

《电磁学》绪论与预备

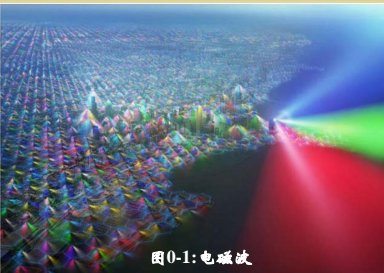


图0-1:电磁波

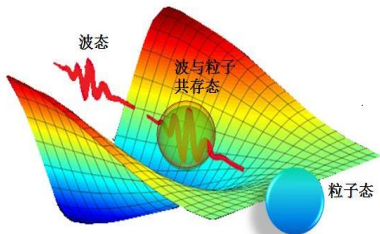


图0-2:波粒二象性

《电磁学》是一门研究电与磁基本规律的科学。

该课程中主要讲述电荷和电流产生电、磁场规律,电场和磁场的相互联系,电场和磁场对电荷和电流的相互作用,电场和磁场对物质的相互作用及其所引起的各种效应。

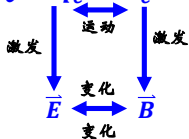
二〇二一年九月八日

卢荣德

中国科学技术大学物理学院

《电磁学》代数表示

$$\tilde{Q} = q_e + iI_e = q_e + q_e \vec{v}$$



$$\tilde{Q} = q_e + iq_m$$

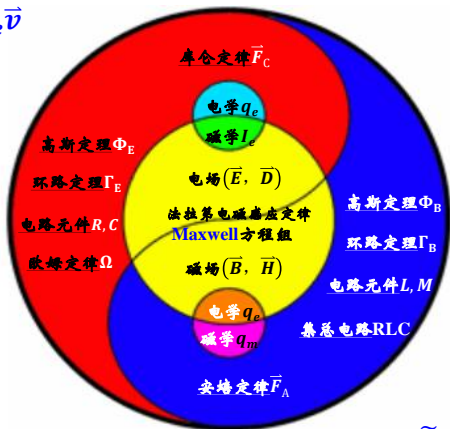
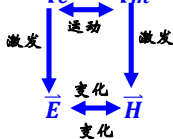


图0-3:代数在物理中应用

$$\tilde{Q} = q_e + iq_m = q_0 e^{i\theta}$$

第0章 绪论部分

0-1 电磁学的发展、框架及范围

0-2 电磁学在物理学中的重要性

0-3 如何学好电磁学

0-4 矢量运算预备知识

0-1 电磁学的发展、框架及范围

电磁学是一门实验学科,诞生与发展依赖于实验现象与分析。

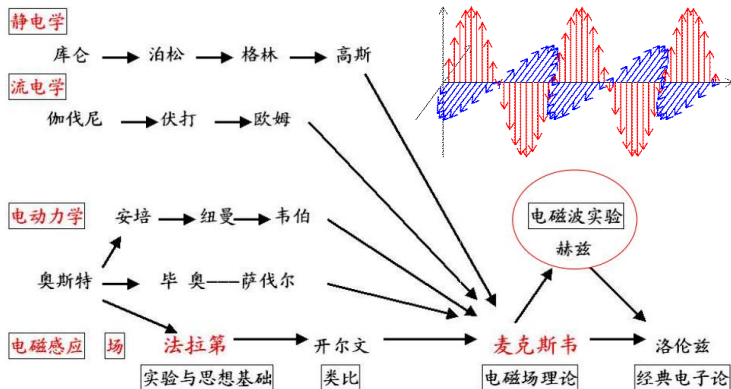


图0-4:电磁学发展、框架

1. 电磁学发展早期简史



图0-5:学科发展年谱

学科发展年谱

2. 电磁理论的建立和发展

(1)1600年英国医生吉尔伯特发表了《论磁、磁体和地球作为一个巨大的磁体》。



图0-6:吉尔伯特关于锻打使铁产生磁性的一幅画(图中septentrio表示北,avster表示南)

(2)1785年法国科学家库仑公布了由扭秤实验得到电力的平方反比定律。



图0-7:法国科学家库仑公布了由扭秤实验

(3)1820年7月21日丹麦物理学家奥斯特向科学界宣布他发现了电流的磁效应。

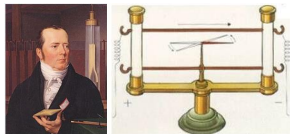


图0-8:奥斯特发现了电流的磁效应

(4)1831年英国科学家**法拉第**发现了电磁感应定律。

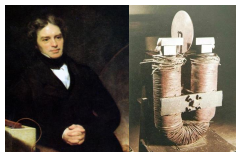


图0-9:法拉第发现了电磁感应定律

(5)**麦克斯韦**根据他得到的方程组推导出电磁场的波动方程,从而预言了电磁波的存在。

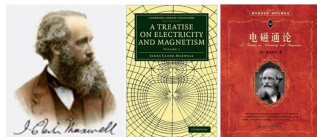


图0-10:麦克斯韦建立电磁场理论

(6) 1888年德国科学家**赫兹**实验证明了电磁波的存在,并测定了电磁波的性质。

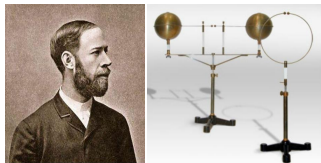


图0-11:赫兹实验证实了麦氏电磁理论的正确性

3. 电磁学的理论框架

1. 静电场理论部分

1-1 真空中恒定电荷的电场

1-1-1 电荷及其作用规律

1-1-2 电场强度

1-1-3 两个定理

1-1-4 电场与电势的关系

1-2 物质中的静电场

1-2-1 物质的电性质

1-2-2 静电场中导体

1-2-3 电容与电感器

1-2-4 静电场中电介质

1-2-5 电介质中基本定理

1-2-6 边值关系和唯一性定理

1-3 静电场的能量

1-3-1 真空点电荷间相互作用能

1-3-2 连续电荷分布的静电能

1-3-3 电场的能量和能量密度

1-3-4 带电体系受力问题

4-1 稳恒电路

4-1-1 稳恒电流条件

4-1-2 电阻定律与焦耳定律

4-1-3 电源与电动势

4-1-4 基尔霍夫定律

4-1-5 稳恒与静电场的综合解

图0-11: 电磁学的理论框架

2. 静磁场理论部分

2-1 真空中稳恒电流的磁场

2-1-1 电磁感应及其作用规律

2-1-2 磁感强度

2-1-3 高斯定理与安培环路定理

2-1-4 磁感强度与磁矢势的关系

2-1-5 安培力与洛仑磁力的关系

2-2 物质中的静磁场

2-2-1 静磁场中磁介质

2-2-2 磁介质中基本定理

2-2-3 磁性材料与边值关系

3. 电磁理论部分

3-1 电磁感应

3-1-1 电磁感应定律

3-1-2 动生电动势与感生电动势

3-1-3 互感与自感

3-1-4 似稳电路与暂态过程

3-2 电磁能量

3-2-1 载流线圈系统的磁能

3-2-2 载流线圈在外磁场中磁能

3-2-3 电磁能量与磁能密度

3-2-4 利用磁能求磁力

4-2 集总电路

4-2-1. 电路的基本问题

4-2-2. 电路元件抽象

4-2-3. 电路抽象与分析

4-2-4. 数字抽象与分析

4-2-5. 集总电路的应用

电磁学实验

1. 电桥测定金属的电阻率
(同时联系使用螺旋测微器)
2. LC谐振电路测量
3. 密立根油滴实验
4. 练习使用多用电表
5. 霍尔效应与磁阻效应实验
6. 示波器测试稳压电源
7. CUPT、IYPT实验

5. 电磁场理论部分

5-1 电磁理论——麦克斯韦方程组

5-1-1 电磁场基础——两个推广与假说

5-1-2 推广结果的综述

5-1-3 Maxwell方程组

5-2 平面电磁波

5-2-1 变换之一: 电场波动

5-2-2 变换之二: 磁场波动

5-2-3 电磁波的性质

5-2-4 定态波动方程

5-3 电磁场的物质观

5-3-1 电磁场的能量

5-3-2 电磁场的动量

5-3-3 电磁场的物质性

5-4 赫兹实验

5-4-1 实验简介

5-4-2 电偶极子电磁波辐射

5-4-3 电磁波分布及应用

4. 经典电磁学理论的局限性

(1) 经典电磁学理论不满足伽利略不变性,为此,人们引入以太的概念。

例如:导体棒在均匀恒定磁场中垂直磁场运动时,在和磁场相对静止的参考系中分析,导体两端应有正负电荷积累;

在与导体相对静止的参考系中分析,导体两端应无正负电荷积累。

(2) 以经典电磁学理论发展出的经典电子论,不能很好地解释原子和亚原子层面的物理现象。

0-2电磁学在物理学中的重要性



图0-13

电磁学的地位



图0-14

理论体系本身的重要性



近代物理学中的意义

0-2 电磁学在物理学中的重要性

一、电磁学理论本身的重要性

物理观念上的革新:

场概念的提出



图0-15:法拉第

电磁理论的统一
(最早的包含规范对称性的物理理论)



图0-16:麦克斯韦

0-2 电磁学在物理学中的重要性

二、电磁学在近代物理学中的意义

时间表	类型	学科
1600-1900	经典物理	力学
		热学
		电磁学
1900-1940	近代物理	相对论(Large speeds $\approx 10^8 \text{m s}^{-1}$)
		量子力学(Very small scales $\approx 10^{-10} \text{m}$)
1940-至今	现代物理	粒子物理
		宇宙论

承前

启后

表0-1:物理学发展的时间表

量子力学

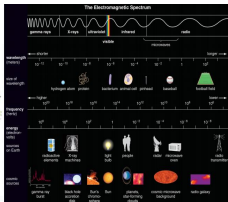
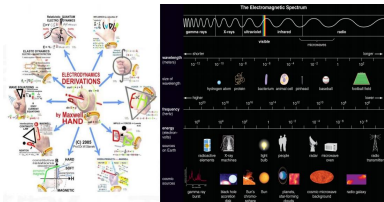


图0-17:在尺度上,相对论、电磁学、量子力学相互承接

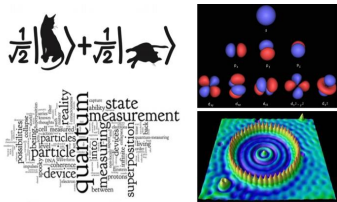


图0-18:量子力学重新描述电荷与自旋

相对论

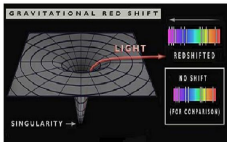
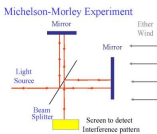


图0-19:相对论的三个时刻:电磁学与光“视觉”

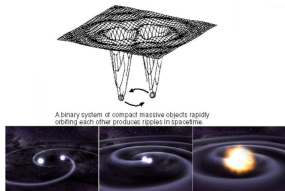


图0-20:相对论的三个时刻:电磁学与引力波“听觉”

0-2 电磁学在物理学中的重要性

电磁相互作用是目前人类认识到的四种基本相互作用之一(强相互作用、电磁相互作用、弱相互作用、万有引力相互作用)。

进一步的研究揭示:电磁相互作用是通过交换电磁场的量子(光子)而传递的;它能很好地说明正反粒子的产生和湮没,电子、 μ 子的反常磁矩(见粒子磁矩)与兰姆移位等真空极化引起的细微电磁效应。理论计算与实验符合得非常好。

0-3 学好电磁学



图0-21:

学好电磁学

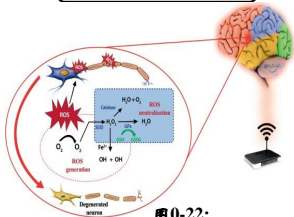


图0-22:

学科的特点

把握电磁学的思维特点

电磁学的课程要求

一、学科的特点:

(1) **研究对象**: 重要的新物理现象, 必将引起基本观念、规律性质的深刻变化, 导致新的概念、新的研究方法、新的描述手段和新的数学工具的出现, 从而标志新的研究领域的开辟, 预示新的理论的诞生。

(2) **研究主线**: 研究由静止转为运动, 由稳恒步入变化, 最终建立了一组十分优美而简洁的**麦克斯韦方程组**。

它概括了麦克斯韦之前所有的电磁**经验**定律。

它不仅是物理学史上划时代的伟大成就, 也为理解什么是物理理论、怎样建立物理理论提供了光辉的范例。

(3) **学科难点**: 在于“场”。场是在一定空间范围内连续分布的**客体**。认识场要从其**空间分布**规律入手, 总体上去把握它, 掌握恰当描述方式和新的概念。静电学是整个电磁学的**基础**和**重点**。

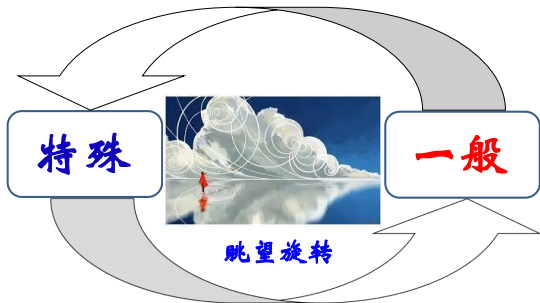
二、把握电磁学的思维特点

(1) **敢想**。要认识到敢想才有物理学,不敢想就没物理学。爱因斯坦说:“想像力比知识更重要。”例如麦克斯韦的**涡旋电场**、**位移电流假说**(爱因斯坦狭义相对论和光电效应)等。

(2) **归纳**。物理学的构架是一系列大大小小的**定律**。这些**定律**都是从**实验**(或**观察**)中归纳出来的。但这种所用的科学方法,只能是“**不完全**”归纳法,而不是数学的完全归纳法。例如“**势**”概念的应用等。

(3) **建模**。物理学并不讳言自身只研究**模型**。**模型**并不全同于**真实**,但物理学的成功正在于创造出许多成功的**模型**。**模型**是“**理想化**”的,但不是“**伪劣**”的,它突出了许多表面上看是千差万别的物体**最本质**的特征,例如法拉第的“**力线**”**模型**的建立等。

演绎(逻辑推演)



归纳(系统实验)

图0-23:物理的研究思路

《电磁学》创意设计与制作要求

一、文章基本要求

- (1) 标题醒目,内容切题;
- (2) 结构紧凑,前后呼应;
- (3) 材料充实,立意新颖;
- (4) 字句准确,语言平实。

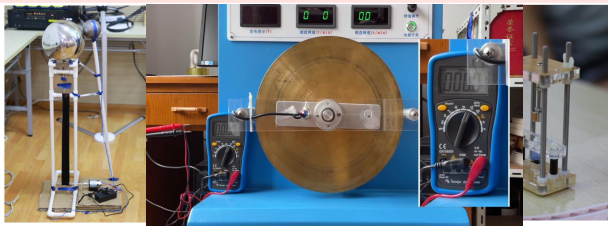


图0-24: 自制装置

二、报告的总字数控制在**1000-3000**字以内,报告截至期:
该学期第十六周的星期三。

交电脑打印稿(格式类似《物理学报》或《大学物理》)。

三、推荐题目:

特斯拉线圈演示仪的制作与应用。

教材与参考书

- 叶邦角,《电磁学》,中国科学技术大学出版社,2019.8
 - 胡友秋、程福臻、叶邦角,《电磁学与电动力学》(上册),科学出版社,2019.7;
 - 张玉民、戚伯云,《电磁学》,科学出版社,2000.
-
- 1.D.哈里德,R.瑞斯尼克著[美],《物理学》第二卷第一册,李仲卿等译,科学出版社,1979.6.
 - 2.陈秉乾、王稼军编著,《电磁学》,北京大学出版社,2009.5.
 - 3.《电磁学》第二版,贾起民,郑永令,陈暨耀,高等教育出版社,2001.1.

【参考书】

4. 赵凯华,陈熙谋. 新概念物理教程——电磁学. 北京:高等教育出版社,2009.4.
5. 陈秉乾、舒幼生、胡望雨,《电磁学专题研究》,高等教育出版社,2001.12.
6. E.M.珀塞尔. 电磁学. 《伯克利物理教程》第二卷. 南开大学物理系译. 北京:科学出版社,1979.6.
7. E.M. Purcell. ELECTRICITY AND MEGNETISM
Berkeley Physics Course Vol.2. McGraw-Hill.
8. С.Э.福里斯. А.В.季莫列娃. 普通物理学. 第二卷. 北京:高等教育出版社.
9. 严济慈,电磁学,北京:高等教育出版社,1989.10.
10. 张之翔. 《电磁学千题解》北京:科学出版社.

<https://www.icourse163.org/course/USTC-1450342250>

Tel: 86-0551-3601332 (O)

86-0551-3424807 (H)

13856903768

E-mail: lrd@ustc.edu.cn

Office: Building#1-404

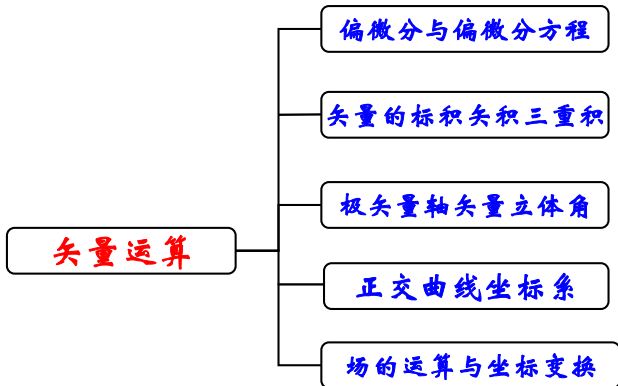
TA1: 陈越 **Tel:**18363991987,

Email:chenyue8@mail.ustc.edu.cn

TA2: 朱礼彦 **Tel:**17339730727,

Email: lyanzhu@mail.ustc.edu.cn

0-4 矢量运算预备知识



偏微分与偏方程

微分: $y = f(x) \Rightarrow \delta y = f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\delta x + \dots$

偏微分: $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 和 $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$ 处的差别:

$$\begin{aligned}\delta z &= f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0 + \delta y)] - [f(x_0, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0)] \\ &= f'_x(x_0, y_0 + \delta y)\delta x + f'_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \\ &= f'_x(x_0, y_0)\delta x + f'_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \dots\end{aligned}$$

1743年,达朗贝尔,在动力学的著作中提出了特殊的偏微分方程,却并未引起多大的关注。

1747年,在《张紧在弦振动时形成的曲线研究》中首先明确了弦振动方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

给出了其通解的表达式: $y = F(t + s) + G(t - s)$

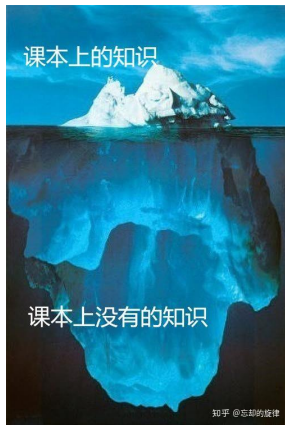
称为达朗贝尔解,引入分离变量思想为解偏微分方程提供了方法,故被看作偏微分方程论的发端。

被誉为“法国牛顿”的拉普拉斯在1785年发表的论文《球状物体的引力理论与行星形状》:

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 \text{ —— Laplace 方程}$$

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = k^2 T_t \text{ —— Fourier 方程}$$

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\theta_x + \mu\Delta u = \rho u_t \\ (\lambda + \mu)\theta_y + \mu\Delta v = \rho v_t \\ (\lambda + \mu)\theta_z + \mu\Delta w = \rho w_t \\ \theta = u_x + v_y + w_z \end{cases} \text{ —— Cauchy 方程}$$



1864年,麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

20世纪的偏微分方程: $u_x + iu_y - 2i(x + iy)u_t = f(t)$

1895年,科尔泰沃赫和德弗里斯获得了描述孤立波现象数学模型:

$$\eta_t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)$$

肥皂泡中的彩色薄膜



$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1. 矢量的三种积运算

► 矢量的标积 任意两个矢量 \vec{A} 和 \vec{B} , 其标积或点

$$\text{乘定义: } \begin{cases} \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \\ \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \end{cases}$$

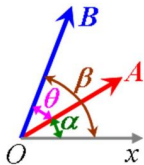


图0-24: 标积

► 标积的几何意义, 构建一空间坐标, x - y 面在 A - B 面内。

标积代表一矢量在另一矢量上投影:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A \cos \alpha, & A_y &= A \sin \alpha \\ B_x &= B \cos \beta, & B_y &= B \sin \beta \\ A_z &= B_z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \\ = AB \cos(\beta - \alpha) \\ = AB \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

矢量的矢积

矢积(叉乘)定义为 $\vec{A} \times \vec{B}$, 其两种表示为:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \\ \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \end{cases}$$

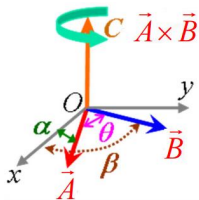


图0-25: 矢积

矢积 \vec{C} 按照右手螺旋法则定义方向, 恒与 \vec{A} 和 \vec{B} 垂直。

矢量的矢积

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

矢积 C 数值上等于 A 和 B 组成之平行四边形面积。

$$\left. \begin{array}{l} A_x = A \cos \alpha, A_y = A \sin \alpha \\ B_x = B \cos \beta, B_y = B \sin \beta \\ A_z = B_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \\ = AB \sin(\beta - \alpha) \vec{k} \\ = AB \sin \theta \vec{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \vec{k} \\ \vec{A} \times \vec{A} = 0 \end{cases}$$

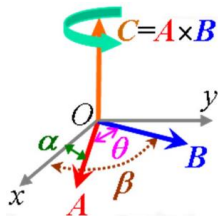


图0-26: 矢积

矢量的三重积: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

标量、绝对值为六面体体积

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

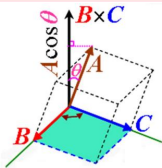


图0-27: 重积

矢量的三重标积满足交换律:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \\ &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \\ &= -\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = -\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) \end{aligned}$$

矢量的三重积: 三重矢积 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

是矢量, 与 \vec{B} 、 \vec{C} 共面

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = a_1 \vec{B} + a_2 \vec{C} \xrightarrow{a_1 = \vec{A} \cdot \vec{C}, a_2 = -\vec{A} \cdot \vec{B}} (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

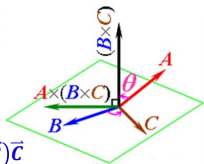


图0-28: 三重矢积

2.运算中的三种定义

镜像反射对称、极矢量、轴矢量

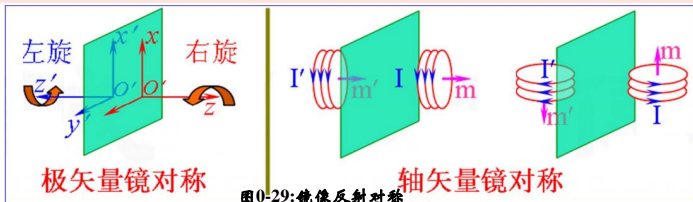


图0-29: 镜像反射对称

- 镜面垂直量反向为极矢量, 镜面平行量反向为轴矢量;
- 空间位矢坐标 $\vec{r} = (x, y, z)$ 为极矢量, 还有电场、电偶极矩等;
- 磁矩 \vec{m} 为轴矢量, 还有磁感应强度等。

- 两个极矢量叉乘得轴矢量:
极矢量 \vec{a} 、 \vec{b} , 轴矢量 \vec{c}

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z) = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\left. \begin{array}{l} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \\ c'_x = a'_y b'_z - a'_z b'_y \\ c'_y = a'_z b'_x - a'_x b'_z \\ c'_z = a'_x b'_y - a'_y b'_x \end{array} \right\} \begin{array}{l} a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z \\ b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c'_x = -c_x \\ c'_y = -c_y \\ c'_z = c_z \end{array} \right.$$

➤ 立体角 $d\Omega$

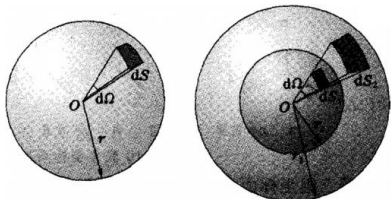
$$d\Omega = \frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

$$d\vec{S} \equiv dS\vec{n}$$

$$\Rightarrow d\Omega = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

$$= \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{dS^*}{r^2}$$

➤ 复习一下什么是平面角



a 球面度

b dS 正比于 r^2

图0-30:球面度

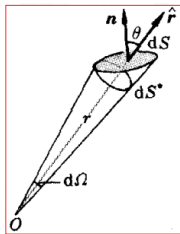


图0-31:立体角

3. 正交曲线坐标系

正交曲线坐标系: 直角坐标系、坐标面

坐标面

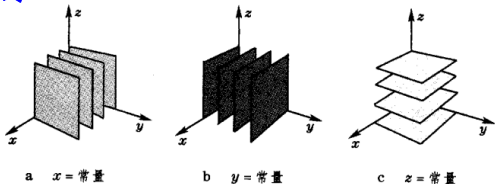


图0-32: 坐标面

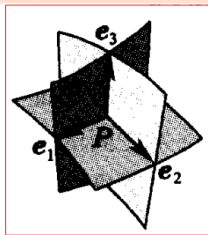


图0-33: 三基矢

一个微元(线元、面积元、体积元)沿三基矢的线段元(dl_1, dl_2, dl_3)与基矢的三坐标变量微分(du_1, du_2, du_3):

$$\left. \begin{aligned} dl_1 &= h_1 du_1 \\ dl_2 &= h_2 du_2 \\ dl_3 &= h_3 du_3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{O_{xyz}} \begin{cases} du_1 = dx \\ du_2 = dy \\ du_3 = dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 1 \\ h_3 = 1 \end{cases}$$

正交曲线坐标系:柱坐标系

坐标面

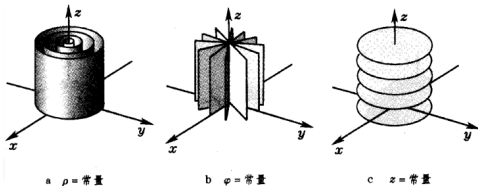


图0-34:坐标面

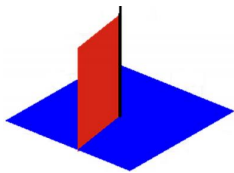


图0-35:柱坐标系

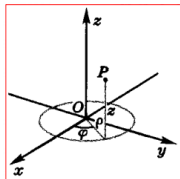


图0-36:与直角坐标系之关系

与直角坐标系之关系:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

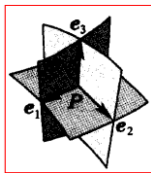


图0-37:三基矢

三基矢 ($\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho, \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi, \vec{e}_3 = \vec{e}_z$)

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z \Rightarrow \left. \begin{array}{l} dl_\rho = h_\rho d\rho \\ dl_\varphi = h_\varphi d\varphi \\ dl_z = h_z dz \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\varphi = \rho \\ h_z = 1 \end{cases}$$

注意: \vec{e}_φ 只是一个弧度, 没有长度量纲

柱坐标系之面积元与体积元:

$$dS = dl_\varphi dl_z = \rho d\varphi dz$$

$$dV = dl_\rho dl_\varphi dl_z = \rho d\rho d\varphi dz$$

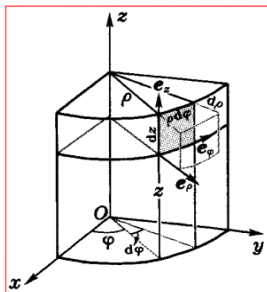


图0-38:柱坐标系之面积元与体积元

□ 正交曲线坐标系: 球坐标系

➤ 与直角坐标系之关系:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{z}{r} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

➤ 坐标面:

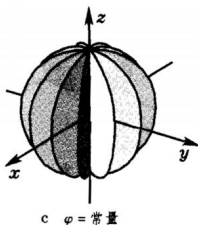
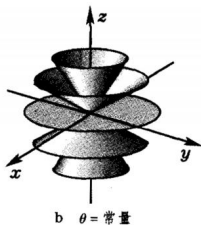
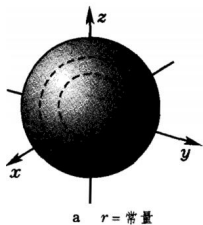
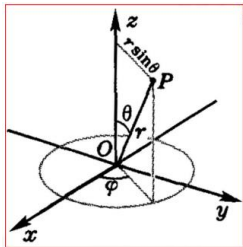


图0-40: 坐标面



三基矢 ($\vec{e}_1 = \vec{e}_r, \vec{e}_2 = \vec{e}_\theta, \vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$)

注意: \vec{e}_θ 和 \vec{e}_φ 只是弧度基矢, 没有长度量纲

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} dl_r &= h_r dr \\ dl_\theta &= h_\theta d\theta \\ dl_\varphi &= h_\varphi d\varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = r \\ h_\varphi = r \sin\theta \end{cases}$$

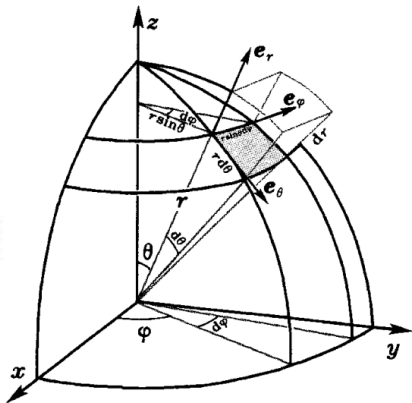


图0-41:球坐标系之面积元与体积元

➤ 球坐标系之面积与体积元:

$$dS = dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi;$$

$$dV = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

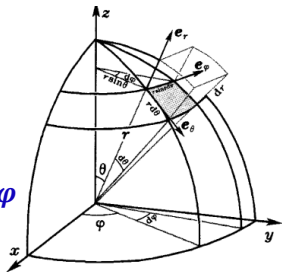


图0-42:球坐标系之面积元与体积元

➤ 求解球面立体角与球体体积(?)

$$\therefore d\Omega = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS^*}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\therefore \Omega = \oiint \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi$$

4. “场”的运算与坐标变换

□ 标量场与矢量场

- 标量 Φ 是空间坐标 $\vec{r} = (x, y, z)$ 的函数, 称之为标量场
- 与标量场对应等值面 $\Phi = \Phi(x, y, z) \Leftrightarrow \Phi(x, y, z) = \text{const.}$

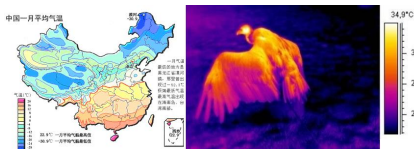


图0-43:标量图描述标量场

- 矢量 \vec{A} 是空间坐标 $\vec{r} = (x, y, z)$ 函数, 称之为矢量场

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = A_x(x, y, z) \\ A_y = A_y(x, y, z) \\ A_z = A_z(x, y, z) \end{cases}$$

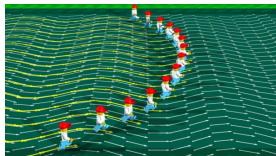


图0-44:矢量图描述矢量场

标量场的梯度

梯度针对标量场定义,表示标量场在空间变化的剧烈程度

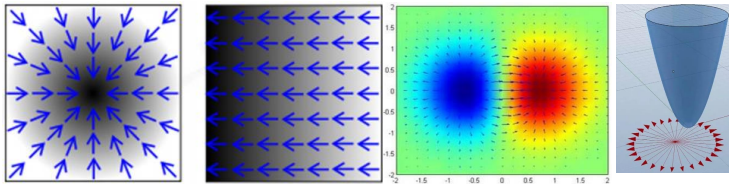


图0-45:标量场的梯度

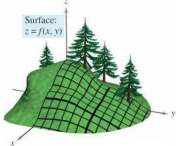
上图中衬度表示标量场,箭头表示此标量场之梯度

不同坐标系下标量场 Φ 的梯度表达:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar{k}$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\bar{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar{e}_z$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\bar{e}_\varphi$$



□ 矢量场的通量与散度

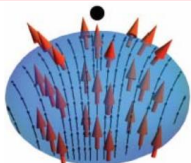


图0-46:通量

➤ 矢量场 \vec{A} 通过截面 \vec{S} 的通量 Φ_A , 为标量:

$$\Phi_A = \iint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} A \cos\theta dS$$

设 S 为闭合面, 包含体积 ΔV , 则矢量场 \vec{A} 的散度:

$$\Phi_A = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Delta V \rightarrow 0, \Phi_A \rightarrow 0 \quad \text{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi_A}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

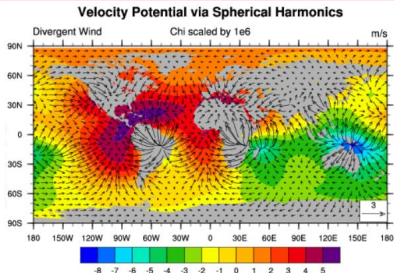
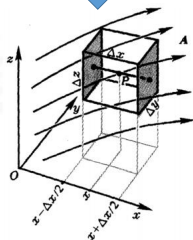


图0-47:散度

□ 矢量场散度的坐标表达(直角坐标系)

$$\begin{aligned}\Phi_A &= \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z \\ &= \oiint_{(S)} A_x dydz + A_y dxdz + A_z dxdy = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z\end{aligned}$$

$$\Delta V \rightarrow 0, \Phi_A \rightarrow 0$$



选择一个小长方体单元运算

$$\Phi_x = A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z - A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z$$

$$\because A_x \left(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z = A_x(x, y, z) \pm \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\therefore \Phi_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x^4) \Rightarrow \Phi_x$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x^4) \quad (i = x, y, z)$$

图0-48: 选择一个小长方体单元运算

➤ 矢量场散度

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\Phi_A = \oiint_{(\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \sum_i \Phi_i = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + o(\Delta l^2)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi_A}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

➤ 矢量场散度(柱、球坐标系)

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

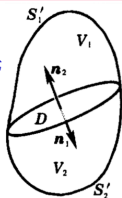
$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

□ 高斯定理(数学而非物理学): 联系通量与散度

体积为 V 的闭合面 S 内矢量场 \vec{A} :

$$\nabla \cdot \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi_A}{\Delta V} \Rightarrow (\nabla \cdot \vec{A}) \Delta V \approx \Phi_A = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint_{(V)} (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



a

图0-49: 体积 V 闭合面 S 内矢量场

□ 论证: 考虑任意闭合曲面 S , 体积为 V

体积为 V 的闭合面 S 内矢量场 \vec{A} :
$$\left. \begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ S &= S'_1 + S'_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{D} \begin{cases} S_1 = S'_1 + D \\ S_2 = S'_2 + D \end{cases}$$

$$\Phi_{A_1} = \oiint_{(S_1)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 = \oiint_{(S'_1)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 + \oiint_{(D)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1;$$

$$\Phi_{A_2} = \oiint_{(S_2)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2 = \oiint_{(S'_2)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2 + \oiint_{(D)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2.$$

$$\because \oiint_{(D)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 = - \oiint_{(D)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2, \quad \therefore \Phi_{A_1} + \Phi_{A_2} = \oiint_{(S'_1)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 + \oiint_{(S'_2)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2 = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

微分操作

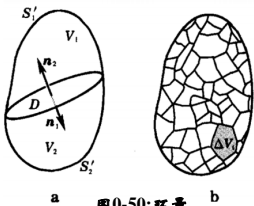


图0-50: 环量

$$\therefore \Phi = \sum_i \Phi_i \quad \therefore \Phi_{A_i} = \oiint_{(S_i)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_i = (\operatorname{div} \vec{A})_i dV_i$$

$$\therefore \Phi_A = \sum_i (\operatorname{div} \vec{A})_i dV_i = \iiint_{(V)} (\operatorname{div} \vec{A}) dV$$

$$\therefore \iiint_{(V)} (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (\text{矢量空间的守恒性})$$

矢量场的环量与旋度

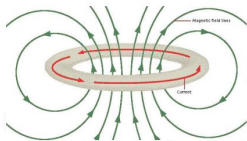


图0-51:

矢量场 \vec{A} 沿闭合回路 L 之线积分为环量 Γ_A , 为标量:

$$\Gamma_A = \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} A \cos\theta dl$$



图0-52: 旋度

□ 矢量场的环量与旋度

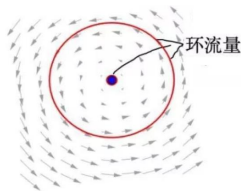
► 设 ΔS 为 L 包围的面积, \vec{n} 为 ΔS 右旋单位法向量, 则矢量场 \vec{A} 的旋度定义为 $\Delta \vec{A}$ 与 $\Delta \vec{S}$ 之极限比。

但是这个比值是标量, 考虑其在 \vec{n} 上的投影, 即为矢量:

$$\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Gamma_A}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

► 矢量场旋度的坐标表达

$$\begin{aligned} (\text{rot} \vec{A})_n &= (\text{rot} \vec{A})_x + (\text{rot} \vec{A})_y + (\text{rot} \vec{A})_z \\ &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[\frac{\oint_{(L_x)} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_{(L_x)}} \vec{i} + \frac{\oint_{(L_y)} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_{(L_y)}} \vec{j} + \frac{\oint_{(L_z)} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_{(L_z)}} \vec{k} \right] \end{aligned}$$



注意: 旋度的定义中 \vec{n} 为 ΔS 右旋法向量, 注定了矢量场 \vec{A} 的矢量定义

➤ 矢量场旋度的坐标表达

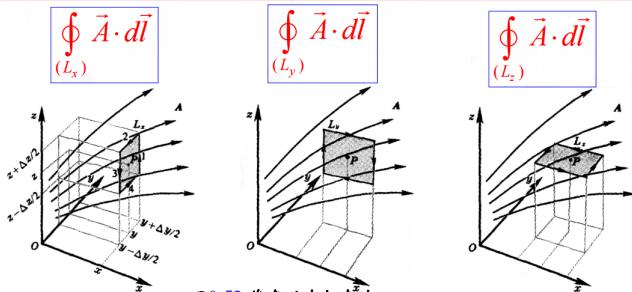


图0-53:旋度的坐标表达

闭合回路 L_x 由矩形 1-2-3-4 围绕点 $P(x, y, z)$ 构成, 矢量场 A 在四个边 1-2-3-4 的垂直分量 A_x 各边垂直, 环量 Γ 为零; 不为零的平行分量分别为:

$$1: A_z \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right); 2: -A_y \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right); 3: -A_z \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right); 4: A_y \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right)$$

$$\oint_{(L_x)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = A_z \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - A_y \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - A_z \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) + A_y \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right)$$

围绕点 $P(x, y, z)$ 对 A_y 和 A_z 作级数展开:

$$A_y \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) = A_y(x, y, z) \pm \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} + O(\Delta z^2)$$

$$A_z \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) = A_z(x, y, z) \pm \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + O(\Delta y^2)$$

$$\oint_{(L_x)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z + O(\Delta l^3)$$

围绕点 $P(x, y, z)$ 求 A 的旋度在 x 方向的投影:

$$(\nabla \times \vec{A})_x = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{(L_x)} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z + O(\Delta l^3)}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

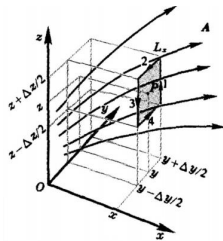


图0-54: 级数展开

➤ 围绕点 $P(x, y, z)$ 求 \vec{A} 的旋度在 x, y, z 方向的投影:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} (\nabla \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\nabla \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\nabla \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

➤ 柱坐标系下旋度的表达:

$$\nabla \times \vec{A}$$

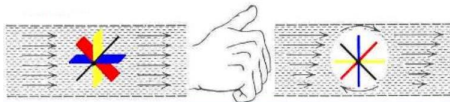


图0-55:旋度方向

$$= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

► 球坐标系下旋度的表达:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$



图0-56: 狗狗旋转

□ Stokes 定理(数学而非物理): 联系环量与旋度

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Gamma_A}{\Delta S} &\Rightarrow (\nabla \times \vec{A}) \cdot \Delta \vec{S} \approx \Gamma_A = \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &\Downarrow \\ \iint_{(S)} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} &= \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

□ 严格论证: 考虑任意闭环路 L

如图0-68所示回路 L 被 MN 分割

$$L = L'_1 + L'_2 \xrightarrow{MN} \begin{cases} L_1 = L'_1 + MN \\ L_2 = L'_2 + MN \end{cases}$$

$$\Gamma_{A_1} = \oint_{(L_1)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L'_1)} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{(M)}^N \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\Gamma_{A_2} = \oint_{(L_2)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L'_2)} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{(N)}^M \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\Gamma_A = \Gamma_{A_1} + \Gamma_{A_2} = \oint_{(L'_1)} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{(L'_2)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

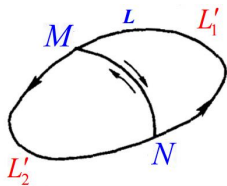


图0-57: 回路 L 被 MN 分割

微分操作

$$\therefore \Gamma_A = \sum_i \Gamma_{A_i}$$

$$\therefore \Gamma_{A_i} = \oint_{(L_i)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = (\text{rot} \vec{A})_i \Delta S_i = (\nabla \times \vec{A})_i \Delta S_i$$

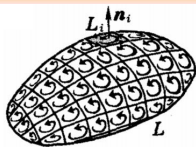


图0-58:微分操作

$$\therefore \Gamma_A = \oiint_{(S)} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \sum_i (\nabla \times \vec{A})_i \Delta S_i = \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oiint_{(S)} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

梯度、散度、旋度:用算符 ∇ 对 Φ 、 \vec{A} 、 \vec{A} 计算也可得到

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\nabla \Phi; \quad \nabla \cdot \vec{A}; \quad \nabla \times \vec{A}$$

□ 一些矢量公式: 一阶微分 (注意标量与矢量)

$$\nabla(AB) = (\nabla A)B + A(\nabla B)$$

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \cdot (A\vec{B}) = \nabla A \cdot \vec{B} + A\nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$$

$$\nabla \times (A\vec{B}) = A\nabla \times \vec{B} + \nabla A \times \vec{B}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

□ 一些矢量公式: 二阶微分 (注意标量与矢量)

$$\nabla \times \nabla A = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \cdot \nabla \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

启篇语

▲ **A. 爱因斯坦**：发展独立思考和独立创新的一般能力，应当始终放在首位，而不应当把知识放在首位。如果一个人掌握了他的学科的基础理论，并且学会了独立思考与工作，他必定会找到自己的道路。而且比起那些主要以获取细节知识为其训练内容的人来，他一定会更好适应进步和变化。

(?如何学习)

▲ **R.P. 费曼**：科学是一种方法。它教导我们：

一些事物是怎样被了解的，什么事情是已知的，现在了解到了什么程度，如何对待疑问和不确定性，证据服从什么法则；如何思考事物，做出判断，如何区别真伪和表面现象。(?如何工作)

本章知识单元与知识点小结

电磁学体系	学好电磁学	预备知识
<p>发展、框架及范围</p> <p>发展简史</p> <p>理论建立发展</p> <p>理论框架</p> <p>理论局限性</p> <p>电磁学的地位</p>	<p>演绎(逻辑推演)</p>  <p>归纳(系统实验)</p> <p>图0-57:物理的研究思路</p>	<p>矢量、标量场</p> <p>标量\rightarrow梯度</p> <p>通量\rightarrow散度</p> <p>环量\rightarrow旋度</p>



图0-59:摩擦起电

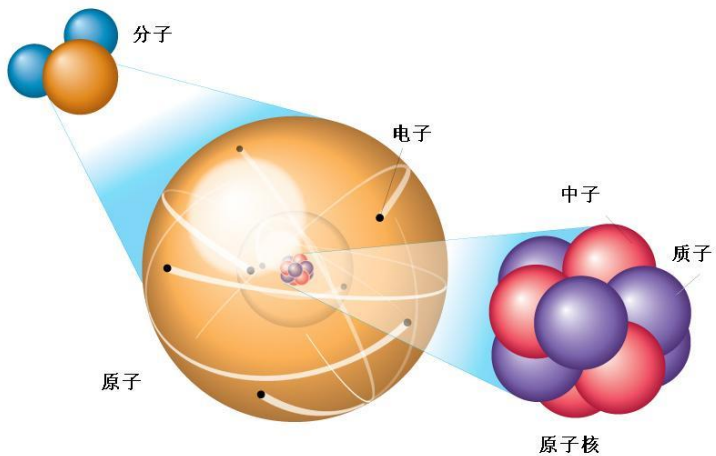


图0-60:原子结构

电磁波的 3D 打印

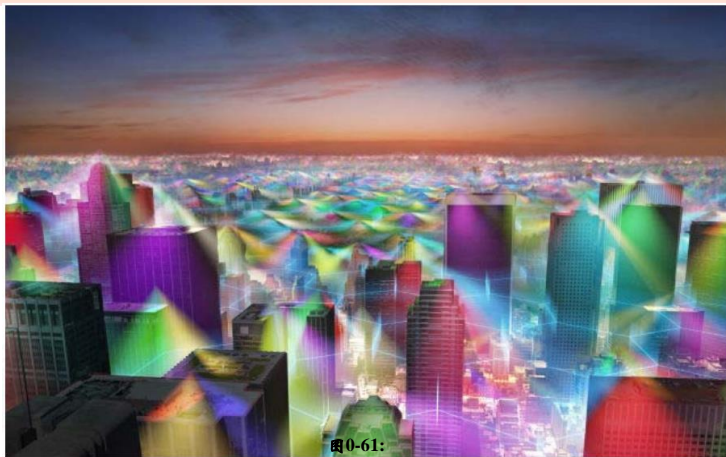


图0-61:

第一章 静电理论部分

1-1 真空中的静电场

1-2 物质中的静电场

1-3 静电场的能量



第一章 静电理论部分

任务：固定电荷的作用规律

库仑定律 (\vec{E}, U)

叠加原理

高斯定理

环路定理

极化律

电场强度

电位移矢量

两者关系

电势

电场强度与电位移矢量的计算

电势的计算

本章知识单元与知识点小结

1-1 真空中的静电场

1-1-1 电荷及其作用规律

1-1-2 电场强度

1-1-3 两个定理

1-1-4 电场与电势关系



图1-1:库仑图片

1-1-1 电荷及其作用规律



库仑定律

电荷产生及类型

库仑定律

电力叠加原理



【1】 电荷产生及类型

➤ “小荷才露尖尖角，早有蜻蜓立上头(杨万里《小池》)”

语言空间在某种
观念的引力之下，
总是要发生扭曲



图1-2:柔嫩的梗上顶个硕大的叶子或坚实的子房，“荷”的力感相相如生

➤ “electric charge”的本意还是“琥珀带上的东西”(图1-2)

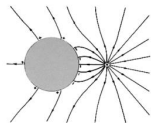


图1-3:想象的电荷形象:颗粒带有一种或正或负的特性;在基本电荷被发现之前,电荷被认为是可被添加到物体上面的一种神奇的存在。

(1)最熟悉的陌生人:电荷

- 电荷——带电的粒子,也因为“粒子”形象可把握住;是一种物质性质的描述。
- 电荷物理本质是电磁场 $U(1)$ 规范对称性对应的守恒荷。
- 电磁场的 $U(1)$ 规范不变性对应了电荷守恒。
- 这些概念往往是透过现象看本质时一种“助记符”,但它并未能真的道出本质

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^{s\dagger} a_p^s - b_p^{s\dagger} b_p^s)$$

- 宇宙中任何物体周围空间都以辐射式运动,电荷是单位时间内、单位体积内物体粒子周围光速运动空间的运动量。
- 负电荷是空间从无限远处向带电粒子汇聚。
- 正电荷是空间从带电粒子向无限远处以光速发散。

(2) 电荷守恒

- 对于一个孤立系统,不论发生什么变化,其中所有电荷的代数和永远保持不变。
- 电荷守恒定律表明:如果某一区域中的电荷**增加或减少**了,那么必定有等量的电荷**进入或离开**该区域;
如果在一个物理过程中**产生或消失**了某种电荷,那么必定有**等量**的异号电荷同时**产生或消失**。



图1-4: 电荷的本质是什么

“载流子”与“载荷子”



图1-5: 头发直立体验(常见的静电演示实验)当人体带上足量电荷时,电荷间的排斥力会让头发飘散开来以减少总的静电能。

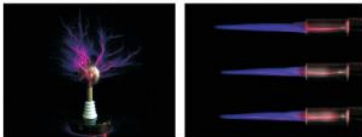


图1-6: (左图)球形电极释放其上积聚的电荷导致了气体放电;(右图)基于类似的机理可以产生大气压等离子体。

电荷的量化

- 电荷 q , 称为量化(quantized)。
- 符号 q 是个标准的符号(standard symbol), 用来当作电荷的变量。
- 电荷存在如同分离的封包(discrete packets)。

$$q = Ne \quad (1-1)$$

式中 N 为整数(integer), e 是一个电荷的基本单位(fundamental unit), $|e| = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

- 一个电子(electron)带电量: $q = -e$; 一个质子(proton)带电量: $q = +e$ 。

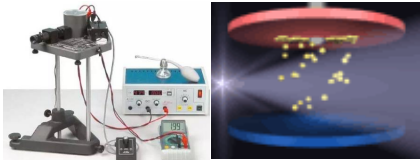


图1-7: 密立根油滴实验装置图

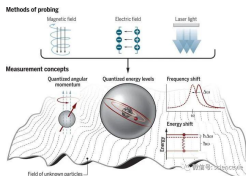
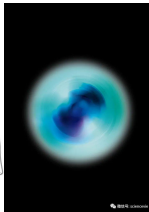


图1-8: 电子圆得超乎想象



(3) 导体与绝缘体

➤ 导体: 电子能在原子间自由移动的物体, 称为导体。

如金、银、铜等金属是电的良导体, 故常用作为导线的材料。

➤ 绝缘体: 电子不能在原子间自由移动的物体, 称为绝缘体。

如塑料、玻璃、橡胶等为电的不良导体。

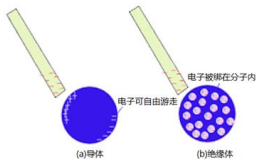


图1-9: 导体与绝缘体

【2】 库仑定律

►以库仑定律为例说明:

(a)一个物理定律建立本身就是物理学取得很大进展的标志;

(b)物理定律具有丰富、深刻的内涵和外延;

(c)对于一个基本定律,我们究竟从哪些方面来考察?

(一)物理定律建立的一般过程:

(1)现象;(2)问题;(3)猜测;(4)实验;(5)定律(常常需要引进新的物理量或模型,找出新的内容,正确表述);

(6)成立条件、适用范围精度;(7)理论地位及现代含义等。

(二) 库仑定律的建立



Franklin



Joseph Priestley



John Robison



Henry Cavendish



Charles de Coulomb



James C. Maxwell

(1) 现象:

如图1-9-1所示Franklin首先发现金属小杯内的软木小球完全不受杯上电荷的影响。

(2) 问题?

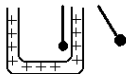


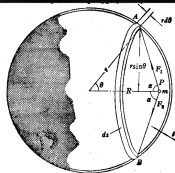
图1-9-1: Franklin实验

从实验结果出发进行科学论证提出电力平方反比律的第一人——普利斯特利

➤ (3) 猜测:



图1-9-2. Priestley 猜测



对球壳内部的引力

(4)设计实验测量

- 1769年Robison首先用重力平衡测量方法确定静电力定律,得到两个同号电荷的斥力: $f \propto r^{-2\pm\delta}$;
- 两个异号电荷的引力比平方反比的方次要小些(研究结果直到1801年发表才为世人所知)。

Robison的实验:

- 1769年设计的一个杠杆装置,利用活动杆所受重力和电力的平衡,从支架的平衡角度求电力与距离的关系。
- 他的装置只适用于同性电荷进行实验。
- 他得到 $\delta = 0.06$,这个 δ 称之为指数偏差。

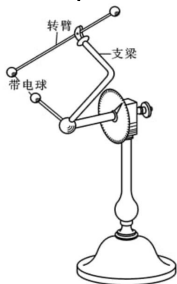


图1-9-3:Robison实验

Cavendish的示零实验

- 1772年Cavendish遵循Priestley的思想设计了实验“验证电力平方反比律”，如果实验测定带电的空腔导体的内表面确实没有电荷，就可以确定电力定律是遵从平方反比律的，即 $f \propto r^{-2 \pm \delta}$ ；
 δ 越小，内表面电荷越少。
- 他测出不大于0.02(未发表,100年以后Maxwell整理他的大量手稿,才将此结果公诸于世)。

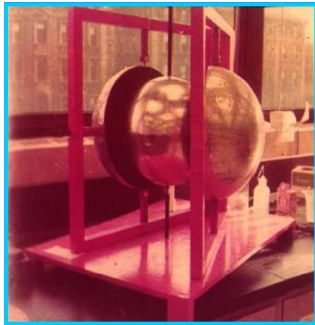


图1-9-4:Cavendish的实验复制品

Coulomb 实验

(A) Coulomb 扭称实验

- 1785年电斥力扭称实验装置精巧、技术高超。
- 数据只有几个，且不准确（因为漏电）——Coulomb 定律不是大量精确实验的总结。

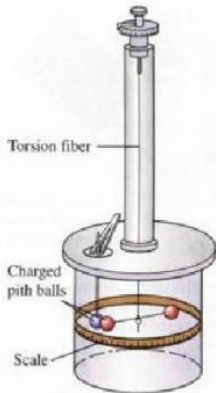


图1-9-5:扭称实验

(B)Coulomb 电单摆实验

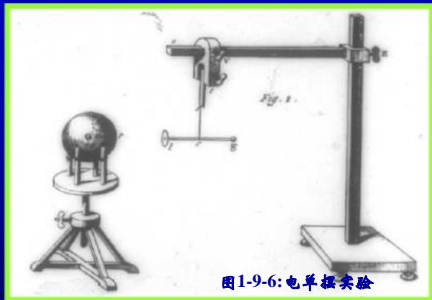


图1-9-6:电单摆实验

思维过程分析:

万有引力单摆

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{Gm}} r$$

电吸引力单摆

若 $T \propto r$ 则 $F \propto r^{-2}$

测量距离不同时的周期 就可以求出不同距离的电吸引力。

(5) 库仑定律的表述

- 在真空中,两个静止的点电荷 q_1 和 q_2 之间的相互作用力大小,与 q_1 与 q_2 的乘积成正比,和它们之间的距离 r 平方成反比;
- 作用力的方向沿着他们的**连线**,同号电荷相斥,异号电荷相吸。

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \Leftrightarrow \begin{cases} F \propto r^{-2 \pm \delta} \\ F \propto q_1 q_2 \\ \vec{F} \parallel \vec{r} \end{cases}$$

- k 是引进单位制后引入的常数。
- 上述公式并非都是大量实验的结果,在事实上理性思维的结果;如力的方向:分析点电荷受力,只能沿连线,否则空间旋转 180° 就不对称了。

电荷与质量比较

表1-1: 电量与质量

性质	电荷量	引力质量
物质属性	描述物体带电相互作用强弱,由库仑定律定义	描述物体万有引力作用强弱,由万有引力定律定义
空间属性	平方反比定律,极为精确	平方反比定律,并不精确,需要相对论修正
产生源天	满足守恒规律:电荷代数和不变	满足守恒定律:质量+能量守恒
基元属性	两种电荷:电力可以屏蔽效应	一种质量:引力无法屏蔽
相对性	无相对论效应(若有是何后果?)	有相对论效应
量子性	电荷量子化(分数电荷?)	尚未发现量子性
物理意义	很大、很恐怖	一般、可控制

量纲问题

➤ 电量单位(MKSA): 米(m)、千克(kg)、秒(s)和安培(A)。

➤ 1库仑: 导线通过1A稳恒电流, 一秒内通过电量为 $1\text{C} = 1\text{A} \cdot \text{s}$ 。

➤ 若 $F = 1\text{N}$, $q_1 = q_2 = 1\text{C}$, $r = 1\text{m}$, 则

$$k = 8.9880 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \sim 9.00 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}。$$

➤ $k = 1/4\pi\epsilon_0$, $\epsilon_0 = 1/4\pi k$ $8.854187818(71) \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ 。

➤ 电量单位(CGSE): 电量作为基本单位由Coulomb定律定义。

➤ 令: $k = 1$, $q_1 = q_2$, $r = 1\text{cm}$, $F = 1\text{dyn}$, 则电量 q 的单位为1CGSE电量, $1\text{C} = 3 \times 10^9 \text{ CGSE}$ 。

(6) 成立条件、适用范围、精度

① 成立条件：静止、真空、点电荷

静止条件：点电荷相对静止，且相对于观察者也静止；该条件可拓宽到静源——动电荷；不能延拓到动源——静电荷？因为作为运动源，有一个推迟效应。

问题：上述结论是否与牛顿第三定律矛盾？结果合理吗？

看上去与牛顿第三定律矛盾；实际上正说明电荷间有第三者——场；前者电荷静止，场的动量不变——作用力对等；后者场的动量发生变化，作用力不对等；将场包含进去，依然满足牛顿第三定律。

真空条件：除去其他电荷以及周围感应和极化等因素的影响，使两个点电荷只受对方作用（并非必要）。

如果真空条件破坏会如何？

不仅只有两个电荷总作用力比真空时复杂些，但由于力的独立作用原理，两个点电荷之间的力仍遵循库仑定律，因此可以推广到介质、导体。

② 适用范围和精度

➤ 原子核尺度——地球物理尺度($10^{-17}\text{m} - 107\text{m}$);

➤ 1971年精度为 $\delta < 10^{-16}$ 。

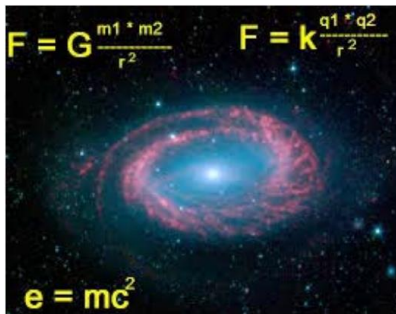
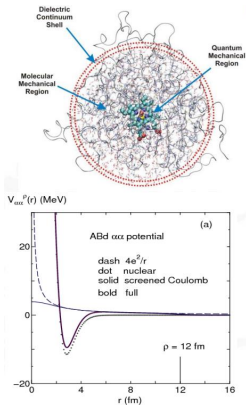


图1-9-7:通用尺度



(7) 理论地位和现代含义

- 库仑定律是静电学的基础,说明了带电体的相互作用问题;
- 原子结构,分子结构,固体、液体的结构,化学作用的微观本质,都与电磁力有关,其中主要部分是库仑力。
- 若 $\delta \neq 0$, 则其后果: 静电场的基本定理——高斯定理将不成立——动摇了电磁理论的基础;
- 电力平方反比律与 m_γ (静) 是否为 0 有密切关系——现有理论以 $m_\gamma = 0$ 为前提,若 m_γ 不为零,后果严重:
- 电动力学规范不变性被破坏,电荷将不守恒,光子偏振态要发生变化,黑体辐射公式要修改,会出现真空色散即不同频率光波在真空中的传播速度不同,从而破坏光速不变。

有益的启示

➤ 类比方法的运用

- 在物理学的发展中无非是充当“药引子”或者“催化剂”的作用；
- 类比不过是物理学家构建物理学大厦时的脚手架罢了，物理学的大厦一旦建成，脚手架也就需要拆除了。

➤ 理论和实验如车之两轮，相辅相成

- 在万有引力定律的理论启发下，把实验结果中对平方的修正项视为实验误差，进而删除掉；
- “没有实验家，理论家就会迷失方向；没有理论家，实验家就会迟疑不决。”。

3 电力叠加原理

试验指出,两个以上的点电荷对一个点电荷的作用力,等于各个电荷单独存在时对该电荷作用力的矢量和如图1-10所示

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

(1) 连续带电体对点电荷的作用力为

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho(\vec{r})}{r^3} \vec{r} dV \quad \text{其中电荷密度} \rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

(2) 面电荷分布的带电体为 $\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\sigma(\vec{r})}{r^3} \vec{r} dS$ 其中电荷密度 $\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$

(3) 线电荷分布的带电体为 $\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\lambda(\vec{r})}{r^3} \vec{r} dl$ 其中电荷密度 $\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta L}$

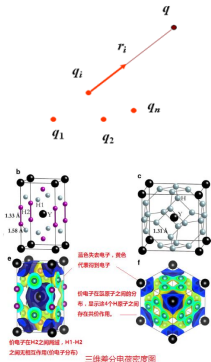
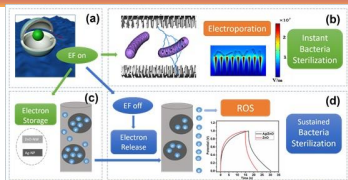


图1-10: 多电荷体系

1-1-2: 电场强度

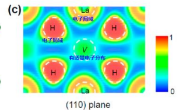
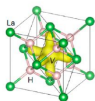
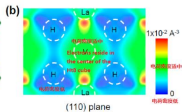
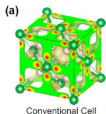


电场及其定义

电场叠加原理

电场强度

电场强度计算



1-1-2: 电场强度

以实验电荷感受到的力大小来定义源电荷的电场。

1. 电场及其定义

库仑定律给出了两个点电荷相互作用的定量关系,问题为**相互作用是如何传递的?**

自古以来有两种不同的回答:**超距作用**与**近距作用**的观点,两者争论由来已久,其争论的焦点如图1-11所示。

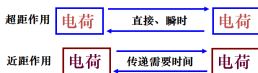


图1-11: 电荷相互作用模式

近代物理证明:**电场传递相互作用**,其作用模式如图1-12所示。



图1-12: 电荷相互作用模式

(1) 电场线

- 如图1-13所示矢量:大小、方向,因此可表示为电场线;
- ✓ 方向:每一点的切线方向都代表了该点的场强的曲线;
- ✓ 强度:通过与电场正交的小面元每单位面积的电场线根数。

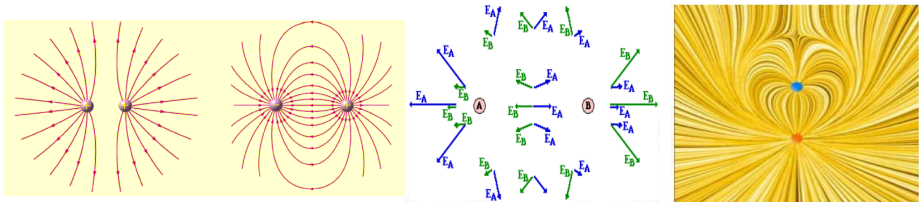


图1-13: 电场线

(2) 电场线的性质: 不闭合, 不中断, 起于正电荷、止于负电荷;

任何两条电场线都不会相交, 电场线是虚构, 用来帮助我们想象电场分布, 建立物理图象。

(3) 电场强度定义

- 引入试探电荷 q_0 , 实验结果表明: 不同场点受力大小、方向一般不同; 同一场点 \vec{F} 随 q_0 增大; 但比值确定。

$$\text{电场强度定义: } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

从 \vec{F} 中扣除 q_0 可得:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

- 静电场中任一点处的电场强度, 等于单位正电荷在该点处所受的电场力 (含大小和方向)。



2. 电场的叠加原理

点电荷系在空间某点产生的电场等于各点电荷单独存在时在该点产生的场的矢量和。

(1) 点电荷系: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$

(2) 连续带电体: 如图1-14所示。

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \vec{r}$$

体分布 $dq = \rho_e dV$, ρ_e 为体电荷密度;

面分布 $dq = \sigma_e dS$, σ_e 为面电荷密度;

线分布 $dq = \lambda_e dl$, λ_e 为线电荷密度。

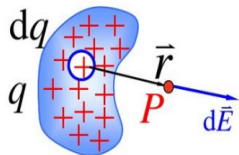


图1-14: 连续带电体

3. 场强的计算

► 依据: (1) 场强的定义; (2) 库仑定律; (3) 场强叠加原理。

点电荷的场:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

点荷系的场:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

连续带电体的场:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \vec{r}$$

【例1-1】 如图1-15所示的电偶极子(两点电荷 $+q$ 和 $-q$,相距 l , \vec{l} 的方向由 $-q$ 指向 $+q$,当考察点至两电荷距离 $r \gg l$ 时,两点电荷可视为一电荷对,称为电偶极子)的电场。



图1-15: 电偶极子

【解】

(1) 场点 P 在其的延长线上如图1-16所示。

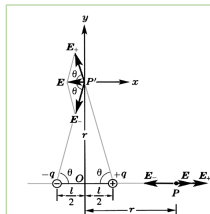


图1-16: 电偶极子臂的延长线上、中垂线上场强分布

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2}, E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\text{则总场强 } E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rl}{\left[r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^2}$$

$$\text{因 } r \gg l, \text{ 则 } r^2 - (l/2)^2 \approx r^2, \text{ 故 } E_1 = \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ 或 } \vec{E}_1 = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$(2) \text{ 场点 } P' \text{ 在其的中垂线上 (参见图 1-16)} \quad E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\text{则总场强 } E_2 = 2E_+ \cos\alpha$$

$$\text{因 } r \gg l, \text{ 则 } r^2 + (l/2)^2 \approx r^2, \text{ 故 } E_2 = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ 或 } \vec{E}_2 = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

(3) 场点 P 在远处任一位置 (参见图1-17):

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+^2}, E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-^2}$$

将 E_+ 、 E_- 分别沿着 r 及其垂直方向分解。

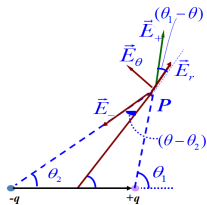


图1-17: 场点 P 在远处任一位置

因 $r \gg l$, 即 $\theta_1 - \theta \approx \theta - \theta_2 \approx 0$, 则 $r_- \approx r_+ \approx r$, $r_- - r_+ = l \cos \theta$

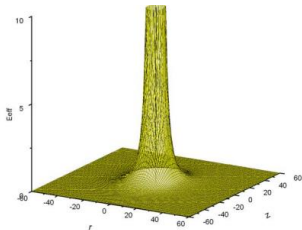
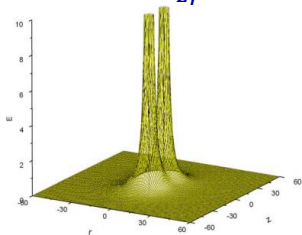
$$\begin{aligned} E_r &= E_+ \cos(\theta_1 - \theta) - E_- \cos(\theta - \theta_2) \approx E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r_- + r_+)(r_- - r_+)}{r_+^2 \cdot r_-^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2rl}{r^4} \cos \theta = \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} p \end{aligned}$$

近似: $r_- \sin(\theta_1 - \theta) \approx r_+ \sin(\theta - \theta_2) \approx \frac{l}{2} \sin \theta$

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} &= E_+ \sin(\theta_1 - \theta) + E_- \sin(\theta - \theta_2) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+^2 \cdot r_-^2} (r_-^2 \sin(\theta_1 - \theta) + r_+^2 \sin(\theta - \theta_2)) \\
 &= \frac{ql \sin \theta (r_- + r_+)}{8\pi\epsilon_0 r_+^2 \cdot r_-^2} = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} p
 \end{aligned}$$

场强的大小: $E_3 = \sqrt{E_r^2 + E_{\theta}^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \theta + 1}$

场强的方向: $\alpha = \arctan \frac{E_{\theta}}{E_r}$, 其中 α 为 E_3 方向的夹角。



【讨论】

(1) 电偶极子的电场 $E \propto \frac{p}{r^3}$;

(2) 总电偶极矩的场等于各分电矩场的矢量和。

如图1-18所示:
$$\begin{cases} p_r = p \cos\theta \\ p_\theta = p \sin\theta \end{cases}$$

而 \vec{p}_r 延长线上的电场: $E_r = \frac{2}{4\pi\epsilon_0 r^3} p_r = \frac{2\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} p$

\vec{p}_θ 垂直线上的电场: $E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} p_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} p$

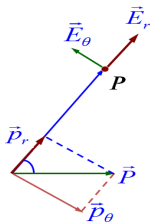


图1-18: 分解电矩求电场

【注】 结果与按两点电荷的场叠加方法相同。

[2] 连续电荷的场

取点电荷元 dq , 其场强 $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$, 总场强 $\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$ 。

【例1-2】如图1-19所示均匀直线电荷的电场。

【解】设电荷线密度为 λ , $dq = \lambda dy$, 则

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta$$

$$\because y = -a \cot\theta \quad \therefore dy = \frac{a d\theta}{\sin^2\theta} \quad \text{and} \quad r^2 = \frac{a^2}{\sin^2\theta}$$

$$E_x = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta$$

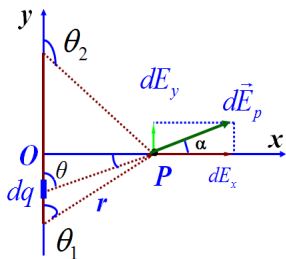


图1-19: 直线电荷的场

则 $E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$, 同样 $E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$ 。

因此 $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ $\alpha = \arctan \frac{E_y}{E_x}$

【讨论】：

(1) 对直线电荷 $E_x, E_y \propto \frac{1}{a}$ 。

(2) 直线 ∞ 长时, 即 $\theta_1 \approx 0, \theta_2 \approx \pi, E_y = 0, E_x \propto \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$ 。

(3) 由无限长直线电荷的场, 可推出无限大平面电荷的场。

【例1-3】：设电荷面密度 σ ，场点距平面 a ，如图1-20所示。

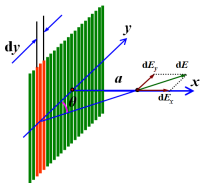


图 1-20:大平面电荷

【解】 电荷元线密度 $\lambda = \sigma dy$ ，利用长直电荷的结果，有

$$dE = \frac{\sigma dy}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+y^2}} \sin\theta$$

利用对称关系，可只考虑方向 $dE_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} dE = \frac{\sigma a dy}{2\pi\epsilon_0(a^2+y^2)}$

$$\because y = -a \cot\theta \quad \therefore dy = \frac{a d\theta}{\sin^2\theta} \quad \text{and} \quad \frac{a^2}{a^2 + y^2} = \sin^2\theta$$

$$E = \int dE_x = \int_0^\pi \frac{\sigma d\theta}{2\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

➤ 推广示例：如图1-21所示

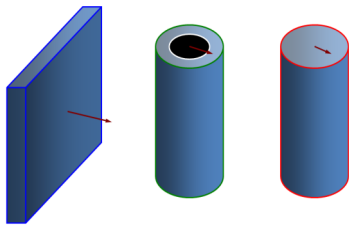


图1-21:推广示例

【例1-4】求如图1-22所示的均匀圆电荷轴线上任一点处的场强。

【解】设电量 q ,圆环半径为 a ,场点距圆心 y ,则电荷线密度 $\lambda = \frac{q}{2\pi a}$,

而电荷元 $dq = \lambda dl$,其场强为 $dE = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(a^2+y^2)}$

由对称性可知,总电场沿 y 方向,所以总电场

$$E = \int dE_y = \int \cos\theta dE$$

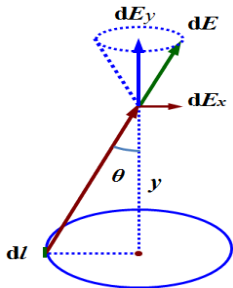


图1-22:圆电荷的场

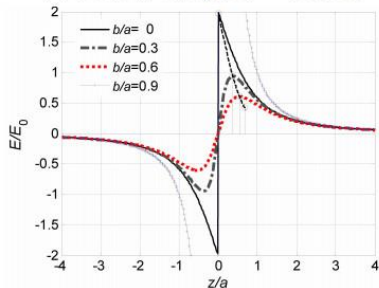
而 $\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$, 则 $E = \int_0^{2\pi a} \frac{y\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi a\lambda y}{4\pi\epsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

用矢量表示 $\vec{E} = \frac{q\vec{y}}{4\pi\epsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

【讨论】

- (1) $y \gg a$, $\vec{E} = \frac{q\vec{y}}{4\pi\epsilon_0 y^3}$ (点电荷);
- (2) $y = 0$ 时, $\vec{E} = 0$;
- (3) 上下对称。

均匀带电圆环(不同环宽)在垂轴上的电场强度



【例1-5】求均匀圆盘电荷轴线上的场强,如图1-23所示。

【解】设电荷面密度 σ ,圆盘半径 R ,点距圆心 y ,取圆电

荷元 $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$,用上题结果 $dE = \frac{y dq}{4\pi\epsilon_0(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\text{则 } E = \int_0^R \frac{2\pi\sigma y r dr}{4\pi\epsilon_0(r^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

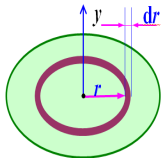


图1-23:圆盘电荷

【讨论】

(1) 令 $R \rightarrow \infty$, 则得无限大平面电荷电场强度: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, 无限大平面电荷的场强 \vec{E} 与距离无关;

(2) 正、负两无限大平行平面电荷的场强: $E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ 0 \end{cases}$

(3) 推广示例: 如图1-24所示。

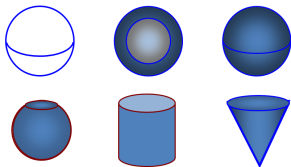
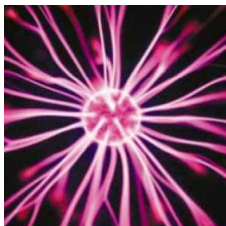


图1-24: 圆盘电荷二次曲线的极坐标方程

1-1-3 两个定理



两个定理



通量与环量

高斯定理

环路定理

电场强度与电势

1-1-3: 两个定理

1. 两个物理量

有了电场线概念, 类比于流体流量、环流, 可定义电通量(electric flux)、电环量(electric circulation)。

包络面、闭合线可为任意形状, 因为我们有微元的武器!

(1) 如图1-25所示对曲面 S , 定义面积元 dA 或 dS , 计算流过的流量:

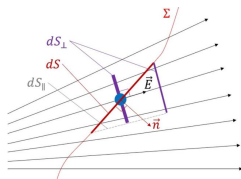
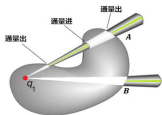
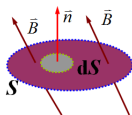


图1-25: 电通量

几点说明

① 穿过面元 ΔS 的电通量: $\Delta\Phi_E = E\Delta S\cos\theta = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$

② 穿过有限大曲面 S 的电通量: $\Phi_E = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$

③ 闭合曲面 S 的电通量: $\Phi_E = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$

(2) 如图1-26所示对闭合曲线 \vec{l} , 定义线元 $d\vec{l}$, 计算流过环量

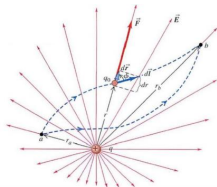


图1-26: 电环量

几点说明

① 穿过线元 Δl 的电环量： $\Delta\Gamma_E = E\Delta l\cos\theta = \vec{E} \cdot \Delta\vec{l}$

② 穿过有限大曲线 L 的电环量： $\Gamma_E = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{l}_i = \int_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

③ 如图1-26所示闭合曲线 L 的电环量： $\Gamma_E = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{l}_i = \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

(3) 为什么要研究通量、环量？

① 对象变化导致一系列深刻的变化——不仅规律的形式，而且规律的性质发生变化。

场是一定空间范围内连续分布的客体，如温度 T 的温度分布——温度场(标量场)，流速 \vec{v} 的流速分布——流速场(矢量场)，那么电荷产生场具有什么性质？

已知电荷可根据场强定义和叠加原理求场分布，已知场分布也可求得其他带电体在其中的运动；物理学家不满足于这些，各种各样的电荷的场分布五花八门，只是表面现象，其本质是什么？

② 期望从整体的角度揭示电场的本质特征！

③ 经过探索通过与流体类比找到用矢量场论来描述电场！

(4) 提出问题: 如何研究电场?

① 类比: 流线 \rightarrow 电力线、流量 \rightarrow 电通量、环流 \rightarrow 电环量, 通过 dS 的量:

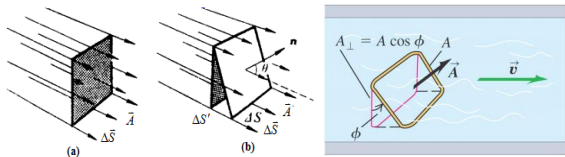


图1-27: 通量

如图1-27所示其物理意义: 穿过 dS 的电力线的根数。

② 定义 **电力线数密度** 为单位面积内电力线的根数令其等于该处电场强度大

小为 $E = \frac{dN}{dS'} \Rightarrow dN = E dS' = \vec{E} \cdot d\vec{S} = d\Phi_E$ 。

③ 电通量

如图1-28(a)所示任意曲面 $\Phi_E = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$;

如图1-28(b)所示任意闭合曲面 $\Phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$;

如图1-28(c)所示取闭合面外法线方向为正,则

$$d\Phi_E = \begin{cases} > 0, & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ = 0, & \theta = \frac{\pi}{2} \\ < 0, & \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

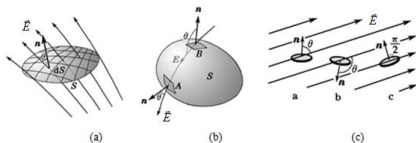
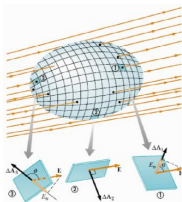
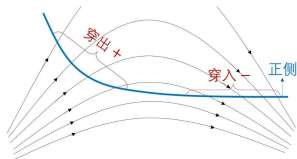


图1-28:电通量与电场强度的关系

(5) 类比: 流速场如图1-29所示有源(或汇)、有旋、两者兼而有之。

$$\text{流速场通量: } \Phi_v = \oiint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S} \begin{cases} \neq \mathbf{0} (\text{有源}) & \begin{cases} > \mathbf{0} (\text{源}) \\ < \mathbf{0} (\text{汇}) \end{cases} \\ = \mathbf{0} (\text{无源}) \end{cases}$$

$$\text{流速场环量: } \Gamma_v = \oint_{(L)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \begin{cases} \neq \mathbf{0} (\text{有旋}) \\ = \mathbf{0} (\text{无旋}) \end{cases}$$

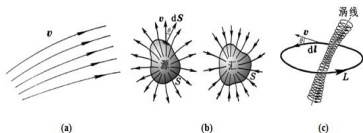


图1-29: 流速场的物理分析

不可压缩流体的研究成果移植到电磁学中:

$$\text{通量: } \Phi_A = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \begin{cases} \neq 0 (\text{有源}) \\ = 0 (\text{无源}) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} > 0 (\text{源}) \\ < 0 (\text{汇}) \end{array} \right.$$

$$\text{环量: } \Gamma_A = \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \begin{cases} \neq 0 (\text{有旋}) \\ = 0 (\text{无旋}) \end{cases}$$

$$\vec{A} \begin{array}{c} \leftarrow \text{来源于流体、移植于电磁} \rightleftarrows \\ \left. \begin{array}{l} \vec{v} \\ \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} \end{array}$$

整体而言就可以总体把握、有效地加以区分和比较!

2. 高斯定理

$$\Phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} Q_i$$

通过一个任意闭合曲面的电通量,即电场强度沿该闭合面的面积分,等于闭合面内部所有电量的代数和除以 ϵ_0 ,与闭合面外部的电荷无关。

几点说明:

- ① Φ_E 为通过任意闭合曲面的电通量;
- ② \vec{E} 为 Gauss 面上的场强,是所有电荷产生的场;
- ③ Q_i 为面内电量的代数和,与面外电荷无关。

立体角定义:

如图1-30所示对闭合球面和任意闭合面,

球面角相同;

通过相同球面角的电通量相等。

$$d\Omega = \frac{dA'}{r^2} = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{A}}{r^2}$$

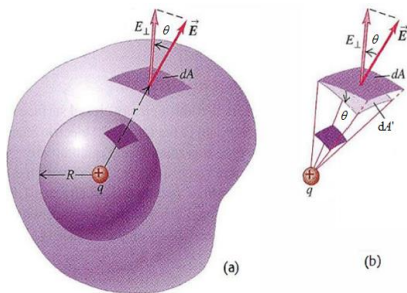


图1-30:立体角定义

证明: 从特殊到一般(要点)

①如图1-31所示点电荷 q 被任意球面包围。

设 $q>0$,场具有球对称性,

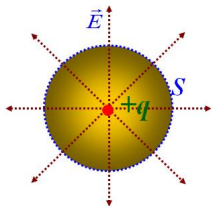


图1-31:穿过以 q 为中心的球面的电通量

$$\Phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} E dS = \oiint_{(S)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oiint_{(S)} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

一个点电荷所产生的电场,在以点电荷为中心的任意球面的电通量等于 $\frac{q}{\epsilon_0}$ 。

②如图1-32所示点电荷 q 被任意曲面包围

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

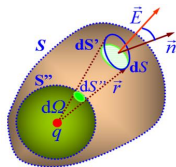


图1-32: 穿过包围 q 的任意闭面的电通量

对整个闭合面 S 有

$$\Phi_E = \oiint_{(S)} d\Phi_E = \oiint_{(S)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{(S)} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

包围一个点电荷的任意曲面上的电通量等于 $\frac{q}{\epsilon_0}$, 与电力平方反比律 $f \propto r^{-2+\delta}$ 分不开。

③如图1-33所示闭合曲面不包围点电荷

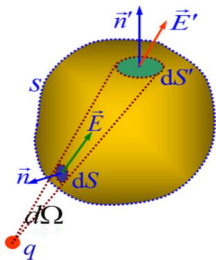


图1-33: 穿过不包围 q 的任意闭面的电通量

➤ 闭合曲面不包围点电荷 q , dS' 与 dS 所对的立体角, 则电通量有

$$d\Phi_E = -d\Phi_E'$$

➤ 对于闭合面 $S' + S$, Φ_E 为总通量, 即 $\Phi_E = 0$ 。

➤ 通过不包围点电荷的闭合曲面的电通量为零。

如图1-34所示点荷系被任意闭合曲面包围

➤ 设带电体系由 n 个点电荷组成, 其中 k 个在闭合面内, $n - k$ 个在闭合面外。

➤ 由场强叠加原理, 通过闭合面的总通量为

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \cdots + \oiint_{(S)} \vec{E}_k \cdot d\vec{S} + \oiint_{(S)} \vec{E}_{k+1} \cdot d\vec{S} + \cdots + \oiint_{(S)} \vec{E}_n \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} q_i$$

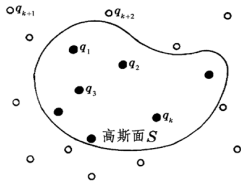
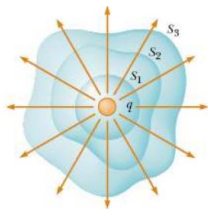
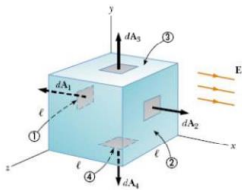


图1-34: 点荷系

⑤ 连续带电体 $\Phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho_e dV$, 其中 V 是闭合面 S 所包围的空间。

➤ 由格林公式 $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \nabla \cdot \vec{E} dV$, 可得: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$



3. 高斯定理的应用

在矢量场中高斯定理具有重要理论意义,在静电场中还具有实用价值:

满足一定对称条件下,用高斯定理求解电场较简便。

【例 1-7】:如图1-35所示点电荷 q 的场强。

【解】:设任一点 P 至电荷距离为 r ,以电荷 q 为中心,
 r 为半径作球面 S ,则 P 点在 S 上,如图1-35所示。

由于静电场的分布是球对称的,所以穿过高斯面 S 的电通量。

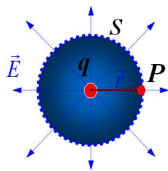


图1-35:点电荷的场

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} E \cos\theta dS = E \oiint_{(S)} dS = E4\pi r^2$$

根据高斯定理: $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

比较两式得: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

【讨论】: ①如何选取高斯面 S ; ②如何利用对称性; ③与前面的结果一致。

【例 1-8】：均匀球面电荷的场强分布。

【解】：设球面电荷半径为 R ，电量 q 沿球面均布。

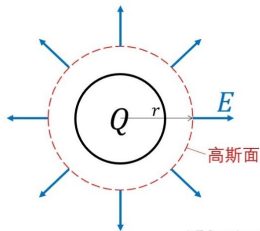
设球面外任一点 P 至球心 r ，以 r 为半径作同心球面 S_1 ，则 P 点在 S_1 上，如图1-36所示。由于静电场分布是球对称的，所以穿过高斯面 S_1 电通量。

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} E \cos\theta dS = E \oiint_{(S)} dS = E4\pi r^2$$

根据高斯定理： $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

比较两式得： $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

同位于中心的点电荷 q 的场。



知乎 @tetradecane

图1-36:球面电荷外的场

以 r 为半径作同心球面 S_2 , 则 Q 点在 S_2 上, 如图 1-37 所示。由于静电场的分布是球对称的, 所以穿过高斯面 S_2 的电通量。

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} E \cos\theta dS = E \oiint_{(S)} dS = E4\pi r^2$$

根据高斯定理:

比较两式得 $E=0$ 。综上

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$E = \begin{cases} 0, (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, (r > R) \end{cases}$$

均匀球面电荷内外电场的分布曲线见图 1-38 所示。

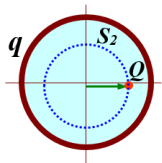


图 1-37: 球面电荷内的场

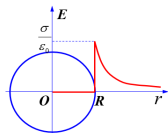


图 1-38: $E-r$ 曲线

【例 1-9】 :均匀球体电荷的场强分布。

【解】 :设球体电荷半径为 R ,电量 q 沿球体均布。

设球体外任一点 P 至球心 r ,以 r 为半径作同心球面 S_1 ,则 P 点在 S_1 上,如图1-39所示。由于静电场分布是球对称的,所以穿过高斯面 S_1 电通量。

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} E \cos\theta dS = E \oiint_{(S)} dS = E4\pi r^2$$

根据高斯定理:
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

比较两式得:
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

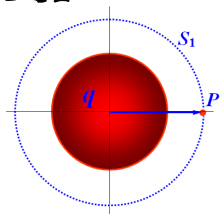


图1-39:球体电荷外的场

同位于中心的点电荷 q 的场。

以 r 为半径作同心球面 S_2 , 则 Q 点在 S_2 上, 如图1-40所示。由于静电场的分布是球对称的, 所以穿过高斯面 S_2 的电通量。

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} E \cos\theta dS = E \oiint_{(S)} dS = E4\pi r^2$$

根据高斯定理:
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{qr^3}{\epsilon_0 R^3}$$

比较两式得 $E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ 。 综上所述 $E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, (r > R) \end{cases}$

均匀球体电荷内外电场的分布曲线见图1-41所示。

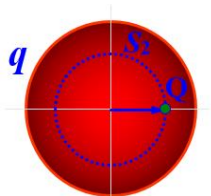


图1-40: 球电荷内的场

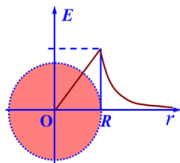


图1-41: $E-r$ 曲线

【例1-10】：均匀长直细棒电荷线密度为 λ ，求其场强分布。

【解】：设任一点 P 至电荷的距离为 r ，以电荷为轴、半径为 r 作圆柱面 S ，柱高 l ，如图1-42所示，由于静电场的分布是轴对称的，所以穿过高斯面 S 的电通量：

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{S_3} E \cos\theta dS = E \iint_{S_3} dS = E2\pi r l\end{aligned}$$

根据高斯定理：
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

比较两式得 $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ ，方向沿径向。

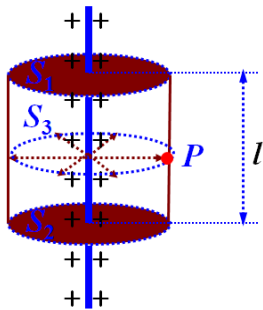


图1-42:长直电荷的场

【例 1-11】：均匀长圆柱面电荷 σ 的电场分布。

【解】：设圆柱面电荷面密度 σ 为常量，柱面半径为 R 。设圆柱面电荷外任一点 P 至圆柱面轴线的距离为 r ，作半径为 r 的同轴圆柱面 S_1 ，侧面过 P 点，柱高 l ，如图1-43所示。设 S_1 侧面场强大小 E_1 ，方向沿径向，类似例1-10分析可得：

$$\Phi_E = \oiint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = E_1 2\pi r l$$

根据高斯定理：
$$\oiint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq = \frac{2\pi R l \sigma}{\epsilon_0}$$

比较两式得 $E_1 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$ ，方向沿径向。

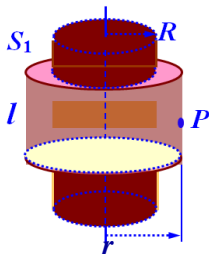


图1-43: 柱面外的场

设圆柱面内任一点 Q 至圆柱面轴线的距离为 r ,作半径为 r 的同轴圆柱面 S_2 ,侧面过 Q 点,柱高 l ,如图1-44所示。

设 S_2 侧面场强大小为 E_2 ,方向沿径向,类似分析可得:

$$\Phi_E = \oiint_{S_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = E_2 2\pi r l$$

根据高斯定理: $\oiint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = 0$

比较两式得 $\vec{E}_2 = 0$ 。综上所述 $E = \begin{cases} 0, (r < R) \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}, (r > R) \end{cases}$

均匀球体电荷内外电场的分布曲线见图1-45所示。

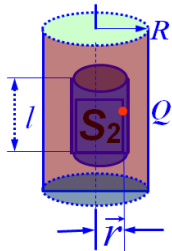


图1-44:柱面内的场

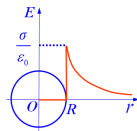


图1-45: $E-r$ 曲线

【例 1-12】 :均匀长圆柱体电荷 ρ 的电场分布。

【解】 :设圆柱体电荷体密度 ρ 为常量,柱体半径为 R 。设圆柱体电荷外任一点 P 至圆柱体轴线的距离为 r ,作半径为 r 的同轴圆柱面 S_1 ,侧面过 P 点,柱高 l ,如图1-46所示。设 S_1 侧面场强大小 E_1 ,方向沿径向,类似例 1-10分析可得:

$$\Phi_E = \oiint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = E_1 2\pi r l$$

根据高斯定理:
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq = \frac{\pi R^2 l \rho}{\epsilon_0}$$

比较两式得
$$E_1 = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r}, \text{方向沿径向。}$$

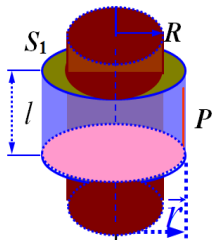


图1-46: 柱体外的场

设圆柱体内任一点 Q 至圆柱面轴线的距离为 r ,作半径为 r 的同轴圆柱面 S_2 ,侧面过 Q 点,柱高 l ,如图1-47所示。

设 S_2 侧面场强大小为 E_2 ,方向沿径向,类似分析可得:

$$\Phi_E = \oiint_{S_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = E_2 2\pi r l$$

根据高斯定理:
$$\oiint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq = \frac{\pi r^2 l \rho}{\epsilon_0}$$

比较两式得 $E_2 = \frac{r\rho}{2\epsilon_0}$ 。综上所述
$$E = \begin{cases} \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r}, & (r \geq R) \\ \frac{r\rho}{2\epsilon_0}, & (r < R) \end{cases}$$

均匀球体电荷内外电场的分布曲线见图1-48所示。

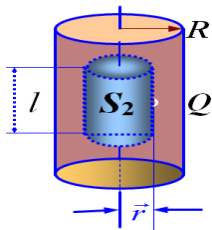


图1-47:柱面内的场

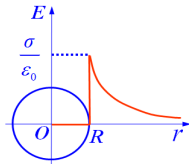


图1-48: $E-r$ 曲线

【例1-13】：均匀无限大平面电荷场强的分布。

【解】 设电荷面密度 σ 为常量,任一点 P 至电荷的距离为 r ,取高斯面为垂直并对称于电荷平面,横截面积 ΔS ,则端面 S_1 过 P 点,如图1-49所示。

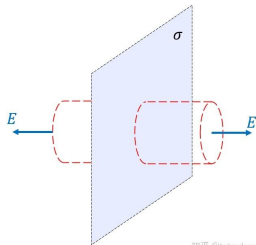
$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= 2 \iint_{S_1} E \cos\theta dS = 2E \iint_{S_1} dS = 2E\Delta S\end{aligned}$$

根据高斯定理:

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$$

比较两式得 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$,方向垂直向外。

无限大平面电荷的电场与到电荷平面的距离无关,是匀强电场。



知乎 @tetradecane

图1-49:无限大平面电荷的场

4.讨论: Gauss 定理几点说明

① 闭合面内的电荷决定通过闭合面的电通量,只要 S 内电荷不为零,则通量不为零——有源

正电荷 —— 喷泉形成的流速场——源

负电荷 —— 有洞水池中的流速场——汇

② 闭合面外的电荷虽然对通量没有贡献,但并不意味着不影响闭合面上的电场,高斯面上的场强是空间所有带电体所产生的;

③ 高斯定理是静电场的一条重要的定理,有其重要的理论地位,是静电场基本方程之一,它是由库仑定律导出的,反映了电力平方反比律,如果电力平方反比律不满足,则高斯定理也不成立;

④静电力是有心力,但高斯定理只给出了源和通量的关系,并没有反映静电场是有心力场这一特性,它只反映静电场性质的一个侧面(下一节还要讲另一个定理——环路定理)

——所以不能说高斯定理与库仑定律完全等价;

——若不添加附加条件(如场的对称性等),无法从高斯定理导出库仑定律;

——电力平方反比律 ——高斯定理;

——电荷间的作用力是有心力 ——环路定理。

⑤从Gauss定理看电场线的性质

➤ 电场线疏的地方场强小,密的地方场强大;

$$\Phi_E = E_1 \cos\theta_1 \Delta S_1 + E_2 \cos\theta_2 \Delta S_2 = 0 \text{ (管内无电荷)}$$

$$-\frac{E_1 \cos\theta_1}{E_2 \cos\theta_2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$$

电场线起始于正电荷或无穷远,止于负电荷或无穷远。

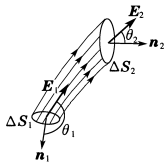


图1-50

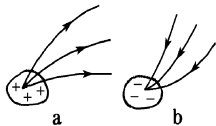


图1-51

5. 环路定理

(一) 静电场力的功

□ 点电荷静电场力的功

如图1-50所示试验电荷 q_0 在电荷 Q 的场中由 a 点运动至 b 点,计算电场力所做的功:

q_0 在场中受力 $\vec{F} = q_0 \vec{E}$

q_0 的位移(元) $d\vec{l}$

电场力作元功: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos\theta dl$

其中 $\cos\theta \cdot dl = dr$, 则 $dA = q_0 E dr$

$$\text{故 } A_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} q_0 E dr = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

静电场力做功与路径无关, 只由始末位置决定。

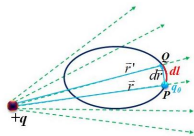
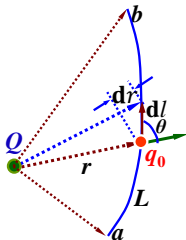


图1-50: 静电场力的功

点荷系静电场力的功:

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_a^b (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} = q_0 \int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + q_0 \int_a^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + q_0 \int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$$

➤ 静电场力做功与路径无关。

➤ 静电场线不闭合,可猜到静电场的环流为0即 $\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 。

证明(要点): ① 单个点电荷产生的场

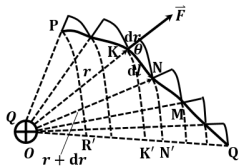


图1-51: 单个点电荷产生的场



如图1-51所示把试探电荷 q_0 从P移到Q, KN为 $d\mathbf{l}$, OK为 r , ON为 $r + dr$, 则

$$A_{PQ} = \int_P^Q F dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_P}^{r_Q} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right) = q_0 \int_{r_P}^{r_Q} E(r) dr$$

➤ 静电场力做功只与起点终点有关, 与路径无关。

② 点电荷系产生的场

在电场中把试探电荷从P移至Q 电场力所做的功。

$$\begin{aligned} A_{PQ} &= \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= q_0 \int_P^Q \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + q_0 \int_P^Q \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + q_0 \int_P^Q \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left(\frac{q_1}{r_{P_1}} - \frac{q_1}{r_{Q_1}} \right) + \left(\frac{q_2}{r_{P_2}} - \frac{q_2}{r_{Q_2}} \right) + \dots + \left(\frac{q_n}{r_{P_n}} - \frac{q_n}{r_{Q_n}} \right) \right\} \end{aligned}$$

每项均与路径无关, 只与位置有关。

③任意有限大的连续带电体产生的电场

- 可将带电体无限分割成微元,每一个微元均为一点电荷——点电荷系;
- 结论:在任何电场中移动试探电荷时,电场力所做的功除了与电场本身有关外,只与试探电荷的大小及其起点、终点有关,与移动电荷所走过的路径无关。

在任意电场中取一闭合回路,将试探电荷沿路径 L 从 P - Q - P ,电场力所做的功为

$$A_{PQ} = q_0 \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{P(L_1)}^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} - q_0 \int_{P(L_2)}^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电力是保守力,静电场是有势场。

静电场的旋度 $\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$,场是无旋场。

(二) 电势能、电势差、电势

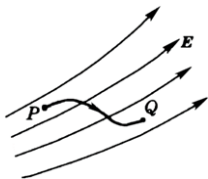


图1-52: 电势能与电势差

$$W_{PQ} = W_P - W_Q = -(W_Q - W_P) \stackrel{\text{def}}{=} A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- 可与重力做功类比: 电场力做正功, 电势能将减少;
- 电场力做负功, 电势能将增加。

电势能：保守力的功等于势能增量的负值。

➤ 试验电荷 q_0 自场中 P 点运动至 Q 点，势能减少：

$$W_{PQ} = W_P - W_Q \stackrel{\text{def}}{=} A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

一般令参考点为 ∞ 处，即 q_0 在 ∞ 时，电势能 $W_\infty = 0$ ，则 P 点的电势能：

$$W_P = q_0 \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

【讨论】：

- ① 电势能属于电场 (q 激发) 和电荷 (q_0) 共有；
- ② 电势能是标量，但是有正、有负；
- ③ 电势能的参考点是可任选的。

电势差: P 、 Q 两点之间的电势差定义为从 P 点到 Q 点移动单位正电荷时电场力所作的功; 单位正电荷的电势能差。

$$U_{PQ} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W_{PQ}}{q_0} = \frac{A_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势: $U_P = U_P - U_Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W_{P\infty}}{q_0} = \frac{A_{P\infty}}{q_0} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

① 电势 U_P 等于单位正电荷自 P 点移至 ∞ 远电场力的功, 或等于单位正电荷自 ∞ 远移至 P 点外力的功;

② 电势是标量, 但是有正、有负;

③ 原则上, 零电势点是可任选的, 理论上, 一般取 ∞ 远处电势为零, 实际中一般选大地为零;

④ 电力的功 $A_{PQ} = q(U_P - U_Q)$;

⑤ 单位: $1 \text{ V (伏特)} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}$ 。

(三) 电势叠加原理

► 如图1-53所示点电荷系有

$$U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_P^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \cdots + \int_P^{\infty} \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$$
$$= U_{1P} + U_{2P} + \cdots + U_{nP} = \sum_{i=1}^n U_{iP}$$

连续带电体有: $U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dq}{r^2}$

$$dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_P^{\infty} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{dq}{r} \right) \Big|_P^{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_P}$$

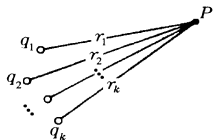


图1-53:点电荷系的电势叠加

(四) 电势的计算

➤ 点电荷场的电势 $U = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

➤ 点电荷系的电势

$$U = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_r^\infty \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$$

$$= U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^n U_i$$

$$\text{所以 } U = \int_r^\infty \sum_i \frac{q_i dl}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

➤ 连续带电体场的电势 $U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$

线电荷分布 $dq = \lambda_e dl$, 面电荷分布 $dq = \sigma_e dS$, 体电荷分布 $dq = \rho dV$ 。

【例1-14】：计算均匀带电球面内外的电势。

【解】：设球面半径 R ，电量 Q ，球面外 $r \in [R, +\infty)$ ： $E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

球面内($r \in [0, R]$)： $\vec{E}_2 = 0$

$$U_2 = \int_r^R \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

均匀带电球面内外电势的分布如图1-54所示 $U-r$ 曲线。

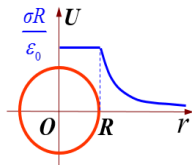


图1-54:球面电荷 $U-r$ 线

【例1-15】：计算均匀带电球体内外的电势。

【解】：设球体半径 R ，电量 Q ，球体外 $r \in [R, +\infty)$ ： $E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

球体内($r \in [0, R]$)： $E_2 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

$$U_2 = \int_r^R \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_r^R \frac{rdr}{R^3} + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

均匀带电球体内外电势的分布如图1-54所示 $U-r$ 曲线。

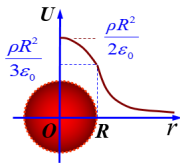


图1-55:球体电荷 $U-r$ 曲线

【例1-16】：求均匀长直线电荷电势的分布。

【解】：设电荷线密度为 λ ，任 P 点距线电荷 r 远，图1-56所示。

$$\text{如前 } U_{\infty}=0, U = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r} = ?$$

$$\text{若设 } U_0=0, U = \int_r^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \int_r^0 \frac{dr}{r} = ?$$

可设其他任意处电势为零，例如令 $U_a = 0$ ，则

$$U = \int_r^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \int_r^a \frac{dr}{r} = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}$$

$$\text{常常取 } a = 1, \text{ 则 } U = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}, \text{ 当 } \begin{cases} r \in [0, 1] & U \geq 0 \\ r \in [1, \infty) & U < 0 \end{cases}$$

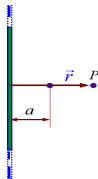


图1-56:均匀长直线电荷

1-1-4 电场与电势的关系

1. 等势面

等势面(线、体)是电场中电势相等的点的集合。

【约定】:相邻等势面间电势差相等。

- ① 等势面与电力线处处正交;
- ② 场强指向电势降落方向;
- ③ 等势面密的地方电场强。

电荷沿等势面(线、体)运动时电场力不做功。

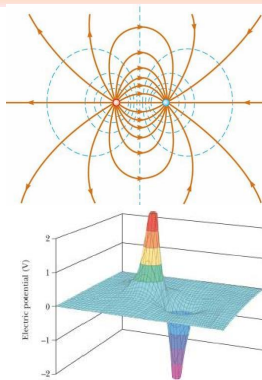


图1-57:电力线与等势面

2. 电场强度和电势关系

① 等势面与电力线处处正交；

证明：设一试探电荷 q_0 沿任意一个等势面作一任意元位移 $d\vec{l}$ ，电场力所做的元功

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E dl \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

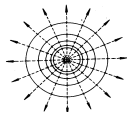


图1-58:等势面图

② 等势面密集处场强大，稀疏处场强小。

证明：设电场中任意两个相邻等势面之间的电势差为一定值，按这一规定画出等势面图如图1-53所示，以点电荷为例，其电势为

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Rightarrow dU(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

因为相邻等势面电势差为一定值, 所以有

$$dr \longrightarrow |\Delta r| \quad dU \longrightarrow |\Delta U|,$$

$$|\Delta r| = \frac{4\pi\epsilon_0}{q} r^2 |\Delta U| \quad \text{而 } E \propto \frac{1}{r^2}$$

$|\Delta r|$ 越大, 则 r^2 越大, 等势面间距越大、越稀、 E 越小;

$|\Delta r|$ 越小, 则 r^2 越小, 等势面间距越小、越密、 E 越大。

③ 电势梯度:

场有分布,沿各方向存在不同的方向微商;梯度是最大的方向微商如速度梯度、温度梯度等,沿 Δl 的方向微商可以表示为 $\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta l}$

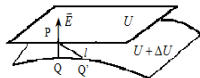


图1-59: 电势梯度

若取垂直方向,即场强方向 Δn ,则沿该方向的方向微商为 $\frac{\partial U}{\partial n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n}$

显然 $\Delta n = \Delta l \cos\theta$,有 $\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial l} \frac{1}{\cos\theta}$ 或 $\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos\theta$

则 $\frac{\partial U}{\partial l} \leq \frac{\partial U}{\partial n}$ $\vec{E} = -\nabla U$ (gradU) gradU 表示为 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

\vec{E} 总是沿着指向电势减小的方向—— \vec{E} 与 $\Delta \vec{n}$ 方向相反。

3. 电场强度计算(另一方法)

【例 1-17】：求电偶极子电势与电场的分布。

【解】：设电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$ ，任一点 a 距离中心 r ，极角

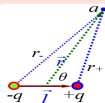


图1-60: 电偶极子的电场

θ ，见图1-60所示。

则电势 $U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$

由 $r_+ \approx r - \frac{l}{2} \cos\theta$, $r_- \approx r + \frac{l}{2} \cos\theta$

代入上式得

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos\theta}{r^2 - \left(\frac{l}{2} \cos\theta\right)^2} \approx \frac{ql \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

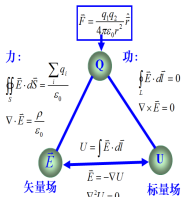
电场强度 $E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{p \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$, $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

$$\text{则} \begin{cases} E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1} \\ \tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta \end{cases}$$

改用矢量表达,故电偶极子在空间任一点的电场强度写成

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^5} \vec{r}$$

真空中固定电荷的电场小结

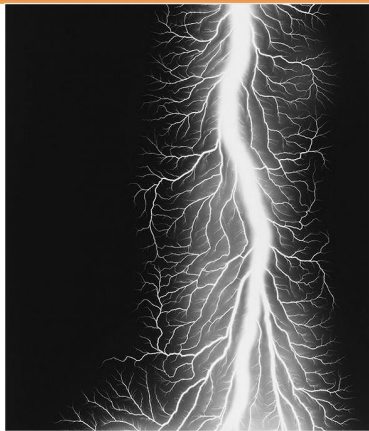
理论体系	物理量关系	总结图
<p>库仑定律: $\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$</p> <p>两个定理: $\begin{cases} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_e dV \\ \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$</p> <p>两个物理量 ($\vec{E}, U$);</p> <p>两个表述: 电力线与等势面。</p>	<p>1. $q \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$</p> <p>2. $q \Rightarrow U \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$ $\Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$</p> <p>3. $\vec{E} \Leftrightarrow U \Rightarrow \begin{cases} U = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \vec{E} = -\nabla U \end{cases}$</p>	 <p>力: $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$</p> <p>功: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$</p> <p>$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$</p> <p>$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$</p> <p>$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$</p> <p>$\vec{E} = -\nabla U$</p> <p>$\nabla^2 U = 0$</p> <p>矢量场 (E) 标量场 (U)</p> <p>图1-61: 总结图</p>

第一章 静电理论部分(II)

1-1 真空中固定电荷的电场

1-2 物质中的静电场

1-3 静电场的能量



引子



图 1-2-1: 城市

第一章 静电理论部分(II)



任务：物质中静电场的作用规律

引言

电性质 (\vec{D}, U)

静电平衡

高斯定理

环路定理

极化律

电容

电位移矢量

两者关系

电势

电容与电位移矢量的计算

电势的计算

本节知识单元与知识点小结

引言

- 物质存在形式:由基本粒子乃至原子、分子构成的实体存在形式;
以场的形式存在,如电场,具有能量,能量交换;
物质的实体与场是物质存在的两种基本形式。
- 物质(实体)的结构:是复杂的电荷系统,由原子/分子/离子构成。

➤ 电场与物质相互作用的过程:

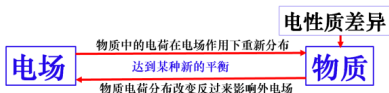
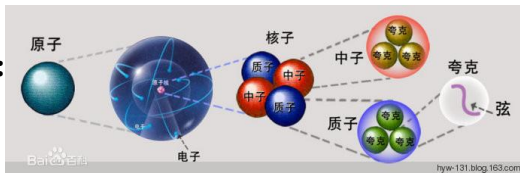


图1-2-3: 电场与物质相互作用的框图



思路:物质的电性质 \leftrightarrow 对电场影响 \rightarrow 解出场量。

1-2: 物质中的静电场

1-2-1 物质的电性质

1-2-2 静电场中导体

1-2-3 电容与电容器

1-2-4 静电场中电介质

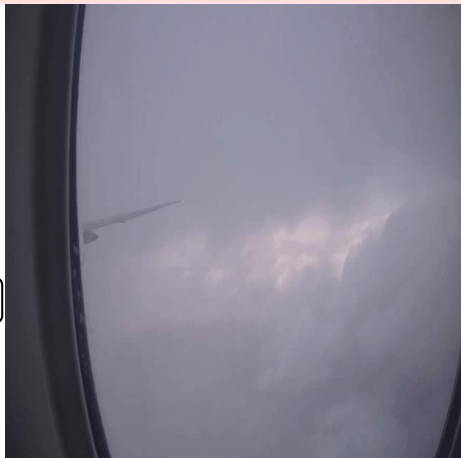
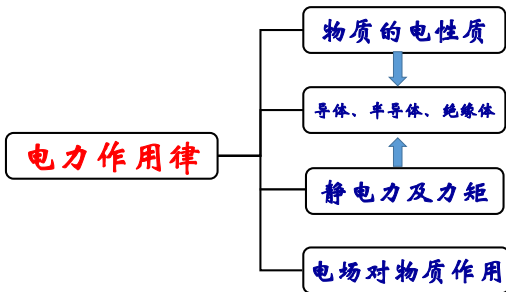
1-2-5 电介质中基本定理

1-2-6 边值关系和唯一性定理



图 1-2-4: Benjamin Franklin

1-2-1 物质的电性质



1、物质的电性质(回忆与讨论)

按照电荷在物质中移动的难易程度,将物质分为:

导体(conductor) **电阻率:** $10^{-8} - 10^{-6} \Omega \cdot m$

- 导电能力极强的物体;
- 常见的导体有金属、电解质水溶液、电离气体等;
- 导体中存在着大量的自由电子,数密度约为 $n_e \sim 10^{22} \text{cm}^{-3}$ 。

绝缘体(电介质, dielectric) **电阻率:** $10^6 - 10^{18} \Omega \cdot m$

- 导电能力极弱或不能导电的物体;
- 绝缘体有固态、液态和气态;如橡胶、陶瓷、塑料等。
固态绝缘体中又分为非晶态(如塑料)和晶态(如云母)两类。

半导体(semiconductor) 电阻率: $10^{-6} - 10^6 \Omega \cdot m$

➤ 导电能力介于导体和绝缘体之间; 自由电子 $n_e \sim 10^{16} \text{cm}^{-3}$;

如硅、锗、硒等, 半导体的电阻率随温度不同而明显变化。

超导体(superconductor)

➤ 某些物质当温度降低到某温度 T_c 时, 电阻率会几乎突然地消失。

该现象称为超导电性, 这类物质称为超导体, 温度 T_c 就叫做超导体的临界温度。

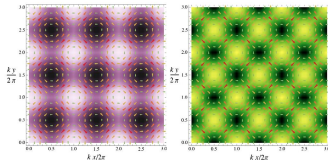
➤ 不同的超导体具有不同的临界温度。

➤ 迄今知道大约有20多种元素, 几百种合金和金属化合物是超导体, 它们的临界温度的范围从 $0.12\text{K} \sim 150\text{K}$ (如钇钡铜氧化合物)。

物质导电取决于有载流子!

载流子——可以自由移动的带电物质微粒。

- 金属导体:原子最外层的价电子,自由电子;
- 电解质:载流子是正、负离子;
- 电离气体:载流子是电子和正、负离子。
- **绝缘材料**:只有微量自由电子、本征离子、杂质离子
- 半导体:载流子为
 - n型**半导体中的自由电子;
 - p型**半导体中的空穴。
- 超导体:载流子为电子对,又称**库珀对**。



2、电场对物质(电荷系统)的作用

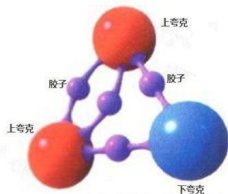
➤ 电场对物质作用 → 电场对物质内部电荷的作用

➤ 外场对物质作用力:

$$\vec{F} = q\vec{E} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F} = \iiint_{(V)} \rho_e \vec{E} dV \\ \vec{F} = \iint_{(S)} \sigma_e \vec{E} dS \\ \vec{F} = \int_{(L)} \lambda_e \vec{E} dl \end{cases}$$

几点注意:

- 电场 \vec{E} 为外场即施力带电体产生的电场,不应包括受力带电体的电场;
- 受力带电体已经不限于试探电荷,所以受力带电体对施力电荷的分布,即对施力带电体的电场存在影响;
- \vec{E} 是经过受力带电体影响之后的施力带电体的电场。



$$\vec{E} = \vec{E}_t - \vec{E}_1$$

➤ \vec{E}_t 施力和受力带电体的总电场;

➤ \vec{E}_1 为受力带电体产生的电场;

➤ \vec{E} 为施力带电体的电场即外场。

讨论:

➤ 实际问题中, \vec{E}_t 常易于求得, 只要求得 \vec{E}_1 , 可得 \vec{E} 。

对体电荷和面电荷受力带电体这两种情况, 只要从中分别减去体电荷元和面电荷元的贡献即可。

➤ 这样做的后果是将受力带电体各部分的内力也计入到总力 \vec{F} 之中。幸运的是, 由于内力相互抵消。

体电荷: $E_1 = \pm \frac{\rho_e r}{2\epsilon_0}, r \rightarrow 0, E_1 \rightarrow 0;$

面电荷: $E_1 = \pm \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0};$

线电荷: $E_1 = \pm \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0 r}, r \rightarrow 0, E_1 \rightarrow \infty。$

对受力带电体的情况: $\vec{E} = \vec{E}_t;$

受力带电面的: $\vec{E} = \vec{E}_t - \vec{E}_1;$

对线电荷: 不能利用 $\vec{E} = \vec{E}_t - \vec{E}_1。$

[例1-2-1] 将一带电量为 Q 、半径为 a 的切成两半,求两半球面间的静电力。

[解]由高斯定理求得球面两侧的总电场:

$$E_t = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}, (r = a + 0) \\ 0, (r = a - 0) \end{cases} \quad \text{式中: } \sigma_e = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

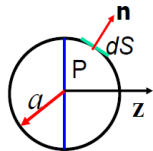


图1-2-4:均匀带电球面

由**受力作用面元**在自身两侧产生电场: $E_1 = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}, (r = a + 0) \\ -\frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}, (r = a - 0) \end{cases}$

电场径向分量: $E = E_t - E_1 = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}, (r = a)$

取**球坐标**,使 z 轴与切剖面垂直,则有: $\vec{E} = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \hat{r}$

得两半球面之间的**静电力**为:

$$\vec{F} = \iint_{(S)} \sigma_e \vec{E} dS = \iint_{(S)} \frac{\sigma_e^2}{2\epsilon_0} \hat{r} dS = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 a^2} \hat{r}$$

两半球间的静电力为排斥力。

[例1-2-2]如图1-2-5所示的电偶极子由一对相距为 l 的等量异号电荷 $\pm q$ 构成,两个电荷的位置分别为 \vec{r}_{\pm} ,相应电偶极矩为 \vec{p} 。求该电偶极子在外场 \vec{E} 中所受的力 \vec{F} 及所受的力矩 \vec{M} 。

[解]设在 \vec{r}_{+} 与 \vec{r}_{-} 处的外电场强度分别为 \vec{E}_1 和 \vec{E}_2 ,

$$\text{则有 } \vec{F} = q\vec{E}_2 - q\vec{E}_1 = q\vec{E}(\vec{r}_{+}) - q\vec{E}(\vec{r}_{-})$$

设 \vec{r} 为原点到电偶极子中点的矢径,且 $l \ll r$,

则由泰勒展开取头两项得

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} \left(\vec{r} + \frac{\vec{l}}{2} \right) - \vec{E} \left(\vec{r} - \frac{\vec{l}}{2} \right) \right] \approx q (\vec{l} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r})$$

在外电场中受的力矩 \vec{M} (以电偶极子中点为参考点):

$$\vec{M} = [(\vec{r}_{+} - \vec{r}) \times q\vec{E}_2 - (\vec{r}_{-} - \vec{r}) \times q\vec{E}_1]$$

$$\approx q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

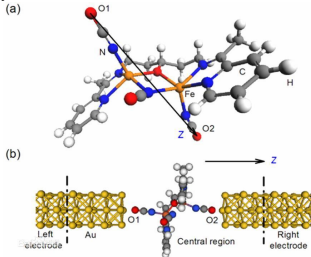
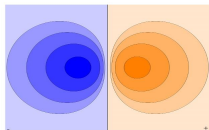
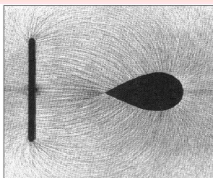


图1-2-5: 电偶极子



1-2-2 静电场中导体



静电平衡



静电平衡条件

静电平衡导体特性

静电现象及应用

静电导体的计算

§ 1-2-2 静电场中的导体

1. 导体达到静电平衡的条件

导体的**特点**:体内有自由的载流子; 静电场会**改变**导体内电荷分布

➡ 电荷分布的改变**将影响**电场的分布 ➡ **使得导体内电场强度**

处处为零, 则自由电荷不再运动 ➡ 导体达到静电平衡。

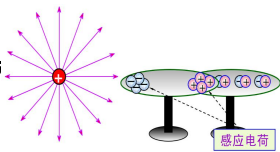
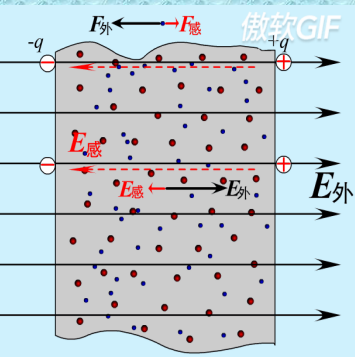


图1-2-6: 静电感应现象

图1-2-6:

- 这时导体内**自由电荷分布**及**导体内、外电场分布**不再随时间变化。
- 这个过程进行得很快, 大约在 $10^{-8} - 10^{-10}$ s就完成了。
- 对于**不存在非静电力**情况下的均匀、各向同性导体, 达到**静电平衡的条件**:**导体内部电场强度处处为0**。

导体的静电平衡条件



子不再移动

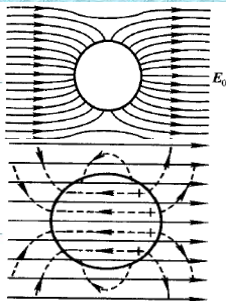


图1-2-6: 静电平衡

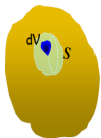
□ 静电平衡条件:

- ① 场强特点: $\vec{E}_{in} = 0, \vec{E}_{surface} \perp \text{surface}, \text{ or } \vec{E}_{surface} \parallel \vec{n}$; ② 电势特点: $U = \text{const}$ 。

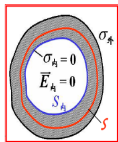
2. 处在静电平衡条件下导体的性质

用高斯定理可证明,静电平衡时

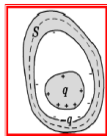
(1) 导体内无净电荷, 即 $\rho_e = 0$; 电荷只分布在导体表面。



(a) 实心



(b) 空腔



(c) 空腔含电荷

图1-2-7: 静电平衡中的导体

$$\text{由 } \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho_e dV = 0 \Rightarrow \rho_e = 0$$

(2) 孤立带电导体电荷的面密度与其曲率有关。

(3) 导体表面电荷的面密度与该处表面附近场强成正比: $\sigma_e = \epsilon_0 E$ 。

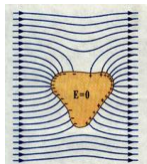


图1-2-8: 静电场中的导体

【证明】 设导体表面电荷面密度 σ_e ,如图1-2-9所示。

取一足够小闭合正柱面,两端面面积 ΔS ,并紧贴导体表面内外两侧,且与导体表面平行,参见图1-2-9。

由静电平衡条件:导体内场强为零,导体外表面附近的场强与导体表面垂直,所以有

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} E dS = E\Delta S$$

$$\text{由高斯定理} \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_e \Delta S$$

$$\text{比较两式得} E = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}$$

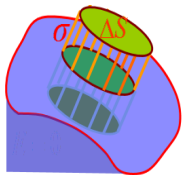


图1-2-9:导体面密度与场强

3. 静电现象及其应用

[1] 尖端放电

[2] 静电屏蔽

[3] 范德格拉夫起电机

[4] 静电加速器

[5] 法拉第圆筒

[6] 库仑定律的精确验证

注意:导体表面电荷的面密度不仅与该处曲率半径有关,还与周围的带电体有关,关系复杂。

[1]尖端放电(电晕现象):

- ①对于具有尖端的带电导体,在尖端处的场强特别强;
- ②空气中残留的离子在强电场作用下将剧烈运动,并获得足够大的动能与空气分子碰撞而产生大量的离子,使其电离;
- ③电离粒子与尖端上电荷中和即形成所谓尖端放电,同时形成可看得见光晕,称做**电晕**;尖端放电的典型应用就是**避雷针**。

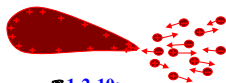
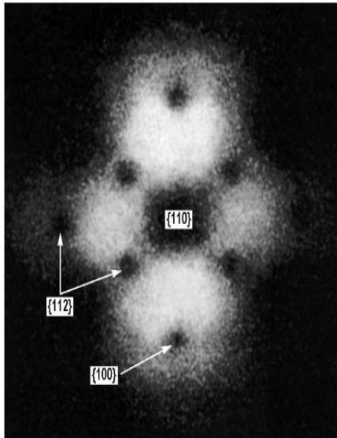


图 1-2-10:



导体尖端能产生强电场这一现象,在现代科学技术中有相当广泛的应用。

利用该原理制造的**场致发射显微镜**其放大率可高达**200**万倍,是分析金属微观结构的有效设备。



[2] 金属导体空腔和静电屏蔽

静电平衡时导体空腔电荷分布特点:

(1) 导体空腔无带电体的情况

腔内无带电体时, 导体的电荷只分布在它的外表面上; 空腔内处处场强为0, 空腔内的电势处处相等。

证明: ①若导体腔内无其它带电体

在导体腔内、外表面之间作一高斯面, 由高斯定理得内表面上

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = 0$$

②反证: 设内表面上有等量异号电荷 \Rightarrow 画一根电力线 \Rightarrow 电力线首尾处电势不等 (和导体等势相矛盾) \Rightarrow 内表面不可能有电荷。

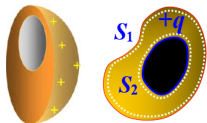


图1-2-13: 导体空腔

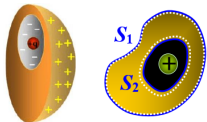
(2) 导体空腔有带电体的情况

腔内有其它带电体时, 导体空腔内表面所带电荷与腔内带电体电荷代数和为零。

空腔内各点场强分布由空腔内带电体电荷及空腔内表面电荷分布唯一地确定。

证明:(a)在导体空腔内、外表面之间作高斯面, 由高斯定理得

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = 0$$



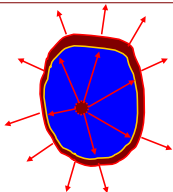
可见 S 面内总电量为零, 而空腔内有带电体 $+q$, 故内表面必定带电 $-q$ 。图1-2-14: 导体空腔电荷分布

(b) 由于静电平衡时, 导体内场强处处为零, 电场线不能穿越, 因此, 导体空腔将空间“分割”成了两部分。

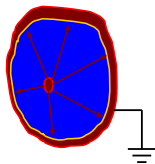
腔内场强分布由腔内带电体及内表面电荷的分布唯一地确定, 不受外部场强的影响, 起着静电屏蔽的作用。

讨论:

(a) 导体空腔虽然能使它包围的空间不受外部电荷产生的电场的影晌,但无法阻止空腔内部电荷对外部电场的影晌。

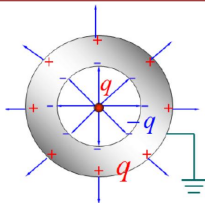


(a) 外壳不接地



(b) 外壳接地

图1-2-15: 导体空腔电荷分布



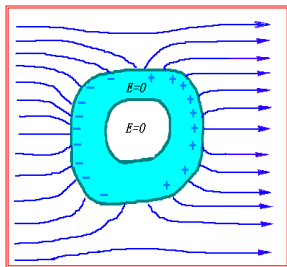
(b) 若将空腔导体接地,使外表面不再带电,外部便无电场,从而可保护腔外空间不受腔内带电体的影晌。

总之,接地的导体空腔可有效地消除内、外电荷产生的电场的相互影晌,实现静电屏蔽;

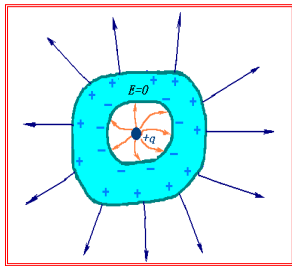
金属壳是极好的导体空腔。

[2] 静电屏蔽

① 腔外不影响腔内 ② 腔内却影响腔外



腔内无电荷



腔内有电荷

图1-2-16: 静电屏蔽-1

③ 空腔接地,腔内外互不影响



图1-2-17:静电屏蔽-2

[3] 范德格拉夫起电机

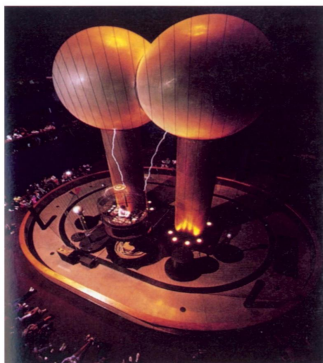


图1-2-18: 范德格拉夫起电机

[4] 静电加速器

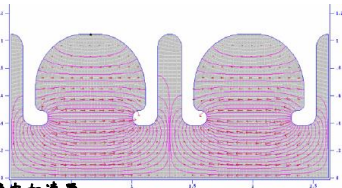
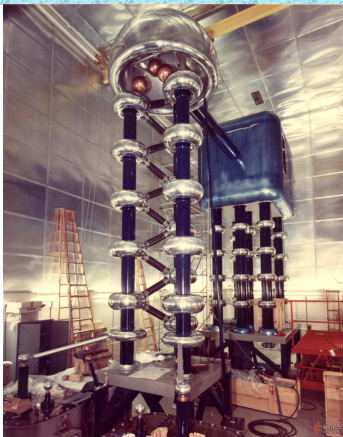


图1-2-19: 静电加速器

[5] 法拉第圆筒

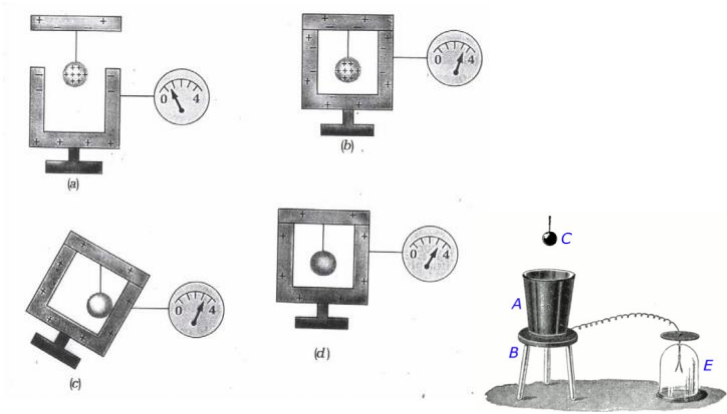


图1-2-20: 法拉第冰筒实验

[6] 高斯定理和库仑定律的精确验证

- ① 导体内球固定在绝缘支柱上, 导体外球壳为两个半球壳拼接而成。
- ② 实验时, 先使内球带电, 然后用导线将内球与外球壳连接, 使球壳带电, 再抽走导线。
- ③ 在上述操作之后, 将两半球壳打开, 用精确的验电器检测内球上的电量。

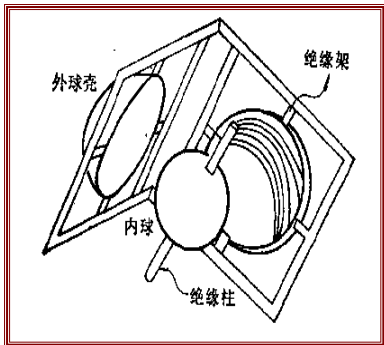


图1-2-21: 卡文迪许的实验装置

库仑定律验证源于Cavendish-Maxwell多年的工作, Cavendish(1731-1810)设想:库仑力 $F \propto r^{-2 \pm \delta} \propto r^{-n}$, 若 $\delta \neq 0$, 则如图1-2-22所示均匀带电导体球壳内表面将带电。

找出此函数关系(理论), 比较 $Q_{\text{内}}$ 与 $Q_{\text{总}}$ (实验), 便可确定 δ 的下限。

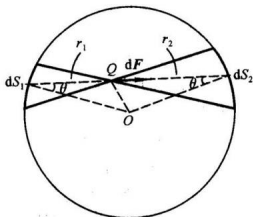


图1-2-22:Cavendish的均匀带电导体球壳

首先,若 $\delta \neq 0$,则均匀带电球面对内部任意点电荷作用力不为零。球面电荷密度 σ 。

位于球内任意电荷 Q 受电荷元 σdS_1 和 σdS_2 的共同作用。

$$\begin{aligned} dF &\propto \frac{\sigma dS_1 Q}{r_1^n} - \frac{\sigma dS_2 Q}{r_2^n} \\ \therefore d\Omega &= \frac{dS_1 \cos\theta}{r_1^2} = \frac{dS_2 \cos\theta}{r_2^2} \\ \therefore dF &\propto \frac{\sigma Q d\Omega}{\cos\theta} \left(\frac{1}{r_1^{n-2}} - \frac{1}{r_2^{n-2}} \right) \Rightarrow n=2 \Rightarrow dF=0 \end{aligned}$$

结论:若 $\delta \neq 0$,均匀带电球壳在球内各处场强不严格为 0 (球心除外)。

推论:若 $\delta \neq 0$ 时,带电导体球壳内表面应带电。

$\delta \neq 0$ 时,若内表面无电荷分布(只分布在外表面),使导体中自由电子因受力或趋向球心运动,或背离球心而移动,最终使电荷分布满足导体内场强处处为零的条件——内表面有电荷分布。

➤1773年：“我取一个直径为12.1英寸的球，用一根实心的玻璃棒穿过中心当作轴，并覆盖以封蜡。

.....然后把这个球封在两个中空的半球中间，半球直径为13.3英寸，1/20英寸厚。

.....然后，我用一根导线将莱顿瓶的正极接到半球，使半球带电。”

➤如图1-2-23所示用一根导线将内外球联在一起，外球壳带电后，取走导线，打开外球壳，用木髓球验电器试验内球。

➤木髓球验电器没有指示，证明内球没带电指数 $\delta \leq 0.02$ 。

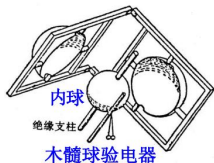


图1-2-23:木髓球验电器

- **Cavendish**同心球实验结果和他自己的许多看法没有公开发表。
- 19世纪中叶,开尔文发现**Cavendish**的手稿中有圆盘和同半径的圆球所带电荷的正确比值,才注意到这些手稿的价值,经他催促,才于**1879**年由**Maxwell**整理发表。
- 他的许多重要发现埋藏了一百年之久。
- **Maxwell**说:“这些关于数学和电学实验的手稿近20捆,其中物体上电荷(分布)的实验,**Cavendish**早就写好了详细的叙述,并且费了很大气力书写得十分工整(就象要拿出去发表的样子),而且所有这些工作在**1774**年以前就已完成,但**Cavendish**(并不急于发表)仍是兢兢业业地继续做电学实验,直到**1810**年去世时,手稿仍在他身边。”

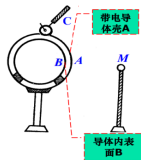


图1-2-24:改进Cavendish实验

看看Maxwell这个大理论家是如何做实验的:

➤ 改进Cavendish实验:如图1-2-24所示导体球壳A、B之间用绝缘的硬橡胶环固定;

A球固定在绝缘支架上;

利用C,使之可相连或分开;

M用来估计外壳上的原始电荷。

➤ 推论:若 $\delta \neq 0$,带电导体球壳内表面应带电。

➤ 与 $\delta \neq 0$ 对应,下述实验完成后,应有:球壳内电荷 Q'_A ,球壳B内电势 V'_B ;

$$Q'_A(Q_{总}, \delta, a, b) \neq 0; V'_B(V, \delta, a, b) \neq 0。$$

a为A球壳半径,b为B球壳半径,V为两球壳初始电势。

➤ 实验步骤:

(1)合C,A与B相连,充电 $V_A = V_B = V$;

(2)撤C,A与B分开,A接地放电,留原处, $V'_A = 0$ 。

如果 $\delta = 0$,B之电荷一定全跑到A上,因此应有 $V'_B = 0$;

(3)如果 $\delta \neq 0$,则一般 $Q_B \neq 0$,感应导致 $Q'_A \neq 0, V'_B \neq 0$

只要求出 $V'_B(V, \delta, a, b) \neq 0$,即可证明 $\delta \neq 0$,并求出 δ 的最大值。

➤ 任何时刻,球壳内外表面的电荷分布均匀,可得半径R的球壳产生的电势分布(空间任意一点P,球坐标)。

静电导体的计算

【例1-2-3】无限大带电平面场中平行放置一无限大金属平板。求：金属板两面电荷面密度？

解：设带电平面面电荷密度 σ_0 ，导体感应两面电荷面密度 σ_1 和 σ_2 （均设为正）

$$\text{电荷守恒: } \sigma_1 + \sigma_2 = 0 \quad (1)$$

导体内场强为零(三层电荷产生)

$$E_0 + E_1 - E_2 = 0$$

$$\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (2)$$

联立(1)和(2)可得：

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\frac{\sigma_0}{2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2} \end{cases}$$

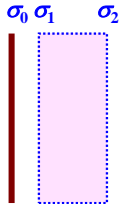


图1-2-25: 例题1-2-3示意图

例题1-2-4: 导体球A(带电 q)与导体球壳B(带电 Q)同心放置。求: 1) 各表面电荷分布; 2) A的电势 U_A , B的电势 U_B ; 3) 将B接地, 各表面电荷分布; 4) 将B的地线拆掉, 再将A接地, 此时各表面电荷分布。

【解】 1) 导体球A的电荷 q 只分布在A的表面, 导体球壳B有两个表面, 在两表面上电荷均匀分布。

在两表面间作一高斯面可知

$$Q_{B(\text{in})} = -q$$

由电荷守恒: $Q_{B(\text{ex})} = Q + q$

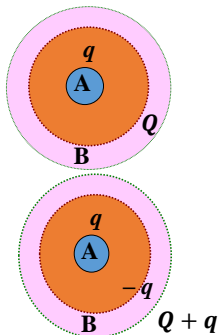


图1-2-26: 例题1-2-4示意图

2) A 的电势 U_A

方法一:场强积分

$$\begin{aligned}U_A &= \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} E_1 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_2 dr + \int_{R_3}^{\infty} E_3 dr \\&= \int_{R_1}^{R_2} \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \int_{R_2}^{\infty} \frac{(Q+q) dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}\end{aligned}$$

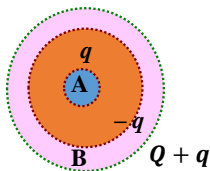


图1-2-26:例题1-2-4示意图

方法二:电势叠加法,导体组可看成三层均匀带电球面

$$U_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

B 的电势 U_B :

方法一:场强积分

$$U_B = \int_B^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_3} E_2 dr + \int_{R_3}^{\infty} E_3 dr$$

$$= \int_{R_3}^{\infty} \frac{(Q+q)dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

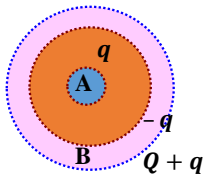


图 1-2-26: 例题 1-2-4 示意图

方法二:电势叠加法

$$U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

3) 将B接地, A分布 q , B内表面分布 $-q$, 外表面为0;

4) 将B地线拆掉后, 将A接地, 此时A上电荷为 q' , B内表面 $-q'$, 外表面为 $-q + q'$ 。

根据电势叠加:

$$U_A = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q' - q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

$$\text{得: } q' = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3} q$$

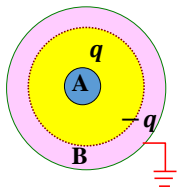


图1-2-26: 例题1-2-4示意图

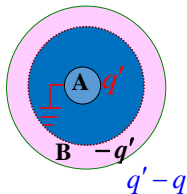


图1-2-26: 例题1-2-4示意图

例题1-2-5:一个金属球内有两个球形空腔,两空腔中心相距为 a ,它们的连线通过球心;在两腔中心各有一个点电荷,电量分别为 q_1, q_2 。球外有一电荷量为 q 的点电荷,处在 q_2 到 q_1 的延长线上,到 q_1 的距离为 b 。已知金属球上所有电荷量的代数和为零。

试求金属球上的电荷作用在 q_2 的力。

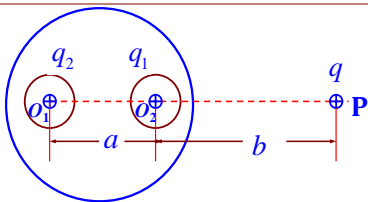


图1-2-27:例题1-2-5示意图

【解】 金属球上的电荷包括金属球外表面上的电荷和两腔内表面上的电荷。

根据对称性和高斯定理,两腔内表面上电荷量分别为 $-q_1$ 和 $-q_2$,它们都均匀分布在各自内腔表面上。

$$\text{故 } -q_1 \text{ 作用在 } q_2 \text{ 上力为: } \vec{F}_{21} = \frac{q_2(-q_1)}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_{12} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_{12}$$

式中 \vec{e}_{12} 是从 q_1 指向 q_2 的单位矢量。

$-q_2$ 由于是均匀分布在球面上,故它作用在 q_2 的力为0,即

$$\vec{F}_{22} = 0$$

由于金属球上所有电荷量的代数和为0,故在它的外表面的电荷量为 $q_1 + q_2 + q'$,其中 q_1 和 q_2 都均匀分布在外表面上,故作用在 q_2 上的力都为0。

q' 是 q 所引起的感应电荷, q' 和 q 在导体内产生的场强互相抵消, 处处为零, 故 q' 作用在 q_2 上的力便等于 q 作用在 q_2 上的力的负值, 即

$$\vec{F}'_2 = -\frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0(a+b)^2} \vec{e}_{12}$$

于是得出, 金属球上的电荷作用在 q_2 上的力为:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}'_2 = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{a^2} + \frac{q}{(a+b)^2} \right] \vec{e}_{12}$$

§ 1-2-3 电容与电容器



触摸静电实验装置的物质反应

导体电容



雷电灼伤的痕迹

孤立导体电容

电容器及其电容

电容的计算

电容器串并联

电容器的储能

一、孤立导体的电容(Capacity)

➤孤立导体:空间只有一个导体,在其附近没有其它导体和带电体。

电容定义:

➤一个带有电荷为 Q 的孤立导体,其电势为 U (无穷

远处为电势零点)则有: $C = \frac{Q}{U}$

物理意义:

➤电容表征使导体每升高单位电势所需的电量,是描述导体或导体系容纳电荷的性能的物理量;

➤ C 由导体的形状、大小及周围的环境决定(介质);

➤ C 的值与导体所带电量多少和电势 U 的大小无关。



图1-2-28:孤立导体的示意图

【例 1-2-6】 求孤立导体球的电容, 设半径为 R 。

【解】 : 令导体球带电 Q , 则其电势

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

按定义得: $C = 4\pi\epsilon_0 R$

【讨论】 :

- ①大球的电容值大;
- ②导体的电势, 与周围的电荷、导体及介质有关, 上述电容的定义不适用于非孤立导体;
- ③例如: 用孤立导体球要得到 1F 的电容, 球半径为多大?

$$R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 (\text{m}) \approx 10^3 R_e$$

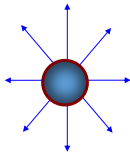


图1-2-29: 孤立导体

二. 电容器及其电容

孤立导体的电势不仅与导体本身所带电量有关,还与周围存在的介质、电荷及导体有关。

为避免外界影响,可加屏蔽罩,如图1-2-30所示。

- ① A导体带电与否只影响罩内电场;
- ② A导体的电势等于AB间的电势差。

【定义】电容器的电容 $C = \frac{Q}{\Delta U}$

【注】:

- ① C 是电容器的电容值, A、B 为电容器的两极板;
- ② Q 为电容器任一极板带电量的绝对值;
- ③ ΔU 为两极间电势差的绝对值。

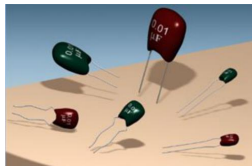
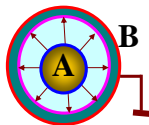


图1-2-30:屏蔽的导体



图1-2-31: 常见的电容器

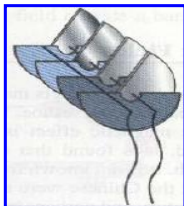
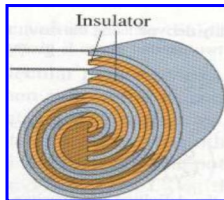


图1-2-32: 常见的电容器



结论:

❖ 电容器大小只决定于电容器极板的形状、大小、相对位置以及板间电介质的性质,而与电容器所带电量和两板间电压无关。

❖ 三、电容的计算:

- 1) 设电容器两个极板带有等量异号电荷;
- 2) 求出极板间的电场强度分布;
- 3) 计算两板间的电势差;
- 4) 由电容器电容的定义式求电容。

【例 1-2-7】如图1-2-33所示设两极板面积 S 两极间距 d , 计算平板电容器电容。

【解】令两极板分别带电量 $\pm Q$, 则

$$\text{极间电场强度 } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

$$\text{两极间电势差 } \Delta U = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

$$\text{电容器的电容 } C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

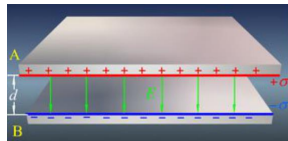
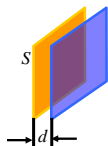


图1-2-33: 平板电容

【讨论】：

- ① $C \propto S$, S 为有效面积, 即两极板相对之面积;
- ② $C \propto 1/d$, 对其它形状电容器也适用;
- ③ $C \propto \epsilon_0$, 与极间介质有关。

【例1-2-8】如图1-2-34所示设电容器两极板半径 $R_1 < R_2$ ，极间介质为真空，计算球形电容器的电容。

【解】给电容器充电 Q ，则场强 $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, r \in [R_1, R_2]$

$$\text{电势差 } U_A = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

$$\text{电容 } C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

【讨论】：

①当 $R_1, R_2 \gg R_2 - R_1$ 时,可令 $R_2 - R_1 = d, R_2 R_1 = R^2$,

则 $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$,同孤立导体球的电容。

②当 $R_2 \gg R_1$ 时, $C = 4\pi\epsilon_0 R_1$ 。

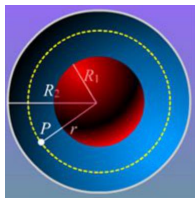
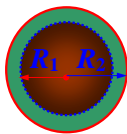


图1-2-34:球形电容

【例 1-2-9】 如图1-2-35所示设电容器两极板半径 $R_1 < R_2$, 长 L , 极间介质为真空, 计算圆柱形电容器的电容。

【解】 : 给电容器充电 Q , 则电荷线密度 $\lambda = Q/L$

$$\text{场强 } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad r \in [R_1, R_2]$$

$$\text{电势差 } \Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{电容 } C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

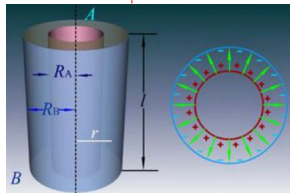
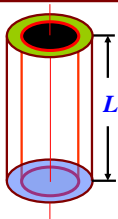


图1-2-35: 圆柱形电容

小结

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

计算电容的一般方法:

- 先假设电容器的两极板带等量异号电荷;
- 关键是求出极板之间的电场强度 E ;
- 由 E 再求出极板之间的电势差 U ;
- 代入定义式 $C = Q/U$ 求出电容。

四、电容器的串、并联

1. 电容器串联(相当 d 增大, Q 相同) $\Delta U \propto \frac{1}{C}$

由 $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \dots + \Delta U_n$ 则 $\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$

$$\text{得 } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

2. 电容器并联(相当 S 增大, U 相同) $Q \propto C$

由 $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ 则 $\frac{Q}{\Delta U} = \frac{Q_1}{\Delta U} + \frac{Q_2}{\Delta U} + \dots + \frac{Q_n}{\Delta U}$

$$\text{得 } C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

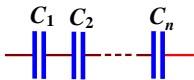


图1-2-36: 电容器串联

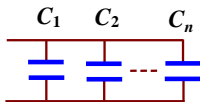


图1-2-37: 电容器并联

五、电容器储能

无限大平行平板电容器充电过程中,外力做功,即**电源做功**。如图1-2-38所示,设充电过程中任一时刻极间电势差 ΔU ,外力运送 dq 电荷作元功, $\Delta U dq = \frac{q}{C} dq$,则

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow W_{\text{储能}}$$

电荷是电能的荷负者

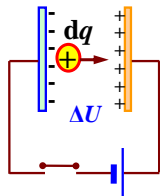


图1-2-38: 电容器充电

再由 $Q = C\Delta U$, $\Delta U = Ed$, $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

电场是电能的荷负者

可得 $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot Sd$

静电能存在于电场不为零的空间

能量密度 $\omega = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, 则能量 $W = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$ **普遍**

§ 1-2-4 电介质

极化规律

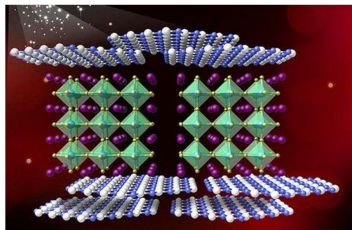
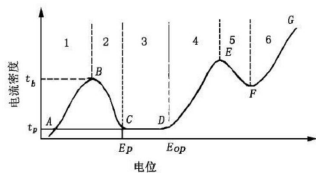
极化现象

微观机制

定量描绘

极化规律

介质中静电场



一、极化现象

电介质 (Dielectric) 是电的绝缘体, 内部没有自由电荷, 不能导电;

由大量电中性的分子组成, 分子中电子被原子核束缚得很紧;

紧束缚的正、负电荷在外场中是否发生变化?

由实验来回答!

电场 \longleftrightarrow 电介质
相互作用?

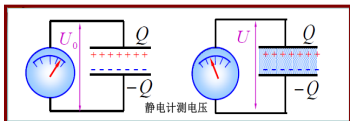


图 1-2-39: 法拉第实验

如图 1-2-39 所示电容两板连静电计

- 静电计指针显示两板间电势差;
- 保持一切条件不变, 插入电介质;
- 静电计指示两板板间电势差减小。

? 物理原因

$$U_0 > U$$

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

E' 标志电介质的影响, 它与外场 E_0 方向相反。

$$\vec{E}_0 > \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$\because \vec{E} \neq 0,$$

$$\therefore E' \neq E_0.$$

? 介质极化

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

介质极化后的附加电场即退极化场

真空中的电场, 即无介质时的电场

介质中的总电场

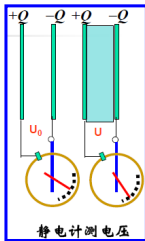
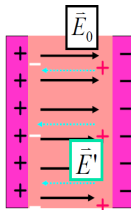


图 1-2-40: 静电计



① \vec{E}' 不能全部抵消 \vec{E}_0 (与金属导体不同);

② 极化电荷 σ' 或 ρ' —— 束缚电荷。

二、介质的微观结构(模型方法)

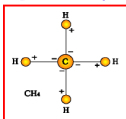
重心模型:在分子中,所有正电荷和所有负电荷分别集中于两个几何点上,称为正、负电荷的重心。电荷分布及其重心都是对“时间”的一种平均。

分类:如图1-2-41所示电介质分子可分为有极和无极两类;

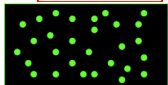
无极分子:分子电荷的正、负“重心”重合,在无外场作用下整个分子无固有电偶极矩,如:He,Ne,O₂,N₂,CH₄;

有极分子:分子电荷的正、负“重心”分开,在无外场作用下整个分子有固有电偶极矩,如:H₂O,HCl,NH₃,CH₃OH(甲醇)。

无极分子



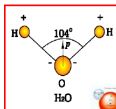
无序排列对
外不显电性



$$\vec{p} = q\vec{L}$$

电子云的
正电中心

有极分子



整体对外
不显电性



图1-2-41:两类分子

三、极化微观模型

1、无极分子:在进入外电场前,正、负电荷重心重合,无电偶极矩。

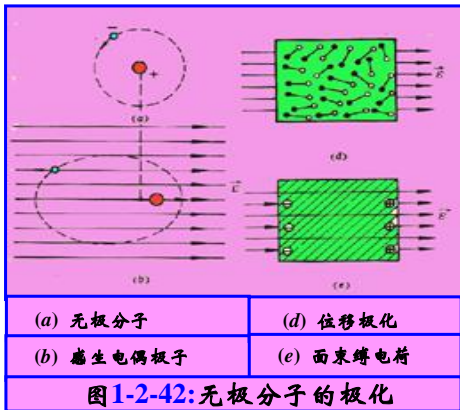
$$\vec{p}_{\text{分子}} = 0$$

$$\sum \vec{p}_{\text{分子}} = 0$$

如图1-2-42所示进入外场后,在电场的作用下,正、负电荷的中心发生位移,不再重合,形成电偶极子,表面出现束缚电荷: $\vec{p}_{\text{分子}} \neq 0$

□ 这种极化是电荷中心相对位移的结果,称为位移极化。

□ $\sum \vec{p}_{\text{分子}} \neq 0$



2、有极分子的极化

□ 进入外场前 有极分子就相当于一个电偶极子,只是由于热运动而排列**无序**。

$$\square \bar{p}_{\text{分子}} \neq 0$$

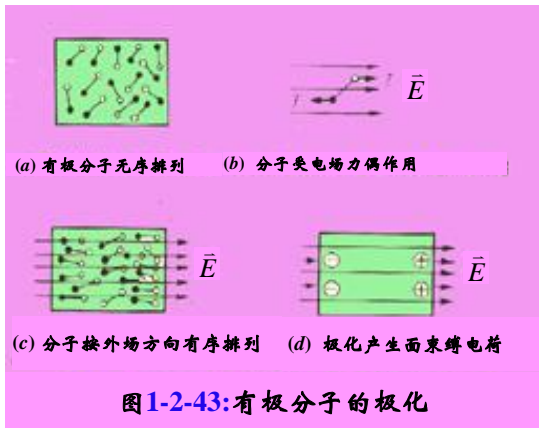
$$\sum \bar{p}_{\text{分子}} = 0$$

如图1-2-43所示进入外场后,分子受到力矩的作用而发生偏转,电偶极矩转向外场方向:

$$\bar{p}_{\text{分子}} \neq 0$$

$$\sum \bar{p}_{\text{分子}} \neq 0$$

这种极化称为**取向极化**



几点说明：

- (1) 在外电场中均匀介质内部各处仍呈电中性,只在介质表面出现极化电荷。
- (2) 极化电荷不能离开电介质到其它带电体,也不能在电介质内部自由移动,它不象导体中的自由电荷能用传导方法将其引走,是一种束缚电荷。
- (3) 介质极化:无电荷宏观移动,只有微观迁移,对应束缚电荷的变化;
 - 静电感应:有自由电荷的宏观移动,出现感应电荷。
- (4) 无外场下,所具有的电偶极矩称为固有电偶极矩;
 - 有外电场时,产生的电偶极矩称感应电偶极矩(约是前者的 10^{-5})
- (5) 无极分子只有位移极化,感生电矩的方向沿外场方向;
 - 有极分子有上述两种极化机制,取向极化远强于位移极化(约一个量级)。
- (6) 极化电荷的电场使介质中实际电场减弱。

有极、无极分子极化,微观机理不同,但宏观结果相同,效应相同。

各向同性均匀介质的极化,在沿电场方向两端产生面束缚电荷。

否则,除产生面束缚电荷外,还可产生体束缚电荷。

电介质与导体的区别

	电介质	导体
导电性	不导电	导电
静电场中	电子和原子核在电场力作用下在原子范围内作微观相对位移	自由电子在电场力作用下脱离所属原子作宏观移动
静电平衡时	内部场强 $E \neq 0$	内部场强 $E = 0$

四、定量描绘——极化强度矢量

(一) 电极化强度矢量: 表征介质被极化程度的物理量。

物理意义: 反映分子电矩的大小和空间有序化程度。

1、定义: 在介质中取一小体积 ΔV , 设分子电矩 \vec{p}

极化强度矢量($C m^{-2}$):

单位体积电介质内分子电矩的矢量和。

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V}$$

微观量

介质中一点的P(宏观量)

介质的体积元, 宏观小 微观大(包含大量分子)

(1) 极化强度是一个宏观矢量的点函数, 其微观值无意义。

(2) 电介质中每点有唯一的极化强度。

若各处 \vec{P} 值相同, 则称均匀极化。

(3) \vec{P} 反映分子电矩 p 分子的大小和空间有序化程度。

极化电荷 $q'(\sigma', \rho')$

- 从原来处处电中性变成出现了宏观的极化电荷;
- 可能出现在介质表面(均匀介质),面分布;
- 可能出现在整个介质中(非均匀介质),体分布;

退极化场 \vec{E}'

- 极化电荷会产生电场——附加场(退极化场);
- 极化过程中:极化电荷与外场相互影响、相互制约,过程复杂——达到平衡(不讨论过程);
- 平衡时总场决定了介质的极化程度。 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

极化的后果 $\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \\ q'(\sigma', \rho') \text{ , 描绘极化。} \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \end{array} \right.$

- 三者从不同角度定量地描绘同一物理现象——介质极化;
- 它们间必有联系,这些关系——电介质极化遵循的规律。

(二) P 与极化电荷的关系

(1) P 与 ρ'_e 关系: 以位移极化为模型讨论如图 1-2-43 所示

$$\vec{p} = q\vec{L} \longrightarrow \vec{P} = nq\vec{L}$$

- 在介质中取一长 L 、底面积 dS 斜柱体元;
- 其中 L 是平均分子正、负电荷中心距;
- 设 P 矢量穿过 dS , 每个分子对 dV 内电量贡献 $-q$;
- dV 内电量可记为 dq' , 分子数密度 n :

$$dq' = -nq dV = -nq(LdS \cos\theta) = -nq\vec{L} \cdot d\vec{S} = -\vec{P} \cdot d\vec{S}$$

又 $dq' = \rho'_e dV$, 两右边相等,

$$\text{故} \oint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \iiint_{(V)} \rho'_e dV \longrightarrow -\rho'_e = \nabla \cdot \vec{P}$$

- 均匀介质, 均匀极化: \vec{P} 是常矢量, $\rho'_e = 0$;
- 非均匀介质, 非均匀极化: \vec{P} 是空间位置矢量, $\rho'_e \neq 0$ 。

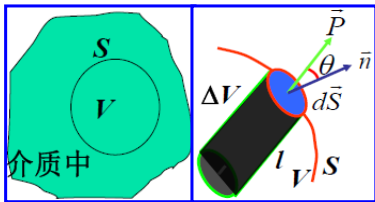


图 1-2-44: 极化体电荷

(2) \vec{P} 与 σ'_e 的关系 $\sigma'_e = \frac{dq'}{dS} = \vec{P} \cdot \vec{n}$

如图1-2-45所示在介质分界面取一面元 ΔS ;
过 ΔS 作扁盒型高斯面, $h \rightarrow 0$;

$$\therefore Q' = - \oiint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \sigma'_e dS = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{S} \quad \therefore \sigma'_e = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}$$

电介质2为真空时

$$\therefore \sigma'_e = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (\vec{P}_1 = \vec{P}, \vec{P}_2 = 0)$$

$$\theta < 90^\circ, \sigma'_e = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n > 0$$

$$\theta > 90^\circ, \sigma'_e = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n < 0$$

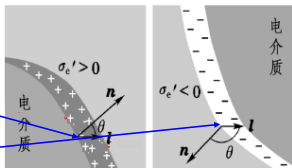
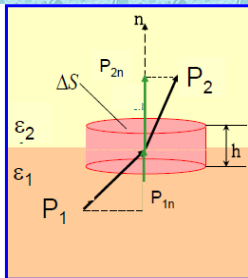


图1-2-45: 极化面电荷

【例1-2-10】如图1-2-48所示半径 R 的介质球被均匀极化,极化强度为 \vec{P} ,求:

(1) 介质球表面电荷的分布; (2) 极化电荷在球心处的场强?

解: (1) 球面上任一点 $\sigma'_e = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta$

由此可知,右半球面上 $\sigma'_e > 0$;

左半球面上 $\sigma'_e < 0$;

$\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sigma'_e = 0$;

$\theta = 0, \pi$, $\sigma'_e \rightarrow \text{Max}$ 。

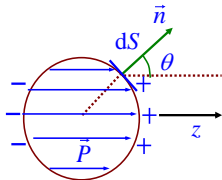


图1-2-48:极化球面电荷

(2)如图1-2-49所示在球面上取环带,则

$$dq' = \sigma'_e 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$= P 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta$$

在球心处的场

$$dE'_o = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \sin\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$E'_o = \int dE'_o = \int_0^\pi \frac{P}{2\epsilon_0} \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

沿z轴负方向

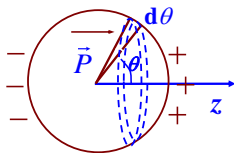


图1-2-49:极化球面电荷

退极化场 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

$$\vec{E}_0 \longrightarrow \text{介质极化} \longrightarrow q'(\sigma'_e) \longrightarrow \vec{E}'$$

影响

电介质内部： \vec{E}' 是由极化电荷产生的附加场，与外场 \vec{E}_0 方向相反，起着**减弱**极化的作用，称作**退极化场**如图1-2-50所示；

电介质外部：如图1-2-50附加场大部分与外电场方向相同，**加强**。

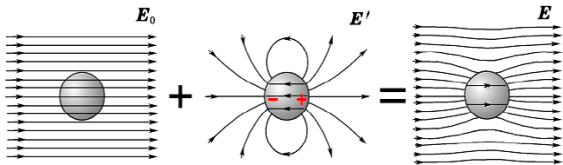


图1-2-50:退极化场

(三) \vec{P} 与 \vec{E} 的关系(极化规律)

极化规律: $\vec{P} \propto \vec{E}$, (实验研究)

- 电介质内任一点 \vec{P} 是由在该点的总电场 \vec{E} 决定的;
- 不同的电介质极化规律不同,可由实验来测定。

? 分类:根据介质极化规律的不同,可将介质分为——

- ① 均匀线性各向同性电介质;
- ② 非均匀非线性各向异性电介质;
- ③ 铁电体:极化状态不仅决定于电场,还与极化历史有关;
- ④ 永电体(驻极体):一种具有持久性极化的固体电介质。

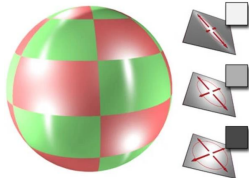
(1) 各向同性电介质

- \vec{P} 和 \vec{E} 方向相同,且有简单的正比关系:
$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E}, \text{电极化率 } \chi_e \geq 0$$
- 当场强不是很大时, χ_e 与 \vec{E} 无关,为线性介质;
- 当场强很大时, χ_e 与 \vec{E} 有关,为非线性介质。

(2) 各向异性电介质

- \vec{P} 与 \vec{E} 不平行, 关系复杂;
- χ_e 常表示为张量形式, 称做极化率张量;
- 对线性介质, 极化率张量与 \vec{E} 无关, 且为对称张量;

$$\begin{cases} P_x = (\chi_e)_{xx}\epsilon_0 E_x + (\chi_e)_{xy}\epsilon_0 E_y + (\chi_e)_{xz}\epsilon_0 E_z \\ P_y = (\chi_e)_{yx}\epsilon_0 E_x + (\chi_e)_{yy}\epsilon_0 E_y + (\chi_e)_{yz}\epsilon_0 E_z \\ P_z = (\chi_e)_{zx}\epsilon_0 E_x + (\chi_e)_{zy}\epsilon_0 E_y + (\chi_e)_{zz}\epsilon_0 E_z \end{cases}$$



对称张量, 即 $(\chi_e)_{xy} = (\chi_e)_{yx}$, $(\chi_e)_{xz} = (\chi_e)_{zx}$, $(\chi_e)_{yz} = (\chi_e)_{zy}$ 。

(3) 铁电体

在一个小区域内,各晶胞自发极化方向都相同,这个小区域称为**铁电畴**如图1-2-51所示,极化状态不仅决定于电场,还与极化历史有关;



图1-2-51: 铁电畴

[1] 铁电性就是指具有**自发极化**现象,并且随着外加电场的改变,极化方向反转的性质,出现如图1-2-52所示**电滞回线**,有**剩余极化强度**;

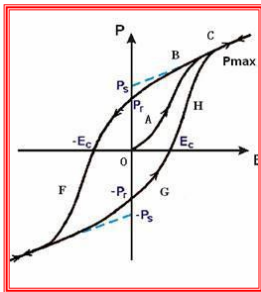
[2] 人工极化:铁电畴在外电场作用下“转向”,使得铁电材料具有宏观极化强度即材料具有“极性”。

剩余极化:当外加电场撤去后,有小部分电畴偏离极化方向,恢复原位,大部分电畴则停留在新转向的极化方向上,使材料仍具有宏观剩余极化强度。

\bar{P} 和电场强度 \bar{E} 有复杂的**非线性**关系, χ_e 不是常量,它随 \bar{E} 变,最大可达几千;

由于极化非线性,铁电体介电常数不是常数,一般以 $\bar{P}-\bar{E}$ 曲线在原点O的斜率来代表介电常数。

在测量介电常数时,所加外电场(测试电场)应很小。



C: 饱和点; P_r : 剩余极化强度

图1-2-52: 电滞回线

还有一类物体在转变温度以下,邻近的晶胞彼此沿反平行方向自发极化,这类晶体叫反铁电体。例如钙钛矿型的 PbZrO_3 、 PbHfO_3 、 $\text{Pb}(\text{Mg}, \text{W})\text{O}_3$ 等,因此,从宏观上总自发极化强度为零,也无电滞回线。

这类晶体随温度发生相变,高温时往往是顺电相(电畴无序排列),在相变温度(反铁电居里温度)以下变成对称性较低的反铁电相。

[3] 居里点:通常铁电体的自发极化只在一定温度范围内呈现,当温度高于某一临界温度 T_C ,自发极化消失,称这一过程为铁电相到顺电相的转变,一般伴随结构相变。

➤ 居里温度附近具有最大介电常数,这对制造小体积大容量的电容器具有重要意义。

可利用固溶体的方法来达到改变铁电体介电性使居里点符合使用条件:

➤ BaTiO_3 加入低 T_C 的 SrTiO_3 , 使 T_C 向低温侧移, 加入高 T_C 的 PbTiO_3 , 则 T_C 向高温侧移。

这些能使居里温度改变的添加剂叫**移峰剂**。

➤ 为了克服居里点处介电常数随温度变化太快,也可加入使峰值展宽的所谓展宽剂或压峰剂,如在 BaTiO_3 中加入 $\text{Bi}_{2/3}\text{SnO}_3$ 使峰值展宽,致使居里点几乎消失,显示出直线型的温度特性,而介电常数 ϵ_r 仍能保持近2000。

[4] 2018年7月13日,东南大学课题组在“分子铁电材料”领域再次取得重要研究进展,他们首次发现无金属钙钛矿型铁电体,为钙钛矿这一重要的材料家族增添了新的成员,相关研究结果于13日在《科学》杂志在线发表。

(4) 压电体

1880年法国物理学家皮埃尔和雅各居里兄弟实验中发现:当某些晶体受到机械力而发生拉伸或压缩时,晶体相对的两个表面会出现等量的异号电荷。称该现象为压电现象。

具有压电现象的介质,称之为压电体,进一步研究发现,压电体有正压电和逆压电效应。

正压电效应:有些固体介质如石英(SiO_2)、电气石、酒石酸钾钠($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$)、钛酸钡(BaTiO_3)等,机械形变出现电荷。

逆压电效应:当压电体上加电场时,压电体会发生机械形变(电致伸缩效应、场致应变)。

如果压电体上加交变电场,则压电体就会交替出现伸长和压缩,即发生机械振动。

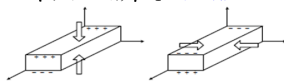
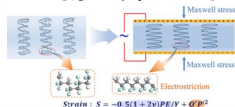


图1-2-53:压电效应



压电效应的解释:如图1-2-53所示在离子性的晶体中,正、负离子有规则地交错配置,构成结晶点阵。这样就形成了固有电矩,在晶体表面出现了极化电荷,又由于晶体暴露在空气中,经过一段时间,这些电荷便被降落到晶面上、空气中的异号离子所中和,因此极化面电荷和电矩都不会显现。但当晶体发生机械形变时,晶格就会发生变化。这样,电矩产生变化,表面极化电荷数值也发生改变。于是,面上正电荷或负电荷都有了可测出的增量(增加或减少),这种增量就是压电效应的电量。

(5) 永电体 (驻极体)

- 一种具有持久性极化的固体电介质。
- 如当蜡和松香的混合物在外加的强电场中从熔融态固化后,再除去外电场时,混合物固体会长期保持极化状态;
- 驻极体可以在周围空间产生电场,因此可类比于永磁体的一种带电体。
- 室温下驻极体的极化状态可长期保存,但在高温下则衰减得很快。
- 驻极体可作为静电场的源,如图1-2-54所示在电容式声电换能器中,可用驻极体代替电容的一个极板,从而省去了直流偏压。

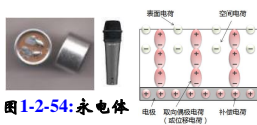
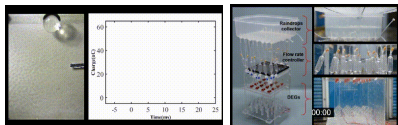


图1-2-54: 永电体

小结

\vec{P} 与 \vec{E} 是否成正比(线性与非线性)

凡 χ_e 不含 \vec{E} 的介质——线性介质： $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$;

凡 χ_e 含 \vec{E} 的介质——非线性介质。

介质性质是否随空间坐标变(空间均匀性)

χ_e —与空间坐标无关:均匀介质;

χ_e —坐标的函数:非均匀介质。

介质性质是否随空间方位变(方向均匀性)

χ_e —标量:各向同性介质;

χ_e —张量:各向异性介质。

以上概念是从三种不同的角度来描述介质性质

空气:各向同性、线性、一般是非均匀介质;

水晶:各向异性、线性介质;

酒石酸钡、钛酸钡:各向同性非线性介质——铁电体。

电
极
化
率

压电晶体结构是不具有对称中心

(a)铁电晶体也具有压电性,晶体结构也不具有对称中心;

铁电体一定是离子性晶体,是具有自发极化的一种压电体,但并不是所有的压电体都是铁电体。

(b)热释电体也是一种压电体,晶体结构同样不具有对称中心;

温度变化可以引起极化强度改变,但不一定所有的压电体都是热释电体,有的铁电体也是热释电体。



总之,压电体、铁电体和热释电体都是不具有对称中心的晶体。

例题1-2-11:如图1-2-55所示平行板电容器原场强为 \vec{E}_0 ,在平行板电容器中充满极化率为 χ_e 的电介质,求:电介质中的场强。

解:在平行板电容器中充满极化率 χ_e 的介质,其场强为

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_{e0}}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'_e}{\epsilon_0}$$

$$\text{又 } \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}, \sigma'_e = P$$

$$\text{则 } E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$

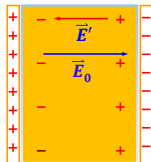


图1-2-55:平行板电容器

$$\therefore E = \frac{E_0}{1 + \chi_e} = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma_{e0}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow \sigma'_e = \frac{(\epsilon_r - 1)\sigma_{e0}}{\epsilon_r}$$

思考:以上结论有何意义?

感应、自由

极化、束缚

➤ **感应电荷**:导体中自由电荷在外电场作用下作**宏观移动**使导体的电荷重新分布——**感应电荷**。

特点:导体中的**感应电荷**是自由电荷,可从导体的一处转移到另一处,也可通过导线从一个物体传递到另一个物体。

➤ **极化电荷**:电介质极化产生的电荷。

➤ **特点**:**极化电荷**起源于原子或分子的**极化**,因而总是牢固地**束缚**在介质上,既不能从介质的一处转移到另一处,也不能从一个物体传递到另一个物体。

➤ 若使电介质与导体接触,**极化电荷**也不会与导体上**自由电荷**相中和,因此常称**极化电荷**为**束缚电荷**。

§ 1-2-5 电介质中静电场基本定理

真空中静电场的基本定理

1、高斯定理

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} Q_i$$

2、环路定理

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

介质中静电场的基本定理?

3、边值关系

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_{(S)} q_0 + \sum_{(S)} q' \right)$$

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} (\vec{E}_0 + \vec{E}') \cdot d\vec{l} = ?$$

1. 高斯定理

- 电介质在外场中会被极化, 出现极化电荷(q');
- 如图1-2-56所示不但自由电荷(q_0)要激发电场 \vec{E}_0 , 电介质中束缚电荷(q')同样也要在它周围空间激发电场 \vec{E}' (无论电介质内部或外部); $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$
- 由电场强度叠加原理, 在有电介质时, 某点的总电场强度:

$$\left. \begin{array}{l} q_0 \rightarrow \vec{E}_0 \\ q' \rightarrow \vec{E}' \end{array} \right\} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

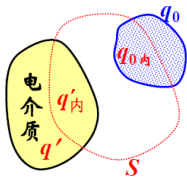


图1-2-56: 高斯定理

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} q = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} (q_0 + q')$$

$$\text{又 } Q' = \sum_{(S)} q' = - \oiint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} q_0 - \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

A、电位移矢量

介质中：
$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} q = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} (q_0 + q')$$

而 $\oiint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \sum_{(S)} q'$ 或 $\oiint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \iiint_{(V)} \rho' dV$

或 $\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} (\rho_0 + \rho') dV$

故 $\oiint_{(S)} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \sum_{(S)} q_0$ 或 $\oiint_{(S)} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \rho_0 dV$

【定义】 电位移矢量 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

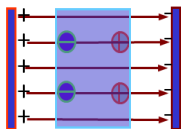
B、介质中的高斯定理

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{(S)} q_0 \text{ 或 } \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \rho_0 dV$$

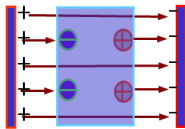
$$\vec{D} \text{ 的散度: } \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

高斯定理: 通过任意闭合曲面的电位移通量等于此闭合曲面所包围的自由电荷的代数和。

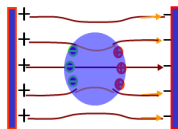
C、 \vec{E} 线与 \vec{D} 线 (如图1-2-57所示)



(a) 电位移线



(b) 电场强度线

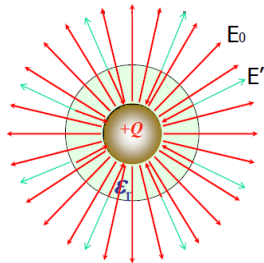


(c) 非均匀介质的 \vec{D} 线

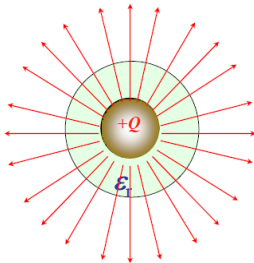
图1-2-57: 两种电力线

线性均匀各向同性介质情况

E 线



D 线



两种电力线

电力线(E 线)不但与自由电荷有关,
而且与束缚电荷有关

电位移线(D 线)却只与自由电荷有关

图1-2-58:两种电力线

? 介电常数 ϵ

$$\text{由 } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ 和 } \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{得 } \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

令 $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ —— 介质的相对介电常数

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ —— 介质的介电常数

则 $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ (无限大、各向同性均匀介质)

对各向异性介质, ϵ 、 χ_e 均为张量, 线性关系式亦较复杂;

对非线性介质, 除线性项外, 还有非线性项。

【讨论】： \vec{D} 、 ϵ_r 和 ϵ 对表达式的影响。

①高斯定理

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \rho_0 dV \quad \rho_0 \text{ 是自由电荷密度}$$

②无限大各向同性均匀介质中

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{or} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

③电能密度

$$\omega = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad \text{or} \quad \omega = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

2、介质中环路定理

自由电荷产生的外电场 \vec{E}_0 及极化电荷产生的退极化场 \vec{E}' 都是保守场,均满足环路定理,

$$\text{即 } \oint_{(L)} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0, \oint_{(L)} \vec{E}' \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\therefore \oint_{(L)} (\vec{E}_0 + \vec{E}') \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

利用数学上的斯托克斯定理,有 $\therefore \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$

$\therefore \nabla \times \vec{E} = 0$ —— 环路定理的微分形式

【讨论题1-2-12】：介质中高斯定理的应用举例。

【已知】：多层介质球的场如图1-2-59所示：

球外： ϵ_0 ；

球体： R_1, ϵ_1 ，均匀带电 Q ；

球壳： R_2, ϵ_2

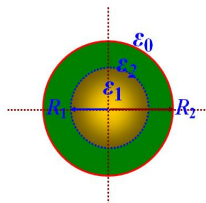


图1-2-59: 多层介质球的场

【解】 ①场强

$$r \in [0, R_1] \quad D_1 = \frac{Qr}{4\pi R_1^3} \quad E_1 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_1 R_1^3}$$

$$r \in [R_1, R_2] \quad D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2}$$

$$r \in [R_2, +\infty) \quad D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad E_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

② 电势

$$R_2 < r < \infty \quad U_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$R_1 < r < R_2 \quad U_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$0 < r < R_1 \quad U_1 = \frac{Q(R_1^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_1 R_1^3} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

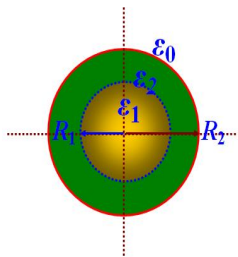
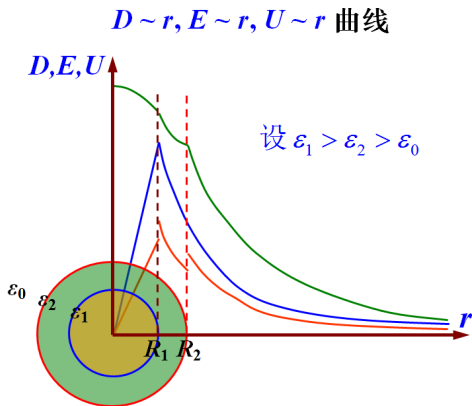


图1-2-60: 多层介质球的场

例题中电位移、电场强度和电势随矢径变化曲线参见图1-2-61。



§ 1-2-6: 边值关系和唯一性定理

【1】 边值关系

电场强度 / 电位移矢量 / 电势

【2】 唯一性定理*

【3】 应用举例

【1】边值关系

? **边值关系**: 介质分界面两侧**电场**之间满足的关系。

研究空间存在不同介质的静电场问题时,**边界关系**是非常重要的。

(1) 介质分界面两侧的**电场强度切向分量连续**。

$$E_{1t} = E_{2t} \xrightarrow{\text{各向同性介质}} \frac{D_{1t}}{\epsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_{r2}}$$

证: 如图1-2-62所示在电介质的分界面上, 取一极小的矩形环路 L , 令其长为 l , 宽为 Δl 。

当 $\Delta l \rightarrow 0$ 时, 由环路定理知

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1t}l - E_{2t}l = 0$$

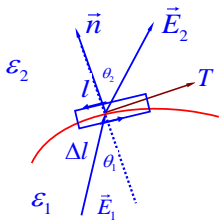


图1-2-62: 电位移切向分量边值关系

$$\text{故有 } E_{1t} = E_{2t} \xrightarrow{\text{各向同性介质}} \frac{D_{1t}}{\epsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_{r2}}$$

(2) 介质分界面两侧电场的电位移矢量法向分量连续。

$$D_{1n} = D_{2n} \xrightarrow{\text{各向同性介质}} \epsilon_{r1} E_{1n} = \epsilon_{r2} E_{2n}$$

证: 在介质分界面处, 跨越分界面作一极小的圆柱闭合曲面 S , 其底为 ΔS , 高为 h 。

当 $h \rightarrow 0$ 时, 由高斯定理知

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_{1n}\Delta S - D_{2n}\Delta S = \sigma_0\Delta S$$

$$\text{故有 } D_{1n} - D_{2n} = \sigma_0$$

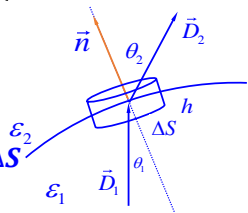


图1-2-63: 电位移法向分量边值关系

当介质分界面上没有自由电荷时,有

$$D_{1n} = D_{2n}$$

各向同性介质

$$\epsilon_{r1}E_{1n} = \epsilon_{r2}E_{2n}$$

(3) 介质分界面两侧的电势连续: $U_1 = U_2$

证: 在介质分界面两侧取距界面为 h 的 1, 2 两点, 两点的电势分别为 U_1, U_2 。

当 $h \rightarrow 0$ 时, 两点的电势差即为

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1n}h + E_{2n}h = E_{1n}h \left(1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \right) \rightarrow 0$$

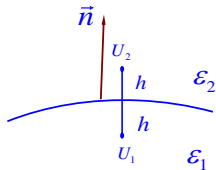
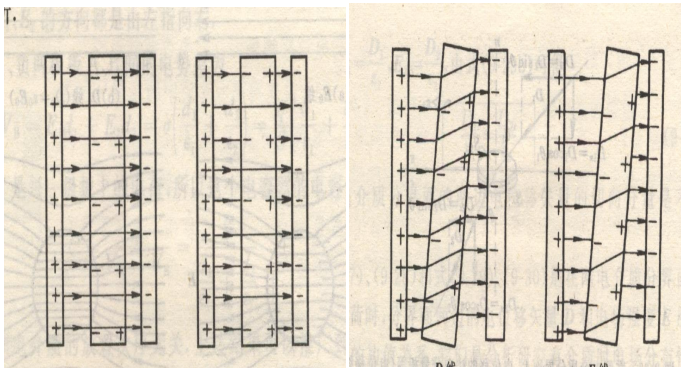


图1-2-64: 电势两侧边值关系

注意: 由上面边值关系可看出, 由于通过分界面的 \vec{E} 通量只和场强的法向分量有关, 而和与界面平行的切向分量无关。

因此, 电场线在介质的分界面上是不连续的; 而电位移线在介质的分界面上则是连续的。



D 线

E 线

D 线

E 线

平行板电容器中正插入电介质时的 D 线和 E 线 平行板电容器中斜插入电介质时的 D 线和 E 线

图1-2-64: 平行板电容器

(4) 电位移线在介质的分界面虽是连续的,但它的方向在越过界面后却要发生偏折,由上面两式

$$\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ \frac{D_{1t}}{\epsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_{r2}} \end{cases}, \text{可得: } \frac{D_{1t}}{\epsilon_{r1} D_{1n}} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_{r2} D_{2n}}$$

由图知, $\tan\theta_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}}$, $\tan\theta_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}}$ 代入得

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

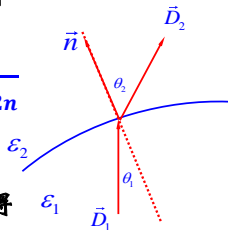


图1-2-65: 电位移线折射定律

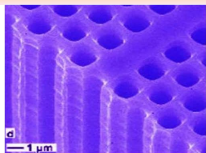
电位移线
折射定律

❖ **唯一性定理:** 静电平衡条件和边值条件可把存在于空间的电场分布唯一地确定下来。

小 结

1、 \vec{E} 的切向分量连续

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ \frac{D_{1t}}{\epsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_{r2}} \end{cases}$$



界面一点上的法线方向只有一个,而该点的切线方向却有无数多个。
结论:对任一切线方向成立。

2、对无自由电荷界面, \vec{D} 法向分量连续:

$$\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ \epsilon_{r1} E_{1n} = \epsilon_{r2} E_{2n} \end{cases}$$

3、介质界面两侧的电势总是连续的: $U_1 = U_2$ 。

4、极化强度矢量和极化面电荷: $\sigma'_e = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}$ 。

【2】 唯一性定理(讲座)

❖ **唯一性定理:**静电平衡条件和边值条件可把存在于空间的电场分布唯一地确定下来。

【3】 求解应用举例

关于静电场边值问题的求解,在一般情况下可归结为在给定边界条件下求解场方程的问题,唯一性定理是求解静电场边值问题的理论基础。

例题1-2-13: 平行金属板, 带电 σ_0 及 $-\sigma_0$, 板间 $U_0 = 300V$. 若保持板上电荷不变, 板间一半空间充介质 $\epsilon_r = 5$ (图一)。求: 1) 板间电压; 2) 电介质上、下表面束缚电荷面密度; 3) 电容; 4) 若改为如图二所示情况, 又如何?

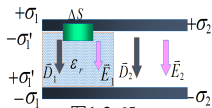
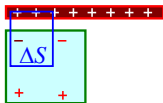


图1-2-65

解: 1) 设板面积 S , 间距 d , 充介质前带电 σ_0 , 则

$$\begin{cases} E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \\ U_0 = E_0 d \end{cases}$$

充介质后电荷重新分布, 设左半部 E_1 、 D_1 、 σ_1 , 右半部 E_2 、 D_2 、 σ_2 , 左半部取高斯面如图一所示。



图一



图二

图1-2-66: 例题1-2-13

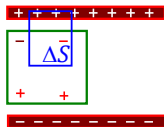
$$\begin{aligned}
 \text{则} \quad \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \iint_{(\text{上底})} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{(\text{下底})} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{(\text{侧面})} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_{(\text{上底})} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = D_1 \Delta S
 \end{aligned}$$

该高斯面包围的自由电荷为 $\sigma_1 \Delta S$, 故

$$\begin{cases} D_1 = \sigma_1 \\ E_1 = \frac{D_1}{\epsilon} = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \end{cases}$$

同理, 右半部

$$\begin{cases} D_2 = \sigma_2 \\ E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \end{cases}$$



图一

图1-2-66: 例题1-2-13

左右两部分电势相等 $E_1 d = E_2 d$

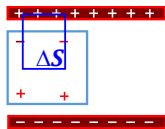
$$\therefore \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_r} \quad E_1 = E_2$$

因为金属板总电量保持不变

$$\text{故 } \sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2} = \sigma_0 S$$

$$\Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0$$

$$\therefore \begin{cases} \sigma_1 = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \sigma_0 > \sigma_0 \\ \sigma_2 = \frac{2}{1+\varepsilon_r} \sigma_0 < \sigma_0 \end{cases}$$



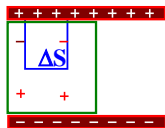
图一

图1-2-66: 例题1-2-13

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{2\sigma_0}{\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)} = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} E_0$$

$$U = Ed = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} E_0 d = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} U_0$$

$$= \frac{2}{1 + 5} \times 300 = 100(\text{V})$$



图一

图1-2-66:例题1-2-13

2) 电介质上、下表面束缚电荷面密度

$$P_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{2(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 1} \sigma_0$$

$$\sigma'_1 = P_n = P_1 = \frac{2(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 1} \sigma_0 = \frac{4}{3} \sigma_0$$

3) 电容

$$C_1 = \frac{Q_1}{U_1} = \frac{\sigma_1 \cdot \frac{S}{2}}{\frac{2}{\epsilon_r + 1} U_0} = \frac{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \sigma_0 \cdot \frac{S}{2}}{\frac{2}{\epsilon_r + 1} U_0} = \frac{\epsilon_r \sigma_0 S}{2U_0}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{U_2} = \frac{\sigma_2 \cdot \frac{S}{2}}{\frac{2}{\epsilon_r + 1} U_0} = \frac{\frac{2}{\epsilon_r + 1} \sigma_0 \cdot \frac{S}{2}}{\frac{2}{\epsilon_r + 1} U_0} = \frac{\sigma_0 S}{2U_0}$$

C_1, C_2 并联

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_r \sigma_0 S}{2U_0} + \frac{\sigma_0 S}{2U_0} = \frac{\sigma_0 S}{2U_0} \left(\frac{\epsilon_r + 1}{2} \right) = \frac{\epsilon_r + 1}{2} C_0 = 3C_0$$

4) 若保持电荷不变,充介质如图

则 $D = \sigma_0$

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$



图1-2-67:例题1-2-13

$$U = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{\sigma_0 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} + \frac{\sigma_0 d}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r} \right) = U_0 \frac{\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r} = \frac{3}{5} U_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{Q_1}{U_1} = \frac{\sigma_0 S}{E_1 \frac{d}{2}} = \frac{2\sigma_0 S}{\frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \\ C_2 = \frac{Q_2}{U_2} = \frac{\sigma_0 S}{E_2 \frac{d}{2}} = \frac{2\sigma_0 S}{\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}} = \frac{2\epsilon_0 S}{d} \end{array} \right.$$

C_1, C_2 串联

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\epsilon_r \sigma_0 S}{(\epsilon_r + 1)d} = \frac{\sigma_0 S}{d} \cdot \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} C_0 = \frac{5}{3} C_0$$

在电介质表面有 $P_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \cdot \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0$

$$\sigma'_1 = P_n = P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0 = \frac{4}{5} \sigma_0$$

❖ 讨论: 以上填充介质后

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}, \sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0$$



图1-2-66: 例题1-2-13

是由特例导出的。但结论普遍成立, 成立的条件是:

- ① 电介质充满整个空间;
- ② 介质表面是等势面。

思考: 若平板电容器两板板接在固定电源上, 上述情况将如何变化?

《本节基本要求》

- 1、掌握导体**静电平衡**条件,能用该条件分析带电导体在静电场中的电荷分布。
- 2、能够利用导体静电平衡的**规律求解**有导体存在时的**场强与电势**分布;理解**静电屏蔽**现象。
- 3、理解**电介质极化**的微观机理及宏观**束缚电荷**的产生;了解**电极化强度**和**介质击穿场强**的意义。
- 4、理解电位移矢量 \vec{D} 的物理意义及有电介质时的**高斯定理**,能利用它们求解有电介质存在时具有一定**对称性**的电场的问题以及边值关系。
- 5、理解**电容**定义,能计算简单形状**电容器**的电容。

1-2-2:物质中静电场小结

一、理论体系:出发点 $\left\{ \begin{array}{l} \text{高斯定理} \rightarrow \text{电介质(导体)中电场为有源场} \\ \text{环路定理} \rightarrow \text{电介质(导体)中电场是无旋(有势)场} \end{array} \right.$

二、内容:

- 1、电荷、电场、电势分布规律；
- 2、两个定理:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \rho_0 dV \\ \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \end{array} \right.$$

3、两个物理量： \vec{P} ——反映分子电矩的大小和空间有序化程度。

$$\sigma'_e = \frac{dq'}{dS} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

\vec{D} ——辅助性物理量， $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

4、三种应用：

(1) 静电平衡条件应用；

(2) 电容器电容求解；

(3) 介质中高斯定理和边值关系应用。

介质中场的形象化几何描述：

极化机理——位移极化、取向极化

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$$

电位移线——规定、性质、通量 $\Phi_D = \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S}$

三、 σ'_e 、 $\vec{E}(\vec{D})$ 、 \vec{P} 三者关系网

1、 \vec{E}_0 、 $\vec{E}' \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

2、 $\sigma'_e = \frac{dq'}{dS} = \vec{P} \cdot \vec{n} \Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum_{(S)} q'$

3、 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \rho_0 dV$

小结图

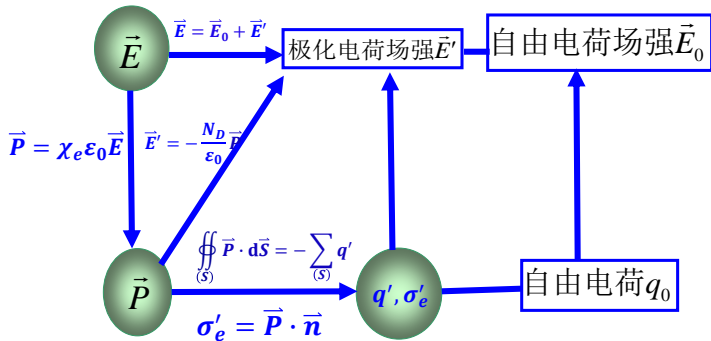


图1-2-68: 章节总结图

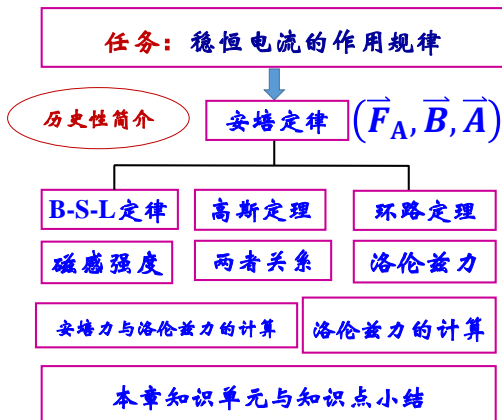
End

第二章 静磁理论部分

2-1 真空中稳恒磁场

2-2 物质中的静磁场

第二章 静磁理论部分(I)



历史性简介

- > 指南针中国古代四大发明之一,司马迁《史记》描述黄帝作指南;
- > 1086年宋朝沈括《梦溪笔谈》指南针的制造方法等;
- > 1119年宋朝朱彥《萍洲可谈》罗盘,用于航海记载;
- > W. Gilbert 《De Magnete》磁石,最早的著作;
- > 18世纪,安培电流产生磁场;
- > 法拉第效应,在磁场中运动导体产生电流;
- > 安培定律,构成电磁学的基础,开创现代电气工业;
- > 1907年,P. Weiss的磁畴和分子场假说;
- > 1928年,洛森堡模型,用量子力学解释分子场起源;
- > 1946年,Bioembergen发现NMR效应;
- > 1948年,Neel建立亚铁磁理论;
- > 1954-1957年,RKKY相互作用的建立;
- > 1958年,Mössbauer效应的发现;
- > 1960年,铁磁晶体的理论预言;
- 1965年,Mader和Nowick制备了CoP铁磁非晶态合金;
- > 1970年,SmCo5稀土永磁材料的发现;
- 1982年,扫描隧道显微镜,Brining和Rohrer(1986年,AFM);
- > 1984年,NdFeB稀土永磁材料的发现,Sagawa(佐川);
- 1986年,高温超导体,Bednortz - muller;
- > 1988年,巨磁电阻GMR的发现(M. N. Baibich),法国Paris - Sud大学的Albert Fert以及德国汉堡研究中心的Peter Grünberg获2007年诺贝尔物理学奖;
- > 1994年,CMR庞磁电阻的发现,Jin等LaCaMnO₃;
- > 1995年,T. Miyazaki的隧道磁电阻TMR的发现.....



图2-1-1: 指南

2-1 真空中稳恒磁场

2-1-1 磁荷与电流磁效应

2-1-2 磁感强度

2-1-3 高斯定理与安培环路定理

2-1-4 磁感强度与磁矢势

2-1-5 安培力与洛仑磁力

2-1-1 磁荷与电流磁效应

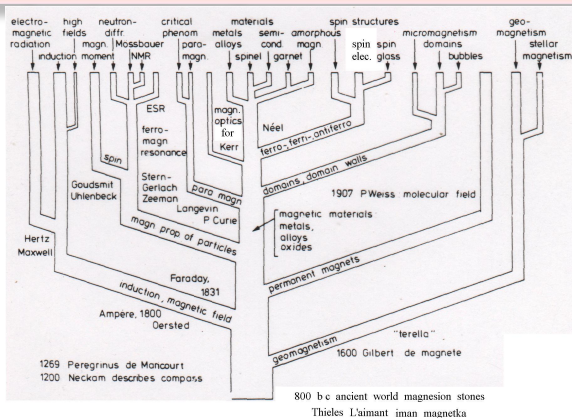


图2-1-2:磁学发展与分支

永磁在汽车上的应用

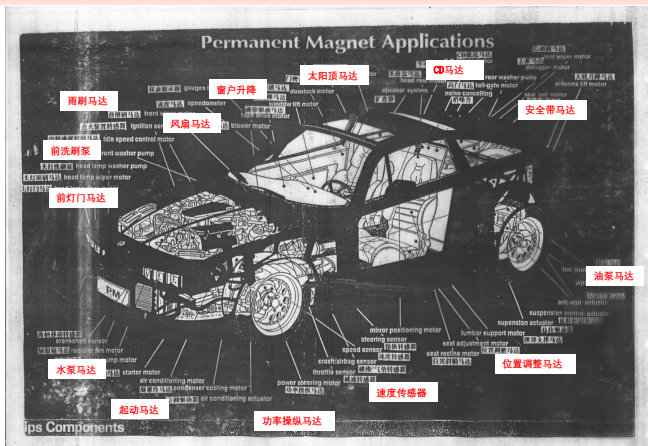


图2-1-3: 永磁在汽车上的应用

The World of Magnetic Sensors

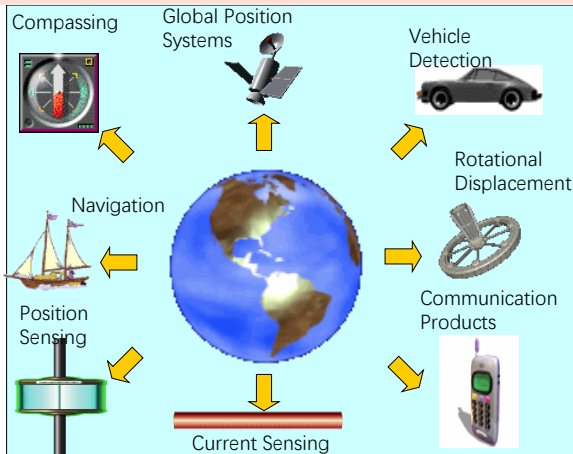
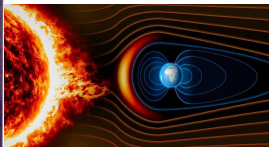


图 2-1-4: The World of Magnetic Sensors

2-1-1磁荷与电流磁效应



Hans Christian Ørsted (1777-1851). Besides his work in electricity and magnetism, Ørsted was the first to prepare pure metallic aluminum (1825).



安培定律



磁荷与电磁效应

B-S-L定律

安培定律

磁感强度叠加原理

图2-1-5:奥斯特的电流磁效应

1. 磁荷及其作用定律

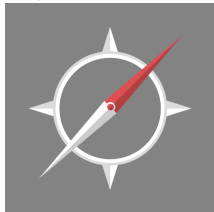
[1] 磁库仑定律与磁荷磁场

18世纪末,库仑在研究磁极相互作用时,通过大量实验总结出了**磁库仑定律**:两点磁荷之间的相互作用力与它们的磁荷量之积成正比,与它们之间的距离平方成反比。

考虑到力的方向性,**磁库仑定律**为:
$$\vec{F}_m = \frac{q_{m0} q_m}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{r}$$



图2-1-6:磁铁相互作用模式



磁场强度的定义:
$$\vec{H} = \frac{\vec{F}_m}{q_{m0}}$$

磁荷磁场强度:
$$\vec{H} = \frac{q_m}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{r}$$

磁荷观点的类比(电荷)

$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{q_{m0}} \quad \text{磁场强度}$	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \text{电场强度}$
$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ $\vec{H} = -\nabla U_m$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ $\vec{E} = -\nabla U$
磁偶极子的磁势 U_m $U_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{p}_m \cdot \vec{r}_0}{r^2}$	电偶极子的电势 U $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_0}{r^2}$
磁偶极层 $\vec{H} = \frac{\tau_m}{4\pi\mu_0} \nabla\Omega$	电偶极层 $\vec{E} = \frac{\tau_e}{4\pi\epsilon_0} \nabla\Omega$
$\vec{L} = \vec{p}_m \times \vec{H}$	$\vec{L} = \vec{p}_e \times \vec{E}$

[2] 静磁学几个重要概念

(1) 磁荷不能孤立存在,总是以**磁偶极子**的形式存在于磁介质中。

所谓**磁偶极子**就是无限靠近的等量异号磁荷构成的**磁性子元**,其磁位表达式为

$$U_m = \frac{1}{4\pi} \vec{m} \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

(2) 无外部磁场作用时,磁介质中的磁偶极子杂乱无章,所以整体不显现磁性;在外部磁场的作用下,磁介质中的磁偶极子发生定向排列,因而显现出磁性。

(3) 在外磁场作用下磁偶极子定向排列称作**磁化**,磁介质磁化状态以**磁化强度矢量** \vec{M} 描述。

磁化强度的定义为单位体积所含**磁偶极子磁矩的矢量和**。

(4) 磁性体 V 的磁位表达式为 $U_m = \frac{1}{4\pi} \iiint_{(V)} (\vec{M} \cdot \nabla \frac{1}{r}) dV$ 两者关系为: $\vec{H} = -\mu_0 \nabla U_m$

[3] 静磁学和磁力中的单位制

- (1) 同一物理量在不同单位制中的量纲可能不同,例如磁导率 μ_0 在高斯单位制中无量纲,但在国际单位制(SI)中为 $LMT^{-2}I^{-2}$;
- (2) 同一公式在不同单位制中的形式可能不同,例如 \vec{B} (磁感应强度)、 \vec{H} (磁场强度)、 \vec{P}_m (磁极化强度)之间的关系式,在高斯单位制中为 $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{P}_m$,在国际单位制(SI)中为 $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{P}_m)$;
- (3) 同一物理属性可采用同一单位制中的不同量纲的物理量来描述,例如在国际单位制(SI)中,磁场的强弱可以用**磁场强度**描述,也可以用**磁感应强度**描述;
- 物质的磁化状态,可以用磁极化强度 \vec{P}_m 描述,也可以用磁化强度 \vec{M} 描述。

2. 电流磁效应及其作用规律

[1] 电流的磁效应——奥斯特探索

- 19世纪20年代前,磁和电是独立发展的;
- 丹麦物理学家 Hans Christian Oersted 深受康德哲学关于“自然力”统一观点的影响,试图找出电、磁之间的关系;
- 1820年7月

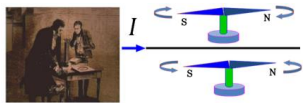


图2-1-7:奥斯特实验与电流磁效应

奥斯特实验表明：

- 长直载流导线与之平行放置的磁针受力偏转——**电流磁效应**；
- 磁针是在水平面内偏转的——**横向力**；
- 突破了非接触物体之间只存在**有心力**的观念——拓宽了作用力的类型。

意义：

- 揭示了电现象与磁现象的联系；
- 宣告电磁学作为一个统一学科诞生；
- 历史性的突破,此后迎来了电磁学蓬勃发展的高潮。

评价：

Ampere写道：“Oerster先生……已经永远把他的名字和一个新纪元联系在一起了”。

Faraday评论说：它突然打开了科学中一个一直是黑暗的领域的大门,使其充满光明。

[2] 相关实验——系列探索

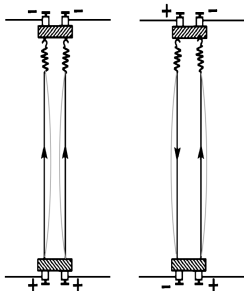


图2-1-8: 平行电流

- (1) Ampere 圆电流对磁针作用
- (2) Ampere 平行电流相互作用
- (3) Arago 钢片被电流磁化

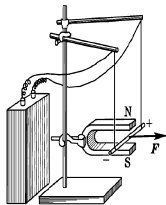


图2-1-9: 马蹄形磁铁

- (4) Ampere 通电导线受马蹄形磁铁作用而运动

(5) Ampere螺线管与磁铁相互作用时显示出N极和S极

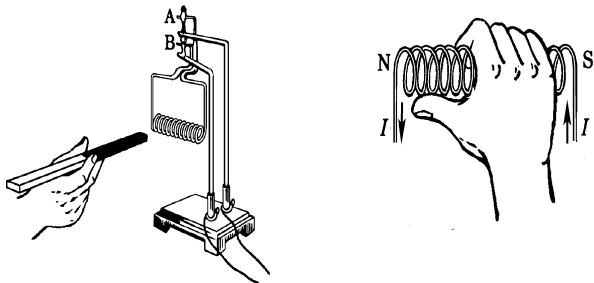
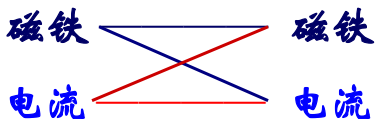


图2-1-10: Ampere螺线管

实验表明:载流螺线管相当于磁棒,螺线管的极性与电流成右手螺旋关系。

一系列实验表明



都存在相互作用

爱因斯坦指出：“提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因为解决一个问题也许仅是一个数学上或实验上的技能而已，而提出新的问题，新的可能性，从新的角度去看旧的问题，却需要有创造性的想像力，而且标志着科学的真正进步。”

[3] 研究课题

- 毕-萨-拉的研究课题;
- 安培的研究课题;
- 电流产生磁的逆效应;
- 电、磁相互作用的传递问题。

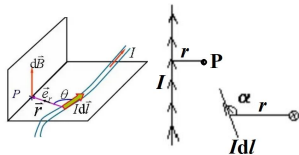
(一) 毕 - 萨 - 拉的研究课题

- ① 寻找电流元对磁极作用力的定量规律；
- ② 认为电流对磁极的作用力是自然界的基本力；
- ③ 受Oester横向力的影响,认为每一个电流元对磁极的作用力也垂直于导线与磁极构成的平面；
- ④ 困难:无孤立的恒定电流元。

关键是找到几何关系: $df \propto Idl$

还和几何因素如 r 、 α 有关；

即解决了电流产生磁场的规律(下一节)。



把电流分割成许多电流元

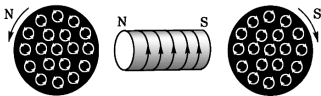
图2-1-11:电流元的几何关系

(二) 安培的研究课题

- 几乎在同样的背景下,安培提出的问题更深入,显示出大师的风范。
- 安培认为:
 - 磁现象的本质是电流;
 - 物质磁性来源于“分子”电流;
- 这是安培根据实验的种种表现作出的重要的抽象。

(1) “分子”电流

- 所谓“分子”，是指构成物质的基元，当时对物质结构和分子、原子的认识还很肤浅；
- 每个分子都有电流环绕着，当分子排列整齐时，它们的电流合起来就可以满足磁棒的磁性所需要的电流；
- 磁化可视为使物质中的分子电流排列整齐显示出总体效果。



- 以“分子电流”取代“磁荷”——能解释磁棒与载流螺线管的等效性；
- 可将种种磁相互作用归结为电流之间的相互作用；
- 提出寻找任意两个电流元之间作用力的定量规律，即可解决磁相互作用的问题。

(2) 困难

- 同样是无孤立的电流元;
- 两电流元及两者连线三者不共面;
- 涉及的几何因素更多,难度增大;
- 安培精心设计了四个示零实验来解决这些困难。

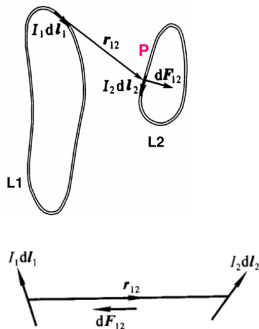


图2-1-12: 无孤立电流元

(3) 四个示零实验

➤ 无定向秤

➤ 实验一：

——用对折导线,在其中通以大小相等、方向相反的电流;

——把它移近无定向秤附近的不同部位,观察无定向秤的反应;

——结果:无定向秤不动;

——表明:当电流反向时,它产生的作用力也反向;

——数学表达: $dF_{12} \propto I_1 dl_1, I_2 dl_2$

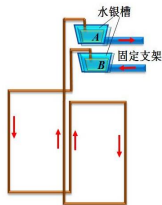


图2-1-13: 无定向秤

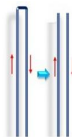


图2-1-14: 对折导线

➤ **实验二**: 装置如图2-1-15所示。

——用载流曲折线对无定向秤作用,结果与载流直导线的作用一样;

——表明电流元具有矢量性,表为 $I_1 d\vec{l}_1, I_2 d\vec{l}_2$

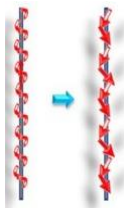


图2-1-15:载流折线

➤ **实验三**: 装置如图2-1-16所示。

——只允许圆弧形导体沿其切线方向运动而不允许圆弧形导体沿着与其垂直的方向运动;

——结果:圆弧导体不动;

——表明:作用在电流元上的力是与它垂直

——横向力: $d\vec{F}_{12} \perp d\vec{l}_2$ or $\oint_{(I_1)} d\vec{F}_{12} \cdot d\vec{l}_2$ 。

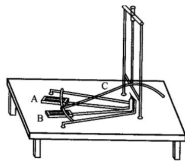


图2-1-16:圆弧形导体

实验四

——圆线圈A、B、C线度之比为 $1/n:1:n$,A与B的距离以及线圈B与C的距离比为 $1:n$,A与C固定,并串联,其中电流相同,线圈B可以活动,通以另一电流。

——结果:B不动。

——结论:所有几何线度增加同一倍数时,作用力的大小不变。

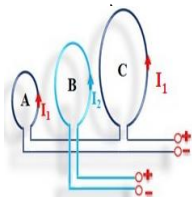


图2-1-17:圆线圈导体

$$dF_{12} \propto \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r_{12}^2}$$

当 dl_1 、 dl_2 、 r_{12}
增加同一倍数
 dF_{12} 才能保持不变

[4] 安培定律

(1) 电流元 $I d\vec{l}$ $\left\{ \begin{array}{l} Idl \\ \text{同} I \end{array} \right.$

(2) 安培定律 (参见图2-1-18) $dF_{12} \propto \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r_{12}^2}$

$$dF_{12} \propto \sin\theta_1, \quad dF_{12} \propto \sin\theta_2$$

$$\text{故 } dF_{12} = k \frac{(I_2 dl_2 \sin\theta_2) \cdot (I_1 dl_1 \sin\theta_1)}{r_{12}^2}$$

(3) 矢量式

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (\vec{I}_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$$

$$\text{同理 } d\vec{F}_{21} = k \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{I}_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}_{21})}{r_{21}^2}$$

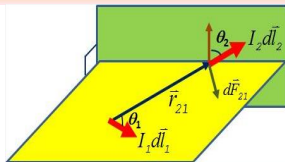


图2-1-18: 安培定律



图2-1-19: 矢积手势

SI制中 $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$ ——真空的磁导率

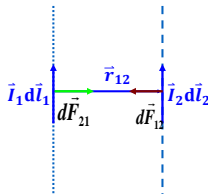
➤ 被Maxwell誉为“科学中最光辉的成就之一”；

➤ Ampere本人则被誉为“电学中的Newton”。

【例题2-1-1】求一对平行电流元之间的相互作用力,二者都与联线垂直。

【解】计算电流元1对电流元2的作用力 $d\vec{F}_{12}$

$$\because \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \therefore dF_{12} = k \frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2}{r_{12}^2}$$



方向: $d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}$ 垂直纸面向里, $d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})$ 沿联线与 \hat{r}_{12} 方向相反。

图2-1-20: 平行电流元

同理, 电流元2对电流元1的作用力 $d\vec{F}_{21} = -d\vec{F}_{12}$

[例2-1-2] 求一对垂直电流元之间相互作用力,其中电流元1沿联线,2垂直于联线。

【解】

计算电流元1对电流元2的作用力 $\theta_1 = 0 \quad \therefore d\vec{F}_{12} = 0$

而电流元2对电流元1的力 $d\vec{F}_{21} \neq 0$

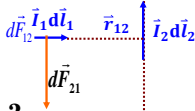


图2-1-21:垂直电流元

问题:安培定律是否满足牛顿第三定律?为什么?

(1)安培从错综复杂的现象与联系中,提炼出磁现象的本质——独具慧眼;

(2)提出寻找电流、电流之间相互作用定量规律问题——问题深度、广度和重要性高于其同代人提出问题,显

启示: 示出大师风,反映了正确抽象、洞察本质重要性;

(3)在解决问题上,面对难以测量困难,巧妙地设计示零实验,设计与理论猜测相结合,揭示出电流元相互作用应具有特点,采用矢量点乘、叉乘来表示 $d\vec{l}_1$ 、 $d\vec{l}_2$ 、 \vec{r}_{12} 之间关系。

进一步提出的课题:

➤ 电流产生磁逆效应问题:将导致电磁感应现象的发现;

➤ 电磁作用传递问题:超距和近距作用论争再次激化,将导致电磁场理论建立。

§ 2-1-2: 静磁场与毕-萨-拉定律



B-S-L定律

B-S-L研究课题

B-S-L定律

B-S-L定律的应用

本节的小结

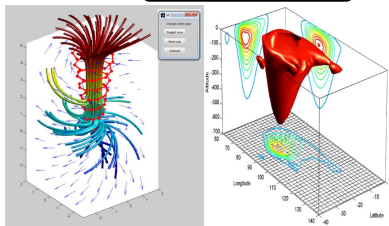


图2-1-22:毕-萨-拉及其定律

【1】 B-S-L研究课题

- Biot和Savart通过设计实验研究电流对磁极的作用力；
- 数学家Laplace的帮助下,得出B-S定律(早于安培)。

$$\text{➤ } d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \left\{ \begin{array}{l} \propto Idl, \sin\theta, \frac{1}{r^2} \\ d\vec{B} \perp (d\vec{l}, \vec{r}) \end{array} \right.$$

? 如何解决无孤立的电流元的困难

(1) Biot首先重复Oersted实验

实验一:测量长直载流导线对单位磁极的作用力

➤ 装置:如图2-1-23,沿圆盘径向,对称放置一对相同的磁棒。

$$\text{IF } H \propto \frac{1}{r} \Rightarrow \text{then } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{H}$$

$$\text{IF } H \text{ no } \propto \frac{1}{r} \Rightarrow \text{then } H_1 r_1 \uparrow \neq H_2 r_2 \downarrow$$

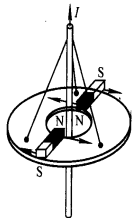


图2-1-23:单-萨实验

每根磁棒
两极受合力
矩为零,
圆盘静止

$$H_1 r_1 \propto \frac{r_1}{r_1} = C \quad \uparrow$$

$$H_2 r_2 \propto \frac{r_2}{r_2} = C \quad \downarrow$$

总合力矩不为0,圆盘应转;

实验结果:示零。

—— 单位磁极受到的作用 $H \propto \frac{I}{r}$

实验二：载流折线的磁场

设计实验：

磁极所受作用力的方向垂直于折线与磁极构成的平面。

序号	弯折的角度	单位磁极作用力
1	$\alpha = 0$	$H = 0$
2	$\alpha = \frac{\pi}{4}$	$H = 0.414H_{\max}$ $0.414 = \tan 22^\circ 30' = \tan \frac{\alpha}{2}$
3	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$H = H_{\max}$

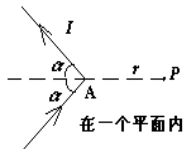


图2-1-24:

电流元对磁极的作用力的表达式 $H = k \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}$ 。

- 由实验证实：电流元对磁极的作用力是横向力；
- 整个电流对磁极的作用力是这些电流元对磁极横向力的叠加；
- 由对称性，上述折线实验结果中，折线的一支对磁极的作用力的贡献是 $H_{\text{折}}$ 的一半： $H = k \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}$ 。

(2) 拉普拉斯理论推导

$$\begin{cases} dH = dH(r, \alpha) \\ H = H(r, \alpha) \end{cases} \Rightarrow dH = \frac{dH}{dl} dl = \frac{dH}{dl} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dl} + \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{dl} \right) dl$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \alpha} = k \frac{I}{r} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \frac{\partial H}{\partial r} = -k \frac{I}{r^2} \tan \alpha \end{cases}$$

几何关系:

$$\begin{cases} dl \sin \alpha = r d\alpha \\ dl \cos \alpha = -dr \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dl} = \frac{\sin \alpha}{r} \\ \frac{dr}{dl} = -\cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow dH = k \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha \Rightarrow d\vec{H} = k \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

【2】 B-S-L定律

根据上述磁感应强度的定义式,任何闭合回路产生的磁感应强度是由各个电流元产生的元磁感应强度矢量迭加,故

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

μ_0 :真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$;

\vec{r} :电流元指向场点P的位矢;

\hat{r} : \vec{r} 的单位矢量;

$d\vec{l}$:导线上的线元,方向与导线内的电流同向。

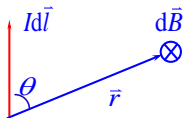
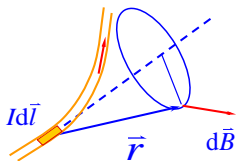


图2-1-25:磁感应强度元

由叠加原理,任意载流导线产生的磁场:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

说明:

- ①这是人们对电流产生的磁场分布做了大量实验研究而总结出的磁场的基本定律;
- ②给出了源电流元和场点的磁感强度之间的关系;
- ③这是一切电流源产生磁场的基本规律,是计算磁场出发点;
- ④适用于稳恒电流,对于非稳恒电流,有推迟效应。

注意: 电流元和场点位矢的方向;
磁感强度方向用右手螺旋法则判断。

【3】毕-萨-拉定律的应用

计算磁场的两种方法：

(II) 普遍方法-坐标分量法

- (1) 选取电流元；
- (2) 判断电流元产生磁场方向，将矢量积分 \rightarrow 标量积分；
- (3) 用几何关系，将式中几个变量统一用积分变量表示，最后积分；
- (4) 用分量求出总磁场的大小；
- (5) 用方向余弦表示磁场的方向。

(I) 简便方法:大小方向分开

- (1) 先应用**对称性或矢量合成法则**判定总磁场的方向；
- (2) 将各电流元产生的磁场向总磁场方向**投影**，得出总磁场**大小**。



(I) 长直载流线的磁场

建立坐标系 Oxy 如图 2-1-26 所示, 取 l 处 $d\vec{l}$, 电流元 $I d\vec{l}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin\theta dl}{4\pi r^2}, \text{各 } d\vec{B} \text{ 同向 } (\otimes)$$

$$\text{由 } \begin{cases} r = \frac{a}{\sin\theta} \\ l = -a \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{cases}, \text{ 则 } dl = \frac{a d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{aligned}$$

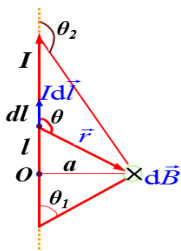


图 2-1-26: 长直电流

【讨论】：

(1) 当 $a \ll L$ ，则 $\theta_1 \approx 0$ ， $\theta_2 \approx \pi$

无限长直电流的磁场 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

(2) 当 $a \ll L$ ，场点位于一端，则 $\theta_1 \approx 0$ ， $\theta_2 \approx \frac{\pi}{2}$

半无限长直电流的磁场 $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$

(3) P 点在导线的延长线上 $\left. \begin{array}{l} \theta_1 \approx 0, \theta_2 \approx 0 \\ \theta_1 \approx \pi, \theta_2 \approx \pi \end{array} \right\} \Rightarrow B = 0$

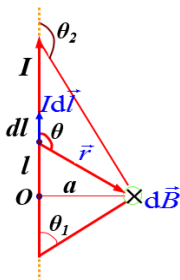


图2-1-26:长直电流

(4) 推广:

A、平面电流、平板电流、无限大平面电流、无限大平板电流;

B、圆弧面电流、圆弧体电流、圆柱面电流、圆柱体电流。

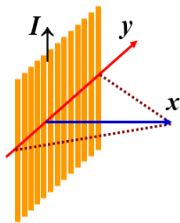


图2-1-27:平面电流

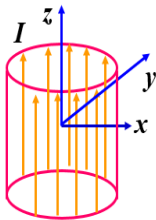


图2-1-28:圆弧电流

(II) 圆电流轴线上的磁场

已知:圆电流 I 半径为 R , 轴线沿 z , 如图2-1-29所示。

【解】由毕-萨-拉定律 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

判断电流元在 P 点产生的磁场方向

$d\vec{B}$ 如图2-1-29所示。

由电流对 z 轴的对称性

$$\int dB_{\perp} = 0$$

$$dB_{//} = dB \sin\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

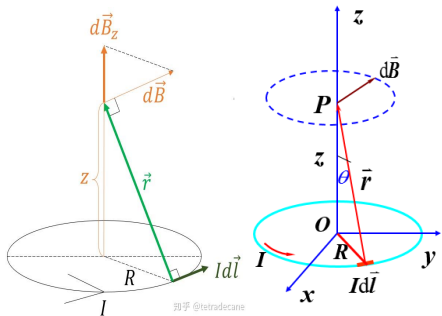


图2-1-29:圆电流磁场

$$B = \int dB_{//} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\theta \int_0^{2\pi R} dl$$

由几何关系:

$$\begin{cases} r^2 = R^2 + z^2 \\ \sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \end{cases}$$

上式代入 $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

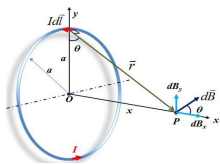
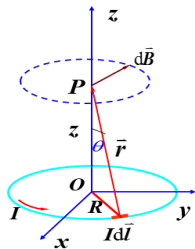


图2-1-29:圆电流磁场

\vec{B} 方向:垂直电流平面沿z轴正方向符合右手螺旋法则。

(1) 定义线圈的磁矩 $\vec{P}_m = N\pi R^2 I \vec{z}$

【讨论】：

$$\left. \begin{array}{l} \text{单匝时: } B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ N \text{匝时: } B = \frac{N \mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{array} \right\} \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

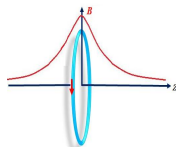


图2-1-30: 磁场分布

(2) 圆心处 $z=0$, 则 $B = \frac{N\mu_0 I}{2R}$ 或 $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi R^3}$

(3) 当 $R \ll z$, 则 $z \approx r$, 那么 $B = \frac{N\mu_0 I R^2}{2r^3}$ 或 $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2r^3}$

(4) 推广

- 亥姆霍兹线圈;
- 平面线圈;
- 螺线管等

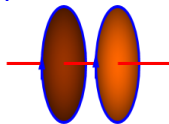


图2-2-31: 亥姆霍兹线圈

亥姆霍兹线圈

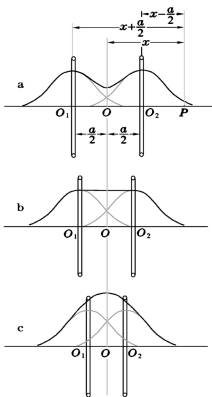
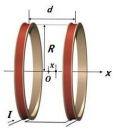
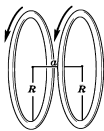
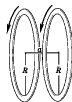


图2-1-32: 轴上磁场分布

- **结构:** 一对间距等于半径的同轴载流圆线圈;
- **用处:** 在实验室中, 当所需磁场不太强时, 常用来产生均匀磁场;
- **命题:** 证明上述线圈在轴线中心附近的磁场最为均匀。
 - 将两单匝线圈轴线上磁场叠加;
 - 求极值。

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$




$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 I \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \left\{ \frac{x + \frac{a}{2}}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{x - \frac{a}{2}}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \left\{ \frac{4\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - R^2}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{7/2}} + \frac{4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - R^2}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{7/2}} \right\}$$

令 $x=0$ 处的 $\frac{d^2 B}{dx^2} = 0 \Rightarrow$ 在 \bigcirc 点附近磁场最均匀的条件

$$\left. \frac{d^2 B}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \frac{2a^2 - 2R^2}{2\left[R^2 + \frac{a^2}{4}\right]^{7/2}} = 0 \Rightarrow a^2 = R^2$$


 $a = R$

载流螺线管内的磁场

已知:设螺线管半径 R , 匝密度 n , 电流 I , 求轴线上 O 点处的磁感应强度。

【解】用上一题圆电流产生的磁场结果。

$x-x+dx$ 段线圈相当于电流为 $nI dx$ 圆电流。

任意段圆电流在 P 点产生磁场方向始终指向 x 轴正方向, 即

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 (nI dx)}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

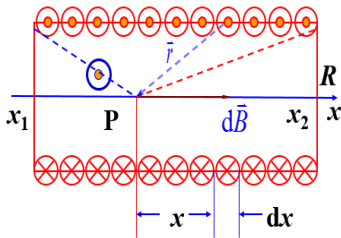


图2-1-33:载流螺线管

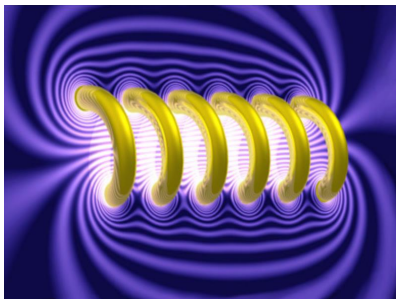


图2-1-33: 载流螺线管

$$B = \int dB = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 R^2 (nI dx)}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 nI}{2} \left(\frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

讨论:

- (1) 螺线管无限长 $\beta_1 \approx \pi$, $\beta_2 \approx 0$, 即 $B = \mu_0 nI$;
- (2) 螺线管半无限长 $\beta_1 \approx \frac{\pi}{2}$, $\beta_2 \approx 0$, 即 $B = \frac{1}{2} \mu_0 nI$;
- (3) 实践中, 螺线管长 L , 直径 D , 若 $L \geq 4D$, 则螺线管内部可视为均匀磁场。

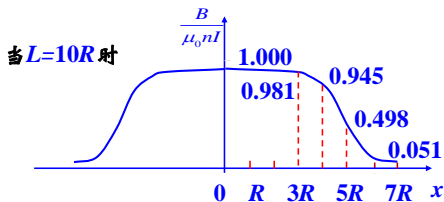
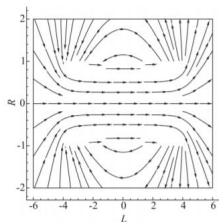


图2-1-34: 关系图线

(III) 低速运动电荷的磁场

设电流元 $I d\vec{l}$ 的截面积为 S , 其载流子浓度 n , 电量 q , 平均速度 \vec{v} , 则电流元中载流子数 $dN = nSdl$

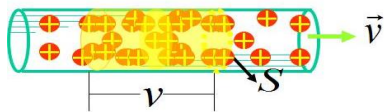


图2-1-35: 电流元与电荷

激发之磁场:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qnvSdl \sin\theta}{r^2}$$

由式(1)和式(2)可得, 平均每个载流子激发的磁场

$$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin\theta}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

低速运动电荷的电场和磁场

如图2-1-36所示, 电荷 q 以速度 \vec{v} 沿 x 轴运动, 则在空间 P 点的电场

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\text{显然 } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 (\vec{v} \times \vec{E})$$

$$= \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E})$$

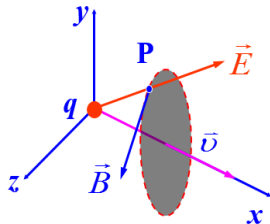


图2-1-36: 电荷的电场和磁场

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \text{真空中的光速}$$

【例题2-1-3】 一宽为 a 的薄长金属板,其电流为 I ,求在与薄板共面的平面上,距板的一边为 a 的 P 点的磁感强度。

【解】 利用直电流的场强公式 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

如图2-1-37,取元电流 dI ,则得

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi x}$$

而 $dI = \frac{I dx}{a}$, $x \in [a, 2a]$

$$B = \int dB = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln 2$$

相当于距 P 点 $1.44a$ 远线电流产生的磁场。

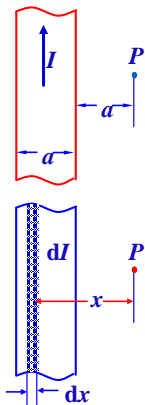


图2-1-37:薄长金属板

【例题2-1-4】 一条抛物线导线载有电流 I , 其焦点 F 到顶点距离为 a , 求焦点处磁感应强度?

【解】 解法一

极坐标中的抛物线方程为 $r = \frac{2a}{1 - \cos\varphi}$

如图, 电流元在焦点处产生的元磁感应强度方向相同, 垂直纸面向里, 故

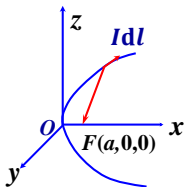


图2-1-38: 载流抛物导线

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ird\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 - \cos\varphi)}{2a} d\varphi$$

$$B = \oint dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 - \cos\varphi)}{2a} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

解法二：在极坐标系中，电流元在焦点处产生的元磁场为

$$d\vec{l} \times \hat{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_k \\ dr & -r d\varphi & 0 \\ -r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r^2 d\varphi (-\vec{e}_k)$$

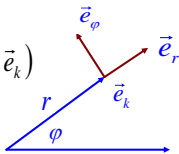


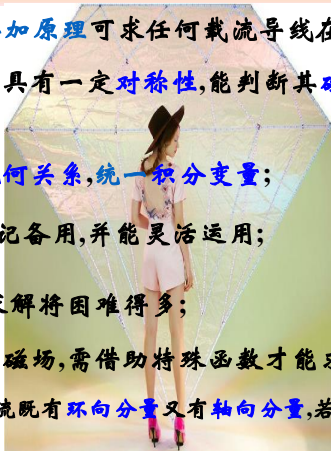
图2-1-39:极坐标系

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r} \vec{e}_k$$

$$r = \frac{2a}{1 - \cos \varphi} \quad \rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4a} \vec{e}_k$$

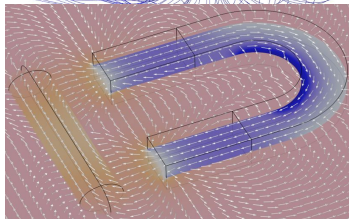
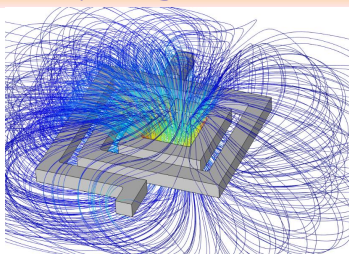
小结

- ①原则上,**B-S-L定理+叠加原理**可求任何载流导线在空间某点的 \vec{B} ;
- ②实际上,只在电流分布具有一定**对称性**,能判断其**磁场方向**,并可简化为**标量积分**时,才易于求解;
- ③为完成积分,需利用**几何关系**,**统一积分变量**;
- ④一些重要的结果应牢记备用,并能灵活运用;
- ⑤若对称性有所削弱,求解将困难得多;
如圆线圈非轴线上一点**磁场**,需借助特殊函数才能求解;
在螺距不可略时,螺线管电流既有**环向分量**又有**轴向分量**,若除去**密绕条件**,就更为复杂。



§ 2-1-3: 静磁场的基本定理

- 一、磁感应线与磁通量
- 二、高斯定理(通量定律)
- 三、安培环路定理(环量定律)
- 四、两条定理与B-S-L定律的关系
- 五、磁矢势(讲座3)



一、磁感应线与磁通量

1、磁感应线

1) 曲线密度与磁感强度大小成正比, 闭合或伸向无穷远;

约定

2) 曲线上切线代表磁感强度方向, 与电流方向成右螺旋关系;

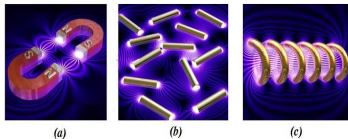
3) 磁力线密度 $\Delta N / \Delta S = B$ (大小), 与回路互相套合。

比例, 取整

实验和理论都证明: 在任何磁场中, 每一条磁感线都是环绕电流的**无头无尾**的闭合线, 而且每条闭合磁感线都与闭合载流回路**互相套合**。

2、磁通量 $d\Phi_m = B \cos\theta dS = \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$$\Phi_m = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}。 \text{单位: 韦伯(Wb), } 1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$$



(a)

(b)

(c)

(a) 直导线磁感线分布:

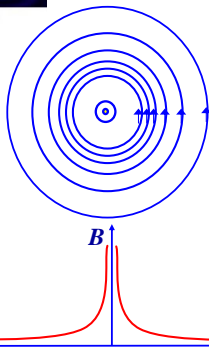


图2-1-40: 载流直导体磁感线分布

(b) 圆电流磁感线分布：

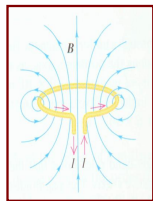
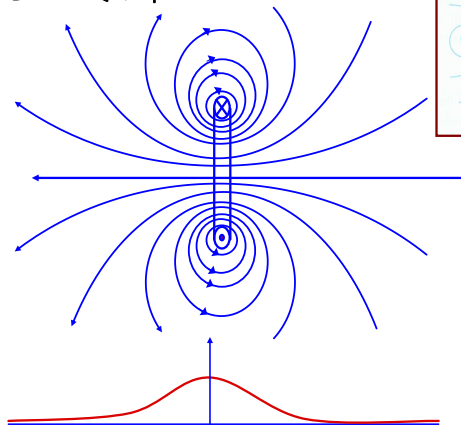
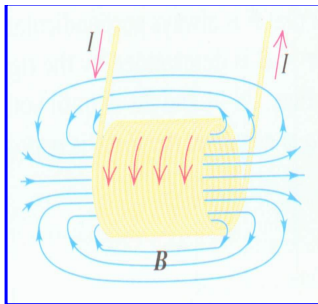


图2-1-41: 圆电流磁感线分布



(c)有限长螺线管电流

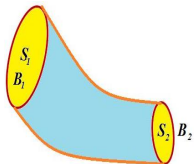
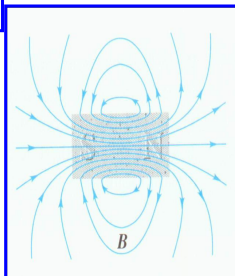


图2-1-42:长螺线管与电磁铁

磁场线与电场线的区别!?

(d)电磁铁



静电场	静磁场
电场强度用电场线描述	磁感强度用磁感线描述
<p>电场线性质</p> <p>有头有尾不闭合,起自正电荷,终止负电荷.</p>	<p>磁感线性质</p> <p>无头无尾的闭合线,与闭合回路相互套合.</p>
<p>电通量</p> $d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ $\Phi_e = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$	<p>磁通量</p> $d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ $\Phi_m = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

3、高斯定理: $\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

二、高斯定理(通量定律)

① 考察任一磁感应管(正截面为 ΔS),取任意闭合曲面 S ,磁感应管穿入 ΔS 一次,穿出一次。

$$\begin{cases} d\Phi_{B_1} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}_1}{4\pi r_1^2} \cdot d\vec{S}_1 \\ d\Phi_{B_2} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}_2}{4\pi r_2^2} \cdot d\vec{S}_2 \end{cases}$$

$$-\vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 = BdS$$

$$d\Phi_{B_1} + d\Phi_{B_2} = 0$$

再根据叠加原理即得:

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

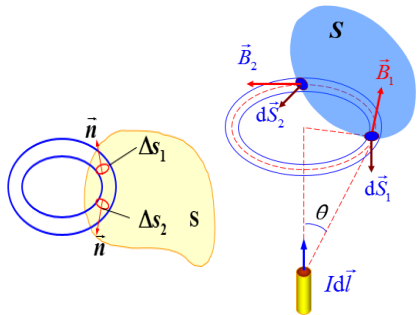


图2-1-43:高斯定理的证明

② 推广到任意载流回路的磁场

- 一个电流元产生磁场可看成由许多磁感应管组成：
有的穿入又穿出，有上述结论；有的没穿过 S ，磁通量为零。
- 任意载流回路——许多电流元串联而成，由叠加原理得：

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} \left(\sum_i \vec{B}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \oiint_{(S)} \vec{B}_i \cdot d\vec{S} = 0$$

- 结论：通过磁场中任闭合曲面 S 的总磁通量恒等于零。

磁高斯定理的微分形式

$$\Phi_m = \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \longrightarrow \iiint_{(V)} \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \boxed{\text{无源场}}$$

- 利用数学的高斯定理

电场与磁场高斯定理比较

电场高斯定理	磁场高斯定理
反映穿过闭合曲面的电通量与所包围电量之间关系	反映穿过闭合曲面的磁通量与所包围电流之间的关系:
$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} q_i$	$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
电场性质之一: 有源场 (正负电荷可分离)	磁场性质之一: 无源场 (无磁单极)

三、安培环路定理(环量定律)

磁感应强度 \vec{B} 沿任何闭合回路 L 的线积分等于穿过 L 的所有电流强度代数和的 μ_0 倍。

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i$$

I 的正负约定:当 L 的绕行方向与 I_i 方向成右手螺旋关系,则 I_i 为正,反之为负。

【证明】 普遍证明从略,下面只给出无限长直载流导线情况证明。

(1) 安培环路围绕电流

$$\text{环路平面垂直导线} \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} B \cos\theta dl$$

$$\text{其中:} \cos\theta dl = r d\varphi, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \longrightarrow \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{(L)} d\varphi = \mu_0 I$$

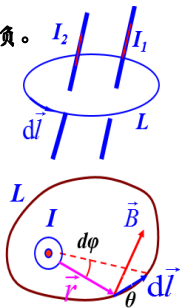
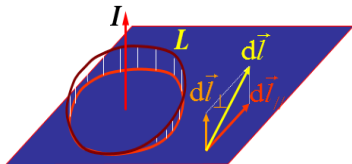


图2-1-44:计算环流(1)

(2) 设环路 L 不在同一平面内

$$\text{由 } d\vec{l} = d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B} \cdot (d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}) = \vec{B} \cdot d\vec{l}_{\parallel}$$



同上 $\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

(3) 若沿 $-L$, 反向积分

$$\oint_{(-L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{(-L)} B \cos \theta dl = -\mu_0 I$$

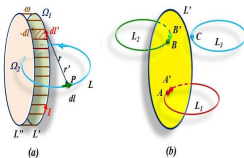


图2-1-45: 计算环流(2)

(4) 若环路 L 未包围电流

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{ABC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CDA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{ABC} d\varphi + \int_{CDA} d\varphi \right) = 0$$

安培环路定律:

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i$$

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

A、 $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$, 且 $\frac{d\vec{j}}{dt} = 0$;

【讨论】

B、只适用于闭合回路, 或无限长电流。

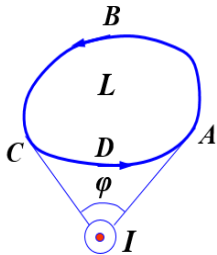


图2-1-46: 计算环流(3)

一般化的证明

$$[1] \text{ 一个电流回路 } \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \oint_{(L')} \left[\frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times \hat{r}}{4\pi r^2} \right] \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L)} \oint_{(L')} (d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L)} d\Omega$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(L)(L')} \int (d\vec{r} \times d\vec{l}') \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} d\Omega$$

1833年,高斯(Gauss)证明此为拓扑不变量,

$$\oint_{(L)} d\Omega = 4\pi N, N \in R$$

若两环套链一次,其值为 ± 1 (考虑方向);若两环不套链,其值为0。

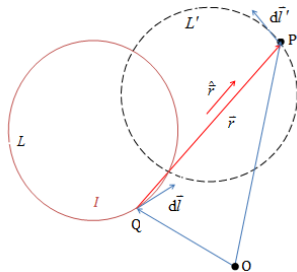


图2-1-47: 一个电流回路

[2] 多个电流回路

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \left(\sum_i \vec{B}_i \right) \cdot d\vec{l} = \sum_i \oint_{(L)} \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

安培环路定理的微分形式

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I$$

↓ ↓

$$\iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

↓

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

有旋场

■ 说明 \vec{B} 的旋度不为零——有旋场。

[3] 磁感应强度是轴矢量

➢ 镜像反射的变化规律:

——极矢量:与镜面平行分量不变,垂直分量反向,如 $d\vec{l}$ 、 \vec{r} 、 \vec{v} 、 \vec{F} 、 \vec{E} 、 \vec{P} ;

——轴矢量:与镜面垂直分量不变,平行分量反向;

——两个极矢量叉乘=轴矢量。

➢ 由毕-萨-拉定律决定 —— \vec{B} 是轴矢量。

➢ 推论:镜面对称的载流系统在镜面处产生的磁感应强度垂直于镜面。

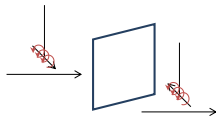
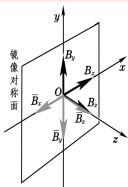


图2-1-48 镜像反射

安培环路定律的应用

(1) 长直螺线管的磁场

设：匝数密度 n ，电流强度 I ，取环路 $L = ABCDA$ ，如图2-1-49。

分析： \vec{B} 方向必沿轴向； \vec{B} 的大小沿轴向不变。

- 1) 路径 $AB //$ 轴线， AB 上 \vec{B} 为恒量；
- 2) 路径 BC 和 DA 与 \vec{B} 垂直；
- 3) 路径 CD 在螺线管外， $\vec{B} = 0$ 。

$$\text{所以 } \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \overline{AB} = \mu_0 n I \cdot \overline{AB}$$

$$\text{则得 } B = \mu_0 n I$$

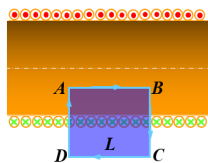


图2-1-49:长直螺线管的磁场

【讨论】：可以证明

①螺线管内： $\vec{B} = \text{恒矢量}$ ，

比较图中ABCD与A'B'CDA'环路；

②螺线管外： $\vec{B} = 0$

比较图中ABCD与ABC''D''A环路；

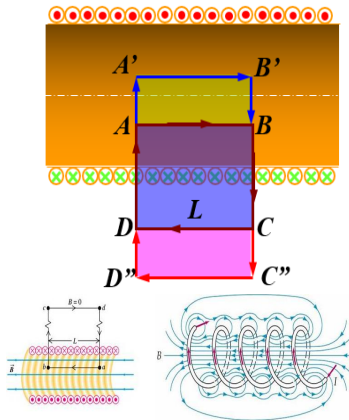


图2-1-50:螺线管的磁场

(2) 螺绕环(罗兰环)的磁场

设匝数 N , 电流 I , 管半径 R , 取环路为贯穿管内的圆, 其半径为 r , 见图2-1-51所示。

$$\text{分析得} \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$$

由定律

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$$

$$\text{所以} B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

【讨论】：

若 $R \ll r$, $B = \mu_0 nI$, 同无限长螺线管。

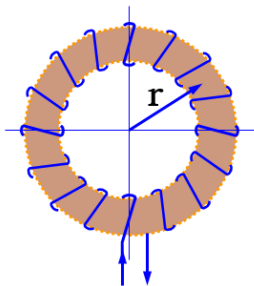


图2-1-51:螺绕环的磁场

(3) 均匀载流长直圆柱体的磁场

设:长直圆柱体半径 R ,沿轴向通以电流 I ,且横截面上均匀分布。

1) 柱外 ($r \geq R$): $\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$

按定律 $\oint_{(L_1)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

分析得 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

2) 柱内 ($r \leq R$): $\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$

按定律 $\oint_{(L_2)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$

则 $B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

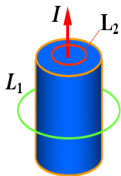


图2-1-52 载流圆柱体的磁场

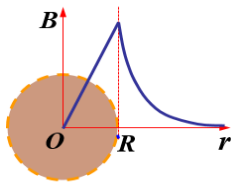
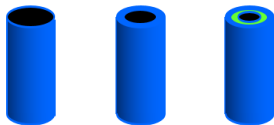


图2-1-53:载流圆柱体磁场分布曲线

【讨论】：

均匀载流长直圆柱体的磁场问题可扩展为：

- 1) 载流圆柱面, 载流圆柱管, 多层载流圆柱管(体);
- 2) 非均匀载流圆柱体、非均匀载流圆柱管、非均匀载流多层圆柱管(体);



3) 补偿法: 叠加原理)

沿偏心管轴线方向通以电流 I , 电流沿实体横截面均匀分布, 见图2-1-54(a)。

补偿法如图2-1-54(b)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

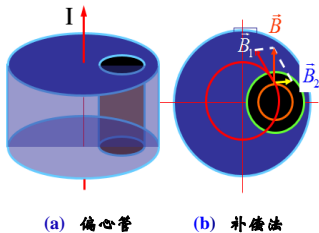


图2-1-54: 补偿法求磁场

可证明: 方向与两轴垂直连线垂直。

【例题2-1-7】一半径为 R 长圆柱形导体,在其中距离轴线为 d 处挖去一半径为 $a(a < R)$,轴线与大圆柱形导体平行的小圆柱,形成圆柱形空腔,导体中沿轴均匀通有电流密度为 \vec{j} 。试求:空腔内的磁感强度 \vec{B} 。

【解】 P 点的磁感应强度可视为半径为 R 的实心导体中电流和半径为 a 的导体中反向电流磁场矢量的迭加。

已知电流密度为 \vec{j} ,则实心圆柱体横截面上,根据安培环路定律,有

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i$$

$$2\pi r_1 B_1 = \mu_0 j \pi r_1^2 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 j r_1$$

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times \vec{r}_1$$

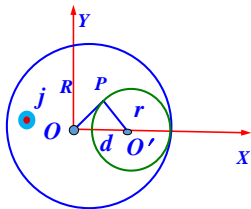


图2-1-55:圆柱形导体

同样,反向电流圆柱体横截面上有

$$2\pi r_2 B_2 = -\mu_0 j \pi r_2^2 \Rightarrow B_2 = -\frac{1}{2} \mu_0 j r_2$$

➔
$$\vec{B}_2 = -\frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times \vec{r}_2$$

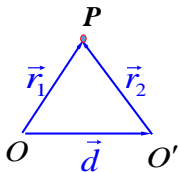


图2-1-56:

根据迭加原理,柱形空洞内任一 P 点总磁感应强度为

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times \vec{d}$$

结论:空腔内磁感强度大小为常量,方向垂直两圆心连线,即在 Y 轴方向上。

【回顾】：

(1) 高斯定理： $\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (无源场)

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} q_i \text{ (有源场)}$$

(2) 安培环路定律

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \text{ (涡旋场)}$$

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ (无旋场)}$$

□ 应用：需满足一定条件。

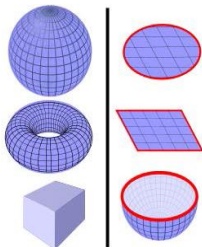


图2-1-57:

四、两条定理与毕奥-萨伐尔定律的关系

1. 两条定理均通过毕奥-萨伐尔定律导出。

2. 从高斯定理的证明过程可知,它不要求毕奥-萨伐尔定律中的距离平方反比关系。

如 $\vec{B} \propto \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^n}$, 当 $n \neq 2$ 时, 高斯定理仍然成立。

3. 安培环路定理则要求 $n = 2$ 。从证明过程可知, 要利用无穷长直导线电流的磁场, 与例 2-2-1 相同步骤, 可推出 $B = r_0^{-n+1}$, 于是, 以导线为轴半径为 r 的圆环的环流:

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I r^{-n+1}$$

4. 当 $n \neq 2$ 时, 该环量值与回路半径 r 有关, 使安培环路定理不能成立。

5. 对随时间变化的磁场, 高斯定理仍然成立; 但实验表明, 安培环路定理应予修正, 在第五章介绍。

2-1-4 磁感强度与磁矢势的关系

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{无源场}$$

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{有旋场}$$

非保守场一般
不引入标势

➤然而磁场的主要特征:无源(无散)——磁高斯定理

➤其更根本的意义:使我们可能引入磁矢势。

➤ 磁高斯定理表明:对任意闭合面

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \iint_{(S_2)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{(S_1)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_2)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

磁通量仅由任意
闭合面的共同边
界线所决定

可能找到一个矢量 \vec{A} ,
它沿 L 作线积分等于
通过 S 的磁通量

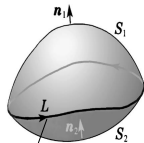


图2-1-58:

$$\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{a})$$

- ◆ 数学上可以证明,这样的矢量 \vec{A} 的确存在,对于磁感应强度 \vec{B} , \vec{A} 叫做磁矢势, \vec{A} 在空间的分布也构成矢量场,简称为矢势。

根据矢量分析

➤ 对任意矢量 \vec{A} 有 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

➤ 矢势的特点:

其实标势也不
唯一, 零点可选

➤ 满足 $\nabla \times \vec{A}$ 的 \vec{A} 不唯一

如: 对于任意标量场 φ 的梯度 $\nabla\varphi$, 有 $\nabla \times \nabla\varphi = 0$

$$\nabla \times (\vec{A} + \nabla\varphi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla\varphi = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

描述同一个磁感应强度 \vec{B}

规范变换: $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$

类似于电势零点可以任取, 规范也可任意选取;

通常选库仑规范: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

找电流产生的磁场中磁矢势的表达式

➤ 两种办法

利用对称性由 $\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 得出

普通物理
的方法

由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 和 $\nabla \cdot \vec{A} \Rightarrow \vec{A}$ 的表达式

电动力学的
做法

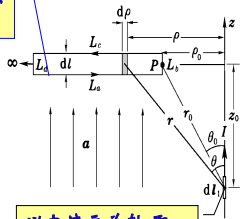
- ① 电流元的磁矢势:
- ② 任意闭合回路的磁矢势:
 - 例题2-1-5
 - 例题2-1-6

(1) 电流元的磁矢势

取闭合环路L

➤ 设磁矢势 \vec{a} 与电流元平行(因为对矢势变换规范可以任选,选库仑规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 的结果)

➤ —— \vec{a} 只有z分量



以电流元为轴,取柱坐标 (ρ, ϕ, z)

图2-1-59:

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{L_a} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_b} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_c} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_d} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{L_b} \vec{a} \cdot d\vec{l} = a_z(\rho) dl$$

$L_a \perp a, L_c \perp a, L_d \rightarrow \infty$

只有这一段积分有贡献

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = a_z(\rho) dl = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \dots \dots ?$$

计算通过 L 的通量

➤ 场点 P 和回路 L 在 $\varphi = 0$ 的平面内

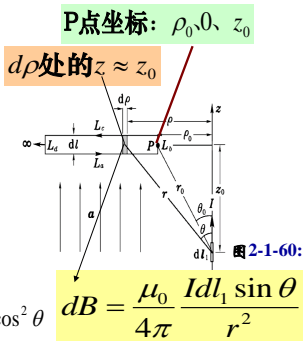
➤ 通过 L 的磁感应通量为:

$$d\Phi_B = \frac{\mu_0 I dl_1 dl}{4\pi} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\sin \theta d\rho}{r^2}$$

$$r = z_0 / \cos \theta, \rho = z_0 \tan \theta, d\rho = z_0 d\theta / \cos^2 \theta$$

$$d\Phi_B = \frac{\mu_0 I dl_1 dl}{4\pi z_0} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I dl_1 dl}{4\pi z_0} \cos \theta_0 = \frac{\mu_0 I dl_1 dl}{4\pi r_0}$$

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = a_z(p) dl \quad \text{消去 } dl \rightarrow a_z(p) = \frac{\mu_0 I dl_1}{4\pi r_0}$$



(2) 矢势公式的应用举例

► 例题2-1-5: 一对平行无限长直导线, 载有等量反向电流 I , 求其矢势。

• 先求一根无限长直导线的磁矢势(如图)

► 设矢势 \vec{A} 只有 z 分量

► 无限长—— A_z 与 z 无关

► 轴对称—— A_z 与 φ 无关

► A_z 只是 ρ 的函数: $A_z = A_z(\rho)$

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \int_{L_u} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_b} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_c} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_d} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{L_b} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_d} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= [A_z(P) - A_z(Q)]l = l \int_{\rho_P}^{\rho_Q} B d\rho = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{\rho_P}^{\rho_Q} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q}{\rho_P} \end{aligned}$$

求磁通量

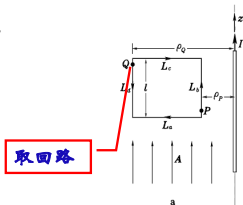


图2-1-61:

一根无限长导线在空间任两点之间的矢势差

$$[A_z(P) - A_z(Q)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q}{\rho_P}$$

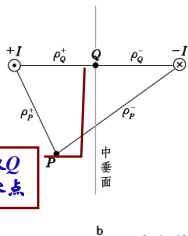
两根无限长载流直导线的磁矢势

$$\begin{cases} [A_z^+(P) - A_z^+(Q)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q^+}{\rho_P^+} \\ [A_z^-(P) - A_z^-(Q)] = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q^-}{\rho_P^-} \end{cases}$$

取Q
零点

叠加得
P点总
矢势

图2-1-62:



$$[A_z(P) - A_z(Q)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{\rho_Q^+}{\rho_P^+} - \ln \frac{\rho_Q^-}{\rho_P^-} \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_P^-}{\rho_P^+} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_-}{\rho_+}$$

例題2-1-6: 无限长圆柱型导体, 半径为 R , 载有在界面上均匀分布的电流 I , 求磁矢势。

(1) $r < R$: 导线内部 P 点, 取 Q 点在导体轴线上, 取回路如图, 通过回路的磁通量

$$\Phi_B = I \int_r^0 B dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi R^2} \int_r^0 r dr = -\frac{\mu_0 I r^2 l}{4\pi R^2}$$

$$[A_z(r) - A_z(0)] = A_z(r) = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi R^2}, r < R$$

(2) $r > R$: 导线外部同例題2-1-5, 取 Q 点在导体表面, 外部任意点 P 与 Q 点的矢势差为

$$r = R, A_z(R) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

$$[A_z(r) - A_z(R)] = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{R} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right], r > R$$

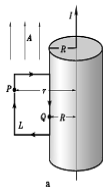
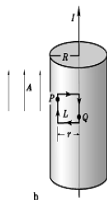


图2-1-63:

求矢势小结

$$\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

➤ 依据公式(a)求矢势的基本步骤

- 根据对称性,假设一个矢势的方向;
- 取闭合回路,注意矢势零点的选取(原则:或可提出积分号,或积分好算);
- 算出通过回路的磁通量;
- 得出 \vec{A} 一个表达式。

➤ 以上几个例子都属于强对称性场,实际上是已知 \vec{B} 求 \vec{A} ,也可以直接根据电流分布求矢势

——更多的问题在电动力学中学习;

➤ 相关的习题很少,掌握这种方法。

§ 2-1-5: 安培力与洛仑磁力

【1】 安培力

一、 载流直导线受磁力

1、 均匀磁场: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F = IlB\sin\theta$

$$\theta = \begin{cases} 0, \pi & F = 0 \\ \frac{\pi}{2} & F_{max} \end{cases}$$

2、 非均匀磁场: 平动+转动;

3、 载流曲导线: 矢量合成 $\vec{F} = \int Id\vec{l} \times \vec{B}$

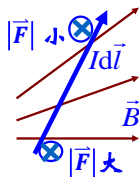


图2-1-64: 非匀磁场

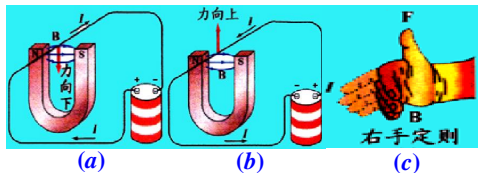


图2-1-65: 磁场对载流导线的作用

二、平行长直电流之间的相互作用

平行长直电流 I_1 和 I_2 , 相距 a , 见图2-1-67所示。

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \Rightarrow d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}$$

$$dF_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2$$

$$\frac{dF_{12}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

$$\text{令 } I_1 = I_2 = I \quad I^2 = \frac{a}{2} \times 10^7 \cdot \frac{dF_{12}}{dl_2}$$

$$a = 1\text{m} \quad \frac{dF_{12}}{dl_2} = 2 \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$I = 1\text{A}$ —— 电流单位安培的定义

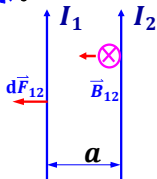


图2-1-67: 平行长直电流

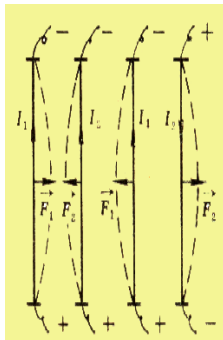


图2-1-66: 平行直电流间作用

三、磁场对载流线圈的作用

1、均匀磁场中的矩形载流线圈,如图2-1-69,矩形中, $AB = CD = l_1$, $BC = DA = l_2$

受力分析:

AB边, $F_1 = I l_1 B$, 向外

CD边, $F_2 = I l_1 B$, 向内

BC边, $F_3 = I l_2 B$, 向下

DA边, $F_4 = I l_2 B$, 向上

$$M = F_1 l_2 \cos\theta = I l_1 l_2 B \cos\theta = ISB \cos\theta$$

设线圈平面法线 \vec{n} (即 \vec{B} 与 \vec{S} 夹角 φ) $\cos\theta = \sin\varphi$

$$\vec{\mu} = N I \vec{S} = N I S \vec{n}$$

再若线圈为 N 匝, 则 $L = N I S B \sin\varphi \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

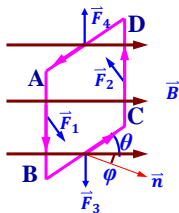


图2-1-69: 矩形载流线圈

【讨论】：

- (1) 均匀磁场中, $\sum \vec{F} = 0$, 只有转动;
- (2) $\varphi = 0$, $\vec{M} = 0$, 稳定平衡;
- (3) $\varphi = \pi$, $\vec{M} = 0$, 不稳定平衡;
- (4) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $M_{\max} = \mu B$

2、非均匀磁场中的载流线圈,

由图2-1-70, $B_1 > B_2$,

则 $F_1 > F_2$,

所以, 除转动外, 还向 \vec{B} 大处移动。

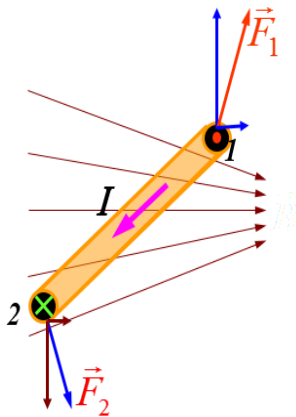


图2-1-70: 非均匀磁场

3、任意形状的平面载流线圈

将线圈沿 \vec{B} 方向,即 x 方向,分割成小矩形线圈,如图2-1-71。

$$dF_1 = Idl_1 B \sin\theta_1; dF_2 = Idl_2 B \sin\theta_2$$

$$dl_1 \sin\theta_1 = dl_2 \sin\theta_2 = dy ;$$

$$dF_1 = dF_2 = IBdy$$

$$M = IB(x_1 + x_2)dy = IBdS$$

$$M = \int NIBdS = NIBS \sin\varphi \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

任意形状的载流平面线圈,在均匀外磁场中不受力,但受到一个力矩,其总是力图使其磁矩转到 \vec{B} 方向。

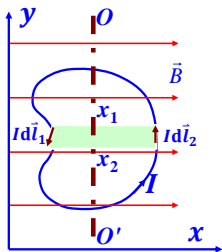
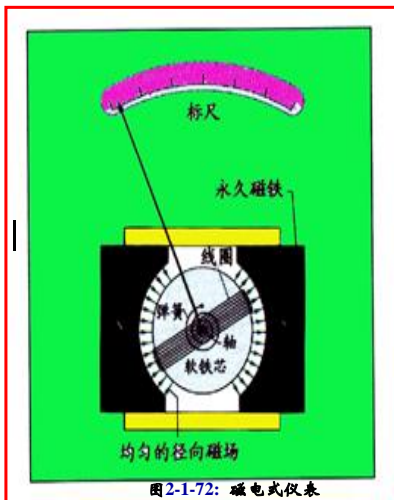


图2-1-71:平面载流线圈

4、应用:磁电式仪表、直流电动机、振镜扫描仪等。



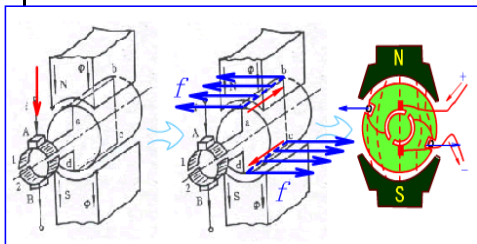
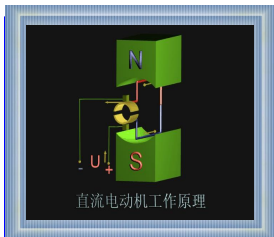


图2-1-73: 直流电动机

四、载流导体运动时磁力的功

1、载流直导线平动:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F = IlB$$

$$A = IlBd = I \cdot \Delta\Phi_m$$

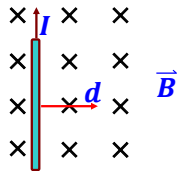


图2-1-74: 直流磁力的功

A 的正负与的正负无关!

2、载流线圈转动：

如图2-1-75,均匀磁场 \vec{B}
平面线圈磁矩 $\vec{\mu} = IS\vec{n}$ > 夹角 θ

对 θ 微小的增量 $d\theta$,磁力的元功

$$dA = -Md\theta = -BIS\sin\theta d\theta = Id(BScos\theta)$$

即 $dA = Id\Phi_m$ 1) I 不变, $A = I\Delta\Phi_m$

2) I 变, $A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi_m$ 。

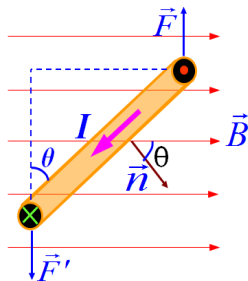


图2-1-75:不匀磁场中的线圈

【例题2-1-9】 矩形线圈可绕Y轴转动,边长 $l_1=6\text{cm}$, $l_2=8\text{cm}$, 电流 $I = 10\text{A}$ 。均匀磁场 $B = 0.02\text{T}$,方向平行X轴。求线圈平面与 \vec{B} 的方向成 30° 角时,求每边受到的安培力和线圈所受的磁力矩。

【解】 直导线在均匀磁场受力为 $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$

$$\text{则 } F_{ab} = -F_{co} = Il_1 B \sin 30^\circ$$

$$F_{bc} = -F_{oa} = Il_2 B \sin \frac{\pi}{2} = Il_2 B$$

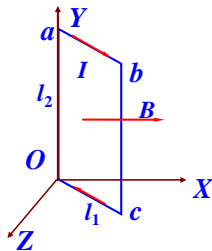


图2-1-76: 矩形线圈

线圈的磁力矩则为 $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

$$M = ISB \sin \theta = 10 \times 4.8 \times 10^{-2} \times 2 \times 10^{-2} \sin 60^\circ = 8.31 \times 10^{-2} (\text{N} \cdot \text{m})$$

例题2-1-10: 载有电流 I_1 的长直导线, 旁边有一正方形线圈, 边长为 $2a$, 载有电流 I_2 , 线圈中心到导线的垂直距离为 b , 线圈可绕平行于导线的轴转动。求

(1) 线圈角度为 α 位置时所受的合力 \vec{F} 和合力矩 \vec{L} ;

(2) 线圈从平衡位置转到 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 磁力所做的功。

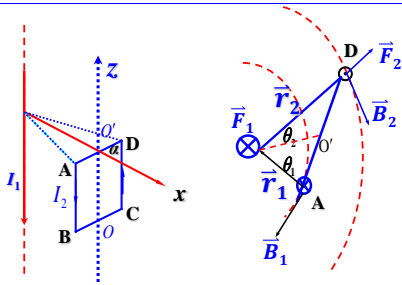


图2-1-77: 题2-1-10图

解:选择图示直角坐标系 $O'xyz$

(1)如图2-1-78所示整个线圈所受合力为
AB、CD两电流边受力矢量和,即

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

由安培力定律可知AB电流边受力大小为

$$F_1 = I_2 2a B_1 = I_2 2a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_1}$$

方向如图所示。

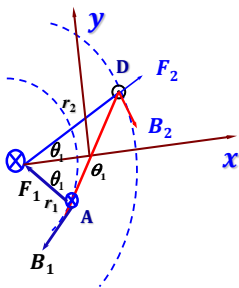


图2-1-78: 题2-1-10图

同理,CD电流边受力大小为

$$F_2 = I_2 2a B_2 = I_2 2a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_2}$$

方向如图所示

由图示的几何关系,可知

$$\begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos\theta_1 = F_1 \frac{b - a \cos\alpha}{r_1} \\ F_{1y} = F_1 \sin\theta_1 = F_1 \frac{a \sin\alpha}{r_1} \\ F_{2x} = F_2 \cos\theta_2 = F_2 \frac{b + a \cos\alpha}{r_2} \\ F_{2y} = F_2 \sin\theta_2 = F_2 \frac{a \sin\alpha}{r_2} \end{cases}$$

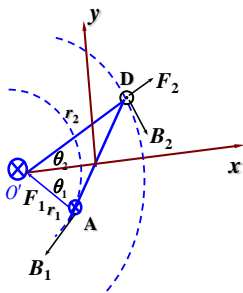


图2-1-78:题2-1-10图

$$\therefore \begin{cases} r_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ r_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha \end{cases}$$

如图,在直角坐标上分解得

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi} \left(\frac{b + a\cos\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} - \frac{b - a\cos\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \right)$$

$$\therefore F_y = F_{1y} + F_{2y} = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi} \left(\frac{a\sin\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} - \frac{a\sin\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \right)$$

根据力矩定义,得

$$\begin{aligned} L &= \sum F_{ix}y_i - \sum F_{iy}x_i = F_{1x}a \sin \alpha + F_{2x}a \sin \alpha - F_{1y}a \cos \alpha - F_{2y}a \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b a^2 \sin \alpha}{\pi} \times \\ &\quad \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} + \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \right) \end{aligned}$$

\vec{L} 方向,在俯视图中磁力矩使线圈沿顺时针方向旋转。

(2) 线圈平衡时, $\vec{L} = 0$, 即 $\alpha = 0$

$$A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} L d\alpha = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} L d\alpha$$

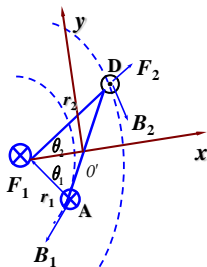


图2-1-78:题2-1-10图

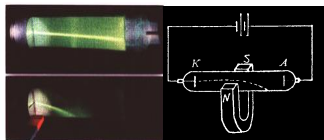
$$= - \frac{\mu_0 I_1 I_2 b a^2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha d\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha d\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi} \ln \frac{b-a}{b+a}$$

即为线圈从平衡位置转到 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 磁力所做的功。

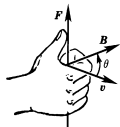
【2】洛伦兹力

实验证明:运动电荷在磁场中受力 $\vec{F} \begin{cases} \propto qv, B, \sin\theta \\ \vec{v} \times \vec{B} \text{ 的方向} \end{cases}$



(a)

(b)



$$\vec{F} \perp \vec{v}, \vec{F} \perp \vec{B}$$

图2-1-79:电子束在磁场中偏转

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

洛伦兹力做功吗?

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

洛伦兹力与安培力的关系?

洛伦兹力与安培力的关系

- 电子数密度为 n ，漂移速度 u ；
- dl 内总电子数为 $N = nSdl$ ，每个电子受洛伦兹力 \vec{f} ；
- N 个电子所受合力总和是安培力吗？

- 洛伦兹力 \vec{f} 作用在金属内电子上；
- 安培力 \vec{F} 作用在导体金属上；

作用在
不同的
对象上。

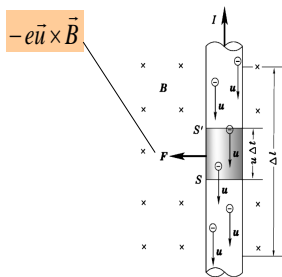


图2-1-80:金属导线模型

- 自由电子受力后,不会越出金属导线,而是将获得的冲量传递给金属晶格骨架,使骨架受到力。

电子受洛仑兹力的合力

骨架受到的冲力

$$\sum_{i=1}^n \vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{f}''$$

证明：

(1) 先说明导线中自由电子与宏观电流 I 的关系：

- 自由电子：定向运动，漂移速度 u ，电子数密度为 n ；
- 电流强度 I ：单位时间内通过截面的电量；

则在 Δt 时间内，通过导体内任一面元 ΔS 迁移电量为

$$\Delta q = (u \Delta t \Delta S \cos \theta) n e$$

电流

\vec{j} 电流密度

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = n e u \Delta S \cos \theta = \boxed{-n e \vec{u}} \cdot \vec{dS}$$

(2) N 个电子所受合力总和大小:

$$N = nS\Delta l$$

$$dF = \sum_i f_i = euBN = (eunS)B\Delta l = IB\Delta l$$

I

➤ 传递机制可有多种,但最终达到稳恒状态时,如图导体内将建立起一个大小相等方向相反横向电场 \vec{E} (霍尔场):

➤ 电子受力:洛伦兹力 \vec{f} ;

➤ \vec{E} 的作用力 \vec{f}' ;

带正电的晶格:在电场中受到 f'' ;

➤ \vec{f}'' ——与电子所受洛伦兹力 \vec{f} 方向相同;

➤ 安培力 \vec{F} 是晶格所带电荷受力 \vec{f}'' 总和

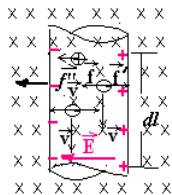


图2-1-81:磁场中载流导线

结论:安培力是电子所受洛伦兹力宏观表现。

[1] 带电粒子在磁场中的运动

带电粒子电量 q , 质量 m , 初速度 \vec{v}_0 , 磁感应强度 \vec{B}

1. $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}, \vec{F} = 0$, 匀速直线运动;

2. $\vec{v}_0 \perp \vec{B}, \vec{F} \perp \vec{v}_0$, 匀速圆周运动; $F = |q|v_0B = m\frac{v_0^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{mv_0}{|q| \cdot B}$ $R \propto v_0$

$$\frac{R}{v_0} = \frac{m}{|q| \cdot B} \quad \boxed{\text{常量}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{|q| \cdot B} \quad \boxed{\text{与 } v_0 \text{ 无关}}$$

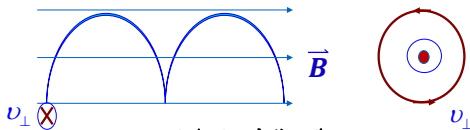


图2-1-82: 电子在磁场中作螺旋运动

3. \vec{v}_0 与 \vec{B} 夹角 θ , $v_{\parallel} = v_0 \cos\theta$, 匀速直线运动
 $v_{\perp} = v_0 \sin\theta$, 匀速圆周运动 \rightarrow 螺旋运动

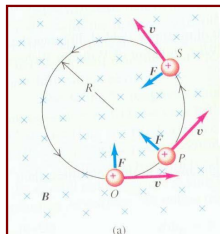
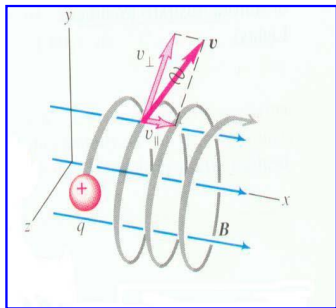


图2-1-83: 电子在磁场中作螺旋运动

[2]回旋加速器

1、结构:逐步参见图2-1-84

➤一对D型盒(电极),半径 R ;

➤交变电场(电源),周期 T ;

➤磁场,磁感应强度 B 。

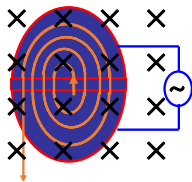


图2-1-84:回旋加速器

2、原理:D型盒电极间加速电场周期=回旋共振周期

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi R}{v_0}$$

粒子通过电极间隙时总被加速,最终速率 $v_M = BR \frac{q}{m}$

$$\text{粒子最终动能: } E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(qBR)^2}{2m}$$

受相对论效应约束,当 $\frac{q}{m}$ 不是常量时,其基本原理不再满足。

[3]磁聚焦

1) 电子枪、电子透镜

2) 电子的飞行速率

$$v_{\parallel} = v, v_{\perp} = v\theta$$

➤ 周期 $T = \frac{2\pi m}{eB}$

➤ 螺距 $t = vT = \frac{2\pi mv}{qB}$

➤ 屏距 $L = nt = \frac{2\pi nmv}{qB}$ $n = 1, 2, \dots$ (图2-1-86例, $n = 2$)

➤ 电与磁聚焦

(A) 改变电场 \vec{E} , 即改变 \vec{v}

(B) 改变磁场 \vec{B} , 均改变 t, L

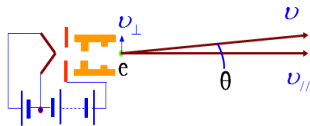


图2-1-85: 电子枪示意图

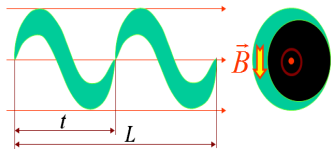


图2-1-86: 电子束的磁聚焦

[4]磁约束

➤ 带电粒子在非均匀磁场中沿磁感应曲线作螺旋运动。

由下式知 $R = \frac{mv}{qB}$

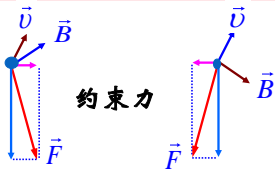
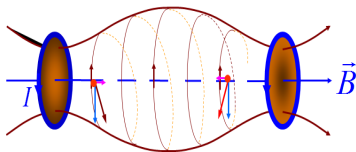
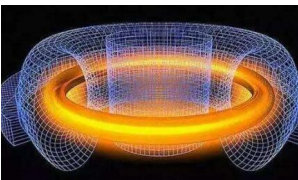


图2-1-87:正离子被磁约束示意图

➤ 带电粒子在向磁场较强的方向运动时,作螺旋运动的半径将随着磁感应强度的增加而不断地减小,如图所示。

➤ 带电粒子在非均匀磁场所受洛伦兹力,恒有一个指向磁场较弱方向的轴向分力,此力阻止带电粒子向磁场较强的方向运动,这样有可能使粒子沿磁场方向的速度逐渐减少到零,从而迫使粒子掉向反转运动。

➤ 利用这种现象,制造出磁约束装置。

➤ **磁镜原理**: 利用带电粒子磁矩的守恒性, 可以把带电粒子约束在一弱磁场区, 其两端磁场较强, 形成所谓“磁镜”。

➤ 这种两端强、中间弱的磁场位形, 可用两个电流方向相同的线圈产生, 称为**磁镜装置**。

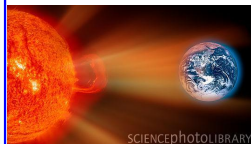
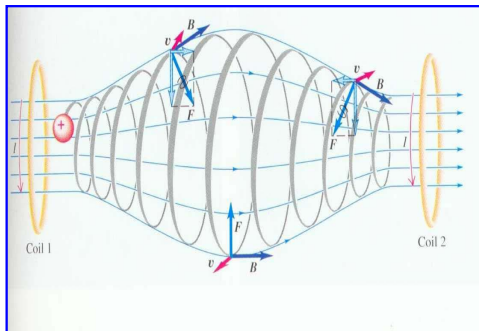


图2-1-88:

非均匀磁场的磁约束应用:

- 磁镜及环形磁约束结构;
- 解释地磁场内的范艾伦(J. A. Van Allen)辐射带;
- 解释北极光现象。

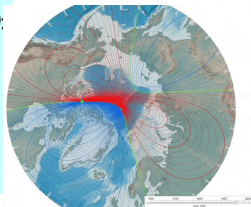
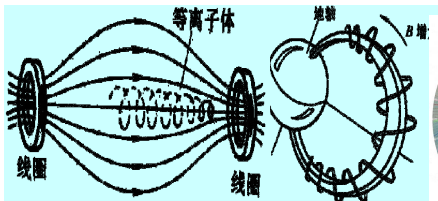
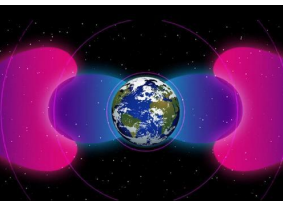
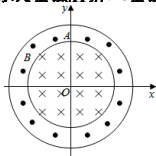


图2-1-89:

【习题】 如图所示一磁约束装置的原理图,同心圆圆心 O 与 xOy 平面坐标系原点重合,半径为 R_0 的圆形区域I内有方向垂直于 xOy 平面向里的匀强磁场,一束质量为 m ,电荷量为 q ,动能为 E_0 的带正电粒子从坐标为 $(0,R_0)$ 的A点沿 y 轴负方向射入磁场区域I,粒子全部经过坐标为 $(0,R_0)$ 的P点,方向沿 x 轴正方向。当在环形区域II加上方向垂直于 xOy 平面向外的另一匀强磁场时,上述粒子仍从A点沿 y 轴负方向射入区域I,所有粒子恰好能够约束在环形区域内,且经过环形区域II的磁场偏转后第一次沿半径方向从区域II射入区域I时经过内圆周上的M点(M点未画出),不计重力和粒子间的相互作用。

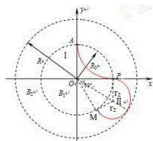


(1) 区域I中磁感应强度 B_1 的大小;

(2) 若环形区域II中磁场强度 $B_2 = \sqrt{3}B_1$,求M点坐标及环形外圆半径 R ;

(3) 求粒子从A点沿 y 轴负方向射入圆形区域I至再次以相同速度经过A点的过程所通过的总路程。

【解】 (1) 由题意,粒子在区域I内从A点做匀速圆周运动到P点,显然 $r_1=R_0$



[5] 荷质比的测定

1、W. Thomson 测荷质比的方法

当 E 和 B 的值适当时, 可使电子束不偏转, 即 $eE = evB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$ (1)

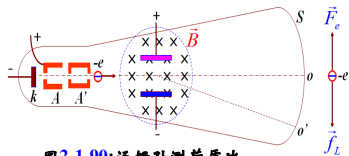


图2-1-90: 汤姆孙测荷质比

切断电场, 电子在磁场中作圆周运动, 圆周半径 $R = \frac{mv}{eB}$ (2)

由式(1)、(2)得荷质比 $\frac{e}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{E}{RB^2}$

电子运动出磁场后依惯性前进。由屏 S 上光点偏移量 oo' 和仪器参数可测算出 R 的值。其参数包括结构尺寸, 电、磁场分布等。

❖ 荷质比与速度有关, 这符合狭义相对论观点

2、磁聚焦法测荷质比方法

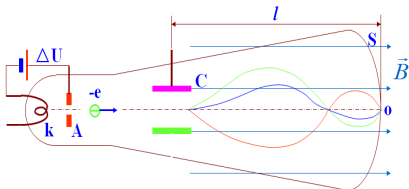


图2-1-91:磁聚焦法测荷质比

➤如图2-1-91,A—k间加电压 ΔU ,电子的动能 $\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta U \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2e\Delta U}{m}}$ (3)

➤在电容C上加一小交变电场,使不同时刻通过的电子偏转不同。

➤在C与S之间加聚焦磁场 \vec{B} ,调节 \vec{B} ,使电子束聚焦于屏S平面上,则 $l = \frac{2\pi mv}{eB}$ (4)
($n=1$, 如何确定?)

➤由式(3)、(4)得荷质比 $\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2\Delta U}{l^2 B^2}$

❖ 质谱仪

质谱仪是通过测量电离原子(离子)的质量或荷质比对样品进行成分分析的重要仪器。

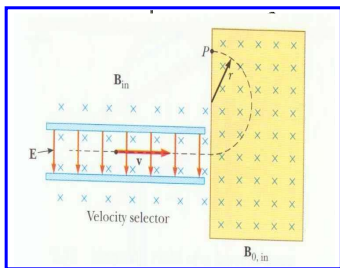


图2-1-92:质谱仪

原理:如图2-1-92所示被加速的离子进入速度选择器,即其中存在着相互垂直的均匀电场和均匀磁场的电容器两极板之间。

[6]托卡马克

托卡马克是“磁线圈圆环室”的俄文缩写,又称环流器。

一个类似螺绕环的装置,由封闭环形磁场构成的“环形容器”(见图2-1-93),可用来约束等离子体。

- ①将这整个带有等离子体的圆环室作为一个大型变压器的次级线圈;
- ②当变压器通电后,等离子体内将有很大的电流,造成绕环轴的圆型磁场(见图2-1-94) $B \propto r$;
- ③靠环壁的带电粒子受磁压效应向环轴集中,达到磁悬浮约束等离子体的目的。

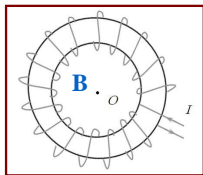


图2-1-93: 环流器

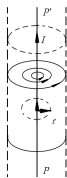


图2-1-94: 绕环轴磁场

- 当等离子体当环内中含大量氘(D)、氚(T)离子,且当等离子体温度达到或高于 10^8K 时,才能发生聚变反应:



- 释放出大量核能,又称**热核聚变反应**
- 为使这反应能持续进行,还必须使维持的时间 τ 与离子的数密度 n 达到

$$n\tau > 3 \times 10^{20} (\text{m}^{-3} \cdot \text{s})$$

称为**劳逊条件**

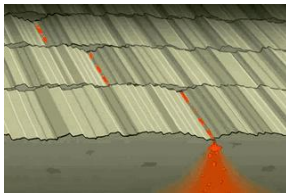
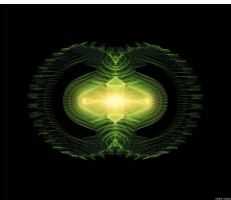
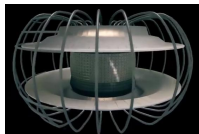


图2-1-95:合肥“人造小太阳”装置—EAST

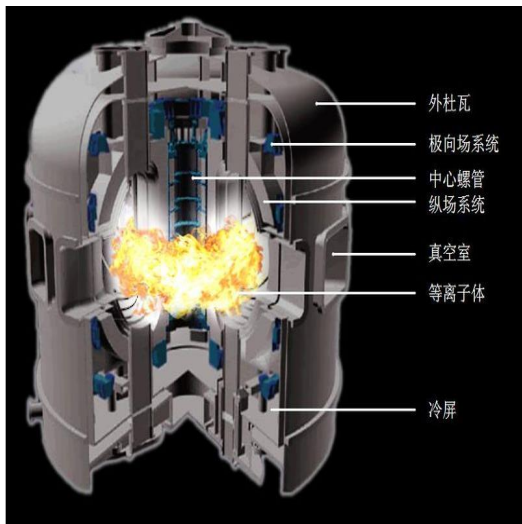


图2-1-96

【例题2-1-11】 在空间有互相垂直的均匀电场 E 和均匀磁场 B , B 沿 x 轴方向, E 沿 z 轴方向。一电子(质量为 m 电荷量为 e)开始从原点出发, 以速度 v_0 向 y 轴方向前进, 如图2-1-97所示, 试求这电子运动的轨迹。

【解】 如图, 电场和磁场分别为

$$\begin{cases} \vec{E} = (0, 0, E) & \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B} = (B, 0, 0) & \text{②} \end{cases}$$

初始条件为: $t = 0$ 时

$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \\ \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)_0, \left(\frac{dy}{dt} \right)_0, \left(\frac{dz}{dt} \right)_0 \right) = (0, v_0, 0) \end{cases}$$

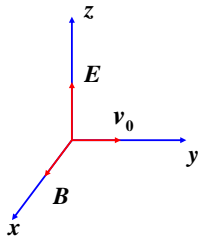


图2-1-97:

电子的运动方程为 $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E} + e \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$ ③

写成分量式,并考虑式①、②,使得

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{④} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = eB \frac{dz}{dt} \quad \text{⑤} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = eE - eB \frac{dy}{dt} \quad \text{⑥} \end{array} \right.$$

解式④,并利用初始条件解得 $x=0$, 这表明电子在 $y-z$ 平面内运动。

将式⑤对时间 t 积分,并利用初始条件得

$$m \frac{dy}{dt} = eBz + mv_0 \quad (7)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{e^2 B^2}{m} \left(z - \frac{mE}{eB^2} + \frac{mv_0}{eB} \right)$$

解方程,并利用初始条件得

$$z = \frac{m}{eB} \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \left[\cos \left(\frac{eB}{m} t \right) - 1 \right]$$

将上式代入式⑦,积分并利用初始条件得

$$y = \frac{m}{eB} \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin \left(\frac{eB}{m} t \right) + \frac{E}{B} t$$

由此得电子运动轨迹,是 $y-z$ 平面里一条摆线(旋轮线)。

【例题2-1-12】磁镜:

(1) 一个半径为 R , 电流为 I 的电流圆环, 求在轴线上的磁感应强度。

(2) 设两个线圈各有 N 匝线圈, 通以相同的电流为 I , 两个线圈的半径都为 R 。如果两个线圈之间的距离为 $10R$, 这时两个线圈之间的磁场就形成了一个磁镜, 带电粒子在磁镜中磁矩 μ 是守恒量。宇宙射线中的带电粒子在各个方向均匀进入这个磁镜中, 则什么角度范围内的带电粒子进入这个磁镜后会被捕获?

(3) 带电粒子在磁镜中运动, 如果磁感应强度为 B 处的回旋半径 a , 证明: $a\sqrt{B} = \text{const}$

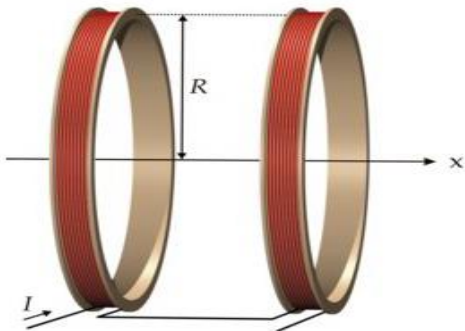


图2-1-98

§ 2-1-5 霍耳效应(讲座4)

▶ 爱因斯坦说过:

“想象力比知识更重要,因为知识是有限的,而想象力概括着世界上的一切,推动着进步,并且是知识进化的源泉。严格地说,想象力是研究中的实在因素”

1、发现

▶ 1879,24岁的霍耳 (E. T. Hall, 美, 1855-1938) 发现: “电流通过金属, 在磁场作用下产生横向电动势”

——霍耳效应



图2-1-99

* § 2-1-6: 不同参照系之间电磁场

一、特鲁顿和诺伯的实验

若以太存在,为绝对参照系 S ,地球是非绝对参照系 S'

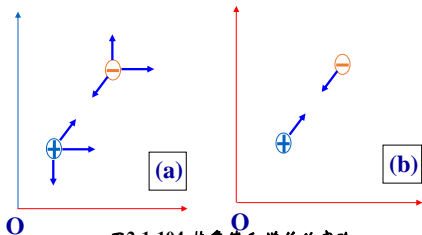


图2-1-104:特鲁顿和诺伯的实验

电荷在 S' 中静止,只有静电力相互作用,如图2-1-104(b);

电荷在 S 中运动,除静电力,还有磁力作用,如图2-1-104(a);

结果是否定的



电磁规律的数学形式在一切惯性参照系中均相同

本节要求

- 1、了解磁的基本现象,理解安培定律及磁感应强度的概念;
- 2、理解毕奥-萨伐尔定律,能计算简单情况下电流的磁场分布;
- 3、理解磁场的高斯定理和安培环路定律的意义,能计算有一定对称性的电流的磁场分布;
- 4、理解载流导体的磁矩的定义,并能计算它受磁场作用的力矩;
- 5、理解洛仑兹力公式的意义,会计算带电粒子在磁场中的运动。

2-1:真空中静磁场小结

一、理论体系:

$$\left. \begin{array}{l} \text{库仑定律} \\ \text{安培定律} \\ \text{毕-萨-拉定律} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{高斯定理} \rightarrow \text{磁场为无源场} \\ \text{环路定理} \rightarrow \text{磁场是有旋(矢势)场} \end{array} \right.$$

二、内容:

$$\begin{array}{l} \text{1. 两条路线} \\ \text{2. 两个定理:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_m = \frac{q_{m0} q_m}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{r} \\ d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \\ \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$$

3. 两个物理量: \vec{B} —— 反映场力性质, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, 要求唯一。

\vec{A} —— 反映场能性质, 要求可微。

$$\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

4. 三种方法: 已知电流分布, 求磁场分布

(1) 毕-萨-拉定律;

(2) 环路定理;

(3) $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 。

5. 场的形象化几何描述:

磁力线——规定、性质、通量 $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$

6. 磁场力的作用:
$$\begin{cases} \vec{F}_A = I d\vec{l} \times \vec{B} \\ \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \end{cases}$$

7. 应用: 磁聚焦、荷质比、回旋加速器、气泡室等

8. 霍尔效应:
$$U_H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{d}$$

三、 I 、 \vec{B} 、 \vec{A}

1. $I \Rightarrow \vec{B} \Rightarrow \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

2. $I \Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \\ \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i \end{cases}$

小结图

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 dl_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \Rightarrow \begin{cases} d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B} \\ d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \end{cases} \rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

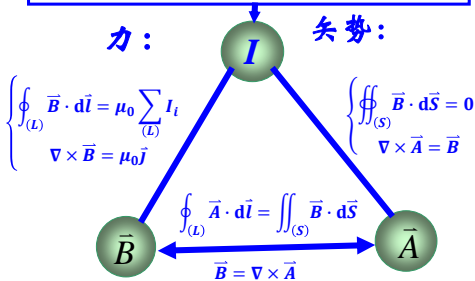


图2-1-105

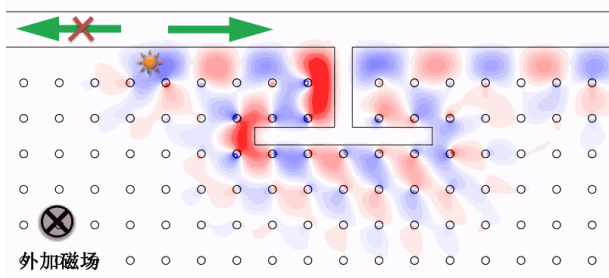


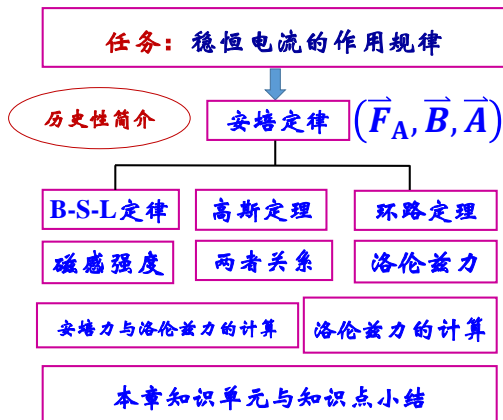
图2-1-106: 量子霍尔边界态单向传输示意图

第二章 静磁理论部分

2-1 真空中稳恒磁场

2-2 物质中的静磁场

第二章 静磁理论部分(I)



历史性简介

- > 指南针中国古代四大发明之一,司马迁《史记》描述黄帝作指南;
- > 1086年宋朝沈括《梦溪笔谈》指南针的制造方法等;
- > 1119年宋朝朱或《萍洲可谈》罗盘,用于航海记载;
- > W. Gilbert 《De Magnete》磁石,最早的著作;
- > 18世纪,安培电流产生磁场;
- > 法拉第效应,在磁场中运动导体产生电流;
- > 安培定律,构成电磁学的基础,开创现代电气工业;
- > 1907年,P. Weiss的磁畴和分子场假说;
- > 1928年,洛森堡模型,用量子力学解释分子场起源;
- > 1946年,Bioembergen发现NMR效应;
- > 1948年,Neel建立亚铁磁理论;
- > 1954-1957年,RKKY相互作用的建立;
- > 1958年,Mössbauer效应的发现;
- > 1960年,铁磁晶体的理论预言;
- 1965年,Mader和Nowick制备了CoP铁磁非晶态合金;
- > 1970年,SmCo5稀土永磁材料的发现;
- 1982年,扫描隧道显微镜,Brining和Rohrer(1986年,AFM);
- > 1984年,NdFeB稀土永磁材料的发现Sagawa(佐川);
- 1986年,高温超导体,Bednortz - muller;
- > 1988年,巨磁电阻GMR的发现(M. N. Baibich),法国Paris - Sud大学的Albert Fert以及德国克虏伯研究中心的Peter Grünberg获2007年诺贝尔物理学奖;
- > 1994年,CMR庞磁电阻的发现,Jin等LaCaMnO₃;
- > 1995年,T. Miyazaki的隧道磁电阻TMR的发现.....



图2-1-1: 指南

2-1 真空中稳恒磁场

2-1-1 磁荷与电流磁效应

2-1-2 磁感强度

2-1-3 高斯定理与安培环路定理

2-1-4 磁感强度与磁矢势

2-1-5 安培力与洛仑磁力

2-1-1 磁荷与电流磁效应

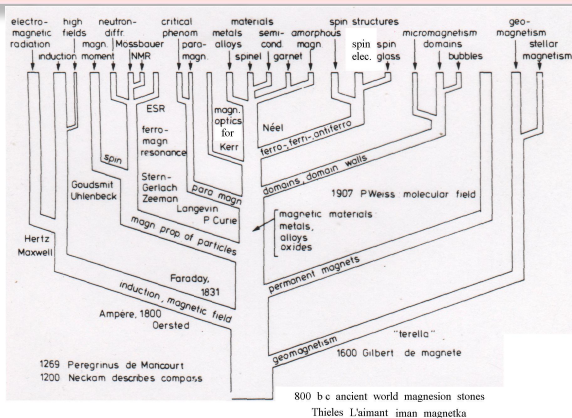


图2-1-2:磁学发展与分支

永磁在汽车上的应用

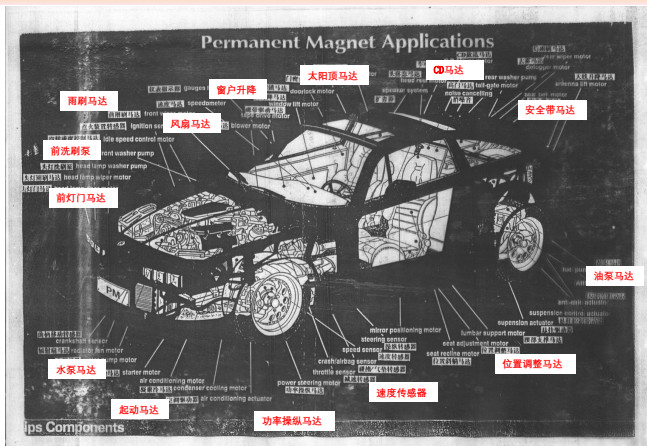


图2-1-3: 永磁在汽车上的应用

The World of Magnetic Sensors

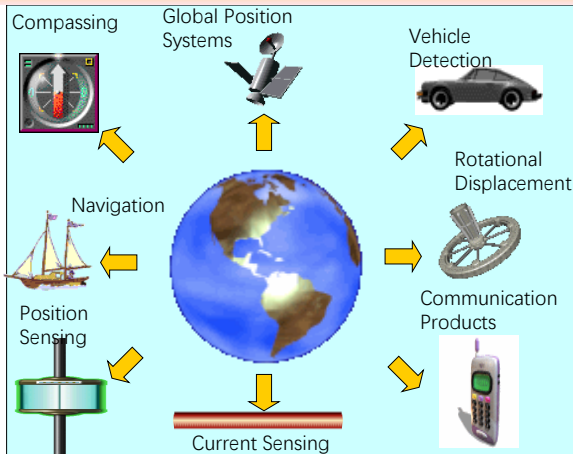
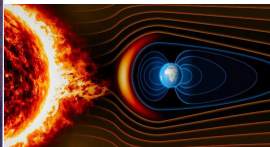


图 2-1-4: The World of Magnetic Sensors

2-1-1磁荷与电流磁效应



Hans Christian Ørsted (1777-1851). Besides his work in electricity and magnetism, Ørsted was the first to prepare pure metallic aluminum (1825).



安培定律



磁荷与电磁效应

B-S-L定律

安培定律

磁感强度叠加原理

图2-1-5:奥斯特的电流磁效应

1. 磁荷及其作用定律

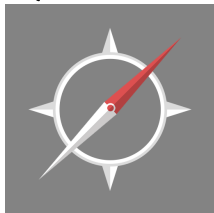
[1] 磁库仑定律与磁荷磁场

18世纪末,库仑在研究磁极相互作用时,通过大量实验总结出了**磁库仑定律**:两点磁荷之间的相互作用力与它们的磁荷量之积成正比,与它们之间的距离平方成反比。

考虑到力的方向性,**磁库仑定律**为:
$$\vec{F}_m = \frac{q_{m0} q_m}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{r}$$



图2-1-6:磁铁相互作用模式



磁场强度的定义:
$$\vec{H} = \frac{\vec{F}_m}{q_{m0}}$$

磁荷磁场强度:
$$\vec{H} = \frac{q_m}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{r}$$

磁荷观点的类比(电荷)

$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{q_{m0}} \quad \text{磁场强度}$	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \text{电场强度}$
$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ $\vec{H} = -\nabla U_m$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ $\vec{E} = -\nabla U$
磁偶极子的磁势 U_m $U_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{p}_m \cdot \vec{r}_0}{r^2}$	电偶极子的电势 U $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_0}{r^2}$
磁偶极层 $\vec{H} = \frac{\tau_m}{4\pi\mu_0} \nabla\Omega$	电偶极层 $\vec{E} = \frac{\tau_e}{4\pi\epsilon_0} \nabla\Omega$
$\vec{L} = \vec{p}_m \times \vec{H}$	$\vec{L} = \vec{p}_e \times \vec{E}$

[2] 静磁学几个重要概念

(1) 磁荷不能孤立存在,总是以**磁偶极子**的形式存在于磁介质中。

所谓**磁偶极子**就是无限靠近的等量异号磁荷构成的**磁性子元**,其磁位表达式为

$$U_m = \frac{1}{4\pi} \vec{m} \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

(2) 无外部磁场作用时,磁介质中的磁偶极子杂乱无章,所以整体不显现磁性;在外部磁场的作用下,磁介质中的磁偶极子发生定向排列,因而显现出磁性。

(3) 在外磁场作用下磁偶极子定向排列称作**磁化**,磁介质磁化状态以**磁化强度矢量** \vec{M} 描述。

磁化强度的定义为单位体积所含**磁偶极子磁矩的矢量和**。

(4) 磁性体 V 的磁位表达式为 $U_m = \frac{1}{4\pi} \iiint_{(V)} (\vec{M} \cdot \nabla \frac{1}{r}) dV$ 两者关系为: $\vec{H} = -\mu_0 \nabla U_m$

[3] 静磁学和磁力中的单位制

- (1) 同一物理量在不同单位制中的量纲可能不同,例如磁导率 μ_0 在高斯单位制中无量纲,但在国际单位制(SI)中为 $LMT^{-2}I^{-2}$;
- (2) 同一公式在不同单位制中的形式可能不同,例如 \vec{B} (磁感应强度)、 \vec{H} (磁场强度)、 \vec{P}_m (磁极化强度)之间的关系式,在高斯单位制中为 $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{P}_m$,在国际单位制(SI)中为 $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{P}_m)$;
- (3) 同一物理属性可采用同一单位制中的不同量纲的物理量来描述,例如在国际单位制(SI)中,磁场的强弱可以用**磁场强度**描述,也可以用**磁感应强度**描述;
- 物质的磁化状态,可以用磁极化强度 \vec{P}_m 描述,也可以用磁化强度 \vec{M} 描述。

2. 电流磁效应及其作用规律

[1] 电流的磁效应——奥斯特探索

- 19世纪20年代前,磁和电是独立发展的;
- 丹麦物理学家 Hans Christian Oersted 深受康德哲学关于“自然力”统一观点的影响,试图找出电、磁之间的关系;
- 1820年7月

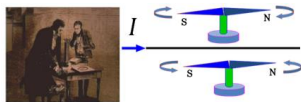


图2-1-7:奥斯特实验与电流磁效应

奥斯特实验表明：

- 长直载流导线与之平行放置的磁针受力偏转——**电流磁效应**；
- 磁针是在水平面内偏转的——**横向力**；
- 突破了非接触物体之间只存在**有心力**的观念——拓宽了作用力的类型。

意义：

- 揭示了电现象与磁现象的联系；
- 宣告电磁学作为一个统一学科诞生；
- 历史性的突破,此后迎来了电磁学蓬勃发展的高潮。

评价：

Ampere写道：“Oerster先生……已经永远把他的名字和一个新纪元联系在一起了”。

Faraday评论说：它突然打开了科学中一个一直是黑暗的领域的大门,使其充满光明。

[2] 相关实验——系列探索

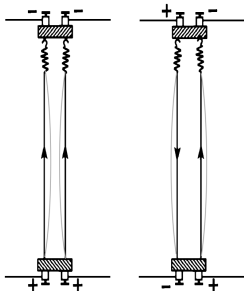


图2-1-8: 平行电流

- (1) Ampere 圆电流对磁针作用
- (2) Ampere 平行电流相互作用
- (3) Arago 钢片被电流磁化

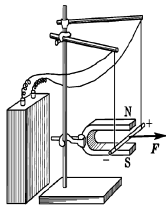


图2-1-9: 马蹄形磁铁

- (4) Ampere 通电导线受马蹄形磁铁作用而运动

(5) Ampere螺线管与磁铁相互作用时显示出N极和S极

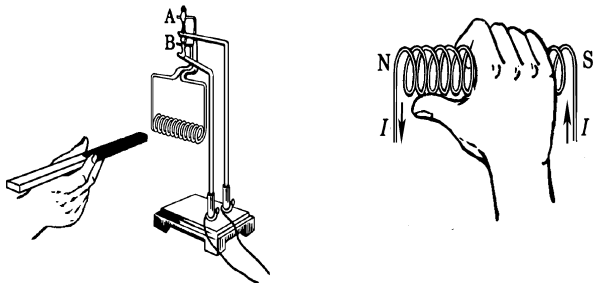
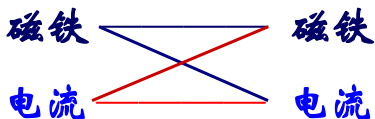


图2-1-10: Ampere螺线管

实验表明:载流螺线管相当于磁棒,螺线管的极性与电流成右手螺旋关系。

一系列实验表明



都存在相互作用

爱因斯坦指出：“提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因为解决一个问题也许仅是一个数学上或实验上的技能而已，而提出新的问题，新的可能性，从新的角度去看旧的问题，却需要有创造性的想像力，而且标志着科学的真正进步。”

[3] 研究课题

- 毕-萨-拉的研究课题；
- 安培的研究课题；
- 电流产生磁的逆效应；
- 电、磁相互作用的传递问题。

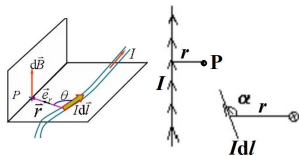
(一) 毕 - 萨 - 拉的研究课题

- ① 寻找电流元对磁极作用力的定量规律；
- ② 认为电流对磁极的作用力是自然界的基本力；
- ③ 受Oester横向力的影响,认为每一个电流元对磁极的作用力也垂直于导线与磁极构成的平面；
- ④ 困难:无孤立的恒定电流元。

关键是找到几何关系: $df \propto Idl$

还和几何因素如 r 、 α 有关；

即解决了电流产生磁场的规律(下一节)。



把电流分割成许多电流元

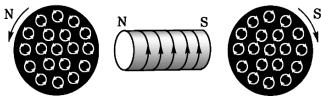
图2-1-11: 电流元的几何关系

(二) 安培的研究课题

- 几乎在同样的背景下,安培提出的问题更深入,显示出大师的风范。
- 安培认为:
 - 磁现象的本质是电流;
 - 物质磁性来源于“分子”电流;
- 这是安培根据实验的种种表现作出的重要的抽象。

(1) “分子”电流

- 所谓“分子”，是指构成物质的基元，当时对物质结构和分子、原子的认识还很肤浅；
- 每个分子都有电流环绕着，当分子排列整齐时，它们的电流合起来就可以满足磁棒的磁性所需要的电流；
- 磁化可视为使物质中的分子电流排列整齐显示出总体效果。



- 以“分子电流”取代“磁荷”——能解释磁棒与载流螺线管的等效性；
- 可将种种磁相互作用归结为电流之间的相互作用；
- 提出寻找任意两个电流元之间作用力的定量规律，即可解决磁相互作用的问题。

(2) 困难

- 同样是无孤立的电流元;
- 两电流元及两者连线三者不共面;
- 涉及的几何因素更多,难度增大;
- 安培精心设计了四个示零实验来解决这些困难。

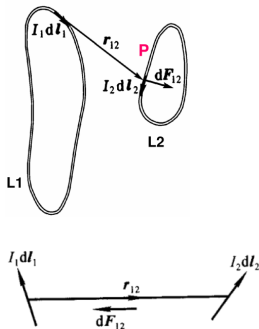


图2-1-12: 无孤立电流元

(3) 四个示零实验

➤ 无定向秤

➤ 实验一：

——用对折导线,在其中通以大小相等、方向相反的电流;

——把它移近无定向秤附近的不同部位,观察无定向秤的反应;

——结果:无定向秤不动;

——表明:当电流反向时,它产生的作用力也反向;

——数学表达: $dF_{12} \propto I_1 dl_1, I_2 dl_2$

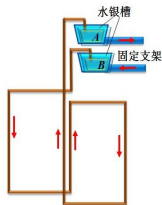


图2-1-13: 无定向秤

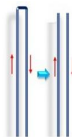


图2-1-14: 对折导线

➤ **实验二**: 装置如图2-1-15所示。

——用载流曲折线对无定向秤作用,结果与载流直导线的作用一样;

——表明电流元具有矢量性,表为 $I_1 d\vec{l}_1, I_2 d\vec{l}_2$

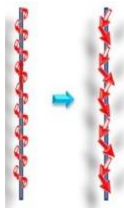


图2-1-15:载流折线

➤ **实验三**: 装置如图2-1-16所示。

——只允许圆弧形导体沿其切线方向运动而不允许圆弧形导体沿着与其垂直的方向运动;

——结果:圆弧导体不动;

——表明:作用在电流元上的力是与它垂直

——横向力: $d\vec{F}_{12} \perp d\vec{l}_2$ or $\oint_{(I_1)} d\vec{F}_{12} \cdot d\vec{l}_2$ 。

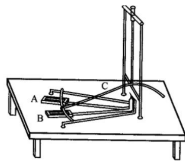


图2-1-16:圆弧形导体

实验四

——圆线圈A、B、C线度之比为 $1/n:1:n$,A与B的距离以及线圈B与C的距离比为 $1:n$,A与C固定,并串联,其中电流相同,线圈B可以活动,通以另一电流。

——结果:B不动。

——结论:所有几何线度增加同一倍数时,作用力的大小不变。

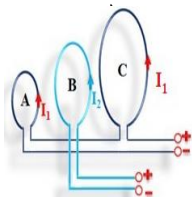


图2-1-17:圆线圈导体

$$dF_{12} \propto \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r_{12}^2}$$

当 dl_1 、 dl_2 、 r_{12}
增加同一倍数
 dF_{12} 才能保持不变

[4] 安培定律

(1) 电流元 $I d\vec{l}$ $\left\{ \begin{array}{l} Idl \\ \text{同} I \end{array} \right.$

(2) 安培定律 (参见图2-1-18) $dF_{12} \propto \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r_{12}^2}$

$$dF_{12} \propto \sin\theta_1, \quad dF_{12} \propto \sin\theta_2$$

$$\text{故 } dF_{12} = k \frac{(I_2 dl_2 \sin\theta_2) \cdot (I_1 dl_1 \sin\theta_1)}{r_{12}^2}$$

(3) 矢量式

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (\vec{I}_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$$

$$\text{同理 } d\vec{F}_{21} = k \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{I}_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}_{21})}{r_{21}^2}$$

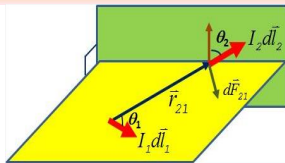


图2-1-18: 安培定律



图2-1-19: 矢积手势

SI制中 $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$ ——真空的磁导率

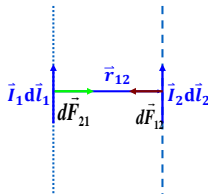
➤ 被Maxwell誉为“科学中最光辉的成就之一”；

➤ Ampere本人则被誉为“电学中的Newton”。

【例题2-1-1】求一对平行电流元之间的相互作用力，二者都与联线垂直。

【解】计算电流元1对电流元2的作用力 $d\vec{F}_{12}$

$$\because \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \therefore dF_{12} = k \frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2}{r_{12}^2}$$



方向： $d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}$ 垂直纸面向里， $d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})$ 沿联线与 \hat{r}_{12} 方向相反。

图2-1-20: 平行电流元

同理，电流元2对电流元1的作用力 $d\vec{F}_{21} = -d\vec{F}_{12}$

[例2-1-2] 求一对垂直电流元间相互作用力,其中电流元1沿联线,2垂直于联线。

【解】

计算电流元1对电流元2的作用力 $\theta_1 = 0 \quad \therefore d\vec{F}_{12} = 0$

而电流元2对电流元1的力 $d\vec{F}_{21} \neq 0$

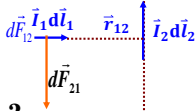


图2-1-21:垂直电流元

问题:安培定律是否满足牛顿第三定律?为什么?

(1)安培从错综复杂的现象与联系中,提炼出磁现象的本质——独具慧眼;

(2)提出寻找电流、电流之间相互作用定量规律问题——问题深度、广度和重要性高于其同代人提出问题,显

启示: 示出大师风,反映了正确抽象、洞察本质重要性;

(3)在解决问题上,面对难以测量困难,巧妙地设计示零实验,设计与理论猜测相结合,揭示出电流元相互作用应具有特点,采用矢量点乘、叉乘来表示 $d\vec{l}_1$ 、 $d\vec{l}_2$ 、 \vec{r}_{12} 之间关系。

进一步提出的课题:

➤ 电流产生磁逆效应问题:将导致电磁感应现象的发现;

➤ 电磁作用传递问题:超距和近距作用论争再次激化,将导致电磁场理论建立。

§ 2-1-2: 静磁场与毕-萨-拉定律

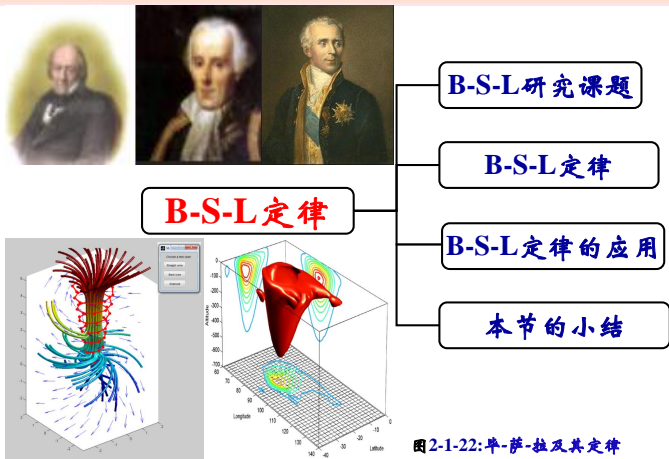


图2-1-22:毕-萨-拉及其定律

【1】 B-S-L研究课题

- Biot和Savart通过设计实验研究电流对磁极的作用力；
- 数学家Laplace的帮助下,得出B-S定律(早于安培)。

$$\text{➤ } d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \left\{ \begin{array}{l} \propto Idl, \sin\theta, \frac{1}{r^2} \\ d\vec{B} \perp (d\vec{l}, \vec{r}) \end{array} \right.$$

? 如何解决无孤立的电流元的困难

(1) Biot首先重复Oersted实验

实验一:测量长直载流导线对单位磁极的作用力

➤装置:如图2-1-23,沿圆盘径向,对称放置一对相同的磁棒。

$$\text{IF } H \propto \frac{1}{r} \Rightarrow \text{ then } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{H}$$

$$\text{IF } H \text{ no } \propto \frac{1}{r} \Rightarrow \text{ then } H_1 r_1 \uparrow \neq H_2 r_2 \downarrow$$

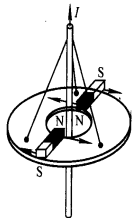


图2-1-23:单-萨实验

每根磁棒
两极受合力
矩为零,
圆盘静止

$$H_1 r_1 \propto \frac{r_1}{r_1} = C \quad \uparrow$$

$$H_2 r_2 \propto \frac{r_2}{r_2} = C \quad \downarrow$$

总合力矩不为0,圆盘应转;

实验结果:示零。

—— 单位磁极受到的作用 $H \propto \frac{I}{r}$

实验二：载流折线的磁场

设计实验：

磁极所受作用力的方向垂直于折线与磁极构成的平面。

序号	弯折的角度	单位磁极作用力
1	$\alpha = 0$	$H = 0$
2	$\alpha = \frac{\pi}{4}$	$H = 0.414H_{\max}$ $0.414 = \tan 22^\circ 30' = \tan \frac{\alpha}{2}$
3	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$H = H_{\max}$

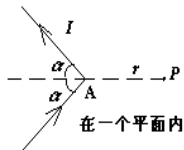


图2-1-24:

电流元对磁极的作用力的表达式 $H = k \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}$ 。

- 由实验证实：电流元对磁极的作用力是横向力；
- 整个电流对磁极的作用力是这些电流元对磁极横向力的叠加；
- 由对称性，上述折线实验结果中，折线的一支对磁极的作用力的贡献是 $H_{\text{折}}$ 的一半： $H = k \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}$ 。

(2) 拉普拉斯理论推导

$$\begin{cases} dH = dH(r, \alpha) \\ H = H(r, \alpha) \end{cases} \Rightarrow dH = \frac{dH}{dl} dl = \frac{dH}{dl} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dl} + \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{dl} \right) dl$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \alpha} = k \frac{I}{r} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \frac{\partial H}{\partial r} = -k \frac{I}{r^2} \tan \alpha \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{几何关系:} \\ \begin{cases} dl \sin \alpha = r d\alpha \\ dl \cos \alpha = -dr \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dl} = \frac{\sin \alpha}{r} \\ \frac{dr}{dl} = -\cos \alpha \end{cases} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow dH = k \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha \Rightarrow d\vec{H} = k \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

【2】 B-S-L定律

根据上述磁感应强度的定义式,任何闭合回路产生的磁感应强度是由各个电流元产生的元磁感应强度矢量迭加,故

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

μ_0 :真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$;

\vec{r} :电流元指向场点P的位矢;

\hat{r} : \vec{r} 的单位矢量;

$d\vec{l}$:导线上的线元,方向与导线内的电流同向。

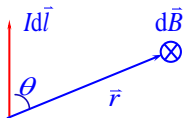
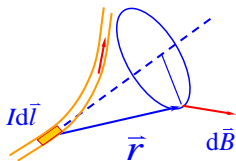


图2-1-25:磁感应强度元

由叠加原理,任意载流导线产生的磁场:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

说明:

- ①这是人们对电流产生的磁场分布做了大量实验研究而总结出的磁场的基本定律;
- ②给出了源电流元和场点的磁感强度之间的关系;
- ③这是一切电流源产生磁场的基本规律,是计算磁场出发点;
- ④适用于稳恒电流,对于非稳恒电流,有推迟效应。

注意: 电流元和场点位矢的方向;
磁感强度方向用右手螺旋法则判断。

【3】毕-萨-拉定律的应用

计算磁场的两种方法：

(II) 普遍方法-坐标分量法

- (1) 选取电流元；
- (2) 判断电流元产生磁场方向，将矢量积分 \rightarrow 标量积分；
- (3) 用几何关系，将式中几个变量统一用积分变量表示，最后积分；
- (4) 用分量求出总磁场的大小；
- (5) 用方向余弦表示磁场的方向。

(I) 简便方法:大小方向分开

- (1) 先应用**对称性或矢量合成法则**判定总磁场的方向；
- (2) 将各电流元产生的磁场向总磁场方向**投影**，得出总磁场**大小**。



(I) 长直载流线的磁场

建立坐标系 Oxy 如图 2-1-26 所示, 取 l 处 $d\vec{l}$, 电流元 $I d\vec{l}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin\theta dl}{4\pi r^2}, \text{各 } d\vec{B} \text{ 同向 } (\otimes)$$

$$\text{由 } \begin{cases} r = \frac{a}{\sin\theta} \\ l = -a \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{cases}, \text{ 则 } dl = \frac{a d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{aligned}$$

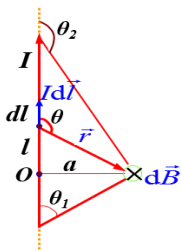


图 2-1-26: 长直电流

【讨论】：

(1) 当 $a \ll L$, 则 $\theta_1 \approx 0$, $\theta_2 \approx \pi$

无限长直电流的磁场 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

(2) 当 $a \ll L$, 场点位于一端, 则 $\theta_1 \approx 0$, $\theta_2 \approx \frac{\pi}{2}$

半无限长直电流的磁场 $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$

(3) P 点在导线的延长线上 $\left. \begin{array}{l} \theta_1 \approx 0, \theta_2 \approx 0 \\ \theta_1 \approx \pi, \theta_2 \approx \pi \end{array} \right\} \Rightarrow B = 0$

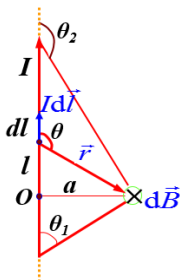


图2-1-26:长直电流

(4) 推广:

A、平面电流、平板电流、无限大平面电流、无限大平板电流;

B、圆弧面电流、圆弧体电流、圆柱面电流、圆柱体电流。

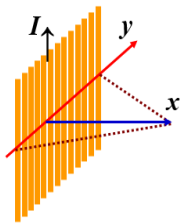


图2-1-27:平面电流

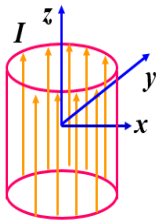


图2-1-28:圆弧电流

(II) 圆电流轴线上的磁场

已知:圆电流 I 半径为 R , 轴线沿 z , 如图2-1-29所示。

【解】由毕-萨-拉定律 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

判断电流元在 P 点产生的磁场方向

$d\vec{B}$ 如图2-1-29所示。

由电流对 z 轴的对称性

$$\int dB_{\perp} = 0$$

$$dB_{//} = dB \sin\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

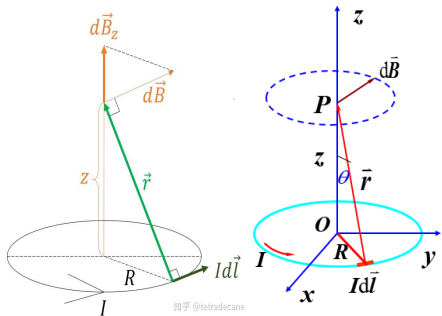


图2-1-29:圆电流磁场

$$B = \int dB_{//} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\theta \int_0^{2\pi R} dl$$

由几何关系:

$$\begin{cases} r^2 = R^2 + z^2 \\ \sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \end{cases}$$

上式代入 $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

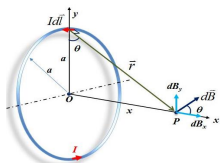
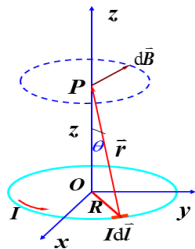


图2-1-29:圆电流磁场

\vec{B} 方向:垂直电流平面沿z轴正方向符合右手螺旋法则。

(1) 定义线圈的磁矩 $\vec{P}_m = N\pi R^2 I \vec{z}$

【讨论】：

$$\left. \begin{array}{l} \text{单匝时: } B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ N \text{匝时: } B = \frac{N \mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right\} \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

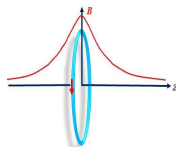


图2-1-30: 磁场分布

(2) 圆心处 $z=0$, 则 $B = \frac{N\mu_0 I}{2R}$ 或 $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi R^3}$

(3) 当 $R \ll z$, 则 $z \approx r$, 那么 $B = \frac{N\mu_0 I R^2}{2r^3}$ 或 $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2r^3}$

- (4) 推广
- 亥姆霍兹线圈;
 - 平面线圈;
 - 螺线管等

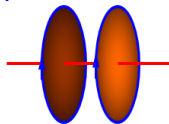


图2-2-31: 亥姆霍兹线圈

亥姆霍兹线圈

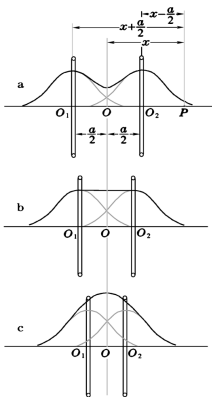
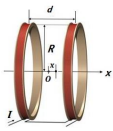
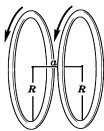
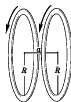


图2-1-32: 轴上磁场分布

- **结构:**一对间距等于半径的同轴载流圆线圈;
- **用处:**在实验室中,当所需磁场不太强时,常用来产生均匀磁场;
- **命题:**证明上述线圈在轴线中心附近的磁场最为均匀。
 - 将两单匝线圈轴线上磁场叠加;
 - 求极值。

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{3/2}} \quad B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{3/2}}$$




$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 I \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \left\{ \frac{x + \frac{a}{2}}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{5/2}} + \frac{x - \frac{a}{2}}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{5/2}} \right\}$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \left\{ \frac{4\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - R^2}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{7/2}} + \frac{4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - R^2}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{7/2}} \right\}$$

令 $x=0$ 处的 $\frac{d^2B}{dx^2} = 0 \Rightarrow$ 在 \bigcirc 点附近磁场最均匀的条件

$$\left. \frac{d^2B}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \frac{2a^2 - 2R^2}{2\left[R^2 + \frac{a^2}{4}\right]^{7/2}} = 0 \Rightarrow a^2 = R^2$$


 $a = R$

载流螺线管内的磁场

已知:设螺线管半径 R , 匝密度 n , 电流 I , 求轴线上 O 点处的磁感应强度。

【解】用上一题圆电流产生的磁场结果。

$x-x+dx$ 段线圈相当于电流为 $nI dx$ 圆电流。

任意段圆电流在 P 点产生磁场方向始终指向 x 轴正方向, 即

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 (nI dx)}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

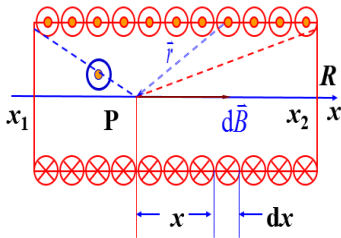


图2-1-33:载流螺线管

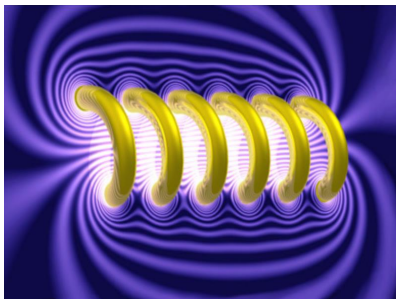


图2-1-33:载流螺线管

$$B = \int \mathrm{d}B = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 R^2 (nI \mathrm{d}x)}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 nI}{2} \left(\frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

讨论:

- (1) 螺线管无限长 $\beta_1 \approx \pi$, $\beta_2 \approx 0$, 即 $B = \mu_0 nI$;
- (2) 螺线管半无限长 $\beta_1 \approx \frac{\pi}{2}$, $\beta_2 \approx 0$, 即 $B = \frac{1}{2} \mu_0 nI$;
- (3) 实践中, 螺线管长 L , 直径 D , 若 $L \geq 4D$, 则螺线管内部可视为均匀磁场。

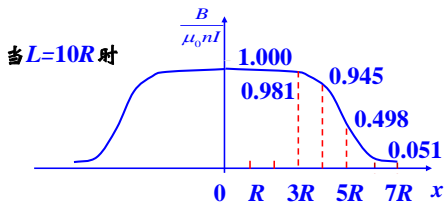
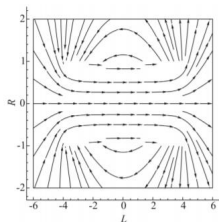


图2-1-34: 关系图线

(III) 低速运动电荷的磁场

设电流元 $I d\vec{l}$ 的截面积为 S , 其载流子浓度 n , 电量 q , 平均速度 \vec{v} , 则电流元中载流子数 $dN = nSdl$

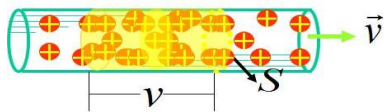


图2-1-35: 电流元与电荷

激发之磁场:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qn v S dl \sin\theta}{r^2}$$

由式(1)和式(2)可得, 平均每个载流子激发的磁场

$$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin\theta}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

低速运动电荷的电场和磁场

如图2-1-36所示, 电荷 q 以速度 \vec{v} 沿 x 轴运动, 则在空间 P 点的电场

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\text{显然 } \vec{B} = \mu_0\epsilon_0(\vec{v} \times \vec{E})$$

$$= \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E})$$

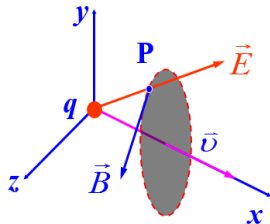


图2-1-36: 电荷的电场和磁场

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \text{—— 真空中的光速}$$

【例题2-1-3】 一宽为 a 的薄长金属板,其电流为 I ,求在与薄板共面的平面上,距板的一边为 a 的 P 点的磁感强度。

【解】 利用直电流的场强公式 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

如图2-1-37,取元电流 dI ,则得

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi x}$$

$$\text{而 } dI = \frac{I dx}{a}, x \in [a, 2a]$$

$$B = \int dB = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln 2$$

相当于距 P 点 $1.44a$ 远线电流产生的磁场。

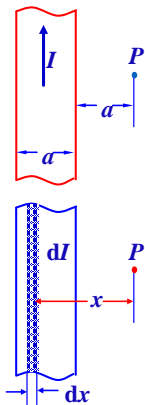


图2-1-37:薄长金属板

【例题2-1-4】 一条抛物线导线载有电流 I , 其焦点 F 到顶点距离为 a , 求焦点处磁感应强度?

【解】 解法一

极坐标中的抛物线方程为 $r = \frac{2a}{1 - \cos\varphi}$

如图, 电流元在焦点处产生的元磁感应强度方向相同, 垂直纸面向里, 故

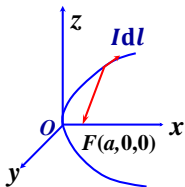


图2-1-38: 载流抛物导线

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ird\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 - \cos\varphi)}{2a} d\varphi$$

$$B = \oint dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 - \cos\varphi)}{2a} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

解法二：在极坐标系中，电流元在焦点处产生的元磁场为

$$d\vec{l} \times \hat{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_k \\ dr & -r d\varphi & 0 \\ -r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r^2 d\varphi (-\vec{e}_k)$$

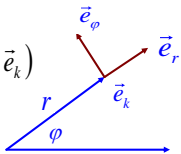


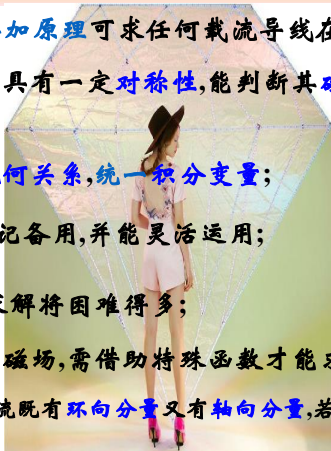
图2-1-39:极坐标系

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r} \vec{e}_k$$

$$r = \frac{2a}{1 - \cos \varphi} \quad \rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4a} \vec{e}_k$$

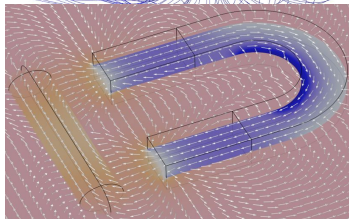
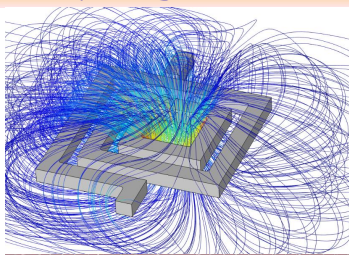
小结

- ①原则上,**B-S-L定理+叠加原理**可求任何载流导线在空间某点的 \vec{B} ;
- ②实际上,只在电流分布具有一定**对称性**,能判断其**磁场方向**,并可简化为**标量积分**时,才易于求解;
- ③为完成积分,需利用**几何关系**,**统一积分变量**;
- ④一些重要的结果应牢记备用,并能灵活运用;
- ⑤若对称性有所削弱,求解将困难得多;
如圆线圈非轴线上一点**磁场**,需借助特殊函数才能求解;
在螺距不可略时,螺线管电流既有**环向分量**又有**轴向分量**,若除去**密绕条件**,就更为复杂。



§ 2-1-3: 静磁场的基本定理

- 一、磁感应线与磁通量
- 二、高斯定理(通量定律)
- 三、安培环路定理(环量定律)
- 四、两条定理与B-S-L定律的关系
- 五、磁矢势(讲座3)



一、磁感应线与磁通量

1、磁感应线

1) 曲线密度与磁感强度大小成正比, 闭合或伸向无穷远;

约定

2) 曲线上切线代表磁感强度方向, 与电流方向成右螺旋关系;

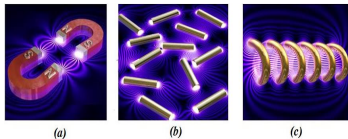
3) 磁力线密度 $\Delta N / \Delta S = B$ (大小), 与回路互相套合。

比例, 取整

实验和理论都证明: 在任何磁场中, 每一条磁感线都是环绕电流的**无头无尾**的闭合线, 而且每条闭合磁感线都与闭合载流回路**互相套合**。

2、磁通量 $d\Phi_m = B \cos\theta dS = \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$$\Phi_m = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}。 \text{单位: 韦伯(Wb), } 1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$$



(a) 直导线磁感线分布:

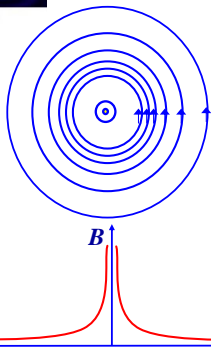


图2-1-40: 载流直导体磁感线分布

(b) 圆电流磁感线分布：

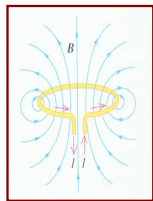
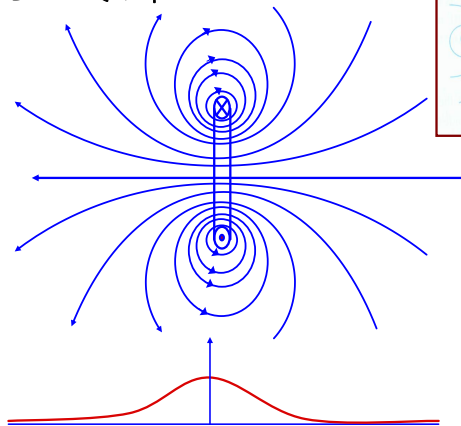
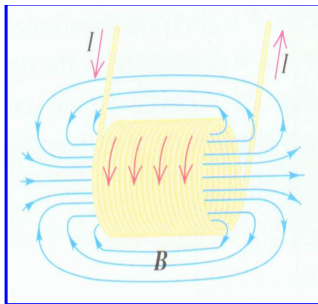


图2-1-41:圆电流磁感线分布



(c)有限长螺线管电流

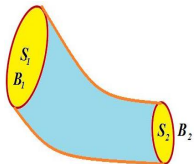
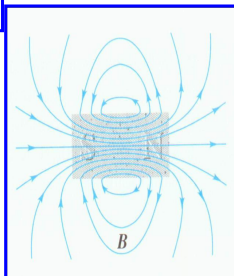


图2-1-42:长螺线管与电磁铁

磁场线与电场线的区别!?

(d)电磁铁



静电场	静磁场
电场强度用电场线描述	磁感强度用磁感线描述
<p>电场线性质</p> <p>有头有尾不闭合,起自正电荷,终止负电荷.</p>	<p>磁感线性质</p> <p>无头无尾的闭合线,与闭合回路相互套合.</p>
<p>电通量</p> $d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ $\Phi_e = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$	<p>磁通量</p> $d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ $\Phi_m = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

3、高斯定理: $\Phi_m = \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

二、高斯定理(通量定律)

① 考察任一磁感应管(正截面为 ΔS),取任意闭合曲面 S ,磁感应管穿入 ΔS 一次,穿出一次。

$$\begin{cases} d\Phi_{B_1} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}_1}{4\pi r_1^2} \cdot d\vec{S}_1 \\ d\Phi_{B_2} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}_2}{4\pi r_2^2} \cdot d\vec{S}_2 \end{cases}$$

$$-\vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 = B dS$$

$$d\Phi_{B_1} + d\Phi_{B_2} = 0$$

再根据叠加原理即得:

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

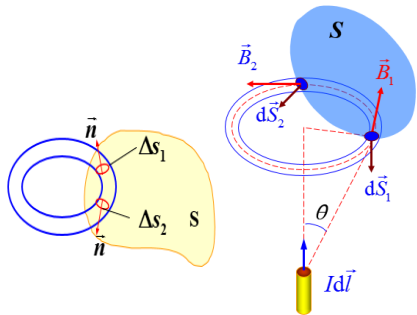


图2-1-43:高斯定理的证明

② 推广到任意载流回路的磁场

➤ 一个电流元产生磁场可看成由许多磁感应管组成:

有的穿入又穿出,有上述结论;有的没穿过 S ,磁通量为零。

➤ 任意载流回路——许多电流元串联而成,由叠加原理得:

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} \left(\sum_i \vec{B}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \oiint_{(S)} \vec{B}_i \cdot d\vec{S} = 0$$

➤ 结论:通过磁场中任闭合曲面 S 的总磁通量恒等于零。

磁高斯定理的微分形式

$$\Phi_m = \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \longrightarrow \iiint_{(V)} \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \boxed{\text{无源场}}$$

➤ 利用数学的高斯定理

电场与磁场高斯定理比较

电场高斯定理	磁场高斯定理
反映穿过闭合曲面的电通量与所包围电量之间关系	反映穿过闭合曲面的磁通量与所包围电流之间的关系:
$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} q_i$	$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
电场性质之一: 有源场 (正负电荷可分离)	磁场性质之一: 无源场 (无磁单极)

三、安培环路定理(环量定律)

磁感应强度 \vec{B} 沿任何闭合回路 L 的线积分等于穿过 L 的所有电流强度代数之和的 μ_0 倍。

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i$$

I 的正负约定:当 L 的绕行方向与 I_i 方向成右手螺旋关系,则 I_i 为正,反之为负。

【证明】 普遍证明从略,下面只给出无限长直载流导线情况证明。

(1) 安培环路围绕电流

环路平面垂直导线 $\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} B \cos\theta dl$

其中: $\cos\theta dl = r d\varphi$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \rightarrow \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{(L)} d\varphi = \mu_0 I$

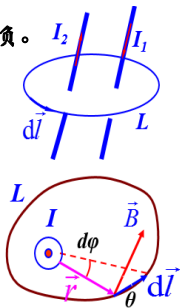
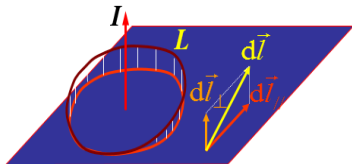


图2-1-44:计算环流(1)

(2) 设环路 L 不在同一平面内

$$\text{由 } d\vec{l} = d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B} \cdot (d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}) = \vec{B} \cdot d\vec{l}_{\parallel}$$



同上 $\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

(3) 若沿 $-L$, 反向积分

$$\oint_{(-L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{(-L)} B \cos \theta dl = -\mu_0 I$$

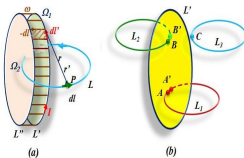


图2-1-45: 计算环流(2)

(4) 若环路 L 未包围电流

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{ABC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CDA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{ABC} d\varphi + \int_{CDA} d\varphi \right) = 0$$

安培环路定律:

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i$$

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

A、 $\vec{j} = \vec{f}(x, y, z)$, 且 $\frac{d\vec{j}}{dt} = 0$;

【讨论】

B、只适用于闭合回路, 或无限长电流。

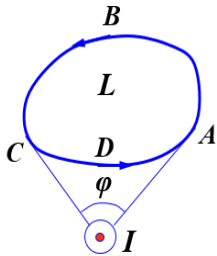


图2-1-46: 计算环流(3)

一般化的证明

$$[1] \text{ 一个电流回路 } \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \oint_{(L')} \left[\frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times \hat{r}}{4\pi r^2} \right] \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L)} \oint_{(L')} (d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L)} d\Omega$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(L)(L')} \int (d\vec{r} \times d\vec{l}') \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} d\Omega$$

1833年,高斯(Gauss)证明此为拓扑不变量,

$$\oint_{(L)} d\Omega = 4\pi N, N \in R$$

若两环套链一次,其值为 ± 1 (考虑方向);若两环不套链,其值为0。

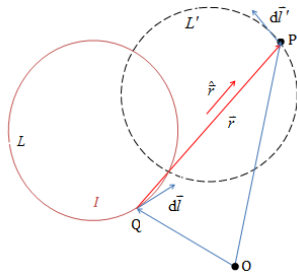


图2-1-47: 一个电流回路

[2] 多个电流回路

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \left(\sum_i \vec{B}_i \right) \cdot d\vec{l} = \sum_i \oint_{(L)} \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

安培环路定理的微分形式

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I$$

↓ ↓

$$\iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

→

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

有旋场

■ 说明 \vec{B} 的旋度不为零——有旋场。

[3] 磁感应强度是轴矢量

➢ 镜像反射的变化规律:

——极矢量:与镜面平行分量不变,垂直分量反向,如 $d\vec{l}$ 、 \vec{r} 、 \vec{v} 、 \vec{F} 、 \vec{E} 、 \vec{P} ;

——轴矢量:与镜面垂直分量不变,平行分量反向;

——两个极矢量叉乘=轴矢量。

➢ 由毕-萨-拉定律决定 —— \vec{B} 是轴矢量。

➢ 推论:镜面对称的载流系统在镜面处产生的磁感应强度垂直于镜面。

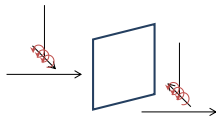
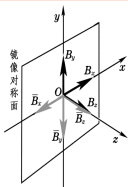


图2-1-48 镜像反射

安培环路定律的应用

(1) 长直螺线管的磁场

设：匝数密度 n ，电流强度 I ，取环路 $L = ABCDA$ ，如图 2-1-49。

分析： \vec{B} 方向必沿轴向； \vec{B} 的大小沿轴向不变。

- 1) 路径 AB // 轴线, AB 上 \vec{B} 为恒量;
- 2) 路径 BC 和 DA 与 \vec{B} 垂直;
- 3) 路径 CD 在螺线管外, $\vec{B} = 0$ 。

$$\text{所以 } \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \overline{AB} = \mu_0 n I \cdot \overline{AB}$$

$$\text{则得 } B = \mu_0 n I$$

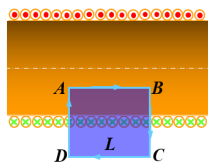


图 2-1-49: 长直螺线管的磁场

【讨论】：可以证明

①螺线管内： $\vec{B} = \text{恒矢量}$ ，

比较图中ABCD与A'B'CDA'环路；

②螺线管外： $\vec{B} = 0$

比较图中ABCD与ABC''D''A环路；

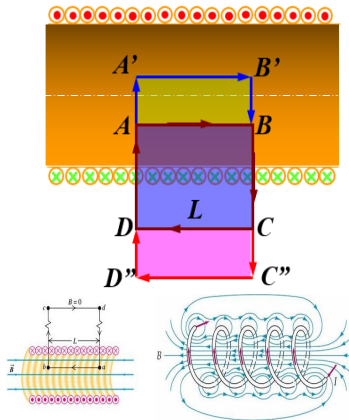


图2-1-50:螺线管的磁场

(2) 螺绕环(罗兰环)的磁场

设匝数 N , 电流 I , 管半径 R , 取环路为贯穿管内的圆, 其半径为 r , 见图2-1-51所示。

$$\text{分析得} \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$$

由定律

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$$

$$\text{所以} B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

【讨论】：

若 $R \ll r$, $B = \mu_0 nI$, 同无限长螺线管。

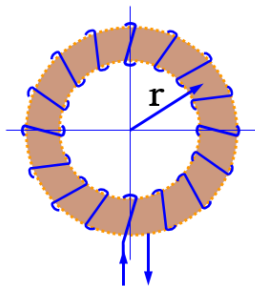


图2-1-51:螺绕环的磁场

(3) 均匀载流长直圆柱体的磁场

设:长直圆柱体半径 R ,沿轴向通以电流 I ,且横截面上均匀分布。

1) 柱外 ($r \geq R$): $\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$

按定律 $\oint_{(L_1)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

分析得 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

2) 柱内 ($r \leq R$): $\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$

按定律 $\oint_{(L_2)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$

则 $B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

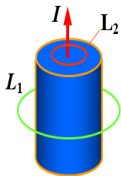


图2-1-52 载流圆柱体的磁场

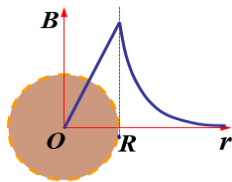
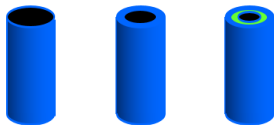


图2-1-53:载流圆柱体磁场分布曲线

【讨论】：

均匀载流长直圆柱体的磁场问题可扩展为：

- 1) 载流圆柱面, 载流圆柱管, 多层载流圆柱管(体);
- 2) 非均匀载流圆柱体、非均匀载流圆柱管、非均匀载流多层圆柱管(体);



3) 补偿法: 叠加原理)

沿偏心管轴线方向通以电流 I , 电流沿实体横截面均匀分布, 见图2-1-54(a)。

补偿法如图2-1-54(b)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

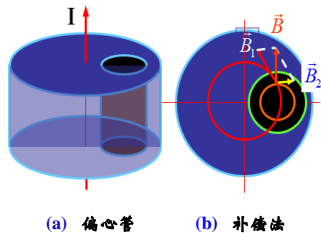


图2-1-54: 补偿法求磁场

可证明: 方向与两轴垂直连线垂直。

【例题2-1-7】一半径为 R 长圆柱形导体,在其中距离轴线为 d 处挖去一半径为 $a(a < R)$,轴线与大圆柱形导体平行的小圆柱,形成圆柱形空腔,导体中沿轴均匀通有电流密度为 \vec{j} 。试求:空腔内的磁感强度 \vec{B} 。

【解】 P 点的磁感应强度可视为半径为 R 的实心导体中电流和半径为 a 的导体中反向电流磁场矢量的迭加。

已知电流密度为 \vec{j} ,则实心圆柱体横截面上,根据安培环路定律,有

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i$$

$$2\pi r_1 B_1 = \mu_0 j \pi r_1^2 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 j r_1$$

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times \vec{r}_1$$

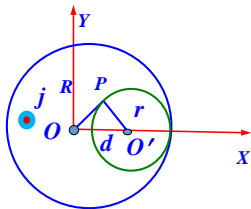


图2-1-55:圆柱形导体

同样,反向电流圆柱体横截面上有

$$2\pi r_2 B_2 = -\mu_0 j \pi r_2^2 \Rightarrow B_2 = -\frac{1}{2} \mu_0 j r_2$$

➔
$$\vec{B}_2 = -\frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times \vec{r}_2$$

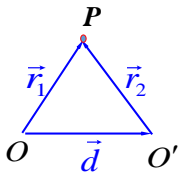


图2-1-56:

根据迭加原理,柱形空洞内任一 P 点总磁感应强度为

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times \vec{d}$$

结论:空腔内磁感强度大小为常量,方向垂直两圆心连线,即在 Y 轴方向上。

【回顾】：

(1) 高斯定理： $\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (无源场)

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} q_i \text{ (有源场)}$$

(2) 安培环路定律

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \text{ (涡旋场)}$$

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ (无旋场)}$$

□ 应用：需满足一定条件。

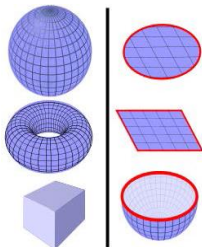


图2-1-57:

四、两条定理与毕奥-萨伐尔定律的关系

1. 两条定理均通过毕奥-萨伐尔定律导出。
2. 从高斯定理的证明过程可知,它不要求毕奥-萨伐尔定律中的距离平方反比关系。

如 $\vec{B} \propto \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^n}$, 当 $n \neq 2$ 时, 高斯定理仍然成立。

3. 安培环路定理则要求 $n = 2$ 。从证明过程可知, 要利用无穷长直导线电流的磁场, 与例 2-2-1 相同步骤, 可推出 $B = r_0^{-n+1}$, 于是, 以导线为轴半径为 r 的圆环的环流:

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I r^{-n+1}$$

4. 当 $n \neq 2$ 时, 该环量值与回路半径 r 有关, 使安培环路定理不能成立。
5. 对随时间变化的磁场, 高斯定理仍然成立; 但实验表明, 安培环路定理应予修正, 在第五章介绍。

2-1-4 磁感强度与磁矢势的关系

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{无源场}$$

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{有旋场}$$

非保守场一般
不引入标势

➤然而磁场的主要特征:无源(无散)——磁高斯定理

➤其更根本的意义:使我们可能引入磁矢势。

➤ 磁高斯定理表明:对任意闭合面

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \iint_{(S_2)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{(S_1)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_2)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

磁通量仅由任意
闭合面的共同边
界线所决定

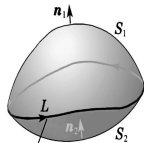


图2-1-58:

可能找到一个矢量 \vec{A} ,
它沿 L 作线积分等于
通过 S 的磁通量

$$\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{a})$$

- ◆ 数学上可以证明,这样的矢量 \vec{A} 的确存在,对于磁感应强度 \vec{B} , \vec{A} 叫做磁矢势, \vec{A} 在空间的分布也构成矢量场,简称为矢势。

根据矢量分析

➤ 对任意矢量 \vec{A} 有 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

➤ 矢势的特点:

其实标势也不
唯一, 零点可选

➤ 满足 $\nabla \times \vec{A}$ 的 \vec{A} 不唯一

如: 对于任意标量场 φ 的梯度 $\nabla\varphi$, 有 $\nabla \times \nabla\varphi = 0$

$$\nabla \times (\vec{A} + \nabla\varphi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla\varphi = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

描述同一个磁感应强度 \vec{B}

规范变换: $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$

类似于电势零点可以任取, 规范也可任意选取;

通常选库仑规范: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

找电流产生的磁场中磁矢势的表达式

➤ 两种办法

利用对称性由 $\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 得出

普通物理
的方法

由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 和 $\nabla \cdot \vec{A} \Rightarrow \vec{A}$ 的表达式

电动力学的
做法

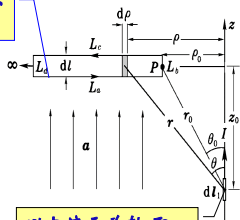
- ① 电流元的磁矢势:
- ② 任意闭合回路的磁矢势:
 - 例题2-1-5
 - 例题2-1-6

(1) 电流元的磁矢势

取闭合环路L

➤ 设磁矢势 \vec{a} 与电流元平行(因为对矢势变换规范可以任选,选库仑规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 的结果)

➤ —— \vec{a} 只有z分量



以电流元为轴,取柱坐标 (ρ, ϕ, z)

图2-1-59:

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{L_a} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_b} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_c} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_d} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{L_b} \vec{a} \cdot d\vec{l} = a_z(p) dl$$

$L_a \perp a, L_c \perp a, L_d \rightarrow \infty$

只有这一段积分有贡献

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = a_z(p) dl = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \dots \dots ?$$

计算通过 L 的通量

➤ 场点 P 和回路 L 在 $\varphi = 0$ 的平面内

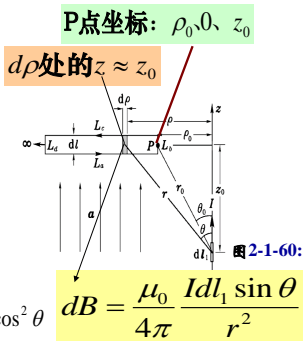
➤ 通过 L 的磁感应通量为:

$$d\Phi_B = \frac{\mu_0 I dl_1 dl}{4\pi} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\sin \theta d\rho}{r^2}$$

$$r = z_0 / \cos \theta, \rho = z_0 \tan \theta, d\rho = z_0 d\theta / \cos^2 \theta$$

$$d\Phi_B = \frac{\mu_0 I dl_1 dl}{4\pi z_0} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I dl_1 dl}{4\pi z_0} \cos \theta_0 = \frac{\mu_0 I dl_1 dl}{4\pi r_0}$$

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = a_z(p) dl \quad \text{消去 } dl \rightarrow a_z(p) = \frac{\mu_0 I dl_1}{4\pi r_0}$$



(2) 矢势公式的应用举例

► 例题2-1-5: 一对平行无限长直导线, 载有等量反向电流 I , 求其矢势。

• 先求一根无限长直导线的磁矢势(如图)

► 设矢势 \vec{A} 只有 z 分量

► 无限长—— A_z 与 z 无关

► 轴对称—— A_z 与 φ 无关

► A_z 只是 ρ 的函数: $A_z = A_z(\rho)$

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \int_{L_u} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_b} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_c} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_d} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{L_b} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_d} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= [A_z(P) - A_z(Q)]l = l \int_{\rho_P}^{\rho_Q} B d\rho = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{\rho_P}^{\rho_Q} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q}{\rho_P} \end{aligned}$$

求磁通量

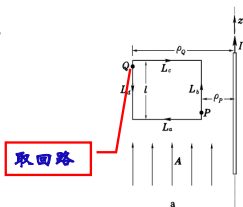
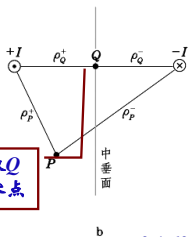


图2-1-61:

一根无限长导线在空间任两点之间的矢势差

$$[A_z(P) - A_z(Q)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q}{\rho_P}$$



两根无限长载流直导线的磁矢势

$$\begin{cases} [A_z^+(P) - A_z^+(Q)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q^+}{\rho_P^+} \\ [A_z^-(P) - A_z^-(Q)] = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q^-}{\rho_P^-} \end{cases}$$

取Q
为点

叠加得
P点总
矢势

图2-1-62:

$$[A_z(P) - A_z(Q)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{\rho_Q^+}{\rho_P^+} - \ln \frac{\rho_Q^-}{\rho_P^-} \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_P^-}{\rho_P^+} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_-}{\rho_+}$$

例題2-1-6: 无限长圆柱型导体, 半径为 R , 载有在界面上均匀分布的电流 I , 求磁矢势。

(1) $r < R$: 导线内部 P 点, 取 Q 点在导体轴线上, 取回路如图, 通过回路的磁通量

$$\Phi_B = I \int_r^0 B dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi R^2} \int_r^0 r dr = -\frac{\mu_0 I r^2 l}{4\pi R^2}$$

$$[A_z(r) - A_z(0)] = A_z(r) = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi R^2}, r < R$$

(2) $r > R$: 导线外部同例題2-1-5, 取 Q 点在导体表面, 外部任意点 P 与 Q 点的矢势差为

$$r = R, A_z(R) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

$$[A_z(r) - A_z(R)] = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{R} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right], r > R$$

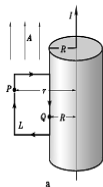
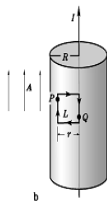


图2-1-63:

求矢势小结

$$\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

➤ 依据公式(a)求矢势的基本步骤

- 根据对称性,假设一个矢势的方向;
- 取闭合回路,注意矢势零点的选取(原则:或可提出积分号,或积分好算);
- 算出通过回路的磁通量;
- 得出 \vec{A} 一个表达式。

➤ 以上几个例子都属于强对称性场,实际上是已知 \vec{B} 求 \vec{A} ,也可以直接根据电流分布求矢势

——更多的问题在电动力学中学习;

➤ 相关的习题很少,掌握这种方法。

§ 2-1-5: 安培力与洛仑磁力

【1】 安培力

一、 载流直导线受磁力

1、 均匀磁场: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F = IlB\sin\theta$

$$\theta = \begin{cases} 0, \pi & F = 0 \\ \frac{\pi}{2} & F_{max} \end{cases}$$

2、 非均匀磁场: 平动+转动;

3、 载流曲导线: 矢量合成 $\vec{F} = \int Id\vec{l} \times \vec{B}$

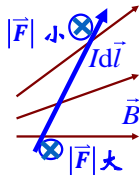


图2-1-64: 非匀磁场

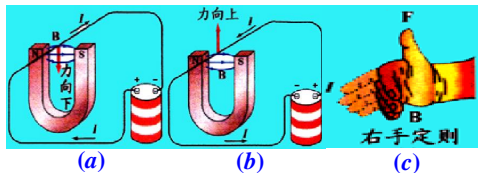


图2-1-65: 磁场对载流导线的作用

二、平行长直电流之间的相互作用

平行长直电流 I_1 和 I_2 ,相距 a ,见图2-1-67所示。

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \Rightarrow d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}$$

$$dF_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2$$

$$\frac{dF_{12}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

$$\text{令 } I_1 = I_2 = I \quad I^2 = \frac{a}{2} \times 10^7 \cdot \frac{dF_{12}}{dl_2}$$

$$a = 1\text{m} \quad \frac{dF_{12}}{dl_2} = 2 \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$I = 1\text{A}$ —— 电流单位安培的定义

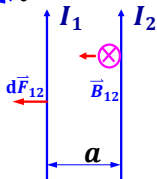


图2-1-67: 平行长直电流

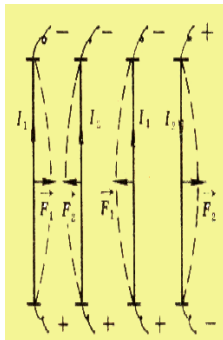


图2-1-66: 平行直电流间作用

三、磁场对载流线圈的作用

1、均匀磁场中的矩形载流线圈,如图2-1-69,矩形中, $AB = CD = l_1$, $BC = DA = l_2$

受力分析:

AB边, $F_1 = I l_1 B$, 向外

CD边, $F_2 = I l_1 B$, 向内

BC边, $F_3 = I l_2 B$, 向下

DA边, $F_4 = I l_2 B$, 向上

$$M = F_1 l_2 \cos\theta = I l_1 l_2 B \cos\theta = ISB \cos\theta$$

设线圈平面法线 \vec{n} (即 \vec{B} 与 \vec{S} 夹角 φ) $\cos\theta = \sin\varphi$

$$\vec{\mu} = N I \vec{S} = N I S \vec{n}$$

再若线圈为 N 匝, 则 $L = N I S B \sin\varphi \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

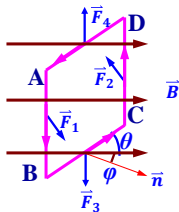


图2-1-69: 矩形载流线圈

【讨论】：

- (1) 均匀磁场中, $\sum \vec{F} = 0$, 只有转动;
- (2) $\varphi = 0$, $\vec{M} = 0$, 稳定平衡;
- (3) $\varphi = \pi$, $\vec{M} = 0$, 不稳定平衡;
- (4) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $M_{\max} = \mu B$

2、非均匀磁场中的载流线圈，

由图2-1-70, $B_1 > B_2$,

则 $F_1 > F_2$,

所以, 除转动外, 还向 \vec{B} 大处移动。

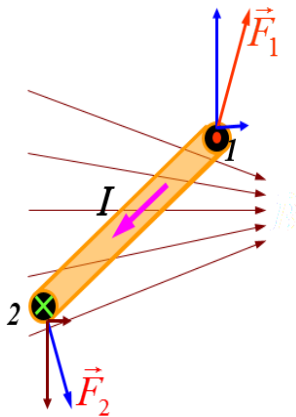


图2-1-70: 非均匀磁场

3、任意形状的平面载流线圈

将线圈沿 \vec{B} 方向,即 x 方向,分割成小矩形线圈,如图2-1-71。

$$dF_1 = Idl_1 B \sin\theta_1; dF_2 = Idl_2 B \sin\theta_2$$

$$dl_1 \sin\theta_1 = dl_2 \sin\theta_2 = dy ;$$

$$dF_1 = dF_2 = IBdy$$

$$M = IB(x_1 + x_2)dy = IBdS$$

$$M = \int NIBdS = NIBS \sin\varphi \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

任意形状的载流平面线圈,在均匀外磁场中不受力,但受到一个力矩,其总是力图使其磁矩转到 \vec{B} 方向。

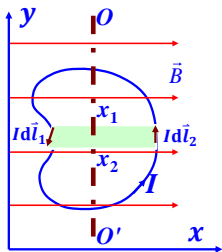
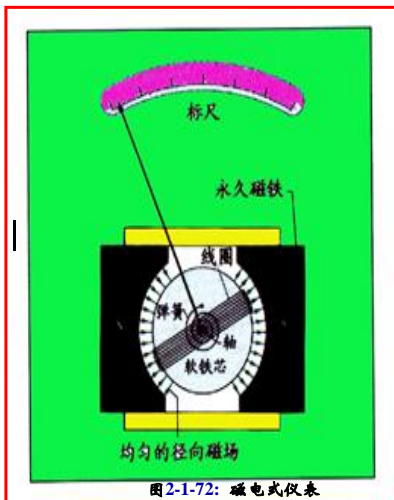


图2-1-71:平面载流线圈

4、应用:磁电式仪表、直流电动机、振镜扫描仪等。



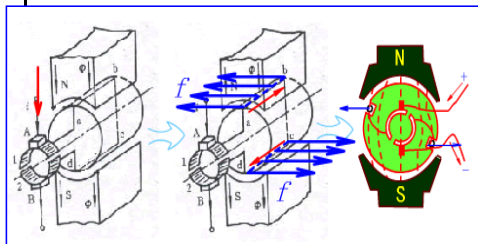
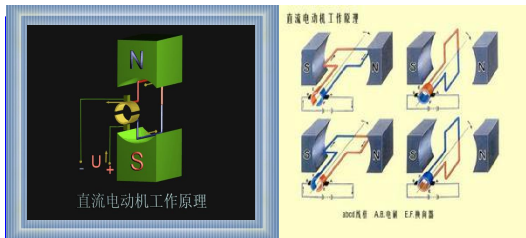


图2-1-73: 直流电动机

四、载流导体运动时磁力的功

1、载流直导线平动:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F = IlB$$

$$A = IlBd = I \cdot \Delta\Phi_m$$

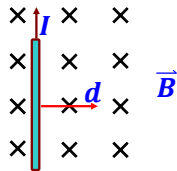


图2-1-74: 直流磁力的功

A 的正负与的正负无关!

2、载流线圈转动：

如图2-1-75,均匀磁场 \vec{B}
平面线圈磁矩 $\vec{\mu} = IS\vec{n}$ 夹角 θ

对 θ 微小的增量 $d\theta$,磁力的元功

$$dA = -Md\theta = -BIS\sin\theta d\theta = Id(BScos\theta)$$

即 $dA = Id\Phi_m$ 1) I 不变, $A = I\Delta\Phi_m$

2) I 变, $A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi_m$ 。

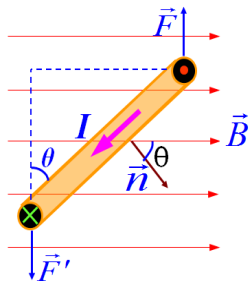


图2-1-75:不匀磁场中的线圈

【例题2-1-9】 矩形线圈可绕Y轴转动,边长 $l_1=6\text{cm}$, $l_2=8\text{cm}$, 电流 $I = 10\text{A}$ 。均匀磁场 $B = 0.02\text{T}$,方向平行X轴。求线圈平面与 \vec{B} 的方向成 30° 角时,求每边受到的安培力和线圈所受的磁力矩。

【解】 直导线在均匀磁场受力为 $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$

$$\text{则 } F_{ab} = -F_{co} = Il_1 B \sin 30^\circ$$

$$F_{bc} = -F_{oa} = Il_2 B \sin \frac{\pi}{2} = Il_2 B$$

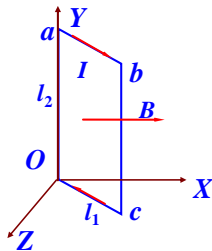


图2-1-76: 矩形线圈

线圈的磁力矩则为 $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

$$M = ISB \sin \theta = 10 \times 4.8 \times 10^{-2} \times 2 \times 10^{-2} \sin 60^\circ = 8.31 \times 10^{-2} (\text{N} \cdot \text{m})$$

例题2-1-10: 载有电流 I_1 的长直导线, 旁边有一正方形线圈, 边长为 $2a$, 载有电流 I_2 , 线圈中心到导线的垂直距离为 b , 线圈可绕平行于导线的轴转动。求

(1) 线圈角度为 α 位置时所受的合力 \vec{F} 和合力矩 \vec{L} ;

(2) 线圈从平衡位置转到 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 磁力所做的功。

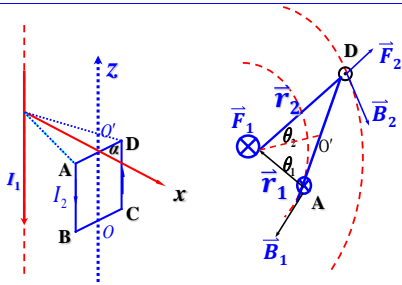


图2-1-77: 题2-1-10图

解:选择图示直角坐标系 $O'xyz$

(1)如图2-1-78所示整个线圈所受合力为
AB、CD两电流边受力矢量和,即

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

由安培力定律可知AB电流边受力大小为

$$F_1 = I_2 2a B_1 = I_2 2a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_1}$$

方向如图所示。

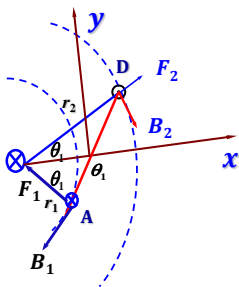


图2-1-78: 题2-1-10图

同理,CD 电流边受力大小为

$$F_2 = I_2 2a B_2 = I_2 2a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_2}$$

方向如图所示

由图示的几何关系,可知

$$\begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos\theta_1 = F_1 \frac{b - a \cos\alpha}{r_1} \\ F_{1y} = F_1 \sin\theta_1 = F_1 \frac{a \sin\alpha}{r_1} \\ F_{2x} = F_2 \cos\theta_2 = F_2 \frac{b + a \cos\alpha}{r_2} \\ F_{2y} = F_2 \sin\theta_2 = F_2 \frac{a \sin\alpha}{r_2} \end{cases}$$

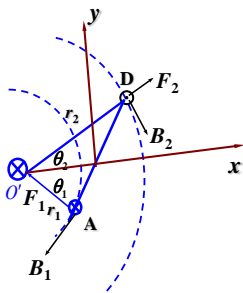


图2-1-78:题2-1-10图

$$\therefore \begin{cases} r_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ r_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha \end{cases}$$

如图,在直角坐标上分解得

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi} \left(\frac{b + a\cos\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} - \frac{b - a\cos\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \right)$$

$$\therefore F_y = F_{1y} + F_{2y} = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi} \left(\frac{a\sin\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} - \frac{a\sin\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \right)$$

根据力矩定义,得

$$\begin{aligned} L &= \sum F_{ix}y_i - \sum F_{iy}x_i = F_{1x}a \sin \alpha + F_{2x}a \sin \alpha - F_{1y}a \cos \alpha - F_{2y}a \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b a^2 \sin \alpha}{\pi} \times \\ &\quad \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} + \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \right) \end{aligned}$$

\vec{L} 方向,在俯视图中磁力矩使线圈沿顺时针方向旋转。

(2) 线圈平衡时, $\vec{L} = 0$, 即 $\alpha = 0$

$$A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} L d\alpha = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} L d\alpha$$

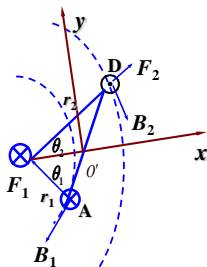


图2-1-78:题2-1-10图

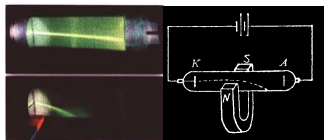
$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b a^2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha d\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha d\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi} \ln \frac{b-a}{b+a}$$

即为线圈从平衡位置转到 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 磁力所做的功。

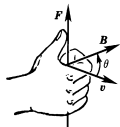
【2】洛伦兹力

实验证明:运动电荷在磁场中受力 $\vec{F} \begin{cases} \propto qv, B, \sin\theta \\ \vec{v} \times \vec{B} \text{ 的方向} \end{cases}$



(a)

(b)



$$\vec{F} \perp \vec{v}, \vec{F} \perp \vec{B}$$

图2-1-79:电子束在磁场中偏转

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

洛伦兹力做功吗?

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

洛伦兹力与安培力的关系?

洛伦兹力与安培力的关系

- 电子数密度为 n ，漂移速度 u ；
- dl 内总电子数为 $N = nSdl$ ，每个电子受洛伦兹力 \vec{f} ；
- N 个电子所受合力总和是安培力吗？

- 洛伦兹力 \vec{f} 作用在金属内电子上；
- 安培力 \vec{F} 作用在导体金属上；

作用在
不同的
对象上。

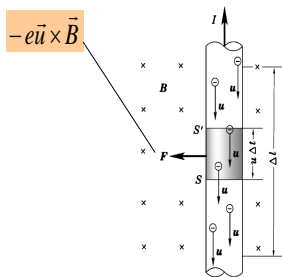


图2-1-80:金属导线模型

- 自由电子受力后,不会越出金属导线,而是将获得的冲量传递给金属晶格骨架,使骨架受到力。

电子受洛仑兹力的合力

骨架受到的冲力

$$\sum_{i=1}^n \vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{f}''$$

证明：

(1) 先说明导线中自由电子与宏观电流 I 的关系：

- 自由电子：定向运动，漂移速度 u ，电子数密度为 n ；
- 电流强度 I ：单位时间内通过截面的电量；

则在 Δt 时间内，通过导体内任一面元 ΔS 迁移电量为

$$\Delta q = (u \Delta t \Delta S \cos \theta) n e$$

电流

\vec{j} 电流密度

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = n e u \Delta S \cos \theta = \boxed{-n e \vec{u}} \cdot \vec{dS}$$

(2) N 个电子所受合力总和大小:

$$N = nS\Delta l$$

$$dF = \sum_i f_i = euBN = (eunS)B\Delta l = IB\Delta l$$

I

➤ 传递机制可有多种,但最终达到稳恒状态时,如图导体内将建立起一个大小相等方向相反横向电场 \vec{E} (霍尔场):

➤ 电子受力:洛伦兹力 \vec{f} ;

➤ \vec{E} 的作用力 \vec{f}' ;

带正电的晶格:在电场中受到 f'' ;

➤ f'' ——与电子所受洛伦兹力 \vec{f} 方向相同;

➤ 安培力 \vec{F} 是晶格所带电荷受力 f'' 总和

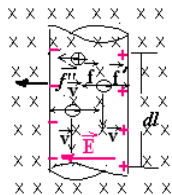


图2-1-81:磁场中载流导线

结论:安培力是电子所受洛伦兹力宏观表现。

[1] 带电粒子在磁场中的运动

带电粒子电量 q , 质量 m , 初速度 \vec{v}_0 , 磁感应强度 \vec{B}

1. $\vec{v}_0 // \vec{B}, \vec{F} = 0$, 匀速直线运动;

2. $\vec{v}_0 \perp \vec{B}, \vec{F} \perp \vec{v}_0$, 匀速圆周运动; $F = |q|v_0B = m\frac{v_0^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{mv_0}{|q| \cdot B}$ $R \propto v_0$

$$\frac{R}{v_0} = \frac{m}{|q| \cdot B} \quad \boxed{\text{常量}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{|q| \cdot B} \quad \boxed{\text{与 } v_0 \text{ 无关}}$$

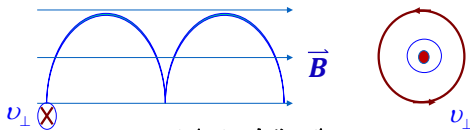


图2-1-82: 电子在磁场中作螺旋运动

3. \vec{v}_0 与 \vec{B} 夹角 θ , $v_{\parallel} = v_0 \cos\theta$, 匀速直线运动
 $v_{\perp} = v_0 \sin\theta$, 匀速圆周运动 \rightarrow 螺旋运动

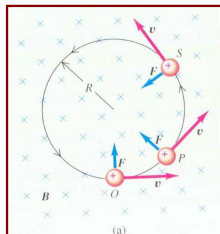
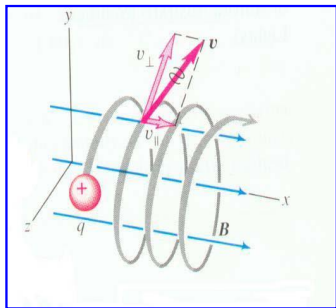


图2-1-83: 电子在磁场中作螺旋运动

[2]回旋加速器

1、结构:逐步参见图2-1-84

➤一对D型盒(电极),半径 R ;

➤交变电场(电源),周期 T ;

➤磁场,磁感应强度 B 。

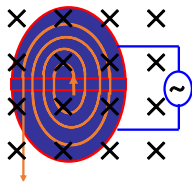


图2-1-84:回旋加速器

2、原理:D型盒电极间加速电场周期=回旋共振周期

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi R}{v_0}$$

粒子通过电极间隙时总被加速,最终速率 $v_M = BR \frac{q}{m}$

$$\text{粒子最终动能: } E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(qBR)^2}{2m}$$

受相对论效应约束,当 $\frac{q}{m}$ 不是常量时,其基本原理不再满足。

[3]磁聚焦

1) 电子枪、电子透镜

2) 电子的飞行速率

$$v_{\parallel} = v, v_{\perp} = v\theta$$

➤ 周期 $T = \frac{2\pi m}{eB}$

➤ 螺距 $t = vT = \frac{2\pi mv}{qB}$

➤ 屏距 $L = nt = \frac{2\pi nmv}{qB}$ $n = 1, 2, \dots$ (图2-1-86例, $n = 2$)

➤ 电与磁聚焦

(A) 改变电场 \vec{E} , 即改变 \vec{v}

(B) 改变磁场 \vec{B} , 均改变 t, L

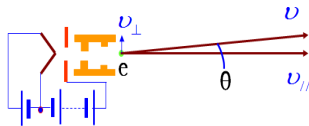


图2-1-85: 电子枪示意图

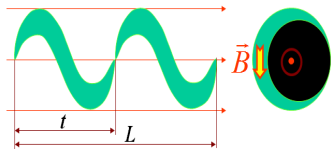


图2-1-86: 电子束的磁聚焦

[4]磁约束

➤ 带电粒子在非均匀磁场中沿磁感应曲线作螺旋运动。

由下式知 $R = \frac{mv}{qB}$

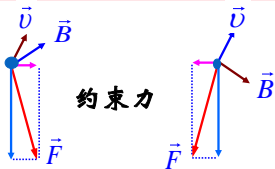
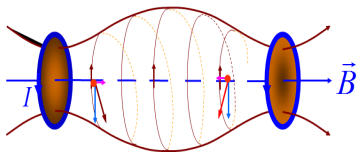
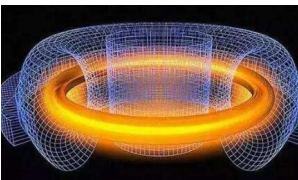


图2-1-87: 正离子被磁约束示意图

➤ 带电粒子在向磁场较强的方向运动时,作螺旋运动的半径将随着磁感应强度的增加而不断地减小,如图所示。

➤ 带电粒子在非均匀磁场所受洛伦兹力,恒有一个指向磁场较弱方向的轴向分力,此力阻止带电粒子向磁场较强的方向运动,这样有可能使粒子沿磁场方向的速度逐渐减少到零,从而迫使粒子掉向反转运动。

➤ 利用这种现象,制造出磁约束装置。

➤ **磁镜原理**: 利用带电粒子磁矩的守恒性, 可以把带电粒子约束在一弱磁场区, 其两端磁场较强, 形成所谓“磁镜”。

➤ 这种两端强、中间弱的磁场位形, 可用两个电流方向相同的线圈产生, 称为**磁镜装置**。

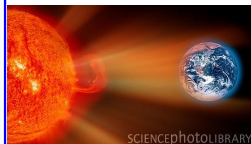
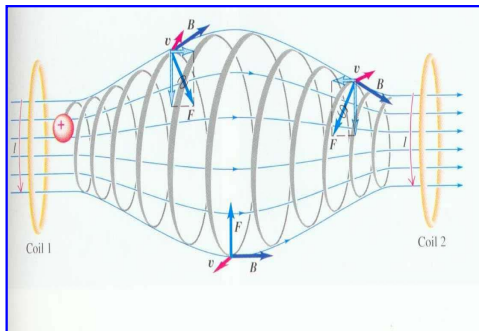


图2-1-88:

非均匀磁场的磁约束应用:

- 磁镜及环形磁约束结构;
- 解释地磁场内的范艾伦(J. A. Van Allen)辐射带;
- 解释北极光现象。

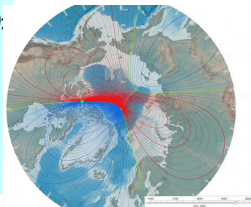
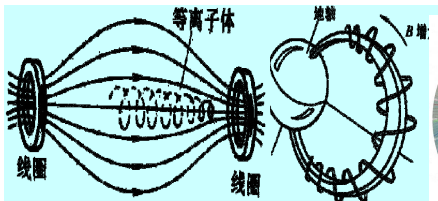
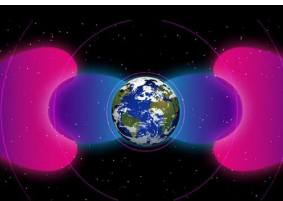
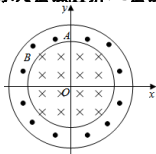


图2-1-89:

【习题】 如图所示一磁约束装置的原理图,同心圆圆心 O 与 xOy 平面坐标系原点重合,半径为 R_0 的圆形区域I内有方向垂直于 xOy 平面向里的匀强磁场,一束质量为 m ,电荷量为 q ,动能为 E_0 的带正电粒子从坐标为 $(0,R_0)$ 的A点沿 y 轴负方向射入磁场区域I,粒子全部经过坐标为 $(0,R_0)$ 的P点,方向沿 x 轴正方向。当在环形区域II加上方向垂直于 xOy 平面向外的另一匀强磁场时,上述粒子仍从A点沿 y 轴负方向射入区域I,所有粒子恰好能够约束在环形区域内,且经过环形区域II的磁场偏转后第一次沿半径方向从区域II射入区域I时经过内圆周上的M点(M点未画出),不计重力和粒子间的相互作用。

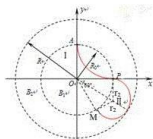


(1) 区域I中磁感应强度 B_1 的大小;

(2) 若环形区域II中磁场强度 $B_2 = \sqrt{3}B_1$,求M点坐标及环形外圆半径 R ;

(3) 求粒子从A点沿 y 轴负方向射入圆形区域I至再次以相同速度经过A点的过程所通过的总路程。

【解】 (1) 由题意,粒子在区域I内从A点做匀速圆周运动到P点,显然 $r_1=R_0$



[5] 荷质比的测定

1、W. Thomson 测荷质比的方法

当 E 和 B 的值适当时, 可使电子束不偏转, 即 $eE = evB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$ (1)

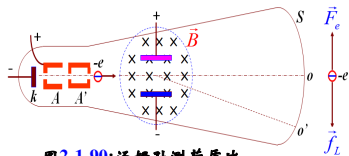


图2-1-90: 汤姆孙测荷质比

切断电场, 电子在磁场中作圆周运动, 圆周半径 $R = \frac{mv}{eB}$ (2)

由式(1)、(2)得荷质比 $\frac{e}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{E}{RB^2}$

电子运动出磁场后依惯性前进。由屏 S 上光点偏移量 oo' 和仪器参数可测算出 R 的值。其参数包括结构尺寸, 电、磁场分布等。

❖ 荷质比与速度有关, 这符合狭义相对论观点

2、磁聚焦法测荷质比方法

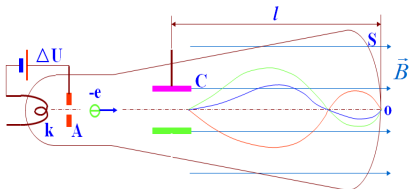


图2-1-91:磁聚焦法测荷质比

➤如图2-1-91,A—k间加电压 ΔU ,电子的动能 $\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta U \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2e\Delta U}{m}}$ (3)

➤在电容C上加一小交变电场,使不同时刻通过的电子偏转不同。

➤在C与S之间加聚焦磁场 \vec{B} ,调节 \vec{B} ,使电子束聚焦于屏S平面上,则 $l = \frac{2\pi mv}{eB}$ (4)
($n=1$, 如何确定?)

➤由式(3)、(4)得荷质比 $\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2\Delta U}{l^2 B^2}$

❖ 质谱仪

质谱仪是通过测量电离原子(离子)的质量或荷质比对样品进行成分分析的重要仪器。

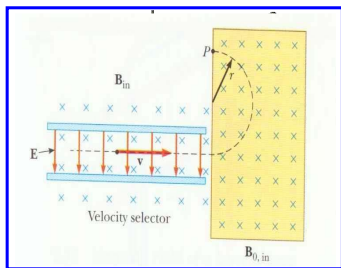


图2-1-92:质谱仪

原理:如图2-1-92所示被加速的离子进入速度选择器,即其中存在着相互垂直的均匀电场和均匀磁场的电容器两极板之间。

[6]托卡马克

托卡马克是“磁线圈圆环室”的俄文缩写,又称环流器。

一个类似螺绕环的装置,由封闭环形磁场构成的“环形容器”(见图2-1-93),可用来约束等离子体。

- ①将这整个带有等离子体的圆环室作为一个大型变压器的次级线圈;
- ②当变压器通电后,等离子体内将有很大的电流,造成绕环轴的圆型磁场(见图2-1-94) $B \propto r$;
- ③靠环壁的带电粒子受磁压效应向环轴集中,达到磁悬浮约束等离子体的目的。

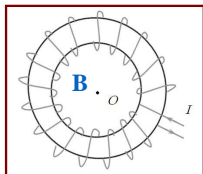


图2-1-93: 环流器

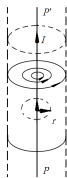


图2-1-94: 绕环轴磁场

- 当等离子体当环内中含大量氘(D)、氚(T)离子,且当等离子体温度达到或高于 10^8K 时,才能发生聚变反应:



- 释放出大量核能,又称**热核聚变反应**
- 为使这反应能持续进行,还必须使维持的时间 τ 与离子的数密度 n 达到

$$n\tau > 3 \times 10^{20} (\text{m}^{-3} \cdot \text{s})$$

称为**劳逊条件**

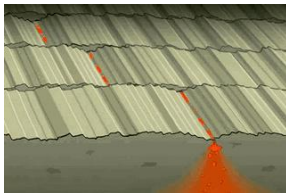
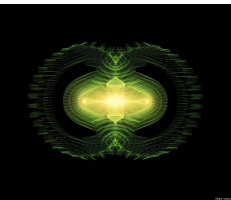
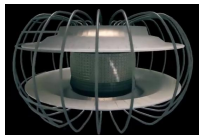


图2-1-95:合肥“人造小太阳”装置—EAST

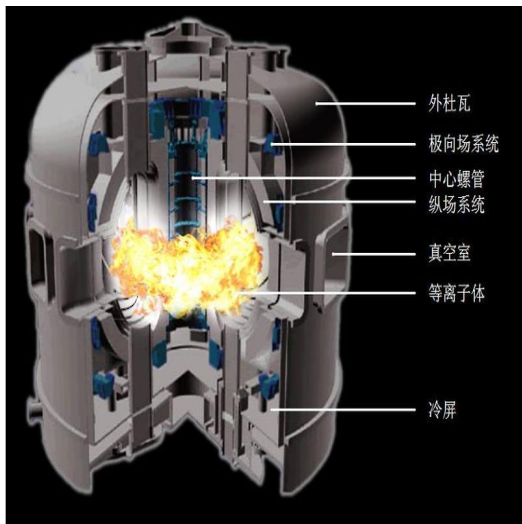


图2-1-96

【例题2-1-11】 在空间有互相垂直的均匀电场 E 和均匀磁场 B , B 沿 x 轴方向, E 沿 z 轴方向。一电子(质量为 m 电荷量为 e)开始从原点出发, 以速度 v_0 向 y 轴方向前进, 如图2-1-97所示, 试求这电子运动的轨迹。

【解】 如图, 电场和磁场分别为

$$\begin{cases} \vec{E} = (0, 0, E) & \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B} = (B, 0, 0) & \text{②} \end{cases}$$

初始条件为: $t = 0$ 时

$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \\ \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)_0, \left(\frac{dy}{dt} \right)_0, \left(\frac{dz}{dt} \right)_0 \right) = (0, v_0, 0) \end{cases}$$

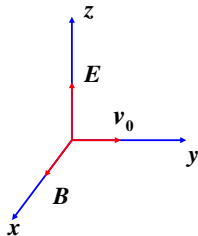


图2-1-97:

电子的运动方程为 $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E} + e \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$ ③

写成分量式,并考虑式①、②,使得

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{④} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = eB \frac{dz}{dt} \quad \text{⑤} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = eE - eB \frac{dy}{dt} \quad \text{⑥} \end{array} \right.$$

解式④,并利用初始条件解得 $x=0$, 这表明电子在 $y-z$ 平面内运动。

将式⑤对时间 t 积分,并利用初始条件得

$$m \frac{dy}{dt} = eBz + mv_0 \quad (7)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{e^2 B^2}{m} \left(z - \frac{mE}{eB^2} + \frac{mv_0}{eB} \right)$$

解方程,并利用初始条件得

$$z = \frac{m}{eB} \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \left[\cos \left(\frac{eB}{m} t \right) - 1 \right]$$

将上式代入式⑦,积分并利用初始条件得

$$y = \frac{m}{eB} \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin \left(\frac{eB}{m} t \right) + \frac{E}{B} t$$

由此得电子运动轨迹,是 $y-z$ 平面里一条摆线(旋轮线)。

【例题2-1-12】磁镜:

(1) 一个半径为 R , 电流为 I 的电流圆环, 求在轴线上的磁感应强度。

(2) 设两个线圈各有 N 匝线圈, 通以相同的电流为 I , 两个线圈的半径都为 R 。如果两个线圈之间的距离为 $10R$, 这时两个线圈之间的磁场就形成了一个磁镜, 带电粒子在磁镜中磁矩 μ 是守恒量。宇宙射线中的带电粒子在各个方向均匀进入这个磁镜中, 则什么角度范围内的带电粒子进入这个磁镜后会被捕获?

(3) 带电粒子在磁镜中运动, 如果磁感应强度为 B 处的回旋半径 a , 证明: $a\sqrt{B} = \text{const}$

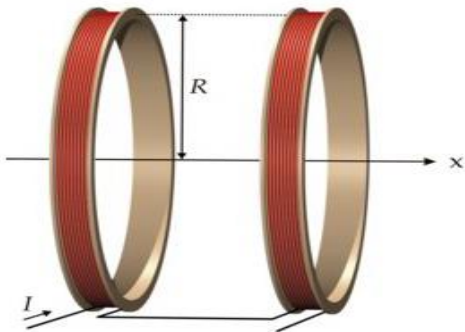


图2-1-98

* § 2-1-6: 不同参照系之间电磁场

一、特鲁顿和诺伯的实验

若以太存在,为绝对参照系 S ,地球是非绝对参照系 S'

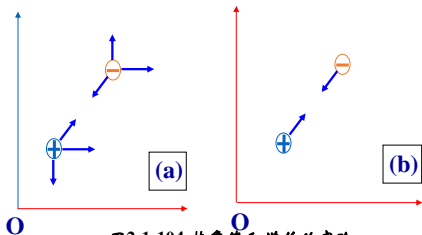


图2-1-104:特鲁顿和诺伯的实验

电荷在 S' 中静止,只有静电力相互作用,如图2-1-104(b);

电荷在 S 中运动,除静电力,还有磁力作用,如图2-1-104(a);

结果是否定的



电磁规律的数学形式在一切惯性参照系中均相同

本节要求

- 1、了解磁的基本现象,理解安培定律及磁感应强度的概念;
- 2、理解毕奥-萨伐尔定律,能计算简单情况下电流的磁场分布;
- 3、理解磁场的高斯定理和安培环路定律的意义,能计算有一定对称性的电流的磁场分布;
- 4、理解载流导体的磁矩的定义,并能计算它受磁场作用的力矩;
- 5、理解洛仑兹力公式的意义,会计算带电粒子在磁场中的运动。

2-1:真空中静磁场小结

一、理论体系:

$$\left. \begin{array}{l} \text{库仑定律} \\ \text{安培定律} \\ \text{毕-萨-拉定律} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{高斯定理} \rightarrow \text{磁场为无源场} \\ \text{环路定理} \rightarrow \text{磁场是有旋(矢势)场} \end{array} \right.$$

二、内容:

$$1. \text{两条路线} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_m = \frac{q_{m0} q_m}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{r} \\ d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \end{array} \right.$$

$$2. \text{两个定理:} \left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$$

3. 两个物理量: \vec{B} —— 反映场力性质, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, 要求唯一。

\vec{A} —— 反映场能性质, 要求可微。

$$\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

4. 三种方法: 已知电流分布, 求磁场分布

(1) 毕-萨-拉定律;

(2) 环路定理;

(3) $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 。

5. 场的形象化几何描述:

磁力线——规定、性质、通量 $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$

6. 磁场力的作用:
$$\begin{cases} \vec{F}_A = I d\vec{l} \times \vec{B} \\ \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \end{cases}$$

7. 应用: 磁聚焦、荷质比、回旋加速器、气泡室等

8. 霍尔效应:
$$U_H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{d}$$

三、 I 、 \vec{B} 、 \vec{A}

1. $I \Rightarrow \vec{B} \Rightarrow \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

2. $I \Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \\ \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i \end{cases}$

小结图

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \Rightarrow \begin{cases} d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B} \\ d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \end{cases} \rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

力:

矢势:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L)} I_i \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \end{array} \right.$$

$$\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

图2-1-105

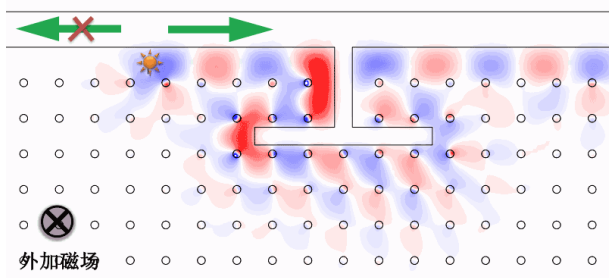


图2-1-106: 量子霍尔边界态单向传输示意图

第三章 电磁部分

3-1 电磁感应

3-2 磁场能量

电磁感应

第三章 电磁部分(I)

任务：磁推动电荷形成电流的作用规律

引言

法拉第电磁定律 (ε, Ψ_B)

电磁感应定律

动生与感生

自感与互感

磁通量

两者关系

感应电动势

动生与感生电动势的计算

自感与互感系数计算

本章知识单元与知识点小结

本章引言

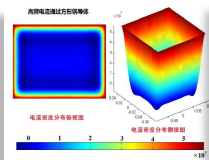
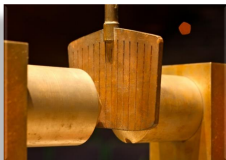


图3-1-1:Faraday (1791-1867)

自**1820**年**奥斯特**实验发现了**电流磁效应**后,与此同时,也提出了寻找其**逆效应**的研究课题,即寻找**磁的电效应**。

然而,众多学者的种种尝试均无所获。

直到**1831.8.29** **Faraday (1791-1867)** 经历近十年的艰苦努力,发现了**电磁感应现象**。



3-1 电磁感应

3-1-1 电磁感应定律

3-1-2 动生与感生电动势

3-1-3 互感与自感

3-1-4 似稳与暂态过程

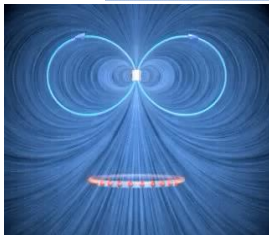
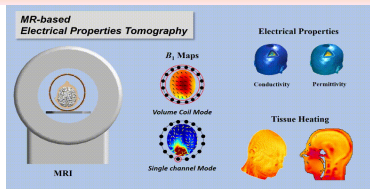


图3-1-2:电磁感应现象

§ 3-1-1 电磁感应定律

【1】 电磁感应现象

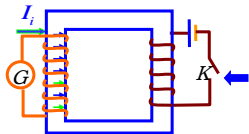
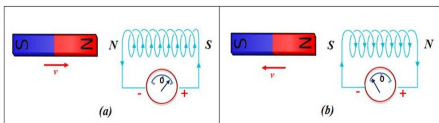
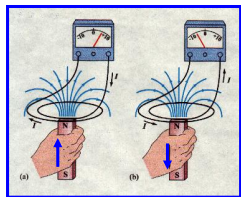
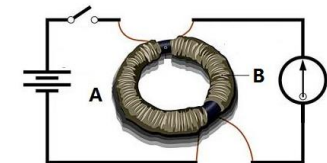
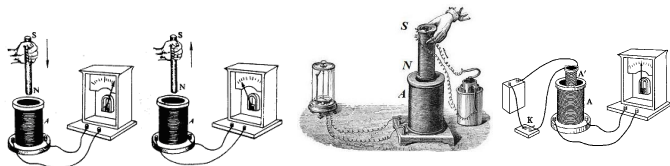


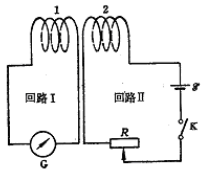
图3-1-3:典型的电磁感应现象

进一步实验研究发现:在线圈中插入铁芯后,线圈中的感应电流大大增加,说明**感应电流**的产生是因为**磁感强度通量的变化**,而不是由于**磁感强度的变化**。

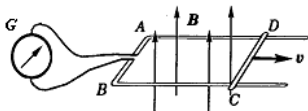
深入思考电磁感应一系列实验



(a) 插入或拔出磁棒



(b) 接通或断开初级线圈的电流



(c) 导线切割磁感应线的运动

图3-1-4: 典型的电磁感应现象

感应电动势是由于闭合导体的一段**CD**切割磁力线所产生的,根据这一分析法拉第发明了**直流发电机**。

同时,也了解到有两种**感应电动势**:**感生电动势**和**动生电动势**。

并提出:即使一段导线切割磁力线,在导线两端也会产生**感应电动势**。

下图是法拉第设计的**直流发电机的原理图**,当导体圆盘绕轴以角速度 ω 旋转时,电流计指针发生偏转, ω 越大,偏转越厉害。

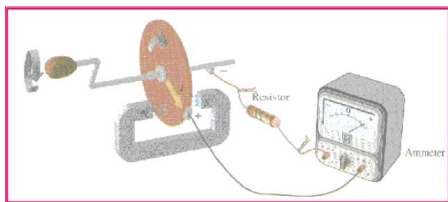


图3-1-5:直流发电机的原理图

Faraday观察的结果

►把可以产生感应电流情况概括成五类：

- 变化着的**电流**；
- 变化着的**磁场**；
- 运动的**稳恒电流**；
- 运动的**磁铁**；
- 在磁场中运动的**导体**。

【实验规律定性描述】

通过**闭合回路面积 \vec{B} 的通量**发生变化时,回路中就产生**感应电动势**(或**感应电流**),称为**电磁感应现象**。

实验小结：

当通过导体回路的磁通量随时间发生变化时，回路中就有感应电动势产生，从而产生感应电流。

这个磁通量的变化可由磁场变化引起的，也可由于导体在磁场中运动或导体回路中的一部分切割磁力线的运动而产生的。

- (1) 电磁感应现象实质：磁通量变化产生感应电动势；
- (2) 感应电动势的大小与磁通量变化的快慢有关；
- (3) 感应电动势的“方向”，即由它产生感应电流的方向，总是产生一个附加的磁通量，以阻止引起感应电动势的那个磁通量的变化。后面楞次定律说明。

楞次定律

实验表明：闭合导体回路中产生的**感应电流**具有确定的**方向**，总是使得该电流产生的穿过回路的**磁通量**，去**阻碍**引起感应电流的**磁通量的变化**。

判断感应电流方向：

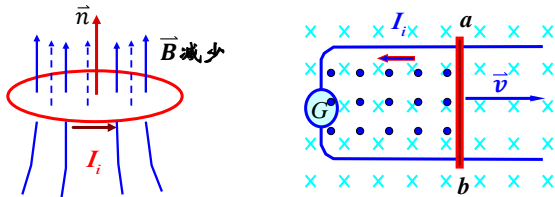


图3-1-6:判断感应电流方向

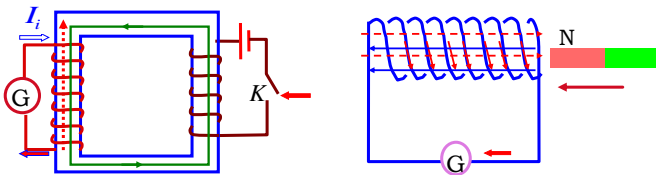
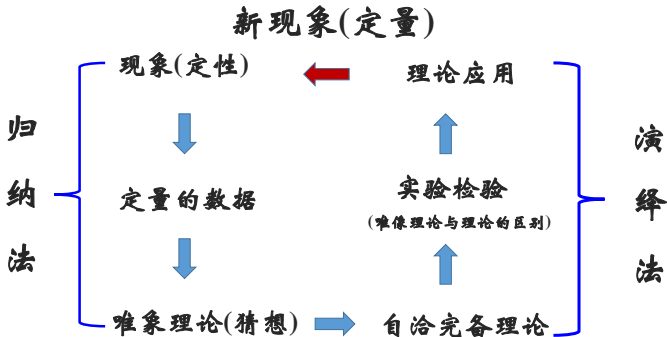


图3-1-7:判断感应电流方向

► 几点注意:

- (1) 感应电流所产生的磁通量要**阻碍**的是磁通量变化,而不是磁通量本身,阻碍并不意味着**抵消**;
- (2) 此定律的宏观表现是**反抗**相对运动或磁场变化等;
- (3) 此定律是**能量守恒**在**电磁感应现象**中的具体体现。

科学研究范式(方法)



天赋和洞察力

【2】 法拉第电磁感应定律

1845年法拉第的实验研究成果先后被Neumann、Weber等人写成数学形式, 现在的形式:

$$\varepsilon = k \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{SI制中, 比例系数为}-1); \text{或} N \text{ 匝时 } \varepsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\text{或 } \varepsilon = -\frac{d\Psi_m}{dt} \quad (\Psi_m \text{ 磁链数、磁通匝链数、全磁通})$$

$$\text{电流 } I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (R \text{ 为回路电阻})$$

【例3-1-1】 参见图3-1-8,

$$\text{【解】 } \Phi = Blx \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt}$$

$$\text{得 } \varepsilon = -Blv = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l}$$

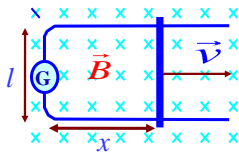


图3-1-8:例3-1-1 用图

【例3-1-2】在均匀磁场中匀速转动的线圈,参见图3-1-7。

【解】 $\Phi = BS\cos\theta$

$$\text{电动势 } \varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS\sin\theta \frac{d\theta}{dt} = NBS\omega\sin\omega t = \varepsilon_0\sin\omega t$$

其中 $\varepsilon_0 = NBS\omega$ (电动势的幅值)

$$\text{电流 } I = \frac{\varepsilon_0}{R} \sin\omega t = I_0 \sin\omega t$$

$$\text{式中 } I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

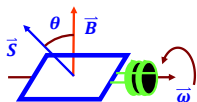


图3-1-7:例3-1-2用图

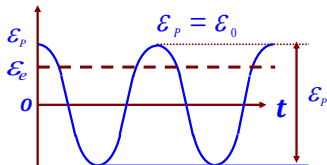


图3-1-8:简谐波交流电

市电:

$$f = 50\text{Hz}, \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, T = 1/50 = 0.02 \text{ s}$$

几点说明:

(1) 表达式 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 并不是法拉第提出来的, 但它所表示的规律是法拉第在实验中发现的, 故后人一直称它为**法拉第电磁感应定律**。

(2) 电磁感应定律积分形式

用 \vec{E}_k 表示**等效的非静电场强**, 根据电动势的概念

$$\varepsilon_i = \oint_{(L)} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

而 $\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$, 故**Gauss**定理关系

$$\oint_{(L)} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

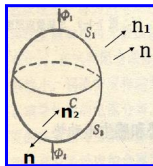


图3-1-9

(3) 负号“-”讨论: 如何确定正、负号?

负号是人为规定结果, 表示楞次定律(可参见负号讨论)。

通常规定(约定): \vec{n} 为 $d\vec{l}$ 的右旋进方向上的单位矢量, 如图所示, 则出现负号。

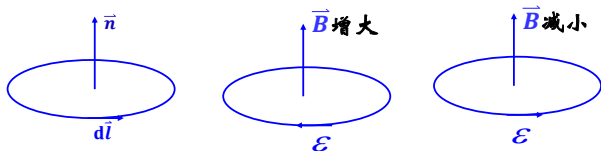


图3-1-10

如果规定 \vec{n} 为 $d\vec{l}$ 的左旋进方向上的单位矢量, 则式中就不会出现负号。

➤ 以环路方向为基准,以右螺旋的环路面积法向为判别 Φ_B 正负号的依据:

➤ \vec{B} 与 \vec{n} 夹锐角, $\Phi > 0$;

➤ \vec{B} 与 \vec{n} 夹钝角, $\Phi < 0$ 。

➤ 确定电动势方向的步骤:

① 选定回路 L 绕行方向,以确定 \vec{n} 方向作为基准;

② 确定的正负;

③ 确定 $\frac{d\Phi_B}{dt}$ 的正负;

④ 确定 ε 的正负,(详见下页)

➤ $\varepsilon > 0$, ε 的方向与 L 绕行方向相同;

➤ $\varepsilon < 0$, ε 的方向与 L 绕行方向相反。

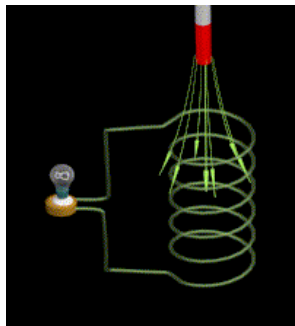


图3-1-12:确定电动势的方向

(4) 感应电流和感应电量 $I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow q_i = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$

上式 $q_i = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$ 是磁通计的工作原理。

➤ 测量 q_i , 已知回路电阻, 则可得到这段时间内通过回路所围面积的磁通量的变化量。

(5) 电磁感应定律的应用----感应电动势计算

➤ 方法1: 用公式只求感应电动势的大小, 方向用楞次定律判断。

➤ 方法2: 由法拉第电磁感应定律直接求感应电动势的大小和方向。

➤ 其中判断感应电动势方向的方法:

- ① 指定回路正绕行方向, 即感应电动势的正方向与回路平面的正法线 \vec{n} 方向;
- ② 确定 Φ 的正负, \vec{B} 与 \vec{n} 方向同, 则 Φ 为正, 反之为负;
- ③ $d\Phi/dt < 0$ 增加, $d\Phi/dt > 0$, 反之为负;
- ④ 确定 ε 方向, $\varepsilon > 0$ 方向与回路正绕行方向相同, 反之相反。

涡电流(Foucault's currents)

在不能视为线状连续导体中产生感应电流(涡流),见图3-1-12。

$$I_f = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = S \frac{dB}{dt}$$

$$\text{取 } B = \mu_0 n I, I = I_0 \sin \omega t$$

$$\text{则 } I_f = -\frac{\mu_0 n S I_0 \omega}{R} \cos \omega t$$

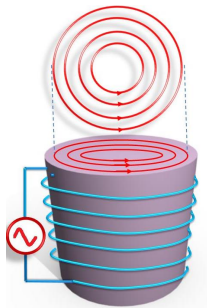


图3-1-12:涡电流

【讨论】：

- (1) 金属导体, R 小(ρ 小), I_f 很大;
- (2) $I_f \propto \omega$ —— 高频炉, 矽钢片;
- (3) $I_f \propto R^{-1}$ —— 铁涂氧, 硅钢片;
- (4) I_f 与 I 反相 —— 电磁阻尼、瓦时计、磁悬浮、异步电机;
- (5) 趋肤效应 —— 表面硬化, 空心导线。

趋肤效应

当高频电流通过导线时,在导线同一截面上电流密度随 r 增大而增大——

趋肤效应。定性解释参见图3-1-13。

$$\text{定量描述 } j = j_0 e^{-\frac{d}{d_s}}$$

式中： d ——从导线表面向轴线方向的深度；

j_0 ——导线表面($d = 0$)处的电流密度；

d_s ——趋肤深度, j 减小到 j_0 的 e 分之一(37%)的深度。

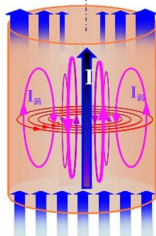


图3-1-13:趋肤效应

理论计算可得：
$$d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_r \mu_0 \sigma}} = \frac{503}{\sqrt{f \mu_r \sigma}}$$

d_s 越小趋肤越显著

【例题3-1-3】 一长直导线载有**5.0A**直流电流,旁边有一个与它共面的矩形线圈, $l=20\text{cm}$, $a=10\text{cm}$, $b=20\text{cm}$;线圈共有 **$N=1000$** 匝,以 **$3.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$** 的速度离开直导线,求线圈里的感应电动势的大小和方向。

【解】 设 **t** 时刻通过线圈的磁通量

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \int d\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{a+vt}^{b+vt} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx \\ &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{b+vt}{a+vt}\end{aligned}$$

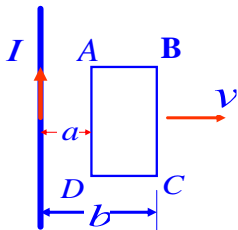


图3-1-14:例3-1-3 用图

由法拉第电磁感应定律

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -N \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{\mu_0 I l N}{2\pi} \frac{(a+vt)v - (b+vt)v}{(a+vt)(b+vt)}\end{aligned}$$

$t=0$ 时线圈内的感应电动势:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -N \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\mu_0 I l N}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ &= 3.0 \times 10^{-3} (\text{V})\end{aligned}$$

线圈内的感应电动势的方向为顺时针方向。

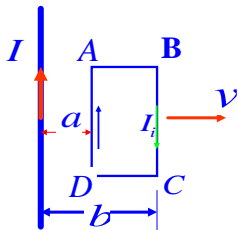


图3-1-14 例3-1-3用图

[例题3-1-4] 电流强度为 I 的长直导线的附近有正方形线圈绕中心轴 OO' 轴以匀角速度 ω 旋转, 求线圈中的感应电动势。已知正方形的边长为 $2a$, OO' 轴与长直导线平行, 相距为 b 。

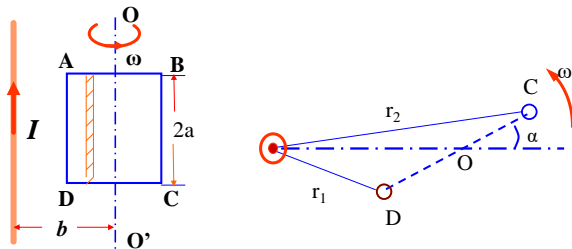


图3-1-15 :例3-1-4用图

【解】 如图所示,通过窄条的磁通量为

$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{B} \cdot \vec{n} dS = B \cos\theta \cdot 2adl \\ &= 2aBdr = 2a \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r} \end{aligned}$$

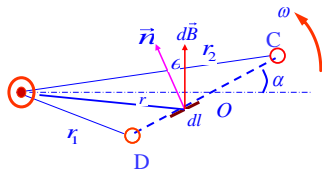


图3-1-16:例3-1-4 用图

$\alpha = \omega t$ 时通过线圈的磁通量

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 a I}{\pi r} dr = \frac{\mu_0 a I}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

由余弦定理求得

$$\begin{cases} r_1^2 = a^2 + b^2 - 2abc\cos\omega t \\ r_2^2 = a^2 + b^2 + 2abc\cos\omega t \end{cases}$$

$$\therefore \Phi = \frac{\mu_0 a I}{\pi} \ln \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2abc \cos \omega t}{a^2 + b^2 - 2abc \cos \omega t}}$$

由法拉第电磁感应定律求线圈内的感应电动势:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 ab \omega I}{\pi} \left(\frac{1}{a^2 + b^2 - 2abc \cos \omega t} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2abc \cos \omega t} \right) \sin \omega t$$

不难判断,线圈内感应电流是随着线圈转动而变化。

此时电流方向如图3-1-17所示。

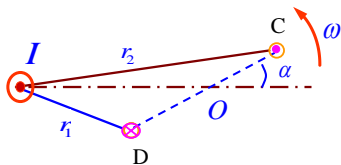


图3-1-17:例3-1-4用图

§ 3-1-2 动生电动势和感生电动势

? 动生电动势: 磁场不变, 导体在磁场中运动而产生感应电动势;

? 感生电动势: 导体不动, 因磁场变化而产生的感应电动势。

【1】动生电动势

(1) 运动导线内的动生电动势:

如图3-1-18所示, \vec{v} 与 \vec{B} 的夹角 φ , \vec{l} ($d\vec{l}$) 与 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的夹角 ψ 。

则 $d\varepsilon = vdl \cos\psi \cdot B \sin\varphi$ 或 $d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

一般 $\varepsilon = \int_{(L)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$; 闭路 $\oint_{(L)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$;

若为匀强磁场, 直杆, 正交情况 $\varepsilon = vBl$

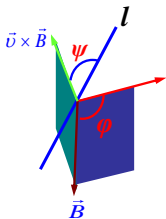
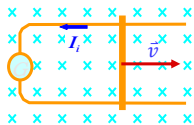


图3-1-18: 动生电动势

(2) 动生电动势的经典解释

激发机制: 导体在磁场中运动 \rightarrow 电子在磁场中运动 \rightarrow 受洛伦兹力作用 \rightarrow 电荷在导体两端积累产生电动势

运动导体中的自由电子受洛伦兹力 $\vec{f}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}$

电荷分布产生附加电场, 电子受静电力 $\vec{F}_e = -e\vec{E}$

达到平衡时 $\vec{F}_e + \vec{f}_L = 0$

综上所述得 $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$

则非静电场 $\vec{E}_k = \vec{v} \times \vec{B}$

由 $\mathcal{E} = \int_{(L)} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

得 $\mathcal{E} = \int_{(L)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$;

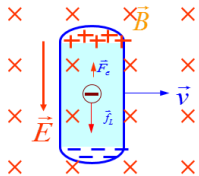


图3-1-19: 经典解释

(3) 转动线圈中的动生电动势

设均匀磁场 \vec{B} 与线圈平面夹角 θ , 线圈匝数 N , 面积 $S = l_1 l_2$,

$$\begin{aligned} \text{> } a \text{ 处: } \varepsilon_a &= \int_{(l_1)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{(l_1)} v B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) dl \\ &= v B l_1 \cos\theta \quad (\text{方向 } \odot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{> } b \text{ 处: } \varepsilon_b &= \int_{(l_1)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{(l_1)} v B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) dl \\ &= v B l_1 \cos\theta \quad (\text{方向 } \otimes) \end{aligned}$$

$$\varepsilon = N(\varepsilon_a + \varepsilon_b) = 2NvBl_1 \cos\theta$$

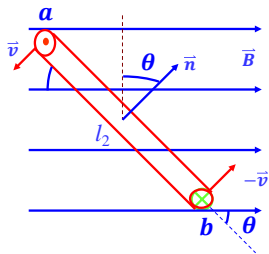


图3-1-20:转动线圈

$$\varepsilon = N(\varepsilon_a + \varepsilon_b) = 2NvBl_1 \cos\theta$$

$$\text{由 } v = \frac{1}{2}l_2\omega, \theta = \omega t$$

$$\text{得 } I = NBl_1l_2\omega \cos\omega t = NBS\omega \cos\omega t$$

$$\text{或 } \varepsilon = \varepsilon_0 \cos\omega t \quad \text{式中 } \varepsilon_0 = NBS\omega$$

$$I = \frac{NBS\omega}{R} \cos\omega t$$

$$\text{或 } I = I_0 \cos\omega t \quad \text{式中 } I_0 = \frac{NBS\omega}{R}$$

【另法】：

$$\Phi = NBS \sin\theta \Rightarrow \varepsilon = NBS \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = NBS\omega \cos\omega t$$

【讨论】：洛仑兹力不做功。

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \\ \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \vec{F}_x = -e\vec{v}_y \times \vec{B} \\ \vec{F}_y = -e\vec{v}_x \times \vec{B} \end{cases}$$

➤ 功率

$$\begin{aligned} P &= \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F}_x \cdot \vec{v}_x + \vec{F}_y \cdot \vec{v}_y \\ &= (-e\vec{v}_y \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_x + (-e\vec{v}_x \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_y \\ &= -e[\vec{v}_y \times (\vec{B} \times \vec{v}_x) + (\vec{v}_x \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_y] \\ &= -e\vec{v}_y \cdot [(\vec{B} \times \vec{v}_x) - (\vec{B} \times \vec{v}_x)] = 0, \text{即 } \vec{F} \perp \vec{v} \end{aligned}$$

➤ 洛仑兹力不做功，洛仑兹力只起传递能量的作用。

➤ 要保持金属杆移动速度 \vec{v}_x ，外力需克服阻力 \vec{F}_x 做功；

➤ 电荷受 \vec{F}_y 的作用而获得速度 \vec{v}_y ，从而获得能量。

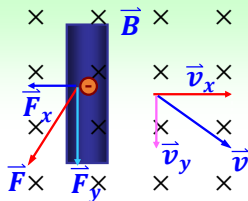


图3-1-21:洛仑兹力不做功

(4) 动生电动势的计算

(a) 对于导体回路

两种方法：
➤ 动生电动势定义式 $\varepsilon_i = \oint_{(L)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

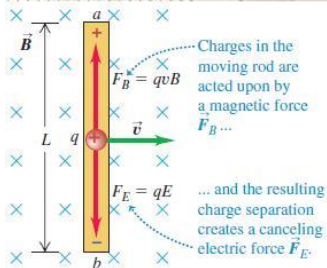
➤ 法拉第电磁感应定律 $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$

(b) 对于不成回路的导体

➤ 动生电动势定义式 $\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$;

➤ 设想一个合理的回路以便应用法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$



【例题3-1-5】 长为 L 的铜棒在磁感强度为 \vec{B} 的均匀磁场中,以角速度 ω 在与磁场方向垂直的平面内绕棒的一端 O 匀速转动,求:棒中的动生电动势。

【解法一】

选定如图指向,由动生电动势定义式,有

$$\varepsilon = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l};$$

$$\varepsilon = - \int_0^L v B dl = -\frac{1}{2} B \omega L^2$$

$$\therefore \varepsilon < 0$$

所以其方向为向左,即 O 点电势高于 a 点。

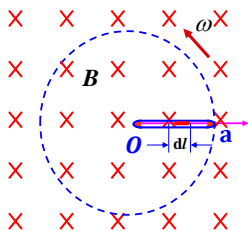


图3-1-22:例题3-1-5用图

【解法二】

设想一个回路,由圆弧和铜棒构成的回路,选定绕行方向为逆时针(如图3-1-23),

$$\text{则 } \Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = -BS = -B \frac{L^2}{2} (\pi - \theta)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d \left[B \frac{L^2}{2} (\pi - \theta) \right]}{dt} = -\frac{1}{2} BL^2 \omega$$

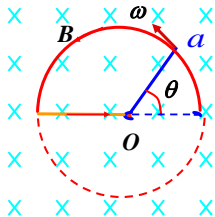


图3-1-23:例题3-1-5用图

由此得,动生电流方向与绕行方向相反,即顺时针方向。作为电源, O 点电势高于 a 点。

【例题3-1-6】 在均匀磁场 \vec{B} 中有一段不封口的不规则导线,已知 $\overline{ab} = l$,整个导线以速度 \vec{v} 沿水平向右运动,求在导线 acb 中感应电动势,并判断哪点电位高。

【解】 连接 ab ,构成闭合回路

$$\varepsilon = \varepsilon_{acb} + \varepsilon_{ba} \Rightarrow \varepsilon_{acb} = -\varepsilon_{ba}$$

只需求 ab 导线中产生的感应电动势,应用动生电动势公式

$$\varepsilon_{ba} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_b^a vB \cos\theta dl = vBl \cos\theta$$

$$\therefore \varepsilon_{acb} = -vBl \cos\theta$$

电动势方向由 b 绕向 a ,即 a 点的电位高于 b 点的电位。

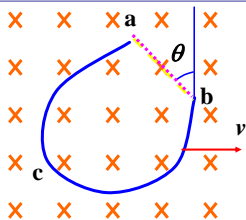


图3-1-24:例题3-1-6用图

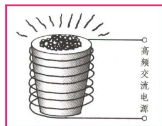
【2】 感生电动势

- 为什么电磁感应炉中的工件会被加热？
- 为什么电磁灶上铝锅中的水会被加热？

显然是由于导体中有电流——**涡流**

- ?问题:**工件和铝锅没有相对于磁场运动,非静电力显然不是洛仑兹力,推动电荷运动的非静电力又是什么呢?

- **实验表明:**这种情况下产生的**感应电动势**完全与导体的种类和性质无关。



麦克斯韦(Maxwell)

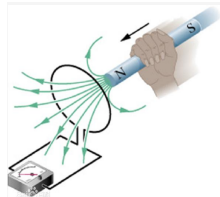
- Faraday的力线思想深深地吸引了Maxwell;
- Maxwell谈到：“法拉第实验所提供的存在力线的美妙的例子,促使我相信力线是某种实际存在的东西”
- 在他的专著《电磁通论》中写道：“我主要是抱着给法拉第这些观念提供数学基础的愿望来承担这部著作的写作工作。”
- 敏锐地感觉到由于磁场变化而产生的感应电动势现象预示着有关电磁场的新效应。
- 麦克斯韦大胆提出假设：“变化磁场要在其周围空间激发一种感生电场。”这种电场称为涡旋电场,产生感生电动势的非静电力就是涡旋静电力。

(1) 涡旋电场

激发机制: 磁场变化 \rightarrow 周围空间激发感生电场 \rightarrow 感生电场对电荷有作用 \rightarrow 电子定向运动产生感生电动势 \rightarrow 回路中形成感生电流。

□ 涡旋电场与静电场有本质不同:

- 静电场: 自由电荷激发, 电力线有头尾, 场的环流为零;
- 涡电场: 变化磁场激发, 电力线闭合的, 环流不恒为零;
- 相同点是: 对电荷都作用。



$$\oint_{(L)} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

涡旋电场的环流等于穿过回路面积磁通量时间变化率的负值。

$$\text{一般 } \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_k$$

式中 \vec{E}_0 为静电场, 其环流为 0。

$$\text{则 } \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

电场的环流等于穿过回路面积磁通量时间变化率的负值。

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{所以 } \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

电磁感应定律微分形式

$$\text{由斯托克斯公式 } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

—— 电场的旋度

$$\text{稳恒时 } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \text{ 则 } \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ 或 } \nabla \times \vec{E} = 0$$

—— 静电场

【几点讨论】：

- 1) 环流的大小只与 $\frac{d\Phi}{dt}$ 有关, 而与 Φ 本身的大小无关;
- 2) 当回路一定时, 只由 $\frac{d\vec{B}}{dt}$ 决定, 与 \vec{B} 大小和方向无关;
- 3) 负号表示 \vec{E}_k 与 $d\vec{B}$ 成左螺旋关系;
- 4) 涡旋电场是非保守力场, 与静电场有本质区别。

电场

$$\vec{E} = \vec{E}_U + \vec{E}_{\vec{A}} = -\nabla U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

➤ 启示

- 理论研究:大胆假设、小心求证的探索过程、清晰的概念、准确的定量表达为检验其真伪提供了可能性;
- 由于寻找感生电动势的非静电力,Maxwell预言了涡旋电场,后来被证实确实存在这种无源有旋场,性质完全不同于静电场,拓宽了人们对电场的认识;
- 伴随着涡旋电场概念的建立提出了一个深刻的问题:
 - $\vec{B}(t) \rightarrow \vec{E}_{\text{感}}$ 其逆效应是什么?
 - 问题的研究导致位移电流的假定。
- 超距和近距不同的物理观点在研究对象、提出问题、对同样现象的理解等方面都呈现出差异;
- 物理思想对科学研究有深刻的指导意义。

(2) 实验例证——电子感应加速器

➤ 法向力 $f_L = evB_R$ 而向心力 $f_L = m \frac{v^2}{R}$ 则 $mv = ReB_R$ ----- (a)

➤ 切向力 $\vec{F}_e = -e\vec{E}_k$

对称分析 $\oint_{(L)} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = E_k \cdot 2\pi R$

可得 $F_e = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}$, 则 $\frac{d(mv)}{dt} = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}$

积分 $mv = \frac{e\Phi}{2\pi R}$ 而 $\Phi = \pi R^2 \bar{B}$

所以 $mv = \frac{1}{2} Re\bar{B}$ ----- (b)

由式(a)和(b)得 $B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$

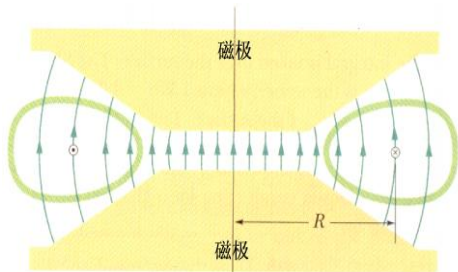


图3-1-26 感应加速器

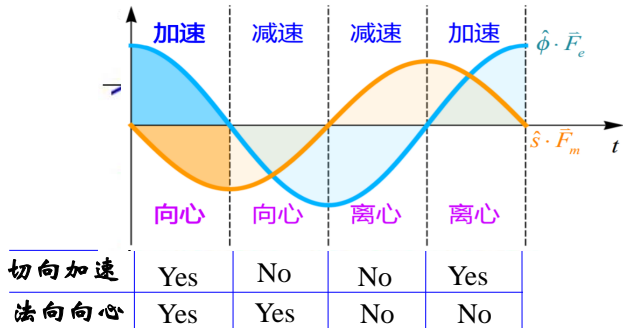


图3-1-27:磁场变化曲线

1) 加速过程 $\frac{d\bar{B}}{dt}$;

2) 洛伦兹力 $-e\vec{v} \times \vec{B}$ 向心。

可见,只有第一个四分之一周期同时满足此二条件。

【例题3-1-7】 半径为 R 的无限长圆柱形空间内分布着与轴线平行均匀

磁场 \vec{B} , 其 $\frac{dB}{dt} = \text{恒量} > 0$, 一长为 R 导线 ab 放置在图示位置, $\angle aob = 45^\circ$ 。

求: ①导线 ab 中的感生电动势; ②若撤去导线, 在 b 点置一电子, 该电子加速度的大小、方向如何?

【解】 ①如图, 加辅助线 ao 、 bo 与 ab 构成闭合回路 oab , 于是由

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{得 } \varepsilon_{ab} + \int_b^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

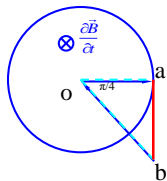


图3-1-28: 例题3-1-8用图

由感生电动势的规律,有 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -S \frac{dB}{dt}$

其中 S 为三角形 oab 中磁场不等于零的扇形面积,根据题目条件 $\angle aob = 45^\circ$,故

$$S = \frac{1}{8} \pi R^2 \Rightarrow \varepsilon = -\frac{1}{8} \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

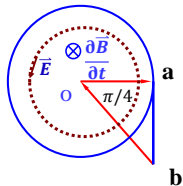


图3-1-29:例题6-8用图

由题知, \vec{E} 线为一族位于垂直 \vec{B} 平面的同心圆, \vec{E} 线方向沿逆时针方向。

则 oa 、 ob 段上 $\vec{E} \perp d\vec{l}$, 故积分为零, 故

$$\varepsilon_{ab} = -\frac{1}{8} \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

② 以 $r = Ob = \sqrt{2}R$ 为半径, O 为圆心, 作圆形回路。

同样, 由于 \vec{E} 线为一族位于垂直 \vec{B} 平面的同心圆, \vec{E} 线方向沿逆时针方向。若沿逆时针积分, 则

$$\begin{cases} \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E2\pi r \\ - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{dB}{dt} \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow E = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

b 处电子受力 $\vec{F} = -e\vec{E}$, 方向如图所示, 加速度则为

$$a = -\frac{e}{m} E = -\frac{eR^2}{2mr} \frac{dB}{dt}$$

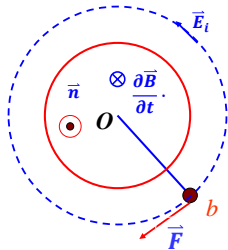


图3-1-30: 例题3-1-8用图

§ 3-1-3 互感和自感

【1】互感(系数)

➤ 考虑两个线圈,线圈1中的电流发生变化时,在线圈2中产生感应电动势,这种现象称为互感应现象,该电动势称为互感电动势。

➤ 根据毕-萨-拉定律,由线圈1中的电流 I_1 激发的在线圈2处的磁场 \vec{B}_{12} 穿过线圈2的磁链数成正比

$$\Psi_{12} = M_{12}I_1$$

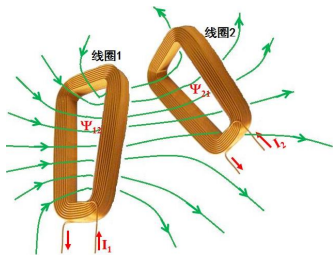
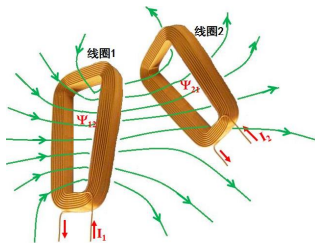


图3-1-30:互感应现象

同理 $\Psi_{21} = M_{21}I_2$

式中 M_{12} 和 M_{21} 由两回路的形状、大小、匝数和相对位置决定,还与它们所在空间介质的性质有关。

➤ 无铁磁性物质存在时, M_{12} 和 M_{21} 与回路电流无关。



链接铁磁质

图3-1-30: 互感应现象

Next

由法拉第电磁感应定律

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt} - I_1 \frac{dM_{12}}{dt} \\ \varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt} - I_2 \frac{dM_{21}}{dt} \end{cases}$$

若满足条件：

- 1) 回路本身不变；
- 2) 两回路相对位置及空间介质不变；
- 3) 无铁磁物质存在。

则

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt} \\ \varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

M_{12} 和 M_{21} ——互感系数,简称互感。

理论与实验都可证明 $M_{21} = M_{12} = M$

互感系数SI制单位: H, $\text{Wb} \cdot \text{A}^{-1}$, $\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}$

【讨论】：

(1) M 的定义:可用下两式之一定义

$$A、\varepsilon_1 = -M \frac{dI_2}{dt} \quad B、\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

(2) M 的计算:可用上两式之一计算。

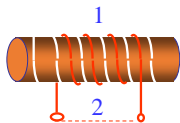


图3-1-31:两同轴线圈

【例3-1-8】:图3-1-31中线圈1匝密度 n ,线圈2匝数 N ,两线圈同轴,截面积 S ,则

$$\Psi_{12} = BSN = \mu_0 nI \cdot NS$$

$$\text{令 } I = 1A, M = \mu_0 nNS$$

A、应用:变压器,互感器,感应电机,...

(3) 利弊

B、害处:串扰,分布参数,噪声与损耗,...

【例题3-1-9】 两长直螺线管同轴,半径为 R_1 和 R_2 ($R_1 > R_2$),长度为 L ($L > R_1$),匝数分别为 N_1 和 N_2 。求:互感系数 M_{12} 和 M_{21} 。

【解】 设外螺线管通以电流 I_1 ,则磁感强度

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{L} I_1$$

\vec{B}_1 穿过内螺线管截面的磁通链数

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = N_2 B_1 S_2 = \mu_0 N_1 N_2 I_1 \frac{\pi R_2^2}{L}$$

由互感的定义有 $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_2^2}{L}$

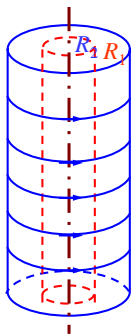


图3-1-32:题3-1-10用图

设内螺线管通以电流 I_2 ,则磁感强度 $B_2 = \mu_0 n_2 I_2 = \mu_0 \frac{N_2}{L} I_2$
 \vec{B}_2 穿过外螺线管截面的磁通链数

$$\Psi_{21} = N_1 \Phi_{21} = N_1 B_2 S_2 = \mu_0 N_1 N_2 I_2 \frac{\pi R_2^2}{L}$$

由互感的定义有 $M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_2^2}{L}$

计算结果表明 $M_{12} = M_{21}$,此结论对任意两线圈均成立。
所以计算互感系数时,可以选择方便的计算途径。

【例题3-1-10】长直导线 I 与一单匝矩形回路共面。线圈长为 a 和 b ,长边与直导线平行,近距离为 d 。求互感系数。

【解】 设长直导线为回路1,线圈为回路2,求 M_{21} 比求 M_{12} 简单。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 a I}{2\pi r} dr$$

$$M = M_{21} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d}$$

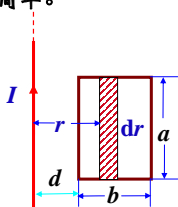


图3-1-34:题3-1-11用图

思考题:如何消除互感?

【2】 自感(系数)

线圈电流发生变化时,其激发磁场穿过线圈自身的磁通量亦随之发生变化,则在线圈中产生感应电动势,该现象称自感应现象,该电动势称自感电动势。

根据毕-萨-拉定律,有 $\Psi = LI$

由法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$

式中 L 是自感系数,简称自感,由线圈的形状、大小、匝数和空间介质的性质决定。无铁磁性物质存在时, L 与线圈电流无关。

若满足条件:

- A、线圈本身不变;
- B、空间介质不变;
- C、无铁磁物质存在。

$$\left. \begin{array}{l} A、线圈本身不变; \\ B、空间介质不变; \\ C、无铁磁物质存在。 \end{array} \right\} \text{则 } \varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

Next

【讨论】：

1、 L 的定义：可用下两式之一定义

$$(1) \Psi = LI$$

$$(2) \varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

2、 L 的计算：可用上两式之一计算。

螺线管的自感(电感): $B = \mu_0 nI$

$$\Psi = \mu_0 nI \cdot SN$$

$$L = \mu_0 nSN = \mu_0 n^2 \cdot V \quad (V = Sl)$$

3、 L —— 电磁惯性

4、利弊 1)应用:镇流器,扼(抑)流圈,谐振电路,...

2)害处:上电迟延,断电影响,分布参数,...

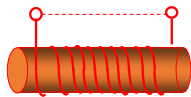


图3-1-34:螺线管

[链接日光灯](#)

【例题3-1-11】 已知电缆是半径分别为 R_1 、 R_2 的同轴圆筒导体,之间充满磁导率为 μ 的磁介质。求单位长度电缆自感系数。

【解】 由安培环路定理,两筒之间距轴线 r 处的磁感强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu I}{2\pi r} l dr$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \longrightarrow \quad L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

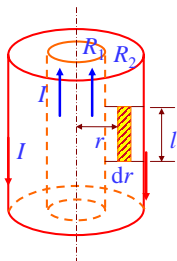


图3-1-35:题3-1-13用图

【例题3-1-12】 两根平行导线,横截面的半径都是 a ,中心相距为 d ,载有大小相等,方向相反的电流。设两导线内部的磁通量都可略去不计。求这对导线单位长度上的自感。

【解】 如图3-1-36所示

$$\begin{aligned}\Phi &= \int d\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx + \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} l dx \\ &= \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}\end{aligned}$$

由自感系数定义,两导线单位长度的自感系数为

$$L_0 = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

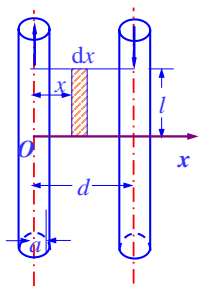


图3-1-36:题3-1-13用图

平行长直电缆线由两根半径为 $a = 10\text{mm}$ 的平行长直导线构成，两线相距为 $d = 20\text{cm}$ 。（忽略导线内部的磁通量）

(1) 计算这对传输线单位长度的自感系数；

(2) 若通以 $I = 20\text{A}$ 的电流，将导线分开到 40cm ，计算这过程中磁场对单位长度导线做的功。

解：(1) 两导线间的磁场为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$

单位长度导线间的磁通量

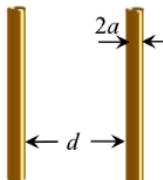
$$d\Phi = B \cdot dS = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)} \right] dr,$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} = 1.2(\mu\text{H})$$

$$\Phi = \int_a^{d-a} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)} \right] dr = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

(2) 设移动一根导线，移动过程中受力为 $F = IIB$ ，磁场对单位长度导线做功为

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0.2}^{0.4} I \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln 2 = 5.5 \times 10^{-5}(\text{J})$$



【3】 自感系数与互感系数的关系

无漏磁情况下,有 $M = \sqrt{L_1 L_2}$

在工程中,耦合系数: $k = \frac{\sqrt{|\Psi_{12}\Psi_{21}|}}{\sqrt{\Psi_{11}\Psi_{22}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

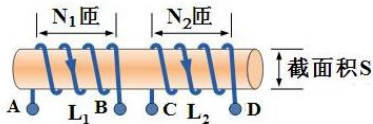


图3-1-37:

多线圈的系统,可写成以下表达式:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & L_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Next

【4】 电感的串联与并联

(1) 串联线圈的等效电感:

如图3-1-38所示自感 L_1 、 L_2 , 互感 M

(a) 顺接, 如图3-1-38(a)

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} & \varepsilon_{21} = -M \frac{dI_2}{dt} & 2 \rightarrow 1 \\ \varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} & \varepsilon_{12} = -M \frac{dI_1}{dt} & 4 \rightarrow 3 \end{cases}$$

$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{21} + \varepsilon_2 + \varepsilon_{12} = -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt}$, 则有 $L = L_1 + L_2 + 2M$

(b) 反接, 如图3-1-38(b)

$$\mathcal{E}_1 \overset{2 \rightarrow 1}{\quad} \quad \mathcal{E}_{21} \overset{1 \rightarrow 2}{\quad} \quad \mathcal{E}_2 \overset{3 \rightarrow 4}{\quad} \quad \mathcal{E}_{12} \overset{4 \rightarrow 3}{\quad}$$

$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_{21} + \varepsilon_2 - \varepsilon_{12} = -(L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt}$, 则有 $L = L_1 + L_2 - 2M$

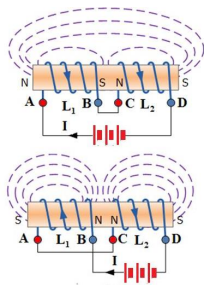


图3-1-38: 两线圈的串联

(c) 无互感线圈: $L = L_1 + L_2$

(d) 无漏磁线圈: $L = L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2}$

反接 $L = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2}$

(e) 无感线圈: 无漏磁线圈, 令 $L_1 = L_2 = L_0$

反串时即可得: $L = 0$

(f) 直流电源联接与螺旋管线圈联接比较:

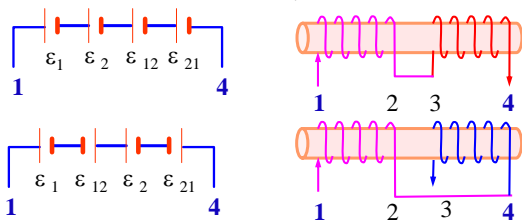


图3-1-39: 两线圈的串联与直流电源联接比较

(2) 并联线圈的等效电感

引入同名端与异名端的定义：

当两线圈的电流从**同名端**流入(或流出)时,同一线圈的**自感磁通和互感磁通同向**。

反之,若两线圈的电流从**异名端**流入(或流出)时,同一线圈的**自感磁通和互感磁通反向**。

顺接:电流从**同名端**流入(或流出);

反接:电流从**异名端**流入(或流出)。

(当两个线圈在一起时,为并联时方便,一般都标出同名端,否则要从两线圈的绕行方向来判断。)

同名端并接: $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2, I = I_1 + I_2$

故有：

$$\begin{cases} \varepsilon = -\left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}\right) = -\left(L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}\right) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

解得：

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{L_2 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{L_1 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt}$$

于是得：

$$\varepsilon = -\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt}, \quad L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

异名端并联:

总自感的表达式可以简单地将上式中的 M 代之以 $-M$ 得到:

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

$$\because L \geq 0, \therefore L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \quad \text{即} \quad M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\text{令} \quad M \equiv k \sqrt{L_1 L_2}, \quad 0 \leq k \leq 1,$$

k 称为耦合系数。 $k=0$ 表示无耦合; $k=1$ 表示理想耦合,变压器的原线圈和副线圈之间接近理想耦合, $k \approx 1$,且 $L_1 \neq L_2$,于是并联后 $L \approx 0$,意味着“短路”。

所以,不能将变压器的原线圈和副线圈并联!

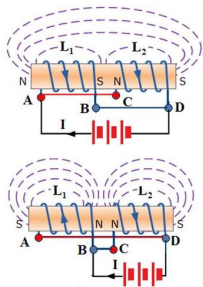


图3-1-40:

§ 3-1-4 似稳电路和暂态过程

【1】似稳条件与似稳电路

(1) 似稳条件

似稳电路是一种非稳恒电路,有非稳恒电源,但是这电源随时间变化很慢。

设电路的尺寸为 l ,电源变化的频率为 f ,电场的传播速度为 c ,当

$$\frac{1}{f} \gg \frac{l}{c} \Rightarrow \frac{c}{f} \gg l \Rightarrow \lambda \gg l$$

则可近似认为电路对电源变化的响应不需要时间,在这种近似下,电流将随电动势同步变化,二者的关系和稳恒电路的情况相同,称此电路为**似稳电路**。

上式即似稳条件,可写成: $\lambda \gg l$

【例】 市电 $\frac{3 \times 10^5}{50} = 6000(\text{km}) \gg 600(\text{km})$ (似稳电路尺寸)

(2) 似稳电路方程: 基本定律、定理的应用

I、欧姆定律:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma (\vec{E}_{\text{位}} + \vec{E}_{\text{旋}} + \vec{K})$$

$$\therefore \vec{E}_{\text{位}} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{E}_{\text{旋}} - \vec{K}$$

II、环路定理:

$$\oint_{(L)} \vec{E}_{\text{位}} \cdot d\vec{l} = \oint_{(\text{源})} \vec{E}_{\text{位}} \cdot d\vec{l} + \oint_{(\text{阻})} \vec{E}_{\text{位}} \cdot d\vec{l} + \oint_{(\text{容})} \vec{E}_{\text{位}} \cdot d\vec{l} + \oint_{(\text{感})} \vec{E}_{\text{位}} \cdot d\vec{l} = 0$$

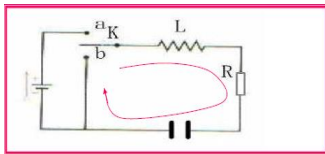


图3-1-41:

(A) 电源中: $\vec{E}_{\text{旋}} = 0$; $\sigma \rightarrow \infty, \vec{j} = 0$; $\therefore \vec{E}_{\text{位}} = -\vec{K}$

$$\text{故} \int_{(\text{源})} \vec{E}_{\text{位}} \cdot d\vec{l} = - \int_{(\text{源})} \vec{K} \cdot d\vec{l} = -\varepsilon$$

(B) 电阻中: $\vec{E}_{\text{旋}} = 0$; $\vec{K} = 0$; $\therefore \vec{E}_{\text{位}} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$

$$\text{故} \int_{(\text{阻})} \vec{E}_{\text{位}} \cdot d\vec{l} = - \int_{(\text{阻})} \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int \frac{jS}{\sigma S} dl = iR$$

(C) 电容中:

$$\vec{E}_{\text{旋}} = 0; \sigma = 0, \vec{j} = 0; \therefore \vec{E}_{\text{位}} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{0}{0} (\text{不定式}).$$

只能用定义: $u_C = \frac{q}{C}$

由电荷守恒定律:

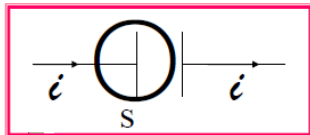


图3-1-43

$$\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}, -i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i dt$$
$$\therefore u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$$

(D) 电感中: 有 L, M

$$\vec{K} = 0; \sigma \rightarrow \infty, \vec{j} = 0; \therefore \vec{E}_{\text{位}} = -\vec{E}_{\text{旋}}$$

$$\text{故 } u_L = \int_{(\text{感})} \vec{E}_{\text{位}} \cdot d\vec{l} = - \int_{(\text{感})} \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = -\varepsilon_L$$

$$\text{由电磁感应定律: } \varepsilon_L = - \left(L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \right)$$

$$\text{于是: } u_L = \left(L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \right)$$

取回路方向为顺时针方向, 将以上的分析结果代入环路定理得:

$$\begin{aligned} -\varepsilon + u_R + u_C + u_L &= 0, \\ \therefore \varepsilon &= iR + \frac{1}{C} \int \varepsilon dt + \left(L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \right). \end{aligned}$$

这就是似稳电路的基本方程, 可应用于解似稳电路问题。

当然也可应用于解似稳电路的闭、开过程, 即暂态过程。

【2】 暂态过程

在阶跃电压作用下,电流由变化逐渐趋于稳定的过程。

(一) RL 电路的暂态过程

(1) 当电键 K 连接“1”端时(参见图3-1-44) $\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$ 方向与 ε 相反

由欧姆定律 $\varepsilon - L \frac{di}{dt} = iR$ 或 $L \frac{di}{dt} + iR = \varepsilon$

$$\text{即 } \frac{di}{\frac{\varepsilon}{R} - i} = \frac{R}{L} dt \quad \text{或} \quad \frac{di}{I_0 - i} = \frac{1}{\tau} dt$$

式中 $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$, $\tau = \frac{L}{R}$ —— RL 电路的时间常数

$$\text{积分 } \int_0^i \frac{di}{I_0 - i} = \int_0^t \frac{dt}{\tau} \quad \text{得} \quad \ln \frac{I_0 - i}{I_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\text{即} \quad i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

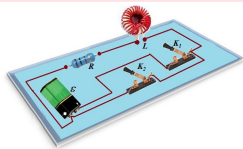


图3-1-44: RL 电路

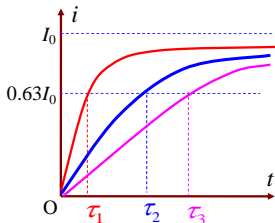


图3-1-45: RL 电路充电曲线

(2) 再将 K 连接 “2” 端时(参见图3-1-46)

$$-L \frac{di}{dt} = iR \text{ 或 } L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$\text{积分} \int_{I_0}^i \frac{di}{i} = - \int_0^t \frac{dt}{\tau}$$

$$\text{得} \ln \frac{i}{I_0} = - \frac{t}{\tau}$$

$$\text{即} i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

【讨论】：

1) L —— 电磁惯性

L 大, τ 大, 暂态过程长;

2) RL 电路, $\tau = \frac{L}{R}$;
电流滞后于电压。

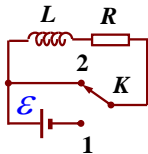


图3-1-46:RL 电路放电

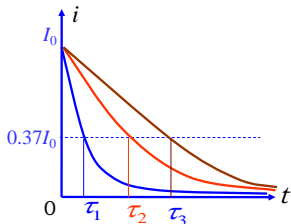


图3-1-47: RL 电路放电曲线

(二) RC 电路的暂态过程

(1) 充电过程, K 接 “1” 端(参见图3-1-48)

$$\text{由 } \varepsilon = \frac{q}{C} + iR \text{ 和 } i = \frac{dq}{dt} \quad \text{得} \quad R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

$$\text{积分得 } q = q_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

式中 $q_0 = C\varepsilon$ 电容器充满电时的电量;

$\tau = RC$, RC 电路的时间常数;

(2) 放电过程, 再令 K 接 “2” 端(图3-1-49)

$$\text{由 } \frac{q}{C} + iR = 0 \quad \text{或} \quad R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{解得 } q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

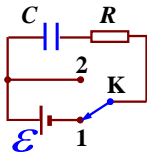


图3-1-48:RC 电路充电

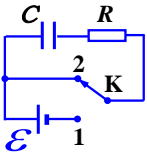


图3-1-49:RC 电路放电

【讨论】：

1) RC 电路, $\tau = RC$, 电压滞后于电流;

2) 应用: 微分电路与积分电路

➤ 微分电路, 参见图3-1-50

➤ 积分电路, 参见图3-1-51

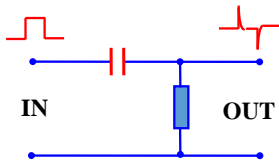


图3-1-50: 微分电路

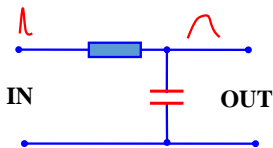


图3-1-51: 积分电路

(三) LCR 电路的暂态过程

(1) 当 K 接 “1” 时(参见图3-1-52): $L \frac{dq}{dt} + iR + \frac{q}{C} = \varepsilon$

将 $i = \frac{dq}{dt}$ 代入上式, 得 $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$

(2) 再将 K 接 “2” 端(参见图3-1-52)

$$\text{可得 } L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{阻尼度 } \lambda = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \begin{cases} \lambda > 1 \text{ 时, 过阻尼振荡;} \\ \lambda < 1 \text{ 时, 欠阻尼振荡;} \\ \lambda = 1 \text{ 时, 临界阻尼振荡。} \end{cases}$$

$$R = 0 \text{ 时, 无阻尼自由振荡 } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



图3-1-52: LCR 电路

二阶常系数微分方程
也称 阻尼振动方程

下面两图分别示出充电和放电过程中 q 随时间 t 变化的曲线。

图中三条曲线对应 $\lambda < 1$ 、 $\lambda = 1$ 、 $\lambda > 1$ 三种情况：

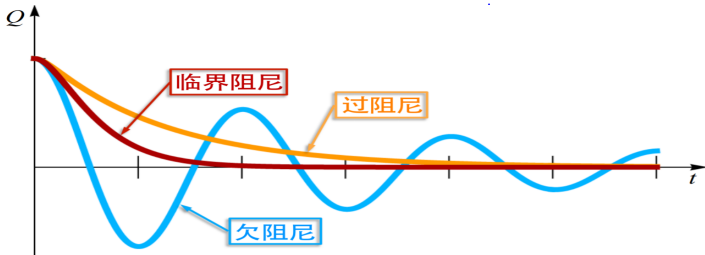


图3-1-53: LCR电路充放电曲线

① $\lambda < 1$ 欠阻尼(阻尼振荡): 振荡的振幅逐渐衰减, 其

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

当电路 $R = 0$ 时, $\lambda = 0$, 则形成等幅振荡, 其

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$



图3-1-54:LCR 电路振荡

理想的电容和电感是储能元件, 其中的能量转换是可逆的, 而电阻却是耗散性元件, 其中电能单向地转化为热能。

由于阻尼度与电阻 R 成正比, 因此它的大小反映了电路中电磁能耗散的情况。

② $\lambda = 1$ 临界阻尼: 周期趋于无穷大。

③ $\lambda > 1$ 过阻尼: 放电过程进行更缓慢。

【例题3-1-14】 两线圈之间互感为 M , 电阻分别为 R_1 和 R_2 , 第一个线圈接在电动势为 ε 的电源上, 第二个线圈接在电阻为 R_g 的电流计 G 上, 如图所示。设开关 K 原先是接通的, 当把 K 断开, 求通过 G 的电量 q ?

【解】 当 K 突然断开, 左回路中变化的电流 $i_1(t)$, 使得右回路中有互感电动势 ε_m , 自感电动势 ε_L 及电流 $i_2(t)$, 于是通过 G 的电量

$$q = \int i_2 dt$$

对于右回路, 暂态过程中任一时刻 t 的回路方程为

$$i_2(R_2 + R_g) - \varepsilon_L - \varepsilon_m = 0$$

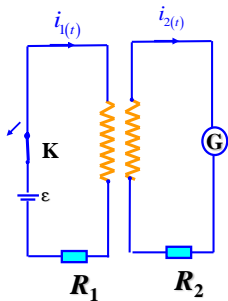


图3-1-56:题3-1-18用

$$\therefore L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + i_2(R_2 + R_g) = 0 \quad \therefore L_2 di_2 + M di_1 + (R_2 + R_g) dq = 0$$

因为 $t = 0$ 时: $i_1 = I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$, $i_2 = 0$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时: $i_1 = 0$, $i_2 = 0$

故对上式积分,则有

$$\int_0^0 L_2 di_2 + \int_{I_1}^0 M di_1 + (R_2 + R_g) \int_0^q dq = 0$$

$$\therefore q = \frac{M\varepsilon}{(R_2 + R_g)} \geq 0, \quad q \text{ 与 } L_1, L_2 \text{ 无关}$$

《基本要求》

1. 掌握法拉第电磁感应定律及其物理意义:

能熟练计算感应电动势,应用楞次定理判断感应电动势的方向;

2. 理解动生电动势:

能够用动生电动势的公式计算导体在匀强磁场或对称分布的非匀强磁场中运动时动生电动势;

3. 理解感生电动势和感生电场的概念,了解感生电场的基本性质;

能计算简单的感生电场强度及感生电动势,并会判断感生电场的方向;

4. 理解自感现象:计算简单回路自感系数和自感电动势;

5. 理解互感现象:计算简单回路互感系数及互感电动势;

6. 掌握 R 、 C 、 L 组成的简单电路暂态过程的特点和规律。

电磁感应小结

一、理论体系：

$$\text{出发点：} \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \vec{K} = \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{K} = \vec{E}_{\text{旋}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

二、内容：

1、两个定律： $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$

2、两个电动势：
$$\begin{cases} \varepsilon = \oint_{(L)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

返回首页

3、两个物理量： $\vec{E}_{\text{旋}}$ ——反映涡旋电场性质。

\mathcal{E} ——反映电磁感应现象本质， $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 。

4、两种方法：已知磁场变化，求电动势

(1) 法拉第电磁感应公式；

(2) 动生、感生电动势；

5、电磁感应的应用：

电子感应加速器、涡流加热、电磁阻尼……

互感、自感：

三、 ε 、 \vec{E} 、 Φ 三者关系网

$$1. \Phi \Rightarrow \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$2. \Phi \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$3. \vec{E} \Rightarrow \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \oint_{(L)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

总结图

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

感生电动势

$$\begin{cases} \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \vec{K} = \vec{E}_k \end{cases}$$

动生电动势

$$\begin{cases} \varepsilon = \oint_{(L)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \vec{K} = \vec{v} \times \vec{B} \end{cases}$$



矢量

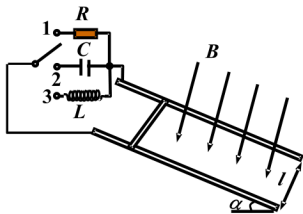


标量

$$\varepsilon = \oint_{(L)} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

【附加题1】 如图所示一个匀强磁场 B ,垂直于一轨道为 l 的导轨平面,轨道平面与水平面有 α 的倾角。一根无摩擦的质量为 m 导体棒,横跨在两根金属导轨上。若开关依次接通1、2、3,使阻值为 R (其余电阻均可略)、电容为 C 或电感为 L 的元件与棒构成电路,当从静止放开导体棒后,求棒的运动规律?

本题三个感应电流电路中,“电源”均为受有恒定外力(重力之“下滑”分力)的金属杆在匀强磁场中做切割运动产生动生电动势,通过开关转换,构成纯电阻电路、纯电容电路及纯电感电路。初始状态相同的三个电路,在不同的电路条件下,其暂态过程及稳定态迥异。

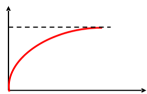
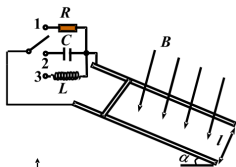


S→1, 纯电阻电路

经加速度减小的加速过程, 达到稳定态

$$mg \sin \alpha - \frac{B^2 l^2}{R} v = m \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 l^2} (1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t})$$

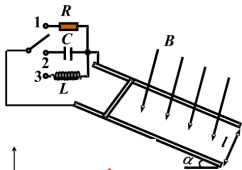


S→2, 纯电容电路

稳定态时电流恒定, 导体棒做匀加速运动

$$mg \sin \alpha - B \cdot \frac{C \cdot BL \Delta v}{\Delta t} L = ma$$

$$a = \frac{m \sin \alpha}{m + B^2 L^2 C} g$$



S→3 纯电感电路

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = Blv_i \Rightarrow \Delta I = \frac{Bl}{L} v_i \Delta t = \frac{Bl}{L} \Delta s$$

$$\because t=0 \text{ 时 } I=0 \quad \therefore I = \frac{Bl}{L} s$$

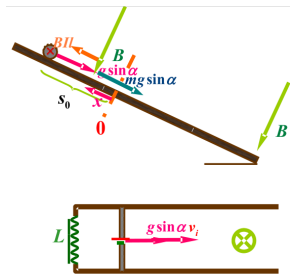
$$mg \sin \alpha - \frac{B^2 l^2}{L} s = ma \quad s_0 = \frac{mgL \sin \alpha}{B^2 l^2}$$

取平衡位置为坐标原点

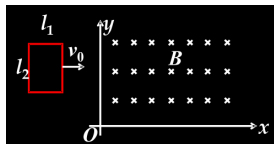
$$ma = \sum F = -mg \sin \alpha + \frac{B^2 l^2}{L} \left(\frac{mgL \sin \alpha}{B^2 l^2} - x \right) = -\frac{B^2 l^2}{L} x$$

纯电感电路无稳定状态，导体棒和电流均做周期性变化 $T = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{B^2 l^2}}$

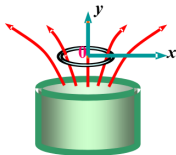
$$\text{振动方程为 } x = \frac{Lmg \sin \alpha}{l^2 B^2} \cos \left(\sqrt{\frac{l^2 B^2}{Lm}} t + \pi \right)$$



【附加题2】如图所示 oxy 是位于水平光滑桌面上的直角坐标系,在 $x > 0$ 的一侧,存在匀强磁场 B 的方向垂直于 oxy 平面向里。在 $x < 0$ 的一侧,一边长分别为 l_1 和 l_2 的刚性矩形超导线框位于桌面上,质量为 m 、自感为 L 的线框内无电流,框的一对边与 x 轴平行。现让超导线框沿 x 轴方向以初速度 v_0 进入磁场区域,试定量地讨论线框以后可能发生的运动情况及其与初速度 v_0 大小关系(假如线框在运动过程中始终保持超导状态)?



3、一个细的超导圆环质量 m 、半径 r 、电感 L ，放在竖直的圆柱形磁棒上面，如图所示。圆环与棒有同一对称轴。在圆环周围的圆柱形磁棒的磁场在以圆环中心为坐标原点的 Oxy 坐标中可近似地表示为 $B_y=B_0(1-\alpha y)$ 和 $B_x=B_0\beta x$ ，其中 B_0 、 α 、 β 为常量。初始时，圆环中没有电流，当它被放开后开始向下运动且保持它的轴仍为竖直，试确定圆环的运动并求圆环中的电流。



初始时，圆环中没有电流，环中磁通量：

$$\Phi_y = B_0 \pi r^2$$

$$\text{则 } I = \frac{\alpha B_0 \pi r^2}{L} |y|$$

圆环开始向下运动时， B_y 变化，感应电流/的磁通量 $\Phi = LI$

$$\text{环中磁通总量：} \Phi_y = B_0 (1 - \alpha y) \pi r^2 + LI$$

$$\text{超导体 } U = 0 \quad \Delta\Phi = 0 \text{ 即 } B_0 (1 + \alpha |y|) \pi r^2 + LI = B_0 \pi r^2$$

其中，环面过平衡位置时：

$$mg = B_0 \beta r \cdot I_0 \cdot 2\pi r = \frac{2\pi^2 B_0^2 \alpha \beta r^4}{L} |y_0|$$

环面在平衡位置下 y 时：

$$\sum F = mg - B_x I_y \cdot 2\pi r = - \frac{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 r^4}{L} y$$

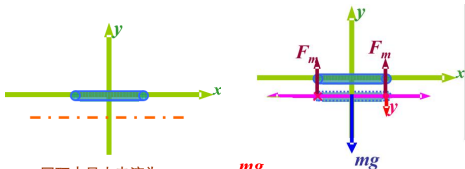
$$T = \frac{1}{B_0 r^2} \sqrt{\frac{2mL}{\alpha\beta}}$$

\therefore 圆环在 y 轴上做简谐运动，周期为：

$$A = \frac{mgL}{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 r^4}$$

环受安培力为： $F_m = B_x I \cdot 2\pi r$

环所在处磁场



$$\text{圆环中最大电流为：} I_0 = \frac{mg}{2B_0 \beta \pi r^2}$$

圆环中电流随时间变化规律为：

$$I = \frac{mg}{2B_0 \beta \pi r^2} \left[\cos \left(\pi r^2 B_0 \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{Lm}} t \right) - 1 \right]$$

第三章 电磁部分(II)

任务：磁场能量的作用规律

引言

磁能规律

自感磁能

互感磁能

磁能密度

磁力

两者关系

磁场能量

磁力的计算

磁场能量的计算

本章知识单元与知识点小结

§ 3-2 磁场能量

§ 3-2-1 载流线圈系统的磁能

§ 3-2-2 载流线圈在外磁场中磁能

§ 3-2-3 磁场能量与磁能密度

§ 3-2-4 利用磁能求磁力

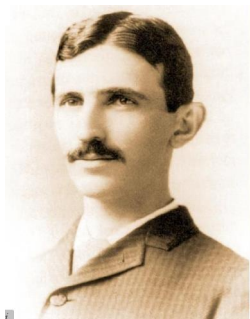


图3-2-1: 特斯拉(Nikola Tesla)

§ 3-2. 磁场能量

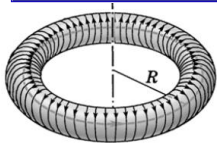
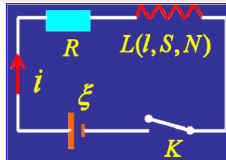
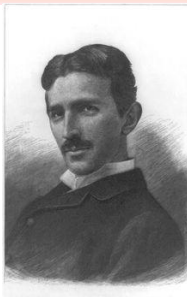


图3-2-2:在螺绕圈内磁场已经为 H 时, 电源 再对螺绕圈做功 HdB



图3-2-3:特斯拉及其线圈



本章阐述的方式与1-3几乎相同,可通过对比去学习和掌握本章的内容。

§ 3-2-1 自感磁能

在回路系统中通以电流时,由于各回路自感和互感作用,电源必须提供能量用以克服自感电动势和互感电动势而做功。

这功最后转化为载流回路的能量和回路电流间的相互作用能,也就是磁场的能量。

$$\text{自感电动势: } \varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

电源克服自感电动势所做的元功:

$$dA_L = -\varepsilon_L I dt$$

电流从 $0 \rightarrow I$ 的过程中,电源克服自感电动势所做的总功:

$$A_L = \int dA_L = \int_0^\infty (-\varepsilon_L) I dt = \int_0^\infty \left(L \frac{dI}{dt} \right) I dt = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\text{由能量守恒: } W_L = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\text{自感储能公式: } W_L = \frac{1}{2} I \Phi_m$$

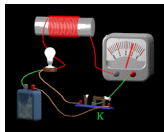
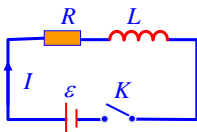


图3-2-4: R、L串联

§ 3-2-2 互感磁能

如图,在建立电流过程中,电源除了供给线圈中产生焦耳热的能量和抵抗自感电动势做功外,还要抵抗互感电动势做功为 A_M ,即

$$\begin{aligned} A_M &= A_1 + A_2 = - \int_0^{\infty} \varepsilon_{12} i_1 dt - \int_0^{\infty} \varepsilon_{21} i_2 dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} \right) dt = M \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (i_1 i_2) dt \\ &= M \int_0^{I_1 I_2} d(i_1 i_2) = M I_1 I_2 \end{aligned}$$

故互感磁能为 $W_M = M I_1 I_2$

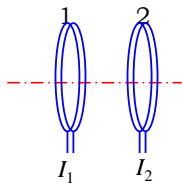


图3-2-5:互感线圈

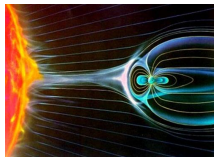


图3-2-6

载流线圈在外磁场中磁能

两个相邻的载流线圈所储存的总磁能为 $W_m = W_{L_1} + W_{L_2} + W_M$

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$$

应该强调,自感磁能不可能是负值,但互感磁能却可是负值。(为什么?)

将上述总磁能写成对称形式,即

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{1}{2}M_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}M_{21}I_1I_2$$

由此可推广到 k 个线圈的普遍情形,即

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k M_{ij} I_i I_j$$



图3-2-7:

- 【例题3-2-1】**把自感为 2H ,电阻为 10Ω 的线圈,连接到电动势 $\varepsilon=100\text{V}$,内阻可忽略不计的电池组上。求(1)电流达到最大值时,线圈中所储的磁能 W_m ? (2)从接通电路算起,经过多长时间线圈中所储磁能 W_m 达到的一半? (3)在接通 0.1s 时,磁场中储存能量的增加率、线圈中的热功率、电池组的输出功率?

解:(1) 电路中电流 $I = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I = I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{100}{10} = 10(\text{A})$

$$\therefore W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100(\text{J})$$

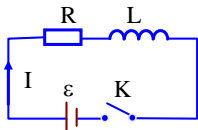


图3-2-8:题3-2-1用图

(2) 设在 $t = t'$ 时, $W'_m = \frac{1}{2}W_m$

$$\frac{1}{2}L \left[\frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t'} \right) \right]^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}L \left(\frac{\varepsilon}{R} \right)^2 \right]$$

$$\text{即 } \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t'} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t' = 0.247(\text{s})$$

(3) 在接通 0.1s 时

$$\begin{aligned} I|_{t=0.1} &= \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{100}{10} \left(1 - e^{-\frac{10}{2} \times 0.1} \right) \\ &= 10(1 - 0.61) = 3.9(\text{A}) \end{aligned}$$

在接通0.1s时电流增加率

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right] = \frac{\varepsilon}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$
$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0.1} = 30.5 (\text{A} \cdot \text{s}^{-1})$$



线圈中能量增加率则为 $\frac{dW_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) = LI \frac{dI}{dt} = 238 (\text{J} \cdot \text{s}^{-1})$

线圈中热功率则为 $P_R = I^2 R = 152 (\text{J} \cdot \text{s}^{-1}) = 152 (\text{W})$

电池组输出功率则为 $P_R = I\varepsilon = 390 (\text{J} \cdot \text{s}^{-1}) = 390 (\text{W})$

§ 3-2-3 磁能和磁能密度

➤以**通电螺绕环**为例,得到磁能与磁场的关系

➤对于通电螺绕环

$$\begin{cases} B = \mu n I \\ L = \mu n^2 V \end{cases}$$

用上式代入 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

得磁能: $W_m = \frac{B^2}{2\mu} V$

➤上式表明:磁能与磁感强度 \vec{B} 有关,还与磁场所占**体积成正比**。

即磁能定域于磁场的**整个体积**。

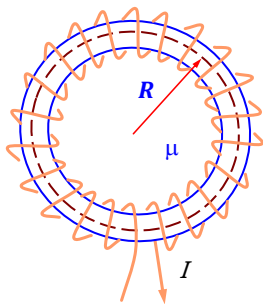


图3-2-7:通电螺绕环

➤ 磁能密度: $\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2$

➤ 可证明,在普遍情况下,磁场中的磁能密度表达为:

$$\omega_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

➤ 磁场总能量

$$W_m = \iiint_{(V)} \omega_m dV = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

注意:

1. 积分应遍及整个磁场分布的空间;
2. 磁能公式对于铁磁质不适用(为什么?).

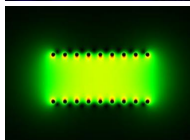
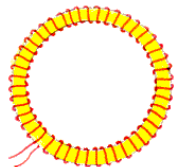


图3-2-8: 磁场

3. 对于一个载流线圈,利用磁能关系式,提供了计算自感 L 的另一种计算方法

$$\frac{1}{2}LI^2 = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

4. 对于两个载流线圈同时存在时,不仅要考虑自感磁能,还要

考虑互感磁能:

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \mu_0 \mu_r (H_1^2 + H_2^2 + 2\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) dV \end{aligned}$$

式中前两项分别为两个线圈的自感磁能,第三项为互感磁能。

从式中还可知,系统的总磁能只与最后所达到的状态有关,而与磁场建立的过程无关。

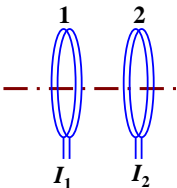


图3-2-9: 载流线圈

【例题3-2-2】 用磁场能量的方法,证明两个线圈的互感系数 $M_{12} = M_{21}$ (设没有铁磁物质存在)。

【证】 设两个线圈在开始时都断路。
先接通线圈1, 电流 i_1 从零增加到 I_1 , 电源做功

$$W_{L_1} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

然后接通线圈2, 电流 i_2 从零增加到 I_2 , 同时维持线圈1内的电流 I_1 不变, 故线圈2内电源做功

$$W_{L_2} = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

线圈1内要维持电流 I_1 不变, 需要克服互感电动势做功

$$-\int_0^{\infty} \varepsilon_{12} I_1 dt = \int_0^{\infty} M_{12} \frac{di_2}{dt} I_1 dt = \int_0^{I_2} M_{12} I_1 di_2 = M I_1 I_2$$

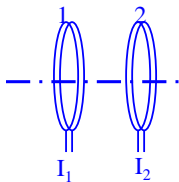


图3-2-10: 题3-2-2用图

因此两载流线圈系统的磁能应等于

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{12}I_1I_2$$



图3-2-11

同样,如果先建立线圈2内的电流 I_2 ,然后维持 I_2 不变,建立线圈1中的电流 I_1 ,则得

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{21}I_1I_2$$

因为系统的能量与电流形成的过程无关,故结论是

$$M_{12} = M_{21} = M$$

问题:运用磁能的方法求解线圈串连的自感?

【例3-2-3】：计算长直同轴电缆单位长度内的电感 L_0 ，设电流均匀分布于内导线横截面上。

【解】：内导线中的磁场 $r \in (0, R_1)$

$$\begin{cases} H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2} \\ B_1 = \frac{\mu_{r1}\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2} \end{cases}$$

内外导体间的磁场 $r \in (R_1, R_2)$

$$\begin{cases} H_2 = \frac{I}{2\pi r} \\ B_2 = \frac{\mu_{r2}\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$

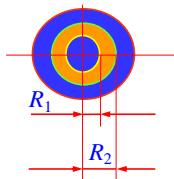


图3-2-12:同轴电缆截面

磁能密度:

$$\begin{cases} \omega_{m_1} = \frac{\mu_{r1}\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4} \\ \omega_{m_2} = \frac{\mu_{r2}\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} W_m &= \int_0^{R_1} \frac{\mu_{r1}\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4} 2\pi r l dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_{r2}\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr \\ &= \frac{\mu_{r1}\mu_0}{8\pi} I^2 l + \frac{\mu_{r2}\mu_0}{8\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} I^2 l \end{aligned}$$

$$\text{由 } W_m = \frac{1}{2} L_0 I^2 l$$

$$\text{得 } L_0 = \frac{\mu_{r1}\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_{r2}\mu_0}{8\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

§ 3-2-4: 利用磁能求磁力

➤ 根据虚功原理,对于孤立体系,有:

$$\begin{cases} \vec{F} = -(\nabla W_m)_\Phi \\ \vec{L}_\theta = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta}\right)_\Phi \end{cases}$$

➤ 而对于非孤立体系,如果线圈的电流保持不变,则电源对体系做的功正好是磁能变化的两倍,此时的磁力及力矩公式变为:

$$\begin{cases} \vec{F} = -(\nabla W_m)_{I(\text{or } \mu)} \\ \vec{L}_\theta = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta}\right)_{I(\text{or } \mu)} \end{cases}$$

➤ 需要说明的是:由于稳恒磁场大多是由稳恒电流产生的,是属于 I 不变的情况,因此第二个公式的应用较为普遍。

【例3-2-4】 求磁矩为 $\vec{\mu}$ 的载流小线圈在外磁场 \vec{B} 中的受力和力矩公式。
设磁场的非均匀尺度远大于载流线圈的尺寸。

【解】 载流线圈在外场中的磁能：

$$\vec{F} = \vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu B \cos\theta$$

则

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{F} &= \nabla W_m = [\nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})]_m = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{\mu} \times (\nabla \times \vec{B}) = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B} \\ \vec{L}_\theta &= \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta}\right)_m \vec{e}_\theta = -\mu B \sin\theta \vec{e}_\theta = \vec{\mu} \times \vec{B} \end{aligned} \right.$$

【例3-2-5】 求如图3-2-13所示N极与S极之间的磁力。设两磁极面积为 S ，相距为 l ，两磁极间磁感应强度为 \vec{B} ，忽略边缘效应。

【解】 设两磁极间距离为 x ：

$$\text{磁能密度: } \omega_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V = \frac{1}{2\mu_0} B^2 Sx$$

$$F_x = -\frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{1}{2\mu_0} B^2 S$$

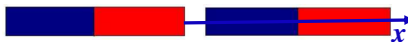


图3-2-13:N极与S极之间的磁力

【例3-2-6】 求如图3-2-14所示磁矩为 $\vec{\mu}_1$ 和 $\vec{\mu}_2$ 两偶极子相互作用。

【解】 $\vec{\mu}_1$ 和 $\vec{\mu}_2$ 处产生的磁感应强度为

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{\mu}_1 + \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{e}_r)$$

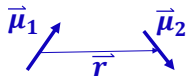


图3-2-14:两磁偶极子相互作用

于是, $\vec{\mu}_2$ 的 $W_m = \vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}_1 = \vec{\mu}_1 \cdot \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2) + \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{e}_r)(\vec{\mu}_2 \cdot \vec{e}_r)$

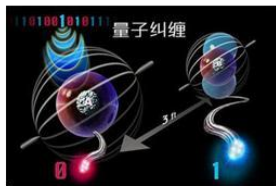
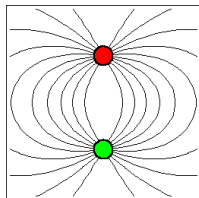
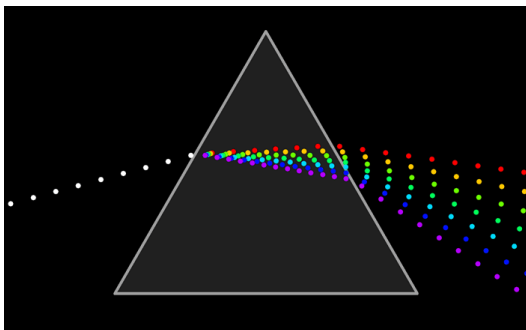
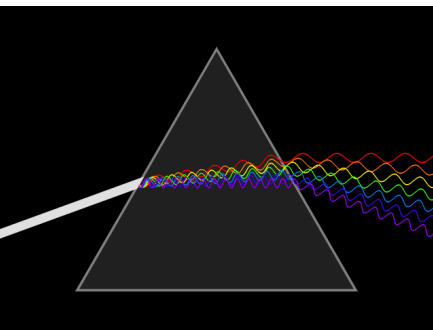
继而, 求得 $\vec{\mu}_1$ 对 $\vec{\mu}_2$ 的作用力:

$$\vec{F}_{12} = (\nabla W_m)_m = \frac{3\mu_0 \vec{e}_r}{4\pi r^4} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 - 5\mu_{1r}\mu_{2r}) + \frac{3\mu_0}{4\pi r^4} (\mu_{2r}\vec{\mu}_1 + \mu_{1r}\vec{\mu}_2)$$

不难证明 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$,但在 \vec{F}_{12} 中第二项一般不会沿其连线方向;不满足牛顿第三定律,不存在什么超距离作用,不能看成一对作用力与反作用力。

本章知识单元与知识点小结

单元	知识点		
电磁感应定律	楞次及感应定律	动生与感生	自感与互感 ^o
	阻碍引起感应电流的磁通量的变化 $\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_D = \oint_{(L)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \varepsilon_G = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_z = -L \frac{dI}{dt} \\ \varepsilon_H = -M \frac{dI_1}{dt} \end{array} \right.$
磁场能量	自感磁能	互感磁能	磁能关系
	$W_L = \frac{1}{2} LI^2$	$W_M = MI_1 I_2$	$W_m = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$
备注	$\varepsilon = iR + \frac{1}{C} \int i dt + \left(L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \right)$		



第三章 电磁部分(II)

任务：磁场能量的作用规律

引言

磁能规律

自感磁能

互感磁能

磁能密度

磁力

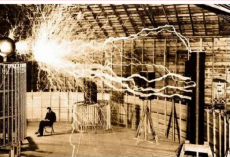
两者关系

磁场能量

磁力的计算

磁场能量的计算

本章知识单元与知识点小结



§ 3-2 磁场能量

§ 3-2-1 载流线圈系统的磁能

§ 3-2-2 载流线圈在外磁场中磁能

§ 3-2-3 磁场能量与磁能密度

§ 3-2-4 利用磁能求磁力

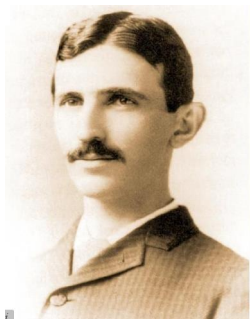


图3-2-1: 特斯拉(Nikola Tesla)

§ 3-2. 磁场能量

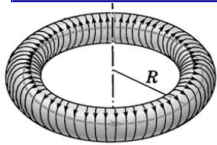
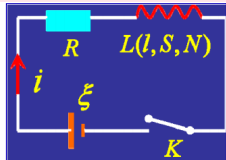


图3-2-2:在螺绕圈内磁场已经为 \vec{H} 时, 电源再对螺绕圈做功 $\vec{H} \cdot d\vec{B}$



图3-2-3: 特斯拉及其线圈

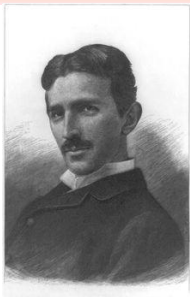


图3-2-1: 特斯拉(Nikola Tesla)

本章阐述的方式与1-3几乎相同,可通过对比去学习和掌握本章的内容。

§ 3-2-1 自感磁能

在回路系统中通以电流时,由于各回路自感和互感作用,电源必须提供能量用以克服自感电动势和互感电动势而做功。

这功最后转化为载流回路的能量和回路电流间的相互作用能,也就是磁场的能量。

自感电动势: $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$

电源克服自感电动势所做的元功:

$$dA_L = -\varepsilon_L I dt$$

电流从 $0 \rightarrow I$ 的过程中,电源克服自感电动势所做的总功:

$$A_L = \int dA_L = \int_0^\infty (-\varepsilon_L) I dt = \int_0^\infty \left(L \frac{dI}{dt} \right) I dt = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$

由能量守恒: $W_L = \frac{1}{2} LI^2$

自感储能公式: $W_L = \frac{1}{2} I \Phi_m$

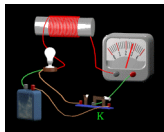
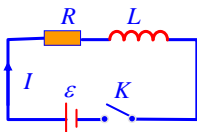
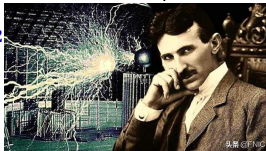


图3-2-4: R、L串联



§ 3-2-2 互感磁能

如图3-2-5所示在建立电流过程中,电源除了供给线圈中产生焦耳热的能量和抵抗自感电动势做功外,还要抵抗互感电动势做功为 A_M ,即

$$\begin{aligned}A_M &= A_1 + A_2 = -\int_0^\infty \varepsilon_{12} i_1 dt - \int_0^\infty \varepsilon_{21} i_2 dt \\&= \int_0^\infty \left(M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} \right) dt \\&= M \int_0^\infty \frac{d}{dt} (i_1 i_2) dt = M \int_0^{I_1 I_2} d(i_1 i_2) = M I_1 I_2\end{aligned}$$

故互感磁能为 $W_M = M I_1 I_2$

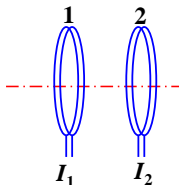


图3-2-5:互感线圈

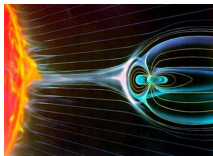


图3-2-6

载流线圈在外磁场中磁能

两个相邻的载流线圈所储存的总磁能为 $W_m = W_{L_1} + W_{L_2} + W_M$

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$$

应该强调,自感磁能不可能是负值,但互感磁能却可是负值。(为什么?)

将上述总磁能写成对称形式,即

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{1}{2}M_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}M_{21}I_1I_2$$

由此可推广到 k 个线圈的普遍情形,即

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k M_{ij} I_i I_j$$



图3-2-7:

- 【例题3-2-1】**把自感为 2H ,电阻为 10Ω 的线圈,连接到电动势 $\varepsilon=100\text{V}$,内阻可忽略不计的电池组上。求(1)电流达到最大值时,线圈中所储的磁能 W_m ? (2)从接通电路算起,经过多长时间线圈中所储磁能 W_m 达到的一半? (3)在接通 0.1s 时,磁场中储存能量的增加率、线圈中的热功率、电池组的输出功率?

解:(1) 电路中电流 $I = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I = I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{100}{10} = 10(\text{A})$

$\therefore W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100(\text{J})$

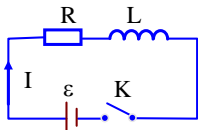


图3-2-8:题3-2-1用图

(2)设在 $t = t'$ 时, $W'_m = \frac{1}{2}W_m$

$$\frac{1}{2}L \left[\frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t'}) \right]^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}L \left(\frac{\varepsilon}{R} \right)^2 \right]$$

$$\text{即} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t'} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t' = 0.247(\text{s})$$

(3)在接通0.1s时

$$\begin{aligned} I \Big|_{t=0.1} &= \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{100}{10} (1 - e^{-\frac{10}{2} \times 0.1}) \\ &= 10(1 - 0.61) = 3.9(\text{A}) \end{aligned}$$

在接通0.1s时电流增加率

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \\ \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0.1s} &= 30.5 (\text{A} \cdot \text{s}^{-1})\end{aligned}$$



线圈中能量增加率则为 $\frac{dW_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) = LI \frac{dI}{dt} = 238 (\text{J} \cdot \text{s}^{-1})$

线圈中热功率则为 $P_R = I^2 R = 152 (\text{J} \cdot \text{s}^{-1}) = 152 (\text{W})$

电池组输出功率则为 $P_\varepsilon = I\varepsilon = 390 (\text{J} \cdot \text{s}^{-1}) = 390 (\text{W})$

§ 3-2-3 磁能和磁能密度

➤以**通电螺绕环**为例,得到磁能与磁场的关系

➤对于通电螺绕环

$$\begin{cases} B = \mu n I \\ L = \mu n^2 V \end{cases}$$

用上式代入 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

得磁能: $W_m = \frac{B^2}{2\mu} V$

➤上式表明:磁能与磁感强度 \vec{B} 有关,还与磁场所占**体积成正比**。

即磁能定域于磁场的**整个体积**。

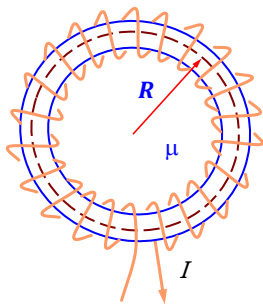


图3-2-7:通电螺绕环

➤ 磁能密度: $\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2$

➤ 可证明,在普遍情况下,磁场中的磁能密度表达为:

$$\omega_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$$

➤ 磁场总能量

$$W_m = \iiint_{(V)} \omega_m dV = \iiint_{(V)} \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

几点说明:

1. 积分应遍及整个磁场分布的空间;
2. 磁能公式对于铁磁质不适用(为什么?);

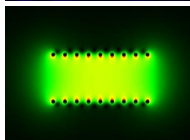
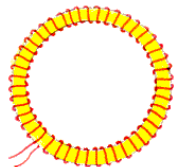


图3-2-8:磁场

3. 对于一个载流线圈,利用磁能关系式,提供了计算自感 L 的另一种计算方法

$$\frac{1}{2}LI^2 = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

4. 对于两个载流线圈同时存在时,不仅要考虑自感磁能,还要

考虑互感磁能:

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \mu_0 \mu_r (H_1^2 + H_2^2 + 2\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) dV \end{aligned}$$

式中前两项分别为两个线圈的自感磁能,第三项为互感磁能。

从式中还可知,系统的总磁能只与最后所达到的状态有关,而与磁场建立的过程无关。

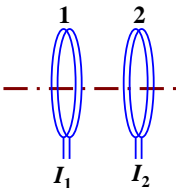


图3-2-9: 载流线圈

【例3-2-2】 计算长直同轴电缆单位长度内的电感 L_0 , 设电流均匀分布于内导线横截面上。

【解】 内导线中的磁场 $r \in (0, R_1)$

$$\begin{cases} H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2} \\ B_1 = \frac{\mu_{r1}\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2} \end{cases}$$

内外导体间的磁场 $r \in (R_1, R_2)$

$$\begin{cases} H_2 = \frac{I}{2\pi r} \\ B_2 = \frac{\mu_{r2}\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$

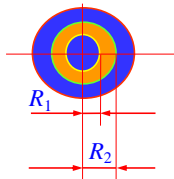


图3-2-10: 同轴电缆截面

磁能密度:

$$\begin{cases} \omega_{m_1} = \frac{\mu_{r1}\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4} \\ \omega_{m_2} = \frac{\mu_{r2}\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \end{cases}$$



所以

$$\begin{aligned} W_m &= \int_0^{R_1} \frac{\mu_{r1}\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4} 2\pi r l dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_{r2}\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr \\ &= \frac{\mu_{r1}\mu_0}{8\pi} I^2 l + \frac{\mu_{r2}\mu_0}{8\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} I^2 l \end{aligned}$$

$$\text{由 } W_m = \frac{1}{2} L_0 I^2 l$$

$$\text{得 } L_0 = \frac{\mu_{r1}\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_{r2}\mu_0}{8\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

【例3-2-3】一同轴电缆,中心是半径为 a 的圆柱形的导线,外部是内半径为 b 、外半径为 c 的导体圆筒,在内、外导体之间充满磁导率为 μ 的介质,电流 I 在内、外导体中的方向如右下图所示。设电流沿截面均匀分布,求这电缆单位长度的自感系数 L_0 。

【解】原来从计算磁场和磁通量出发求自感,这种方法在此处不便使用。

➤下面换一种方法,即先求 W_m ,再根据计算自感 L 。为计算 W_m ,考虑长度为 l

的一段电缆, $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

将其按图划分为为四个区域,分别计算各区的磁场、磁能密度和磁能。

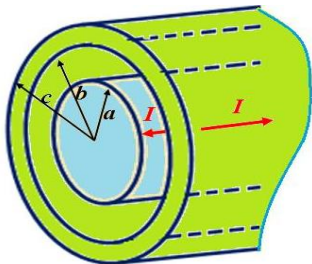


图3-2-11: 例3-2-4 示图

1区: $r \in [0, a]$, $\mu = \mu_0$ (对一般导体成立)。

由环路定理可得:

$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi a^2} \Rightarrow B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \Rightarrow \omega_{m_1} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$$

$$W_{m_1} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^l \omega_{m_1} r dr d\varphi dz = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2 l$$

2区: $r \in [a, b]$, 磁导率为 μ , 可求得:

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow B_2 = \mu H_2 = \frac{\mu I}{2\pi r} \Rightarrow \omega_{m_2} = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$W_{m_2} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^l \omega_{m_2} r dr d\varphi dz = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{b}{a} I^2 l$$

3区: $r \in [b, c], \mu = \mu_0$ 。穿过半径为 r 环路的总电流为

$$\sum I = I - \frac{I\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} = \frac{I(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)}$$

$$\text{故有: } H_3 = \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)} \left(\frac{c^2}{r} - r \right) \Rightarrow B_3 = \mu_0 H_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(c^2 - b^2)} \left(\frac{c^2}{r} - r \right)$$

$$\omega_{m_3} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 (c^2 - b^2)^2} \left(\frac{c^4}{r^2} - 2c^2 + r^2 \right)$$

$$\begin{aligned} W_{m_3} &= \int_b^c \int_0^{2\pi} \int_0^l \omega_{m_3} r dr d\phi dz \\ &= \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi (c^2 - b^2)^2} \left[c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{4} (c^2 - b^2) (3c^2 - b^2) \right] \end{aligned}$$

4区: $r \in [c, \infty)$, 穿过半径为 r 的环路的总电流为

$\sum I = I - I = 0$, 于是有 $H_4 = 0$, $B_4 = 0$, $\omega_{m4} = 0$ 和 $W_{m4} = 0$

➤ 由上述结果计算长度为 l 的电缆的总磁能:

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} + W_{m4}$$

然后由 $L = \frac{2W_m}{I^2}$ 和 $L_0 = \frac{L}{l}$, 求得电缆单位长度的自感 L_0

$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{2W_m}{lI^2} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_0}{4} + \mu \ln \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{\mu_0}{(c^2 - b^2)^2} \left[c^4 \ln \left(\frac{c}{b} \right) - \frac{1}{4} (c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right] \right\}.$$

§ 3-2-4: 利用磁能求磁力

➤ 根据虚功原理,对于孤立体系,有:

$$\begin{cases} \vec{F} = -(\nabla W_m)_\Phi \\ \vec{L}_\theta = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta}\right)_\Phi \end{cases}$$

➤ 而对于非孤立体系,如果线圈的电流保持不变,则电源对体系做的功正好是磁能变化的两倍,此时的磁力及力矩公式变为:

$$\begin{cases} \vec{F} = -(\nabla W_m)_{I(\text{or } \mu)} \\ \vec{L}_\theta = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta}\right)_{I(\text{or } \mu)} \end{cases}$$

➤ 需要说明的是:由于稳恒磁场大多是由稳恒电流产生的,是属于 I 不变的情况,因此第二个公式的应用较为普遍。



知乎 @白羊

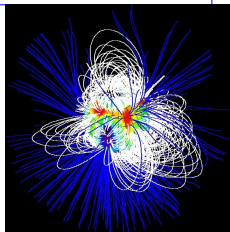
【例3-2-4】 求磁矩为 $\vec{\mu}$ 的载流小线圈在外磁场 \vec{B} 中的受力和力矩公式。
 设磁场的非均匀尺度远大于载流线圈的尺寸。

【解】 载流线圈在外场中的磁能：

$$W_m = \vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu B \cos\theta$$

则

$$\begin{cases} \vec{F} = \nabla W_m = [\nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})]_m = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{\mu} \times (\nabla \times \vec{B}) = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B} \\ \vec{L}_\theta = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta}\right)_m \vec{e}_\theta = -\mu B \sin\theta \vec{e}_\theta = \vec{\mu} \times \vec{B} \end{cases}$$



【例3-2-5】 求如图3-2-13所示N极与S极之间的磁力。设两磁极面积为 S ，相距为 l ，两磁极间磁感应强度为 \vec{B} ，忽略边缘效应。

【解】 设两磁极间距离为 x ：

$$\text{磁能密度: } \omega_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu_0} V = \frac{B^2}{2\mu_0} Sx$$

$$F_x = -\frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{B^2}{2\mu_0} S$$

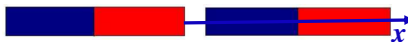


图3-2-12:N极与S极之间的磁力

【例3-2-6】求如图3-2-14所示磁矩为 $\vec{\mu}_1$ 和 $\vec{\mu}_2$ 两偶极子相互作用。

【解】 $\vec{\mu}_1$ 和 $\vec{\mu}_2$ 处产生的磁感应强度为

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{\mu}_1 + \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{e}_r)$$

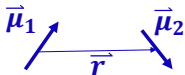


图3-2-13:两磁偶极子相互作用

于是, $\vec{\mu}_2$ 的 $W_m = \vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}_1 = \vec{\mu}_1 \cdot \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2) + \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{e}_r) (\vec{\mu}_2 \cdot \vec{e}_r)$

继而,求得 $\vec{\mu}_1$ 对 $\vec{\mu}_2$ 的作用力:

$$\vec{F}_{12} = (\nabla W_m)_m = \frac{3\mu_0 \vec{e}_r}{4\pi r^4} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 - 5\mu_{1r}\mu_{2r}) + \frac{3\mu_0}{4\pi r^4} (\mu_{2r}\vec{\mu}_1 + \mu_{1r}\vec{\mu}_2)$$

不难证明 $= -\vec{F}_{21}$,但在 \vec{F}_{12} 中第二项一般不会沿其连线方向;不满足牛顿第三定律,不存在什么超距离作用,不能看成一对作用力与反作用力。

【例题3-2-7】某些细菌可生活在十分腐蚀的区域如油井或污水浇灌过的庄稼。一些生活在绝对黑暗和基本上是均匀的油溶液中的细菌,它必须升到上面吸氧与降到下部寻找食物,就面临着如何上下游动的问题。这个问题用何方法解决呢?一类细菌依靠在它的细胞内混入铁氧磁体来解决上述问题。采用粗糙的近似,定量地分析以下问题:

- (a)为什么不用液体的压强的变化率而用磁体来解释这个问题?
- (b)计算使各个细菌中小磁针线性排列所需最小磁矩。
- (c)假设小磁针的长度是 10^{-4}cm ,计算它的最小直径。
- (d)为什么磁针比球形磁体好?

本章知识单元与知识点小结

单元	知识点		
电磁感应定律	楞次及感应定律	动生与感生	自感与互感 ^o
	阻碍引起感应电流的磁通量的变化 $\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_D = \oint_{(L)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \varepsilon_G = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_z = -L \frac{dI}{dt} \\ \varepsilon_H = -M \frac{dI_1}{dt} \end{array} \right.$
磁场能量	自感磁能	互感磁能	磁能关系
	$W_L = \frac{1}{2} LI^2$	$W_M = MI_1 I_2$	$W_m = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$
备注	$\varepsilon = iR + \frac{1}{C} \int i dt + \left(L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \right)$		

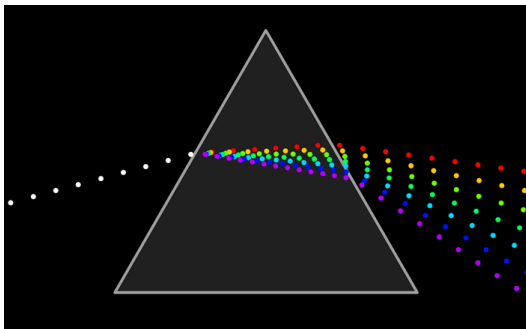
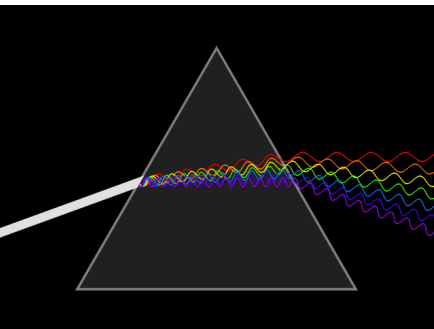
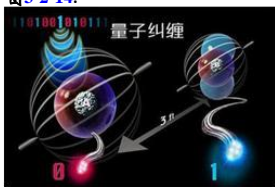
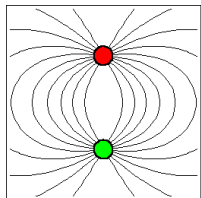


图3-2-14:



第四章 电路理论部分

电路 CIRCUIT

4-1 稳恒电路

4-2 集总电路

第四章 电路理论部分

任务：研究场定域于电路规律和性质

历史性简介

欧姆定律 (I, U)

电流连续方程

全电路欧姆定律

一段含源电路欧姆定律

基尔霍夫定律

端电压

两者关系

电动势

简单电路的计算

复杂电路的计算

本节知识单元基本要求与知识点小结

历史性简介

>1791年伽伐尼发表《论在肌肉运动中的电力》一文中如下记述当时经历：“我把青蛙放在桌上，注意到了完全是意外的一种情况，在桌子上还有一部起电机...我的一个助手偶然把解剖刀的刀尖碰到青蛙腿上的神经，...另一个助手发现，当起电机的起电器上的导体发出火花时，这个青蛙抽动了一下，...因这现象而惊异的他立即引起了我的注意，虽然我当时考虑着完全另外的事情，并且是全神贯注于自己的思想的。”

>1799年，意大利物理学家伏打证明了锌、铅、锡、铁、铜、银、金、石墨是金属电压系列，当该系列中的两种金属相互接触时，系列中排在前面的金属带正电，排在后面的金属带负电；他把铜和锌做为两个电极置于稀硫酸中，从而发明了伏打电池，发表《论不同导电物质接触产生的电》它是世界上第一个可以产生稳定、持续电流的装置；有了稳定的电源，就为人类从研究静电现象过渡到研究动电现象提供了坚实的技术基础。

>1826年德国物理学家欧姆发表《金属传导接触电所遵循的定律》，发现了欧姆定律；

>1849年基尔霍夫发现了电路网络定律，直流电路的研究更加完善，从而确立了电工学；

>1843年惠斯通发明了变阻器，开创了一种新的更准确方法测量电阻，史称惠斯通电桥。

4-1 稳恒电路

4-1-1 稳恒电流条件

4-1-2 欧姆定律与焦耳定律

4-1-3 电源与电动势

4-1-4 基尔霍夫定律

4-1-5 稳恒与静电场综合解

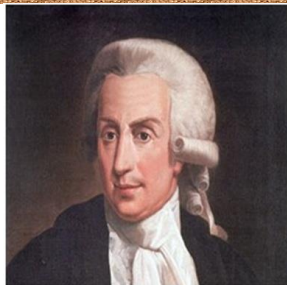
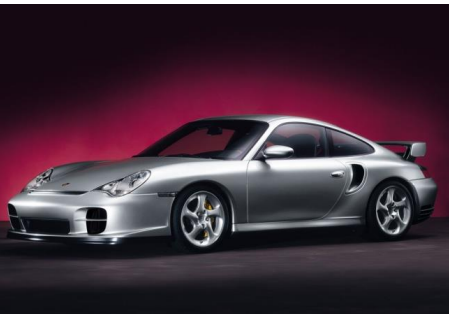


图4-1-1:伽伐尼与伏打的图片

4-1-1 稳恒电流条件



电流连续方程



电流强度和电流密度

电流的物理图像

电流连续方程

稳恒电流条件

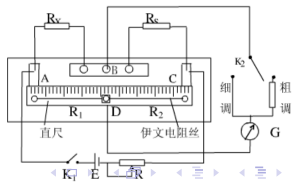


图4-1-2:稳恒电流的具体应用

1. 电流强度和电流密度

(1) 电流强度 (Current intensity)

➤ 单位时间内通过导体横截面的电量:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \xrightarrow{\text{精细化}} I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

➤ 电流强度的单位为库仑秒⁻¹,称为安[培],符号为A。

➤ 其实后续课程中的全空间的连续静磁场分布,通过电路被离散化为单位时间内流过横截面的电量命名为电流如图4-1-3所示白克蘭电流。

➤ 用电流强度描述导体中电荷的宏观流动性质似乎太“粗糙”。

➤ 不能描述电流沿截面的分布情况;

➤ 不能描述电流的方向,即正电荷移动的方向。

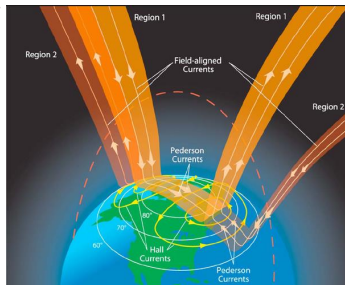


图4-1-3:白克蘭电流成場匹配電波與電高層電流系統聯結的示意圖

(2) 电流密度(current density)

- 考虑导体中某一给定点P, 在该点沿电流方向作一单位矢量 \vec{e}_n , 并取一面元与 \vec{e}_n 垂直, 如图4-1-4所示。

设通过的电流强度为 I , 则定义P点处电流密度的大小为:

$$\vec{j} = \lim_{\Delta S_{\perp} \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S_{\perp}} \vec{e}_n = \frac{dI}{dS_{\perp}} \vec{e}_n$$

- 电流密度是一个矢量, 它的方向表示导体中某点电流的方向, 数值等于通过垂直于该点电流方向的单位面积的电流强度, 其单位为安培·米⁻²(A m⁻²)。

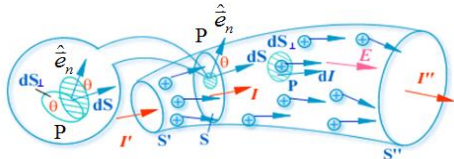


图4-1-4: 电流密度的定义

(3) 电流场与电流线(Current field and current line)

➤ 设 n 为单位体积导体中自由电子数量, \vec{v} 是电子的定向漂移平均速度,

$$\text{则导体中的电流密度为 } \vec{j} = \frac{dq}{dt \cdot dS} \vec{e}_n = \frac{nedS \cdot d\vec{l}}{dS \cdot dt} = ne \frac{d\vec{l}}{dt} = ne\vec{v}$$

➤ 这样定义的电流密度是空间位置的矢量函数 $\vec{j}(\vec{r})$, 它细致地描述了导体中的电流分布, 也称为电流场。

➤ 类似静电场对电流场也可以通过引入“电流线”来形象描述。

➤ 电流线即电流所在空间的一组曲线, 其上任一点的切线方向和该点的电流密度方向一致, 如图4-1-5所示几种典型的电流线分布。

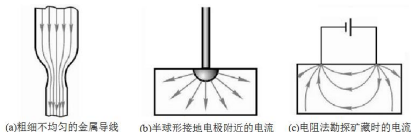


图4-1-5: 几种典型的电流线分布

(4) 电流场与电流管 (Current field and current tube)

➤ 如图4-1-6所示电流场中一束这样的电流线围成的管状区域称为电流管。

➤ 已知导体中某点P的电流密度,可求得通过该点任一面元 ΔS 的电流强度 $\Delta I = \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\perp} = \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S} \cos \theta$

$$\text{可写成 } \Delta I = \vec{j} \cdot \Delta \vec{S}$$

则通过 ΔS 面的电流强度

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

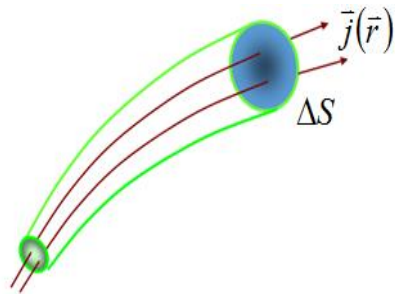


图4-1-6: 电流场中的电流管

2. 电流的物理图像 (Physical image of current)

➤ 电流是电荷的定向运动,即导体中载流子在外力,例如电场作用下的定向运动所产生。

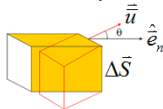


图4-1-7: 电流的物理图像

➤ 如图4-1-7所示以通电导线为例,说明其物理图像。

➤ 带正电荷的金属原子核不动,载流子是电子,是电子运动。

➤ 按电流的定义,在导体中若有 k 种带电粒子,其中第 i 种带电粒子的电量、数密度、平均速度分别为 q_i, n_i, \vec{u}_i ,则有: $\Delta I = \sum_i^k q_i n_i \vec{u}_i \cdot \Delta \vec{S} = \sum_i^k \rho_{ei} \vec{u}_i \cdot \Delta \vec{S}$

$$\because \Delta I = \vec{j} \cdot \Delta \vec{S} \quad \therefore \vec{j} = \sum_i^k \rho_{ei} \vec{u}_i = \sum_i^k q_i n_i \vec{u}_i$$

(a) 在载流金属导线中只有两种带电粒子: $\sum_{i=1}^2 \rho_{ei} = \rho_{e+} + \rho_{e-} = 0$ 因此整体呈电中性。

$$\because \vec{u}_+ = 0 \quad \therefore \vec{j} = \rho_{e+} \vec{u}_+ + \rho_{e-} \vec{u}_- = \rho_{e-} \vec{u}_- = -en \vec{u}_- \neq 0$$

(b) 当载流金属导线整体运动时: $\vec{u}_+ = \vec{u}_- \quad \therefore \vec{j} = (\rho_{e+} + \rho_{e-}) \vec{u}_+ = 0$

【例4-1-1】一般载流金属导线中的情况。

【解】一般载流金属导线中

$$j \sim 10^6 \text{ (A m}^{-2}\text{)}; n \sim 10^{29} \text{ (m}^{-3}\text{)}; q = e \sim 10^{-19} \text{ (C)}。$$

$$\because \vec{j} = -en\vec{u}_- \quad \therefore |\vec{u}_-| = \frac{j}{en} \sim \frac{10^6}{10^{-19} \sim 10^{29}} \sim 10^{-4} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

可见电子的平均定向速度是很慢的,但为何电源一接通立即灯亮呢?这是由于电场的传播速度为光速 c 。

3. 电流连续方程 (Current continuity equation)

➤ 电流连续方程是电荷守恒定律的数学表示。

➤ 若在 S 面上规定面积元矢量 $d\vec{S}$ 指向外法线方向,则单位时间内由 S 面流出电量应为

$$\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

与此同时,单位时间内 V 中电量的减少为

$$-\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_{(V)} \rho_e dV = -\iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV$$

➤ 根据电荷守恒定律,应有(积分形式):

$$\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV$$

➤ 用数学高斯公式,立即得:

$$\iiint_{(V)} (\nabla \cdot \vec{j}) dV = -\iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV$$

如图4-1-8所示鉴于 V 的任意性,于是可得电流连续方程: $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$ (微分形式)

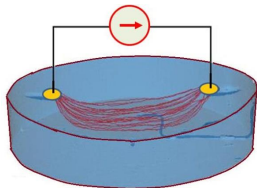


图4-1-8: 电流管

几点说明:

(1) 电荷守恒律普遍性, 电流连续方程也普遍, 与载流导体物性质无关;

(2) 类比静电场的高斯定理, 借助电流线作形象解释:

如图4-1-9所示电流线只能起、止于电荷随时间变化的地方;

➤ 电流线的起点附近的区域中, 由 $dq/dt < 0$, 会出现负电荷的不断累积, 即电荷密度不断减小;

➤ 电流线的终点附近的区域中则有 $dq/dt > 0$, 会出现正电荷的不断累积即电荷密度不断增加;

➤ 电荷密度不随时间变化, 电流线既无起点又无终点即电流线不可能中断。

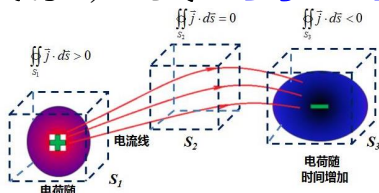
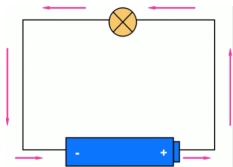


图4-1-9: 电流连续性

4. 稳恒条件

➤ 对**稳恒电流**来说,导体内各点电流密度应与时间无关,要求自由电荷的分布不随时间变化,即 $\frac{dq}{dt} = 0, \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$ 。

➤ 其积分形式: $\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ or $\nabla \cdot \vec{j} = 0$



➤ **稳恒条件**表明:电荷分布将不会因稳恒电流的存在而随时间变化,所以由它产生的电场必然是**静电场**。

➤ 借助于**电流线**和**电流管**的概念,可对稳恒条件作如下形象解释:

(1) 电流线不可能有起点和终点即稳恒电流的电流线或电流管一定是**闭合的**。

(2) 沿任一电流管各截面的**电流强度**都相等。

由上述结论可知:**直流电路**(或者说**稳恒电路**)应当是**闭合的**;且沿一段没有分支的电路,各处的**电流强度**必定**相等**。

【例4-1-2】 如图4-1-10所示电荷量 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内,该球以均匀角速度 ω 绕它的一个固定直径旋转。求球内离轴为 r 处的电流强度和电流密度。

【解】 在包括转轴的一个固定平面内,离转轴为 r 处,设想一个面元为 ΔS 。

该面元绕转轴转动划出一个体积为 $2\pi r\Delta S$ 的环带,该环带的电荷量为

$$\Delta Q = \rho(2\pi r\Delta S) = \frac{3Q}{4\pi R^3}(2\pi r\Delta S)$$

因此电流强度为

$$I = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{3Q\omega}{8\pi^2 R^3}(2\pi r\Delta S) = \frac{3r\omega Q\Delta S}{4\pi R^3}$$

离轴线 r 处的电流密度为 $\vec{j} = ne\vec{v} = \rho\vec{v} = \frac{3Q}{4\pi R^3}\vec{\omega} \times \vec{r}$

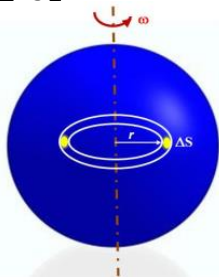


图4-1-10:例题4-1-2的示意图

小结

表一：静电场与稳恒电场的比较

静电场	稳恒电场
产生电场的电荷始终固定不动	电荷分布不随时间改变但伴随着电荷定向运动
静电平衡时,导体内电场为0,导体为等势体	导体内电场不为0,导体内任意两点不是等势
电场有保守性,它是保守场,或有势场	电场有保守性,它是保守场,或有势场
维持静电场不需要能量的转换	稳恒电场的存在总要伴随着能量的转换

表二：电流与电流密度的描述

物理量	定义式	连续性方程 ^ρ	稳恒条件
I (A)	$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$	$I_{in} = I_{out} \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^N I_i = 0$	$\begin{cases} \Delta U = const \\ \vec{E} = \text{恒矢量} \end{cases}$
\vec{j} (A · m ²)	$\vec{j} = \lim_{\Delta S_{\perp} \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S_{\perp}} \hat{e}_n = \frac{dI}{dS_{\perp}} \hat{e}_n$	$\begin{cases} \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \\ \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \end{cases}$	$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$

4-1-2 欧姆定律与焦耳-楞次定律



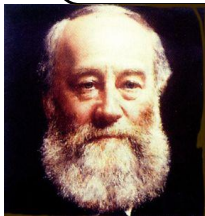
欧姆定律
焦耳定律

欧姆定律微分形式

欧姆定律积分形式

焦耳-楞次定律

经典电子论观点解释



1. 欧姆定律

(1) 欧姆定律微分形式

➤ 欧姆通过大量实验发现:当保持导体温度恒定时,金属中电流密度和电场强度成之比,即欧姆定律微分形式: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

式中 σ 为电导率,是导体材料(导电)性能的参数,其量纲为 $S \cdot m^{-1}$;

ρ 为电阻率,也是导体材料(导电)性能的参数,某材料制成单位面

积单位长度的电阻的阻值,其量纲为 $(\Omega \cdot m)^{-1}$;二者关系为 $\sigma = \frac{1}{\rho}$

与导线的几何尺寸、电流在导体内的流动方式有关。

➤ 为更细致描述导体的导电律,应逐点分析电流密度 \vec{j} 和电场强度 \vec{E} 间的关系。

严格论证

如图4-1-11所示取一段电流管有： $\Delta I = \frac{\Delta U}{R}$

$$\text{式中: } \Delta I = j\Delta S, R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}.$$

$$j\Delta S = \frac{E\Delta l}{\frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}} = \sigma E\Delta S$$

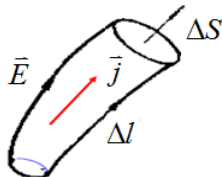


图4-1-11: 一段电流管

实验证明:欧姆定律微分形式仍在一定范围内适用于非稳恒情况。

既然 \vec{j} 和 \vec{E} 同向,上式可写成 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

几点说明:

- (a)从它出发便于说明金属导电的**微观机制**;
- (b)便于用场的观点阐述稳恒电路的**基本原理**;
- (c)也便于研究大块导体中电流和电场的**分布规律**;
- (d)欧姆定律的微分形式比积分形式**适用范围更广**。

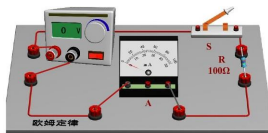
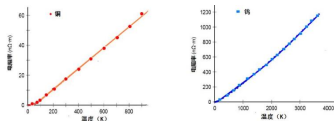


图1-4-11': Ohm实验的示意图



金属铜、铁电阻率与温度关系

(2) 欧姆定律积分形式

电压和电流是电场与后续课程中的磁场在静场假设下的空间离散化抽象,全空间的连续静电场分布,被离散化为两个点(或面)之间一个电压:

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

如图4-1-12所示的载流导体中的两个等势面 S_1 、 S_2 :

$$\iint_{(S_1)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_2)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I, \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \rho \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \rho \vec{J} \frac{S}{S} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_1^2 \rho \vec{J} \cdot \vec{S} \frac{1}{S} dl = I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S}$$

记 $R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S}$,则有 $U_{12} = IR_{12}$,为欧姆定律积分形式。

电阻: $R = \int \rho \frac{dl}{S} = \rho \frac{l}{S}$,单位为欧[姆](Ω); $G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{l}$ (S)

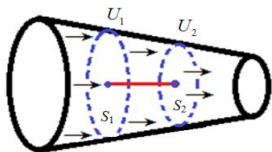
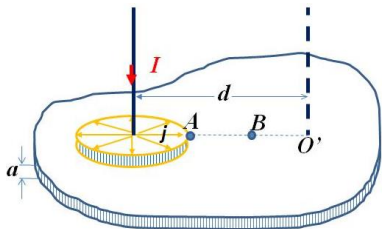
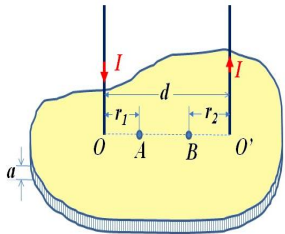
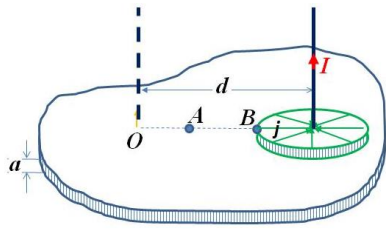


图4-1-12: 载流导体

例題4-1-3: 一无限大平面金属薄膜, 厚度为 a , 电阻率为 ρ , 电流 I 自 O 点注入, 从 O' 点流出, OO' 间的距离为 d , 在 OO' 的连线上有 A 、 B 两点, $AO = r_1$, $BO = r_2$, 求 AB 间的电阻。



(a)



(b)

图4-1-13: 例題4-1-3的示意图

【解】取如图4-1-13(a)所示黄线所围扁圆柱,其侧面电流均匀流出,应用叠加原

理则其电流密度为 $j = \frac{I}{2\pi ra}$

根据欧姆定律微分形式,有 $E = \frac{\rho I}{2\pi ra}$,A、B两点的电势差为

$$U'_{AB} = \int_{r_1}^{d-r_2} \frac{\rho I}{2\pi ra} dr = \frac{\rho I}{2\pi a} \ln \frac{d-r_2}{r_1}$$

同理,只考虑 O' 流出电流 I ,在以 O' 为中心,半径为 r 的圆柱面上电流密度处处相等,如图4-1-13(b)所示,所以AB两点的电势差为

$$U''_{AB} = \int_{r_2}^{d-r_1} \frac{\rho I}{2\pi ra} dr = \frac{\rho I}{2\pi a} \ln \frac{d-r_1}{r_2}$$

以上两种情况叠加得到AB总电势差为

$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} = \frac{\rho I}{2\pi a} \ln \frac{(d-r_1)(d-r_2)}{r_1 r_2}$$

根据欧姆定律,求得A和B之间的电阻为 $R = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{\rho}{2\pi a} \ln \frac{(d-r_1)(d-r_2)}{r_1 r_2}$

2. 焦耳-楞次定律

[1] 焦耳热: 电炉通电流 I , 电场做功, 电势能转换成其它形式能(热能)。

➤ 电流的功: $A = qU = UI t$ (J) 热量: $Q = A = UI t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t$ (J)

➤ 电功率: $P = \frac{A}{t} = UI$ (W)

❖ 热力学第一定律, $A \rightarrow$ 内能 $\rightarrow Q$, “热功转换”

➤ 热功率: $P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ 热功率密度 p : 单位体积内热功率。

➤ 如图4-1-14所示电流管取一小柱体, 长 Δl , 截面 ΔS , 电流 I 。

$$\text{由 } I = \vec{j} \cdot \Delta \vec{S}, R = \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}$$

$$\text{则 } p = \frac{P}{\Delta l \cdot \Delta S} = \frac{I^2 R}{\Delta l \cdot \Delta S} = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2$$

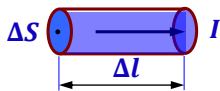


图4-1-14: 一段电流管

❖ 焦耳热的微观机制: 自由电子与正离子碰撞时将在电场力作用下增加的动能传给了正离子, 使正离子无规则振动的能量增大, 这在宏观上表现为导体温度升高。

[2]不同导体分界面电流的关系

➤ 边值关系: $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$

➤ 改写为: $\epsilon_0(\epsilon_{r2}E_{2n} - \epsilon_{r1}E_{1n}) = \sigma_0$

$\epsilon_{r1} \approx 1$ & $\epsilon_{r2} \approx 1$ 近似为:

$$\epsilon_0 \left(\frac{j_{2n}}{\sigma_2} - \frac{j_{1n}}{\sigma_1} \right) = \epsilon_0(\rho_2 j_{2n} - \rho_1 j_{1n}) = \sigma_0$$



图4-1-15:两个导体分界面的电流

$$\sigma_0 S = \epsilon_0(\rho_2 I_2 - \rho_1 I_1) = \epsilon_0 I(\rho_2 - \rho_1) = Q_0$$

[3] 金属导电德特鲁 (Drude) 模型

➤ 金属晶体内的价电子可以自由运动,它们在晶体内的行为宛如理想气体中的粒子,故称作自由电子模型。

➤ 假设电子和周围环境达到热平衡仅仅是通过电子与原子实碰撞实现的

—— 碰撞前后电子速度和碰撞发生处温度相适应如图4-1-16所示。

—— 任一时刻、任一电子速度 u_0

在观察时间 Δt 内,电子的平均速度 \bar{u}

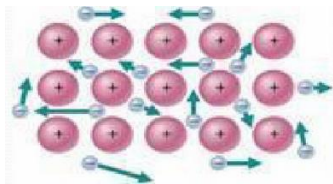
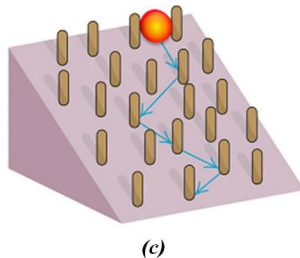


图4-1-16:自由电子在导体中运动

金属导电的经典解释

(1) 导体中无电场(亦无电子数密度梯度、温度梯度或其它可使电子宏观运动的因素), 穿过任截面电流均值为0, 即 $\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$
(电流形成与电阻机理)

➤ 电子作热运动, 电子与原子核碰撞、散射, 其路径是曲折的。

(2) 外加电场: 自由电子速度 = 原来的速度 + 附加定向速度
其平均值称为**漂移速度**, 形成宏观电流, 设为

$$\text{自由电子加速度: } \vec{a} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

➤ 设电子散射速度 4π 空间几率均分, 则初始时 $\vec{u}_0 = 0$,

$$\text{而下一次碰撞前: } \vec{u}_1 = -\frac{e}{m} \vec{E} \bar{\tau}$$

➤ 一个平均自由程内, 电子平均漂移

$$\text{速度: } \vec{u} = -\frac{e\bar{\tau}}{2m} \vec{E}$$

$$\text{而 } \bar{\tau} = \frac{1}{\bar{f}} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}, \therefore \vec{u} = -\frac{e}{2m} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} \vec{E}$$

T — 平均碰撞周期;

\bar{f} — 平均碰撞频率;

$\bar{\lambda}$ — 平均自由程;

\bar{v} — 平均速率。

沿电流管取一圆柱体, 如图4-1-17,

截面 ΔS ,

长 $\Delta l = u\Delta t$,

电流 I 。

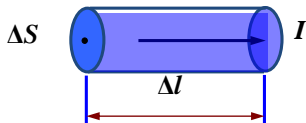


图4-1-17:一段电流管

$$\text{则 } \Delta q = -neu\Delta t\Delta S \quad I = -neu\Delta S \quad j = -neu$$

考虑方向 $\vec{j} = -ne\vec{u}$

$$\text{或 } \vec{j} = \frac{ne^2\bar{v}}{2m}\vec{E}$$

比较 $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

$$\text{得 } \sigma = \frac{ne^2\bar{v}}{2m}$$

$\because \bar{v} \propto \sqrt{T} \therefore \rho \propto \sqrt{T}$, 但大多数金属 $\rho \propto T$

(ρ —电阻率, T —温度, 这一矛盾待用量子论解释)

例题4-1-6: 两同轴铜质圆形套管,长为 L ,内圆柱的半径 a ,外圆柱的半径为 b ,两圆柱间充以电阻率为 ρ 的石墨。若以内、外圆柱分别为一个电极,求石墨的电阻。

解: 两根铜管分别作为一个等势面,电流沿着径向由一个圆筒流向另一个圆筒,根据对称性

$$I = \iint_{(S)} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S} = j(r) \cdot 2\pi r L$$

通过各柱面的 I 是相等的,故

$$j = \frac{I}{2\pi L} \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow \vec{E} = \rho \vec{j} = \frac{\rho I}{2\pi L} \cdot \frac{\hat{r}}{r}$$

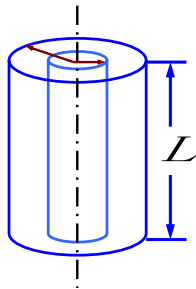


图4-1-20:同轴铜质圆管

两极间的电势差为 $U_1 - U_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{I\rho}{2\pi L} \frac{dr}{r} = \frac{\rho I}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}$

$$\therefore R = \frac{U_1 - U_2}{I} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}$$

例题4-1-7:图4-1-21中所示是电学仪器中调节电阻的装置,其中 **R** 是一个较大的电阻, **r** 是一个较小电阻, **R** 和 **r** 都可改变。试证明 **$R \gg r$** 时, **r** 是粗调, **R** 是微调(即 **r** 改变某一数值时, **ab** 间电阻 **R_{ab}** 改变较大;而 **R** 改变同一数值时,则 **R_{ab}** 改变较小)。

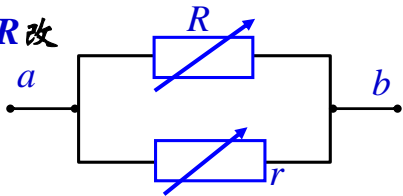


图4-1-21:调节电阻装置

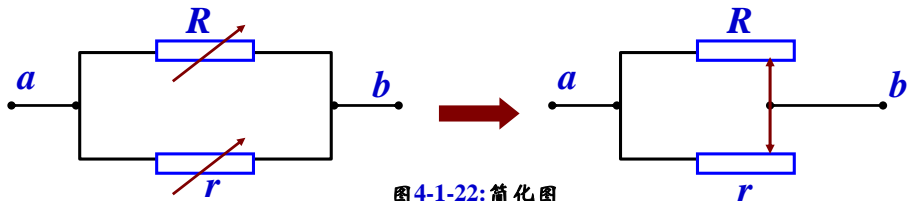


图4-1-22:简化图

证: 如图, R 与 r 并联, 故 $R_{ab} = \frac{rR}{r+R}$

设 R 不变, r 改变 Δr 时, 则 R_{ab} 的改变为

$$\begin{aligned}
 (\Delta R_{ab})_R &= \frac{(r + \Delta r)R}{R + r + \Delta r} - \frac{rR}{r + R} \\
 &\approx \frac{R\Delta r}{r + R} - \frac{Rr\Delta r}{(r + R)^2} = \left(\frac{R}{r + R} \right)^2 \Delta r
 \end{aligned}$$

借助偏导
同样可得
此结论

设 r 不变, R 改变 ΔR 时, 则 R_{ab} 的改变为

$$(\Delta R_{ab})_r \approx \frac{r\Delta R}{r+R} - \frac{Rr\Delta R}{(r+R)^2} = \left(\frac{r}{r+R}\right)^2 \Delta R$$

两者之比为 $\frac{(\Delta R_{ab})_R}{(\Delta R_{ab})_r} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{\Delta r}{\Delta R}$

当 $\Delta R = \Delta r$ 时, 便有 $\frac{(\Delta R_{ab})_R}{(\Delta R_{ab})_r} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$

因 $R \gg r$, 故得 $(\Delta R_{ab})_R \gg (\Delta R_{ab})_r$

4-1-3 电源与电动势



全电路欧姆定律



电源与电动势

常见的几种稳恒电源

全电路欧姆定律

电荷与静电场作用

图4-1-23: 伏特(左)向拿破仑(右)展示伏打电堆

[1] 电源与电动势

- (1) 电源是将其它形式的能量转换成电能的装置;
- (2) 机械、物理(热电、光电、压电)、化学、生物等;
- (3) 非静电力 \vec{F}_k 是电源中必须的(参见图4-1-22)。

► 非静电场 \vec{K}

电源外: 在电场力作用下, 电荷运动;

电源内: 电场力阻止正电荷自电源负极移至正极;

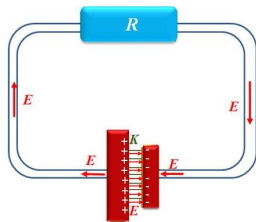


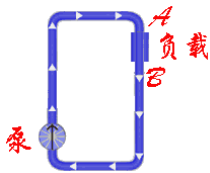
图4-1-24: 电源中的电场

► 必须靠非静电力克服电场力做功, 使正电荷自负极移至正极, 以维持电荷分布不变, 保持稳恒态。

电动势

【定义】：单位正电荷绕闭合回路一周，非静电力所作功。

$$\varepsilon = \oint_{(L)} \vec{K} \cdot d\vec{l}, \text{ 或 } \varepsilon = \int_{(\text{in})} \vec{K} \cdot d\vec{l}$$



□ 开路电压: 内阻, 电流源, 电压源;

□ 如何选择电源: ■ 交直流, 频率; ■ 电压(输出);

电流(额定、最大); 波纹因数。

□ 不同类型电源中, 非静电力不同:

- 风能发电机: 电机作用将机械能转化为电能;
- 化学电池: 化学作用将化学能转化为电能;
- 温差电源: 扩散作用将热能转化为电能;
- 太阳能电池: 直接将光能转化为电能;
- 核能电池: 直接将核能转换为电能。

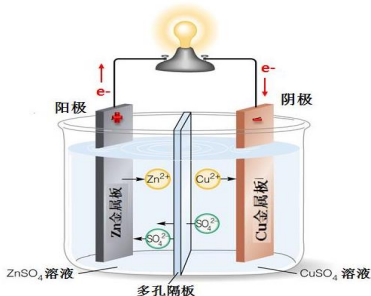
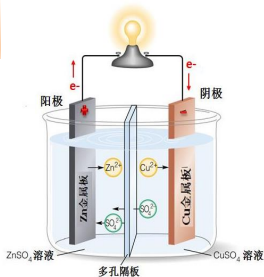


图4-1-25

[2] 常见的几种稳恒电源

(1) 化学电池: 将化学反应释放的能量转换为电能如干电池和蓄电池, 即通过化学反应提供非静电力, 使正、负电荷分离并在两极板上累积造成静电力, 直到非静电力与静电力达到平衡, 形成两极间的电势差。



伏打电池 → 丹聂耳电池 → 铅酸电池

(2) 光电池: 光能转变为电能如太阳能电池。其原理——当太阳光照到对光敏感的金属表面时, 通过光电效应, 金属表面发射电子, 这些电子被收集到另一邻近的金属表面, 造成正、负电荷分离产生电动势。

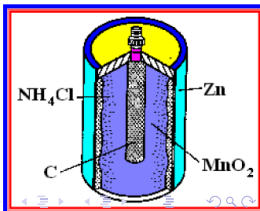
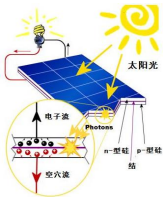


图4-1-26

(3) 温差发电机：利用温差电效应把热能直接转化成电能。

温差电效应和温差电堆示意图

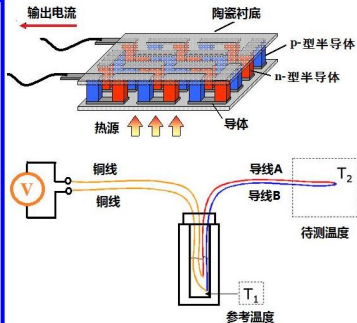
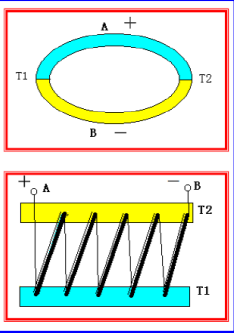
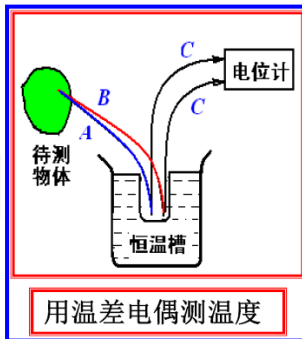


图4-1-27:温差发电机

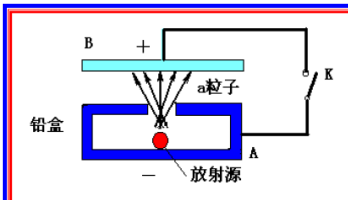


用温差电偶测温度

(4) 核能电池：将核能转化为电能。

$$2e \int_A^B K \cdot dr = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 = 5 \times 10^6 \text{ eV}$$

$$\mathcal{E} = \int_A^B K \cdot dr = 2.5 \times 10^6 \text{ V.}$$



核能电池示意图

图4-1-28:核能电池

(5) 直流发电机

通过电磁感应(见第六章)将机械能,如水的势能和风的动能转换为电能。

[3] 全电路欧姆定律

(1) 全电路欧姆定律

在闭合回路中,静电力和非静电力作的功为

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \oint_{(L)} (\vec{K} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \vec{K} \cdot d\vec{l} + \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{(L)} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int_{(\text{out})} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} + \int_{(\text{in})} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

利用欧姆定律 $\begin{cases} \int_{(\text{out})} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int_{(\text{out})} \frac{\vec{J}S}{\sigma S} \cdot d\vec{l} = IR = U_1 \\ \int_{(\text{in})} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int_{(\text{in})} \frac{\vec{J}S}{\sigma S} \cdot d\vec{l} = Ir = U_2 \end{cases}$

而 $\oint \vec{K} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l} = \varepsilon$

$$\therefore \quad \varepsilon = I(R + r)$$

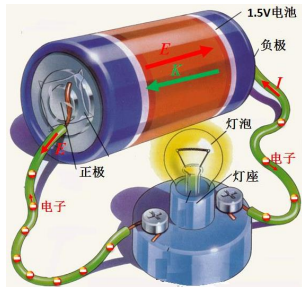
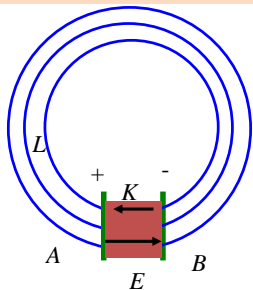


图4-1-29:全电路示意图

例题4-1-8:一电缆AB长50km,中间某点发生漏电,现作下列检查,如图4-1-30所示,将B端断开,在A端加上200V电压,测得B端电压40V;再将A端断开,在B端加上可调电压,当调到300V时,A端电压为40V。

求:发生漏电的地点离A端的距离。



图4-1-30

(2) 一段含源电路的欧姆定律

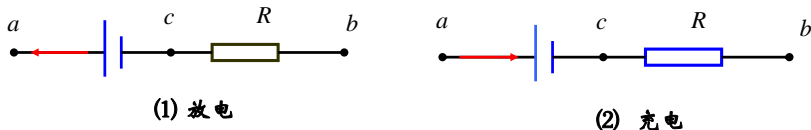


图4-1-31: 一段含源电路

如图4-1-31所示，在一段含源的电路中

$$\vec{j} = \sigma(\vec{K} + \vec{E}) \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{K}$$

将上式从 a 端经电源到 b 端线积分，得：

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^c \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} + \int_c^b \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} - \int_a^b \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

积分时**注意**到，电路(1)中 \vec{j} 与 $d\vec{l}$ 方向相反，电路(2)中 \vec{j} 与 $d\vec{l}$ 方向相同，而 \vec{K} 与 $d\vec{l}$ 的方向相反，故得

$$U_a - U_b = \begin{cases} \varepsilon - I(r_i + R) & (\text{放电}) \\ \varepsilon + I(r_i + R) & (\text{充电}) \end{cases}$$

上式即为一段含源电路的欧姆定律。

若 $R = 0$ ，则有

$$U_a - U_b = \begin{cases} \varepsilon - Ir_i & (\text{放电}) \\ \varepsilon + Ir_i & (\text{充电}) \end{cases}$$

此时是电源正、负极间的电势差，称为**电源的端电压**。

❖ 电源的电动势与端电压的区别:

电动势:非静电力做功,仅取决于电源本身的性质,与外电路性质及是否接通无关;

端电压:从正极到负极时静电力所做的功,与外电路的情况有关。

❖ 一段含源电路的欧姆定律的一般计算式为

$$U_a - U_b = \sum_i (\pm I_i R_i) - \sum_j (\pm \varepsilon_j)$$

符号约定:先任意选取沿电路积分的方向,写出初末两端点的电势差 $U_a - U_b$;

(1) 若通过电阻中**电流**的流向与积分路径的方向**相同**,该电阻上电势降取“+”号,相反则取“-”号;

(2) 若**电动势**的指向与积分路径的方向**相同**,该电动势前取“+”号,相反则取“-”号。

例题4-1-9:如图4-1-32所示,求电路a、f间电势差。

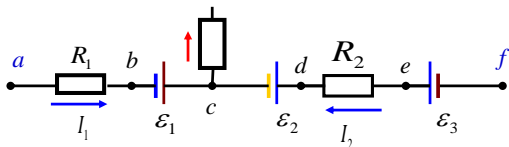


图4-1-32:例题4-1-9示意图

解:各支电路设置的电流方向如图4-1-32所示,则**对电阻有**

$$\text{对电源有 } U_{ab} = I_1 R_1, U_{de} = -I_2 R_2;$$

$$U_{bc} = \varepsilon_1, U_{cd} = \varepsilon_2, U_{ef} = -\varepsilon_3$$

$$\therefore U_{af} = I_1 R_1 - I_2 R_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

说明：稳恒电路的特点

- (1) 电动势 ε 和内阻 r 是电源的两个特征量,由电源的性质确定,与外电路无关;
- (2) 路端电压 U 与电路中的电流 I 有关。
开路($I = 0$) $\Rightarrow U = \varepsilon$, 开路测电动势, 闭路测端电压;
- (3) 使用大内阻的伏特计或万用表测量电源电动势, R 越大, I 便越小,测得的路端电压 U 越接近电源的电动势,因电源内阻 r 一般都很小。
- (4) 使用电源应避免使电源短路,因电源内阻小,短路造成 I 很大,烧坏电源。
- (5) 外电路的均匀导体中,无净电荷:

$$\because \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \therefore \sigma \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \rho_e = 0$$

例4-1-10:试求电源向负载输出功率最大的条件。

解: 设一闭合回路,电源电动势为 ε ,

内电阻为 r ,负载电阻为 R ,则 $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$

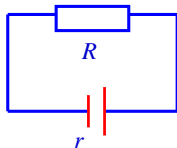


图4-1-33

电源向负载输出的功率为 $P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} R$

根据求极值的方法 $\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \frac{r-R}{(R+r)^3} = 0$

由此得到向负载输出功率最大的条件是: $r = R$ 上式称为**匹配条件**。

注意:对于一般化学电源,内阻都很小当满足匹配条件时,总电阻很小,会使电流超过额定值,故一般条件不能在匹配条件下使用化学电源。

但在电子技术中的某些电源,其内阻很大,考虑匹配是很重要的。

[4] 稳恒电路中电荷与静电场的作用

- (1) 稳恒时, 电力线和电流线必须与导体表面平行;
- (2) 稳恒时, 静电场与非静电场共同使电流闭合;
- (3) 电场决定了电流的分布。

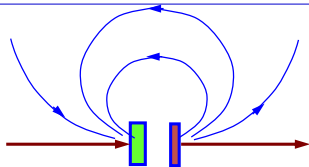


图4-1-34 电源的电场

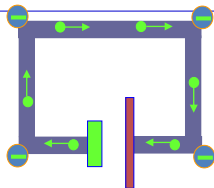


图4-1-35: 电荷分布示意

- 接通电路之瞬间, 电荷重新分布;
- 使导线内电场平行导线表面;
- 电荷分布在导体表面及导体内不均匀处。

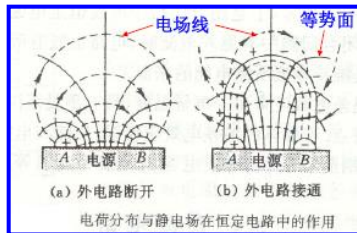


图4-1-36

[5] 简单电路

1、基本规则

(1) 串联: 电流相同, 电压分配;

(2) 并联: 电压相同, 电流分配。

2、典型应用

(1) 限流电路与分压电路;

(2) 直流平衡电桥, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_3}$;

(3) 电位差计: 补偿原理。

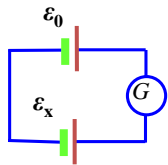


图4-1-41: 补偿原理

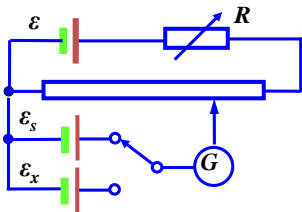


图4-1-40: 电位差计

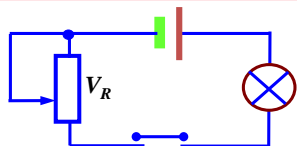


图4-1-37: 限流电路

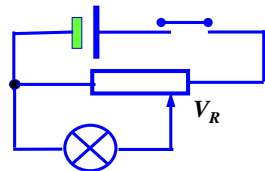


图4-1-38: 分压电路

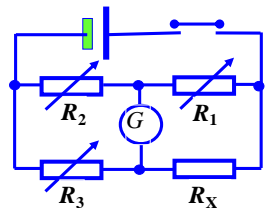


图4-1-39: 平衡电桥

例题4-1-11:电鳗、电鳐等电鱼能借助起电斑的生物电池生成电流,起电斑是生理学的电动势装置。如图所示的南美洲电鳗体中的起电斑排成**140**行,每行沿着其身体水平延伸,并且每行含有**5000**个起电斑。经检测每个起电斑具有**0.15V**的电动势和**0.25 Ω** 的内阻。电鳗周围的水完成该起电斑阵列两端之间的电路,一端在该动物的头部而另一端接近其尾部。假设电鳗周围的水具有电阻**800 Ω** 。则它击晕或击毙别的鱼,而不致击晕或击毙自己的原因。

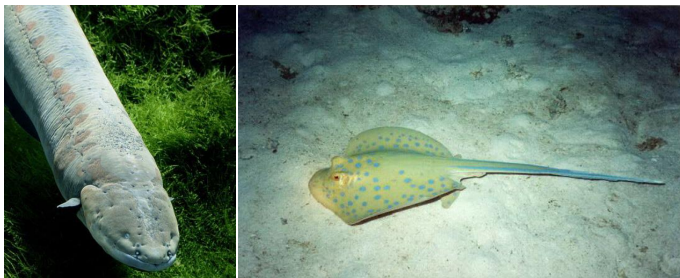


图4-1-42:

§ 4-1-4 稳恒电路的基本定律



基尔霍夫定律

基尔霍夫定律

叠加原理

电压源和电流源

戴维宁定理和诺顿定理

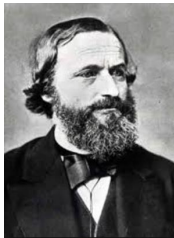


图4-1-43:基尔霍夫的工作

【1】基尔霍夫定律

在实际直流电路中,往往碰到多电源多回路的复杂电路。

基本方法:根据列出一组电路线性方程,通过解线性方程组解决复杂电路问题。

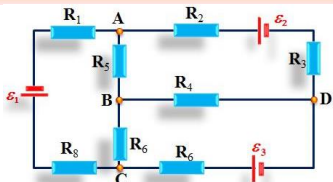


图4-1-44:多回路直流电路

(1)概念:

- ①节点: 3条或其以上导线的相交点(如图4-1-44所示A、B、C、D四个节点);
- ②支路: 由电阻、电源串联而成电流通路(如图4-1-44所示AC、BD、CD、AD等6个支路);
- ③回路: 由几条支路组成闭合电流通路;各不相重合为独立回路(如1、2、3等)。

基于静电场理论可更一般化思考

(2)基尔霍夫第一定律:

如图4-1-45(a)所示该节点的电流关系

$$I_{in} = I_{out1} + I_{out2} + \dots$$

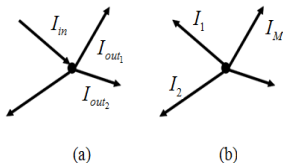


图4-1-45:节点处电流

如图4-1-45(b)所示该节点电流关系: $-I_1 = I_M + \dots + I_2$

归纳为:

基尔霍夫第一方程组(节点方程):

$$\sum_{k=1}^M I_k = 0$$

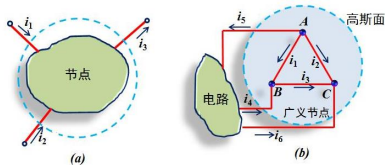


图4-1-46:广义节点

汇于节点各支路电流强度的代数和为0。

【约定】:

- 1) 对已知电流,从节点流出者为正,流入节点者为负;
- 2) 对未知的电流,按标定方向,流出冠以“+”,流入冠以“-”;

解出结果,正者与标定方向相同,负者与标定方向相反。

如图4-1-47所示闭环回路知 $U_{AN} = U_{AB} + U_{BC} + \cdots + U_{MN}$

$U_1 = (-U_N) + (-U_{N-1}) + \cdots + (-U_2)$ 可归纳为:

基尔霍夫第二方程组(回路方程):

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0$$

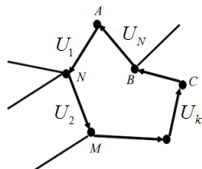


图4-1-47: 一个闭环回路

环回路一周总电压为0;即沿任一闭合回路中电动势的代数和等于回路中电阻上电势降落的代数和。

【约定】:

- 1) 电流标定方向与选定回路绕行方向相同者 IR 前冠以“+”, 电流标定方向与选定回路绕行方向相反者 IR 前冠以“-”;
- 2) 电源电动势方向与回路绕行方向相反者 ε 前冠以“+”, 电源电动势方向与回路绕行方向相同者 ε 前冠以“-”。

用基尔霍夫定律列方程组应注意:

① 在给定电路上标定各支路上电流的参考方向;

② 方程组中各项之前的正负号约定:

对于节点方程,流出节点的电流 I 之前取正号,流入取负号;

对于回路方程,首先标定回路绕行方向,若电阻中电流方向与绕行方向一致,电位降落, IR 之前加正号,反之加负号;

若电动势与绕行方向一致,电位升高,之前加正号,反之加负号。

③ 注意方程的独立性及独立方程数目应等于所求未知量数:

对于 n 个节点 p 条支路的复杂电路,可列出 $(n-1)$ 个独立节点电流方程和 $(p-n+1)$ 个独立回路电压方程(在新选定的回路中,必须至少有一段电路在已选的回路中未曾出现过)。

(3) 叠加原理

有多个电源的电路中,通过任一支路的电流等于各电动势单独存在时在同一支路产生的电流的代数和。

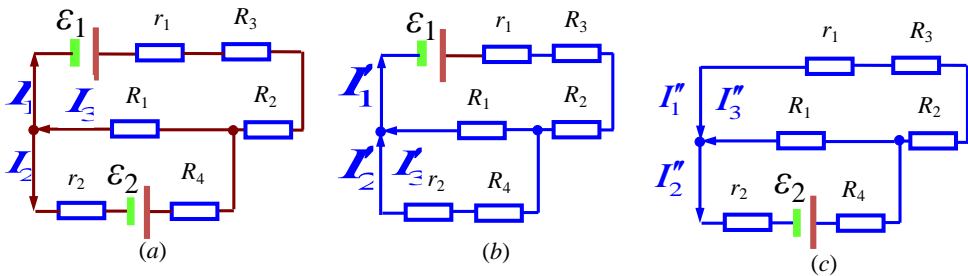


图4-1-48: 叠加定理用图

利用图4-1-48的 (a)、(b) 和 (c) 来说明叠加原理,即

$$I_1 = I'_1 - I''_1, I_2 = -I'_2 + I''_2, I_3 = I'_3 + I''_3$$

基尔霍夫方程组原则上可解决任何直流电路问题。

为避免方程过多,在具体解题过程中可灵活运用,充分运用基尔霍夫第一方程组,使未知变量数目尽可能少,从而使问题简化。

例4-1-12:如图4-1-49所示在设定 I_1, I_2 之后,对CA支路可不必再设新的变量,直接设它为 $I_1 + I_2$,这样便将三个未知变量减少到两个。

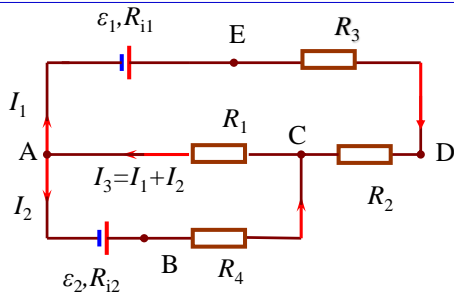


图4-1-49: 电路网络

根据基尔霍夫第二方程,选择回路ABCDEA和AEDCA,则有

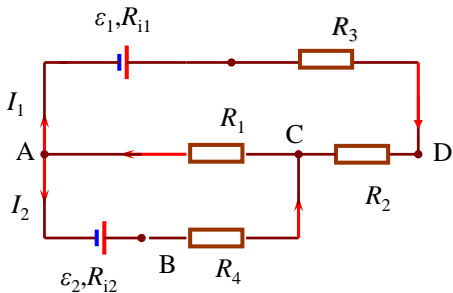


图4-1-50: 电路网络

$$\begin{cases} -\varepsilon_2 + I_2 R_{i2} + I_2 R_4 - I_1 R_2 - I_1 R_3 + \varepsilon_1 - I_1 R_{i1} = 0 \\ -\varepsilon_1 + I_1 R_{i1} + I_1 R_3 + I_1 R_2 + (I_1 + I_2) R_1 = 0 \end{cases}$$

整理后联立求解,得到 I_1, I_2 。由所得结果的正负,判明实际电流的方向。

【例题4-1-13】 如图4-1-51电路,已知元件参数,求 R_1 的电流。

【解】:设定分上下两个回路,绕行方向也可有不同选择,如

(1)上回路绕行方向顺时针,下回路绕行方向逆时针。

列回路方程分别为(参见图4-1-51)

$$\begin{cases} -\varepsilon_1 + I_1 r_1 + I_1 R_3 + I_1 R_2 + I_1 R_1 + I_2 R_1 = 0 \\ -\varepsilon_2 + I_2 r_2 + I_2 R_4 + I_2 R_1 + I_1 R_1 = 0 \end{cases}$$

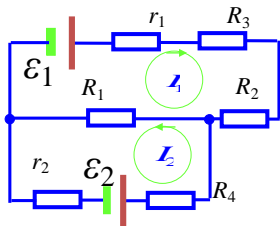


图4-1-51:例题电路(1)

过 R_1 的电流 $I = I_1 + I_2$

(2)上、下回路绕行方向均为**顺时针**。

列回路方程分别为(参见图4-1-52)

$$-\varepsilon_1 + I_1 r_1 + I_1 R_3 + I_1 R_2 + I_1 R_1 - I_2 R_1 = 0$$

$$\varepsilon_2 + I_2 r_2 + I_2 R_4 + I_2 R_1 - I_1 R_1 = 0$$

过 R_1 的电流 $I = I_1 - I_2$

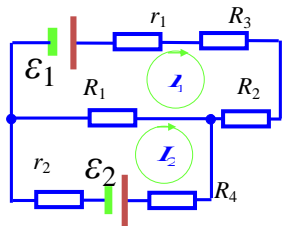


图4-1-52 例题电路(1)

【注】:还可能有第三个回路方程,但不是独立的。

[例题4-1-14]五个已知电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 联接如图4-1-53所示,试求 a 、 b 间电阻。

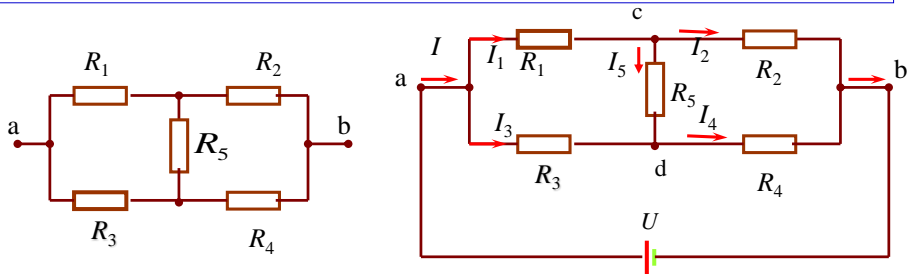


图4-1-53: 电路网络

[解] 设 ab 间接上电压为 U 的电源。电路中各处的电流如图

所示,应用基尔霍夫第一定律,有

$$\begin{cases} I_2 = I_1 - I_5 & \text{①} \\ I_4 = I_3 + I_5 & \text{②} \end{cases}$$

取三个独立回路,由基尔霍夫第二定律得

回路 $acda$:

$$I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_3 R_3 = 0 \quad (3)$$

回路 $cbdc$: $(I_1 - I_5) R_2 - (I_3 + I_5) R_4 - I_5 R_5 = 0 \quad (4)$

回路 $acbUa$: $I_1 R_1 + (I_1 - I_5) R_2 - U = 0 \quad (5)$

由式③④⑤联立解得

$$I_1 = \frac{U}{\Delta} [(R_2 + R_4) R_3 + (R_3 + R_4) R_5]$$

$$I_3 = \frac{U}{\Delta} [(R_2 + R_4) R_1 + (R_1 + R_2) R_5]$$

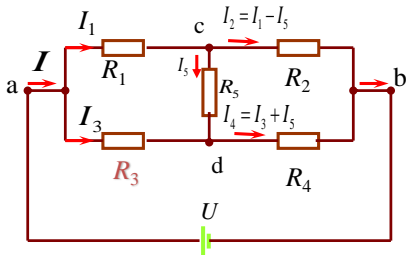


图4-1-54: 电路网络

$$I_5 = \frac{U}{\Delta} (R_2 R_3 - R_1 R_4)$$

式中

$$\Delta = R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) R_5$$

流过 a 、 b 两点的电流为

$$I = I_1 + I_3 = \frac{U}{\Delta} [(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)R_5]$$

于是得 a 、 b 间的电阻为

$$R_{ab} = U/I =$$

$$\frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) R_5}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) R_5}$$

[讨论] (1)平衡电桥 —— a 、 b 间的电路也是惠斯通电桥的电路。当 $I_5 = 0$ 时,电桥达到平衡,这时

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \Rightarrow R_1 / R_2 = R_3 / R_4$$

这就是惠斯通电桥的平衡条件,这时

$$R_{ab} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_3}$$

这个结果表明:平衡电桥的电阻 R_{ab} 与桥电阻 R_5 无关;
这个结论在解决一些电路中有用。

(2) 在 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ 的条件下, 下面(a)、(b)、(c)三个电路的 a 、 b 间的电阻 R_{ab} 都相等。

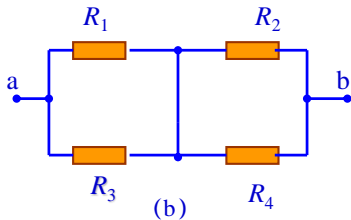
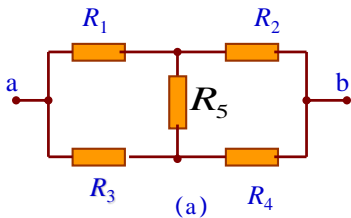
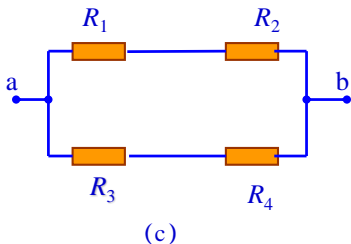


图4-1-55: 电路网络



在 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ 条件下, 三种电

路的电阻都为

$$R_{ab} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_3}$$

例题4-1-15 六个相同的电阻 r 联接成如图的电路,试求 a 、 b 间的电阻 R_{ab} 以及 a 、 c 间的电阻 R_{ac} 。

[解]图中上边五个 r 是桥路电阻。根据4-1-14题结论,这桥路电阻为 r 。它与下边的 r 并联,故

$$R_{ab} = \frac{r \cdot r}{r+r} = \frac{r}{2}$$

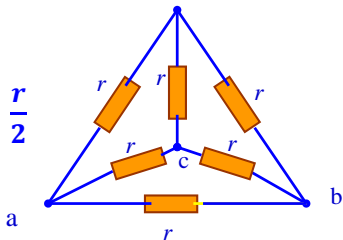


图4-1-56: 三角形电路

因图中的电路构成一个对称的四面体,故由对称性可知:

$$R_{ab} = R_{ac} = \frac{r}{2}$$

[例题4-1-16] 推导电阻的Y形联接和 Δ 形联接的代换公式,可以保持两种联接中任意两对应点之间的总电阻都分别相等,试推导之。

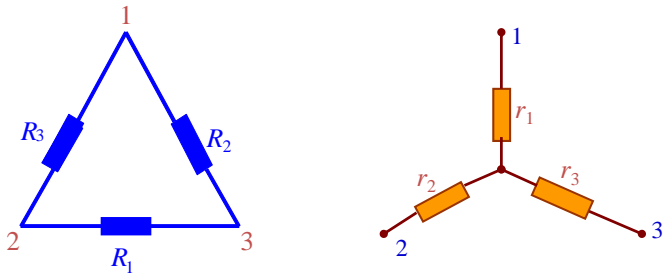


图4-1-57: Y形联接和三角形联接

【解】 当Y形电阻与 Δ 形电阻等效时,两种联接中任意两对应点之间的总电阻都分别相等。在Y形联接和 Δ 形联接的1-2,1-3,2-3之间的总电阻应相等,故

$$r_1 + r_2 = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \Delta \rightarrow Y$$

$$r_1 + r_3 = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 + r_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad Y \rightarrow \Delta$$

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_1 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}{r_1}$$

$$R_2 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}{r_2}$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}{r_3}$$

[例题4-1-17]在图4-1-58所示网络中已知 $R=150\Omega$,求网络输入电阻。

[解法一]将原图中a、b、c点间 Δ 形网络变换成Y形,得到右下图

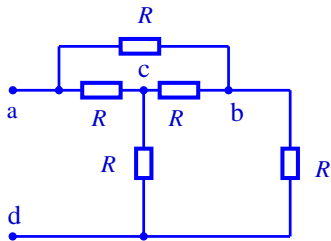


图4-1-58: 电路网络

$$\therefore R_Y = \frac{1}{3} R_{\Delta} = \frac{150}{3} = 50(\Omega)$$

整个网络输入电阻则为

$$R_{in} = R_Y + \frac{1}{2} (R + R_Y) = 150(\Omega)$$

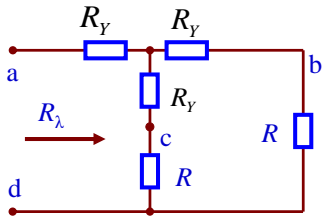


图4-1-59: 等效电路

[解法二]

将原图中a、b、d点间Y形网络变换成 Δ 形

$$\therefore R_{\Delta} = 3R_Y = 450(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \therefore R_{ab} = R_{bd} &= \frac{RR_{\Delta}}{R + R_{\Delta}} \\ &= 112(\Omega) \end{aligned}$$

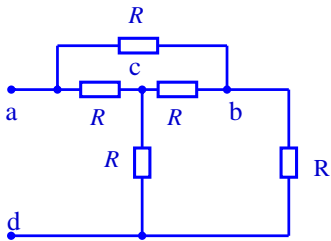


图4-1-60: 电路网络

整个网络输入电阻则为

$$R_{in} = \frac{R_{\Delta} \cdot (R_{ab} + R_{bd})}{R_{\Delta} + R_{ab} + R_{bd}} = 150(\Omega)$$

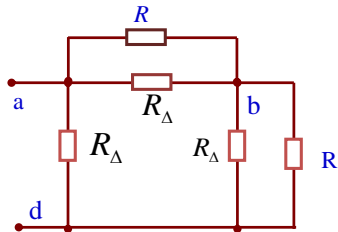


图4-1-61: 等效电路

【2】 电压源和电流源

(1) 电压源

理想电压源和实际电路的电压源模型

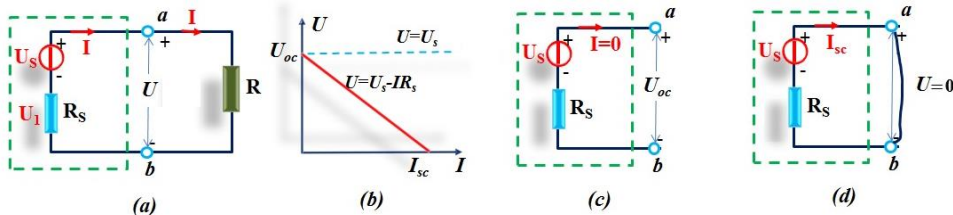


图4-1-62

(2) 电流源

理想电流源和实际电路的电流源模型

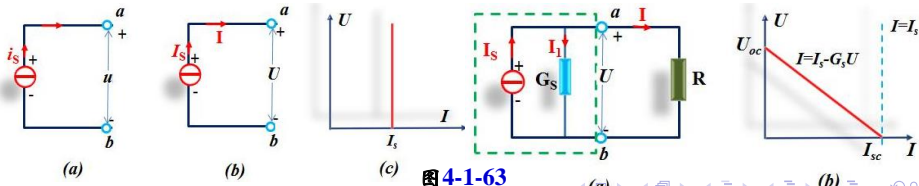


图4-1-63

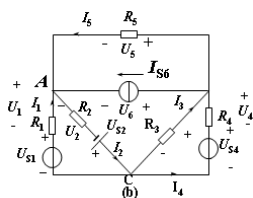
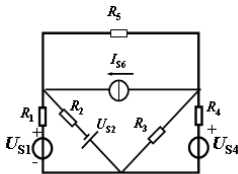
[例4-1-18] 写出求解图4-1-64(A)所示电路的各支路电流,电压的个方程式,其中 $R_1 \sim R_5$, U_{S1} , U_{S2} , U_{S4} , I_{S6} 均为已知量。

[解] 先标出各支路电流电压的方向,如图4-1-64(b)所示。

依**KCL**,列两个节点方程(选C点为参考节点),对节点A:

$$I_1 - I_2 + I_5 + I_{S6} = 0$$

对节点B: $I_3 + I_4 - I_5 - I_{S6} = 0$



(A) 图4-1-64:例4-1-18题图

再依**KVL**,列回路方程:

对 U_{S1} , R_1 , R_2 , U_{S2} 网孔,有 $I_3 R_3 + U_{S3} - I_4 R_4 = 0$

对 R_3 , U_{S4} , R_4 回路,有 $I_1 R_1 + I_2 R_2 = U_{S1} + U_{S2}$

对含电流源 I_{S6} 支路,不列回路方程,而改对 U_{S2} , R_2 , R_5 , R_3 列

回路方程 $U_{S2} - I_2 R_2 - I_5 R_5 - I_3 R_3 = 0$

五个未知量,五个方程,都已列出,联立可求五个支路电流(另一个是已知的 I_{S6})。

再列出六个支路电压方程:

支路1: $U_{AC} = U_{S1} - I_1 R_1$ 由此可求 U_{R1}

支路2: $U_{AC} = -U_{S2} + I_2 R_2$ 由此可求 U_{R2}

支路3: $U_{BC} = -I_3 R_3$ 由此可求 U_{R3}

支路4: $U_{BC} = U_{S4} - I_4 R_4$ 由此可求 U_{R4}

支路5: $U_{AB} = -I_5 R_5$ 由此可求 U_{R5}

支路6: $U_{AB} = U_{S6}$ 由此可求(电流源 I_{S6} 端电压)

? 回路电流法(网孔法):

用回路电流代替支路电流作待求量,因为在任何情况下,电路

回路数: $l = b - (n - 1) < b$

l 总小于支路数,这样求解电路回路方程数总少于支路方程数;

【3】戴维宁定理和诺顿定理

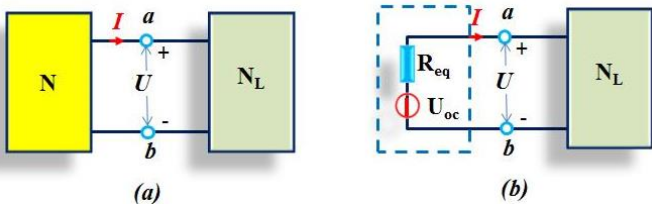


图4-1-65: 戴维宁等效电路

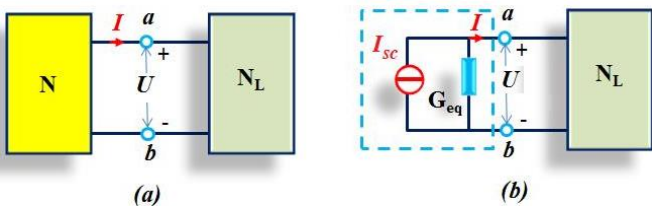


图4-1-66: 诺顿定理等效电路

戴维宁定理和诺顿定理

戴维宁定理(等效电源定理):当需要计算较复杂线性电路中的某一条支路的电压或电流,无必要对所有支路进行分析,将要求解的支路当做外电路,而把其余部分简化为**等效电源**,最后利用结构简单的等效电路解决问题。

戴维南(M L Theaviness)是法国的一位电报工程师,戴维南定理是他在**1883**年发表的。

?戴维宁定理(等效发电机原理)内容:

- ①任一线性有源二端网络,对其外电路而言,均可等效为理想电压源 U_{oc} 和内阻 R_{eq} 相串联的支路;
- ②这条有源支路的电压源的电压 U_{oc} 是该网络的开路电压,所串电阻 R_{eq} 是该网络所有独立源置零(电压源短路,电流源开路)后的等效电阻。
- ③戴维南定理也适用于交流正弦稳态电路,定理中的 U_{oc} 和 R_{eq} 应选用相应的相量 \dot{U}_{oc} 和 Z_{eq} 代替。

? 诺顿定理(等效电动机原理)内容 (类比)

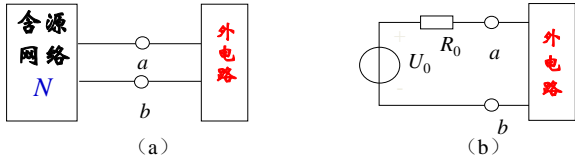


图4-1-67:戴维南定理图

[例4-1-20] 如图所示的有源二端网络 N ,用内阻为 $1\text{M}\Omega$ 的电压表去测量网络的开路电压时,为 30V ;用 $500\text{k}\Omega$ 的电压表去测量时为 20V ;试将该网络用有源支路来代替。

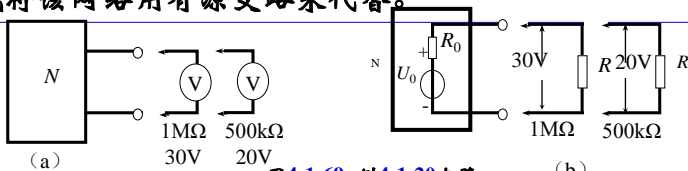


图4-1-69:例4-1-20电路

[解] 用电压表测量某电网络的开路电压的等效电路如图3-58(b)所示。由图可知

$$\begin{cases} \frac{U_{oc}}{R_{eq} + 1000} \times 1000 = 30 \\ \frac{U_{oc}}{R_{eq} + 500} \times 500 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{oc} = 60\text{V} \\ R_{eq} = 1\text{M}\Omega \end{cases}$$

* § 4-1-5 稳恒场与静电场综合解

一、基本方程

二、基本方程的闭合性

三、解法及举例

四、与纯静电场问题类比

引 语

稳恒电流存在不会改变空间电荷的分布,与它有关的电场仍为静电场,所以常会碰到稳恒电流和静电场的综合求解问题(简称“综合解问题”)。

电阻法勘探原理(例):

该类问题都有导电介质出现,需要用 ϵ 和 σ 两个量来表达其性质。

- ①大地是导电介质,将两个插入地面并相隔一定距离的电极加上电压以在大地中形成稳恒电流。
- ②电流的分布、电场的分布都和大地电阻率分布有关,而电场的分布情况必然影响到地面的电势分布。
- ③通过调节电极的位置和距离,测量每种电极配置下的地面的电势分布,就可估算地下电阻率的分布情况,因而就从一个侧面提供有关地质构造和矿藏分布的信息。

综合求解问题

①要求同时确定导体内的电流分布和电场分布,电路分析问题只是去估算各支路的电流强度和节点的电势。

即电路分析只是反映稳恒电路中电流和电场的整体特征,而综合求解则要求导体中电流和电场的精细结构。

②不同于静电平衡条件下的静电场问题(纯静电场问题)。

(A)导体内恒有 $\vec{j} = 0, \vec{E} = 0$,导体为等势体;

(B)纯静电场的问题在于分析导体外的静电场分布;

(C)存在稳恒电流的情况下,导体内电流和电场都不为零,且具有一定分布律。

一、基本方程

稳恒场和静电场的综合解的基本方程包括静电场的环路定理、稳恒条件和欧姆定律:

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

当碰到导体界面时,由环路定理和稳恒条件可证明:

界面两侧的电场强度的切向分量应当连续,电流密度的法向分量连续。

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \quad \vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0$$

式中: \vec{n} 为界面的单位法向矢量,由介质1指向介质2。

二、基本方程的闭合性

通过与纯静电场问题的基本方程在数学形式上的类比,可得出结论:基本方程是**闭合**的。

纯静电场问题的基本方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0 \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

综合求解问题的基本方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{array} \right.$$

I 可理解为电流的代数和

数学上,两组方程极其相似: \vec{E} 与 \vec{E} , \vec{D} 与 \vec{j} , Q 与 I , ε 与 σ ,一一对应。

既然已知纯静电场问题的基本方程是**闭合**的,可以推得综合解问题的基本方程也是**闭合**的。

还可得出以下结论:

(1) 载流导电介质中的稳恒电流和静电场的分布规律取决于导电介质的**电导率**,而与导电介质**极化性质**即导电介质的介电常数**无关**。

(2) 由静电场 \vec{E} 可按高斯定理确定载流导电介质的**总电荷分布**,这一分布也只取决于导电介质的**导电性质**,而与导电介质的极化性质**无关**。

(3) 导电介质中的**自由电荷**和**极化电荷**在总电荷中所占的份额与导电介质的极化性质**有关**,即与导电介质的介电常数**有关**。

三、解法及举例

[例4-1-15]如图4-1-76所示,一平板电容器极板间距为 d ,填充两层导电介质。设电容器两端电压为 U ,第一层介质厚度为 d_1 ,介电常量为 ϵ_1 ,电导率为 σ_1 ;第二层介质的相应参量为 d_2, ϵ_2 和 $\sigma_2, d = d_1 + d_2$ 。

- (1)忽略边缘效应,求介质1和介质2中的电流密度和电场强度;
- (2)求介质分界面上的总电荷面密度;
- (3)求介质分界面上自由电荷面密度。

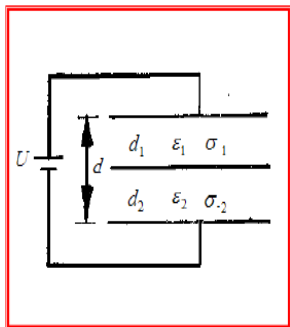


图4-1-76

[解](1)由稳恒条件知电流密度法向分量连续,得:

$$\vec{j}_1 = \vec{j}_2 = \vec{j}$$

➤由欧姆定律有 $\vec{E}_1 = \frac{\vec{j}}{\sigma_1}$, $\vec{E}_2 = \frac{\vec{j}}{\sigma_2}$

➤由环路定理有:
$$\begin{cases} E_1 d_1 + E_2 d_2 = U \\ \left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}\right) j = U \end{cases}$$

$$\text{求得: } \begin{cases} j = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U \\ E_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U \\ E_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U \end{cases}$$

(2) 两介质分界面上的总电荷面密度

$$\sigma_e = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{\varepsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U$$

(3) 两介质分界面上的自由电荷面密度为：

$$\sigma_{e0} = D_2 - D_1 = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U$$

由本题结果可见： \vec{j} 、 \vec{E}_1 、 \vec{E}_2 和 σ_e 只与介质的电导率 σ_0 有关，而 σ_{e0} 不仅与电导率有关，还与介电常量 ε 有关；
这些结果与刚才讲的三点结论一致。

四、与纯静电场问题类比

在[2]中讨论基本方程的闭合性时,已进行了与纯静电场问题的类比,这两组规律的数学表达式具有**完全类似**的形式。

一旦碰到这种情况,往往可用同一种方法处理性质不同物理问题,这是一种应该掌握的技巧。

为了便于区分,将纯静电场问题的物理量用下标“ i ”表示,则给出对应关系表4.1如下:

表4.1 两类问题中物理量的对应关系

综合求解问题	j	E	I	σ (导电介质)	$\sigma \rightarrow \infty$ (电极: $E = 0$)
纯静电场问题	D_i	E_i	Q_i	ϵ_i (电介质)	$\epsilon_i \rightarrow \infty$ (导体: $E_i = 0$)

重解[例4-1-15]:按表4.1,与它对应的纯静电场问题如右下图所示。

该问题属于介质界面与等势面重合的情况, $\vec{D}_i = \epsilon_0 \vec{E}_0$, \vec{E}_0 为自由电荷产生的电场。这样,介质1和介质2中的电场分别为:

$$E_{i1} = D_i / \epsilon_{i1} = \epsilon_0 E_0 / \epsilon_{i1},$$

$$E_{i2} = \epsilon_0 E_0 / \epsilon_{i2}.$$

由题设条件可知: $E_{i1}d_1 + E_{i2}d_2 = U$

可定出: $E_0 = \frac{\epsilon_{i1}\epsilon_{i2}}{(\epsilon_{i1}d_2 + \epsilon_{i2}d_1)\epsilon_0} U$

从而求得纯静电场解为:

$$D_i = \frac{\epsilon_{i1}\epsilon_{i2}}{\epsilon_{i1}d_2 + \epsilon_{i2}d_1} U, E_{i1} = \frac{\epsilon_{i2}}{\epsilon_{i1}d_2 + \epsilon_{i2}d_1} U, E_{i2} = \frac{\epsilon_{i1}}{\epsilon_{i1}d_2 + \epsilon_{i2}d_1} U$$

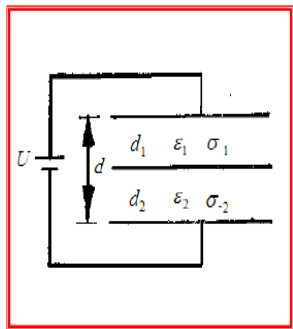


图4-1-76

表4.1给出的对应关系,可推出**综合求解问题**的解为:

$$\begin{cases} j = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U \\ E_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U \\ E_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U \end{cases}$$

至此,将 D_i 、 E_{i1} 、 E_{i2} 、 ε_{i1} 、 ε_{i2} 等统统“忘掉”,考虑两层电介质的实际介电常量 ε_1 和 ε_2 ,求得实际电位移矢量为:

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U, \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U$$

据此可求得介质分界面上的自由电荷面密度 σ_{e0} 。

上述结果与[例4-1-15]给出的结果完全一致。

基本要求

1. 理解**电流密度**矢量概念及其与**电流强度**的关系;
2. 理解**稳恒电流**及**稳恒电场**的意义和它们的基本性质;
3. 理解**欧姆定律**,能计算一些简单特定形状的电阻;
4. 从力的作用、能量转化和电势变化等方面理解**电动势**的概念;
5. 会用**基尔霍夫定理**计算复杂电路;
6. 理解金属中电流形成的**经典图像**和**焦耳热**产生的物理过程。

稳恒电流小结

一、理论体系：

欧姆定律 $\rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$; 焦耳定律 $\rightarrow p = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2$

叠加原理

基尔霍夫定律 $\rightarrow \begin{cases} \text{节点电流方程组: } \sum (\pm I) = 0 \\ \text{回路电压方程组: } \sum (\pm IR) + \sum (\pm \xi) = 0 \end{cases}$

等效电源定理 $\rightarrow \begin{cases} \text{戴维南定理: 电压源} = \text{无内阻 } \xi \text{ 与内阻 } r_0 \text{ 串联} \\ \text{诺顿定理: 电流源} = \text{无内阻 } I_0 \text{ 与内阻 } r_0 \text{ 并联} \end{cases}$

二、内容：

1、电流、电流密度、电动势与端电压；

2、三个定律两个定理：欧姆定律、焦耳定律、基尔霍夫定律和叠加原理、等效电源定理。

3、两种物理量： (I, \vec{j}) ——描述导体中通过某一截面的整体特征；

反映导体中各处电荷定向运动的情况 $\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \vec{e}_n$

(U, ε) ——电源内外的电荷移动特性：
$$\begin{cases} \varepsilon = \int \vec{K} \cdot d\vec{l} \\ U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{cases}$$

4、三种电路应用

- (1) 一段含源电路的应用(全电路欧姆定律)；
- (2) 简单电路的应用(电路的串并联)；
- (3) 复杂电路的应用；

5、稳恒电路形象化几何描述： $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$

电流线——电流线围成的管；

电流管——欧姆定律、焦耳定律定域形式。

三、 $I(\vec{j}) | (U, \varepsilon) | R$ 三者关系网

$$1. \quad U = IR \Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$2. \quad P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \Rightarrow p = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2$$

$$3. \quad \begin{cases} \sum (\pm I) = 0 \\ \sum U = \sum (\pm IR) + \sum (\pm \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

小结图

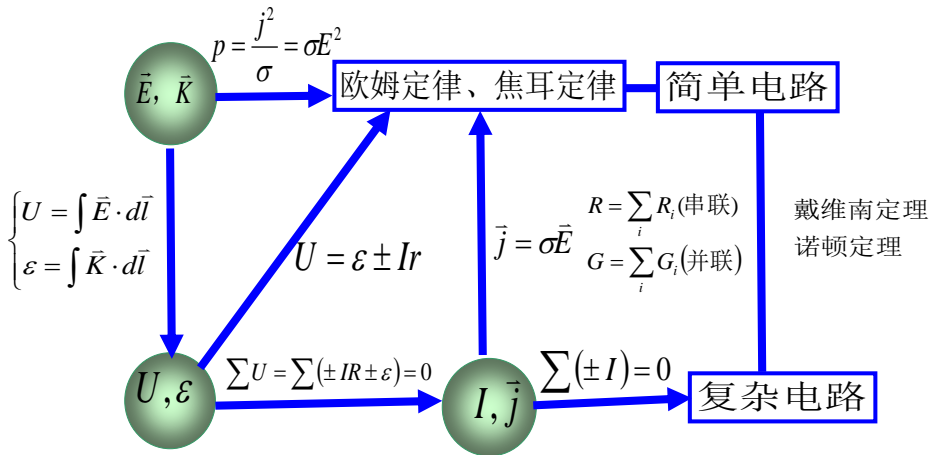


图4-1-79：总结图

第四章 电路部分(II)

电路 CIRCUIT

4-1 稳恒电路

4-2 集总电路

第四章 电路部分(II)

任务:研究信号与系统的关系问题

历史性简介

集总电路规律

电路基本问题

电路的元件抽象

集总电路的抽象

基尔霍夫定律

元件约束方程

两者关系

分析综合

集总电路的计算

集总电路的应用

本章知识单元与知识点小结

4-2 集总电路

4-2-1 集总电路的基本问题

4-2-2 集总电路的元件抽象

4-2-3 集总电路抽象与分析

4-2-4* 数字电路抽象与分析

4-2-5 集总电路的应用

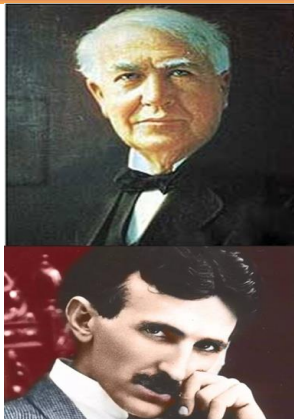


图4-2-1: 爱迪生与特斯拉的图片

历史简介

- 1832年亨利发现自感现象;1843年发明了惠斯通电桥;
- 1853年亥姆霍兹首先使用等效电源定理分析电路,但这个定理直到1883年才由戴维南(L.C.Thevenin)正式提出发表,因此后人称其为戴维南定理;
- 1873年麦克斯韦在他的巨著《Treatise on Electricity and Magnetism》(这是电气科学技术史上的第一部专著)中确立了节点分析法原理;
- 1894年斯坦梅茨(C. P. Steinmetz)将复数理论应用于电路计算;
- 1899年青内利(Kennelly)解决了Y/ Δ 变换;
- 1904年拉塞尔提出对偶原理;
- 1911年海维赛德提出阻抗概念,从而建立起正弦稳态交流电路的分析方法;
- 1918年福特斯库提出三相对称分量法,同年巴尔的摩提出了电气滤波器概念;
- 1920年瓦格纳发明了实际的滤波器,同年坎贝尔提出了理想变压器概念;
- 1921年布里辛格(Breisig)提出了四端网络及黑箱概念;
- 1924年福斯特提出电抗定理;1926年卡夫穆勒提出了瞬态响应概念;
- 1933年诺顿(L.Norton)提出了戴维南定理的对偶形式—诺顿定理;
- 1948年特勒根提出了回转器理论,该器件于1964年由施诺依用晶体管首先实现;
- 特勒根还于1952年确立了电路理论中除了KCL和KVL之外的另一个基本定理即特勒根定理。

4-2-1: 集总电路的基本问题

0. 引言

1. 信号离散化抽象

2. 电路信号表现形式

3. 电路五种基本阐述

0.引言

信号与系统的关系问题是信息载体与系统相互作用关系问题。

信息载体主要是电压、电流等,而系统常常称之为电路系统。

集总参数思想是电路理论的最基本也是最核心的思想。

实际电路有可分为分布参数电路和集总参数电路。

满足 $d \ll \lambda$ 条件的电路称为集总参数电路。

特点:电路中任意两端点间的电压 u 和流入任器件端的电流 i 完全确定,与器件的集合尺寸和空间位置无关。

不满足 $d \ll \lambda$ 条件的电路称为分布参数电路。

特点:电路中任意两端点间的电压 u 和流入任器件端的电流 i 是时间函数,与器件的集合尺寸和空间位置有关。

1. 信号离散化抽象

电压 u 和电流 i 是电场与磁场在静场假设下的空间离散化抽象。

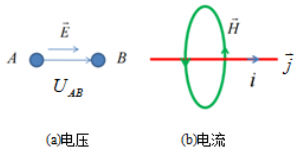


图4-2-2: 电压和电流空间离散化抽象

全空间的连续静电场分布,被离散化为两个点之间的一个电压:

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

全空间的连续静磁场分布,被离散化为流过横截面的一个电流:

$$i = \oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} \Leftrightarrow i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

离散化抽象的实例——交流电的产生

交流发电机产生的感应电动势和感应电流是随时间作周期性变化的,称之为**交流电**,并且符合**余弦函数**的振动规律,属于**简谐振动**,因而又称之为**简谐交流电**。

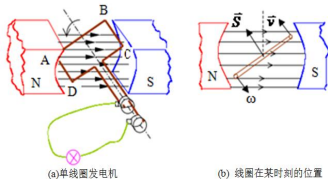


图4-2-3: 交流电产生的原理

当线圈在原动机在均匀磁场中匀速转动时, **AB**和**CD**边切割磁力线,线圈中产生感应电动势

$$\Phi = BS\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega\cos\omega t$$

2. 电路信号表现形式

以正弦或余弦规律变化的有一定频率和峰值的简谐波为**简谐交流电**,如我国工业和民用交流电的频率为**50Hz**,美国为**60Hz**。

其他形式的交流电波形具有**共同特征**为:具有固定频率(或作周期变化),且都可通过付里叶变换分解为多种不同谐波成分的叠加,这些谐波成分在线性电路中彼此独立。

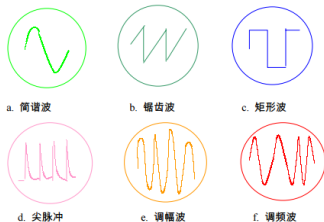
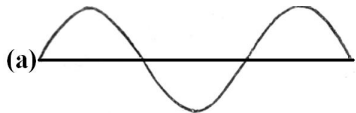


图4-2-4: 各种形式的交流电

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

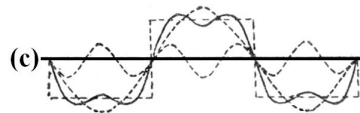
式中展开系数 a_n 和 b_n 为： $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{2}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} \cos \frac{2n\pi}{T} t \\ \sin \frac{2n\pi}{T} t \end{bmatrix} dt, n = 1, 2, \dots$



(a) 各种周期信号都可以由不同频率的简谐成分合成；

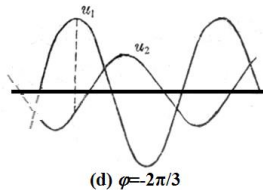
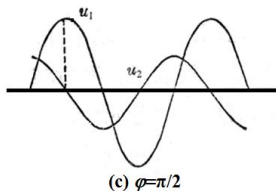
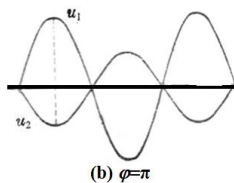
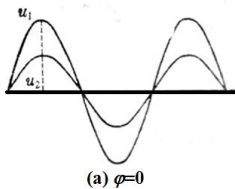


(b) 不同频率的成分彼此独立,互不干扰；



(c) 非简谐波的傅里叶分解。

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$



3. 电路五种基本阐述

[1] 基本描述

(1) 函数表示法:

电动势(emf): $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$

电压(voltage): $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

电流(current): $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

其中 ω 为交流发电机转子角速度,也等于交流电的角频率 ω , ω 与频率 f 的关系为: $\omega = 2\pi f$;交流电的周期为 $T = 1/f = 2\pi/\omega$ 。

E_m, U_m, I_m 分别称为交流电动势、电压和交电流幅值,或称为峰值;而 $e(t), u(t), i(t)$ 称为交流量瞬时值。

有效值:交流量的方均根如 $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ ——等效热效应之直流电流;

$$I_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_m \cos(\omega t + \varphi_i)]^2 dt} = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\text{位相} \begin{cases} \omega t + \varphi_e \\ \omega t + \varphi_u \\ \omega t + \varphi_i \end{cases} \quad \text{与初位相} \begin{cases} \varphi_e \\ \varphi_u, \\ \varphi_i \end{cases}$$

表示式中频率 ω 由信号源决定;

位相 $\omega t + \varphi$ 由信号源与电路决定

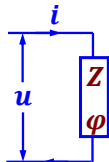


图4-2-7: 阻抗与位相差

$$\begin{cases} Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i \end{cases}$$

(2) 波形图示法

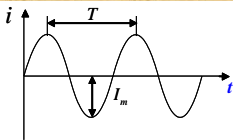


图4-2-8: 波形图

(3) 矢量表示法

$$i = (\vec{I}_m)_x = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = I_m \angle \varphi_i$$

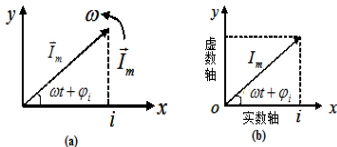


图4-2-9: 矢量图形表示

(4) 复数表示法

① 复平面法:

如图4-2-9(b)所示, x 、 y 是一个复平面, x 为实数轴, y 为虚数轴。复数 \tilde{I} 对应于复数平面中一个点,图中 I_m ,称为复数的模,也表示峰值; ω 表示角频率;称 $\omega t + \varphi_i$ 为幅角,表示相位;复数 \tilde{I} 在实数轴上的投影 i 就是瞬时值。

② 三角函数法: $\tilde{I} = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) + jI_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

交流电的瞬时值等于此复数的实部。

③ 代数法: $\tilde{I} = x + jy$

④ 指数法: $\tilde{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$ 复数的模 I_m 等于交流电的峰值,

复数的幅角 $\omega t + \varphi_i$ 等于交流电的相位。

【例4-2-1】 两同频率的交流电流,其电流的峰值分别为3A和4A,初相位分别为 25° 和 115° , 它们的频率为50Hz,试求这两个交流电流的和的峰值、频率和初相位,并求出瞬时值的表达式。

【解】 作两交流电的振幅矢量,在 $t = 0$ 时刻,振幅矢量如图4-2-10所示,合电流的振幅矢量为 $\vec{I}_m = \vec{I}_{1m} + \vec{I}_{2m}$

由平行四边形法则,有

$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 5(\text{A})$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \arctan \frac{I_{2m}}{I_{1m}} = \arctan \frac{4}{3} = 53^\circ 9' \Rightarrow \varphi = 75^\circ 9'$$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi$$

$$\text{所以 } i = 5\cos(100\pi t + 75^\circ 9')$$

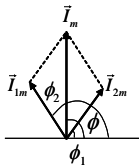


图4-2-10:例4-2-1图示

[2] 基本元件

实体物质和场物质相互作用、交换能量,形成具有某种电特性的电路器件,电路器件抽象为基本元件,或抽象为基本元件之间的某种连接关系,基本元件以元件约束方程(广义欧姆定律)描述其电特性。

元件自身的特征是用阻抗和初相位来描述

$$\begin{cases} Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i \end{cases}$$

如图4-2-11所示为交流电路中各种元件性能的演示实验装置:
电源为可调频率的音频信号发生器,频率的高低可通过扬声器监听,电流的大小借助于小灯泡亮度来显示;对于电容电感元件, $u(t)$ 和 $i(t)$ 之间的相位差,可在双踪示波器上观察。

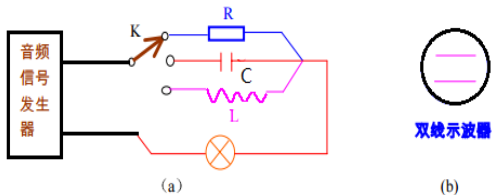


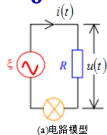
图4-2-11: 交流电路中各种元件性能的演示

(1) 电阻元件: 如图4-2-12所示 $u(t)$ 和 $i(t)$ 之间具有相同的相位。

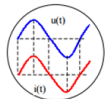
所以试验中合上电键K, 灯泡几乎同时发亮;

➤ 调节频率时, 灯泡亮度也不变, 说明电阻是线性元件, 不随 f 变化。

$$\begin{cases} Z_R = R \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 \end{cases} \iff i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_0 \cos \omega t}{R} = I_0 \cos \omega t$$



(a) 电路模型



(b) 示波器显示 $i(t)$ 和 $u(t)$ 之间波形相位一致

图4-2-12: 交流电路中电阻元件性能

(2) 电容元件

如图4-2-13所示 $i(t)$ 比 $u(t)$ 在相位上超前 $\frac{\pi}{2}$ 。

➤ 试验中合上电键K, 电路中的灯泡亮了, 喇叭也响了;

➤ 在维持电压不变的条件下, 频率愈高, 喇叭音调愈高, 同时灯泡愈亮, 说明频率愈高的交流电愈容易通过电容, 双踪示波器显示

$i(t)$ 比 $u(t)$ 在相位上超前 $\frac{\pi}{2}$ 。

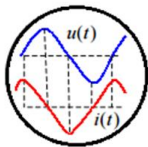
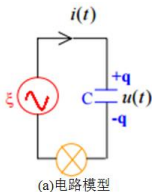


图4-2-13: 交流电路中电容元件性能

下面推导电容器上电压和电容的关系：

$$\begin{cases} q(t) = Q_0 \cos \omega t \\ i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \end{cases}, \text{ 代入 } \begin{cases} i(t) = \frac{dq}{dt} \\ u(t) = \frac{q}{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(t) = -\omega Q_0 \sin \omega t = \omega Q_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ u(t) = \frac{q}{C} = \frac{Q_0}{C} \cos \omega t \end{cases}$$

由比较可得：

$$\begin{cases} Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

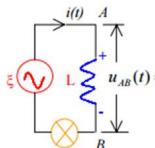
容抗与 ω 成反比；电容元件上 $i(t)$ 比 $u(t)$ 在相位上超前 $\frac{\pi}{2}$ 。

(3) 电感元件

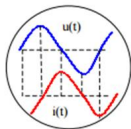
如图4-2-14所示 $i(t)$ 比 $u(t)$ 在相位上滞后 $\frac{\pi}{2}$ 。

➤ 试验中合上电键K,就会观察到与电容元件相反的现象,即在维持电压不变的条件下,灯泡的亮度随频率的增大而减弱。

➤ 表明电感元件的阻抗随频率增加而增大,双踪示波器显示 $u(t)$ 比 $i(t)$ 在相位上超前 $\frac{\pi}{2}$ 。



(a) 电路模型



(b) 双踪示波器显示 $i(t)$ 比 $u(t)$ 在相位上滞后 $\frac{\pi}{2}$

图4-2-14: 交流电路中电感元件性能

下面推导电容器上电压和电容的关系：

$$\begin{cases} \xi_L = -L \frac{di}{dt} \\ u_{AB}(t) = -\xi_L = L \frac{di}{dt} \end{cases} \text{代入} \begin{cases} i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \end{cases} \text{得} \begin{cases} i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \\ u_{AB}(t) = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

由比较可得：

$$\begin{cases} Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \omega L \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

其感抗与频率成正比,其初相表明电感元件上*i(t)*

比*u(t)*在相位上滞后 $\frac{\pi}{2}$ 。

小 结

表4-2-1:元件的定量表示

元件名称	关系式	矢量表示	复数表示
电阻	$\begin{cases} Z_R = R \\ \varphi = 0 \end{cases}$	$R \angle 0$	Re^{j0}
电容	$\begin{cases} Z_C = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$
电感	$\begin{cases} Z_L = \omega L \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\omega L \angle \frac{\pi}{2}$	$\omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$
通件	$\begin{cases} Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_e}{I_e} \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i \end{cases}$	$Z \angle \varphi$	$z e^{j\varphi}$

[3] 基本功能电路: 具有特定功能的电路

信息处理角度来分类为放大、振荡、滤波电路, 变频、调制、解调电路, 存储电路, 与或非电路。

(a) 放大电路: 其特定功能为信号电平调整如图4-2-15所示音频功率放大电路。

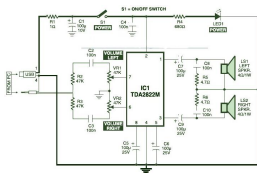


图4-2-15: 电脑音箱放大电路

(b) 振荡电路: 信号产生功能如图4-2-16所示LC正弦信号产生电路。

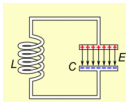


图4-2-16: LC周期电磁振荡电路

(c) 滤波电路：信号选择。

如LC滤波器也称为无源滤波器,是传统的谐波补偿装置。

如图4-2-17(b)所示的LC滤波器之所以称为无源滤波器,顾名思义,就是该装置不需要额外提供电源。

LC滤波器一般是由滤波电容器、电抗器和电阻器适当组合而成,与谐波源并联,除起滤波作用外,还兼顾无功补偿的需要;

LC滤波器按照功能分为LC低通滤波器、LC带通滤波器、高通滤波器、LC全通滤波器、LC带阻滤波器。

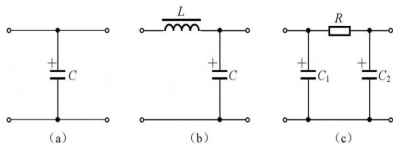


图4-2-17:滤波电路

(d)变频、调制、解调电路:信号变换如图4-2-18所示基极调幅电路,利于传输。

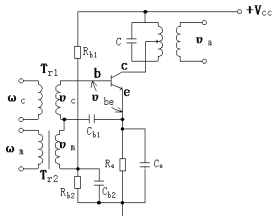
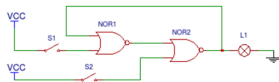
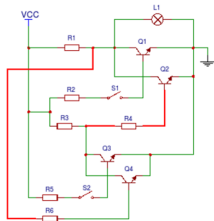


图4-2-18:滤波电路

(e)存储电路:如图4-2-19所示的存储电路用于信号存储。



(a)用门电路符号表示的存储电路



(b)用晶体管电路实现的存储电路

图4-2-19:自实现的存储电路

(f)与或非电路:如图4-2-20所示的用于逻辑处理的数字信号处理

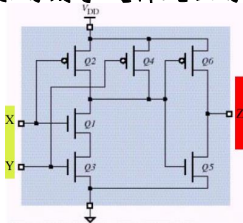


图4-2-20: 用CMOS实现的与或非的电路

从电能处理角度来分类为整流电路、逆变电路、稳压电路和变压电路等。

(g)整流电路:如图4-2-21所示交流能量转换为直流能量

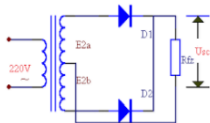


图4-2-21:桥式全波整流电路

(h) 逆变电路:如图4-2-22所示直流能量转换为交流能量。

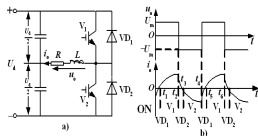


图4-2-20:电压型半桥逆变电路

(i) 稳压电路:如图4-2-23所示有波动的直转恒定值的直流

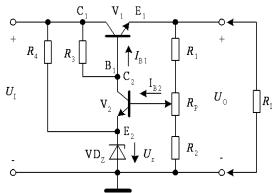


图4-2-23:串联型晶体管稳压器

(j) 变压电路:如图4-2-24所示的交流转交流(AC/AC)或是从一个直流电压转成另外一个直流电压(DC/DC)如图4-2-25所示以及交流转直流(AC/DC)或者直流转交流(DC/AC)。

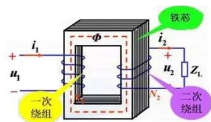


图4-2-24:变压器工作电路

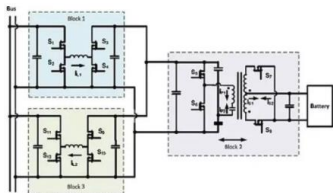


图4-2-25:双向DC/DC转换器拓扑

[4] 基本分析方法

人们根据集总电路的实际情况,总结出三种分析方法。

(1) 三角函数法

求解两个一维同频率的简谐量的叠加问题,设

$$\begin{cases} a_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ a_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\text{则 } a(t) = a_1(t) + a_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{其中 } \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{cases}$$

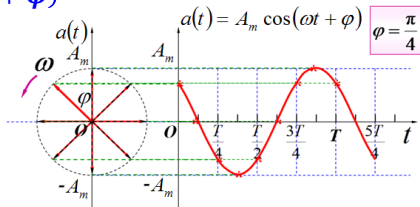
对于三个或三个以上的同频率简谐量,若仍采用三角函数法进行叠加计算,将会变得十分复杂和繁琐。

(2) 矢量图解法

(a) 用矢量图表示交流电:

如图4-2-26所示,与简谐振动的旋转矢量法描述相同,交流电

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$



也可以用**一个平面旋转矢量**来表示。

图4-2-26:旋转矢量法描述

- 对两个同频率、不同相位的交流电的合成,则按矢量叠加的方法,求出合矢量。
- 对于3个以上同频率、不同初位相的交流电的合成,则按上述方法先求两个矢量的合矢量,再求该合矢量与第三个矢量的矢量和,再在x轴上投影得到最后结果。

【例4-2-2】如图4-2-25所示的单极RC相移电路中, $R=100\Omega$,输入讯号频率为300Hz,要求输出与输入讯号间有的相位差 $\frac{\pi}{4}$,即相移 $\frac{\pi}{4}$,试问电容C应取多大?

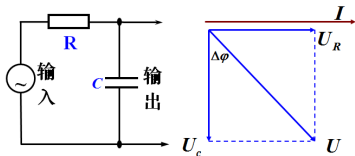


图4-2-25

【解】在RC串联电路中,各元件上电流的瞬时值*i*都是相同的,可设其初相位 $\Delta\varphi$,用水平矢量*I*表示,如图所示。显然,矢量 U_R 与*I*平行, U_C 垂直*I*向下。

该电路输入电压是RC串联电路两端总电压 $u(t)$,而输出电压是电容电压 U_C 。

由矢量图可得到,二者之间相位差为:

$$\Delta\varphi = -\arctan \frac{U_R}{U_C} = -\arctan \frac{R}{Z_C} = -\arctan(\omega RC)$$

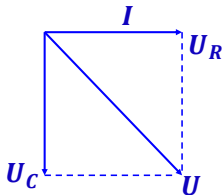


图4-2-26:题4-2-2用图

按题意要求 $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{4}$ 即 $\tan\Delta\varphi = -1$ 式可得:

$$C = -\frac{1}{\omega R} \tan\Delta\varphi = \frac{1}{2\pi f R} = 5.3(\mu\text{F})$$

由此可见,恰当选择电容和电阻数值,可利用RC相移电路,使电压和电流之间相位 φ 改变一定数值 $\Delta\varphi$ 。实际中常采用多级相移电路。

(b) R、L、C 串并联电路

(1) RC 串联

参见图4-2-27所示,得

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{U_C}{U_R}\right) \end{array} \right.$$

$$\text{阻抗: } \left\{ \begin{array}{l} Z_R = R \\ Z_C = \frac{1}{\omega C} \end{array} \right.$$

$$\text{电压: } \left\{ \begin{array}{l} U_R = IR \\ U_C = \frac{I}{\omega C} \end{array} \right.$$

$$\text{位相: } \tan\varphi = \frac{U_C}{U_R} = -\frac{1}{\omega RC}$$

可知: 电流超前, 电压滞后。

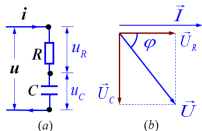


图4-2-27:RC 串联

$$\left\{ \begin{array}{l} U = I \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \varphi = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \end{array} \right.$$

2022/1/6

(2) RL 串联

参见图4-2-28所示,得

$$\begin{cases} U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{U_L}{U_R}\right) \end{cases}$$

$$\text{阻抗: } \begin{cases} Z_R = R \\ Z_C = \frac{1}{\omega C} \end{cases}$$

$$\text{电压: } \begin{cases} U_R = IR \\ U_L = I\omega L \end{cases}$$

电压超前, 电流滞后

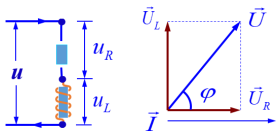


图4-2-28: RL 串联

(3) RC 并联:

参见图4-2-29(a), 由图4-2-29(b):

$$\begin{cases} I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{I_L}{I_R}\right) \end{cases}$$

电流超前, 电压滞后

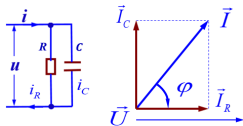


图4-2-29: RC 并联

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$$

$$Z = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$$

$$\varphi = -\arctan \omega RC$$

(4)RL 并联:

参见图4-2-30(a)。

$$\left\{ \begin{array}{l} I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2} \\ Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right) \end{array} \right.$$

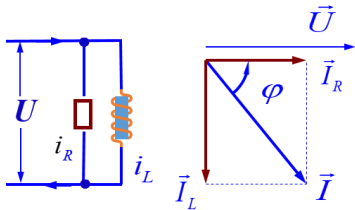


图4-2-30:RL 并联

电压超前, 电流滞后

(5) RLC 串联电路

RLC 电路参见图4-2-31(a)。由图4-2-31(b)

$$\begin{cases} U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \varphi = \arctan \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{cases}$$

IF $Z_L > Z_C \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$, then U in advance I

IF $Z_L < Z_C \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$, then U hysteresis I

IF $Z_L = Z_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$, then U synchronize I

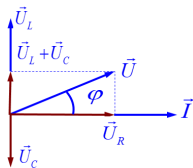
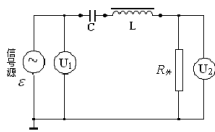


图4-2-31: RLC 串联电路

补偿作用

[I] 串联谐振

当电路中的感抗与容抗相等时,总阻抗最小且等于电阻 R ,电流达到最大值,这种现象称为串联谐振。

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

串联谐振的条件: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

电源电动势的频率 f_0 等于电路的固有频率 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

串联谐振的特点:

(1) $Z = R$,整个电路呈纯电阻性;

(2)电容或电感两端的电压达到最大值,且等于电源电动势的 Q 倍,称为电路的品质因素;

$$U_L = Z_L I = \omega_0 L \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot L \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \varepsilon$$

$$U_C = Z_C I = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\sqrt{LC}}{C} \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \varepsilon$$

定义 $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ 为电路的品质因素, 所以

$$U_L = U_C = Q\varepsilon$$

- 由于串联谐振时电容或电感两端电压比电源电动势大 Q 倍, 故串联谐振也称为电压谐振。
- 串联共振在无线电技术中有着广泛的应用, 如放大信号、选择电台等。

➤ Q 值是电路的一个十分重要的参数,其表现:

- ① Q 值表示串联电路发生谐振时电容或电感两端电压比电源电动势增大的倍数;
- ② Q 值表示谐振电路中储存的能量和每个周期内消耗能量之比的 2π 倍;

➤ 电容和电感储存的电磁能用 W_s 表示,则

$$W_s = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}LI^2 \cos^2 \omega t + \frac{I^2}{2} \frac{C}{\omega^2 C^2} \cos^2 \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$
$$= \frac{1}{2}I^2 \left[L \cos^2 \omega t + \frac{1}{\omega^2 C} \sin^2 \omega t \right]$$

$$\therefore \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \therefore W_S = \frac{1}{2} LI^2 = LI_e^2$$

而电阻在一周期 T 内消耗的能量 $W_R = RI_e^2 T$

$$\therefore \frac{W_S}{W_R} = \frac{L}{RT} = \frac{Q}{2\pi} \Rightarrow Q = 2\pi \frac{W_S}{W_R}$$

③ Q 值越大,电路的选择性越好。

如图4-2-32所示,电路发生谐振,电流达到最大值,称为谐振峰。

Q 值越大,谐振曲线越尖锐,谐振曲线越尖锐的电路,频率的选择性越好。

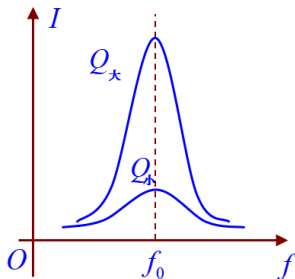


图4-2-32: RLC 串联谐振

【应用】：

[1] 直流电源滤波器(参见图4-2-33)。

已知： $U = 220\text{ V}$ ， $f = 50\text{ Hz}$ ， $L = 16\text{ H}$ ， $C = 1000\text{ }\mu\text{F}$

$$\text{对 } 50\text{Hz} \begin{cases} Z_L = 2\pi fL = 1600\pi = 5.02(\text{k}\Omega) \\ Z_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{10^6}{10^5\pi} = 3.18(\Omega) \end{cases}$$

$$\text{若 } f=100\text{Hz}, \text{ 则 } \begin{cases} Z_L = 10.04(\text{k}\Omega) \\ Z_C = 1.59(\Omega) \end{cases}$$

$$\text{若为直流, 则 } \begin{cases} Z_L = 0 \\ Z_C = \infty \end{cases}$$

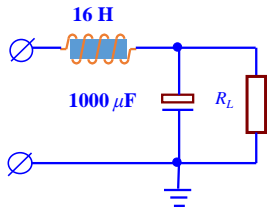


图4-2-33: 直流电源滤波

- ① 直流电压与电流都在负载 R_L 上；
- ② 交流电压降在 L 上(降压)；
- ③ 交流电流主要通过 C (旁路)。

①低通滤波器

②高通滤波器

③带通滤波器

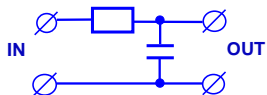


图4-2-34: 低通

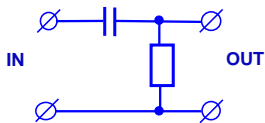


图4-2-35: 高通

[2]移相:

输入电压: U 输出电压: U_C

U_C 比 U 滞后位相 $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = -\arctan \frac{U_R}{U_C} = -\arctan 2\pi fRC$$

$$RC = -\frac{1}{2\pi f} \tan \Delta\varphi$$

$\tau = RC$ ——时间常数

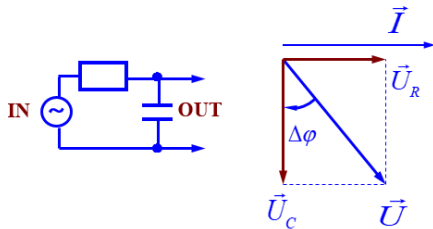


图4-2-36: 移相器

[3] 旁路或耦合电容

如图4-2-37所示, $C_1 \gg C_2$, C_1 可等效为 C_2 与一电感 L_1 串联,

低频时, $\omega_L L_1$

$$\frac{1}{\omega_L C_1} \ll \frac{1}{\omega_L C_2}$$

即 C_1 起通路作用。

高频时, $\omega_H L_1$ 不可以忽略,

$$\frac{1}{\omega_H C_2} \text{很小}$$

即 C_2 起通路作用(补偿 L_1)

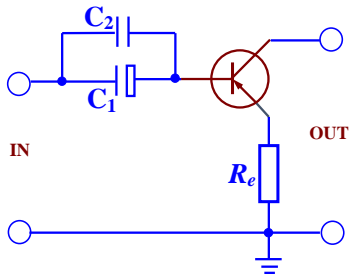


图4-2-37: 耦合电容

频带增宽

(3) 复数解法

(A) 简谐量与复数量对应表示

$$\text{简谐量: } \begin{cases} a_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ a_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad \text{复数量: } \begin{cases} \tilde{A}_1(t) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \\ \tilde{A}_2(t) = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} \end{cases}$$

$$\text{则求和} \begin{cases} a(t) = a_1(t) + a_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ \tilde{A}(t) = \tilde{A}_1(t) + \tilde{A}_2(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

物理量 \ 种类	复数量	简谐量
	$\tilde{A}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$	$a(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
$A = \tilde{A}(t) $	模	振幅、峰值
$\omega t + \varphi \quad \varphi$	主辐角 $\arg \tilde{A}$	位相、初位相

表4-1: 简谐量与复数量的对应关系表

【例4-2-3】已知 $\begin{cases} a_1(t) = 3\cos(\omega t) \\ a_2(t) = 4\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$, 用复数解法求 $a(t)$?

【解】 $\begin{cases} a_1(t) = 3\cos(\omega t) \\ a_2(t) = 4\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{A}_1(t) = 3e^{j(\omega t)} \\ \tilde{A}_2(t) = 4e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \end{cases}$

其中 $\tilde{A}_2(t) = 4je^{j(\omega t)}$, 则 $\tilde{A}(t) = \tilde{A}_1(t) + \tilde{A}_2(t) = (3 + 4j)e^{j(\omega t)}$ 。

模: $A = |\tilde{A}| = |3 + 4j| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

初相: $t=0$ 时, $\tilde{A} = 3 + 4j$, 则 $\varphi = \arctan \frac{4}{3} \approx 53^\circ 9' \approx 0.93(\text{rad})$

所以 $\begin{cases} a(t) = a_1(t) + a_2(t) = 5\cos(\omega t + 0.93) \\ \tilde{A}(t) = \tilde{A}_1(t) + \tilde{A}_2(t) = 5e^{j(\omega t + 0.93)} \end{cases}$

(B) 简谐量与复数量对应

➤ 电压: $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \Leftrightarrow \tilde{U}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$

➤ 电流: $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \Leftrightarrow \tilde{I}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$

➤ 阻抗:
$$\begin{cases} Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = Z e^{j\varphi}$$

伏安特性形同直流:

$$\begin{cases} \tilde{U} = \tilde{I} \tilde{Z} \\ \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}} \\ \tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} \end{cases}$$

2022/1/6

表4-2: 阻抗的简谐量与复数量的对应关系表

种类	复数量	简谐量
物理量	$\tilde{A}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$	$a(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
电阻	$\tilde{Z}_R = R$	$Z_R = R, \varphi = 0$
电容	$\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$	$Z_C = \frac{1}{\omega C}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$
电感	$\tilde{Z}_L = j\omega L$	$Z_L = \omega L, \varphi = \frac{\pi}{2}$

(C) 复阻抗的串联和并联

串联电路:如图4-2-38所示

$$\begin{cases} U = \sum_i U_i \\ \tilde{I}_i = \tilde{I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{Z} = \sum_i \tilde{Z}_i$$

并联电路:如图4-2-39所示

$$\begin{cases} I = \sum_i I_i \\ \tilde{U}_i = \tilde{U} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tilde{Z}} = \sum_i \frac{1}{\tilde{Z}_i}$$

【例4-2-4】如图4-2-40所示,求该RLC电路的位相与总阻抗。

【解】 $\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$ $\tilde{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$

$$Z = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L}{R} - \arctan \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}$$

讨论:复数商的模 = 模的商;复数商的辐角 = 辐角差。

2022/1/6

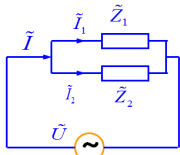
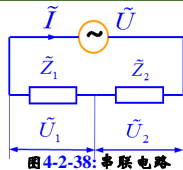


图4-2-39: 并联电路

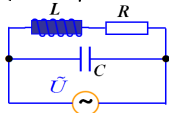


图4-2-40: RLC 电路

(D) 集总电路基尔霍夫定律

(a) 集总电路瞬时参量方程组

节点方程: $\sum i(t) = 0$; 回路方程: $\sum u(t) = 0$

对各段支路标定电流 i 的方向:

$i(t) > 0$, 电流与标定方向同向; $i(t) < 0$, 电流与标定方向反向。

电容器: $i(t) = \frac{dq}{dt}$, 电流流入的极板电荷写作 $+q(t)$; 电流流出的

极板电荷写作 $-q(t)$ 。

对各闭合回路指定绕行方向:

$u(t) > 0$, 沿绕行方向电势下降; $u(t) < 0$, 沿绕行方向电势上升。

电源: 标定电动势与绕行方向同向, $e(t) < 0$; 标定电动势与绕行方向反向, $e(t) > 0$ 。

(b) 复数形式的基尔霍夫方程组

节点方程: $\sum(\pm \tilde{I}) = 0$; 正负号规则同上。

回路方程: $\sum(\pm \tilde{U}) = 0 \Rightarrow \sum(\pm \tilde{I}\tilde{Z}) + \sum(\pm \tilde{\mathcal{E}}) = 0$

【例4-2-5】如图4-2-41所示,求该电路网络的输入与输出的电压比。

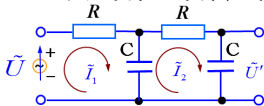


图4-2-41: 电路网络

【解】指定绕行方向,设定复电流,则回路①、②的回路方程依次为

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 R + \frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2}{j\omega C} - \tilde{U} = 0 & \text{可解得 } \tilde{I}_2, \text{ 从而 } \tilde{U}' = \frac{\tilde{I}_2}{j\omega C} \\ \tilde{I}_2 R + \frac{\tilde{I}_2}{j\omega C} + \frac{\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1}{j\omega C} = 0 & \text{则可得 } \frac{\tilde{U}'}{\tilde{U}} = \frac{1}{[1 - (\omega CR)^2] + j(3\omega RC)} \end{cases}$$

电压有效值之比(或电压峰值之比)和位相差为 $\begin{cases} \left| \frac{\tilde{U}'}{\tilde{U}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 7(\omega CR)^2 + (\omega CR)^4}} \\ \Delta\varphi = \varphi_{u'} - \varphi_u = \arg \frac{\tilde{U}'}{\tilde{U}} \end{cases}$

(II) LC 振荡电路

用复数法计算交流并联电路:

如图4-2-91 电源电动势: $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi)$

计算总电流 I 、分支电流 I_1 、 I_2 :

① 求总电流 I :

等效阻抗为

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_C} + \frac{1}{\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] = A e^{j\varphi}$$

$$\text{式中} \begin{cases} A = \left\{ \left[\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \varphi = \arctan \frac{\omega C [R^2 + (\omega L)^2] - \omega L}{R} \end{cases}$$

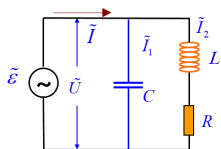


图4-2-91: RLC 并联电路

利用复数形式的欧姆定律有 $\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}} = A\varepsilon_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

实际电流取实部为 $I = A\varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

② 计算分电流 I_1 、 I_2 :

$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{Z}_C} = j\omega C\varepsilon_m e^{j\omega t} = j\omega C\varepsilon_m e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

取实部得 $I_1 = \omega C\varepsilon_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

即电流 I_1 的位相比电源电动势超前 $\frac{\pi}{2}$ 。

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2 &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{Z}_{LR}} = \frac{\varepsilon_m e^{j\omega t}}{R + j\omega L} \\ &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)} = I_m e^{j(\omega t - \varphi)}\end{aligned}$$

其中 $\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$ 。

一般情况下 R 仅是 L 上的电阻, 故 $\omega L \gg R$ 则 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。

$$I_2 = I_{m2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

即电流 I_2 的位相比电源电动势落后 $\frac{\pi}{2}$ 。

③ 讨论:

由 $\tilde{Z} = \frac{1}{A} e^{-j\varphi}$ 得

$$Z_m = \frac{1}{A} = \left\{ \frac{R^2}{[R^2 + (\omega L)^2]^2} + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{当 } \omega C = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$$

则电路的阻抗达到最大值。

因一般情况下, R 只是电感 L 上的电阻, $R \ll \omega L$, 故可以略去 $\frac{CR^2}{L}$ 项,

则 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 。所以当电源电动势的频率 f 等于电路的固有频率 f_0 时,

Z_m 达到最大值, 总电流 I 达到最小值, 叫做并联谐振。

➤ 并联谐振具有如下特点：

(a) 回路的总阻抗达到最大值

$$Z_{max} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R} \xrightarrow{R \ll \omega L} Z_{max} = \frac{L}{RC}$$

(b) 回路的总电流达到最小值

$$I_e = A\varepsilon_e = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \varepsilon_e \xrightarrow{R \ll \omega L} I_e = \frac{RC}{L} \varepsilon_e$$

(c) 分支电流 I_{e1} 、 I_{e2} 达到最大值，且为总电流的 Q 倍，而 I_1 、 I_2 的位相差为 180° ，所以并联谐振又称电流谐振。

$$I_{e1} = \frac{\varepsilon_e}{Z_c} = \omega_0 C \varepsilon_e = \omega_0 C \frac{L}{RC} I_e = \frac{\omega_0 L}{R} I_e = Q I_e$$

式中 $\frac{\omega_0 L}{R}$ 称为品质因素。当 $R \ll \omega L$ 时, $Q \gg 1$, 所以分电流的大小比总电流大 Q 倍。

同样 $I_{e2} = Q I_e$ 。

(d) 总电流和电源电动势的位相差为零, 即电流和电压同位相, 电路呈电阻性。

$$Z_{max} \approx Q^2 R \Rightarrow I_{min} \approx \frac{U}{Q^2 R}$$

思考: 既然分支电流 I_1 、 I_2 比总电流大 Q 倍, 为什么总电流却很小?

(3) 电压分配---- Q 值的意义(3)

谐振时, $U = U_R = IR$, 电压分配关系如图4-2-94.

$$\begin{cases} \frac{U_R}{U} = \frac{Z_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q \\ \frac{U_C}{U} = \frac{Z_C}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = Q \end{cases}$$

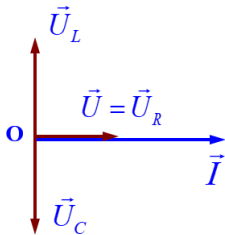


图4-2-107:谐振电压分配

Q 值表征电抗与电阻上电压分配的比率。

(II) LC 振荡电路

用复数法计算交流并联电路:

如图4-2-91 电源电动势: $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi)$

计算总电流 I 、分支电流 I_1 、 I_2 :

① 求总电流 I :

等效阻抗为

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_C} + \frac{1}{\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] = A e^{j\varphi}$$

$$\text{式中} \begin{cases} A = \left\{ \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \varphi = \arctan \frac{\omega C [R^2 + (\omega L)^2] - \omega L}{R} \end{cases}$$

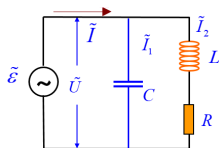


图4-2-91:RLC 并联电路

利用复数形式的欧姆定律有： $\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{Z}} = A\varepsilon_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

实际电流取实部为

实际电流取实部,为

$$I = A\varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

② 计算分电流 I_1 、 I_2 :

$$\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{Z}_C} = j\omega C\varepsilon_m e^{j\omega t} = j\omega C\varepsilon_m e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

取实部得 $I_1 = \omega C\varepsilon_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

即电流 I_1 的位相比电源电动势超前 $\frac{\pi}{2}$ 。

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2 &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{Z}_{LR}} = \frac{\varepsilon_m e^{j\omega t}}{R + j\omega L} \\ &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)} = I_m e^{j(\omega t - \varphi)}\end{aligned}$$

其中 $\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$ 。

一般情况下 R 仅是 L 上的电阻, 故 $\omega L \gg R$ 则 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。

$$I_2 = I_{m2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

即电流 I_2 的位相比电源电动势落后 $\frac{\pi}{2}$ 。

③ 讨论:

由 $\tilde{Z} = \frac{1}{A} e^{-j\varphi}$ 得

$$Z_m = \frac{1}{A} = \left\{ \frac{R^2}{[R^2 + (\omega L)^2]^2} + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{当 } \omega C = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$$

则电路的阻抗达到最大值。

因一般情况下, R 只是电感 L 上的电阻, $R \ll \omega L$, 故可以略去 $\frac{CR^2}{L}$ 项,

则 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 。所以当电源电动势的频率 f 等于电路的固有频率 f_0 时,

Z_m 达到最大值, 总电流 I 达到最小值, 叫做并联谐振。

➤ 并联谐振具有如下特点:

(a) 回路的总阻抗达到最大值

$$Z_{max} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R} \xrightarrow{R \ll \omega L} Z_{max} = \frac{L}{RC}$$

(b) 回路的总电流达到最小值

$$I_e = A\varepsilon_e = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \varepsilon_e \xrightarrow{R \ll \omega L} I_e = \frac{RC}{L} \varepsilon_e$$

(c) 分支电流 I_{e1} 、 I_{e2} 达到最大值, 且为总电流的 Q 倍, 而 I_1 、 I_2 的位相差为 180° , 所以并联谐振又称电流谐振。

$$I_{e1} = \frac{\varepsilon_e}{Z_c} = \omega_0 C \varepsilon_e = \omega_0 C \frac{L}{RC} I_e = \frac{\omega_0 L}{R} I_e = Q I_e$$

式中 $\frac{\omega_0 L}{R}$ 称为品质因素。当 $R \ll \omega L$ 时, $Q \gg 1$, 所以分电流的大小比总电流大 Q 倍。

同样 $I_{e2} = Q I_e$ 。

(d) 总电流和电源电动势的位相差为零, 即电流和电压同位相, 电路呈电阻性。

$$Z_{max} \approx Q^2 R \Rightarrow I_{min} \approx \frac{U}{Q^2 R}$$

思考: 既然分支电流 I_1 、 I_2 比总电流大 Q 倍, 为什么总电流却很小?

(III) 交流电的功率因素的提高

[1] 功率及功率因数

(1) 瞬时功率: $P(t) = u(t)i(t)$

$$\text{设} \begin{cases} i(t) = I_m \cos \omega t \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\text{则 } P(t) = U_m I_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \varphi)$$

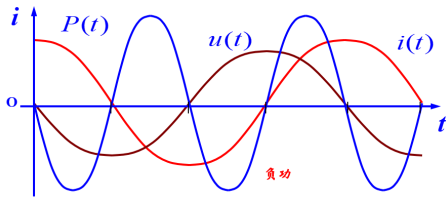


图4-2-101: 电流、电压与功率曲线

(2) 平均功率:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi$$

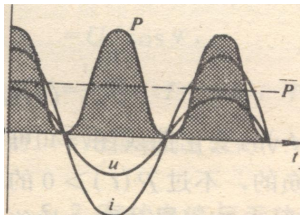
- ① 纯电阻电路 $\varphi = 0$, $\bar{P} = \frac{1}{2} U_m I_m$ 或 $\bar{P} = UI = I^2 R$
- ② 纯电感或纯电容 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$, $\bar{P} = 0$
- ③ 一般 RLC 电路 $\bar{P} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = UI \cos\varphi$

(3) 功率因数 $\cos\varphi$

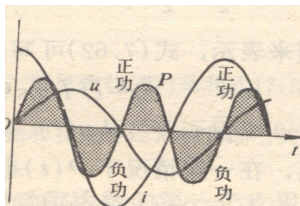
两端网络的功率因数

元件、器件
电路

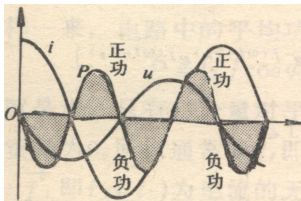
设计时应提高功率因数,或在电路中加补偿元器件。



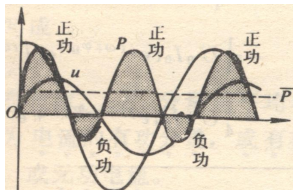
电阻元件上的功率



电容元件上的功率



电感元件上的功率



任意二端网络上的功率

图4-2-102:

[2]有功电流与无功电流

如图4-2-103所示, \vec{I} 与 \vec{U} 夹角

$$\begin{cases} I_{\parallel} = I \cos \varphi \\ I_{\perp} = I \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{\parallel}(t) = I_m \cos \varphi \cos \omega t \\ i_{\perp}(t) = I_m \cos \varphi \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases} \begin{cases} \text{容性 “+”} \\ \text{感性 “-”} \end{cases}$$

所以 $\bar{P} = UI \cos \varphi = UI_{\parallel}$

$i_{\parallel}(t)$ 有功电流, $i_{\perp}(t)$ 无功电流。

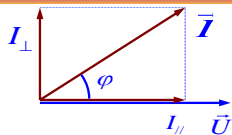


图4-2-103:有功与无功电流

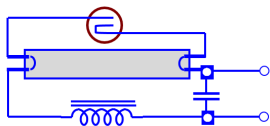


图4-2-104:日光灯电路

【讨论】：无功电流无益有害

(A) 无功电流对用电器**无贡献**；

(B) 电路中总电流产生焦耳热, 无功电流**增加铜耗**；

例如: 日光灯电路, 见图4-2-104

镇流器为电感器件, 一般 $\cos \varphi \approx 0.4$

正规的安装应加接**补偿电容**。

[3] 视在功率与无功功率

视在功率 $S = UI$ (VA, kVA)

有功功率 $\bar{P} = S \cos\varphi$ (W, kW)

无功功率 $P_{\text{无功}} = S \sin\varphi$ (Var, 乏尔)

$$\left. \begin{array}{l} \text{视在功率 } S = UI \text{ (VA, kVA)} \\ \text{有功功率 } \bar{P} = S \cos\varphi \text{ (W, kW)} \\ \text{无功功率 } P_{\text{无功}} = S \sin\varphi \text{ (Var, 乏尔)} \end{array} \right\} S = \sqrt{P_{\text{有功}}^2 + P_{\text{无功}}^2}$$

【讨论】：

A、完成相同的工作， $\cos\varphi$ 越小；

B、无功能量损耗，用无功电度表计量，单位：Var · hour

[4]有功电阻与电抗

$$(a) \text{复阻抗 } \tilde{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$R = Z\cos\varphi \text{——有功电阻}$$

$$X = Z\sin\varphi \text{——电抗}$$

$$\text{例如 } \tilde{Z} = R - \frac{j}{\omega C} \left\{ \begin{array}{l} R(\text{电阻}) \\ -\frac{1}{\omega C} < 0(\text{容抗}) \end{array} \right.$$

$$(b) \tilde{Z} = R + j\omega L \left\{ \begin{array}{l} \text{电阻 } R \\ \text{电抗 } \omega L > 0 \text{ 感抗} \end{array} \right.$$

$$\text{可见} \left\{ \begin{array}{l} P_{\text{有功}} = UI\cos\varphi = I^2 Z\cos\varphi = I^2 R \\ P_{\text{无功}} = UI\sin\varphi = I^2 Z\sin\varphi = I^2 X \end{array} \right.$$

【例4-2-8】一个110V、50Hz的交流电源,向一负载 Z 供电330W,负载的功率因数为0.60,电流的相位落后于电压。(1)若在电路中串入一个电容 C ,如图,将功率因数提高到1,试求 C 的值;(2)这时电源供给的功率是多少?

解 (1)因电流的相位落后,故 Z 是
电感性的阻抗,设 $\tilde{Z} = R + jX$

$$\text{则 } Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\text{由 } \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} \Rightarrow X = \frac{4}{3}R$$

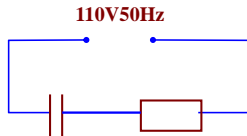


图4-2-105: 例4-2-8电路

$$\therefore P = IU \cos \varphi = I^2 R$$

$$\therefore R = \frac{(U \cos \varphi)^2}{P} = \frac{(110 \times 0.60)^2}{330} = 13.2 (\Omega)$$

$$X = \frac{4}{3} R = 17.6 (\Omega)$$

串入电容 C 后,使功率因数为1,即 $\frac{1}{\omega C} = X$

$$C = \frac{1}{\omega X} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 17.6} = 1.8 \times 10^{-4} (F)$$

(2)这时电源供给的功率为

$$P' = I^2 R = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{13.2} = 9.2 \times 10^2 (W)$$

[5] 品质因数(Q 值)

(A) 品质因数(Q 值)

$$Q = \frac{P_{\text{无功}}}{P_{\text{有功}}} \Rightarrow Q = \frac{X}{R}$$

耗散因数 $P_{\text{有功}}$ (损耗) 小, Q 值大。

(B) 损耗角 δ 和耗散因数 $\tan \delta$

$$\text{损耗角 } \tan \delta = \frac{P_{\text{有功}}}{P_{\text{无功}}} \Rightarrow \tan \delta = \frac{R}{X}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{\pi}{2} - \varphi \\ \tan \delta, Q \text{ 互为倒数} \end{array} \right.$$

(2) 频率选择性---Q 值的意义(2)

频率选择性与谐振峰锐度或通频带宽度有关

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad Z = Z_m = R$$

设频率 f_0 偏离了 δf , 且 $\delta f \ll f_0$, 则

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + \left[2\pi L(f_0 + \delta f) - \frac{1}{2\pi C(f_0 + \delta f)}\right]^2} \end{aligned}$$

由 $\delta f \ll f_0$, 可利用近似公式

$$\frac{1}{f_0 + \delta f} = \frac{1}{f_0} \left(1 + \frac{\delta f}{f_0}\right)^{-1} \approx \frac{1}{f_0} \left(1 - \frac{\delta f}{f_0}\right)$$

该阻抗表达式变成下页的形式

接收机的灵敏度与选择性。

通频带宽度为 $0.707I_m$ 处宽

$$Z \approx \sqrt{R^2 + \left[\left(2\pi f_0 L - \frac{1}{2\pi f_0 C} \right) + \left(2\pi f_0 L + \frac{1}{2\pi f_0 C} \right) \frac{\delta f}{f_0} \right]^2}$$

谐振时, $2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C}$, 所以

$$Z = R \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi f_0 L}{R} \cdot \frac{\delta f}{f_0} \right)^2} = R \sqrt{1 + \left(2 \frac{\omega_0 L}{R} \cdot \frac{\delta f}{f_0} \right)^2} = R \sqrt{1 + \left(2Q \cdot \frac{\delta f}{f_0} \right)^2}$$

$$2Q \cdot \frac{\delta f}{f_0} = \pm 1, \quad Z = \sqrt{2}R, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

通频带半宽度 $\delta f = \pm \frac{f_0}{2Q}$

通频带宽度 $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$

Q 值越大, 选择性越好。

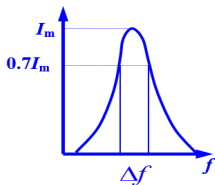


图4-2-106: 通频带宽

(3) 电压分配---- Q 值的意义(3)

谐振时, $U = U_R = IR$, 电压分配关系示于图4-2-94。

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_L}{U} &= \frac{Z_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \\ \frac{U_C}{U} &= \frac{Z_C}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \end{aligned} \right\} = Q$$

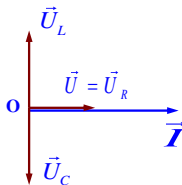


图4-2-107:谐振电压分配

Q 值表征电抗与电阻上电压分配的比率。

(4) 阻尼振荡与 Q 值的意义(4)

$$\text{暂态过程 } I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

LCR 串联电路

$$\text{时间常数 } \tau = \frac{2L}{R}$$

$$\text{或 } \tau = \frac{2}{\omega_0^2 RC}$$

$$\text{回路品质 } Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$\text{或 } Q = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$\text{则 } \tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{Q}{\pi f_0} = \frac{QT}{\pi}$$

Q 值越大, 振幅衰减越慢。

4-2-4: 集总电路的应用

[0] 引言

[1] RLC 应用电路

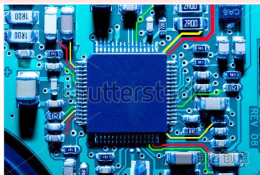
[2] 交流电桥电路

[3] 变压器电路

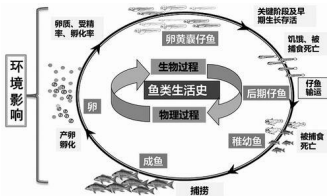
[4] 三相交流电路

[5] 三相感应电机

0.引言



集总电路应用



RLC应用电路

交流电桥电路

变压器电路

三相交流电路

三相感应电机

引言

基本内容 基本体系	《电路理论》 简称为“路”	《电磁场理论》 简称为“场”
基本方法	通过元件参数集中离散分析	通过闭合曲面、环路积分逐点考察
基本模型	电源、负载、导线、开关	源量、场量、场线
基本元素	电阻、电容、电感	电荷、电流、磁链数
基本参量	电压、电流、电动势	电场强度、磁感强度
基本定律	欧姆定律、基尔霍夫定律	高斯定理、法拉第电磁感应定律、电流连续性原理、环路定理
基本方程	直流:代数方程组 似稳:常微分方程组	麦克斯韦方程组

(1)“场”与“路”物理量的关系

“路”	“场”	两者关系
u	\vec{E}	$u = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$
i	\vec{j} or \vec{H}	$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ or $i = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$
q	ρ or \vec{D}	$q = \iiint_V \rho dV$ or $q = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$
Φ	\vec{B}	$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
ε	\vec{K}	$\varepsilon = \oint_L \vec{K} \cdot d\vec{l}$
P	\vec{S}	$P = \iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$
U_m	\vec{H}	$U_m = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$

(2)“场”与“路”内在联系



图4-2-107:抽象的星空模型

(1) 从“场”到“路”物理抽象

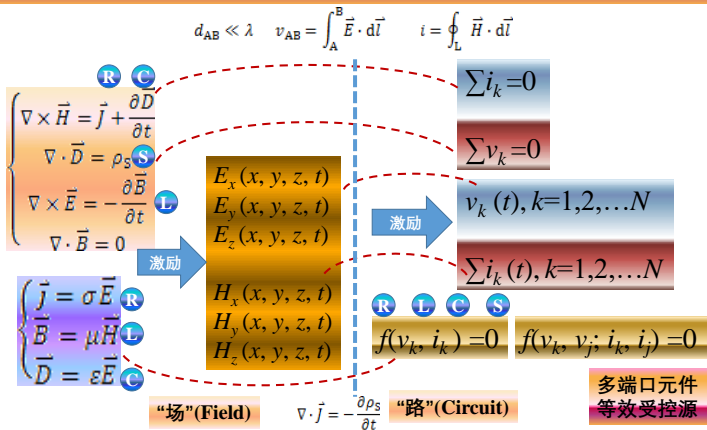
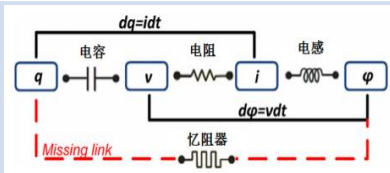


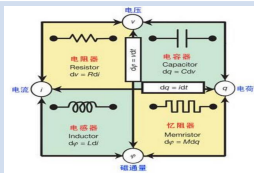
图4-2-108: 从“场”到“路”的物理抽象

[A] 电路元件的物理抽象

电路元件的抽象与演绎



四个基本双端电路元件



电路元件关系

第四类元件演绎

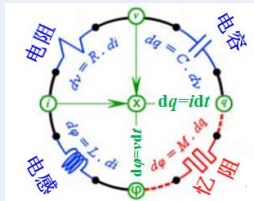
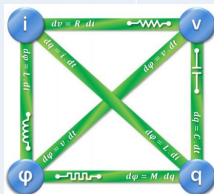
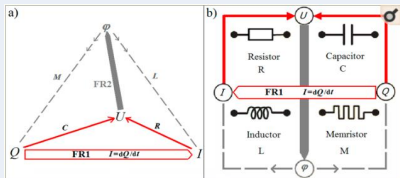


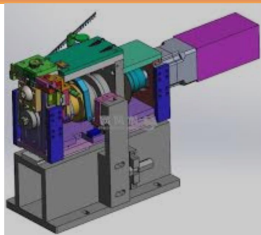
表1: 电路物理抽象中四个关系元件

元件	特性(单位)	微分方程
电阻	阻性($A \cdot V^{-1}, \text{ohm}^{-1}, S$), $G = \sigma S/L$	$R = dv/di$
电容	容性($C \cdot V^{-1}, F$), $C = \epsilon S/L$	$C = dq/dv$
电感	感性($Wb \cdot A^{-1}, H$), $L = \mu N^2 S/L$	$L = d\phi/di$
忆阻器	忆阻($Wb \cdot C^{-1}, \Omega$), $M_R(q) = R_{OFF} \left(1 - \frac{R_{ON}}{\beta} q(t) \right)$	$M_R = d\phi/dq$
备注: S 、 L 为特征几何量; σ 、 ϵ 、 μ 为介质特征常数量。		

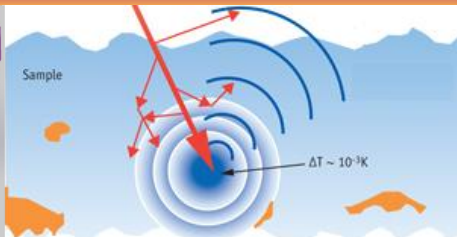
[B]关于“第四类”关系

序号	R (线性)	M_R (非线性)
[1]	➤ 电流热效应	➤ 电流磁效应
[2]	➤ $R(q)$ 与 q 无关即 $\varphi = Rq$	➤ $R(q)$ 与 q 有关 即 $\varphi = R(q)q$
[3]	$v = \frac{d\varphi}{dt} = R \frac{dq}{dt} = Ri$	$v = \frac{d\varphi}{dt} = \left[q \frac{dR(q)}{dq} + R(q) \right] \frac{dq}{dt}$ $= \left[q \frac{dR(q)}{dq} + R(q) \right] i$
[4]	➤ 纯电阻态; ➤ 特殊情况。	➤ 具备记忆功能时变的忆阻态; ➤ 一般情况。

(2)“场”“路”等效及相互作用



(a)外部激励电路调制电磁波装置



(b)电磁场与生物组织相互作用

图4-2-109:电磁场与物质如生物组织相互作用的整体

- 最一般意义上可以说“场”与“路”相互作用是可等效的；
- 外部的激励电路调制电磁波向物质(如生物组织)内部辐射激发理想点源,该体系(天线加载模型)可用理想矩阵型欧姆定律表述。

[A]“场”“路”等效

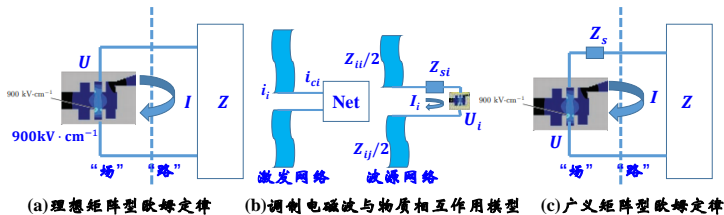


图4-2-110: 矩阵型欧姆定律

➤波源网络模型假定:

- 波源网络是点馈型的调制波源将不影响原来第 i 段的自阻抗 Z_{ii} 及其它各段的互阻抗 Z_{ij} ;
- 调制波与激发物质(如生物组织等效为激发网络)相互作用将保持电流连续性即 $i_i = i_{ci}$;
- 根据戴维南定理,任何线性单端口均可等效电压源 U_i 和内阻 Z_{si} 串联;用图5(b)表示出来。

两点说明:

(1)如图4-2-110(a)、(b)、(c)所示的分别说明:

序号	图4-2-110(a)	图4-2-110(b)	图4-2-110(c)
[1]	<p>➤一般意义上Z可以不是对角型,也即物质如生物组织内部的各激发点允许有相互耦合。</p>	<p>➤波源阵列网络当$Z_{st} = 0$的特殊情况,问题退化为理想激励源即理想单元欧姆定律。</p>	<p>➤左半部激励表示一般“场”问题;而右半部Z则反映“路”问题;中间联系的电流I遵循电流连续性原理。</p>
[2]	<p>➤理想矩阵型欧姆定律是在$Z_s = 0$情况下广义矩阵型欧姆定律$ZI = U - Z_s I$退化特例。</p>	<p>➤这里所提出一般“路”模型只需用$U_i - Z_{st} I_t$代替原来理想模型的U_i,其余一切相同。</p>	<p>➤广义矩阵型欧姆定律$ZI = U - Z_s I$; Z_s称为“路”内阻矩阵;其给出普遍情况下“场”与“路”的等效。</p>

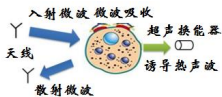
(2)如图4-2-110(c)的广义矩阵型欧姆定律重点说明:

序号	波源网络	整体网络
【1】	<p>➤等效波源网络若把激励为0各单元看作为加载段,而把Z_{ii}为0的各单元看作是理想电源,则广义矩阵型欧姆定律把各激励和加载情况统一起来。</p>	<p>➤简而言之,波源网络与激发网络皆可抽象为等效“路”模型。</p>
【2】	<p>➤等效波源网络可把“场”及其加载段抽象为“路”;</p> <p>➤调制波以“场”形式向物质入射和散射,激发其各种效应,其同样以“路”抽象来表征。</p>	<p>➤概而言之,以广义矩阵型欧姆定律将“场”与“路”的相互作用进行统一。</p>

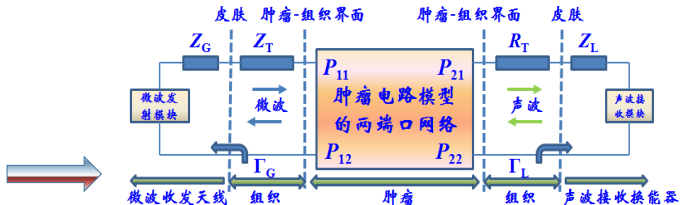
[B] “场”“路”相互作用



(a) “场”与物质相互作用示意图



(b) “场”与生物组织相互作用的示例图



(c) 生物组织中“场”与“路”的相互作用的模型图

几点说明:

序号	输入网络		两端口网络	输出网络	
【1】	Z_G	Z_T	$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} - 1}}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} + 1}} & \frac{\Gamma \sigma_2 - \sigma_1 }{2} e^{-\frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{2\rho} t}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{2\rho c}\right)^2}} \\ 0 & \frac{ \rho_1 c_1 \rho_2^{-1} c_2^{-1} - 1 }{ \rho_1 c_1 \rho_2^{-1} c_2^{-1} + 1 } \end{bmatrix}$	R_T	Z_L
	源阻抗	周围健康组织特征阻抗		周围健康组织的声阻抗	超声换能器的声阻抗
【2】	天线与皮肤间阻抗失配的输入端反射系数		特性增益 $G_T = \frac{(1 - \Gamma_G ^2)}{(1 - P_{11}\Gamma_G)}$ $\frac{(1 - \Gamma_L ^2)}{(1 - P_{22}\Gamma_L)} \cdot P_{21} ^2$	超声换能器与皮肤间阻抗失配的输出端反射系数	
	$\Gamma_G = (Z_G - Z_T)/(Z_G + Z_T) $			$\Gamma_L = (Z_L - R_T)/(Z_L + R_T) $	
【3】 物理相互作用	<ul style="list-style-type: none"> ➢ 肿瘤与健康组织介电对比引起的微波反射; ➢ 肿瘤的高导电性对电磁能量吸收和加热的激发效应; ➢ 热弹效应引起的肿瘤振动与声的生成; ➢ 声阻抗失配引起的声反射。 				

3. “场”与“路”在实际中应用

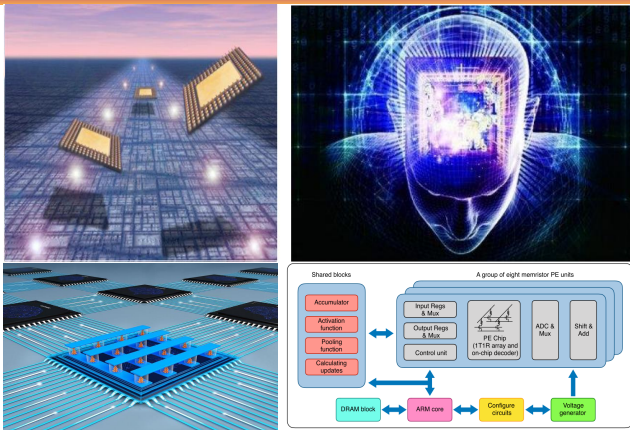


图4-2-112.人工智能形态的计算机

[1] 生物组织检测的共振光声光谱

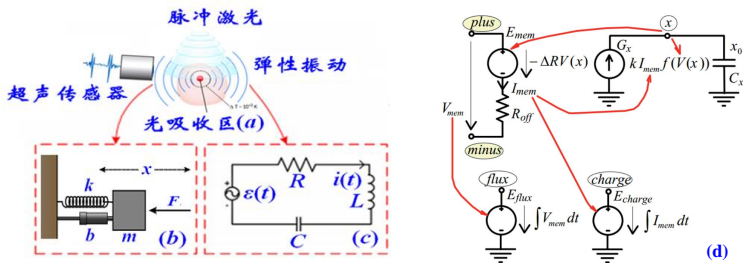


图4-2-113:(a)激光照明的光声效应图;(b)力 \bar{F} 驱动质量-弹簧-阻尼振子模型;(c)等效RLC电路模型;(d)忆阻器的spice仿真电路图。

➢强度调制激光照射的生物组织将经历光能吸收、局部加热和热膨胀如图4-2-113(a)所示。

➢一个足够小的粘性生物组织模型作为理想的点源,发出的声压 $p(t)$ 如下的表达:

$$\frac{\partial^2 p(t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{\rho} \frac{\partial p(t)}{\partial t} + a^2 c^2 p(t) = \Gamma \frac{\partial H(t)}{\partial t} \quad (1)$$

序号	响应(等式左边)	激励(等式右边)
[1]	<ul style="list-style-type: none">➢a为传播相位常数, ρ为组织的密度;➢η为剪切粘度, ξ为体积粘度;➢c为组织中声速。	<ul style="list-style-type: none">➢Γ为格林爱森常数表达为: $\Gamma = \beta c^2 / c_p$;➢β为热膨胀系数和c_p为定压热容。
[2]	<ul style="list-style-type: none">➢方程(1)是源项驱动压力$\Gamma \frac{\partial H(t)}{\partial t}$的二阶微分方程;➢弹簧振子模型;RLC电路模型。	<ul style="list-style-type: none">➢$H(t) = \mu_a \Phi(t)$为从激光照射加热函数,其中μ_a为组织的光学吸收系数和$\Phi(t)$为光流量率。
备注	➢当样品均匀、光照均匀,方程(1)是适用的,在下面实验中得到很好的控制。	

➤ 稳态位移由 $x(t) = A\cos(\omega t - \theta)$ (3)

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}} \quad (4)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{m}\right)^2} \quad (5)$$

序号	弹簧振子模型	RLC电路模型
【1】	$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F(t)}{m}$ (2)	$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ (9)
【2】	$\frac{b}{m} = a^2 \frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{\rho}, \frac{k}{m} = a^2 c^2, \frac{1}{m} = \Gamma(6)$	$\frac{R}{L} = \frac{b}{m}, \frac{1}{LC} = \frac{k}{m}, \frac{1}{L} = \frac{1}{m}$ (10)
【3】	$\omega_{\text{tissue}} = \sqrt{a^2 c^2 - \frac{1}{2} \left(a^2 \frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{\rho} \right)^2}$ (7)	$R = \omega_0 L \sqrt{2Q^2 - 1}, C = \frac{2Q^2}{\omega_0^2 L (2Q^2 + 1)}, L = 1$ (11)
【4】	$Q = \frac{m}{b} \omega_{\text{tissue}} = \sqrt{\frac{\rho^2 c^2}{a^2 \left(\xi + \frac{4}{3}\eta \right)^2} - \frac{1}{2}}$ (8)	$Z = R + j\omega_0 L + \frac{1}{j\omega_0 C}$ (12) $\tan\varphi \approx -\frac{1}{2} \left(\Theta + \frac{1}{4}\Theta^3 \right) \approx -\frac{1}{2}\Theta$ (14)

实验结果

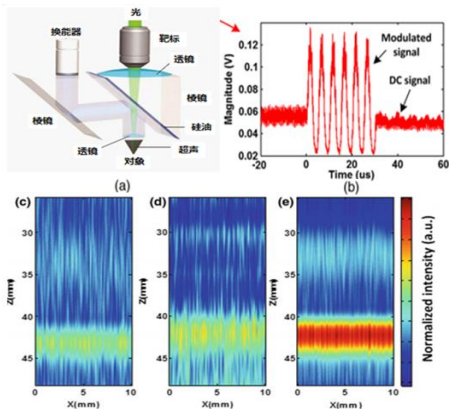


图4-2-114:(a) (b)光声共振效应与光谱学观测实验装置示意图;(c)脉冲激光光声共振成像;(d)脉冲回波超声成像;(e)相干PAUS成像。

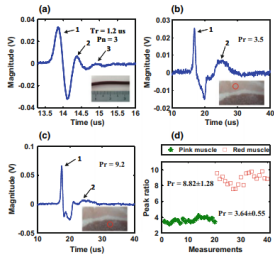


图4-2-115:(a)典型PA共振信号与血管模拟的表征;(b)粉红色肌;(c)红肌;(d)粉红色和红色肌肉的20个测量峰值比率。

$$R = \omega_0 L \sqrt{2Q^2 - 1}, C = \frac{2Q^2}{\omega_0^2 L (2Q^2 + 1)}, L = 1 \quad (11)$$

$$\triangleright \text{计算电路复阻抗: } Z = R + j\omega_0 L + \frac{1}{j\omega_0 C} \quad (12)$$

\triangleright 不同的人体组织模型和猪组织已用等效RLC电路参数定量表征。

按上述所描述人体组织模型和猪组织样品的 R, L, C, ω_0, Q, Z 和 $\tan\varphi$ 如表1所示。

样品	f_0 (kHz)	Q	R (k Ω)	C (pF)	L (H)	$Z(\Omega)$	$\tan\varphi _{f=f_0}$
模拟组织1	90	0.5	71.59	93.787	1	$7.159 \times 10^4 + j\omega(0.1188)$	0.1825
模拟组织2	85	1.1	67.61	105.14	1	$6.761 \times 10^4 + j\omega(0.2140)$	0.3482
模拟组织3	73	1.5	58.07	142.55	1	$5.807 \times 10^4 + j\omega(0.4203)$	0.7961
猪肉	160	1.4	127.27	29.675	1	$1.2727 \times 10^5 + j\omega(0.1575)$	0.2476
肥肉	130	1.2	103.41	44.951	1	$1.0341 \times 10^5 + j\omega(0.4438)$	0.8584
活体	110	1.0	87.50	62.783	1	$8.750 \times 10^4 + j\omega(0.6018)$	1.3756

样品的机械性能可易从公式(7)和(8)用量化谐振频率和品质因数代替预先进行一些校准计算。此外,提取出的相位可来自于公式(6)到(10)。

$$\tan\varphi = \left[\sqrt{a^2 c^2 - \frac{1}{2} \left(a^2 \frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{\rho} \right)^2} \right] \left[\frac{\rho \left(\xi + \frac{4}{3}\eta \right)}{a^2 \left(\xi + \frac{4}{3}\eta \right)^2 - 2\rho^2 c^2} \right] = \frac{-\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\Theta^2}}, \Theta = a \frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{\rho c} \quad (13)$$

$$\text{若 } |a| \ll 1, \text{ 则简化为 } \tan\varphi \approx -\frac{1}{2} \left(\Theta + \frac{1}{4}\Theta^3 \right) \approx -\frac{1}{2}\Theta \quad (14)$$

[2] 微波热声相关成像

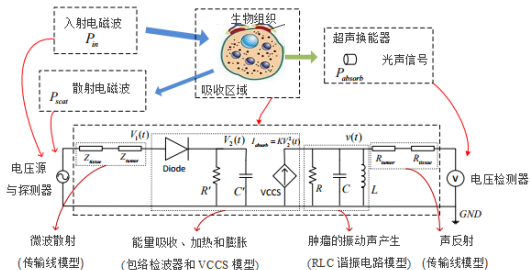
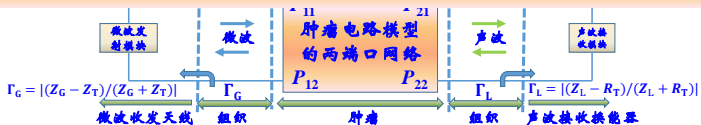


图4-116:微波热声相关成像的整体等效电路建模

[3] 交流电桥电路

直流电桥:测电阻;交流电桥:测阻抗、频率、电容、电感和Q值等。

(1) 基本原理(参见图4-2-117)

平衡:支路“O”电流 $\tilde{I}_0 = 0$

$$\text{则} \begin{cases} \tilde{I}_1 = \tilde{I}_3 \\ \tilde{I}_2 = \tilde{I}_4 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 = \tilde{U}_4 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \tilde{I}_1 \tilde{Z}_1 = \tilde{I}_2 \tilde{Z}_2 \\ \tilde{I}_3 \tilde{Z}_3 = \tilde{I}_4 \tilde{Z}_4 \end{cases} \quad \text{或} \quad \tilde{I}_1 \tilde{Z}_3 = \tilde{I}_2 \tilde{Z}_4$$

$$\text{得} \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_4} \quad \text{或} \quad \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_2 \tilde{Z}_3$$

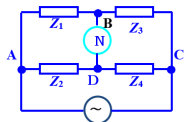


图4-2-117:交流电桥

$$\text{而} \tilde{Z}_i = Z_i e^{j\varphi_i}$$

故平衡时

$$\begin{cases} Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \\ \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \end{cases}$$

一次平衡,可测两量

【讨论】：

(A) 交流电桥平衡时要同时满足两个条件：

阻抗

位相

(B) 四臂阻抗性质的配置应有一定约束(满足一定条件)；

(a) 若 3、4 臂为电阻, 即 $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$

则平衡时应满足 $\varphi_1 = \varphi_2$

显然 1、2 臂必须是同性电抗。

(b) 若 2、3 臂为电阻, 即 $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$

则平衡时应满足 $\varphi_1 = \varphi_4 = 0$

显然 1、4 臂必须是异性电抗。

否则不可能达到平衡。

(2) 常用交流电桥

(A) 电容桥: 测量绝缘材料的电容和损耗

$$\text{阻抗 } \tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 & \tilde{Z}_3 \\ \tilde{Z}_2 & \tilde{Z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x - \frac{j}{\omega C_x} & R_3 \\ -\frac{j}{\omega C_2} & \frac{1}{R_4^{-1} + j\omega C_4} \end{bmatrix}$$

$$\text{平衡 } \tilde{Z}_1 = \frac{\tilde{Z}_2 \tilde{Z}_3}{\tilde{Z}_4} = -\frac{jR_3}{\omega C_2} (R_4^{-1} + j\omega C_4)$$

$$\text{即 } r_x - \frac{j}{\omega C_x} = \frac{R_3 C_4}{C_2} - j \frac{R_3}{\omega R_4 C_2}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} C_x = \frac{R_4}{R_3} C_2 \\ r_x = \frac{C_4}{C_2} R_3 \\ \tan \delta = \omega C_x r_x = \omega C_4 R_4 \end{cases}$$

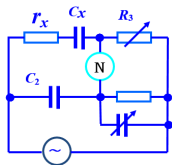


图4-2-118: 电容桥

(B) Maxwell LC 电桥

$$\text{阻抗 } \tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 & \tilde{Z}_3 \\ \tilde{Z}_2 & \tilde{Z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x - j\omega L_x & R_3 \\ R_2 & \frac{1}{R_4^{-1} + j\omega C_4} \end{bmatrix}$$

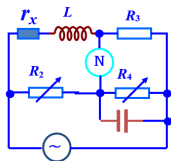


图4-2-119:LC 电桥

$$\text{平衡 } r_x - j\omega L_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} + j\omega C_4 R_2 R_3$$

$$\text{得 } \begin{cases} r_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \\ L_x = R_2 R_3 C_4 \\ Q = \frac{\omega L_x}{r_x} = \omega R_4 C_4 \end{cases}$$

(C) 频率电桥

臂 1 为串联谐振电路。

$$\text{平衡条件} \begin{cases} \omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1} \\ R_1 R_4 = R_2 R_3 \end{cases}$$

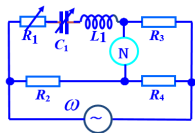


图4-2-120:频率电桥

测量过程:

(a) 将 C_1 短接, 用直流电源, 调节 R_1 , 使电桥平衡, 则

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

(b) 测量信号源频率时, 调节 C_1 , 使电桥平衡, 则可得

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

[4] 变压器原理

(1) 理想变压器

(a) 铁芯: “山”型, “E”型, “C”型等;
硅(矽)钢片, 铁氧体等软磁材料。

(b) 绕组: 原边, 初级绕组, 输入端; } **电不通**
副边, 次级绕组, 输出端。 } **磁耦合**

➤ 原边与副边电路不相通;

➤ 自耦变压器原、副边为同一绕组, 抽头。

(c) 原理: 互感

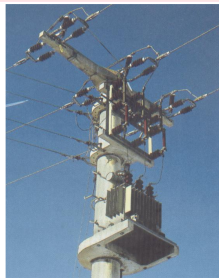


图4-2-121:

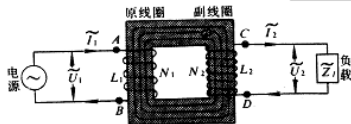
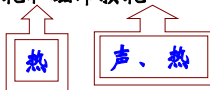


图4-2-122:

(2) 理想变压器的条件

- (A) 无漏磁 漏磁损耗
- (B) 绕组无电阻 铜损耗, 即焦耳热损耗
- (C) 铁芯无铁损 铁损耗, 包括涡流损耗和磁滞损耗
- (D) 原、副边感抗 $\rightarrow \infty$, 空载电流 0。



$$L = \mu n^2 \cdot V$$

$$Z = \omega L = \omega \mu n^2 \cdot V$$

可见, 影响 Z 的因素:

- μ —— 铁芯材料
- n —— 绕组匝密度
- V —— 铁芯体积

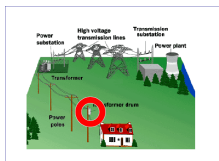


图4-2-123:

(A) 电压变比公式

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_1 = N_1 \tilde{\varphi} = L_1 \tilde{I}_1 + M \tilde{I}_2 \\ \tilde{\Psi}_2 = N_2 \tilde{\varphi} = L_2 \tilde{I}_2 + M \tilde{I}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{得}} \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_1 = -j\omega L_1 \tilde{I}_1 - j\omega M \tilde{I}_2 \\ \tilde{\varepsilon}_2 = j\omega L_2 \tilde{I}_2 + j\omega M \tilde{I}_1 \end{cases}$$

理想变压器, 纯电感性阻抗, 可有

$$\begin{cases} \text{输入电压 } \tilde{U}_1 = \tilde{U}_{AB} = -\tilde{\varepsilon}_1 \\ \text{输出电压 } \tilde{U}_2 = -\tilde{U}_{DC} = \tilde{\varepsilon}_2 \end{cases}$$

$$\tilde{I} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{d\tilde{I}}{dt} = \omega j \tilde{I}$$

$$\begin{cases} \tilde{U}_1 = j\omega L_1 \tilde{I}_1 + j\omega M \tilde{I}_2 \\ \tilde{U}_2 = -j\omega L_2 \tilde{I}_2 - j\omega M \tilde{I}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{U}_1 = j\omega N_1 \tilde{\varphi} \\ \tilde{U}_2 = -j\omega N_2 \tilde{\varphi} \end{cases}$$

$$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2} = -\frac{N_1}{N_2}$$

理想变压器输出和输入电压
与线圈匝数成正比, 位相相反。

(B) 电流变比

$$\text{空载电流 } \tilde{I}_0 = \frac{\tilde{U}_1}{j\omega L_1} = \frac{N_1 \tilde{\varphi}}{L_1}$$

$$\tilde{I}_2 = 0 \text{ 时 } \tilde{I}_1 = \tilde{I}_0$$

当 $\tilde{I}_2 \neq 0$ 即有负载时

$$\text{而 } \begin{cases} \tilde{U}_1 = j\omega L_1 \tilde{I}_1 + j\omega M \tilde{I}_2 \\ \tilde{U}_1 = j\omega L_1 \tilde{I}_0 \end{cases}$$

$$\frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_0}{\tilde{I}_2} = -\frac{M}{L_1}$$

$$\text{或 } \frac{\tilde{I}_1'}{\tilde{I}_2} = -\frac{M}{L_1}$$

$$\text{其中 } \tilde{I}_1' = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_0$$

$$\text{由 } L_1 = \frac{N_1 \varphi_1}{I_1}$$

$$M = \frac{N_2 \varphi_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \varphi_1}{I_1} \quad \text{无漏磁}$$

$$\text{得 } \frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\text{则 } \frac{\tilde{I}_1'}{\tilde{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

电流与匝数成反比, 位相相反。

(F) 变阻比

变压器不但能实现电压和电流的交换,而且还有阻抗变换作用。

$$\frac{\tilde{Z}'_L}{\tilde{Z}_L} = \frac{\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{I}_1}}{\frac{\tilde{U}_2}{\tilde{I}_2}} = \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2} = \frac{-\frac{N_1}{N_2}}{-\frac{N_2}{N_1}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

即理想变压器的反射电阻 \tilde{Z}'_L 与负载电阻 \tilde{Z}_L 之比等于原、副线圈匝数之比的平方。

➤ 阻抗的匹配:

➤ 当外电路的负载电阻 R 与电源内阻 r 相等时,输出到负载的功率最大。

在无线电电路中,为使负载电阻与电源内阻相匹配,可用变压器来耦合,通过变压器的反射作用,使之匹配。

(G) 功率关系

设纯电阻性负载 $\tilde{Z}_l = R$

因为 $\tilde{U}_2 = \tilde{I}_2 R$, 所以输出功率:

$$P_2 = U_2 I_2 \quad \text{有功功率}$$

又知 $\begin{cases} \tilde{U}_1 \text{ 与 } \tilde{U}_2 \text{ 反相} \\ \tilde{I}_1 \text{ 与 } \tilde{I}_2 \text{ 反相} \end{cases}$ 所以 \tilde{U}_1 与 \tilde{I}_1 同相

则输入功率 $P_1 = U_1 I_1$ 有功功率

由变比公式得 $P_1 = P_2$

理想变压器, 输入、输出有功功率相等。

(3) 变压器的应用

(A) 送、配电变压器

送电变压器,容量一定,升高电压,减小电流,降低损耗,或节省材料。

配电变压器,降低电压,分配给用户。

(B) 电源变压器

交流电压:~ 6.3V,~ 36V,~ 127V等;

直流电源:±5V, ±12V, ±15V, ±24V, 300V等。

(C) 耦合变压器

输入、输出、线间、中频变压器等。

阻抗匹配

(D) 自耦变压器

自耦调压器,“稳压电源”——自动调压器等。

[5] 三相交流电路

(1) 概述

(A) 三相交流电, 位相相差 120°

三相绕组空间上沿圆周分布,

依次 $\frac{2\pi}{3}$ (120°) 角, 设其为 AX, BY, CZ.

当转子(相当于一永磁铁)旋转一周(2π) 时, 可得三条曲线, 参见图4-2-123。相邻绕组中电压(电流)的位相差也就是 $\frac{2\pi}{3}$ 。

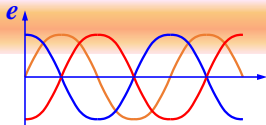
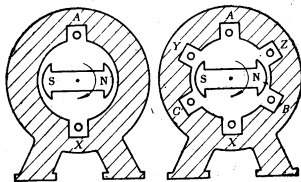


图4-2-125: 三相交流电

$$\begin{cases} e_{AX} = \varepsilon_0 \cos \omega t \\ e_{BY} = \varepsilon_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ e_{CZ} = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{e}_{AX} = \varepsilon_0 e^{j\omega t} \\ \tilde{e}_{BY} = \varepsilon_0 e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})} \\ \tilde{e}_{CZ} = \varepsilon_0 e^{j(\omega t + \frac{2\pi}{3})} \end{cases}$$



(a) 单相 图4-2-126: (b) 三相

II、相电压与线电压

□ “Y”形(星形)接法如图4-2-127所示。

相电压 $\tilde{U}_{AO}, \tilde{U}_{BO}, \tilde{U}_{CO}$

$$\text{线电压} \begin{cases} \tilde{U}_{AB} = \tilde{U}_{AO} - \tilde{U}_{BO} \\ \tilde{U}_{BC} = \tilde{U}_{BO} - \tilde{U}_{CO} \\ \tilde{U}_{CA} = \tilde{U}_{CO} - \tilde{U}_{AO} \end{cases}$$

$$U_l = \sqrt{3}U_\phi$$

电压系列:127V, 220V, 380V, 660V

□ “Δ”(三角)形接法如图4-2-128所示。

- (三相三线制)
- 三个线圈首尾相接

$$U_l = U_\phi$$

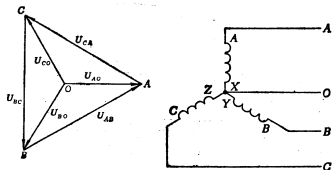


图4-2-127: “Y”形接法

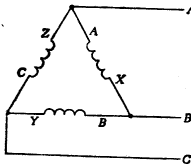


图4-2-128: “Δ”形接法

2、 负载的联接

I、 “Y”接法

$$1) \text{ 对称负载 } \begin{cases} U_l = \sqrt{3}U_\varphi \\ I_l = I_\varphi \end{cases}$$

$$\tilde{I}_0 = \tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c = 0 \quad \text{“N” 可省。}$$

2) 不对称负载

$$\tilde{I}_0 = \tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c \neq 0 \quad \text{“N” 线可细。}$$

断开“N”线，电压偏离与负载有关，见图4-2-129。

II、 “Δ”接法

$$\begin{cases} U_l = U_\varphi \\ I_l = \sqrt{3}I_\varphi \end{cases}$$

- 负载上的相电压等于三相电源线电压；
- 若三相负载对称，则每相负载上电流——相电流；
- 负载上的相电压等于三相电源线电压。

➤ 中线电流电流?

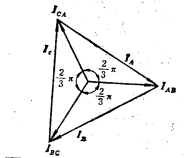
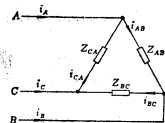
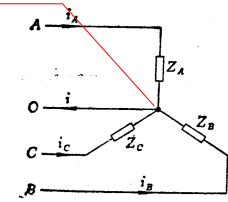


图4-2-129: 两种负载联接

例题4-2-9:如图星形负载每一相并联五盏相同的电灯,其中a相点燃了三盏,b相点燃了两盏,c相一盏也没点燃。求中线接通和断开两种情况下a、b相的电压,已知电源线电压380伏。

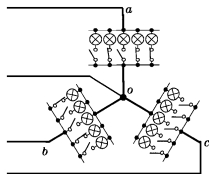


图4-2-130:

- 中线接通各相电压相等,与负载的阻抗无关 $U_{\phi} = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = 220(V)$
- 中线断开:a、b串联
$$\begin{cases} U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = 380(V) \\ U_{ao} + U_{ob} = 380(V) \end{cases}$$

$$\frac{Z_a}{Z_b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{U_{ao}}{U_{bo}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} U_{ao} = \frac{2}{3} \times 380 = 152(V) < 220V \\ U_{ob} = \frac{3}{5} \times 380 = 228(V) > 220V \end{cases}$$

中线不能随意中断

[6] 三相感应电动机

- 三相感应电动机是一种被广泛采用的动力装置。
- 三相感应电动机的基本结构如图4-2-131所示,由定子(固定部分)和转子(转动部分)组成。

在定子中三组互成 120° 线圈 ax 、 by 、 cz ,当三相交流电通过这三组线圈时,定子内部空间就会产生驱动电动机转子转动旋转磁场。

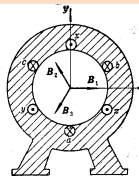


图4-2-131:三相感应电动机

$$\text{设通入三组线圈的电流瞬时值分别为: } \begin{cases} i_{ax} = i_1 = I_0 \cos \omega t \\ i_{by} = i_2 = I_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_{cz} = i_3 = I_0 \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \end{cases}$$

$$\text{三组线圈在定子内部产生磁感应强度 } \begin{cases} B_1 = B_0 \cos \omega t \\ B_2 = B_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ B_3 = B_0 \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \end{cases}$$

旋转磁场形成:

$$\begin{cases} AX: B_1 = B_0 \cos \omega t \\ BY: B_2 = B_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ CZ: B_3 = B_0 \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \end{cases}$$

设瞬时总矢量 \vec{B} 与 \vec{B}_1 夹角 θ :

$$\begin{aligned} B_\theta &= B_1 \cos \theta + B_2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) + B_3 \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta \right) \\ &= B_0 \left[\cos \omega t \cos \theta + \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta \right) \right] \end{aligned}$$

利用积化和差三角公式, 可得 $\cos(\omega t - \theta)$

令 $\theta = \omega t$

$$\begin{cases} B_\theta = \frac{3}{2} B_0 \\ \tan \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \tan \omega t \end{cases}$$

最大值 $B_\theta = \frac{3}{2} B_0$

总磁感应强度的大小是不随时间变化的恒量

\vec{B} 大小不变, 以角速度 ω 旋转的磁场。

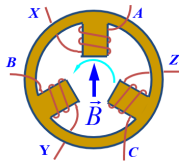


图4-2-132: 旋转磁场

[7]三相异步电动机

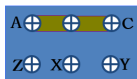
(a)电机原理：旋转磁场、“异步”

极对数	1	2	3	4	5
min^{-1}	3000	1500	1000	750	600

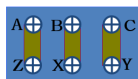
(b)结构特点：“鼠笼”转子

(c)绕组与接线：“220/380V, Δ/Y ”, 参见图4-2-134.

(d)正、反转与换向开关



(a) Y 接法



(b) Δ 接法

图4-2-133:接线端子

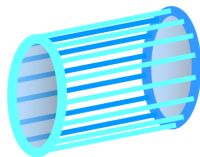


图4-2-134：“鼠笼”结构示意图

几点说明:

- 由于**磁场旋转**,使转子线圈产生感应电流,电流在磁场中又受安培力作用而使转子转动起来;
- 根据楞次定律,转子的转动方向与磁场方向相同;
- 转子的转速总是小于磁场的转速,即始终保持转子与旋转磁场异步(请思考为什么?)故称**异步电动机**;
- 另外可以通过交换电动机的三根火线中的任意两根,改变旋转磁场的旋转方向,从而改变电动机转子转动的方向。

《基本要求》

- 1、理解描述特征简谐量的物理意义,尤其掌握位相与位相差在集总电路中的作用;
- 2、理解集总电路传送电流的特征和似稳条件;
- 3、掌握集总电路中三种基本元件的性质,明确它们在电路中的阻抗及位相差;
- 4、理解集总电路的三种分析方法;复数法应用广泛,初步掌握其基本规律,应用基尔霍夫定律计算集总电路;
- 5、了解交流串联共振、并联共振电路的特点,了解品质因素 Q 值在集总电路中的作用;
- 6、理解集总电路的功率与直流电功率的区别,功率因素的作用及视在功率、无功功率的计算;
- 7、了解变压器的变压比、变流比、变阻比、功率比。

集总电路小结

一、理论体系：

$$\text{出发点:} \left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_e}{I_e} \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i \\ \Sigma(\pm \tilde{I}) = 0 \quad \Sigma(\pm \tilde{U}) = 0 \\ S = UI \quad \bar{P} = S \cos \varphi \quad R = S \cos \varphi \\ \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2} = -\frac{N_1}{N_2} \quad \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1} \end{array} \right.$$

二、内容：

[1]幅值、频率(周期)、相位与初相；

[2]二个定律二个原理：欧姆定律、基尔霍夫定律和功率原理、变压器原理

[返回首页](#)

3、三种基本元件： (R, C, L) ——描述电路中阻抗性质

$R: \varphi_u - \varphi_i = 0, R$ 与 ω 无关;

$L: \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}, Z_L = j\omega L;$

$C: \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}, Z_C = \frac{1}{j\omega C};$

$(\tilde{I}, \tilde{U}, \tilde{\varepsilon})$ ——交流电路瞬时特性(三个特征值)。

4、三种电路分析方法:

(1) 三角函数法;

(2) 矢量图解法: 矢量代表简谐量(长度代表幅值, 夹角代表相位), 矢量叠加代替简谐量叠加。

(3) 复数解法: 复数代表简谐量, 复数运算代替简谐量运算。

[返回首页](#)

5、集总电路计算：

(1) 串并联： $\tilde{Z} = \sum_i \tilde{Z}_i; \frac{1}{\tilde{Z}} = \sum_i \frac{1}{\tilde{Z}_i}$

(2) 基尔霍夫定律：
$$\begin{cases} \sum(\pm \tilde{I}) = 0 \\ \sum(\pm \tilde{U}) = 0 \end{cases}$$

(a) $P(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi), \bar{P} = UI \cos \varphi$

(b) $P_{\text{有功}} = \bar{P} = UI_{//} = I^2 R = U^2 G$

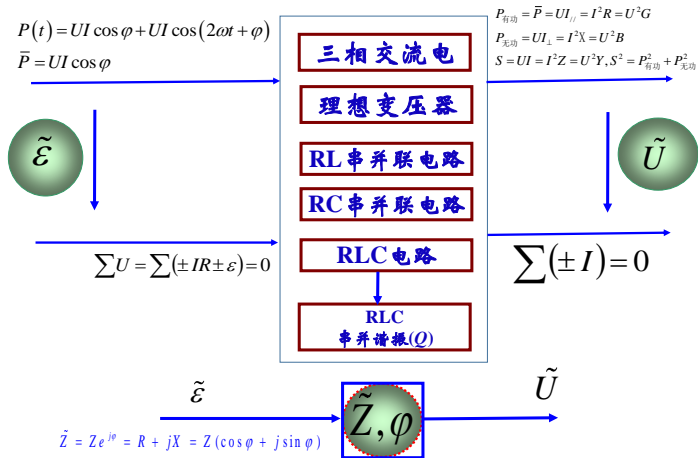
(3) 电功率

$P_{\text{无功}} = UI_{\perp} = I^2 X = U^2 B$

$S = UI = I^2 Z = U^2 Y, S^2 = P_{\text{有功}}^2 + P_{\text{无功}}^2$

(4)
$$\begin{cases} \text{串联谐振: } Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \\ \text{串联谐振: } Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}, \varphi = \arctan \frac{\omega L - \omega C [R^2 + (\omega L)^2]}{2} \end{cases}$$

小结图



本章知识单元与知识点小结

单元	知识点		
稳恒电路	欧姆定律	全电路欧姆定律	基尔霍夫定律
	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ $U = IR$ $R = \rho \frac{l}{S}$	$\varepsilon = I(R+r)$ $U_a - U_b = \begin{cases} \varepsilon - (RI + rI) \\ \varepsilon + (RI + rI) \end{cases}$	$\sum_{k=1}^M I_k = 0$ $\sum_{k=1}^N U_k = 0$
集总电路	电路基本问题	元件约束方程	基尔霍夫定律
	$\begin{cases} Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} \\ \varphi = \varphi_k - \varphi_l \end{cases}$ $\vec{Z} = \frac{\vec{U}}{\vec{I}} = Z e^{j\varphi}$		$\sum (\pm \vec{I}) = 0$ $\sum (\pm \vec{U}) = 0$ $S = IU$ $P_R = I^2 R$ $P_X = I^2 X$
应用			

End

第五章 电磁场理论部分

第5章 电磁场理论部分



麦克斯韦的电磁理论和电磁波使人类进入了信息时代

§5-1 电磁理论——麦克斯韦方程组

- [1] 电磁场的总结,两个推广与两个假设
- [2] 推广结果的综述
- [3] Maxwell方程组

§5-2 平面电磁波

- [1] 变换之一:电场波动
- [2] 变换之二:磁场波动
- [3] 电磁波的性质
- [4] 定态波动方程

§5-3 电磁场的物质观

- [1] 电磁场的能量
- [2] 电磁场的动量
- [3] 电磁场的物质性

§5-4 赫兹实验

- [1] 实验简介
- [2] 电偶极子电磁波辐射

第五章 电磁场理论部分

任务：研究电磁场理论构建及其应用问题

引言

麦克斯韦方程组

电磁理论问题

平面电磁波

电磁场的物质观

赫兹实验

麦氏方程组

两者关系

能量动量角动量

定态波动方程计算

电磁波分布及应用

本章知识单元与知识点小结

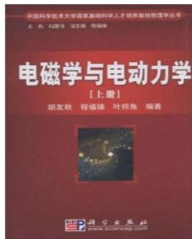
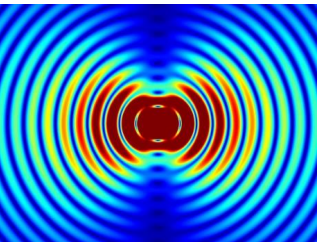
引言



这是《电磁学》部分最精彩、最重要的一章。电磁理论又称麦克斯韦电磁理论,它的建立是物理学史上的一个伟大创举。

爱因斯坦评价:这是“自牛顿以来,物理学经历最深刻、最富有成果的、真正的、概念上的变革。”它开辟了无线电时代的新纪元,对科学技术和人类文明发展起到了不可估量的作用。

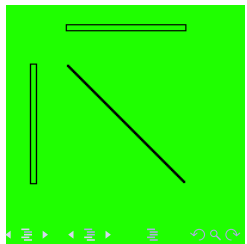
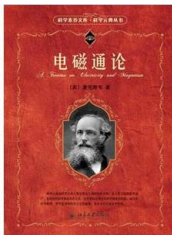
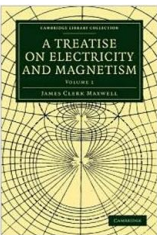
电磁理论集中体现在非常简单而优美麦克斯韦方程组之中,由此发现了平面电磁波、运动电磁场的物质性,更深入研究导致了无线电通讯、信息化革命,从理论到实践发展成为更丰富电动力学。



引言



麦克斯韦方程组是以物理学家麦克斯韦(J.C.Maxwell,1831~1879)命名的。他是继法拉第之后,集电磁学大成的伟大科学家。他全面地总结了电磁学研究全部成果,并在此基础上提出了“涡旋电场”和“位移电流”两个假说,作了两个推广,建立了完整电磁理论体系,科学地预言了电磁波的存在,并且预言了光是电磁波,揭示了光、电、磁现象的内在联系和统一性,完成了物理学又一次大综合。他的理论成果为现代无线电电子工业奠定了坚实基础。



§5-1 电磁理论的问题

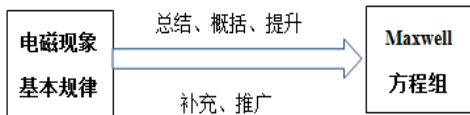


图5-1: 思想路线

5-1-1: 电磁场的总结, 两个推广与两个假设

1. 电场的情况

(1) 真空中的静电场($\vec{E}_0, \epsilon_0, q_0$):

$$\begin{cases} \oiint_{(S)} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{q_0}{\epsilon_0} & (\text{有源}) \\ \oint_{(L)} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0 & (\text{无旋}) \end{cases}$$

(2) 介质中的静电场($\vec{E}_U = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, ϵ, q_0 和 q'):

$$\begin{cases} \oiint_{(S)} \vec{D}_U \cdot d\vec{S} = q_0 & (\text{有源}) \\ \oint_{(L)} \vec{E}_U \cdot d\vec{l} = 0 & (\text{无旋}) \\ \vec{D}_U = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_U \end{cases}$$

(3) 时变的涡旋电场 ($\vec{E}_A, \epsilon_0, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{E}_A \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{无源}) \\ \oint_{(L)} \vec{E}_A \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{有旋}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \text{涡旋电场假说} \end{array}$$

(4) 时变的电场 ($\vec{E} = \vec{E}_U + \vec{E}_A, \epsilon, q_0, q'$ 和 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0 \quad (\text{有源}), \text{ 一个自然的推广} \\ \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{有旋}), \text{ 涡旋电场假说} \\ \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \end{array} \right.$$

2、磁场的情况

(1) 真空中的静磁场 (\vec{B}_0, μ_0, I_0):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{无源}) \\ \oint_{(L)} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0 \quad (\text{有旋}) \end{array} \right.$$

(2) 介质中的静磁场 ($\vec{B}_M = \vec{B}_0 + \vec{B}', \mu, I_0$ 和 I'):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{B}_M \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{无源}) \\ \oint_{(L)} \vec{H}_M \cdot d\vec{l} = I_0 \quad (\text{有旋}) \\ \vec{B}_M = \mu_0 \mu_r \vec{H}_M \end{array} \right.$$

(3) 非稳恒涡旋磁场 ($\vec{B}_S = \vec{B}_P + \vec{B}_{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$, 非稳恒, I_P 和 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{B}_S \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{无源}), \text{ 又一个自然的推广} \\ \oint_{(L)} \vec{H}_S \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{有旋}), \text{ 位移电流假说} \end{array} \right.$$

(4) 总磁场 ($\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' + \vec{B}_P + \vec{B}_{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$, μ , I_0 , I' , I_P 和 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{无源}) \\ \oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{有旋}) \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad \vec{j}_0 = \sigma \vec{E} \end{array} \right.$$

5-1-2 推广结果的综述

1. 综合表述

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{介质方程 } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{介质方程 } \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad \text{导体方程 } \vec{j}_0 = \sigma \vec{E} \end{array} \right.$$

2. 位移电流、全电流的定律

(1) 问题—麦克斯韦假设:

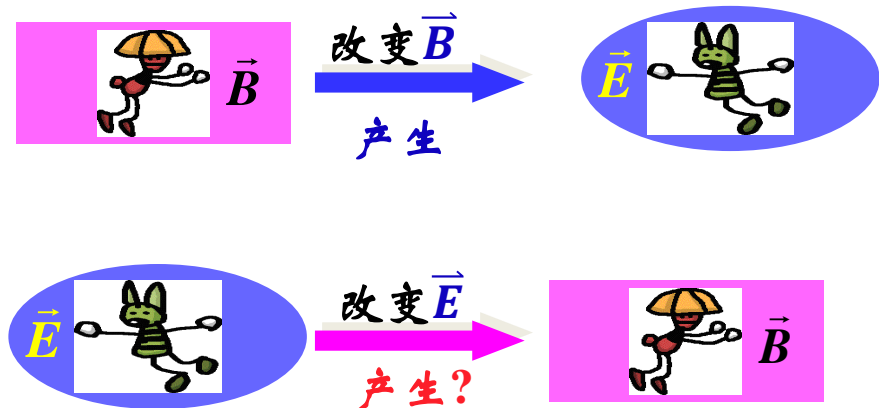


图5-2:麦克斯韦假设

一个变化的
电通量是否可
以产生磁场?



James
Clerk
Maxwell
认为：
当然可以!!

位移电流(变化的电场)

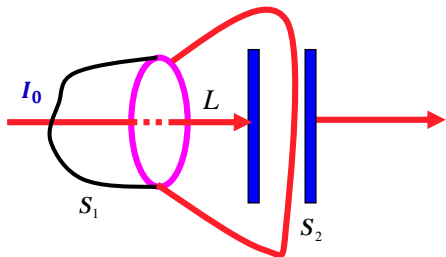


位移电流将会象普通电流一样产生磁场

麦克斯韦对电磁场理论的重大贡献的核心
是:位移电流假说

对于回路 L :

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = ?$$



对表面 S_1 有

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S_1)} \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = I_0$$

对表面 S_2 有

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S_2)} \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = 0$$

图5-3: 充放电电容器

矛盾

安培环路定理不适用于变化的电磁场!

引入位移电流 I_d :

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

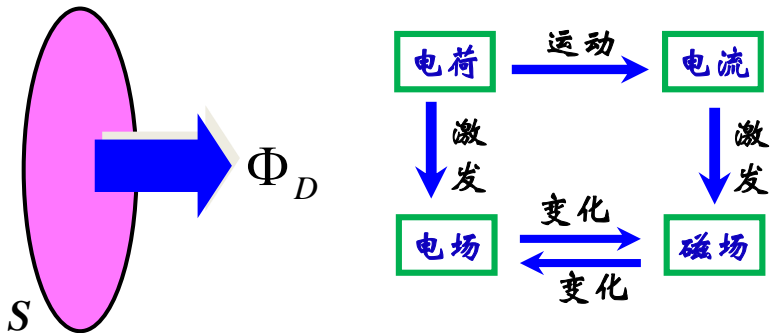


图5-4: 电位移矢量的通量

安培环路定理被修改为

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$$

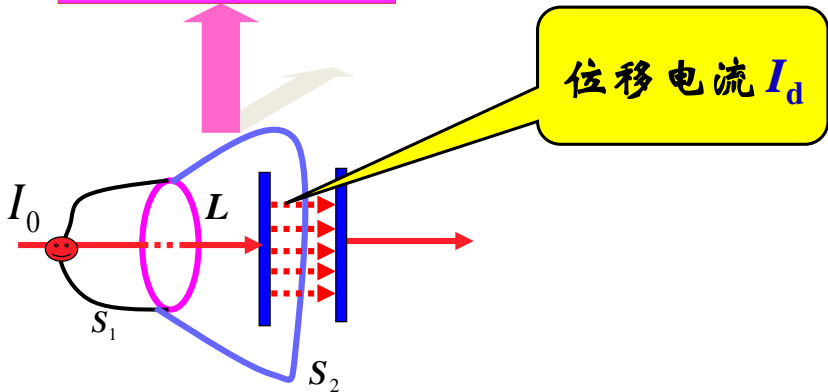


图5-5:位移电流

对表面 S_1+S_2 有

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \oiint_{S_1+S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{d}{dt} \iint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$= 0 + I_{d_2}$$

根据高斯定理: $\oiint_{(S_1+S_2)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q(t)$

(对本例,在数值上)

$$\text{有 } I_{d_2} = I_{d_{(1+2)}} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{dq(t)}{dt} = I_0$$

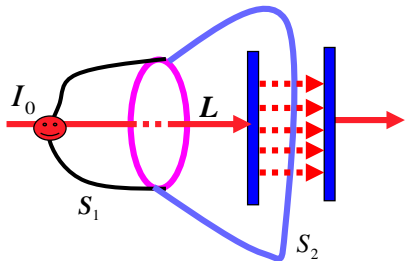


图5-6:位移电流

(2) 安培-麦克斯韦定律(全电流定律):

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$$

称为全电流定律或者安培-麦克斯韦定律。

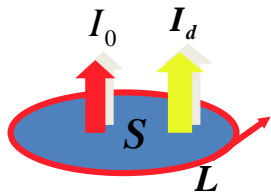


图5-7:全电流

$$I = I_0 + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \quad \text{为通过} S \text{的全电流。}$$

$$I_0 = \sum I \quad (\text{or} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S})$$

通过 S 的传导电流之和, \vec{j}_0 为传导电流密度。

传导电流

位移电流

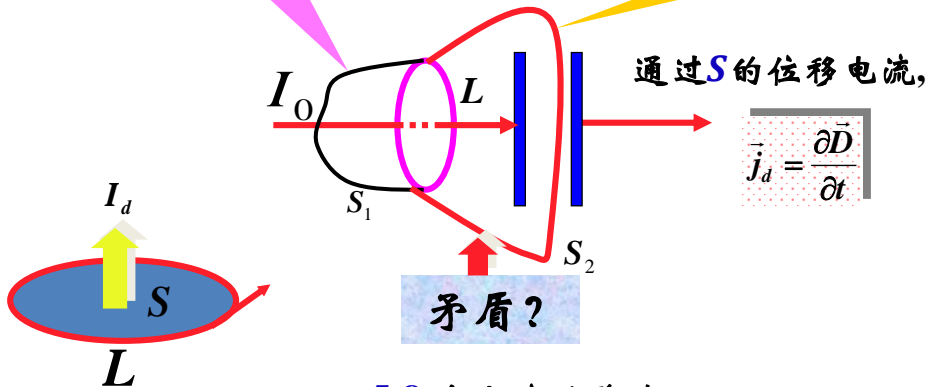


图5-8:全电流的总结

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \iint_{(S_2)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{j}_d \cdot d\vec{S}$$

注意:

- 位移电流反应变化的电场,不表示有电荷的定向运动;
- 有变化的电场,就有位移电流(I_D);

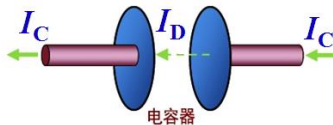


图5-9: 电容器中两种电流

- 位移电流在导体中没有焦耳热;
- 位移电流与传导电流(I_0):一样激发磁场;
- 麦克斯韦提出的位移电流最初为假说,后来的实验和实际应用证明它是正确的。

【例5-1】 导体内若通有沿截面均匀分布的简谐交流电 $I = I_0 \cos \omega t$, 试求导体中位移电流与传导电流的比值。

【解】 由微分形式的欧姆定律得

$$E = \rho j = \rho \frac{I}{S} = \frac{\rho I_0}{S} \cos \omega t$$

由定义式求位移电流

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{d\Psi}{dt} = S \frac{dD}{dt} = S\varepsilon \frac{dE}{dt} \\ &= \varepsilon \rho \omega I_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

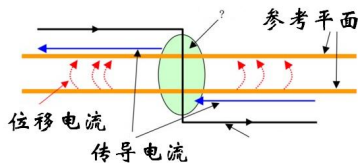


图5-10:导体内两种电流

$$\frac{I_{d0}}{I_0} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \rho \omega = 2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 \rho f$$

对于一般的良导体

$$\begin{cases} \rho \approx 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \\ \epsilon_r \approx 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{I_{d0}}{I_0} \approx 6 \times 10^{-19} f$$

小结: (a) 实际上当电场变化的频率不是非常高时, 在导体内位移电流与传导电流相比是微不足道的;

(b) 位移电流在相位上比传导电流及电压超前 $\frac{\pi}{2}$, 因此位移电流不消耗功率, 不生焦耳热。

❖ 用全电流定律计算磁感强度 \vec{B} 的步骤:

(A) 分析电场和磁场的对称性;

(B) 求位移电流;

(C) 选取合理的环路, 积分求 \vec{H} ;

(D) 由 $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ 计算 \vec{B} 。

(3)重要特例:

5-2: 平行板电容器, 半径 R , 用长直电流给它充电, 使极板

间电场变化率 $\frac{d\vec{E}}{dt}$, 求: 距极板中心为 r 远处的磁感强度。

解: 由场的对称性知, 场线为一系列同心圆, 在半径为 r 的圆周上, \vec{H} 相等, 由全电流定律

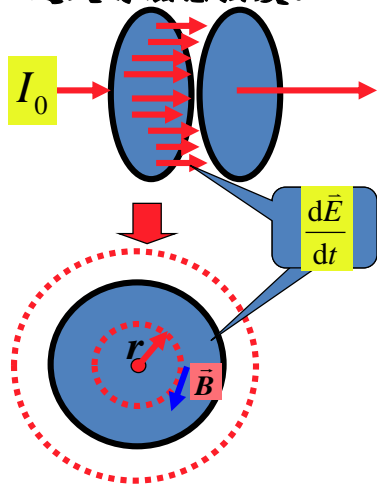


图5-11: 全电流的特例

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$$

得: $2\pi r H = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \Rightarrow H = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$

(1) 当 $r < R$, 有:

$$\Phi_D = \pi r^2 D = \varepsilon_0 \pi r^2 E \Rightarrow \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$H_{\text{内}} = \frac{r}{2} \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$



$$B_{\text{内}} = \mu_0 H = \frac{r}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{dE}{dt}$$

(2) 当 $r > R$, 有:

$$\Phi_D = \pi R^2 D = \varepsilon_0 \pi R^2 E \Rightarrow \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

$$H_{\text{外}} = \frac{R^2}{2r} \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$



$$B_{\text{外}} = \mu_0 H = \frac{R^2}{2r} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{dE}{dt}$$

(3) 讨论:

➤ \vec{B} 线为一些同心圆;

➤ $B \sim r$ 曲线如右图:

➤ 位移电流密度大小为:

$$j_d = \begin{cases} \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

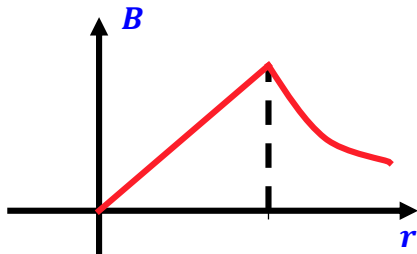


图5-12:磁感强度的分布曲线

5-1-3 Maxwell方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \rho_0 dV \\ \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

两个闭合曲面积分与两条闭合曲线积分;从数学上可知分别对应着两种散度与两种旋度。左面是麦克斯韦方程的积分形式,右面是微分形式。存在介质时,须有介质方程(对线性均匀各向同性介质):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{j}_0 = \sigma \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \end{array} \right.$$

洛伦兹力(微观): $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

1. 方程组的物理意义:

方程1: 通过任意闭合曲面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷的代数和, 表明电荷是电场的源与汇;

方程2: 电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于以曲线为边界的任意曲面的磁通量对时间变化量的负值; 这是涡旋电场假说, 随时间变化的磁场会在其周围产生涡旋电场;

方程3: 通过任意闭合曲面的磁通量恒等于0, 表明磁场没有起始点和终点, 磁力线一般是闭合的;

方程4: 磁场沿任意闭合曲线的线积分等于穿过以该曲线为边界的任意曲面的全电流, 这是位移电流假说的结果。

为此, 基于此就可以进行“工作”了, 计算、预言、推论等。

2. 方程组与介质方程可得电磁场规律:

- (1) 给定介质方程, 又知边界条件, 方程组解是**唯一**的——
即是这种客观条件下所发生的真实的电磁场;
- (2) 对于电磁场而言, 方程组中**电荷**、**电流**应看作是外来已知量, 它们的分布加上电磁场内介质的分布确定了电磁场的**外部条件**;
- (3) **Maxwell**方程组、**洛伦兹力公式**及**电荷守恒定律**——
组成电动力学的基本方程式, 并且可与力学定律结合;
- (4) 可解决运动带电体与电磁场所组成的力学体系的运动规律; **Maxwell**方程组在洛伦兹变换下具有不变性(电动力学)。

3. 其它形式

(1) 光子质量不为零时, 即光子静止质量 $m_\gamma = \frac{\mu\hbar}{c} \leq 10^{-47}(\text{g})$, μ 是与 m_γ 有关的常量, Maxwell 方程组将变成

下面的形式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} - \mu^2 U \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_0 - \mu^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

其中 \vec{A} 是磁矢势, U 是电势, $m_\gamma = 0$, 便回到真空中方程组。

(2) 存在磁荷时的麦克斯韦方程组, ρ_m 磁荷密度, \vec{j}_m 磁荷流密度, 则有:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\vec{j}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad W_g = \frac{\mu_0 g^2}{4\pi r} \Rightarrow \begin{cases} g_{min} = \frac{137}{2} ce \\ W_{gmin} = \left(\frac{137}{2}\right)^2 W_e \approx 5000 W_e \end{cases}$$
$$\Rightarrow m_g \approx 5000 m_e \approx 3 m_p$$

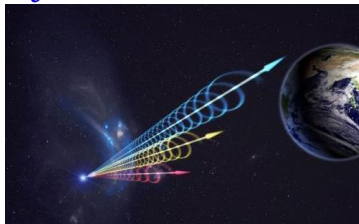


图5-13: 光的本性其实就是电磁波

4. 边界条件问题:

- (1) 遇到界面介质的情况时,界面两边的介质性质有一突变,将导致电磁场也会有突变,但是**积分形式Maxwell**方程在边界上依然成立,可把不同介质的电磁场用**积分**方程联系起来;
- (2) **微分**形式只适用于非边界区域,对于边界突变处,微分形式已失去意义;
- (3) 通常用**积分**方程不能直接求得空间各点场量的分布,要将方程积分形式变换成**微分**形式;
- (4) 边值关系就是把麦克斯韦积分形式的方程放到边界突变处得到结果。

多类边界条件:

(A) 电介质边界条件 $\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0, \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

是积分方程1、2分别应用到边界上的结果, σ_0 是界面上的自由面电荷密度。

(B) 磁介质边界条件 $\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_0$

是积分方程3、4分别应用到边界上的结果, \vec{i}_0 是界面上的传导面电流密度。

(C) 导体界面电荷条件 $\vec{n} \cdot (\vec{j}_{02} - \vec{j}_{01}) = -\frac{\partial \sigma_0}{\partial t}$

是电荷守恒定律的积分形式在边界上应用的结果。

§5-2 平面电磁波

我们知道各向同性空间中Maxwell方程组表达为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

如果空间没有自由电荷,也没有传导电流,考虑到自由空间下 \vec{D} 与 \vec{E} 的关系以及 \vec{B} 和 \vec{H} 的关系即 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\rho_0 = 0$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{j}_0 = 0$

则麦氏方程组简化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

从这个方程组可以看出, \vec{E} 和 \vec{H} 有高度的相似性和对称性。同时它们之间相互耦合和关联着:磁场的**含时变化**导致了电场的**旋度**,反之亦然。

我们可作如下的变换,把 \vec{E} 和 \vec{H} 的耦合解开,分别获得 \vec{E} 和 \vec{H} 的波动方程:

5-2-1 变换之一：电场波动

$$\therefore \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{令 } \mu_0 \epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c^2} \quad \therefore \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

从而预言电磁波的存在(第一预言)。

在自由空间里, c 就是光速,说明光也是电磁波(第二预言)。

5-2-2 变换之二: 磁场波动

$$\therefore \begin{cases} \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad \therefore \nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\text{令 } \mu_0 \epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c^2} \quad \therefore \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

形式上与 \vec{E} 的波动方程一模一样。

注意到 \vec{H} 和 \vec{E} 是耦合在一起的,若初始电场或磁场取空间波的形式,则其一定会自发在空间传播,这就是电磁波的传播原理。

5-2-3:电磁波的性质

1. 光是电磁波的第一个证据

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

平面波 $\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \end{cases}$ 是其一个解。

则 $k = \frac{\omega}{c}$, 式中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi f$, $c = \lambda f$, 即 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

这里计算 c “碰巧” 与光速相同。



5-2-3:电磁波的性质

2. 电磁波是横波 $\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} \vec{E} = (k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{H} = (k_x H_{0x} + k_y H_{0y} + k_z H_{0z}) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \end{cases}$

从而 $\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \vec{k} \perp \vec{E}_0 \\ \vec{k} \perp \vec{H}_0 \end{cases}$

3. 电场与磁场垂直

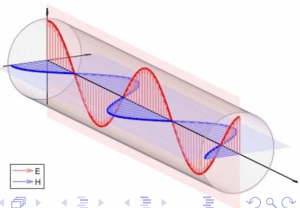
$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \end{cases} \therefore \vec{k} \times \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \mu_0 \omega \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$\therefore \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$ 即 $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi$ 和 $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \mu_0 \omega \vec{H}_0$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{k} \perp \vec{E}_0, \vec{k} \perp \vec{H}_0 \\ \vec{E}_0 \perp \vec{H}_0, \varphi = 0 \end{cases}$$

4. 电场与磁场关联:同相位、振幅同比例

$$\therefore E_0 = \frac{\mu_0 \omega}{k} H_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0 \quad \therefore \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$



5-2-3:电磁波的性质

5.光是电磁波

由 $\frac{1}{v^2} = (\mu_0\mu_r)(\epsilon_0\epsilon_r)$ 知 $c_{em} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$

则 $v = \frac{c}{n}$ 即 $n = \sqrt{\epsilon\mu}$

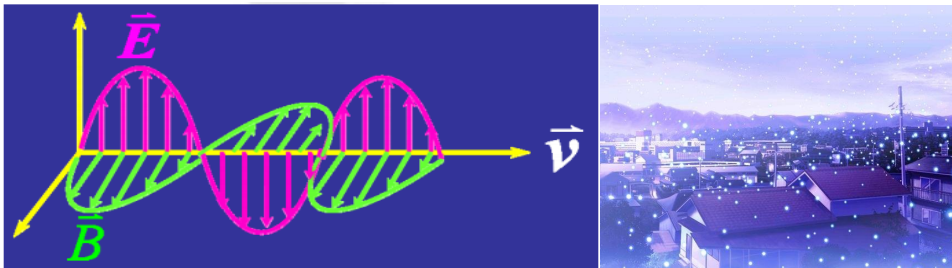


图5-14:这些是没有考虑边界条件自由空间下的电磁波

注意:这些是自由空间下的结果,没有考虑边界条件!

5-2-4 定态波动方程

电磁波在介质中传播时,介电常数与 ϵ 磁导率 μ 都是电磁波频率 ω 函数,称之为**色散**。

线性介质中: $\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega), \vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega)$ 。

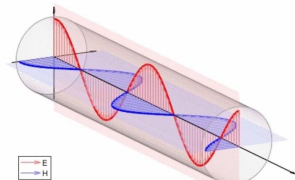
这个情况下, \vec{H} 和 \vec{E} 的耦合就无法简单地去掉了,也就无法获得上述简单的波动方程了。

然而,可以证明,如果只考虑**简谐振动**这种特定情况即电磁场激发源与辐射都作**简谐波**,称为定态电磁波或单色波,它还是麦氏方程的解。也就是说,把

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(-j\omega t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) \exp(-j\omega t) \\ \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{cases}$$

代入Maxwell方程组,消去 $\exp(-j\omega t)$,得到:

$$\nabla^2 \vec{E} + (\omega \sqrt{\epsilon \mu})^2 \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0。$$

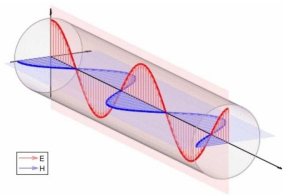


该式为 **Helmholtz** 方程,在一定频率下电磁波基本方程。

介质中的单色电磁波满足的**Maxwell**方程组可以写为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \vec{B} = -\frac{j}{\omega} \nabla \times \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{array} \right. \text{ 和 } \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0 \\ \vec{E} = \frac{j}{\omega \epsilon \mu} \nabla \times \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

依靠自己的力量而互相关联着。



麦克斯韦方程组

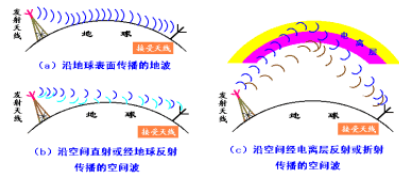
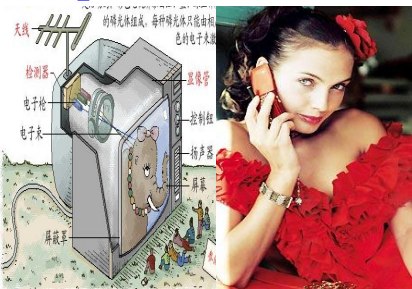
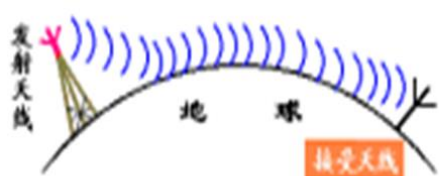
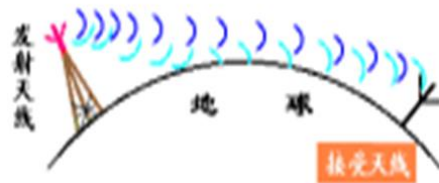


图 Z1001 无线电波传播方式示意图

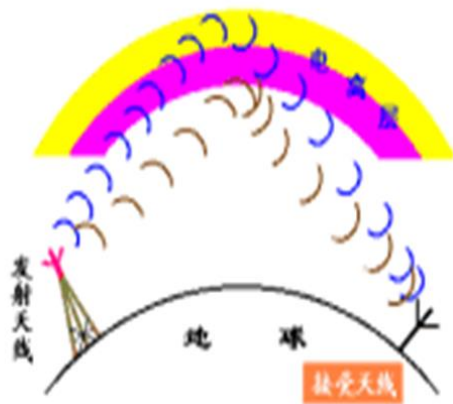




(a) 沿地球表面传播的地波



(b) 沿空间直射或经地球反射传播的空间波



(c) 沿空间经电离层反射或折射传播的空间波

图5-15:无线电波传播方式的示意图



图5-16:高能激光

§5-3 电磁场的物质观

5-3-1: 电磁场的能量

1. 电磁波传播携带能量:

能流密度矢量:单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的电磁能量,也叫**辐射强度**。

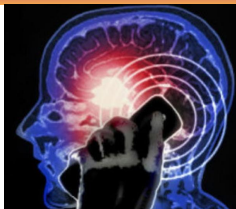


图5-17: 辐射强度

如图5-17所示对各向同性线性介质,简单推理:

静电能密度 $\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$; 静磁能密度 $\omega_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2$

则 $\omega = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2)$ $dW = \omega dV = \omega dAdl = \omega dA \cdot vdt = \omega v dAdt$

能流密度: $S = \frac{dW}{dAdt} = \omega v = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$

坡印亭(Poynting)矢量: $\because \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}}, \therefore \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}}$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}(EH + EH) = EH$$

$$\text{设 } \begin{cases} E = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \\ H = H_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \end{cases},$$

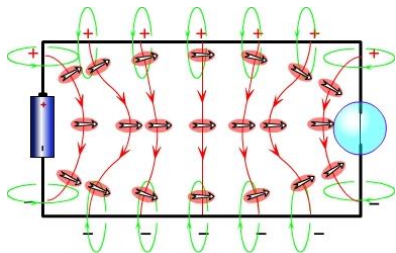


图5-18:坡印亭(Poynting)矢量

$$\text{那么 } \bar{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} EH \propto E_0^2 \quad \text{or} \quad H_0^2.$$

$$\because \vec{E} \perp \vec{H}, \therefore \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

2. 电磁波能量问题:

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV$$

考虑电磁波: $\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint_{(V)} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) + \mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{H})$$

$$= 2\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 2\mu_0 \mu_r \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 2\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\because \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\because \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = 2(\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{j}_0 \cdot \vec{E})$$

$$\because \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = -2(\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{j}_0 \cdot \vec{E})$$

因此 $\frac{dW}{dt} = -\iiint_{(V)} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV - \iiint_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{j}_0 \cdot \vec{E}) dV$

设 A 为体积 V 的闭合曲面, 则

$$\iiint_{(V)} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV = \oiint_{(A)} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = \oiint_{(A)} \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

$$\iiint_{(V)} \vec{j}_0 \cdot \vec{E} dV \Rightarrow P \stackrel{\text{def}}{=} \vec{j}_0 \cdot \vec{E} = \vec{j}_0 \cdot (\rho \vec{j}_0 - \vec{\Sigma}),$$

$$\text{则 } \iiint_{(V)} P dV = I_0^2 R - I_0 \Sigma$$

$$\text{所以 } \frac{dW}{dt} = I_0 \Sigma - I_0^2 R - \oiint_{(A)} \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

➤ 体积元内能量的增加全是在单位时间内, 由体积元内包含的电源提供的功率、体积元内电阻消耗的焦耳热、从体积元内流出来的电磁波能流(穿过体积元表面流出的“玻印亭”)。

【例5-3】 一根导线,有限长度 L 内电阻为 R , 流过电流 I , 讨论其中能量问题。

【解】

$$\oiint_{(A)} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \oiint_{(A)} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}$$

$$\because \vec{H} = \frac{I}{2\pi a} \vec{e}_\theta, \quad \vec{E} = \frac{IR}{L} \vec{e}_z,$$

$$\therefore \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{I^2 R}{2\pi a L} (-\vec{n})$$

$$\oiint_{(A)} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{I^2 R}{2\pi a L} (2\pi a L) = I^2 R$$

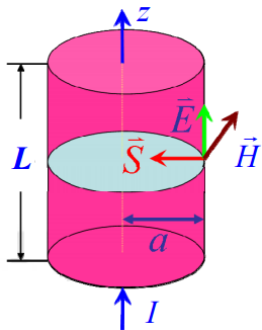


图5-19:导线内部“没有”电场

➤ 看起来,导线运输的能量损耗(至少部分)是通过坡印亭矢量从导线外表面传播进入到导线里面的。

➤ 这是一个奇怪的结果,预示着电磁波的性质----物质性。

【例5-4】 计算电容器充电过程中的能流密度与能量变化。

【解】 $\because W_E(t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (\pi a^2 b), \therefore \frac{dW_E}{dt} = \pi a^2 b \epsilon_0 E \frac{dE}{dt}$

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} = \frac{\mu_0}{2\pi a} \pi a^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 a}{2} \frac{dE}{dt}$$

$$S = EH = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} a E \frac{dE}{dt}$$

$$\therefore dW_E(t) = ASdt = (2\pi ab) \left(\frac{\epsilon_0}{2} a E \frac{dE}{dt} \right)$$

$$\therefore \frac{dW_{EM}}{dt} = \pi a^2 b \epsilon_0 E \frac{dE}{dt}$$

➤ 充电过程中, 能量不是通过导线与极板传输到电容器内的, 而是通过电容器周边的空隙(高度为 $b \ll a$) 传输入电容器。

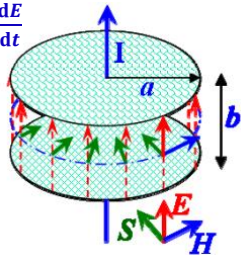


图5-20: 电容器充电过程

3. 交流趋肤效应:

- 对于某电流导线, 能量是从外部空间从侧面向导线内部注入, 如Poynting矢量所示那样。
- 如果将导线表面局部微元放大, 则得到导线表面处的电磁场分布。
- 显然, 对局域坐标, \vec{E} 只有 x 分量, \vec{H} 只有 y 分量。

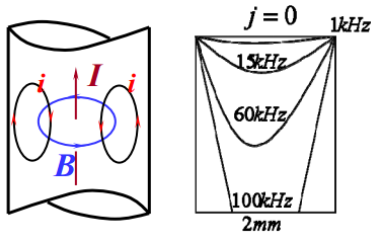


图5-21: 交流趋肤效应

无论电流正负交变变化, \vec{S} 总是指向导线内部, 这是硬道理。

$$\text{设 } \vec{E} = (E_x, 0, 0), \vec{H} = (0, H_y, 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\sigma E_x \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\because E_x = E_0 \exp[i(\omega t - kz)] \quad \because k^2 = -i\mu_0\mu_r\sigma\omega \Rightarrow k = \sqrt{-i\mu_0\mu_r\sigma\omega}$$

$$\text{设 } \delta_s = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\mu_r\sigma\omega}} \quad \because \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \therefore k = (1-i)\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r\sigma}{2}}$$

$$\therefore k = \frac{1-i}{\delta_s} \quad \therefore E_x = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta_s}\right) \cos\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta_s}\right)\right]$$

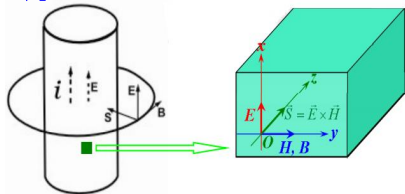


图5-22: 电流导线Poynting矢量

$$\text{关键在于: 趋肤深度 } \delta_s \begin{cases} E_x = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta_s}\right) \\ \delta_s = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\mu_r\sigma\omega}} \end{cases}$$

实际估算: 中高频时趋肤效应明显!

材料	物理参数	频率 f (kHz)	趋肤深度 δ_s
Cu	$\sigma=6 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}, \mu_r \sim 1.0$	1	0.21cm > 导线直径
Cu	$\sigma=6 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}, \mu_r \sim 1.0$	100	0.021cm < 导线直径
Fe	$\sigma=1 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}, \mu_r \sim 100-1000$	1-100	$\sim 0.001\text{cm}$ 或更小

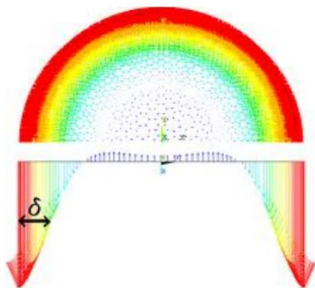


图5-23: 趋肤深度 δ_s

5-3-2:电磁场的动量

- 在狭义相对论框架下,能量与动量相联系。
- 电磁波以光速传播,因此有单位体积的动量——动量密度:

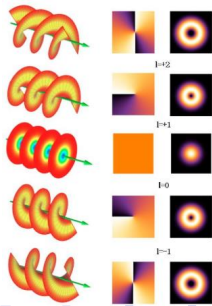
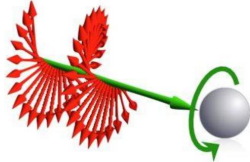
$$\text{相对论中 } E = c \cdot p \Rightarrow p = \frac{E}{c}$$

$$\text{定义电磁波的动量密度: } g = \frac{\omega}{v}$$

$$\therefore \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

$$\therefore g = \frac{\omega}{v} = \frac{S}{v^2} \Rightarrow \frac{S}{c^2} = \frac{|\vec{E} \times \vec{H}|}{c^2}$$

$$\text{则 } \vec{g} = \frac{\vec{S}}{v^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2} = \vec{D} \times \vec{B}。$$



1. 电磁场的角动量

- 既然电磁场与电磁波带动量,则围绕某一对称轴也可以有角动量。

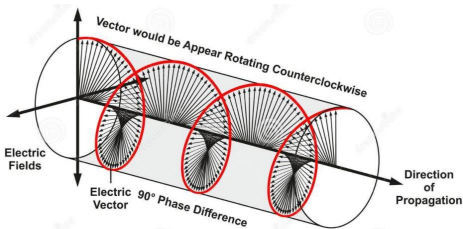
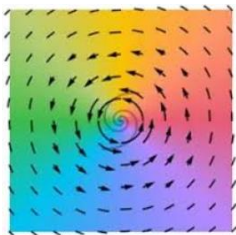


图5-24: 电磁场的动量与角动量

- 简单情况下单位体积角动量 $d\vec{L}$ 可以写为:

$$\text{动量 } d\vec{L} \text{ 可以写为: } \vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{g} = \vec{r} \times (\vec{D} \times \vec{B})$$

$$\because \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C},$$

$$\therefore d\vec{L} = \vec{r} \times (\vec{D} \times \vec{B}) = (\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{D} - (\vec{r} \cdot \vec{D})\vec{B}$$

例5-5:如图5-25所示一个半径为 R 、长为 l 的长圆柱体($R \ll l$)、质量为 m 、质量与电荷都均匀分布,体电荷密度为 $+\rho$ 。现该圆柱体绕其对称轴 z 轴以 ω 旋转($\omega R \ll c$, c 为光速)。不计边缘效应,试求:

- (1)圆柱体内外的电场与磁场强度?
- (2)圆柱体沿 z 轴的机械角动量和正则角动量?
- (3)由此旋转的荷电圆柱体所激发电磁场的角动量?

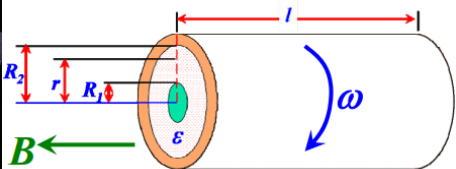


图5-25:绕轴转动圆柱体电容器

2、光压机制：

➤ 洛伦兹力产生压力,施加于晶格!

设电磁波入射到表面并被反射,分别

从冲量和能量角度求光压:

冲量定理: $\vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \Delta\vec{g}(\Delta\vec{A} \cdot d\vec{l}) = \Delta\vec{g}(\Delta A \cos\theta \cdot dl)$

$$\because \vec{g} = \frac{\vec{S}}{v^2}, \therefore \vec{g} = \frac{1}{c^2}(\vec{S}_{\text{in}} - \vec{S}_{\text{echo}})$$

$$\therefore \vec{p} = \frac{\vec{F}}{\Delta A \cos\theta} = \frac{1}{c^2}(\vec{S}_{\text{in}} - \vec{S}_{\text{echo}}) \frac{dl}{dt} = \frac{1}{c^2}(\vec{S}_{\text{in}} - \vec{S}_{\text{echo}})c = \frac{1}{c}(\vec{S}_{\text{in}} - \vec{S}_{\text{echo}})$$

功能原理: $\because \omega = \frac{S}{v}$, 面积为 dA 的截面光压正压力:

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = Fdl = \Delta\omega dV = \omega(\Delta A \cos\theta dl)$$

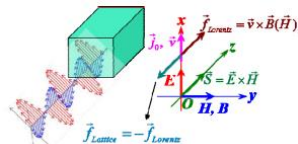


图5-26:通过光压效应来说明动量

$$\therefore \vec{p} = \frac{\vec{F}}{\Delta A \cos\theta} = \frac{1}{c} \Delta \vec{S} = \frac{1}{c} \Delta (\vec{E} \times \vec{H})$$



若存在反射: $\vec{p} = \frac{1}{c} (\vec{S}_{\text{in}} - \vec{S}_{\text{echo}}) = \frac{2}{c} \vec{S}_{\text{in}}$ 。

➤ 电磁波动量密度的大小正比于能流密度,其方向沿电磁波的传播方向。

➤ 由于电磁波带有动量,所以在它被物体表面反射或吸收时,必定产生压强,称为辐射压强。

➤ 光是一种电磁波,它产生的辐射压强称为光压。

小结

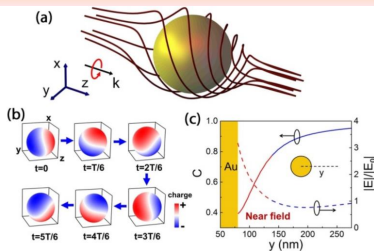
- 在两个从尺度上看是截然相反的领域中,光压却起了重要的作用:
- 在原子物理学中,最著名的现象是光在电子上散射时与电子交换动量的过程,即康普顿效应(康普顿-吴有训实验)。
- 在天体物理学中,星体外层受到其核心部分的引力,相当大一部分靠核心部分的辐射产生的光压来平衡。
- 彗星尾由大量尘埃组成,当彗星运行到太阳附近时,由于这些尘埃微粒受到来自太阳的光压比引力大,所以它被太阳光推向远离太阳的方向,形成很长的彗星尾。
- 彗星尾被太阳光照得很亮,有时能被人用肉眼看到,彗星也叫做扫帚星。
- 总之,电磁场不仅具有能量,而且具有动量。

5-3-3 电磁波的物质观

- 电磁场是物质的一种形态。
- 能量和动量是物质运动的量度,运动是物质存在形式,运动和物质不可分割。
- 电磁场具有能量和动量,它是物质的一种形态。
- “场”和“实物”之间的界限日益消失。

对黑体辐射和光电效应等一系列现象研究发现,光也具有不连续的微观结构,或光在某些方面也具有微粒性;

- 电子衍射现象发现,一向被认为是实物微粒的电子同时也具有波动性。
- 特别是,1932年发现,一对正负电子结合后可以转化为 γ 射线,即静质量为零的 γ 光子。
- 这些事实表明:电磁场和实物一样,也是客观存在的物质,只是电磁场和实物各具有一些不同的属性,而这些属性还会在一定的条件下相互转化。



5.4 赫兹实验

5-4-1 实验简介

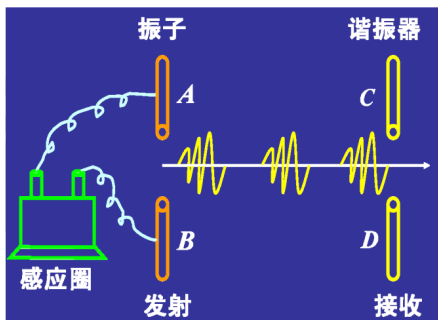


图5-27: 赫兹实验装置图

The precise formulation of the time-space laws was the work of **Maxwell**. Imagine his feelings when the differential equations he had formulated proved to him that electromagnetic fields spread in the form of polarized waves, and at the speed of light! To few men in the world has such an experience been vouchsafed ... it took physicists some decades to grasp the full significance of **Maxwell's** discovery, so bold was the leap that his genius forced upon the conceptions of his fellow workers.—**Albert Einstein(1940)**

[1] 电磁波的辐射

(1) LC 振荡电路:

➤ 电路中电荷、电流作周期性变化,相应地电场、磁场能量亦作周期性变化,且不断相互转化;若电路中 $R = 0$,又无辐射等阻尼存在,则没有能量损耗。故有 $\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 = \text{const}$

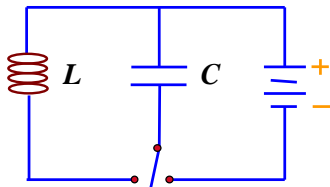


图2-28: LC 振荡电路

上式对时间求导,则得到振荡方程

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q; \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

由此得

$$\begin{cases} Q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ I = I_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right); I_0 = \omega Q_0 \end{cases}$$

➤ 其能量则为

$$\begin{cases} E_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi) \\ E_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$E = E_e + E_m = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} LI_0^2$$

➤ 上式说明：

(a) 在 LC 电路中电量或电流周期性振荡, 使电场和磁场能量不断地相互转化, 但其总和保持不变, 电磁场能量守恒。

(b) 振荡电路形成的电磁场能量几乎局限在电容器的极板间和自感线圈中, 而不能显著地向外辐射电磁能量。

(2) 电场能量显著传播出去的条件:

- 电场和磁场必须**开放**: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- 提高辐射频率, 辐射功率 $\propto f^4$

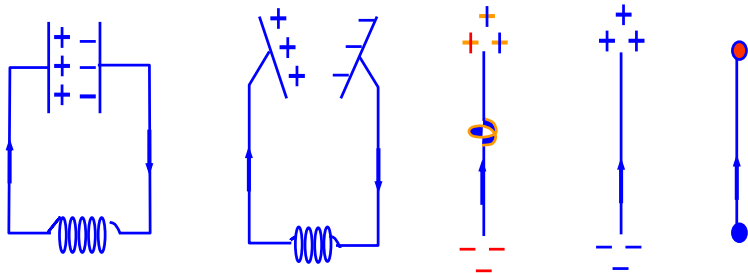
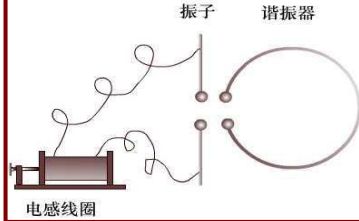


图5-29: 从LC到偶极振子

➤ 振荡电偶极子: 电矩作迅速周期性变化的电偶极子称为**振荡电偶极子**: $p = p_0 \cos \omega t$

其中: p_0 为电矩振幅, ω 为圆频率。

(A) 频率足高:

$$\text{辐射功率} \propto f_0^4 \quad \text{固有频率 } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$\therefore L、C$ 必须足小。

(B) 电路开放(天线): 参见图5-30。

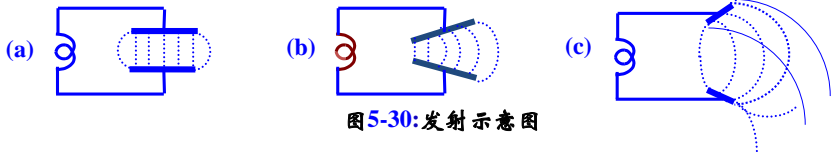


图5-30: 发射示意图

(C) 振荡偶极子模型:

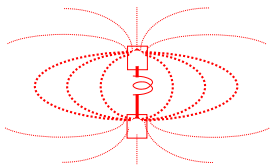


图5-31: 振荡电偶极子

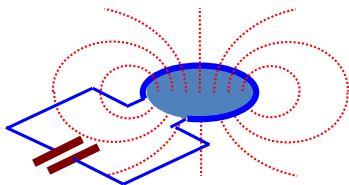
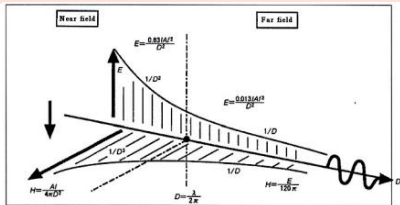


图5-32: 振荡磁偶极子

(3) 电磁波的传播机制:

变化的磁场激发的涡旋电场:

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



变化的电场(位移电流)激发的涡旋磁场:

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

由上面的方程可求得电磁场的空间分布。

近场:电力线的形状随电偶极子的振荡而改变,由非闭合变为闭合曲线;

远场(辐射场):波面趋于球面,电力线为闭合曲线,电场与磁场互相垂直,且都垂直于矢径。

(4) 电磁波辐射的能量特点:

➤ 偶极振子辐射的电磁波在单位时间内通过与传播方向垂直的单位截面积的平均能量为平均能流密度:

$$\bar{S} = \frac{\pi^2 p_0^2 f^4}{2c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta$$

几点说明:

- (A) 平均辐射功率与振动频率四次方成正比;
- (B) 离电偶极子越远,辐射强度越弱;
- (C) 辐射能量具有明显的方向性。

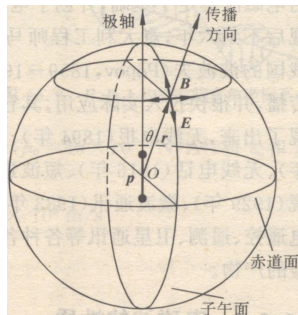


图5-33: E 和 H 的方向

➤ 若以偶极振子中心为原点,以偶极振子轴线为极轴取球坐标系:

- (A) 电场强度 \vec{E} 趋于 \vec{e}_θ 向,磁场强度 \vec{H} 沿方向 \vec{e}_ϕ ,磁场线绕极轴同心圆;
- (B) \vec{E} 与 \vec{H} 同相位且互相直, $\vec{E} \times \vec{H}$ 的方向指向波的传播方向 \vec{e}_r 。

(5) 电磁波谱: 将电磁波按波长或频率排列起来得到电磁波谱。

$\nu(\text{Hz})$	$\lambda(\text{m})$	$h\nu(\text{J})$	波 谱	微观源	检测方法	人工源
10^3	10^5	10^{-30}	电力			交流发电机
10^5	10^3	10^{-28}	RF		电子线路	电子线路
10^7	10	10^{-26}	VHF,FM			
10^8	1	10^{-25}	UHF		晶体	行波管
10^{10}	10^{-2}	10^{-23}	MW	电子,核自旋		磁控管
10^{13}	10^{-5}	10^{-20}	IR	分子振,转动	热电偶	热物体
10^{15}	10^{-7}	10^{-18}	可见光	外层电子	人眼	
10^{16}	10^8	10^{-17}	UV	外层电子	光电管	弧光,激光
10^{18}	10^{-10}	10^{-15}	X-ray	内层电子	电离室	射线管
10^{20}	10^{-12}	10^{-13}	γ -ray	原子核	革计数管	加速器



无线电波谱

名称	长波	中波	中短波	短波	米波	微波		
						分米波	厘米波	毫米波
波长	30000m~3000m	3000m~200m	200m-50m	50m~10m	10m~1m	1m~10cm	10cm~1cm	1cm~0.1cm
频率	10~100kc	100~1500kc	1.5-6 Mc	6~30Mc	30~300Mc	0.3~3Gc	3~30Gc	30~300Gc
主要用途	越洋长 距离通 讯和导 航	无线 电广 播	电报 通讯	无线 电广 播,电 报通 讯	调频无线 电广播, 电视广播 无线电导 航	电视, 雷达, 无线 电导航及其它专门 用途		

*5-4-2: 电偶极子电磁波辐射

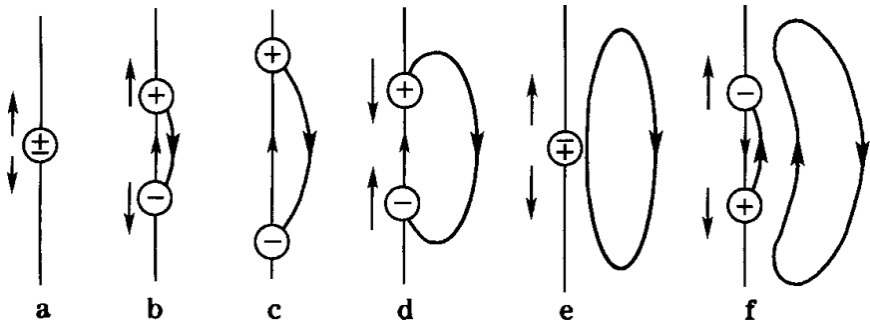


图5-34: 电偶极子的示意图

以振荡电偶极子辐射电磁场为例:

$$\vec{p}_e = \vec{p}_{e0} \cos \omega t$$

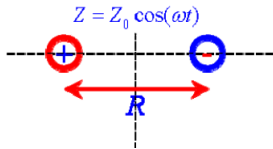


图5-35: 电偶极子的模型图

(1) 从一极端情况出发。

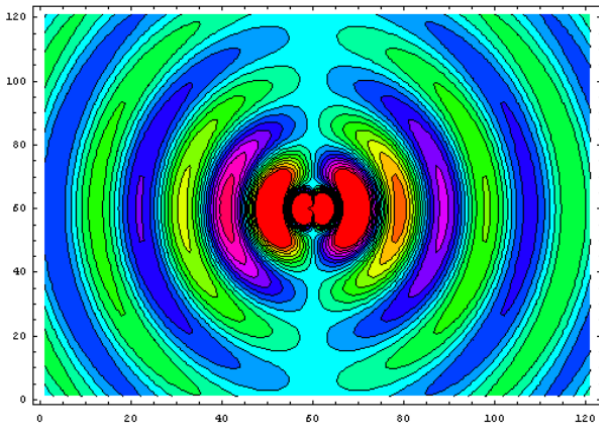


图5-36: 电偶极子的辐射图

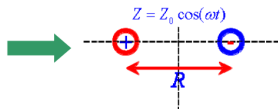
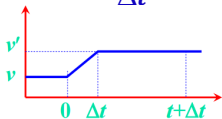
考虑真空中带电粒子匀速运动, 速度为 \vec{v} , 空间坐标为 \vec{r} 。

稳态电磁场 (E_r^0, B_ϕ^0) : if $v \ll c$, then $O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \rightarrow 0$

$$\therefore \begin{cases} \vec{E}_r^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \\ \vec{B}_r^0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \end{cases} \quad \text{设高斯单位系统} \quad \begin{cases} \vec{E}_r^0 = \frac{q}{r^3} \vec{r} \\ \vec{B}_r^0 = \frac{1}{c} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \end{cases}$$

带电粒子形成一个加速度脉冲 ($\Delta t, a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$):

$t < 0$ 时匀速直线运动, 速度为 \vec{v} ;



$t = 0$ 开始, 获得 \vec{a} 脉冲, $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$; 图5-37: 带电粒子形成一个加速度脉冲

$\Delta t \rightarrow 0, \vec{v} \rightarrow 0, \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}$;

匀速运动时电磁场由库仑与毕-萨定律计算。

$t < 0$ 时, 匀速运动坐标系随粒子一起运动, 原点为 O , 即粒子静止;

$t = 0$ 时刻开始粒子加速运动, Δt 加速之后再运动 t 时刻。

因为相对坐标系, 电荷将以速度 Δv 运动到 O' 。

建立如下球坐标系：

圆圈范围外电磁场是加速之前发出的；

圆圈内电磁场是加速之后再匀速运动后所发出的；

薄层内电磁场是加速阶段发出的。

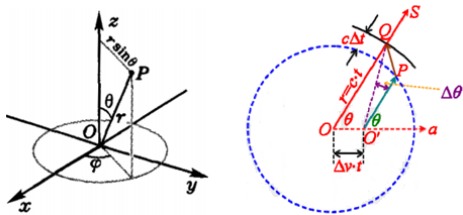


图5-38: 匀动电荷发出电磁场也是匀速运动的

圆圈范围外电磁场是加速之前发出的；

圆圈内电磁场是加速之后再匀速运动后所发出的；

薄层内电磁场是加速阶段发出的。

考虑沿与 OO' 成 θ 夹角的方向传播电场(电场线即电场方向): 加速之前电场线是 QS ;

加速之后是 $OP' // OS$, 加速段是 PQ ;

整个过程的电场线是 $O'PQS$ 。

因此薄层内(对应加速区段)电场不再是径向电场 \vec{E}_r^0 , 还形成了切向电场 \vec{E}_θ ;

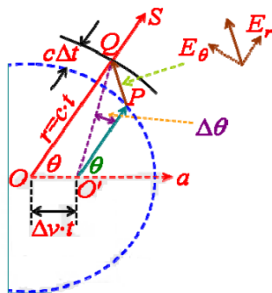


图5-39: 圆圈内电磁场

$$\therefore \frac{E_\theta}{E_r^0} = \frac{|\Delta v| t \sin \theta}{c \Delta t} = \frac{1}{c} \frac{c t}{c} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} \sin \theta = \frac{1}{c^2} a r \sin \theta$$

$$\therefore E_r^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad \therefore E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q a \sin \theta}{r}$$

注意, 电场 \vec{E}_r^0

跟电荷变速运动无关, 只要 ($v \ll c$), 其为稳态场, 不能产生磁场。

而 E_θ 是加速阶段产生的, 是时间相关电场过程, 因此会诱发磁场。

因为是真空, 必须考虑位移电流: $\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_0 E_r^0 \vec{e}_r, & \text{as } t = t \quad r \sim c(t + \Delta t) \\ \epsilon_0 E_r^0 \vec{e}_r + \epsilon_0 E_\theta \vec{e}_\theta, & \text{as } t = t + \Delta t \quad r \sim c(t + \Delta t) \end{cases}$$

下面分别求 $t < 0$ 和 $t > t$ 时两个 \vec{D} 。
 我们转化为求电通量 Φ_D 。

$$\Phi_D(t) = \iint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \epsilon_0 \vec{E}_r^0 \cdot d\vec{S} = \int_0^\theta \frac{q}{4\pi r^2} (2\pi r \sin \alpha) r d\alpha = \frac{q}{2} (1 - \cos \theta)$$

考虑 $\Delta OO' Q$:

$$\begin{cases} r \Delta \theta = |\Delta v| t \sin \theta \\ d\theta = \frac{|\Delta v|}{c} \sin \theta \end{cases}$$

$$\therefore d\Phi_D(t) = \frac{q}{2} \sin \theta d\theta = \frac{q}{2} \frac{|\Delta v|}{c} \sin^2 \theta$$

应用安培环路定理:

$$\begin{cases} \oint_{(L)} \vec{H}_\varphi \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \\ 2\pi \sin \theta H_\varphi = \frac{q a \sin^2 \theta}{2c} \end{cases}$$

即变速运动的带电粒子会辐射电磁波:

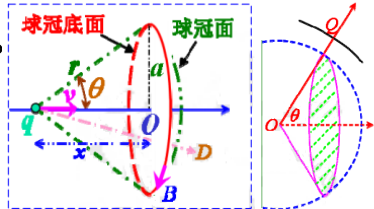


图5-40:圆锥面底面的电通量

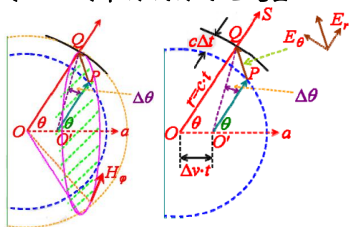


图5-41:圆锥面底面的电通量计算

$$\begin{cases} H_\varphi = \frac{1}{4\pi c} \frac{q a \sin \theta}{r} \\ B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{q a \sin \theta}{r} \end{cases}$$

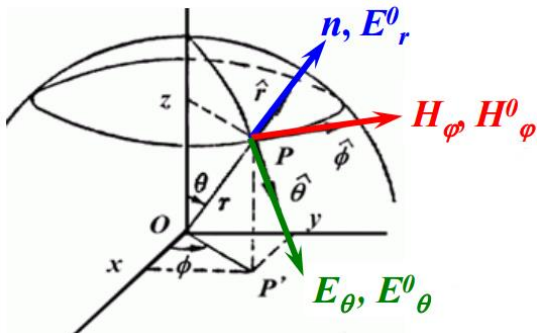


图5-42:变速运动的带电粒子辐射电磁波

几个性质:

(1) 球面电磁波, 波中任一点之传播矢量 $(\vec{n}, \vec{E}_r^0, \vec{H}_\phi^0)$ 互为垂直;

电磁波内任一点: $E_\theta/H_\phi = 1/\epsilon_0 c$;

与加速度 \vec{a} 垂直方向辐射场最强, 平行方向无辐射。

(2) 验证辐射场满足法拉第感应定律:

► 在变速运动薄层内的电磁场是否满足麦克斯韦理论?

电场只需要针对 E_θ 分量, 磁场只需要针对 H_φ 分量(其它分量在变速区内均保持不变);

构建一个矩形回路, 边 ab 长度为 l ;

边 ab 在 $\Delta\tau$ 内沿 OQ 位移 $c\Delta\tau$, 即边 bc 长度;

计算穿越矩元 $abcd$ 的磁通量。

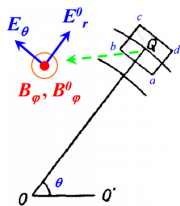


图5-43: 辐射场满足法拉第感应定律

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_{abcd} \vec{E}_\theta \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(abcd)} \vec{B}_\varphi \cdot d\vec{S} = - \left. \frac{\Delta\Phi_m}{\Delta\tau} \right|_{abcd}$$

$$\text{结果: } E_\theta l = - \left. \frac{\Delta\Phi_m}{\Delta\tau} \right|_{abcd} = - \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{qa \sin \theta}{r} \frac{lc\Delta\tau}{\Delta\tau} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qa \sin \theta}{r} l$$

$$\therefore E_\theta = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qa \sin \theta}{r} \xrightarrow{c^2 = \mu_0 \epsilon_0} - \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{qa \sin \theta}{r}$$

通过法拉第定律也可以实现 E_θ 与 B_φ 的互证;

➤ 注意:处理问题时是按照右手螺旋法则来规定方向的,所以 E_θ 是负值;

➤ 如果按 θ 坐标来定义 \vec{e}_θ 单位矢量, E_θ 就是正的!

(3) 变速运动带电粒子的电磁场:

任意变速运动总可看成是前述特例的叠加! 前述结果可以进行推广:

$$a(t) = \int a(t')\delta(t-t')dt'$$

因此在 $(t-r/c)$ 时刻位于 O 处开始变速运动的电荷,其在 t 时刻

位于空间位置 r 处的电磁场表达式为:

$$\begin{cases} \vec{E}_r^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} & \vec{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qa(t)\sin\theta}{r} \vec{e}_\theta \\ \vec{B}_\varphi^0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}(t)\times\vec{r}}{r^3} & \vec{B}_\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{qa(t)\sin\theta}{r} \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

延时时间差问题:

$$\begin{cases} \vec{E}_r^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \\ \vec{B}_\varphi^0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}(t) \times \vec{r}}{r^3} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qa(t)\sin\theta}{r} \vec{e}_\theta \\ \vec{B}_\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{qa(t)\sin\theta}{r} \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

上述表达式中 t 时刻的结果实际上是 $(t - r/c)$ 时刻从 O 点处电荷传播出来的电磁场(包括辐射场);

在前述推导中,我们将 r/c 表示为 t

了,这里要注意其差别;

下面的推导中将使用这一变换。

(4) 振荡电偶极子在 P 点处的电磁场

$$\text{电偶极子振荡方程:} \begin{cases} Z = Z_0 \cos\omega t \\ p = p_0 \cos\omega t \\ p_0 \equiv qZ_0 \end{cases}$$

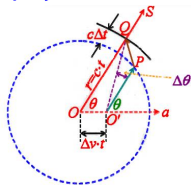


图5-44:从 O 点处电荷传播出来的电磁场

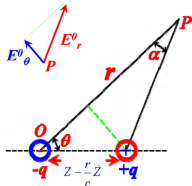


图5-45:振荡电偶极子

注意,本坐标系负电荷不动,不激发电磁场,只有稳态电磁场。

正电荷相对负电荷变速运动激发电磁场。

不过,除开 \vec{E}_r^0 外,正电荷还有 \vec{e}_θ 方向的稳态电场分量 \vec{E}_θ^0 。

考虑时间延迟问题: $p = p_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$

$$Z = Z_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \Rightarrow \dot{Z} = v = -Z_0 \omega \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{p_0}{q} \omega \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$\Rightarrow a = -Z_0 \omega^2 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{p_0}{q} \omega^2 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

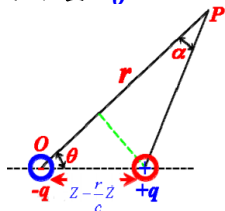


图5-46:振荡电偶极子

激发的电磁波分量(仅仅为正电荷激发):

下面看稳态分量 \vec{E}_r^0 、 \vec{E}_θ^0 和 \vec{H}_ϕ^0

$$\begin{cases} E_\theta = \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \\ B_\phi = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{4\pi c r} \end{cases}$$

作为极限情况,实际上处理的远比偶极子间距 Z_0 大很多空间电磁场。

因此,对 Z 取极限,省略 Z 及其导数之高阶项为零,即对稳态分量施加下述条件: $Z_0 \rightarrow 0, p_0 \equiv qZ_0$

稳态电场分量 \vec{E}_r^0 : $\bar{E}_r^0 \sim \bar{E}_r^0(+q) - \bar{E}_r^0(-q) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left(r - \left(Z - \frac{r}{c} \dot{Z} \right) \cos\theta \right)^2} - \frac{q}{r^2} \right]$

$$E_r^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{Z_0 \rightarrow 0, p_0 = qZ_0} \left[\frac{q}{\left(r - \left(Z - \frac{r}{c} \dot{Z} \right) \cos\theta \right)^2} - \frac{q}{r^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{Z_0 \rightarrow 0, p_0 = qZ_0} \left[\frac{q}{r^4} 2 \left(Z - \frac{r}{c} \dot{Z} \right) \cos\theta \cdot r \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2qZ}{r^3} - \frac{2q\dot{Z}}{cr^2} \right) \cos\theta = \frac{p_0 \cos\theta}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} + \frac{\omega \sin\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} \right]$$

稳态电场分量 \vec{E}_θ^0 : $\bar{E}_\theta^0 = \bar{E}_\theta^0(+q) \sim \bar{E}_r^0(+q)\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{z_0 \rightarrow 0, p_0=qz_0} \left[\frac{q \sin\alpha}{\left(r - \left(Z - \frac{r}{c}\dot{Z}\right)\cos\theta\right)^2} \right]$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{z_0 \rightarrow 0, p_0=qz_0} \left[\frac{q \left(Z - \frac{r}{c}\dot{Z}\right) \sin\theta}{r^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qZ}{r^3} - \frac{q\dot{Z}}{cr^2} \right] \sin\theta$$

$$= \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\omega \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr^2} \right]$$

稳态磁场分量 \vec{B}_ϕ^0 : $\bar{B}_\phi^0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{r}}{r^3}$

$$B_\phi^0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\dot{Z} \sin\theta}{r^2} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r^2} \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin\theta$$

$$\begin{cases} B_\phi^0 = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r^2} \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin\theta \\ B_r^0 = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi} \frac{\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \end{cases}$$

全部电磁场:

$$\left\{ \begin{aligned} E_r^0 &= \frac{p_0 \cos \theta}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} + \frac{\omega \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} \right] \\ E_\theta^0 &= \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} + \frac{\omega \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} \right] \\ E_\phi &= \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \end{aligned} \right.$$

$$B_\phi^{tot} = B_\phi^0 + B_\phi = -\frac{\mu_0 p_0 \omega \sin \theta}{4\pi r^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}$$

电偶极子电磁波辐射:

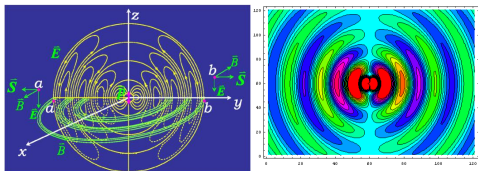


图5-47:电偶极子电磁波辐射

《本章基本要求》

- 1、理解位移电流的概念和全电流定律；
- 2、通过复习总结理解麦克斯韦方程组中各方程的物理意义；
- 3、了解电磁波的波性特征和基本性质,了解电磁波的产生与传播条件；
- 4、理解电磁波能流密度的意义,并能应用坡印亭矢量公式进行分析计算；
- 5、了解电磁场的能量及其与电磁场动量的关系,了解电磁场的物质性。

第五章 电磁理论小结

一、理论体系:

麦克斯韦位移电流假说 $\rightarrow \oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \frac{d\Phi_D}{dt}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \iiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0, \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{e0} \end{array} \right.$$

麦克斯韦方程组 $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \iiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

介质方程 $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{电介质: } \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{磁介质: } \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{导体: } \vec{j}_0 = \sigma \vec{E} \end{array} \right.$$

边界条件 $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{电介质: } \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0, \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{磁介质: } \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{导体: } \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{e0}, \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \vec{n} \times \vec{H}_{j_0} = \vec{i}_0 \end{array} \right.$$

出发点:

二、内容:

1、电磁波的性质:

(1) 横波性 $\vec{E} \perp \hat{k}, \vec{H} \perp \hat{k}, \vec{E} \perp \vec{H}$

(2) 振幅与相位 $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0, \varphi_E = \varphi_H$

(3) 波速: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}, v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, n = \sqrt{\varepsilon\mu}$

(4) 能流密度: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \bar{S} = \frac{1}{2}E_0H_0 \propto E_0^2$

(5) 动量密度: $\vec{g} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2} = \frac{\vec{S}}{c^2}$

2、带电粒子的辐射: $\bar{S} = \frac{\pi^2 p_0^2 f^4}{2c^3 \varepsilon_0 r^2} \sin^2 \theta$

3、电磁波的传播: $\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \sigma \omega}}$

3、两个物理量： I_d ——反映电场变化和电介质极化电荷运动物理量。

$$I_d = \frac{d\Psi}{dt}$$

\vec{J}_d ——位移电流密度矢量， $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

4、位移电流密度、能流密度和动量密度计算：

- (1) 位移电流密度：
(A) 分析电场和磁场的对称性；
(B) 求位移电流；
(C) 选取合理的环路，积分求 \vec{H} 。

$$\text{能量密度： } \omega = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

(2) 能流和动量密度：

$$\text{动量密度： } \vec{g} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$\text{质量密度： } m = \frac{\omega}{c^2} = \frac{1}{2c^2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_i \\ \oint_L \vec{E}_{\text{势}} \cdot d\vec{l} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{\text{势}} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

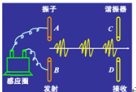
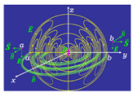
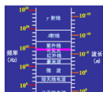
基本实验定律

麦克斯韦方程组

电磁波

$$\left. \begin{array}{l} \oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \\ \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{启发}} \oiint_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

本章知识单元与知识点小结

单元	知识点		
电磁场理论问题	电场情况 $\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$ (有源) $\oiint_{(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ (有旋) 介质方程: $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$	磁场情况 $\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (无源) $\oiint_{(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ (有旋) 介质方程: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ 导体方程: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$	麦氏方程组 $\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$ 介质方程: $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ 导体方程: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$
	平面电磁波 $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \vec{E}$	电磁场波动 $\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \vec{H}$	电磁波 光是电磁波; 电磁波是横波; 电场与磁场垂直; 电场与磁场关联。
电磁场物质观	电磁场能量 $\omega = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \epsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2)$	电磁场动量 $\vec{g} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2} = \vec{D} \times \vec{B}$	电磁场角动量 $d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{g} = \vec{r} \times (\vec{D} \times \vec{B})$
赫兹实验	实验简介 	电磁波辐射 	电磁波分布 



电磁学开启您的智慧!

谢谢!