《理论力学 A》（2023 年秋季）平时作业一

9 月 14 日（星期四）交。

1. 讨论某质点在三维欧几里得空间运动。假设我们采用球坐标系：$\{x^i\} = \{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \theta, \phi\}$（其中 $i = 1, 2, 3$），则该质点的运动轨迹为：$\{x^i(t)\} = (r(t), \theta(t), \phi(t))$。
   - 试画出在某点处三个单位矢量 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ 的示意图。
   - 计算质点速度 $\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t)$ 的三个分量。
   - 计算质点加速度 $\vec{a}(t) \equiv \dot{\vec{v}}(t)$ 的三个分量。

2. 讨论在太阳系中行星、彗星的轨道。试用角动量守恒和万有引力定律，证明天体在运动过程中，
$$\frac{dv}{d\theta} = \text{cont.} \tag{1}$$
给并出该常数值的具体值。这里 $dv \equiv |d\vec{v}|$，θ 为极坐标中轨道的极角。

3. 讨论彗星的轨道。
   (a) 试通过给定的一个圆及其圆外一点构造双曲线。
   (b) 假设有一个小天体（例如彗星）在无穷远处以速度 v_∞ 入侵太阳系，掠过太阳之后，又以速度 v_∞ 逃逸出太阳系。只考虑太阳对该小天体的引力作用，并不考虑小天体的质量损失，试证明或说明该小天体的轨道为双曲线，并画出它的速度图和轨道图。
   (c) 讨论罗瑟福散射。α 粒子在无穷远处以速度 v_∞ 轰击很薄很薄的金箔，α 粒子掠过原子核之后，又以速度 v_∞ 散射出去。只考虑原子核对 α 粒子的库伦排斥力，并假设原子核的质量远大于 α 粒子的质量，试证明或说明该 α 粒子的轨道为双曲线，并画出它的速度图和轨道图。

4. 根据广义相对论，行星受到太阳的“万有引力”并不遵循严格的距离平分反比律，即：$F \propto -r^{-2}$。与经典的万有引力定律相比，广义相对论给出一个非常非常小的修正项：
$$F^{(GR)} = -\frac{3(GM_\odot)^2 p}{r^4 c^2} \propto -\frac{1}{r^4}, \tag{2}$$
负号表示该力为吸引力，$p = a\sqrt{1-e^2}$ 为椭圆轨道的极轴，其中 e 为轨道偏心率，c 为光速。
   (a) 试根据行星运动的速度图，计算行星沿着轨道运行一圈之后近日点的进动值。
   (b) 水星是离太阳最近的行星，受到太阳的引力最大，水星轨道近日点的进动最显著。水星的轨道参数如下：$a = 5.8 \times 10^7$ km，$e = 0.20$，$T = 88$ 天。试**估算**水星近日点的进动角（单圈），数量级正确即可。可能用到的参数：$\frac{GM_\odot}{c^2} = 1.5$ km。

《理论力学 A》（2023 年秋季）平时作业二

9 月 21 日（星期四）交。

1. 根据定义，作用量 S 的量纲为 [能量]×[时间]=[角动量]×[角度]=[动量]×[长度], 即角动量量纲。因此，在真空中自由电子的作用量为：$S = Et[\vec{x}]$。其中 $t[\vec{x}]$ 为路径 $\vec{x}$ 的泛函。试根据费曼路径积分的思想，解释电子的杨氏双缝干涉实验结果。

2. 对应同一个力学系统，可以有不同的拉格朗日量（函数），但是它们都给出相同的动力学方程，也就是系统的拉格朗日量并不唯一。例如，$L = L(q(t), \dot{q}(t), t)$ 与 $L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{df(q,t)}{dt}$ 就给出相同的动力学方程，这里 $f(q, t)$ 为任意的函数。试通过如下两种方法证明之。

   (a) 通过最小作用量原理证明之；

   (b) 直接将两个拉格朗日量分别代入欧拉-拉格朗日方程（E-L Eqs.）验证之。

3. 现讨论自由的相对论性粒子的拉格朗日量（参见讲义 §1.3）。试根据狭义相对论中力学的相对性原理，即洛伦兹对称性，证明自由的相对论性粒子的拉格朗日量为:

$$L = \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \ , \tag{1}$$

   其中：m 为粒子的静止质量，$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\}$，$\eta_{\mu\nu} = diag\{-1, +1, +1, +1\}$ 为 Minkowski 度规。

4. 接上题。假设时空间中存在电磁场，将电磁场（$\vec{E}(\vec{x}, t)$ 和 $\vec{B}(\vec{x}, t)$）看做外场，电磁场可以用四维的势函数 $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ 统一表示：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \tag{2}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{3}$$

   其中 φ 为静电势，$\vec{A}$ 为磁矢量势。试大胆猜测质量和电荷分别为 m 和 q 的带电粒子在电磁场中的拉格朗日量。

5. **（思考题）** 我们知道拉格朗日量 $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ 是坐标 $q(t)$ 和速度 $\dot{q}(t)$ 的函数，坐标 $q(t)$ 和速度 $\dot{q}(t)$ 是独立的量。但是有同学这么反驳我：坐标 $q(t)$ 对时间求导，不就得到速度 $\dot{q}(t) = dq(t)/dt$ 了吗？速度应该不是独立的量！你是怎么理解的？(简要说明)

《理论力学 A》(2023 年秋季)平时作业三

第一题和第二题 9 月 28 日(星期四)交。第三题和第四题 10 月 10 日(星期四)交。

1. 假设地球内部的物质是均匀分布的，取地球中心的引力势能为零，则地球内部单位质量的引力势能 $V(r)$ 为 $V(r) = \frac{1}{2}(g/R)r^2$，其中 g 为地球表面的重力加速度，R 为地球的半径，r 为地球内部距离地球中心的距离。

   (a) 假设从地球表面的两端(例如 A、B 两点)建造一条直线隧道，一个检验粒子从 A 点开始静止无摩擦地下落到 B，试证明该运动为简谐振动，粒子从 A 下落到 B 所需的时间为：$\tau_0 = \pi\sqrt{R/g} \simeq 42.2$ 分钟，且该结果与 A、B 两点的位置无关。

   (b) 考虑在 A、B 建造一条所需时间最短的隧道，假设该隧道的方程为：$r = r(\theta)$，试通过变分法得到 $r(\theta)$ 所满足的方程，并得到如下的首次积分方程：

   $$\frac{r^2}{\sqrt{(dr/d\theta)^2 + r^2}\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{r_0}{\sqrt{R^2 - r_0^2}} \ , \tag{1}$$

   其中 r_0 为隧道距离地球中心最近的点。进一步积分上式，得到：

   $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}}\right) - \frac{r_0}{R}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}}\right) \tag{2}$$

   其中已取 r_0 处 $\theta = 0$。易证，A、B 两点的角度差为：

   $$\Delta\theta = \pi(1 - r_0/R) \ . \tag{3}$$

   (c) 引入参数：

   $$\tan\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}} \tag{4}$$

   因此，在 $r = r_0$ 处，$\phi = 0$。在 A、B 两点：$\phi = \pm\pi$。证明隧道方程可以取如下的形式：

   $$r^2 = \frac{1}{2}\left(R^2 + r_0^2\right) - \frac{1}{2}\left(R^2 - r_0^2\right)\cos\phi \tag{5}$$

   $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\tan\frac{\phi}{2}\right) - \frac{r_0}{2R}\phi \ . \tag{6}$$

   证明该方程其实为内摆线(圆内圆滚线)方程：是半径为 $a = \frac{1}{2}(R - r_0)$ 的小圆沿着半径为 R 的大圆在其内部无滑动的滚动过程中，小圆上某固定点的轨迹方程。

   (d) 考虑粒子从 A 到 B 参量随时间的变化。证明：$\phi = 2\pi(t/\tau)$，其中 $\tau = \tau_0\sqrt{1 - (r_0/R)^2}$ 是粒子从 A 到 B 所需的时间。试比较一下从合肥到北京两点之间 τ 与 τ_0 的差别。

2. 测地线方程。在三维欧几里得空间中，如果我们选取球坐标：$x^i = (x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$，其中 $i = 1, 2, 3$。则空间中两相邻点之间的距离为：

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \equiv g_{ij}dx^i dx^j \tag{7}$$

   其中 $g_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 称作为度规。下面我们讨论一般的 n 维空间，假设该空间的度规为 (希腊字母取 $1, 2, \cdots, n$)：$g_{\mu\nu}(x^\gamma)(\mu, \nu, \gamma = 1, 2, \cdots, n)$，则经过给定的两点 A, B 之间的曲线 $x^\mu(\lambda)$ 的长度为：

   $$S = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}d\lambda \tag{8}$$

(a) 试求当 S 取极值时，曲线 $x^\mu(\lambda)$ 所满足的方程称之为短程线，又称测地线方程。如果我们取 $\lambda = s$，注意到：

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1 \tag{9}$$

则测地线方程也可以等价地由如下作用量得到：

$$S_{\text{eff}} = \int f\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}\right) ds \equiv \frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} ds \tag{10}$$

试推导如下著名的测地线方程：

$$g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\rho}{ds^2} = -\Gamma_{\mu,\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} \tag{11}$$

其中：

$$\Gamma_{\mu,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu}\right) \tag{12}$$

称之为克里斯托弗联络（Christoffel connection）。可以将测地线方程改写为：

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \tag{13}$$

其中：

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\rho\sigma} \tag{14}$$

上指标的度规函数 $g^{\mu\nu}$ 为下指标的度规函数 $g_{\mu\nu}$ 的逆矩阵：$g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$。

(b) 在狭义相对论中，时空是 4 维的，时空间隔（四维时空中的距离，已令 $c = 1$）为：

$$ds^2 \equiv -d\tau^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{15}$$

试求参数化的测地线方程：$t = t(\tau), \vec{r} = \vec{r}(\tau)$。积分常数用初始位置 $t_0, \vec{r}_0$ 以及速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ 表示。

3. **钱德拉塞卡极限：白矮星的最大质量**。考虑铁白矮星，即白矮星内部由铁原子核加电子组成。白矮星内部的压强主要来自电子的费米简并压。根据统计物理，我们可以得到白矮星的的状态方程如下：

$$\rho = 9.74 \times 10^8 \mu_e x_e^3 \quad \text{kgm}^{-3} \tag{16}$$
$$p = 1.42 \times 10^{24}\phi(x_e) \quad \text{Nm}^{-2} \tag{17}$$

其中 μ_e 为电子的平均分子量，即将原子核平均分给每个电子，每个电子分到的核子数。对于铁白矮星，显然，$\mu_{\text{e}} = 56/26 \simeq 2.15$。公式中 x_e 为无量纲化电子的费米动量，即电子的费米动量 p_{F} 与 $m_e c$ 的比值：

$$x_e = \frac{p_{\text{F}}}{m_e c} \tag{18}$$

在密度低的时候，有 $x_e \ll 1$，即电子是非相对论的。在密度高的时候有 $x_e \gg 1$，即电子是极端相对论的。$\phi(x)$ 的表达式为：

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left\{x(1+x^2)^{1/2}(2x^2/3-1) + \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]\right\} \tag{19}$$

简单分析可知：

$$\phi(x) \simeq \frac{1}{15\pi^2}x^5, \quad (x \ll 1) \tag{20}$$
$$\phi(x) \simeq \frac{1}{12\pi^2}x^4, \quad (x \gg 1) \tag{21}$$

也就是说，在密度比较低的时候，电子的非相对论的（$x_e \ll 1$），状态方程近似为：

$$p \sim \rho_0^{5/3} \tag{22}$$

在密度比较高的时候，电子变得极端相对论（$x_e \gg 1$），状态方程近似为：

$$p \sim \rho_0^{4/3} \tag{23}$$

请通过数值计算如下的常微分方程组，得到一系列的白矮星的质量和半径关系 (M, R)。其中质量请用太阳质量为单位 ($M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg)。

$$\begin{aligned} \frac{dp(r)}{dr} &= -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r) & (24) \\ \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) & (25) \end{aligned}$$

注意，为了得到白矮星的最大质量，核心处 ($r = 0$) 的密度 (ρ_c) 应该取高于 $x_e = 1$ 对应的密度。现在有很多现成的小程序可以直接调用，例如 python scipy 中的 odeint，matlab 中的 ode 等等。

数值计算得到的白矮星的最大质量是多少? 请根据计算结果作如下两幅图：(1) $\rho_c - M$; (2) $M - R$。数据点取最大质量附近的系列值（参考文献：Chandrasekhar, S., 1931, Astrophysical Journal, vol. 74, p.81 http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1931ApJ....74...81C）。

4. **奥本海默极限：中子星的最大质量**。奥本海默在最初研究中子星最大质量的时候，假设中子星由纯中子组成。中子星内部的压强由中子的费米简并压提供。根据统计物理，我们可以得到中子气体的状态方程：

$$\begin{aligned} \rho &= 1.80 \times 10^{20} \chi(x_n) \quad \mathrm{kgm^{-3}} & (26) \\ p &= 1.62 \times 10^{37} \phi(x_n) \quad \mathrm{Nm^{-2}} & (27) \end{aligned}$$

其中 $x_n = p_F / m_n c$ 为中子无量纲化的费米动量。$\chi(x)$ 的表达式为：

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x(1+x^2)^{1/2}(2x^2+1) - \ln[x + (1+x^2)^{1/2}] \right\} \tag{28}$$

简单分析可知：

$$\begin{aligned} \chi(x) &\simeq \frac{1}{3\pi^2} x^3, \quad (x \ll 1) & (29) \\ \chi(x) &\simeq \frac{1}{4\pi^2} x^4, \quad (x \gg 1) & (30) \end{aligned}$$

对于纯中子气体的状态方程，我们也可以采用如下形式的状态方程：

$$\begin{aligned} \rho &= 5.71 \times 10^{17} (\sinh t - t) \quad \mathrm{kgm^{-3}} & (31) \\ p &= 1.71 \times 10^{34} [\sinh t - 8 \sinh(t/2) + 3t] \quad \mathrm{Nm^{-2}} & (32) \end{aligned}$$

其中:

$$t = 4 \mathrm{arcsh}(p_\mathrm{F}/m_n) = 4 \ln \left(x_n + \left[1 + x_n^2\right]^{1/2} \right) \tag{33}$$

对于典型的中子星来说，它的半径非常接近同样质量黑洞的 Schwarzschild 半径，因此，我们必须用广义相对论版的流体静力学平衡方程，Tolman-Oppenheimer-Volkoff

方程组处理：

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\left[m(r)+\frac{4\pi r^3 p(r)}{c^2}\right]}{r^2\left[1-\frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right]}\left[\rho(r)+\frac{p(r)}{c^2}\right] \tag{34}$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{35}$$

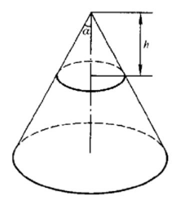
请通过数值计算，得到一系列的中子星的质量和半径关系 (M, R)。

数值计算得到的中子星的最大质量是多少? 请根据计算结果作如下两幅图：(1) $\rho_c - M$; (2) $M - R$（参考文献：Oppenheimer, J. R.; Volkoff, G. M., 1939, Physical Review, vol. 55, Issue 4, pp. 374-381 https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.55.374）。

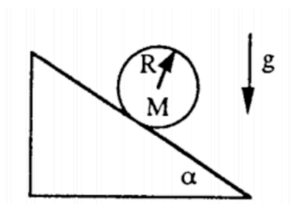
《理论力学A》（2023 年秋季）平时作业四[1]

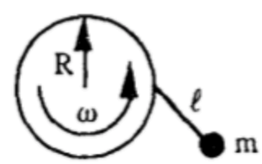
10 月 12 日（星期四）交。

1. 如下图所示，质量为 m，固有长度为 l，劲度系数为 k 的弹性圈放在顶角为 2α 的光滑铅直圆锥上，求平衡时弹性圈的位置 h。



2. 一个圆柱体的质量为 M，半径为 R，转动惯量为:$I = \int r^2 dM$，现将该圆柱体从一倾角为 α 的斜面 (斜面固定) 无滑动滚动下来，试通过达朗贝尔原理推导该圆柱体的运动方程。提示：可以将圆柱体看作由大量的小质点组成，每个质点的运动可以分解为绕着质心的转动，而质心沿着斜面作直线加速运动。





3. 在无摩擦的光滑水平面内有一半径为 R、圆心固定的圆盘，以角速度 ω 绕圆心转动，在转盘边缘挂了一长度为 l、质量可以忽略的轻杆，杆的末端挂了一质量为 m 的小球（像个单摆）。通过达朗贝尔原理讨论在随着圆盘一起转动的参考系中，该小球的运动可以等价于在加速度为 $g = \omega^2 R$ 的引力场中的运动（等效原理!）。

4. **拉格朗日量力学**。朗道《力学》第一章习题（见中文版第 10 页）。习题 1（平面双摆）、习题 2（活动单摆）、习题 3（悬挂点按某种确定的运动方式运动的单摆）、习题 4 。分别选择合适的广义坐标，写出系统的拉格朗日量。对于习题 1 和习题 4 ，进一步写出系统的运动方程（组）。

《理论力学 A》（2023 年秋季）平时作业五[1]

10 月 17 日（星期四）交。

1. 考虑存在相互作用的两质点系统，两质点的质量分别为：m_1, m_2。假设该相互作用只与两质点间的距离有关，即该系统的拉格朗日量为：
$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)\ , \tag{1}$$
其中 V 为相互作用的势能。试根据 Noether 定理，证明该系统的能量、动量和角动量守恒。

2. 下图显示的是二维的阿特伍德机。先写出系统的拉格朗日量，观测发现系统的对称性，构造相应的操作：x_ϵ, y_ϵ。验证你的猜想，并得到相应的守恒量。

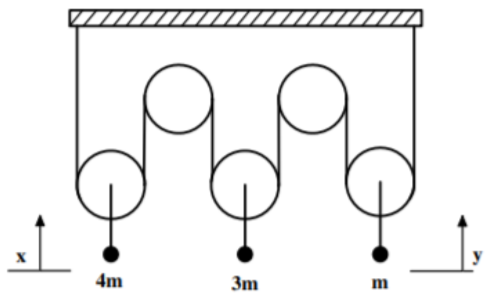


图 1: 二维阿特伍德机，悬挂质量的三个滑轮是活动的，上面两个为定滑轮。建议广义坐标选为图中的 x, y，即左右两个滑轮垂向位置。

3. 为简单起见，考察相对论电荷在一维空间中的运动，即时空是二维的。

   (a) 先考虑自由的相对论电荷的运动。粒子的等效拉格朗日量为：
$$L = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv \frac{m}{2}\left(-\dot{t}^2 + \dot{x}^2\right) \tag{2}$$
   如果我们进行如下的坐标变换–洛伦兹变换 (Lorentz boost)：
$$\begin{pmatrix} ct_\varepsilon \\ x_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\varepsilon & -sh\varepsilon \\ -sh\varepsilon & ch\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$
   其中 ε 与速度 v 有关。这里我们将该坐标变换看作对位型空间（注意：在二维时空中，t 也是广义坐标）的单参数的操作（operation）。试证明在操作下，粒子的拉格朗日量不变，即系统具有洛伦兹对称性，并导出相应的守恒量–Noether 荷。

   (b) 如果存在外磁场 $A^\mu = (\varphi, A)$，则系统的朗格朗日量为：
$$L = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + J^\mu A_\mu = \frac{m}{2}\left(-\dot{t}^2 + \dot{x}^2\right) + e(-\varphi\dot{t} + \frac{1}{c}A\dot{x}) \tag{4}$$
   其中 $J^\mu = eU^\mu$ 为电荷的电流，m、e 分别为带电粒子的静止质量和电荷。电磁势 φ 和 A 为 x 与 t 的函数，磁矢势 A 沿 x 方向。如果在无穷小的洛伦兹变换操作下，粒子的作用量不变，试求 φ 和 A 之间满足的关系，并给出相应的守恒量–Noether 荷。

[1]© 中国科学技术大学物理学院天文学系

《理论力学 A》（2023 年秋季）平时作业六[1]

10 月 25 日（星期四）交。

1. 质点在引力场 $V(r) = -k/r$ 内沿着抛物线运动，能量 $E = 0$，试求质点坐标与时间的关系：$r = r(t)$（参见朗道《力学》第三章习题 1）。

2. 质点在有心力场 $V(r) = \alpha/r^2$ 内运动，试积分运动方程，得到：$r = r(\theta)$ 以及 $r = r(t)$（参见朗道《力学》第三章习题 2）。

3. 在势能 $V(r) = -k/r$ 上增加一个小的修正项：δV ，有限运动的轨道不再封闭，发生轨道进动。试求如下两种情况下轨道在一个周期内的进动角 $\delta\theta$：a) $\delta V = \beta/r^2$; b) $\delta V = \gamma/r^3$ （参见朗道《力学》第三章习题 3）。

4. 行星在太阳引力场中作椭圆轨道，但是行星运动的速度图是圆。所谓的速度图就是将行星在轨道上任一点的速度矢量都平移到坐标的原点而构成的图。试利用角动量 $\vec{L}$ 与 Laplace-Runge-Lenz 矢量 $\vec{A}$ 的叉乘来证明行星运动的速度的确是圆，并得到速度图的半径大小，以及原点偏离圆心的大小。

5. **选做题**。现有一绕共同质心 C 相互绕转，作圆轨道运动的双星系统，两个星体的质量分别为 m_1, m_2，它们之间的距离假设为 a，显然两个星体相互绕转的角速度为：$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a^3}}$。下面我们在双星的共转参考系中讨论。这里共转参考系的转轴经过质心 C 且垂直于轨道平面，转动参考系的角速度为 ω。因此，在共转参考系中，两个双星是静止不动的。

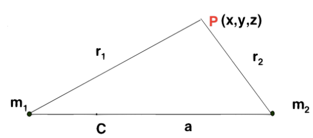


图 1: 双星共转参考系。其中 C 点为质心的位置。P 点是检验粒子的位置。

   (a) 在转动参考系中，存在一些平衡点，即在这些平衡点，检验粒受到两个星体的万有引力与离心力大小相等，方向相反。试找出所有的平衡点（拉格朗日点）。

   (b) 如图，在转动参考系中，我们不妨选择 m_1 所在的点为坐标原点，m_1, m_2 的连线方向为 x 轴方向，选择合适的势能原点，我们可得在转动参考系中，某参考点 $P(x, y, z)$ 的势能为：

$$V = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} - \frac{\omega^2}{2}\left[(x - x_c)^2 + y^2\right] \ , \tag{1}$$

   其中 x_c 为质心 C 的 $x-$ 坐标，其中 r_1 和 r_2 为参考点 P 分别到 m_1 和 m_2 之间的距离。试用计算机绘制出势能 $V(x, y, z)$ 的等势图，并标出所有的拉格朗日点。

[1]

《理论力学A》（2023 年秋季）平时作业七[1]

11 月 7 日（星期四）交。

1. 1995 年 10 月 6 日，Michael Mayor & Didier Queloz 发现恒星 51 Pegasi（飞马座）周围存在一个行星！据观测，该恒星为 G5 型，质量约为 1.06 太阳质量，温度比太阳略低。下图是观测到的恒星 51 Peg 的视向速度随着轨道位相的变化。观测到的轨道约为：4.23 天，视向速度为：±57m/s。假设我们的视线方向位于该恒星 - 行星系统的轨道平面内，试估算恒星 51 Peg 的行星的质量（以木星的质量为单位）。阅读参考文献：

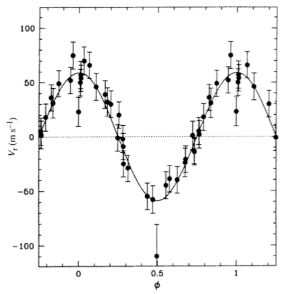


图 1: 恒星 51 Peg 的视向速度随着轨道位相的变化。观测到的轨道周期为：4.23 天，视向速度为：±57m/s。

Michel Mayor & Didier Queloz, 1995, Nature, **378**, 355, *A Jupiter-mass companion to a solar-type star*。不用提交。

2. (a) 质量为 m 的质点以速度 $\vec{v}_1$ 从一个势能为常数 V_1 的半空间入射到另一个势能为常数 V_2 的半空间，试求指点运动方向的改变（参见朗道《力学》第二章 §7 习题）。

   (b) 现有一个半径为球形势阱, 即：

$$V = \begin{cases} -V_0, & r < a \quad , \\ 0, & r \geq a \quad . \end{cases} \tag{1}$$

   试求粒子在该场中散射的有效截面（参见朗道《力学》第四章 §19 习题 2）。

3. **有心力场**。质量为 m 的检验粒子在有心力场 $V(r)$ 中运动时，径向运动的等效势能为：

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad , \tag{2}$$

   其中 L 为粒子的角动量。试定性讨论如下各种有心力场中粒子的运动情况，并画出可能的轨道草图（提示：轨道与 L 的取值有关，请分类讨论）。

   (a) 三维各向同性谐振子：$V(r) = \frac{1}{2}kr^2 \quad ;$

   (b) 球方势阱：$V(r) = -V_1(r < a), V(r) = 0(r > a) \quad ;$

   (c) $V(r) = -\frac{k}{r^2} \quad ;$

   (d) Yukawa 势（短程力，核力模型）：$V(r) = -k\frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad .$

4. 讨论由质量和摆长分别为 m_1, l_1 以及 m_2, l_2 组成的双摆的微振动。其中摆 1 悬挂在固定点，摆 2 悬挂在 m_1 上（参看讲义 §5.1.3 例题，也可参见朗道 §23 习题 2 ）。

   (a) 写出微振动条件下，系统的拉格朗日量（近似到二阶小量）。

   (b) 得到系统的动力学方程，并求解，即：求解本征频率和对应的振动解。

   (c) 求解简正坐标、对应的振动解以及简正坐标和原先的广义坐标（例如 θ_1, θ_2）之间的坐标变换矩阵。

5. 两个存在耦合的谐振子系统的拉格朗日量为：

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k_2y^2 + \alpha xy \quad . \tag{3}$$

   (a) 试求系统的两个微振动圆频率；

   (b) 试求该系统在做微振动时候的简正坐标。

6. 在有心力场中由于对称性，质点的轨道位于一个平面内，不妨假设该平面为 xy 平面。试求质点在有心力场 $V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ 中的运动轨道，其中 k 为常数（参见朗道 §23 习题 3 ）。

《理论力学 A》（2023 年秋季）平时作业八[1]

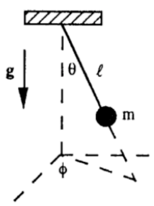
11 月 16 日（星期四）交。

1. (**强迫振动**) 设直到 $t=0$ 时系统静止在平衡位置，力 F 的变化规律为：当 $t<0$ 时 $F=0$，当 $0<t<T$ 时 $F=F_0t/T$。当 $t>T$ 时 $F=F_0$。试求在该力作用后系统振动的最后振幅。（参见：朗道《力学》§22 “强迫振动” 习题 2。）

2. (**阻尼振动**) 试求外力 $f=f_0e^{\alpha t}\cos\gamma t$ 作用下有摩擦的强迫振动，即求下式

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f_0}{m}e^{\alpha t+i\gamma t} \tag{1}$$

   的解。（参见：朗道《力学》§26 “有摩擦的强迫振动” 习题。）



3. (**简振坐标**) 试求平面双摆的微振动，并求相应的简振坐标。（参见：朗道《力学》§23 “多自由度系统振动” 习题 2。讲义:§2.8.7）

4. (**哈密顿力学**) 如图所示的球面摆：质点的质量为 m，摆长为 l，重力加速度为 g。
   (a) 采用球面坐标：(θ,ϕ)，试写出球面摆的哈密度量（H）。
   (b) 根据哈密顿正则方程，推导出系统的动力学方程。
   (c) 尽量找出该系统存在的运动积分。

《理论力学 A》（2023 年秋季）平时作业九[1]

11 月 23 日（星期四）交。

1. **哈密顿力学**。在拉格朗日力学中我们知道，两个拉格朗日量 L 和 L' 之间如果仅差某任意函数 $f(q_\alpha, t)$ 对时间的全导数：$L' = L + \frac{df}{dt}$，则由 L 和 L' 得到的动力学方程完全一致。
   (a) 两个正则动量 p_α 和 p'_α 之间的关系？其中 p_α 和 p'_α 分别为由 L 和 L' 定义的正则动量。
   (b) 经过勒让德变换得到的两个哈密顿量 H 和 H' 之间的关系？
   (c) 证明：将 H 和 H' 代入哈密顿正则方程得到的动力学方程完全等价。

2. **正则变换**。通过正则变换求解谐振子问题。系统的拉格朗日量为：
$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \tag{1}$$
   (a) 证明如下变换为正则变换：
$$q = Q\cos t + p\sin t, \quad p = -Q\sin t + P\cos t \tag{2}$$
   (b) 试求第二类母函数 $F_2(q, P, t)$，以及新的哈密顿函数 $\widetilde{H}(Q, P, t)$。
   (c) 通过新的哈密顿函数，求解系统的动力学。

3. **正则变换**。对于自由度为 2 的力学系统，正则变换要满足的条件为：
$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - P_1 dQ_1 - P_2 dQ_2 + (\widetilde{H} - H)dt = dF_1(q_1, q_2, Q_1, Q_2, t) \tag{3}$$
试推导类似自由度为 1 情形下 Jacobi 行列式等于 1 的正则变换需要满足的关系式。提示：
$$dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 = dP_1 \wedge dQ_1 + dP_2 \wedge dQ_2 \tag{4}$$

4. **泊松括号**。考虑一个质量为 m 的质点在引力势为 $V = -k/r$ 的引力场中运动，假设轨道平面为 $x - y$ 平面。则质点的哈密顿量为
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{1}}{2m}\left(\boldsymbol{p}_x^2 + \boldsymbol{p}_y^2\right) - \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{r}} \tag{5}$$
其中 $\mathbf{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$。$z$ 方向的角动量为：$\mathbf{L} = \mathbf{x}\boldsymbol{p_y} - \mathbf{y}\boldsymbol{p_x}$, Laplace-Runge-Lenz 矢量 $\vec{A}$ 位于 $x - y$ 平面内，分量为:
$$A_x = p_y L - \frac{mkx}{r}, A_y = -p_x L - \frac{mky}{r} \tag{6}$$
   (a) 证明：$[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H}] = \mathbf{0}, \quad [\boldsymbol{A}_x, \boldsymbol{H}] = \mathbf{0}, [\boldsymbol{A_y}, \boldsymbol{H}] = \mathbf{0}$，即 $L, \vec{A}$ 都为运动常数。
   (b) 证明：$[A_x, \boldsymbol{L}] = -\boldsymbol{A}_y, [\boldsymbol{A}_y, \boldsymbol{L}] = \boldsymbol{A}_x, [\boldsymbol{A}_x, \boldsymbol{A}_y] = -(2\boldsymbol{mH})\boldsymbol{L}$。假设质点处于束缚态 $H = -|E|$。简单说明新“矢量” $\vec{\boldsymbol{R}} \equiv \left(\frac{\boldsymbol{A_x}}{\sqrt{2\boldsymbol{m}|\boldsymbol{E}|}}, \frac{\boldsymbol{A_y}}{\sqrt{2\boldsymbol{m}|\boldsymbol{E}|}}, \boldsymbol{L}\right)$ 与三维角动量有完全一致的对易关系。
   (c) 证明我们新引进的“矢量” $\vec{R}$ 大小为 $\boldsymbol{R}^2 = \frac{\boldsymbol{mk}^2}{2|\boldsymbol{E}|}$。

[1]© 中国科学技术大学物理学院天文学系袁业飞

《理论力学A》（2023 年秋季）平时作业十[1]

11 月 23 日（星期四）交。

1. **哈密顿-雅克比方程**。三维各向同性谐振子在笛卡尔坐标系中的势能为：$V(x,y,z)=\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$。试用哈密顿-雅克比方法在笛卡尔坐标系中求解三维谐振子的动力学方程及其解：$x(t),y(t),z(t),p_x(t),p_y(t),p_z(t)$。

2. **哈密顿-雅克比方程**。二维各向同性谐振子在极坐标中的势能为：$V(r,\theta)=\frac{1}{2}kr^2$。试用哈密顿-雅克比方法在极坐标中求解二维谐振子的动力学方程及其解（得到积分形式的解即可）。

3. **（选做题）**对单粒子而言，它的相空间是 6 维的。证明相空间中的体积微元（d^3xd^3p）是洛伦兹变换不变量，从而进一步说明对辐射场，I_ν/ν^3 是洛伦兹不变量。

4. **Virial 定理**。讨论行星的运动。一质量为 m 的质点 $V(r)=-k/r(k>0)$ 中做束缚态平面轨道运动 ($E<0$)，根据对称性，采用极坐标 (r,θ)。作用量 I_r,I_θ 分别定义为：$I_r=\oint p_r(r)dr$, $I_\theta=\oint p_\theta(\theta)d\theta$, 环路积分沿着轨道积分。试根据 Virial 定理证明：$I_r+I_\theta=\oint k/rdt$。

5. 阅读讲义 §6.4.5 “转动黑洞时空中检验粒子的运动”。不用提交。

[1]

《理论力学A》（2023 年秋季）平时作业十一[1]

12 月 7 日（星期四）交。

1. 质量为 m 的粒子在二维 (x,y) 平面中运动，势能曲线为：

$$V(x,y)=\frac{1}{2}m\omega_x^2x^2+\frac{1}{2}m\omega_y^2y^2 \tag{1}$$

一般来说，$\omega_x\neq\omega_y$。

   (a) 找到作用变量 (I_x,I_y)，并用这些变量表示能量；

   (b) 求角度变量 (ϕ_x,ϕ_y)，用作角量变量和角变量表示直角坐标；

   (c) 写出角变量和笛卡尔坐标作为时间的函数；

   (d) 取 $\omega_x/\omega_y=5/3$ 绘制粒子在 (x,y) 空间和 (ϕ_x,ϕ_y) 空间中的轨迹。

2. 质量为 m 的粒子在有心势场中运动：

$$V(r)=-\frac{k}{r}+\frac{h}{r^2} \tag{2}$$

   (a) 用能量 E 和总角动量 L 表示作用变量 I_r；

   (b) 用作用变量 (I_r,I_θ,I_ϕ) 表示能量 E；

   (c) 计算频率 $(\omega,\omega_\theta,\omega_\phi)$，在什么条件下运动是周期性的?

3. 考察一小振幅振荡的简单平面摆，并假设它的长度 l 被绝热缩短，即通过把弦从摆盘上的一个小洞拉上来。试证明振动的能量 $E_{\rm osc}$ 满足 $E_{\rm osc}\sqrt{l}$ 保持不变，即 $E_{\rm osc}$ 随着摆长的减少不断增加。

4. 一个质量为 m 的粒子在一维的无限深方势阱 $x\in(0,l)$ 中运动。

   (a) 试证明壁面上受到的平均 (向外) 力为 $F=2E/l$，其中 E 为粒子的动能；

   (b) 假设 $x=l$ 处的壁绝热移动。粒子的能量随着它与运动壁的碰撞而改变。证明：$\delta E=-(2E/l)\delta l$；

   (c) 证明 El^2 为绝热不变量。

《理论力学 A》(2023 年秋季) 平时作业十二[1]

12 月 28 日（星期四）交。

1. **典型题**。质量为 m 的粒子在三维各向同性谐振子势阱中运动：

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\rho^2+z^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \tag{1}$$

   (a) 在直角坐标系 (x, y, z) 中分离 Hamilton-Jacobi 方程，找出作用 (量) 变量，并以此表示哈密顿量。找出频率 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$；

   (b) 在柱坐标系 (ρ, φ, z) 中分离 Hamilton-Jacobi 方程，找出作用 (量) 变量，并以此表示哈密顿量。找出频率 $(\omega_\rho, \omega_\varphi, \omega_z)$；

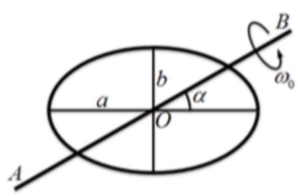
   (c) 在球坐标系 (r, θ, φ) 中分离 Hamilton-Jacobi 方程，找出作用 (量) 变量，并以此表示哈密顿量。找出频率 $(\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi)$。

2. 章动角不变, 进动角速度和自转角速度均为常数的刚体定点转动称为规则运动, 相应的欧拉角可用下式表示:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + at, \quad \theta(t) = \theta_0, \quad \psi(t) = \psi_0 + ct. \tag{2}$$

   式中 a, b, c 均为常数，求此情况下刚体角速度在刚体本体坐标系 (或刚体随动惯性系) 中的表示式。

3. 质量为 M, 半长轴 a、半短轴为 b 的椭圆形匀质盘绕通过其中心且在盘平面内的固定轴 $\vec{e}_{\mathrm{AO}}$ 作匀速转动，角速度为 $\vec{\omega}$。转轴与椭圆半长轴的夹角为 α，转轴质量可以忽略。



   (a) 求主转动惯量；

   (b) 写出角速度在主轴系中的分量;

   (c) 写出匀质盘的转动动能。

4. 半径为 a 的匀质圆柱在半径为 R 的圆柱形曲面内滚动，试求圆柱的动能和微振动频率（参见朗道《力学》§32 ” 惯量张量” 习题 6)。

5. 试计算均质的圆锥体分别绕顶点和重心转动的转动惯量。圆锥的质量为 M，底面半径为 r，高度为 h。

6. 试求在平面上滚动的匀质圆锥的动能（参见朗道《力学》§32 ” 惯量张量” 习题 7)。

[1]

7. 均质正方体，质量和边长分别为 M, a，取参考点为其一个顶点 A，选 A 为坐标原点，三条边为坐标轴。匀质正方体相对其顶点 A 的转动惯量为:

$$I = \begin{bmatrix} 2/3 & \text{-}1/4 & \text{-}1/4 \\ \text{-}1/4 & 2/3 & \text{-}1/4 \\ \text{-}1/4 & \text{-}1/4 & 2/3 \end{bmatrix} Ma^2 \tag{3}$$

试将该惯量张量对角化，即求三个主转动惯量及其对应的三个惯量主轴。