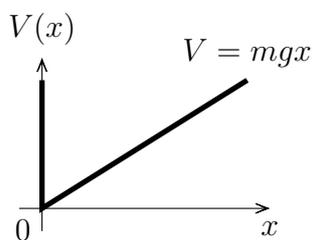


图 6.15: 反弹球的势能曲线

$$V(x) = \begin{cases} mgx & x > 0 \\ +\infty & x \leq 0 \end{cases} \quad (6.283)$$

## (3) 谐振子

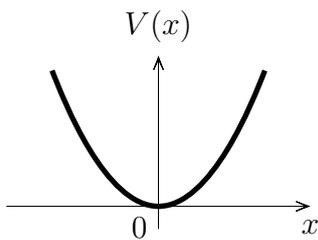


图 6.16: 谐振子势

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (6.284)$$

## (4) 双势阱

$$V(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\frac{kx^4}{a^2} \quad (6.285)$$

解:

## (1) 无限深方势阱 (2) 反弹球

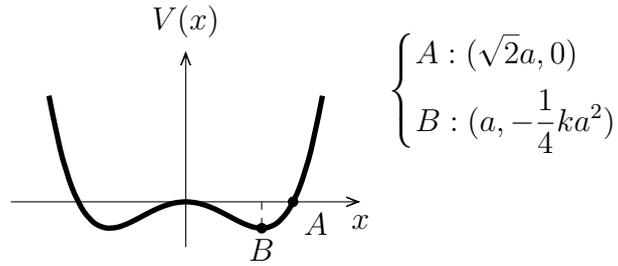


图 6.17: 双势阱

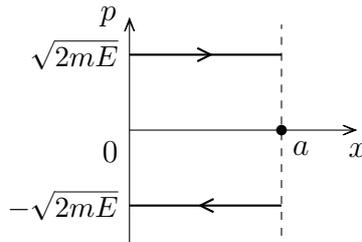


图 6.18: 粒子在无限深方势阱运动的相图

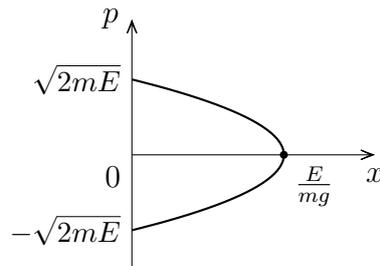


图 6.19: 反弹球运动的相图

$$\frac{p^2}{2m} + mgx = E \implies x = \frac{E}{mg} - \frac{p^2}{2m^2g}$$

## (3) 谐振子

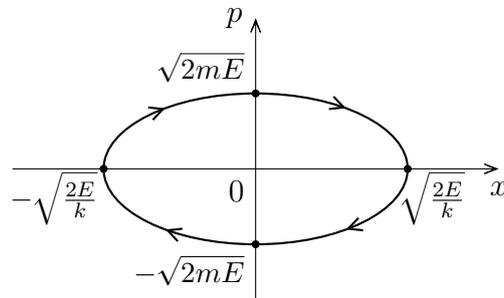


图 6.20: 谐振子运动的相图

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E \implies \frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2} + \frac{x^2}{(\sqrt{2E/k})^2} = 1$$

## (4) 双势阱

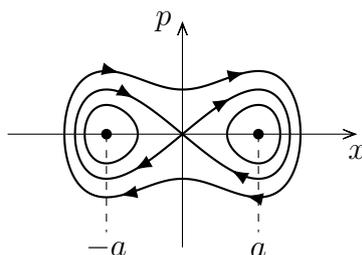


图 6.21: 粒子在双势阱中运动的相图

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{kx^4}{4a^2} = E$$

$$\text{平衡点: } \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -kx + k\frac{x^3}{a^2} = 0.$$

$\Rightarrow (-a, 0), (0, 0), (+a, 0)$  为平衡点.

在  $(0, 0)$  点附近<sup>1</sup>:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (6.286)$$

在  $(\mp a, 0)$  点附近<sup>2</sup>:

$$\frac{p^2}{2m} + k(x \pm a)^2 = E + \frac{k}{a^2} \quad (6.287)$$

以上都是周期运动, 定义作用量<sup>3</sup>

$$I \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p dx \quad (6.288)$$

显然,  $I$  为相空间的面积除以  $2\pi$ .

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{2m[E - V(x)]} dx \quad (6.289)$$

可证: 周期  $\tau = 2\pi \frac{dI}{dE}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dE} &= \frac{1}{\pi} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{d}{dE} \sqrt{2m[E - V(x)]} dx + \frac{1}{\pi} \sqrt{2m[E - V(x_2)]} \frac{dx_2}{dE} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sqrt{2m[E - V(x_1)]} \frac{dx_1}{dE} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{\frac{m}{2[E - V(x)]}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{v(x)} = \frac{\tau/2}{\pi} = \frac{\tau}{2\pi} \end{aligned} \quad (6.290)$$

即  $\tau = 2\pi \frac{dI}{dE}$ .

<sup>1</sup>记:  $f(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\frac{kx^4}{a^2}$ ,  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的 Talor 展开式为  $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$  (保留到二阶), 而  $f(0) = 0$ ,  $f''(0) = -k$ .

<sup>2</sup>同上,  $f(\mp a) = -\frac{1}{4}ka^2$ ,  $f''(\mp a) = 2k$ .

<sup>3</sup>回忆莫培督原理  $S = \int_A^B m v ds = \int_A^B p ds$ .

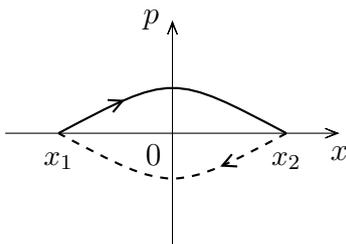


图 6.22: 作用量与轨道周期

(6.290)中用到了  $E - V(x_1) = E - V(x_2) = 0$ . 我们称  $x_1, x_2$  为 turning point.

(1)

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^a \sqrt{2\pi E} dx = \frac{a}{\pi} \sqrt{2mE} \quad (6.291)$$

$$\tau = 2\pi \frac{dI}{dE} = a \sqrt{\frac{2m}{E}} = \frac{2a}{v} = \frac{2a}{\sqrt{2E/m}} \quad (6.292)$$

(2)

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{E/mg} \sqrt{2m(E - mgx)} dx = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{2m}}{mg} E^{3/2} \quad (6.293)$$

$$\tau = 2\pi \frac{dI}{dE} = 2 \frac{\sqrt{2mE}}{mg} \quad (6.294)$$

分析:

$$\frac{E}{mg} = h = \frac{1}{2} g \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \quad (6.295)$$

(3)

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}kx^2)} dx \quad (6.296)$$

令  $x = \sqrt{2E/k} \sin \phi$ , 则  $dx = \sqrt{2E/k} \cos \phi d\phi$ .

$$I = \frac{2E}{\pi} \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi = \frac{E}{\omega} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.297)$$

$$\tau = 2\pi \frac{dI}{dE} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.298)$$

下面介绍 Bohr-Sommerfeld 量子化:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dx = n\hbar \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.299)$$

(1)

$$I_n = \frac{a}{\pi} \sqrt{2mE_n} = n\hbar \quad (6.300)$$

$$\implies E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad (6.301)$$

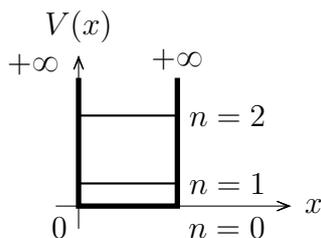


图 6.23: Bohr-Sommerfeld 量子化

$$\begin{aligned} n=0, \quad E_0 &= 0 \\ n=1, \quad E_1 &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \\ n=2, \quad E_2 &= 4 \cdot \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \\ &\dots \end{aligned}$$

量子力学:  $E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$ .

(2)

$$I_n = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{2m}}{mg} E_n^{3/2} = n\hbar \quad (6.302)$$

$$\implies E_n = \left(\frac{3\pi n}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{mg^2 \hbar^2}{2}\right)^{1/3} \quad (6.303)$$

$n \rightarrow +\infty$ , 量子  $\rightarrow$  经典. 对应原理.

(3)

$$I_n = \frac{E_n}{\omega} = n\hbar \quad (6.304)$$

$$\implies E_n = n\hbar\omega \quad (6.305)$$

量子力学:  $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ .

### 6.5.4 定态薛定谔方程的建立

讨论如下哈密顿系统

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(\mathbf{r}) = E \quad (6.306)$$

若以自由粒子波函数为平面波这一点出发, 有

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{A}_0 \cdot e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar} \quad (6.307)$$

注意到

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A} = p_x \mathbf{A}$$

有

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \longleftrightarrow p_x \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \longleftrightarrow p_y \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \longleftrightarrow p_z$$

同样地,

$$p_x^2 \longleftrightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad p_y^2 \longleftrightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad p_z^2 \longleftrightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

即

$$\mathbf{p}^2 \longleftrightarrow -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

则自由粒子条件下定态薛定谔方程  $H\psi = E\psi$  可写为:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) \quad (6.308)$$

下面我们考虑经典力学中相应于(6.306)式所给出的哈密顿量的 H-J 方程:

$$H = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + V(\mathbf{r}) = E \quad (6.309)$$

假设<sup>1</sup>:

$$W = \hbar \ln \psi(\mathbf{r}) \quad (6.310)$$

将上式代入 H-J 方程, 有

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] + [V(\mathbf{r}) - E]\psi^2 = 0 \quad (6.311)$$

再假设, 量子系统中要求:

$$\delta \int_1^2 \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] + [V(\mathbf{r}) - E]\psi^2 \right\} d\mathbf{r} = 0 \quad (6.312)$$

即所谓的“稳定性条件”. 我们可以得到:

$$\int_1^2 \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \delta \psi}{\partial z} \right) + [V(\mathbf{r}) - E]\psi \delta \psi \right\} dx dy dz = 0 \quad (6.313)$$

对上式作分部积分, 得:

$$\int_1^2 \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + [V(\mathbf{r}) - E]\psi \right\} \delta \psi dx dy dz = 0 \quad (6.314)$$

$$\implies -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + V(\mathbf{r})\psi = E\psi \quad (6.315)$$

此式即为量子力学中的定态薛定谔方程.

有趣的类比:  $S = k \ln \Omega$ .

<sup>1</sup>W 反映经典系统的特性,  $\psi$  反映相应的量子系统的特性, 同时要让  $\hbar$  这个在经典-量子对应中扮演重要角色的物理量进入动力学方程.

# 第七章 刚体运动

## 7.1 刚体运动描述

### 7.1.1 刚体运动自由度和运动分类

#### 1. 刚体的自由度和运动分类

(a) 自由度刚体上不共线的 3 个质点决定刚体的运动。

3 个质点 (不共线)  $\rightarrow$  9 个自由度  
3 个质点间距离不变  $\rightarrow$  3 个约束 }  $\Rightarrow$  6 个自由度

(b) 刚体运动分类 (自由度)

i. 平动自:3

ii. 定轴转动:1

iii. 平面平行运动:3(2 个平动 +1 个转动)

iv. 定点转动:6-3(定点)=3

v. 一般运动:6

#### 2. 刚体运动的欧拉定理

(a) 惯性坐标系和本体坐标系 (随动坐标系)

两者都是惯性系! 本体坐标系即随动惯性坐标系, 或者说是刚体瞬时静止惯性系。

(b) 刚体运动的欧拉定理

具有固定点的刚体运动  $\Leftrightarrow$  绕过该定点的某一轴线运动

$\mathbf{A}$  为转动矩阵:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \Rightarrow \det \mathbf{A} = \pm 1$ 。对于不转:  
 $\mathbf{A} = \mathbf{I} \Rightarrow \det \mathbf{A} = 1$ , 因此, 可以通过求解本征值方程:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{R} = \lambda \vec{R} \quad (7.1)$$

得到本征值:  $\lambda = 1$ , 本征矢:  $\vec{R}$ , 即刚体绕  $\vec{R}$  转动。

(c) 蔡斯尔定理：刚体运动 = 平动 + 转动

### 3. 无限小转动和角速度

(a) 有限转动不是矢量

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1$$

(b) 无限小转动是矢量

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{I} + \varepsilon_1, \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} + \varepsilon_2$$

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \simeq \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 \simeq \mathbf{I} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

(c) 角速度： $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta \vec{n}}{\Delta t} = \frac{d\vec{n}}{dt}$

### 4. 刚体任一点速度和加速度

(a) 纯转动：

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

(b) 一般运动情形：我们考察刚体上  $p$  点的运动。若选  $c$  为参考点，则：

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times (\vec{r}_p - \vec{r}_c)$$

$$\vec{r}_{cp} = \vec{r}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_c + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{pc})$$

需要强调的是， $\vec{\omega}$  对所有点一致！证明如下：

如果我们选另一点  $c'$  为参考点，则：

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{c'} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_p - \vec{r}_{c'}$$

选  $c$  点为参考点，得到  $c'$  点的速度：

$$\vec{v}_{c'} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \vec{r}_{c'} - \vec{r}_c$$

$$\Rightarrow \vec{v}_p - \vec{v}_{c'} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{r}' = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}'$$

(c) 转动瞬轴:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_{c'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}' - \vec{r}) = 0$$

其中  $c'$  为固定点, 总可以选择  $c$  点, 使得  $\vec{v}_c = 0$  选  $c$  为参考基点: 转动瞬心

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{r} + \frac{l\vec{\omega}}{\omega}$  构成转动瞬轴, 其中  $l$  任意

## 7.2 欧拉刚体运动学方程

### 7.2.1 欧拉角

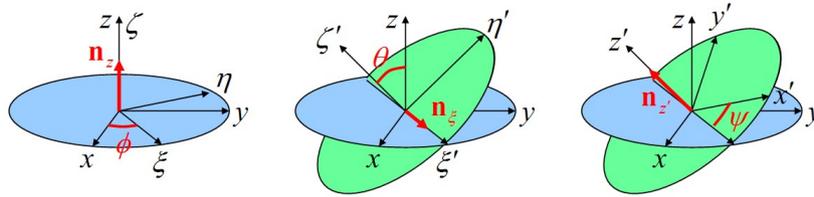


图 7.1: 欧拉角  $\varphi, \theta, \psi$ , 分别为进动角、章动角和自转角, 确定了刚体的三个惯量主轴相对实验室系的方位 (或转动)。

$$\vec{X} = \mathbf{A}\vec{X}' \quad (7.2)$$

$\vec{X}$ ——随动坐标系 (本体坐标系)

$\vec{X}'$ ——实验室系

$\mathbf{A}$ ——待求的转动矩阵:  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , 独立的变量数仅为 3。

1. 选绕  $z'$  轴转动 (逆时针)  $\varphi$  角, 得

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 再选  $x''$  轴, 逆时针旋转  $\theta$  角

$$\mathbf{A}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3. 再选  $z'''$  轴, 逆时针旋转  $\psi$  角

$$\mathbf{A}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

综上, 我们得到:  $x' \rightarrow x: \quad x = Ax'$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$x' = A^{-1}x = A^T x$$

进动角:  $\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

章动角:  $\theta, \quad 0 \leq \theta < \pi$

自转角:  $\psi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi$

## 7.2.2 刚体运动学方程

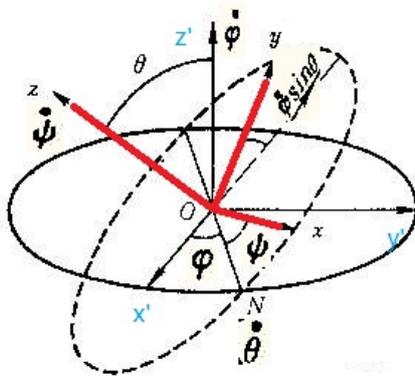


图 7.2: 刚体转动角速度。用三个欧拉角随时间的变化率  $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$  表示。

我们用三个欧拉角随时间的变化来刻画刚体的运动。如图 (7.2), 将刚体转动角速度投影到随动坐标系中, 得到:

$$\vec{\omega}_\varphi = (\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi, \cos \theta) \dot{\varphi} \quad (7.3)$$

$$\vec{\omega}_\theta = (\cos \psi, -\sin \psi, 0) \dot{\theta} \quad (7.4)$$

$$\vec{\omega}_\psi = (0, 0, 1) \dot{\psi} \quad (7.5)$$

因此, 在随动坐标系中,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (7.6)$$

在实验室系中,

$$\vec{\omega}' = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \quad (7.7)$$

欧拉刚体运动学方程就是关于三个欧拉角  $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$  如果随时间变化的方程。

$$\begin{aligned} \text{实验室系} &\Rightarrow \text{本体坐标系 (逆时针: } \varphi, \theta, \psi) \\ \text{本体坐标系} &\Rightarrow \text{惯性坐标系 (顺时针: } \psi, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

即我们可以从方程 (7.6) 通过如下变换得到方程 (7.7):

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow -\psi \\ \theta &\rightarrow -\theta \\ \psi &\rightarrow -\varphi \\ \vec{\omega} &\rightarrow -\vec{\omega}' \end{aligned}$$

## 7.3 转动惯量张量和惯量主轴

### 7.3.1 转动惯量张量——刚体动能

下面我们通过刚体的动能来引入转动惯量张量的定义。对于某个作纯转动的刚体, 假设其在绕某点作定点转动, 瞬时角速度为  $\vec{\omega}$ , 那么其瞬时转动动能  $T$  是确定的, 且  $T$  是个标量, 不依赖于坐标系的选择。显然, 由于动能是速度的二次函数, 因此不难理解刚体的动能  $T$  是  $\vec{\omega}$  的二次函数:

$$I: (\vec{\omega}, \vec{\omega}) \rightarrow T = \frac{1}{2} I(\vec{\omega}, \vec{\omega}) \quad (7.8)$$

其中  $I$  就是刚体的转动惯量张量, 它必须是一个二阶张量, 因为它将两个角速度映射到一个标量——能量。

下面具体推导转动惯量  $I$  的表达式。

假设刚体由  $N$  点组成:  $m_\alpha, r_\alpha, \alpha = 1, 2, 3, \dots, N$

我们选某点  $C$  为参考点, 在实验室系中, 该点的速度为  $\vec{V}$ , 刚体绕该点的角速度为  $\vec{\omega}$ , 则刚体上质点的总速度分别为:

$$\vec{V}_\alpha = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \quad (7.9)$$

则系统的总动能为:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha V^2 + \sum_\alpha m_\alpha \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \end{aligned}$$

如果  $\vec{V} = 0$ , 则为定点转动。

如果我们选取刚体的质心为参考点, 且取质心  $\vec{R}$  为坐标系的原点, 则:  $\vec{R} = 0$ , 因此得到刚体动能表达式中的第二项为:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\alpha} m_{\alpha} \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) &= \vec{V} \cdot \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) \\ &= M \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R}) \\ &= 0\end{aligned}$$

其中  $M$  为刚体的总质量:  $M = \Sigma_{\alpha} m_{\alpha}$ 。

因此刚体的动能可以分解为两项: 质心的平动动能以及刚体绕质心的转动动能。

$$T = T_t + T_r \quad (7.10)$$

$$T_t = \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}^2 = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 \quad (7.11)$$

$$T_r = \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \quad (7.12)$$

下面我们由  $T_r$  的表达式引入刚体绕质心 (也可以为任何其它点) 的转动惯量张量的表达式。

利用:

$$(\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \quad (7.13)$$

得到:

$$\begin{aligned}T_r &= \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} [\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})^2] \\ &= \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} [\Sigma_i \omega_i^2 \cdot \Sigma_k r_{\alpha,k}^2 - \Sigma_i \omega_i \cdot r_{\alpha,i} \Sigma_j \omega_j r_{\alpha,j}] \\ &= \frac{1}{2} \Sigma_{i,j} \omega_i \omega_j \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{i,j} \Sigma_k r_{\alpha,k}^2 - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j})\end{aligned}$$

引入转动惯量张量  $I$  的定义如下:

$$I_{ij} \equiv \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} \Sigma_k r_{\alpha,k}^2 - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j}) \quad (7.14)$$

则:

$$T_r = \frac{1}{2} \Sigma_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (7.15)$$

容易将上面的推导推广到连续刚体情形:

$$I_{ij} = \iiint \rho(r) (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) dV \quad (7.16)$$

从转动惯量的定义可以看出, 转动惯量是刚体密度分布的四极矩。

讨论:

$$I_{11} = I_{xx} = \iiint \rho(r) (y^2 + z^2) dV \quad (7.17)$$

此即刚体绕  $x$  轴的转动惯量。

### 7.3.2 转动惯量张量的性质

1. 对称性  $I_{ij} = I_{ji}$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\Sigma_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & -\Sigma_{\alpha} m_{\alpha} z_{\alpha} x_{\alpha} \\ -\Sigma_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} (z_{\alpha}^2 + x_{\alpha}^2) & -\Sigma_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\Sigma_{\alpha} m_{\alpha} z_{\alpha} x_{\alpha} & -\Sigma_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} & \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{bmatrix}$$

交叉项：**惯量积**，独立分量：6 个。

2. 广延性： $I = I_A + I_B$ 。

3. 一般形式的平行轴定理

$$I_{ij}^C = I_{ij}^Q - M(\delta_{ij} \Sigma_k a_k^2 - a_i a_j)$$

证明：

$$\vec{R}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} + \vec{a}$$

$$\begin{aligned} I_{ij}^Q &= \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} \Sigma_k R_{\alpha,k}^2 - R_{\alpha,i} R_{\alpha,j}) \\ &= \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} [\delta_{ij} \Sigma_k (r_{\alpha,k} + a_k)^2 - (r_{\alpha,i} + a_i)(r_{\alpha,j} + a_j)] \\ &= \Sigma_{\alpha} m_{\alpha} [(\delta_{ij} \Sigma_k r_{\alpha,k}^2 - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j}) + (\delta_{ij} \Sigma_k a_k^2 - a_i a_j) + (\delta_{ij} \Sigma_k 2r_{\alpha,k} a_k - a_i r_{\alpha,j} - r_{\alpha,i} a_j)] \end{aligned}$$

由于  $\Sigma_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,k} = 0$  (质心系)，含有  $r_{\alpha}$  的一次项为零

即：

$$\begin{aligned} I_{ij}^Q &= I_{ij}^C + M(\delta_{ij} \Sigma_k a_k^2 - a_i a_j) \\ &= I_{ij}^C + M(\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) \end{aligned} \quad (7.18)$$

或者：

$$I_{ij}^C = I_{ij}^Q - M(\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) \quad (7.19)$$

特例：平行轴定理：

$$I_{11}^C = I_{11}^Q - M(a_2^2 + a_3^2) \quad (7.20)$$

下面讨论转动惯量的分量在坐标变换下的行为：

$$T_r = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$$

坐标变换：

$$x \rightarrow x' = \Lambda x$$

矢量 (列矢量) 变换:

$$\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}' = \wedge \vec{\omega}$$

对偶矢量 (行矢量) 变换:

$$\vec{\omega}^T \rightarrow \vec{\omega}'^T = \vec{\omega}^T \wedge^T$$

显然, 刚体的动能为标量, 在不同的坐标系中的值是一样的:

$$T_r = \frac{1}{2} \omega^T \cdot \mathbf{I} \cdot \omega = \frac{1}{2} \omega'^T \mathbf{I}' \cdot \omega'$$

因此, 我们得到:

$$\mathbf{I}' = \wedge \mathbf{I} \wedge^T$$

写成分量形式:

$$\begin{aligned} x^{i'} &= \wedge_{\cdot j}^{i'} x^j \\ \omega^{i'} &= \wedge_{\cdot j}^{i'} \omega^j \\ I_{\cdot j'}^{i'} &= \wedge_{\cdot i}^{i'} \wedge_{j'}^{\cdot j} T_{\cdot j}^i \\ \wedge_{j'}^{\cdot j} &= (\wedge^{-1})_{j'}^{\cdot j} = (\wedge^T)_{j'}^{\cdot j} \end{aligned}$$

回到矩阵形式:

$$\begin{aligned} I_{\cdot j'}^{i'} &= \wedge_{\cdot i}^{i'} I_{\cdot j}^i \wedge_{j'}^{\cdot j} \\ &= \wedge_{\cdot i}^{i'} I_{\cdot j}^i (\wedge^T)_{j'}^{\cdot j} \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{I}' = \wedge \cdot \mathbf{I} \cdot \wedge^T$$

**例 1:**  $m, R$  均质球, 取参考点为球心  $O$ , 试求匀质球相对球心的转动惯量。

解:

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r^2 - z^2) d\varphi \sin \theta d\theta r^2 dr \\ &= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi \rho r^4 \sin^3 \theta d\theta dr \\ &= 2\pi \rho \frac{1}{5} R^5 \frac{4}{3} \quad \text{-----} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{5} m R^2 \quad \text{-----} m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \end{aligned}$$

对称性:  $I_{11} = I_{22} = I_{33}$

$$\begin{aligned} I_{12} &= - \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho xy d\varphi \sin \theta d\theta r^2 dr \\ &= - \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \sin^2 \theta d\theta r^4 dr \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.21}$$

最终得到刚体的转动惯量张量为:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & & \\ & \frac{2}{5}mR^2 & \\ & & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

**例 2:** 均质正方体, 质量和边长分别为  $m, a$ , 取参考点为其一个顶点  $A$ , 试求均质正方体相对其顶点  $A$  的转动惯量。

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho(y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \frac{2}{3} \rho a^5 \\ &= \frac{2}{3} m a^2 \\ I_{12} &= - \int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho xy dx dy dz \\ &= -\frac{1}{4} \rho a^5 \\ &= -\frac{1}{4} m a^2 \end{aligned}$$

由对称性, 得到:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 \end{bmatrix}$$

**例 3:** 上题中, 参考点选为正方体的质心, 试求均质正方体相对其质心  $C$  的转动惯量。

利用平行轴定理:  $\vec{a} = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$

$$\begin{aligned} I_{ij}^C &= I_{ij}^A - m(\delta_{ij} \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) \\ &= \begin{cases} I_{ij} - \frac{ma^2}{2}, & i = j \\ I_{ij} + \frac{ma^2}{4}, & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

最终得到正方体相对其质心的转动惯量为:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}ma^2 & & \\ & \frac{1}{6}ma^2 & \\ & & \frac{1}{6}ma^2 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

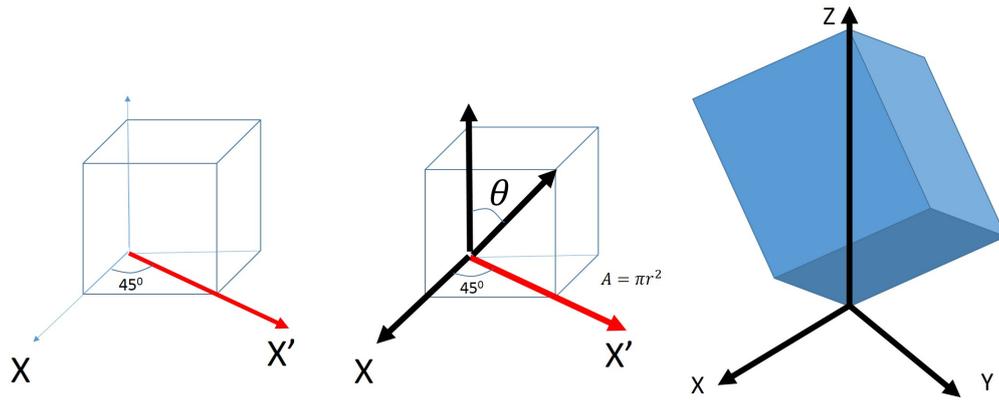


图 7.3: 转动惯量张量在不同坐标系中的分量。

**例 4:** 如图, 参考点选为正方体的顶点  $A$ , 但是, 我们选取正方体的对角线为新的坐标系的  $z$  轴, 试求正方体的转动惯量在该坐标系中的各分量。

通过坐标变换由例 2 的结果得到我们想要的结果。

1) 先绕  $z$  轴逆时针转  $45^\circ$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) 再绕  $y''$  轴逆时针转  $\theta$  角, 其中  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{6}}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$\{x\} \rightarrow \{x'\}$ :

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \vec{x} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} x \\ &\equiv \wedge \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{x}' = \wedge \cdot \vec{\omega}$$

书上:  $\omega = T\omega'$   $T = \wedge^T$

$$\mathbf{I}' = \wedge \mathbf{I} \wedge^T$$

分量形式:

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} I_{lk} \\ &= \wedge^i_{.k} (\wedge^T)^l_{.j} I_{lk} \\ &= \wedge^i_{.k} I_{lk} (\wedge^T)^l_{.j} \end{aligned}$$

最终得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}' &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{11}{12}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}ma^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 7.3.3 刚体角动量与转动惯量张量

我们也可以通过刚体的总角动量来引入转动惯量张量的定义。对于某个作纯转动的刚体, 假设其在绕某点作定点转动, 瞬时角速度为  $\vec{\omega}$ , 那么其瞬时转动

角动量  $\vec{L}$  是确定的, 且  $\vec{L}$  是个矢量, 不依赖于坐标系的选择。显然, 由于角动量是速度的一次函数:

$$\vec{L} : \vec{\omega} \rightarrow \vec{L} = I(\vec{\omega}) \quad (7.24)$$

其中  $I$  就是刚体的转动惯量张量, 它必须是一个二阶张量, 因为它将一个矢量 (角速度) 映射到另一个矢量 (角动量)。下面可以得到与通过动能引入的转动惯量张量一致的定义。

相对于随动坐标系的某点参考点  $O$ , 刚体的角动量为:

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha}, \quad \vec{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha} \quad (7.25)$$

因此:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \vec{\omega} - \vec{r}_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\omega})] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\overleftrightarrow{\delta} r_{\alpha}^2 - \vec{r}_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}) \cdot \vec{\omega} \\ &= \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \quad (7.26)$$

其中转动惯量  $\mathbf{I}$  的与之前的定义相一致:

$$\mathbf{I} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\overleftrightarrow{\delta} r_{\alpha}^2 - \vec{r}_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}) \quad (7.27)$$

$\overleftrightarrow{\delta}$  为单位张量 (矩阵)。

小结一下:

$$\begin{aligned} L_i &= I_{ij} \omega_j, & \vec{L} &= \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \\ T_r &= \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j, & T_r &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

### 7.3.4 惯量主轴

#### 1. 惯量主轴的定义

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = [I_{ij}]$$

$\mathbf{I}$  的对角化:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{I} \mathbf{T} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}$  为基的变换矩阵。可以通过求本征值和本征矢量的方法得到  $\mathbf{T}$  (可以参考《线性代数》内容)。

$$\mathbf{I} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}, \quad (\mathbf{I} - \lambda) \cdot \vec{x} = 0. \quad (7.28)$$

本征值方程为:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda) = \begin{vmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

如果求得的本征值分别为:  $\lambda = I_1, I_2, I_3$ , 以及对应的本征矢量分别为列矢量  $\vec{x}_i (i = 1, 2, 3)$ , 则:

$$\mathbf{T} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \quad (7.29)$$

这里三个列矢量方向就是转动惯量  $\mathbf{I}$  的惯量主轴, 对应的三个本征值就是绕惯量主轴的转动惯量, 称之为主转动惯量。说明如下:

令:  $\hat{e}_i = \vec{x}_i / |\vec{x}_i|$  为单位向量, 显然, 绕  $\hat{e}_i$  的转动惯量为:

$$\mathbf{I}(\hat{e}_i, \hat{e}_i) = \hat{e}_i \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{e}_i = I_i \quad (7.30)$$

中心惯量主轴: 质心为坐标原点的惯量主轴

## 2. 惯量主轴和主转动惯量的性质

(a) 三个惯量主轴彼此垂直。

这是由于  $\mathbf{I}$  为对称矩阵 (张量)。证明:

- i.  $\lambda$  不存在重根, 则三个本征矢  $\vec{x}_i (i = 1, 2, 3)$  彼此正交。
- ii.  $\lambda$  有二重根时, 例如  $I_1 = I_2$ , 则可以在与  $\vec{x}_3$  垂直的平面内, 人为选定  $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$ 。
- iii.  $\lambda$  有三重根时, 人为选定  $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2 \perp \vec{x}_3$ 。

在中心惯量主轴延长线上取平行坐标系, 则新的坐标系仍是惯量主轴

(b) 经过参考点的对称轴即惯量主轴。刚体的对称轴, 旋转对称轴都一定是惯量主轴。刚体对称面的法线一定是惯量主轴。

(c) 主转动惯量中任一个都不大于其余二者之和。

证明:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= \iiint \rho(\vec{r})(y^2 + z^2) dV + \iiint \rho(\vec{r})(z^2 + x^2) dV - \iiint \rho(\vec{r})2z^2 dV \\ &= \iiint \rho(\vec{r})2z^2 dV \geq 0 \end{aligned}$$

当  $z = 0$  时取等号。推论: 对于  $xOy$  平面内的二维刚体:  $I_3 = I_1 + I_2$

## 3. 惯量主轴的选取

**例 1:** 边长为  $a$  的正四面体, 主轴惯量  $I_1, I_2, I_3 = ?$

$$C_M = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{6}})a, \quad A = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}})a$$

$$C = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}})a, \quad B = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}})a$$

$$I_{11} = \frac{3}{2}ma^2 \quad I_{12} = 0$$

$$I_{22} = \frac{3}{2}ma^2 \quad I_{23} = 0$$

$$I_{33} = ma^2 \quad I_{31} = 0$$

**例 2:** 对称性  $x, y, z$  为惯量主轴

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} dx \int_{x-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}-x} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \cdot \rho(y^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{6}ma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= 2 \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} dx \int_{x-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}-x} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \cdot \rho(x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{6}ma^2 \end{aligned}$$

对称性:  $I_1 = I_2$

### 7.3.5 惯量椭球

#### 1. 刚体绕任意轴的转动惯量

假设转轴  $O\vec{X}$  的方向余弦为:  $\vec{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$  则绕转轴  $O\vec{X}$  的转动惯量  $I \equiv \mathbf{I}(\vec{n}, \vec{n})$  为:

$$I = \vec{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{n} = \alpha^2 I_{11} + \beta^2 I_{22} + \gamma^2 I_{33} + 2\alpha\beta I_{12} + 2\beta\gamma I_{23} + 2\gamma\alpha I_{31} \quad (7.31)$$

若取惯量主轴, 则显然有:

$$I = \alpha^2 I_{11} + \beta^2 I_{22} + \gamma^2 I_{33} \quad (7.32)$$

#### 2. 惯量椭球

假设刚体绕转轴  $O\vec{Q}$  的转动惯量为  $I$ , 则取线段  $OQ$  的长度为:

$$|OQ| = \frac{1}{\sqrt{I}} \quad (7.33)$$

则  $Q$  点坐标为:

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{I}}, y = \frac{\beta}{\sqrt{I}}, z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}} \quad (7.34)$$

$$\alpha = \sqrt{I}x, \quad \beta = \sqrt{I}y, \quad \gamma = \sqrt{I}z \quad (7.35)$$

将上式代入方程 (7.31), 得到:

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{23}yz + 2I_{31}zx = 1 \quad (7.36)$$

这是一个椭球方程, 中心为参考点  $O$ ——**惯量椭球**

惯量椭球物理含义:

$$1) I = \frac{1}{(OQ)^2}$$

2)  $\vec{L}$  (角动量) 方向为  $Q$  点法线方向

假设刚体绕转轴  $O\vec{Q}$  转动, 则:

$$\frac{\omega_x}{x} = \frac{\omega_y}{y} = \frac{\omega_z}{z} = C \quad (7.37)$$

由  $\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$ , 得到:

$$L_x = I_{11}\omega_x + I_{12}\omega_y + I_{13}\omega_z = C(I_{11}x + I_{12}y + I_{13}z) \quad (7.38)$$

$$L_y = I_{21}\omega_x + I_{22}\omega_y + I_{23}\omega_z = C(I_{21}x + I_{22}y + I_{23}z) \quad (7.39)$$

$$L_z = I_{31}\omega_x + I_{32}\omega_y + I_{33}\omega_z = C(I_{31}x + I_{32}y + I_{33}z) \quad (7.40)$$

另一方面, 惯量椭球的方程为:

$$F = I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{23}yz + 2I_{31}zx - 1 = 0 \quad (7.41)$$

$Q$  点法向为:

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \quad (7.42)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2I_{11}x + 2I_{12}y + 2I_{13}z \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2I_{21}x + 2I_{22}y + 2I_{23}z \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2I_{31}x + 2I_{32}y + 2I_{33}z \quad (7.45)$$

不难看出,  $Q$  点法向与刚体的角动量平行:

$$\frac{L_x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{L_y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{L_z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (7.46)$$

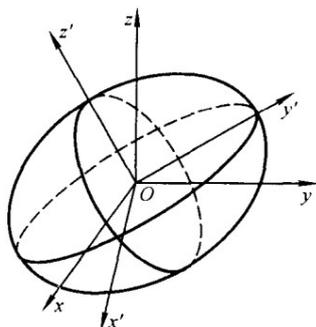


图 7.4: 惯量椭球。

取主轴:

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 = 1 \quad (7.47)$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{I_{11}}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{I_{22}}\right)} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{I_{33}}\right)} = 1 \quad (7.48)$$

推论: 沿  $z$  轴转动  $\theta$  角 ( $\theta \neq 180^\circ$ ), 惯量椭球对称, 则: 惯量椭球为旋转椭球, 且  $z$  轴为惯量主轴。

## 7.4 欧拉动力学方程和应用

### 7.4.1 欧拉动力学方程的建立

$$\vec{J} = I_1\omega_x\vec{e}_x + I_2\omega_y\vec{e}_y + I_3\omega_z\vec{e}_z \quad (7.49)$$

$$T_r = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2) \quad (7.50)$$

$$L(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2) - V(\varphi, \theta, \psi) \quad (7.51)$$

先讨论  $\psi$  方向的动力学方程。 $\psi$  为自转角, 指向为  $z$  轴方向, 对应的广义力为  $z$  方向的力矩:

$$N_z \equiv -\frac{\partial V}{\partial \psi} \quad (7.52)$$

代入欧拉-拉格朗日方程, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= N_z \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} &= N_z \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_x}{\partial \psi} = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = \omega_y \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial \psi} = -\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi = -\omega_x \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial \psi} = 0 \end{cases} \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\psi}} = 1 \quad (7.55)$$

从而最终得到  $\psi$  方向, 即  $z$  方向的动力学方程:

$$I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2) \omega_x \omega_y = N_z \quad (7.56)$$

由于方程的对称性, 同理可得:

$$I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3) \omega_y \omega_z = N_x \quad (7.57)$$

$$I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1) \omega_z \omega_x = N_y \quad (7.58)$$

上三式构成了描述刚体运动的动力学方程组: **刚体欧拉动力学方程组**。

另一种推导:

$$\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_x = \omega_z \vec{e}_y - \omega_y \vec{e}_z \quad (7.59)$$

$$\frac{d\vec{e}_y}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_y = \omega_x \vec{e}_z - \omega_z \vec{e}_x \quad (7.60)$$

$$\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_z = \omega_y \vec{e}_x - \omega_x \vec{e}_y \quad (7.61)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (7.62)$$

$$\begin{aligned} \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} &= I_1 \dot{\omega}_x \vec{e}_x + I_1 \omega_x (\omega_z \vec{e}_y - \omega_y \vec{e}_z) \\ &+ I_2 \dot{\omega}_y \vec{e}_y + I_2 \omega_y (\omega_x \vec{e}_z - \omega_z \vec{e}_x) \\ &+ I_3 \dot{\omega}_z \vec{e}_z + I_3 \omega_z (\omega_y \vec{e}_x - \omega_x \vec{e}_y) \end{aligned} \quad (7.63)$$

整理得:

$$\frac{dL_x}{dt} = I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3) \omega_y \omega_z = N_x \quad (7.64)$$

$$\frac{dL_y}{dt} = I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1) \omega_z \omega_x = N_y \quad (7.65)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2) \omega_x \omega_y = N_z \quad (7.66)$$

## 7.4.2 自由刚体——欧拉陀螺的一般解

$$N_x = N_y = N_z = 0 \quad (7.67)$$

运动积分?

$$L = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \quad (7.68)$$

进动角  $\varphi$  为循环坐标:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\varphi}} \\ &= I_1\omega_x \sin \theta \sin \psi + I_2\omega_y \sin \theta \cos \psi + I_3\omega_z \cos \theta \\ &= \vec{L} \cdot \vec{e}_z \\ &= L_{z'} \end{aligned}$$

根据方程的对称性, 同理可得:

$$L_{x'} = \text{const}, \quad L_{y'} = \text{const} \quad (7.69)$$

即总角动量守恒:  $\vec{L} = \text{const} = \vec{L}_0$ .

由于刚体转动的总能量和角动量守恒, 我们得到:

$$L^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = L_0^2 \quad (7.70)$$

$$E_0 = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \quad (7.71)$$

其实我们也可以直接从刚体的欧拉方程直接得到上两式:

$$\sum_i I_i \dot{\omega}_i \cdot 2I_i \omega_i = \frac{d}{dt} (I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2) = \frac{dL^2}{dt} = 0 \quad (7.72)$$

$$\sum_i I_i \dot{\omega}_i \cdot \omega_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{dE}{dt} = 0 \quad (7.73)$$

进一步求解自由刚体的运动: 绕质心做定点转动, 自由度为 3。

由能量和角动量守恒求解, 得:

$$\omega_x = \pm \sqrt{\frac{J_0^2 - 2E_0 I_2 - I_3(I_3 - I_2)\omega_z^2}{I_1(I_1 - I_2)}} \equiv f_1(\omega_z) \quad (7.74)$$

$$\omega_y = \pm \sqrt{\frac{J_0^2 - 2E_0 I_1 - I_3(I_3 - I_1)\omega_z^2}{I_2(I_2 - I_1)}} \equiv f_2(\omega_z) \quad (7.75)$$

代入动力学方程:

$$\begin{aligned} I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)\omega_x \omega_y &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)f_1(\omega_z)f_2(\omega_z) &= 0 \end{aligned} \quad (7.76)$$

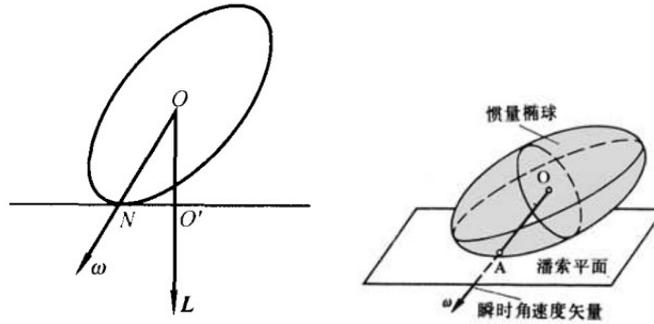


图 7.5: 潘索几何法。

理论上可以求解上式, 得到:

$$\omega_z = \omega_z(t) \quad (7.77)$$

然后进一步由  $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$  求解, 得到三个欧拉角随时间的演化, 即得到刚体的运动规律:  $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$ 。当然, 实际求解的时候并不容易, 这是由于欧拉方程是关于三个欧拉角的非线性方程!

**潘索几何法:**

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \frac{\vec{\omega}}{C}, & |OA| &= R \\ R &= \vec{OQ} \cdot \frac{\vec{L}}{L} = \frac{\vec{\omega}}{C} \cdot \frac{\vec{L}}{L} = \frac{2T}{CL} = \text{const} \end{aligned} \quad (7.78)$$

$Q$  点瞬时角速度为零, 因此, 刚体的运动为惯量椭球在切平面内的纯滚动。

**转动的稳定性分析** 选惯量主轴为随动坐标系的坐标轴。不失一般性, 令:

$$I_3 > I_2 > I_1 \quad (7.79)$$

首先考虑绕  $x$  轴的转动。  $\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_x$ , 施加一个扰动:  $\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_x + \lambda \vec{e}_y + \mu \vec{e}_z$ 。其中  $\lambda, \mu$  为小量。代入欧拉方程:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3) \lambda \mu = 0 \\ I_2 \dot{\lambda} - (I_3 - I_1) \mu \omega_x = 0 \\ I_3 \dot{\mu} - (I_1 - I_2) \omega_x \lambda = 0 \end{cases} \quad (7.80)$$

得:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x \simeq 0 \\ \dot{\lambda} = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_x \mu \\ \dot{\mu} = -\frac{I_2 - I_1}{I_3} \omega_x \lambda \end{cases} \quad (7.81)$$

进一步得到:

$$\ddot{\lambda} + \frac{(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)}{I_2 I_3} \omega_x^2 \lambda = \ddot{\lambda} + \Omega_1^2 \lambda = 0 \quad (7.82)$$

其中:

$$\Omega_1^2 \equiv \omega_x^2 \frac{(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)}{I_2 I_3} \quad (7.83)$$

显然, 当  $\Omega_1^2 > 0$  时, 转动稳定; 当  $\Omega_1^2 \leq 0$  时, 转动不稳定。

同理: 刚体绕  $y$  轴和  $z$  轴转动时, 分别引入:

$$\Omega_2^2 \equiv \omega_y^2 \frac{(I_1 - I_2)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} \quad (7.84)$$

$$\Omega_3^2 \equiv \omega_z^2 \frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \quad (7.85)$$

当  $\Omega_{2,3}^2 > 0$  时, 转动稳定; 当  $\Omega_{2,3}^2 \leq 0$  时, 转动不稳定。

### 7.4.3 对称欧拉陀螺

$$I_1 = I_2 \neq I_3 \quad (7.86)$$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x - (I_1 - I_3) \omega_y \omega_z = 0 \\ I_1 \dot{\omega}_x - (I_3 - I_1) \omega_z \omega_x = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_z = 0 \end{cases}$$

$$\omega_z = \text{const} = \omega_{z0} \quad (7.87)$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = -\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_{z0}\right) \omega_y \\ \dot{\omega}_y = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_{z0}\right) \omega_x \end{cases}$$

若令  $I_3 > I_1$ , 定义:  $\Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_{z0}$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_x = A \cos(\Omega t + \phi_0) \\ \omega_y = A \sin(\Omega t + \phi_0) \end{cases}$$

积分常数  $A, \phi_0$  由初始条件给出!

$$\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{A^2 + \omega_{z0}^2} = \text{const}$$

**欧拉角的求解:**

选  $\vec{L}$  为  $z'$  轴, 则:

$$\begin{cases} L_x = L \cdot \sin \theta \sin \psi = I_1 \omega_x = I_1 A \cos(\Omega t + \phi_0) \\ L_y = L \cdot \sin \theta \cos \psi = I_1 \omega_y = I_1 A \sin(\Omega t + \phi_0) \\ L_z = L \cdot \cos \theta = I_3 \omega_{z0} \end{cases} \quad (7.88)$$

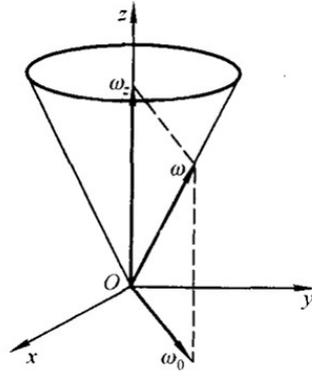


图 7.6: 本体坐标系中瞬时转轴的转动。

由上式第三式得到:

$$\cos \theta = \frac{I_3 \omega_{z0}}{L} = \text{const} = \cos \theta_0 \quad (7.89)$$

进一步得到:

$$\begin{cases} J \sin \theta_0 \sin \psi = I_1 A \cos(\Omega t + \phi_0) \\ J \sin \theta_0 \cos \psi = I_1 A \sin(\Omega t + \phi_0) \end{cases} \quad (7.90)$$

由上两式得到:

$$J \sin \theta_0 = I_1 A, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - (\Omega t + \phi_0) \quad (7.91)$$

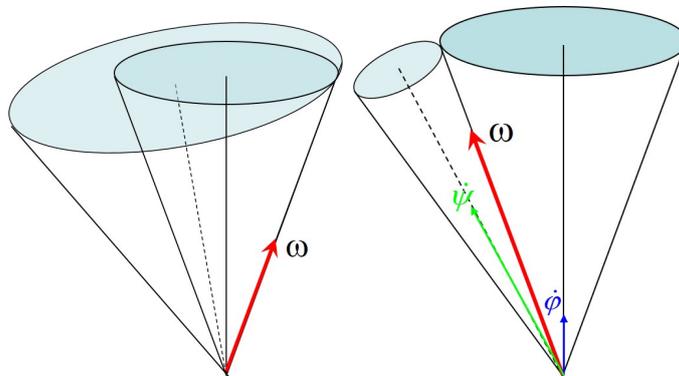
带入  $\omega_z$ :

$$\omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = \dot{\varphi} \cos \theta_0 - \Omega = \omega_{z0} \quad (7.92)$$

$$\dot{\varphi} = (\omega_{z0} + \Omega) \sec \theta_0 \quad (7.93)$$

$$\varphi(t) = (\omega_{z0} + \Omega) \sec \theta_0 \cdot t + \varphi_0 \quad (7.94)$$

下面讨论解的物理图像: **本体圆锥和空间圆锥**

图 7.7: 本体圆锥和实验室圆锥。左图:  $I_3 > I_1 \Leftrightarrow \Omega > 0$ ; 右图:  $I_3 < I_1 \Leftrightarrow \Omega < 0$ 。

$$I_3 > I_1 \Leftrightarrow \Omega > 0, \quad I_3 < I_1 \Leftrightarrow \Omega < 0 \quad (7.95)$$

在实验室系中:

$$\begin{cases} \omega'_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi = -\Omega \sin \theta_0 \sin[(\omega_{z0} + \Omega) \sec \theta_0 t + \phi_0] \\ \omega'_y = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi = \Omega \sin \theta_0 \cos[(\omega_{z0} + \Omega) \sec \theta_0 t + \phi_0] \\ \omega'_z = -\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = -\Omega \cos \theta_0 + (\omega_{z0} + \Omega) \sec \theta_0 \end{cases}$$

$$\Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_{z0} \Rightarrow \omega_{z0} + \Omega = \frac{I_3}{I} > 0$$

因此,  $\omega$  总是右手绕  $z'$  轴进动。

$$\begin{cases} \omega'_x = \Omega \sin \theta_0 \cos \left[ \frac{\pi}{2} + (\omega_{z0} + \Omega) \sec \theta_0 t + \varphi_0 \right] \\ \omega'_y = \Omega \sin \theta_0 \sin \left[ \frac{\pi}{2} + (\omega_{z0} + \Omega) \sec \theta_0 t + \varphi_0 \right] \end{cases} \quad (7.96)$$

#### 7.4.4 地球纬度变迁角

对于地球有:  $I_x = I_y < I_z$ 。

$$\Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_{z0} \simeq \frac{\omega_z}{300} \quad (7.97)$$

显然, 地球的自转周期为一天:  $T \simeq \frac{2\pi}{\omega_{z0}} = 1 \text{ day}$ 。因此, 进动周期为:

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_z} \cdot 300 = 300 \text{ day} \quad (7.98)$$

实际周期为 420。误差: 1) 地球非严格均质扁椭球体; 2) 地球并非严格刚体。

#### 7.4.5 转动的稳定性 ( $I_1 = I_2$ )

类似前面的讨论, 先假设刚体绕  $x$  轴转动:

$$\omega_x \simeq \text{const.} \quad (7.99)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_x \mu, \quad \lambda(t) = C + Dt \quad (7.100)$$

$$\dot{\mu} = -\frac{I_2 - I_1}{I_3} \omega_x \lambda = 0, \quad \mu(t) = \text{const} \quad (7.101)$$

绕  $x$  轴不稳定。同理, 绕  $y$  轴的转动也不稳定。

绕  $z$  轴稳定:

$$\Omega_3^2 = \omega_x^2 \frac{(I_3 - I_1)^2}{I_1^2} > 0$$

非理想刚体——内能损耗

$$I_1^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3^2\omega_3^2 = L_0^2 \quad (7.102)$$

$$I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3\omega_3^2 = 2E_0 \quad (7.103)$$

将方程 (7.102) 减去方程 (7.103) 乘以  $I_1$ , 得到:

$$I_3(I_3 - I_1)\omega_z^2 = L_0^2 - 2I_1E_0 \quad (7.104)$$

利用:  $L_3 = I_3\omega_z = L_0 \cos \theta$ , 得到:

$$\frac{2I_3E_0}{L_0^2} = \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \sin^2 \theta + 1 \quad (7.105)$$

对人造卫星来说, 初始时  $\theta \sim 0$ 。从上式可以看出, 如果  $I_3 > I_1$ , 则能量损耗 ( $E_0$  下降, 一般  $L_0$  不变) 将导致  $\theta$  减小, 陀螺稳定; 反之, 如果  $I_3 < I_1$ , 陀螺将不稳定。

### 7.4.6 拉格朗日陀螺

拉格朗日陀螺: 重力场中定点转动的对称陀螺。

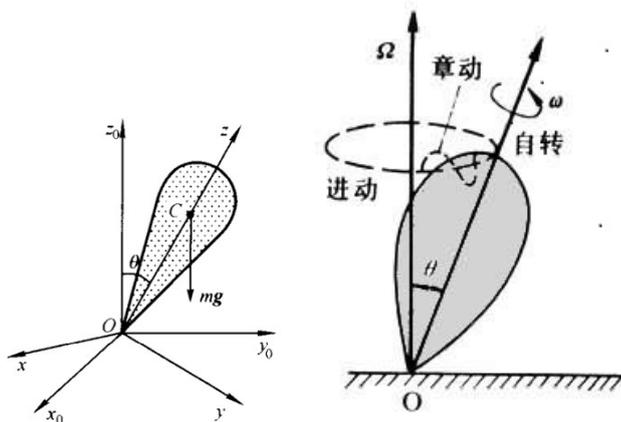


图 7.8: 拉格朗日陀螺: 重力场中定点转动的对称陀螺。

#### 1. 一般运动方程。

定点为  $O$ , 质心为  $C_M$ , 定点到质心的距离为  $l$ 。

$$V = mgl \cos \theta \quad (7.106)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{I_1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 \\ &= \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \\ L &= \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta \end{aligned} \quad (7.107)$$

$\varphi, \psi$  为循环坐标, 因此:

$$\begin{cases} P_\varphi = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_3 \cos \theta \dot{\psi} = \text{const} = L_{z'} \\ P_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \cos \theta \dot{\varphi}) = \text{const} = L_z = I_3 \omega_z \end{cases} \quad (7.108)$$

$$\omega_3 = \text{const} \quad (7.109)$$

能量守恒:

$$E = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta = \text{const} \quad (7.110)$$

三个运动积分都已经找到:  $P_\varphi, P_\psi, E$ 。由  $P_\varphi, P_\psi$  得到:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{J_{z'} - J_z \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} = \frac{J_z}{I_3} - \frac{J_{z'} - J_z \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (7.111)$$

代入能量表达式

$$E = \frac{I_1}{2} \left[ \dot{\theta}^2 + \frac{(J_{z'} - J_z \cos \theta)^2}{I_1^2 \sin^2 \theta} \right] + \frac{J_z^2}{2I_3} + mgl \cos \theta \quad (7.112)$$

引入代入有效势能  $V_{eff}(\theta)$ :

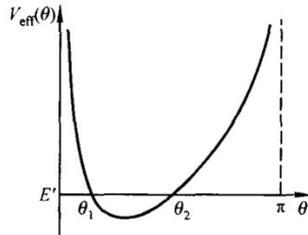


图 7.9:  $\theta$  方向的运动: 等效势能。

$$V_{eff}(\theta) = \frac{(J_{z'} - J_z \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta) \quad (7.113)$$

以及:

$$E' \equiv E - \frac{J_z^2}{2I_3} - mgl = \text{const} \quad (7.114)$$

我们得到  $\theta$  方向的运动方程为:

$$\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta) = E' \quad (7.115)$$

该方程积分形式的解为:

$$t = \int^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1} [E' - V_{eff}(\theta)]}} \quad (7.116)$$

原则上, 我们得到:

$$\theta = \theta(t) \quad (7.117)$$

代入方程 (7.111-??), 原则上得到:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(t) \\ \psi = \psi(t) \end{cases} \quad (7.118)$$

由下式可以看出:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_{z'} - L_z \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (7.119)$$

$\dot{\varphi}$  可以大于 0 也可以小于 0。

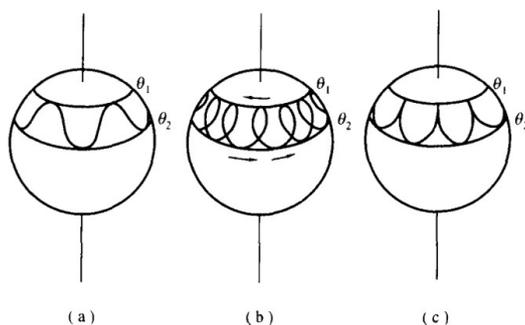


图 7.10: 拉格朗日陀螺的一般运动: 进动、章动和自转。

## 2. 快速陀螺——回转仪

假设  $t = 0$  时, 陀螺仪只有自转, 没有章动和进动:  $\dot{\theta}_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0, \psi_1 = \omega_z \neq 0$ 。因此,  $t = 0$  时,  $E' = V_{eff}(\theta)$ , 即  $\theta_1$  为  $\theta$  方向运动的 turning point。试求  $\theta$  方向运动的另一个 turning point  $\theta_2$ 。

先计算三个运动积分 (用  $t = 0$  时值表示):

$$P_\psi = L_{z'} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\varphi} + I_3 \cos \theta \dot{\psi} \Big|_{t=0} = I_3 \cos \theta_1 \dot{\psi}_1 \quad (7.120)$$

$$P_\varphi = L_z = I_3(\dot{\psi} + \cos \theta \dot{\varphi}) \Big|_{t=0} = I_3 \dot{\psi}_1 = I_3 \omega_z \quad (7.121)$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_1}{2} \left[ \dot{\theta}^2 + \frac{(J_{z'} - J_z \cos \theta)^2}{I_1^2 \sin^2 \theta} \right] + \frac{J_z^2}{2I_3} + mgl \cos \theta \\ &= \frac{J_z^2}{2I_3} + mgl \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (7.122)$$

在第二个 turning points, 同样可以计算三个运动积分:

$$P_\psi = (I_1 \sin^2 \theta_2 + I_3 \cos^2 \theta_2)\dot{\varphi}_2 + I_3 \cos \theta_2 \dot{\psi}_2 = I_3 \cos \theta_1 \dot{\psi}_1 \quad (7.123)$$

$$P_\varphi = I_3(\dot{\psi}_2 + \cos \theta_2 \dot{\varphi}_2) = I_3 \omega_z \quad (7.124)$$

$$E = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \theta_2) + \frac{L_z^2}{2I_3} + mgl \cos \theta = \frac{L_z^2}{2I_3} + mgl \cos \theta_2 \quad (7.125)$$

消去  $\dot{\varphi}_2$  和  $\dot{\psi}_2(\dot{\theta}_2 = 0)$  得:

$$\frac{I_3^2 \dot{\psi}_1^2}{2I_1 mgl} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \sin^2 \theta_2 \quad (7.126)$$

令

$$\epsilon = \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \quad (7.127)$$

注意到:

$$P \equiv \frac{I_3^2 \dot{\psi}_1^2}{2I_1 mgl} \gg 1 \quad (7.128)$$

我们得到:

$$\epsilon^2 + (p - 2 \cos \theta_1) \epsilon - \sin^2 \theta_1 = 0 \quad (7.129)$$

快速陀螺  $P \gg 1, |\epsilon| \ll 1$ 。进一步假设  $|\epsilon| \ll 1$

$$\Rightarrow p\epsilon - \sin^2 \theta_1 = 0 \quad (7.130)$$

$$\epsilon = \frac{\sin^2 \theta_1}{p} = \frac{2I_1 mgl \sin^2 \theta_1}{I_3^2 \dot{\psi}_1^2} \ll 1 \quad (7.131)$$

从上式可以看出, 陀螺仪的自转角速度 ( $\dot{\psi}_1 = \omega_z$ ) 越大,  $\epsilon$  就越小, 则:  $\theta_2 \simeq \theta_1$ , 即陀螺基本没有章动。

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3 \dot{\psi}_1 \epsilon}{2I_1 \sin^2 \theta_1} = \frac{mgl}{I_3 \dot{\psi}_1} \quad (7.132)$$

从上式可以看出, 陀螺仪的自转角速度 ( $\dot{\psi}_1 = \omega_z$ ) 越大,  $\dot{\varphi}$  就越小, 即陀螺基本没有进动。