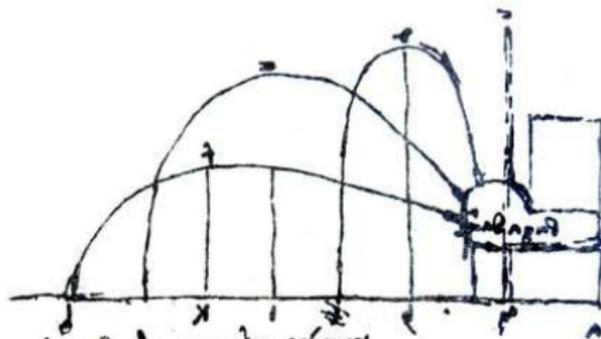


第一章 质点运动学



Handwritten text in a cursive script, likely a transcription of the original manuscript's notes. The text is written in a dark ink and is somewhat difficult to decipher due to its cursive nature. It appears to be a series of lines of text, possibly describing the physics of the trajectories shown in the diagram above.

达·芬奇手稿中关于弹道的研究

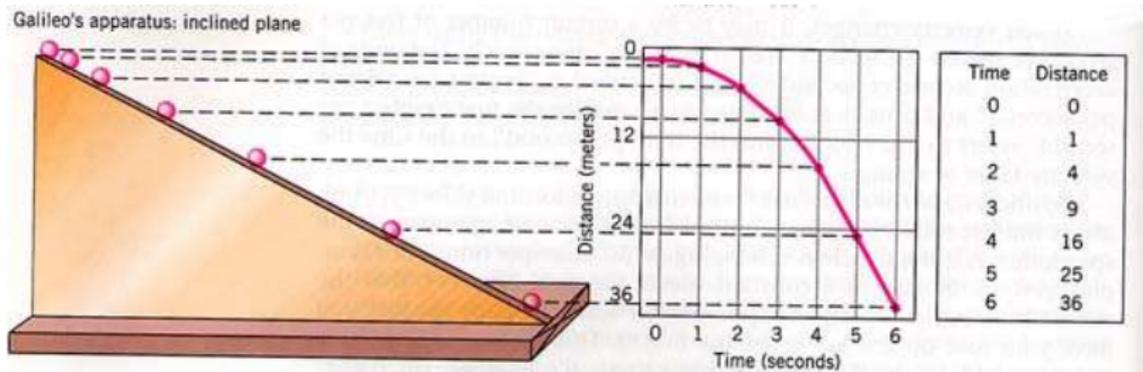
1.1 引言

• 1.1.1 质点运动学的研究方法和内容

- 观测在不同时刻质点所在的空间位置，总结质点位置随时间变化的函数关系，用函数描述质点运动。
- 给出描述质点运动的轨迹，即质点运动时所沿着的空间曲线，以及轨道的曲率半径，密切平面等。
- 给出质点的速度（包括速率和运动方向），加速度（包括速率的变化率和运动方向的转变）
- 从质点的加速度计算质点的速度，从质点的速度计算质点的位置。

1.1.2 时间、空间和牛顿力学的绝对量

描述物体的运动，要用时间和空间这两个概念。
机械运动的定义：物体的**空间**位置随**时间**的变化。

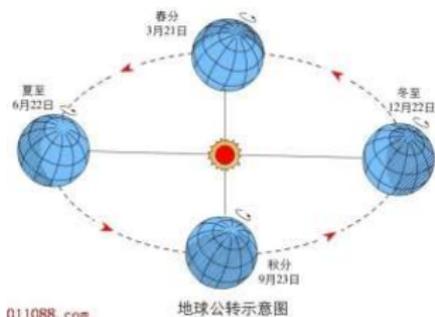


什么是时间？
什么是空间？

时间的度量

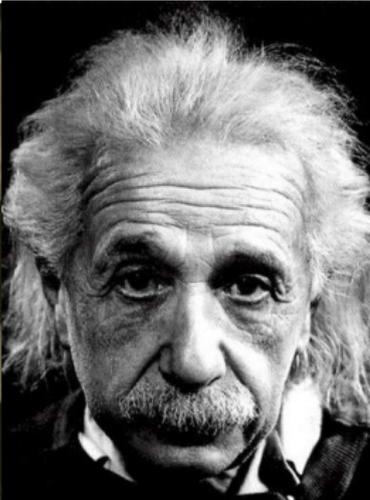
定量测量方法的形成

量度时间，通常是用钟和表。然而，钟和表并不是测量时间的唯一工具。原则上，任何具有重复性的过程或现象，都可以作为测量时间的一种钟。



时间的定义是建立在某种明显是周期性事件的重复性之上的。

更一般地说：只要知道了某个事物随时间的变化，尽管它不是重复性的过程，也可以用来测量时间。



时间的印迹，另
一种时间的记录

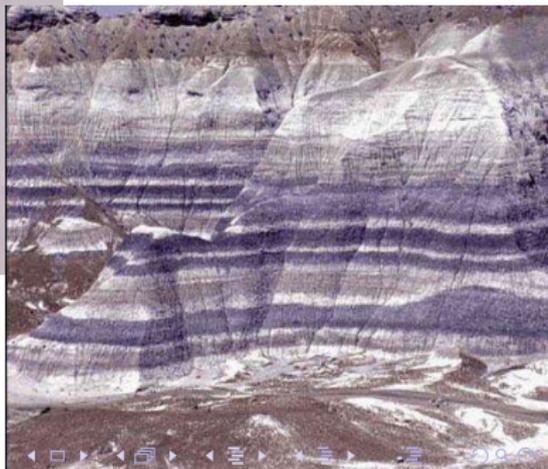


树轮



古生物化石

地层



同位素定年

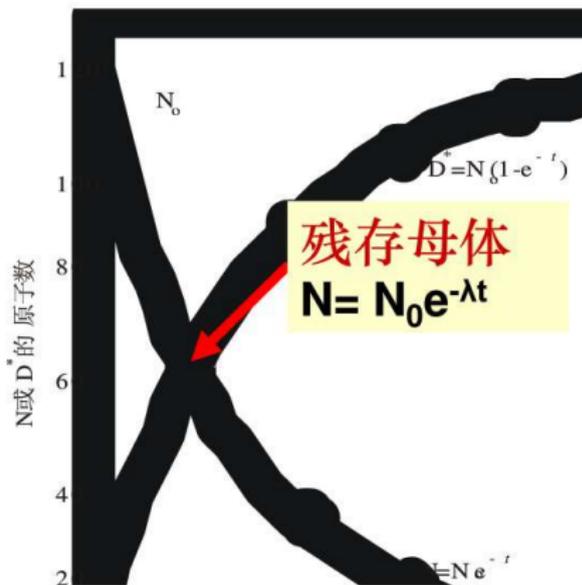
同位素衰变的基本公式

残存母体——

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

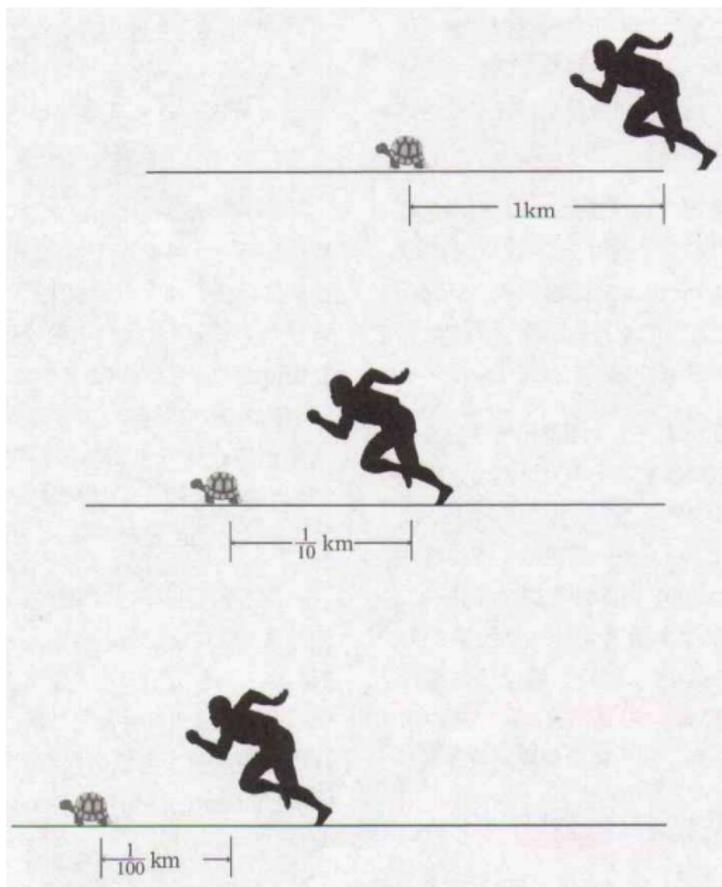
表明：原子数为 N_0 的放射性同位素，经时间 t 后残存的母体原子数

$N = N_0 e^{-\lambda t}$ ，
 N 与 t 为指数函数。



“芝诺佯谬”与度量方法的选择

古希腊哲学家芝诺有一个很著名的论证“阿基里斯追不上乌龟”。



关键是在芝诺佯谬中用了两种不同的时间度量方法。

在芝诺问题中，除了“普通”钟所测得的时间 t ，还利用了一种很特别的钟，该钟使用的重复性过程是：阿基里斯逐次地到达乌龟在前一次的出发点。我们称这种钟叫芝诺钟，它测得的时间为 t' 。

习题1.1给出一个类似情况，同学们在做习题的过程中，请体会题中的“飞鸟时”与现实时间的关系。

普通时

阿基里斯将在 $t = \frac{L}{v_1 - v_2}$ 时赶上乌龟，当

$t > \frac{L}{v_1 - v_2}$ 时，阿基里斯就超过乌龟了。

芝诺时

当 $t' = 1$ 时，阿基里斯到达龟在0时的出发点；当 $t' = 2$ 时，阿基里斯到达乌龟在1时的出发点。一般地，当 $t' = n$ 时，阿基里斯到达乌龟在 $t' = n - 1$ 时的位置。

显然，只有当 $t' \rightarrow \infty$ 时，阿基里斯才能逼近乌龟，对于任何有限的 t' ，阿基里斯总是在乌龟的后面。这就是芝诺的结论。

因此，芝诺断言：“阿基里斯永远也追不上龟。”这里“永远”的含意是 $t' \rightarrow \infty$ ，即芝诺时间的无限。

现在我们来讨论普通时 t 与芝诺时 t' 之间的变换关系。

芝诺时 (t')

普通时 (t)

0

0

1

$$L/v_1$$

2

$$\frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_1} \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

.....

.....

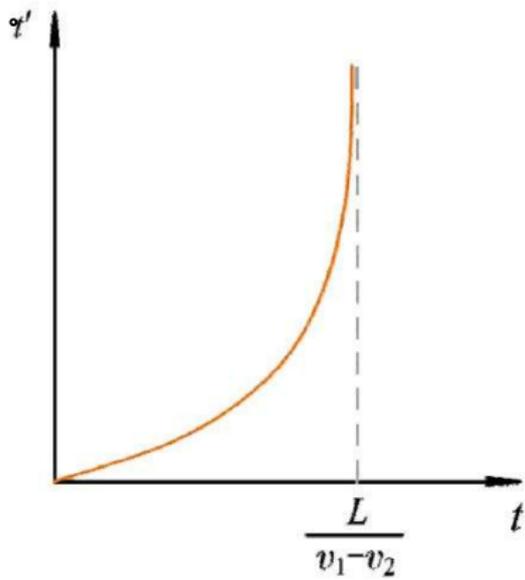
n

$$\frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} + \dots + \frac{L}{v_1} \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{L}{v_1} \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^m$$

芝诺变换

一般有
$$t = \sum_{m=0}^{t'-1} \frac{L}{v_1} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^m = \frac{L}{v_1 - v_2} \left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{t'} \right]$$

或者
$$t' = \frac{1}{\ln(v_2/v_1)} \ln \left[1 - \left(\frac{v_2 - v_1}{L}\right)t \right]$$



芝诺变换是有奇性的，即当 $t = \frac{L}{v_1 - v_2}$ 时， $t' \rightarrow \infty$ 。

所以，当芝诺时 t' 从零变化到无限时，它只覆盖了普通时 t 上的一个有限范围，即从零到 $\frac{L}{v_1 - v_2}$

从上图看到，在芝诺时 t' 到达无限之后，还是有时间的。但是，在该范围内，即 $t > \frac{L}{v_1 - v_2}$

用芝诺钟已经无法度量它们了。简言之，芝诺的佯谬，来源于芝诺时的局限性，芝诺时不可能度量阿基里斯追上乌龟之后的现象。

芝诺佯谬给我们的启示是，时间与时间的度量不同，一种时间的度量达到无限之后，还是可以有时间的；反之，一种时间的度量达到无限，从其它的度量看，可能是有限的。

时间测量的常用方法

- 短的时间
 - (1) “天”与“小时” 沙漏
 - (2) “分”与“秒” 机械摆
 - (3) 电子摆与高频振荡电路
 - (4) 介子寿命与传播距离

最短寿的奇异共振态的寿命只有 10^{-24} 秒，大致相当于光通过氢原子核所花的时间。

目前物理学中涉及的最小的时间是 10^{-43} 秒，称为普朗克时间。普朗克时间被认为是最小的时间，比普朗克时间还要小的范围内，时间的概念可能就不再适用了。

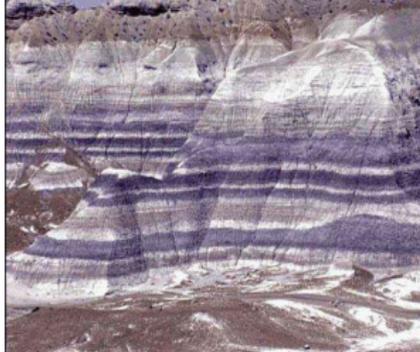
先后顺序

- 长的时间

- (1) “天”与“年”

- (2) 稍长的时间 树木年轮、沉积物

- (3) 更长的时间 放射性物质半衰期



在这种情况下，并不出现周期性，但存在一种新的“规则性”。

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$$

地球本身的年龄约为46亿年，太阳系的年龄为46亿年，宇宙的年龄大约为100亿年到200亿年（ $6 \times 10^{17} \text{s}$ ），最新成果认为是约137亿年。宇宙是有起点的，谈论更早的时间似乎是没有意义的。

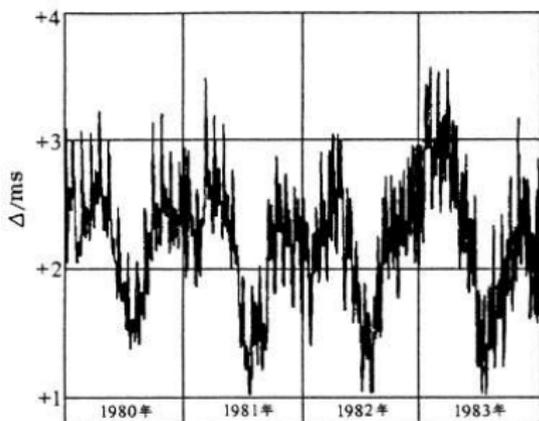
物理学中涉及的最长时间是 10^{38} 秒，它是质子寿命的下限。

时间的单位和标准

为统一使用时间，有必要确定时间的单位和标准。
我们选择一天或一秒作为时间的某个标准单位，并把所有其它的时间表示为这个单位的倍数或分数。

其次，选择一只标准的钟，使全世界所有的钟有一个统一的计时，格林威治时间就是这种需要产生的。

原子钟



1967年10月第十三届国际度量衡大会（国际计量大会）通过决议，将时间单位“秒”定义为：位于海平面上的 ^{133}Cs 原子基态的两个超精确能级在零磁场中跃迁的辐射周期 T 与1秒的关系为 $1\text{秒} = 9192631770T$ 。

空间（长度）的度量

空间（长度）的定量测量方法

长度是空间的一个基本性质。

测量空间长度的方法是选用一种长度单位再加上计数。

测量小的长度，可以用此长度单位的几分之一作为一个较小的长度单位去测量。

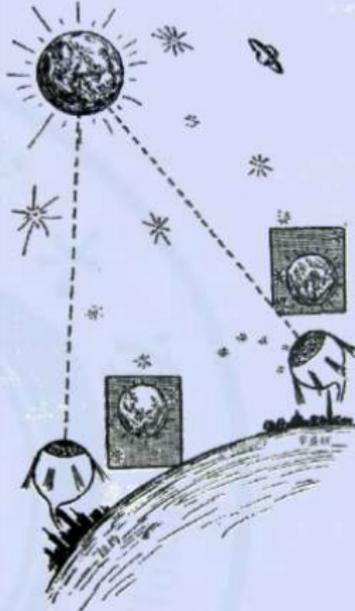
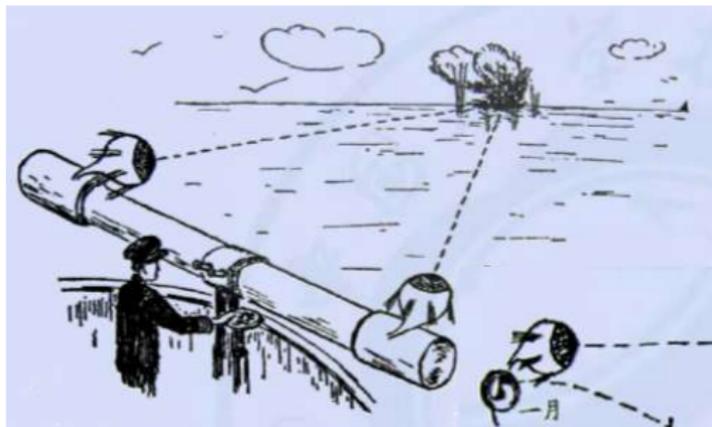
我们目前采用的长度单位是米。

目前所涉及的空间尺度约为 $10^{-35} \sim 10^{26}$ 米

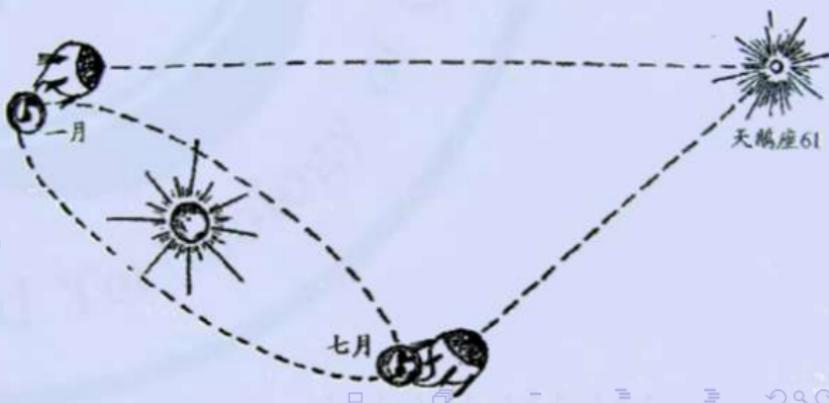
不同尺度长度的测量方法

日常范围：米尺，千分尺，螺旋测微计。

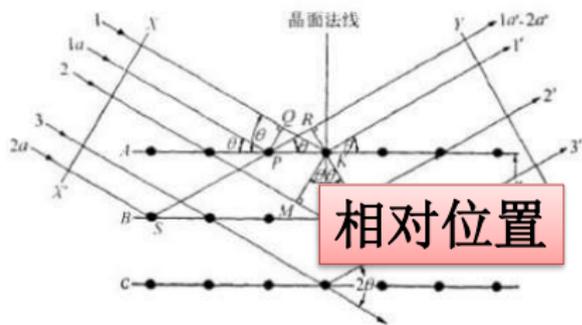
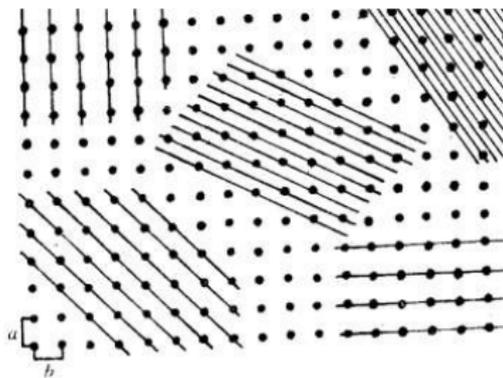
大的尺度：利用光，三角法



目前，物理学中涉及的最大长度是 10^{26} 米，它是宇宙曲率半径的下限。



小的尺度：等间隔分割成更小的刻度，毫米，微米
X射线衍射



$$2d_{HKL} \sin \theta = \lambda$$

原子的直径约为 10^{-10} 米，原子核的大小约为 10^{-15} 米。

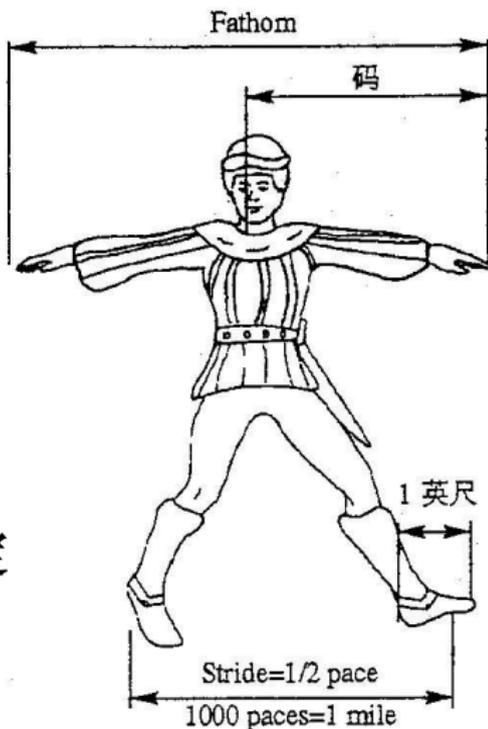
目前物理学中已达到的最小长度为 10^{-20} 米，它是弱电统一的特征尺度。

普朗克长度约为 10^{-35} 米，被认为是最小的长度，意思是说，在比普朗克长度更小的范围内，长度的概念可能就已经不存在了。

长度的单位和标准



人们希望用某些自然长度作为长度单位。出于这种考虑，定义北极到赤道为1万公里。即米被定义为地球半径的 $\frac{\pi}{2} \times 10^{-7}$ 倍。



1960年以前，国际上的定义铂铱米尺作为1米的定义。



1960年第十一届国际计量大会上改用光的波长作为长度标准：米等于 ^{86}Kr 原子的 $2p_{10}$ 和 $5d_5$ 能级之间跃迁时所对应的辐射在真空中的波长 λ 的1,650,763.73倍，即

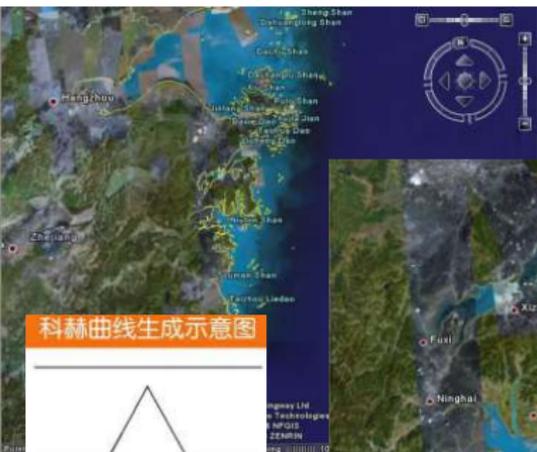
$$1\text{米} = 1650763.73 \lambda$$

1983年10月召开的第十七届国际计量大会上已正式通过了新的米的定义，即用光速值来定义“米”：
米是光在真空中在 $\frac{1}{299792458}$ 秒的时间间隔内所传播的路程长度。光速c是一个固定的常数，即
 $c=299792458$ 米/秒。

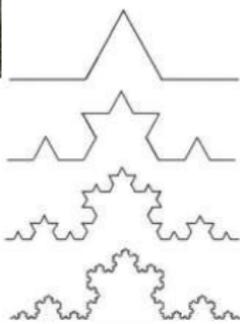
1天文单位（1AU） 地球与太阳之间的平均距离
1光年光在一年内走过的距离

时间、空间测量中的局限性

- (1)长度测量和时间测量的结果有赖于观察者。 **相对性**
- (2)长度测量和时间测量的精度受到限制。 **不确定性**



科赫曲线生成示意图



海岸线的长度和测量时使用的“尺子”将成比例关系，用测量精度越高的尺子，海岸线将越长

有效数字、不确定度、估算、单位制与量纲

(1) 测量

物理学是**实验科学**，也就是**要通过实验来度量一些物理量并寻求物理量之间的联系**。

要度量某个物理量，首先要选定该物理量的**单位**。**单位应体现于具体的事物**。其次，需要规定该物理量与单位的比较规则。

直接测量（长度）

间接测量（体积）

(2) 任何一种度量都不是绝对精密的

我们**不可能绝对精密地量出一个物理量的值**，度量结果总会带有一些偶然因素。

例如：**15.4g**并不同于**15.40g**。

求某物体的密度

测量得体积 12.5cm^3 (准到 0.1cm^3 ，大约占所量体积的1%)

质量 15.40g (准到大约0.1%)

则密度 $=15.40\text{g}/12.5\text{cm}^3=1.23\text{g}/\text{cm}^3$

假如写成密度 $=1.232\text{g}/\text{cm}^3$ ，那就造成了假象，好像密度居然可以准到大约0.1%。

物理学的各个原理、理论只有在一定准确度内才是正确的。

(3) 不确定度

测量所得的结果就存在一定的**不确定性**；反过来，也表明该结果的**可信赖程度**。

它是测量结果质量的指标。不确定度愈小，所述结果与被测量的真值愈接近，质量越高；不确定度越大，测量结果的质量越低。

在给出物理量的测量结果时，**必须给出相应的不确定度**，一方面便于使用它的人评定其可靠性，另一方面也增强了测量结果之间的可比性。

也称“**误差**”

不确定度传递理论（圆柱体体积的测量）

间接测量量体积 V 与直接测量量半径 r 和高 h 之间的函数关系为 $V=\pi r^2 h$ 。

根据全微分理论，有

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$$

体积 V 的不确定度 ΔV 与半径 r 、高 h 的不确定度 Δr 、 Δh 之间的关系就是

$$\Delta V = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

相对不确定度之间的关系为

$$\frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

(4) 基本力学量的估算与量级分析

有些时候我们无法对某些量进行较为精确的测量，有些时候我们只对某些量的近似值感兴趣，有些时候我们只要知道某些量的大概数值就够用了，而测得其精确值会花费很多时间或较大的代价；这时就需要“估算”。

西湖的水有多少？

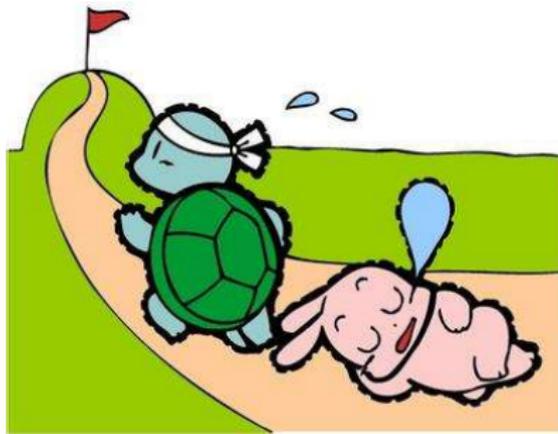
如果估算后只保留一位有效数字，并用10的幂表示，就是“量级估算”或“量级分析”。



GUESS-潮流系列 W65006L2 女士石英表

龟兔赛跑—乌龟能否领先？

[例题] 乌龟爬行速度 $< 0.05 \sim 0.1 \text{ km/hr}$ ，兔子奔跑速度 $\sim 50 \text{ km/hr}$ 。试问 800 m 龟兔赛跑中，兔子打个盹之后，谁能赢得比赛？



[解]：乌龟完成 800 m 所需时间至少为： 8 hr ；

兔子完成 800 m 所需时间为： $0.16 \text{ hr} \sim 10 \text{ min}$

乌龟要赢得比赛，需要兔子沉睡 8 hr 左右，一般打个盹时间为 $0.5 \sim 3 \text{ hr}$ ，所以乌龟无法赢得比赛。

如果比赛距离为 100 m ，那么，乌龟需要 1 hr ，兔子需要 1.2 min ，乌龟有可能赢得比赛。

(5) 单位制

在SI中，有七个基本单位。

- ①长度单位：米(m)。
- ②质量单位：千克(kg)。
- ③时间单位：秒(s)。
- ④电流单位：安培(A)。
- ⑤热力学温度单位：开尔文(K)。
- ⑥物质的量单位：摩尔(mol)。
- ⑦发光强度单位：坎德拉(cd)。

SI有两个辅助单位（纯几何单位）：

- ①弧度(rad)。
- ②球面度(sr)。

换算

若限于力学量，只用到米、千克、秒三个基本单位，可称为米·千克·秒制（MKS制）。

SI还规定了表示基本单位倍数的词冠。

(6) 量纲分析及其实用意义

为了表明导出单位如何由基本单位组成，导出单位换算，通常运用一种特定的方法——量纲。

物理量A。它的单位由长度单位的p次幂，质量单位的q次幂、时间单位的r次幂组成，那么当长度单位改为l倍时，A的单位相应地改为 l^p 倍；当质量单位改为m倍时，A的单位相应地改为 m^q 倍；当时间单位改为t倍时，A的单位相应地改为 t^r 倍。

以上换算关系可以简括地表为：“物理量A的量纲是 $L^p M^q T^r$ ”，记作 $[A] = L^p M^q T^r$

物理定律应当与单位的选取无关。表达物理定律的等式两边应该具有相同的量纲。

用量纲分析的方法，甚至不知道定律和物理机制的细节，就可以进行一些定性的判断。

1.2 质点和参考系

1.2.1 质点和参考系

保留在问题中起决定作用、主要作用的某些性质，撇开在问题中只起偶然作用或不起什么实质作用的性质。这样，本来比较复杂的实际对象就简化成一种理想化与抽象化了的东西——“模型”。

下落物体的研究：空气阻力

自由落体 G

有阻力落体 $G - 6\pi\eta r v$

$$\eta = 1.80 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$$

在研究不同物理现象的时候，同一个实际对象很可能要用不同的模型来代替。



八大行星绕日公转

地球为例：绕日公转
地球自转

质点
刚体

质点—牛顿力学的基本模型

质点，即大小为零的物体。 “质” + “点”

只有当物体运动的尺度大于物体本身的线度时，或者在不考虑物体的转动和内部运动时，才可以采用质点模型。

除此之外，引入质点模型还为研究质量连续分布的物体的运动提供了一个处理方法。

质点是一个物理对象。对于一个物理对象，用什么数学语言来描述，并不是一件很自然的事。物理上，就是要寻找那种能正确地描写物理对象的数学。

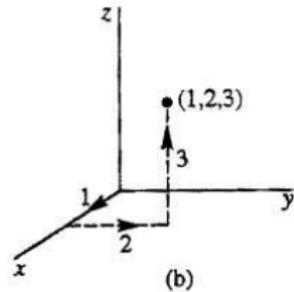
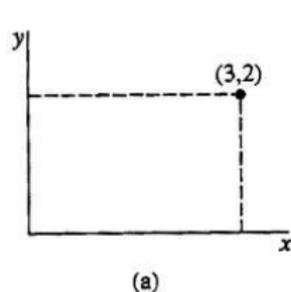
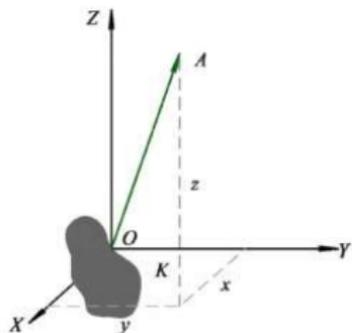
在牛顿力学中，质点的空间几何性质相当于欧几里德几何上的点。在解析几何中，点的位置是由它的坐标值来确定的。质点的位置也可以用这种坐标方法来给定。

参照系与参考坐标系

运动只能理解为物体的相对运动。在力学中，一般讲到运动，总是意味着相对于坐标系的运动。

——爱因斯坦

利用坐标方法，首先要给出坐标系，坐标值总是相对于一定的坐标系而言的。

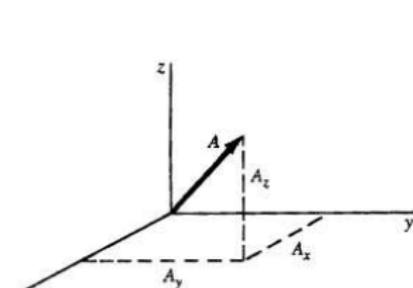


笛卡儿坐标系(a)二维和(b)三维

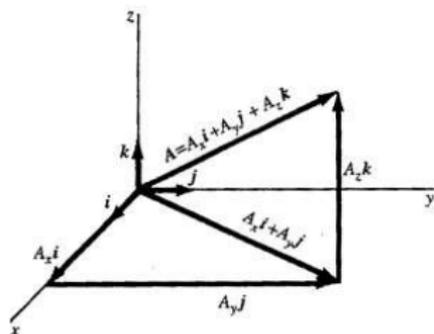
如果选取物体K上的某点O为坐标原点，并选取x、y、z三个轴，质点A的位置即由x, y, z所确定。这时，我们称所选取的物体K为参考系，而称坐标系OXYZ为参考坐标系。

除了坐标方法外，也可以利用矢量方法来描写质点A的位置。我们定义质点A的位置矢量 \vec{r} 的大小为OA的长度，而方向从O指向A。用这个矢量就完全确定了质点A的位置。在上面的坐标系中，位置矢量的分量就是坐标x, y, z，或写为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



矢量A的笛卡儿分量(A_x, A_y, A_z)



用其分量表示的矢量A

两种描述质点A的位置的方法，是完全等价的。

位置是具有相对性的物理量。

1.2.2 轨迹和运动学方程

- **轨迹:**

- 质点在运动中所经过的各点在空间中连成的曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$



一般情况

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

只反映空间性质

• 运动学方程

– 质点的位置 \vec{r} 关于时间的函数

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

给出物体运动的一切情况

运动方程 $\xrightarrow{\text{消去 } t}$ 轨迹方程

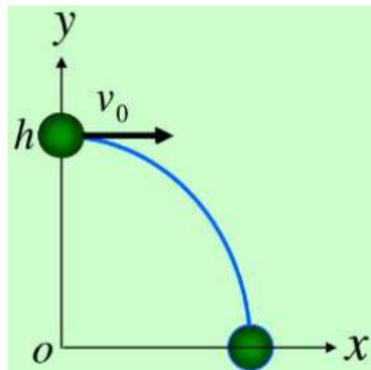
[例题] 平抛运动

[解] 运动方程:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

轨迹方程:

$$y = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$$



[例题] 已知一质点做平面运动，其速率为常量 c ，矢径的角速度的大小为常数 ω 。求该质点的运动学方程和轨迹方程。

[解]： $\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 = c^2, \dot{\varphi}^2 = \omega^2$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \sqrt{c^2 - \omega^2 r^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{c^2 - \omega^2 r^2}} = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow r = \frac{c}{\omega} |\sin \omega t|$$

运动学方程： $r = \frac{c}{\omega} |\sin \omega t|, \quad \varphi = \omega t$

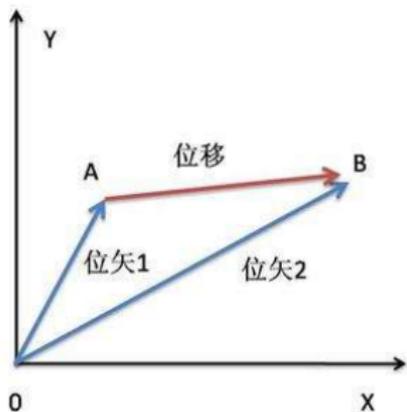
轨道方程： $r = \frac{c}{\omega} |\sin \varphi|$

1.3 速度与加速度

1.3.1 位移、路程与速度：

(1) 位矢与位移

为方便起见，取运动所在平面为 xy 平面。在时刻 t ，质点的**位置**，即它对原点的位移，用矢量 \vec{r} 表示，就称为**位置矢量**。随着时间不同，位置矢量的变化即为**位移**。



(2) 平均速度

当质点从A点（位置矢量为 \vec{r}_1 ）运动到B点（位置矢量为 \vec{r}_2 ）时，表示质点位置变化的位移矢量为 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ，所经过的时间为 $\Delta t (= t_2 - t_1)$ ，在此时间间隔内，质点的平均速度定义为

$$\vec{V} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\text{位移（矢量）}}{\text{时间（标量）}}$$

平均速率

当质点从A点（路程为 $s(t_1)$ ）运动到B点（路程函数为 $s(t_2)$ ）时，表示质点位置变化的路程长度为 $\Delta s = s_2 - s_1$ ，所经过的时间为 $\Delta t (= t_2 - t_1)$ ，在此时间间隔内，质点的平均速率定义为

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{路程 (标量)}}{\text{时间 (标量)}}$$

位移与路程的异同点：

1. 位移与路程不同于位矢，它们与坐标原点的选取无关；
2. 位移是矢量，路程是标量，大小也不相等；
3. 位移仅反映初位置到终位置的相对改变，路程涉及过程

“飞矢不动” 佯谬与速度概念的引入

“飞矢不动”（运动的箭静止）

芝诺问他的学生：“一支射出的箭是动的还是不动的？”

“那还用说，当然是动的。”

“确实是这样，在每个人的眼里它都是动的。可是，这支箭在每个瞬间里都有它的位置吗？”

“有的，老师。”

“在这一瞬间里，它占据的空间和它的体积一样吗？”

“有确定的位置，又占据着和自身体积一样大小的空间。”

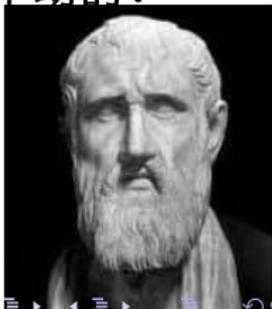
“那么，在这一瞬间里，这支箭是动的，还是不动的？”

“不动的，老师。”

“这一瞬间是不动的，那么其他瞬间呢？”

“也是不动的，老师。”

“所以，**射出去的箭是不动的！**”



(3) 瞬时速度与速度的瞬时性

把计算平均速度的时间间隔取得尽可能地小。这时，我们可以发现，位移与经过时间的比值平稳地趋近于一个确定的**极限**值。就是说，如果以 \vec{v} 代表这一极限值，

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

即在任何给定时刻（或位置）的速度，叫做**瞬时速度**。

分析一下自由落体

$$\bar{V}_{1 \rightarrow 1+\Delta t} = \frac{x(1+\Delta t) - x(1)}{1+\Delta t - 1} = \frac{4.9 \times (1+\Delta t)^2 - 4.9 \times 1^2}{\Delta t} = (9.8 + 4.9\Delta t) \text{米/秒}$$

此式表明，从第1秒末开始取不同的时间间隔 Δt ，所得的平均速度是不相同的。

既然 Δt 越小描述得越精确。我们取 Δt 为无限小，或者相当于 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限情况，这时平均速度变成为：

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (9.8 + 4.9\Delta t) = 9.8 \text{米/秒}$$

这个9.8米/秒的物理意义是自由落体在第1秒末的一个无限小时间间隔中的平均速度，称这个值为自由落体在第1秒末的瞬时速度。

瞬时速度这个概念，使我们对运动的认识大为深化。

自由落体运动在任何时刻 t 的瞬时速度 $V(t)$

$$\begin{aligned} V(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4.9 \times (t + \Delta t)^2 - 4.9 \times t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (9.8t + 4.9\Delta t) = 9.8t \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

速度的大小叫做速率。速度是矢量，速率是标量。

1.3.2 加速度

(1) 匀速运动

速度的大小和方向都保持不变的运动叫做匀速运动。
速度的大小或方向有一个发生变化的就叫变速运动。

(2) 变速运动与加速度

当物体运动时，其速度的大小和方向只要有一个发生变化，就是变速运动。

质点速度随时间的变化率为质点的加速度。

质点从A到B的运动过程中的平均加速度 \bar{a} 定义为速度的变化除以时间间隔，即

$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

瞬时加速度定义为

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

可以计算出自由落体在 t 到 $t+\Delta t$ 间隔中的平均加速度:

$$\bar{a}_{t \rightarrow t+\Delta t} = \frac{9.8(t + \Delta t) - 9.8t}{\Delta t} = 9.8 \text{米/秒}^2$$

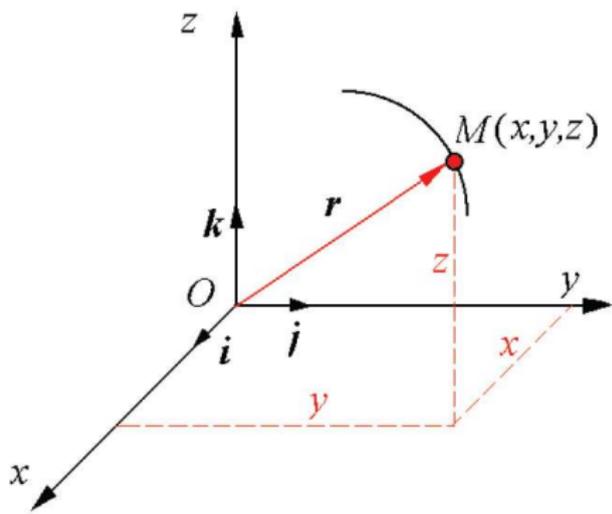
这个结果中不含 t 和 Δt ，也就是说，对任何一段时间间隔，自由落体的平均加速度都是一样的。这种加速度不随时间变化的运动，称为匀加速运动。

在动力学中，对力学的讨论几乎都是基于位置矢量、速度和加速度这三个物理量。

思考：为什么不考虑加加速度？

1.4 直角坐标系中运动的描述

• 直角坐标系中的表达式



质点M的位矢

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

速度

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

加速度

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

• 1.4.1 直线运动

一维运动

– 运动学方程

$$x = x(t)$$

– 瞬时速度

$$\bar{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

– 瞬时加速度

$$\bar{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

常见问题

1. 已知质点在各时刻的函数 $x(t)$ ，求速度和加速度；
2. 已知质点在各时刻的速度 $v(t)$ ，求它的运动学方程；
3. 已知加速度 $a(t)$ ，求它的速度 $v(t)$

已知瞬时速度 $v(t)$ 和 $t=0$ 时刻质点的位置 $x(t=0) = x_0$
则运动学方程为：

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt'$$

若求路程，则为： $s(t) = s_0 + \int_0^t |v(t')| dt'$

已知瞬时加速度 $a(t)$ 和 $t=0$ 时刻质点的初始位置
 $x(t=0) = x_0$ 和初始速度 $v(t=0) = v_0$ ，则

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t') dt'$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left[v_0 + \int_0^{t'} a(t'') dt'' \right] dt'$$

[例题] 跳水运动员沿铅直方向入水，接触水面速率为 v_0 ，入水后地球对他的吸引和水的浮托作用相抵消，仅受水的阻碍而减速。自水面向下取 Oy 轴，其加速度为 $a_y = -kv_y^2$ ， v_y 为速度， k 为常量，求入水后运动员速度随时间的变化。

[解] 设运动员为质点。根据已知条件有

$$\frac{dv_y}{dt} = -kv_y^2 \quad \longrightarrow \quad -v_y^{-2} dv_y = k dt$$

设入水时为计起点， $t=0$ 时 $v_y = v_0$ 。运动过程中 t 时刻速度为 v_y 。将上式两侧分别以 v_y 和 t 为积分变量，以 $-v_y^{-2}$ 和 k 为被积函数，作定积分得

$$1/v - 1/v_0 = kt \quad \longrightarrow \quad v = v_0 / (k v_0 t + 1)$$

可见运动员速度随时间减小且当 $t \rightarrow \infty$ 时，速度变成零。

[例题] 运动会上跳水运动员自10 m跳台自由下落，入水后因受水的阻碍而减速。自水面向下取坐标轴 Oy ，其加速度为 $-kv_y^2$ 。 $k=0.4\text{m}^{-1}$ 。求运动员速度减为入水速度1/10时，运动员入水深度。

[解] 设运动员以初速度零起跳，至水面之速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10} \text{ m/s} = 14 \text{ m/s}$$

在水中加速度为

$$\frac{dv_y}{dt} = -kv_y^2$$

因落至不同位置，对应不同速度，故可视 v_y 为 y 的函数，即 $v_y = v_y(y)$ 。于是可写

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dv_y}{dy} v_y$$

代入上式得

$$\frac{dv_y}{dy} = -kv_y$$

即
$$\frac{dv_y}{v_y} = -kdy$$

作不定积分并化简得 $v_y = Ce^{-ky}$

C 为积分常数。引入初始条件 $y = 0$ 时 $v_y = v_0$ ，代入上式写出 C ，得

$$v_y = v_0 e^{-ky}$$

设 $v_y = v_0/10$ ，将 $k = 0.4\text{m}^{-1}$ 代入此式，即得

$$y = 5.76\text{m}$$

即运动员深入水中 5.76m 时，其速度变为入水时速度的 $1/10$ 。

函数	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	e^x	ax^n	$\cos ax$	$\sin ax$	e^{ax}
逆微商	$x^n + C$	$\sin x + C$	$\cos x + C$	$e^x + C$	$a \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)	$\frac{1}{a} \sin ax + C$ ($a \neq 0$)	$-\frac{1}{a} \cos ax + C$ ($a \neq 0$)	$\frac{e^{ax}}{a} + C$ ($a \neq 0$)

[例题]一质点沿x轴正向运动，假设该质点通过坐标为x时的速度大小为kx（k为正常量）。求（1）此时该质点的加速度；（2）该质点从x=x₁点出发运动到x=x₂点处所经历的时间间隔Δt。

[解]: (1) ∵ $v = kx$

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = k \frac{dx}{dt} = kv = k^2 x$$

$$(2) \because \frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow \frac{dx}{x} = k dt$$

$$\therefore \Delta t = \frac{1}{k} \ln \frac{x_2}{x_1}$$

[例题]一质点沿x轴运动，其加速度随位置的变化关系为： $a = 3x^2 + \frac{1}{3}$ ，若x=0处，速度 $v_0 = 5m/s$ ，

问：x=3m处的速率是多少？

[解]: $\because a = a(x) = a(x(t))$

复合函数

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

链式法则

$$= v \frac{dv}{dx} = 3x^2 + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \int_0^x \left(3x^2 + \frac{1}{3} \right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = x^3 + \frac{1}{3} x$$

$$\therefore v \Big|_{x=3m} = 9m/s$$

1.4.2 曲线运动

质点的速度 \vec{V} 必定与质点的路径相切。

矢量 \vec{r} , \vec{V} 及 \vec{a} 是相互有联系的, 并可用它们的分量表示成:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t;$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t$$

运动迭加原理 (独立性原理)

一个运动可看成几个独立进行的运动的迭加。

独立运动

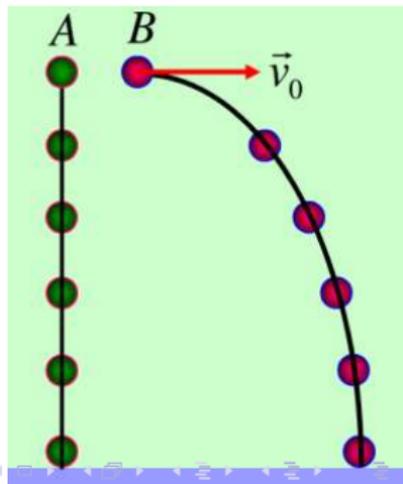
合成
分解

合运动

简单运动

←

复杂运动



[例题]一质点在平面上运动，若该质点位置矢量的表达式为 $\vec{r} = at^2\vec{i} + bt^2\vec{j}$ （其中 \mathbf{a} ， \mathbf{b} 为常量）。问该质点做什么运动？

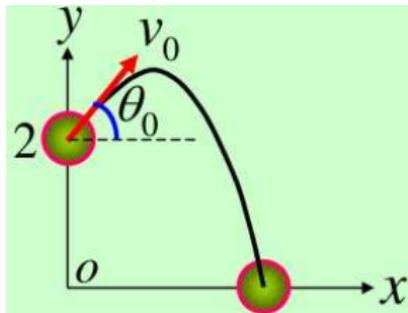
[解]： $x = at^2, \quad y = bt^2$

$$\rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2a\vec{i} + 2b\vec{j}$$

所以该质点做匀加速直线运动。

运动学的两类问题：运动方程 $\xrightarrow{\text{微分}} \vec{v}$ 或 \vec{a}
 $\xleftarrow{\text{积分}} (\text{初始条件})$

[例题] 一质点的加速度 $a_x=0$, $a_y=-2\text{m/s}^2$, $t=0$ 时, 质点在 $(0, 2)$ m 处, 速度加速度的夹角 $\theta=30^\circ$, 速率为 2m/s , 求: 质点的运动方程。



[解]:

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{x0} + \int_0^t a_x dt = v_0 \cos 30^\circ = \sqrt{3} \\ v_y = v_{y0} + \int_0^t a_y dt = v_0 \sin 30^\circ + \int_0^t -2 dt = 1 - 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \int_0^t v_x dt = \sqrt{3}t \\ y = y_0 + \int_0^t v_y dt = 2 + \int_0^t (1 - 2t) dt = 2 + t - t^2 \end{cases}$$

三维空间运动的描述

定量描述质点在三维空间的运动，需要引入三维直角坐标系，质点的位置可以用位置矢量表示。

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

随着时间 t 的变化，质点沿位置矢量端点在空间的经过的曲线称为质点运动的轨迹。也可以用三个坐标分量来描述运动：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{并有关系} \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

该方程组（运动方程）是一个三维曲线参数方程，所描述的曲线就是轨迹。

设时刻 t_1 和 t_2 质点的位置矢量分别为 $\vec{r}(t_1)$ 和 $\vec{r}(t_2)$
 $\Delta\vec{r}=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)$ 称为在 t_1 到 t_2 时间内质点的**位移**。

与一维运动和二维运动类似，定义三维曲线运动的**瞬时速度**：

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

在直角坐标下写出分量形式：

$$\vec{V}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

对于三维曲线运动，**瞬时加速度**定义为：

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

在直角坐标系下，加速度表示为：

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \vec{k}$$

三个分量为：

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \\ a_y(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) \\ a_z(t) = \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t) \end{cases}$$

根据**运动的独立性原理**，在讨论三维曲线运动时，可以分别对三个一维直线运动进行处理，使问题简化。

运动方程 $\xrightarrow{\text{微分}}$ \vec{v} 或 \vec{a}
 $\xleftarrow{\text{积分}}$ (初始条件)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t') dt' \\ y = y_0 + \int_{t_0}^t v_y(t') dt' \\ z = z_0 + \int_{t_0}^t v_z(t') dt' \end{cases}$$

分量形式

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} + \int_{t_0}^t a_x(t') dt' \\ v_y = v_{y0} + \int_{t_0}^t a_y(t') dt' \\ v_z = v_{z0} + \int_{t_0}^t a_z(t') dt' \end{cases}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

$$\rightarrow s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t \sqrt{v_x^2(t') + v_y^2(t') + v_z^2(t')} dt'$$

1.5 自然坐标系中运动的描述

- 受约束运动
- 物理概念上不容易理解

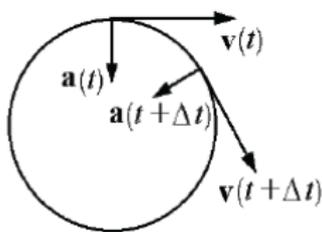


自然坐标系

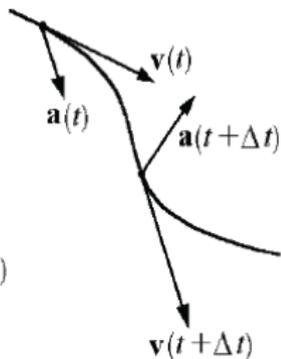
1.5.1 切向加速度和法向加速度

$$\begin{array}{cccc} \overrightarrow{a(t)} & \overrightarrow{v(t)} & \overrightarrow{a(t+\Delta t)} & \overrightarrow{v(t+\Delta t)} \end{array}$$

(a)



(b)



(c)

直线
匀速圆周
一般曲线

沿轨道的切线方向的坐标轴称为切向单位矢量 \vec{t} ，与 \vec{t} 垂直并且指向轨道弯曲方向的坐标轴称径向单位矢量 \vec{n} 。

在自然坐标系中，速度 \vec{v} 可以表示为 $\vec{v} = v\vec{t}$ ，

而加速度 \vec{a} 为
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} &= \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t)\hat{v}(t + \Delta t) - v(t)\hat{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \{v(t)[\hat{v}(t + \Delta t) - \hat{v}(t)] + [v(t + \Delta t) - v(t)]\hat{v}(t + \Delta t)\} \\ &= \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \hat{v}(t + \Delta t) \\ &= \frac{dv(t)}{dt} \hat{v}(t) = a_t \hat{v}(t) \end{aligned}$$

切向加速度

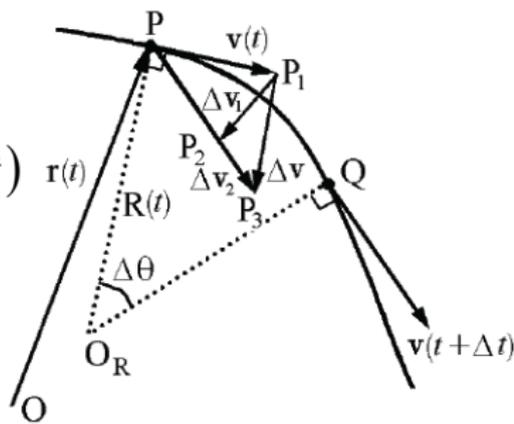


图 1.12 加速度的切向和法向分量

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\perp}{\Delta t} &= \boldsymbol{\nu}(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{\boldsymbol{v}}(t + \Delta t) - \hat{\boldsymbol{v}}(t)}{\Delta t} \\ &= \boldsymbol{\nu}(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\nu}(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{\nu}^2(t)}{R(t)} \hat{\boldsymbol{n}}(t) = a_n \hat{\boldsymbol{n}}(t)\end{aligned}$$

法向加速度

$$\vec{a} = \hat{\boldsymbol{v}}(t) \frac{d\boldsymbol{\nu}(t)}{dt} + \hat{\boldsymbol{n}}(t) \frac{\boldsymbol{\nu}^2(t)}{R} = a_t \hat{\boldsymbol{v}} + a_n \hat{\boldsymbol{n}}$$

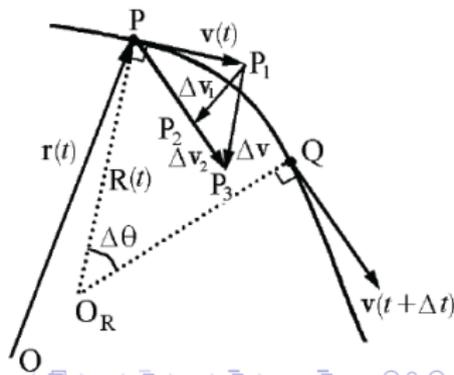
加速度的大小

$$a(t) = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{\nu}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{\nu}^2}{R}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right)^2}$$

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = a_n \boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{\nu}^3(t)}{R(t)}$$

$$\Rightarrow R(t) = \frac{\boldsymbol{\nu}^3(t)}{|\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)|}$$

曲率半径



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v \frac{d\hat{v}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{v}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt} \hat{v} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \frac{ds}{|d\theta|} \frac{d\hat{v}}{|d\theta|} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \rho \vec{n}$$

$\rho = \frac{ds}{|d\theta|}$ 称为曲线在该点的曲率半径。

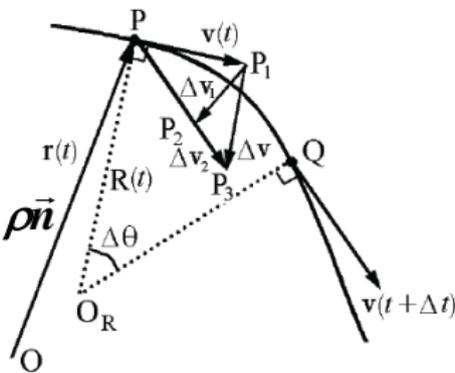


图 1.12 加速度的切向和法向分量

1.5.2 自然坐标系

密切平面：在指定时刻，质点的速度 $\vec{v}(t)$ 及加速度 $\vec{a}(t)$ 所确定的平面称为点P的轨道密切平面，简称密切平面。其法线单位矢量

$$\vec{b} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

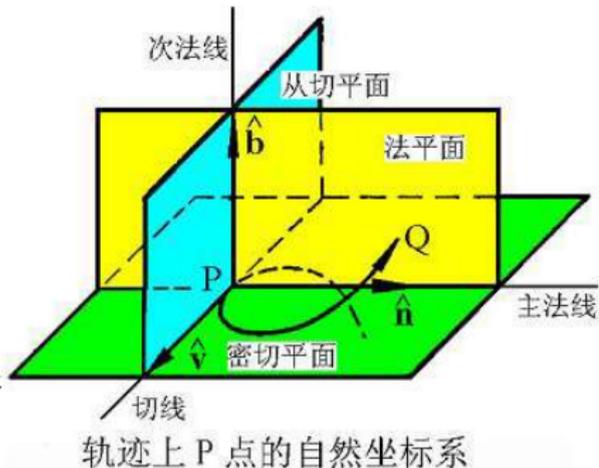
挠度： $\xi = \left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right|$ 称为挠度。

$$\xi = 0, \quad \rho^{-1} = 0; \quad \xi = 0, \quad \rho^{-1} \neq 0; \quad \xi \neq 0, \quad \rho^{-1} \neq 0$$

直线

平面曲线

空间曲线



轨迹上 P 点的自然坐标系

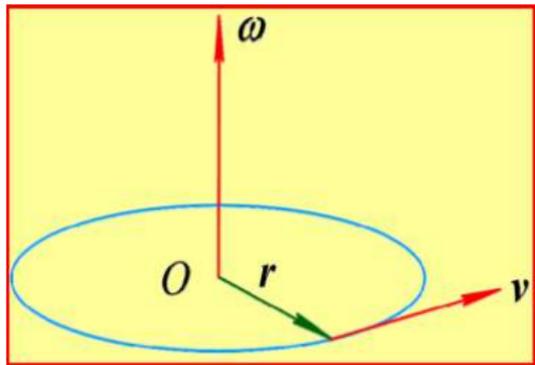
1.5.3 匀速圆周运动

对于质点以恒定速率绕圆周的运动，即所谓**匀速圆周运动**来说，速度矢量的**方向不断改变而大小不变**。

现在定义一个矢量，它的大小为单位时间内质点角位置的变化

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t}$$

方向由右手法则确定。这样定义的量 $\vec{\omega}$ 称为**角速度矢量**。

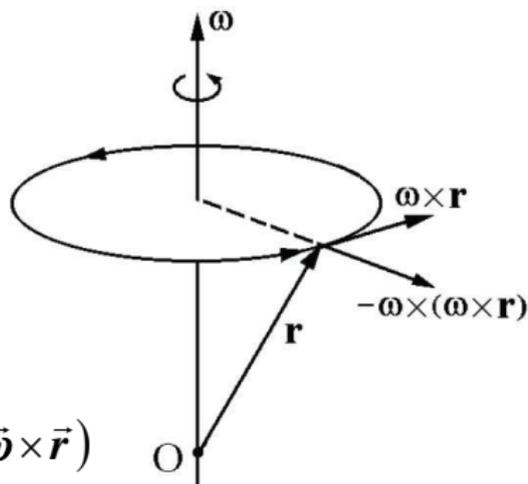


利用这个矢量，可以把质点的速度矢量 \vec{v} 表示成

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

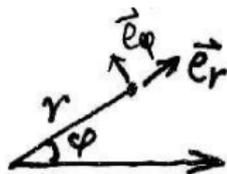
$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



1.6 平面极坐标系中的运动描述

1.6.1 平面极坐标

在所研究的平面内，取固定于参照物的一点为**原点**，称为**极点**，过此极点取一条射线，称为**极轴**，方向始于极点。这就组成了**平面极坐标系**。



质点在此坐标系下的位置由极径 r 和极角 φ 决定。 r 是质点所在位置与极点间的距离， φ 是质点的连线与极轴的夹角，表示质点相对于极轴方位。 r, φ 统称质点的极坐标。

1.6.2 位矢、速度、加速度的极坐标表示

以极点为坐标原点，质点的位矢只有径向，记为 $\vec{r} = r\vec{e}_r$ ，应该注意的是，此处的**单位矢量 \vec{e}_r** 随极角 φ 的改变而不断改变其方向。

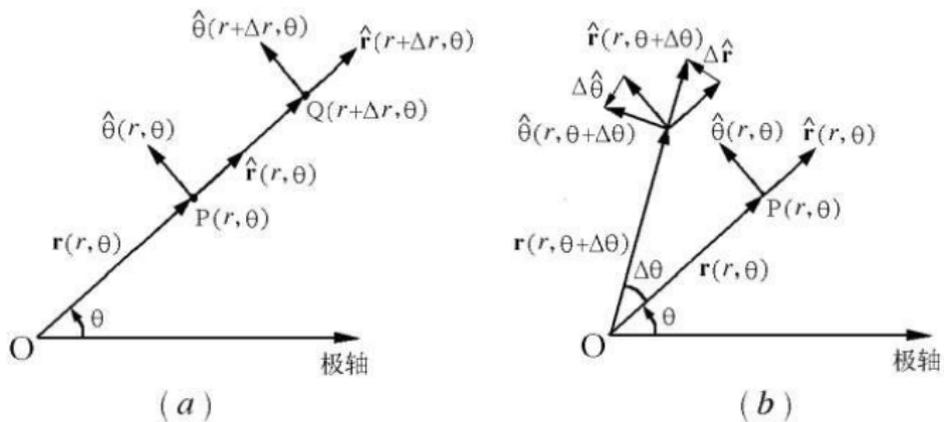


图 1.19 极坐标中的单位矢量

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ 不随 r 变化，随 θ 变化

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

推导速度的分量表示:

设 $t, t + \Delta t$ 时刻质点沿空间轨道分别在A, B点。在OB上取一点C, 使 $OC=OA$ 。把位移 $\Delta\vec{r}$ 分解成 $\Delta\vec{r}_1$ 和 $\Delta\vec{r}_2$, 则依速度定义:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta\vec{r}_2 \rightarrow \vec{e}_r dr$, $\Delta\vec{r}_1 \rightarrow r\vec{e}_\varphi d\varphi$

有速度表示式

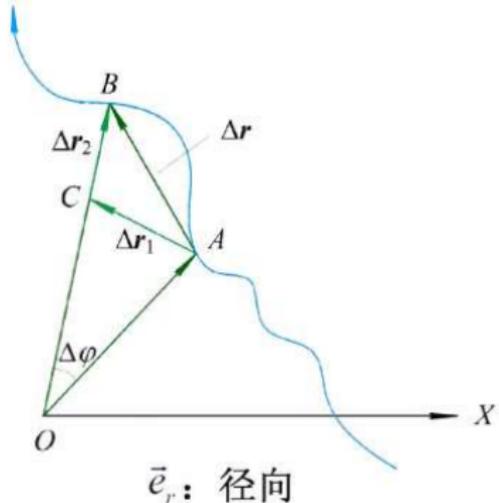
$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

\vec{e}_r : 径向

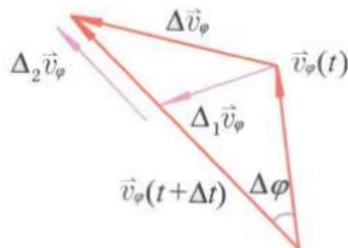
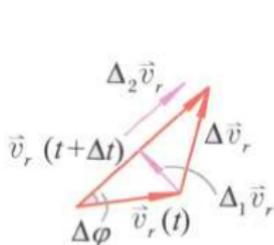
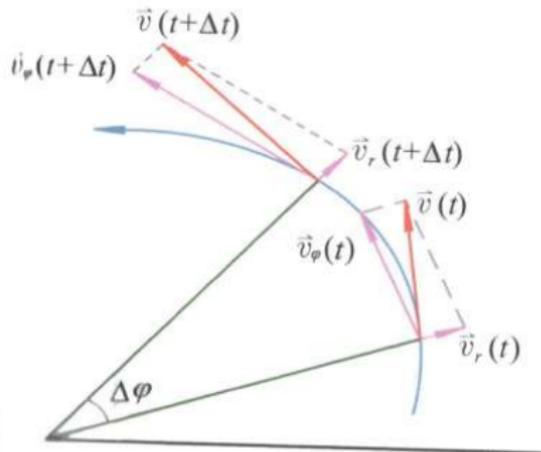
\vec{e}_φ : 切向

令 v_r, v_φ 分别为速度的径向分量和切向分量, 则

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi}$$



再推导加速度的分量表示：



由图中可以看出

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \Delta \vec{v}_r + \Delta \vec{v}_\phi = (\Delta_1 \vec{v}_r + \Delta_2 \vec{v}_r) + (\Delta_1 \vec{v}_\phi + \Delta_2 \vec{v}_\phi) \\ \Rightarrow d\vec{v} &= (v_r \vec{e}_\phi d\phi + \vec{e}_r dv_r) + (-v_\phi \vec{e}_r d\phi + \vec{e}_\phi dv_\phi) \\ &= (dv_r - v_\phi d\phi) \vec{e}_r + (v_r d\phi + dv_\phi) \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以, } \vec{a} &= \left(\frac{dv_r}{dt} - v_\varphi \dot{\varphi} \right) \vec{e}_r + \left(v_r \dot{\varphi} + \frac{dv_\varphi}{dt} \right) \vec{e}_\varphi \\
 &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \\
 a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}
 \end{aligned}$$

如果利用矢量求导法, 上述推导会变得十分简洁:

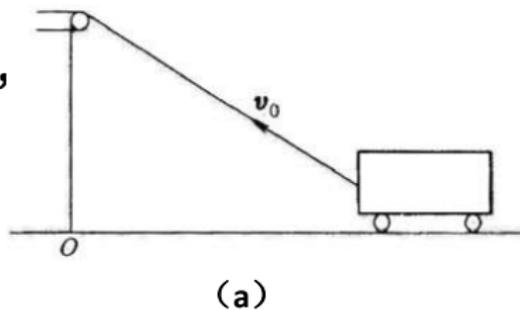
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (r\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

利用矢量图很易得出: $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$

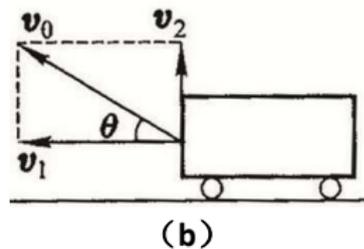
所以, 有 $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

在推导中只要注意 $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ 不为常量就可以了。

[例题] 水平直轨道上有一辆小车，轨道的O点正上方有一滑轮，通过滑轮以匀速收绳，小车被绳拉着在轨道上移动(图a)，问当牵引绳与水平方向夹角为 θ 的瞬时，小车的速度多大？



[解法一] 此题看来似乎很简单：收绳速度 v_0 在水平方向的投影 v_1 (图b)就是小车前进的速度



$$v_1 = v_0 \cos \theta$$

单就投影的计算而言， $v_1 = v_0 \cos \theta$ 是正确的，但是片面的。将收绳速度分解为水平分速度和竖直分速度，**竖直投影 v_2 意味着小车竖直向上腾空而起，显然这样求解是错误的。**

[解法二] 在收绳过程中，**不仅绳变短，而且其方向(角 θ)也不停地改变**。这样，小车还具有绕滑轮转动的速度。

竖直向下的投影 $u_2 = u_0 \cos \theta$

必定恰好与图b的竖直向上的投影

$v_2 = v_0 \sin \theta$ 抵消，即， $u_0 \cos \theta = v_0 \sin \theta$

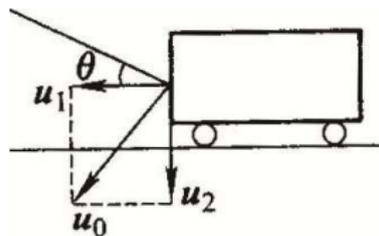
从而， $u_0 = v_0 \sin \theta / \cos \theta$

u_0 的水平投影 $u_1 = u_0 \sin \theta = v_0 \sin^2 \theta / \cos \theta$

小车的移动速度 v 应是 v_1 与 u_1 两个水平投影之和

$v = v_1 + u_1 = v_0 \cos \theta + v_0 \sin^2 \theta / \cos \theta = v_0 / \cos \theta$

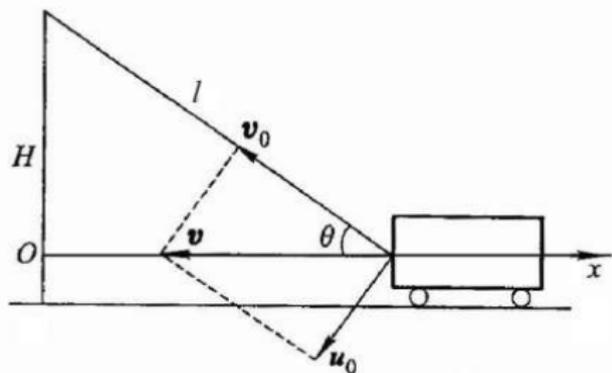
要牢记一条原则：**把矢量向某个方向投影时必须就另一投影也作出交代。**



[解法三] 小车的速度 v 必然是水平方向的，小车在绳子方向的分速度必然等于收绳速度 v_0 。这样， v 并不是 v_0 的水平投影， v_0 倒是 v 在绳上的投影

$$v_0 = v \cos \theta$$

由此得 $v = v_0 / \cos \theta$



[解法四] 应用微分学的方法。取 x 轴如上图所示，原点取在 O 点。小车的坐标

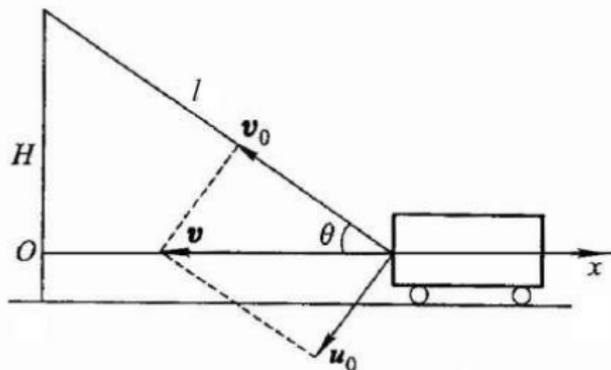
$$x = \sqrt{l^2 - H^2}$$

式中高度差 H 是常量，从滑轮到小车的绳长 l 是变量，

而且 $dl/dt = -v_0$ 。将 x 对时间 t 求导即得小车速度

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{l^2 - H^2}} 2l \frac{dl}{dt} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - H^2}} \frac{dl}{dt} = -\frac{v_0}{\cos \theta}$$

负号表示小车运动方向与 x 轴正方向相反。



[解法五] 用极坐标系求解。

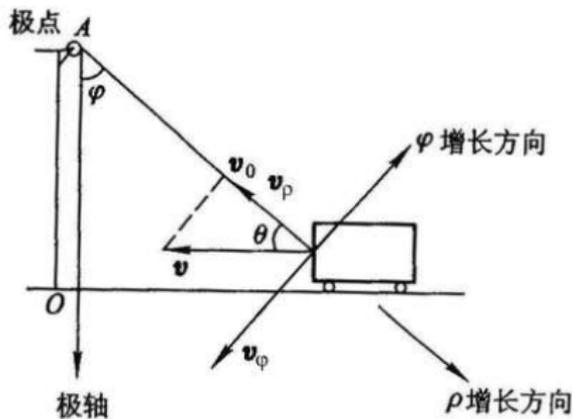
取图中A点为极点，极轴竖直向下。收绳速度 v_0 总是指向A点。

小车的速度 v 的指向一定是水平的，但大小未知。在极坐标中，小车切向速度 v_φ 为未知，而小车的径向速度 v_ρ 则已知为收绳速率，

$$v_\rho = v_0$$

由图可见

$$\begin{cases} v_\rho = -v \sin \varphi = v_0 \\ v_\varphi = -v \cos \varphi \end{cases}$$

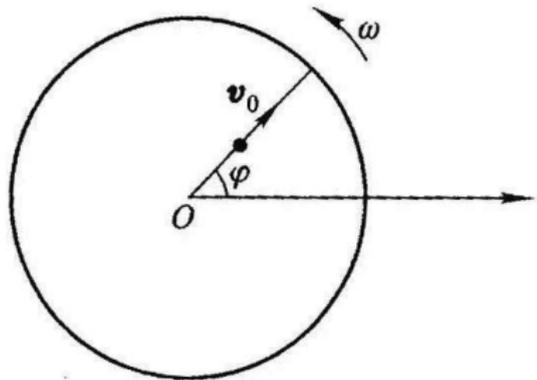


消去 v , 得
$$\frac{v_\varphi}{v_0} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

即
$$v_\varphi = v_0 \cot \varphi$$

从而
$$v^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 = v_0^2 + \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{v_0^2}{\sin^2 \varphi}$$

即
$$v = \frac{v_0}{\sin \varphi} = \frac{v_0}{\cos \theta}$$



[例题] 有一轮绕定轴以匀角速 ω 转动，一质点自轮心沿着某一根轮辐以匀速 v_0 向轮边运动。求解质点的运动情况。

[解] 取固定于地面的参考系。

在本例中，选用极坐标系较为适宜。取轮心 O 为极点，把那条轮辐在 $t=0$ 时的位置取为极轴。

在任一时刻 t ，质点的速度为

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} = v_0 \\ v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \rho\omega \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = v_0 \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega \end{cases}$$

两边积分并代入初始条件，得

$$\begin{cases} \rho = v_0 t \\ \varphi = \omega t \end{cases}$$

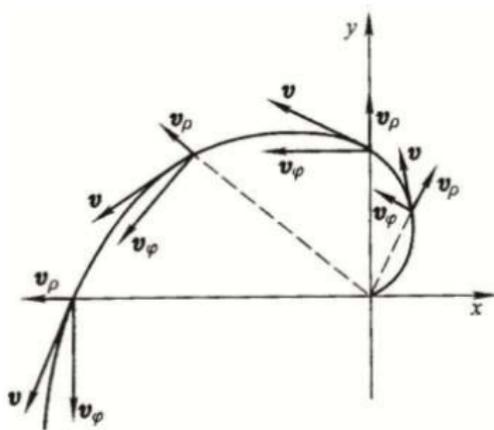
消去 t 即得到轨道方程

$$\rho = \frac{v_0}{\omega} \varphi$$

这是有名的**阿基米德螺线**。

还可以求得质点运动的加速度：

$$\begin{cases} a_\rho = 0 - \rho\omega^2 = -\rho\omega^2 \\ a_\varphi = 0 + 2v_0\omega = 2v_0\omega \end{cases}$$



[例]一质点沿半径为 R 的圆周运动，质点经过的弧长与时间的关系为 $S = bt + \frac{1}{2}ct^2$ ，式中 b 、 c 是大于零的常数。求从 $t=0$ 开始到达切线加速度与法线加速度大小相等所经过的时间。

[解]方法一：径向加速度 $a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = \frac{1}{R} (b + ct)^2$

切向加速度 $a_\theta = \frac{d^2S}{dt^2} = c$

所以 $a_r = a_\theta$ ，故有 $c = \frac{1}{R} (b + ct)^2$

取可能为正的解，解得 $t = \sqrt{\frac{R}{c}} - \frac{b}{c}$

方法二：
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, a_\theta = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

因为质点沿半径为R的圆周作运动，所以： $\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$

弧长与时间的关系为：
$$S = bt + \frac{1}{2}ct^2$$

所以
$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{b+ct}{R}, \ddot{\varphi} = \frac{c}{R}$$

代入
$$|a_r| = |\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2| = |a_\theta| = |2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}|$$

化简得到：
$$\left(\frac{b+ct}{R}\right)^2 R = c \Rightarrow t = \sqrt{\frac{R}{c}} - \frac{b}{c} \quad (\text{舍负值})$$

力学 第十章

狭义相对论基础

盛东

dsheng@ustc.edu.cn

中国科学技术大学

本章内容

- 狭义相对论的实验基础
- 狭义相对论基本假设及其推论
- 洛伦兹变换及其应用

狭义相对论的实验基础

光速的特征

- 真空中的光速是物理学的基本常数之一，SI单位制中 $c=299792458\text{ m/s}$ ，已经作为一个常量固定下来。
- 它的特征是：
 - 一切电磁辐射在真空中传播的速度，与辐射频率无关；
 - 信号无法以大于光速的速度传播；
 - 真空中的光速与参考系无关；
- 电磁学中的麦克斯韦方程中含有光速

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$$

- 原子基本结构中的精细结构常数也含有光速

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

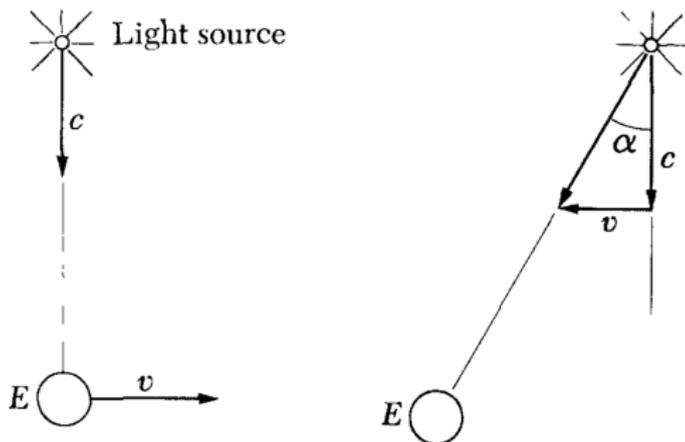
对光速的认识

- 光的速度是有限的，这是历史上科学家经过长期的实验积累得到的结果。
- 根据场的理论，电磁相互作用的传播子就是光子。因此电磁作用力的速度也是光速。
- 有多种测量光速的方法，这里我们讨论几种在历史上有重要意义的方法。

光速的测量 I

- 光行差方法：由于地球绕太阳运动，地球上观测到的恒星位置会以年为周期作运动。
- 这个运动是由光速和地球运动合成而成的。可以用人在雨中跑动来类比。

$$\tan \alpha = \frac{v_E}{c}$$

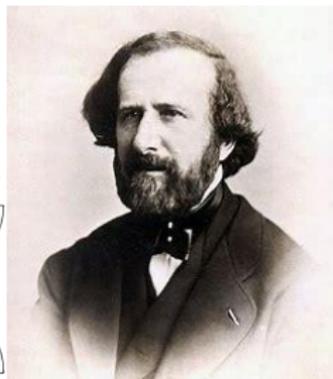
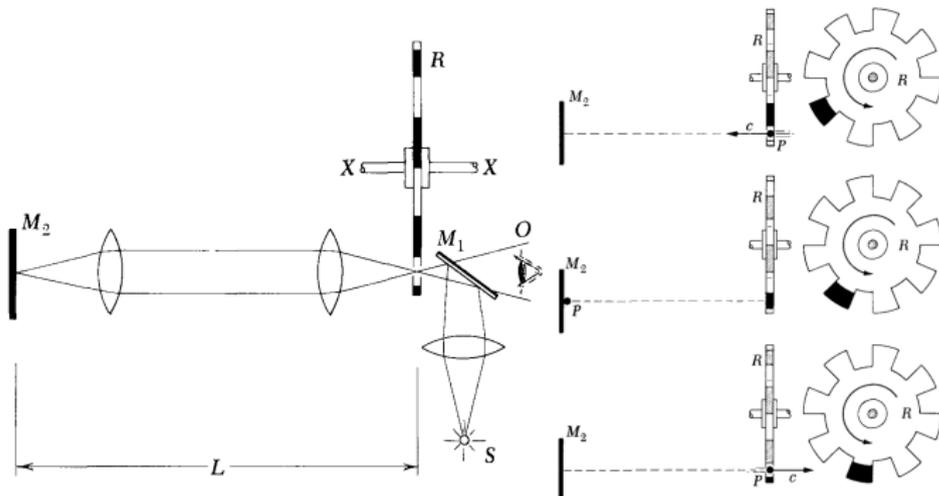


James Bradley
1693-1762
詹姆斯·布拉德利
英国天文学家
1725年发现光行差现象

光速的测量II

- 齿轮实验：1849年菲佐实现了用齿轮在地面光速测量的实验。L=8633m。

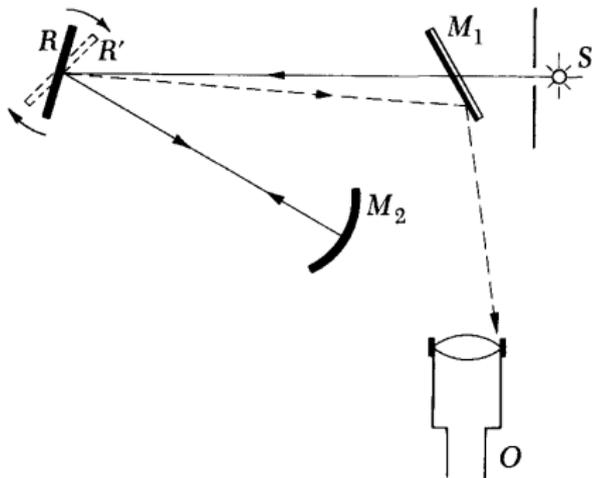
$$c = 315300 \pm 500 \text{ km/s}$$



Hippolyte Fizeau
1819-1896
伊波利特·菲佐
法国物理学家

光速的测量III

- 旋转镜实验：1850年，傅科用将齿轮实验改进为旋转镜实验。 $c = 298000 \pm 500 \text{ km/s}$
- 1922年，迈克尔逊重复了这个实验， $c = 299796 \pm 4 \text{ km/s}$

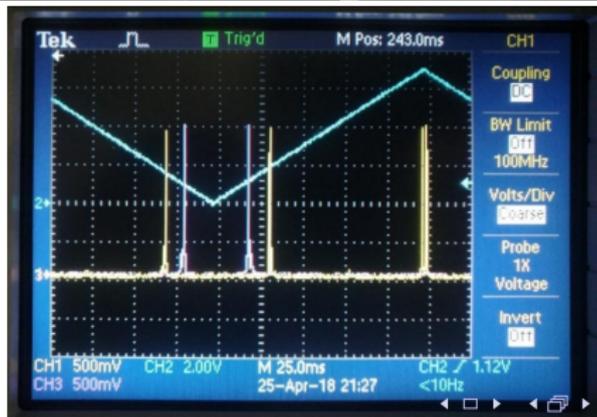
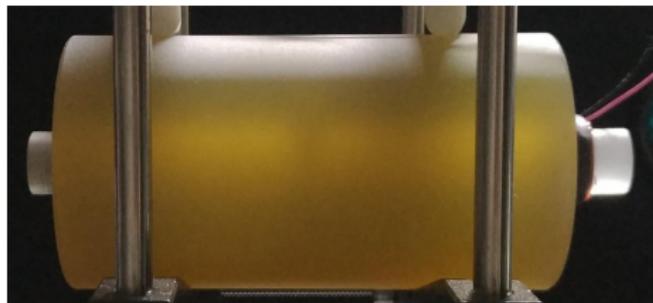


光速的测量IV

- 多反射腔实验：法布里-珀罗腔。 $c=\lambda f$ 。



Charles Fabry
1867-1945
查尔斯·法布里
法国物理学家
严济慈的博士导师



Alfred Perot
1863-1925
阿尔弗莱德·珀罗
法国物理学家

Michelson-Morley实验背景 I

- 在19世纪，光被认为是在介质中传播的一种振动。
- 光传播的介质被称为以太（ether）
- 按照伽利略变换，光相对于以太的速度是光相对地球的速度与地球相对以太速度的矢量和。
- Michelson-Morley实验就是为了测量地球穿过以太的运动。



Albert Michelson
1852-1931
艾尔伯特·迈克尔逊
美国物理学家
1907年诺贝尔物理学奖



Edward Morley
1838-1923
爱德华·莫雷
美国化学家

Michelson-Morley实验背景II

- Michelson在19世纪80年代早期开始了他的以太测量实验，但实验条件和实验精度都不能令人满意。
- 在一次会议回程的路上，Michelson碰到了Morley，并向他描述了自己的实验，他们两人讨论了合作的计划。
- 1885年，Michelson因精神出现问题在纽约休养了一年。
- 1886年，Michelson的实验室发生火灾，实验装置被摧毁。
- 之后，Morley将自己的实验室提供给Michelson来完成这个实验。
- 1887年，实验完成。这是物理学史上最重要的实验之一。

Michelson-Morley实验I

THE
AMERICAN
JOURNAL OF SCIENCE.

THIRD SERIES.

VOL. XXXIV.—[WHOLE NUMBER, CXXXIV.]

WITH PLATES II TO IX.

No. 203—NOVEMBER, 1887.

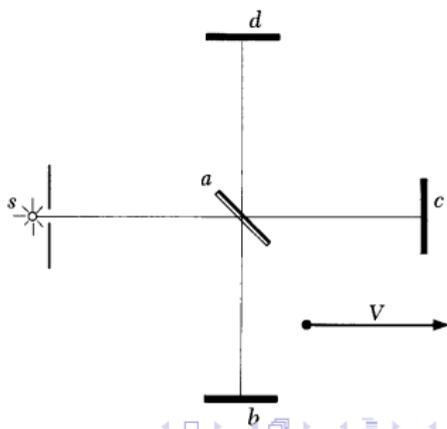
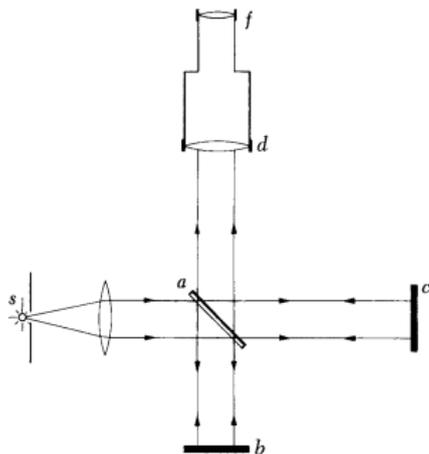
NEW HAVEN, CONN.: J. D. & E. S. DANA.

1887.

ART. XXXVI.—*On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*; by ALBERT A. MICHELSON and EDWARD W. MORLEY.*

Michelson-Morley实验 II

- 镜片a是半透半反镜。
- 这个实验的核心是干涉仪。干涉仪比较的是aba和aca的光程差，或者光在这两段路上传播的时间差。
- 如果地球相对以太有一个速度 v ，则光程差或时间差会发生变化。



Michelson-Morley实验III

- 光在aca传播的时间是

$$T = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{L}{c^2-v^2} 2c = \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$



- 光在aba传播的时间是

$$T' = \frac{2L'}{c} = \frac{2L\sqrt{c^2+v^2}}{c^2} = \frac{2L}{c} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

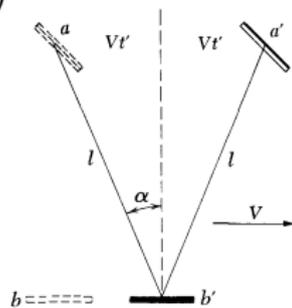


- 光在aba与aca传播的时间差是

$$\Delta T = T - T' = \frac{L}{c} \frac{v^2}{c^2}$$

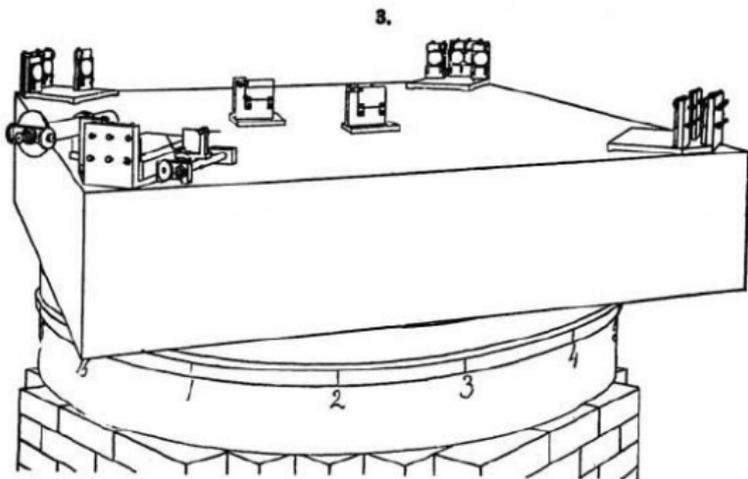
- 系统转90度后, ΔT 反号, 所有干涉条纹移动, 相当于系统光程差变化了 (对比钠黄光 $\lambda=590 \text{ nm}$)

$$\Delta L = 2L \frac{v^2}{c^2} \sim 2L \times 10^{-8} \text{ m}$$



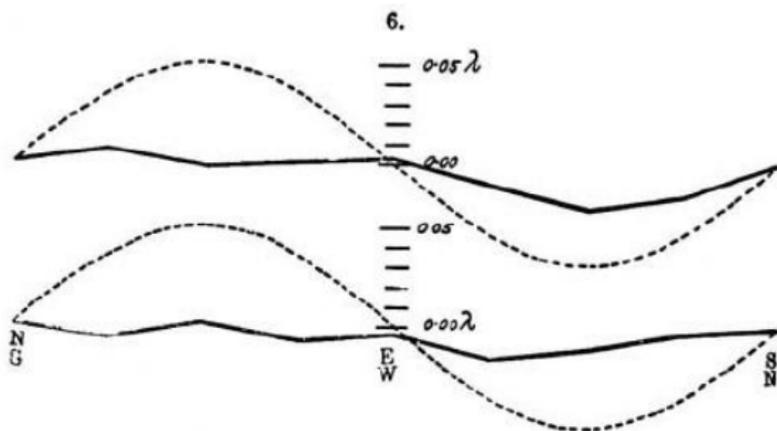
Michelson-Morley实验IV

- 实验的设计体现了两个思想：
 - L要足够大，所以在每个光路上放了四面反射镜；
 - 平台要足够稳定，整个系统放在一个大的平台上，然后浮在水银上。



Michelson-Morley实验V

- 最终实验测量的结果足够精确。
- 下图实线部分为测量结果，虚线为以太理论预言结果的1/8。
- 下图上实线为中午测量的结果，下实线为夜晚测量的结果。



极限速率

动能 E_k/MeV	电子速率/(m/s)	由 $v = (2E_k/m)^{1/2}$ 计算值/(m/s)
0.5	2.60×10^8	4.20×10^8
1.0	2.73×10^8	5.93×10^8
1.5	2.88×10^8	7.27×10^8
4.5	2.96×10^8	12.59×10^8
15	$\approx 3.00 \times 10^8$	22.98×10^8

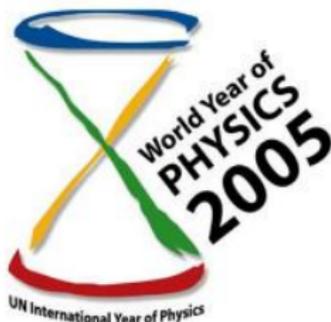
总结

- 人类对光速的认识是逐渐深入的：
 - 首先是光速无穷大；
 - 之后意识到光速有限；
 - 然后发现光速在惯性系下测量不变，从而知道伽利略变化在高速运动下是不成立的；
 - 最后发现物体的运动速度不会超过光速。
- 当对自然的认识深入到一定程度的时候，新的理论就诞生了。

狭义相对论的基本假设及其推论

爱因斯坦奇迹年

- 1905年是爱因斯坦的奇迹年。在这一年中，还在专利局工作的他获得了博士学位，并发表了四篇论文，分别讨论了：
 - 光电效应（1921年诺贝尔奖）
 - 布朗运动（1926年佩林因此方面的实验工作获诺贝尔奖）
 - 狭义相对论
- 2005年，为了纪念爱因斯坦的工作，该年被命名为世界物理年。



狭义相对论基本假设

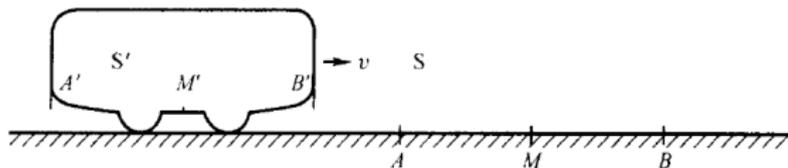
- 狭义相对论有两个基本假设。
- 一是，空间是各向同性和均匀的，对于任何两个作匀速相对运动的观察者来说，基本物理定理是完全相同的。也就是，所有惯性系是等价的。
- 二是，光速与光源、接收器的运动无关。也就是，光速不变。
- 在这两个假设的指引下，牛顿力学的时空观将会发生变化。
- 时间不再是绝对不变的概念，时间的同时性称为狭义相对论里最重要的因素。

同时性的判断

- 在同一个地点发生的事情，判断其是否同时不难，只要看该地点的时钟的计时即可
- 在不同地点发生的事情，要判断其是否同时，就要看不同地点的时钟的计时。这时比较两个时钟的计时有个先决条件，就是两个地点的时钟是同步的。
- 同步不同地点的钟有很多种方法，这里讨论的内容都以光的传播作为同步的工具。这里用到的是光速不变的性质。
- 以两个地点的中点同时向两地发出光，当两地接收到光的时刻作为时钟零点，则两地时钟就经过校准同步了。

同时的相对性

- 如图考虑S系与相对S系匀速运动的S'系。
- 根据之前的讨论，A、B两处的钟在S系中的校准是通过其中点M发射光实现的。
- 在S'系看来，地面以 $-v$ 速度运动，在S'系中观测S系中时钟校准的过程，则：
 1. M同时发出的光这个事实不会发生变化。
 2. 在S'系看，B点顺着光传播方向运动，则光传播的等效距离减小。
 3. 这样，在S'系看来，B点会比A点先接收到M发出的光。
- 可见，在S系同时发生的事情，在S'系看来不是同时发生的。

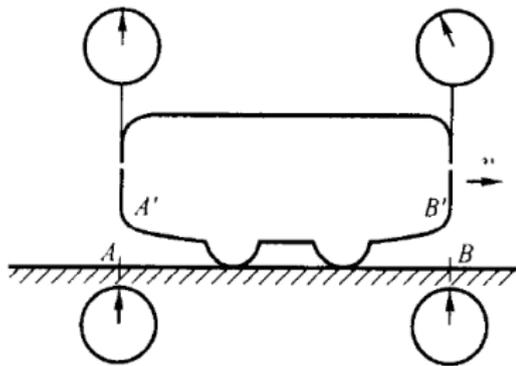


时钟与位置

- 每个地点都有自己的时钟，每个时钟都是记录发生在该点事件的时刻。
- 相对论中，观测者的作用是将不同地点的时钟记录下来的结果作比较和分析。
- 之后，我们认为在给定参考系中，除了安装坐标系外，还分布了一系列的时钟，这些时钟都是经过之前的同步校正过的。

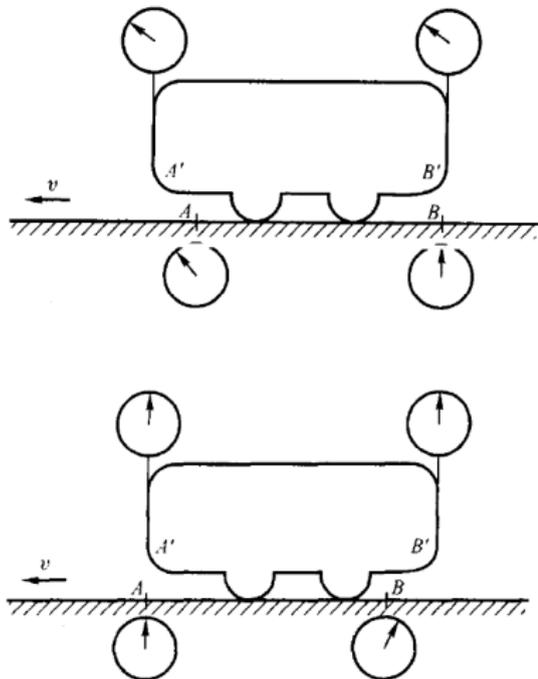
事件与时钟I

- 考虑之前讨论的例子。
- 定义A与A'重合的事件为AA'，B与B'重合的事件为BB'。
- 在S系观测，AA'与BB'同时发生，时钟置零。
- 在S'系中AA'发生时，将A'时钟置零。
- 根据之前讨论，S系中看，M'同时发生的光子会先到A'，则S系中看A'的时钟计时比B'的时钟要提前。
- 所以，在S系看来，AA'事件发生时，B'的时钟还不到零点。



事件与时钟II

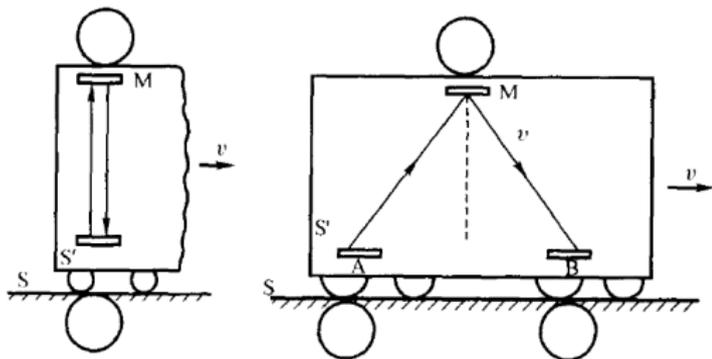
- 相应的，在S'系中观测S系的时钟。B的时钟要快于A的时钟。
- 所以BB'发生时，S'系看S系中A的时钟还未达到零点，但B的时钟已经达到零点。
- AA'发生时，S'系看S系中A的时钟在零点，但B的时钟已经过了零点。



垂直运动方向的时钟

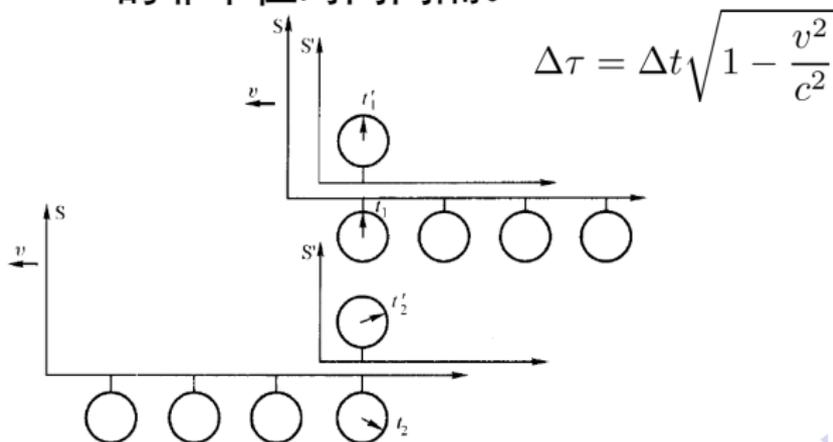
- 在垂直于运动方向的运动的参考系里的时钟，经过同步后，在两个参考系内看都还是同步的。
- 但时间间隔会发生变化，或者说时间延缓了。
- 在S'系，是同一地点的时钟测量： $L = \frac{1}{2}c\Delta t'$
- 在S系，不同地点时钟测量： $(\frac{1}{2}c\Delta t)^2 = (\frac{1}{2}v\Delta t)^2 + (\frac{1}{2}c\Delta t')^2$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

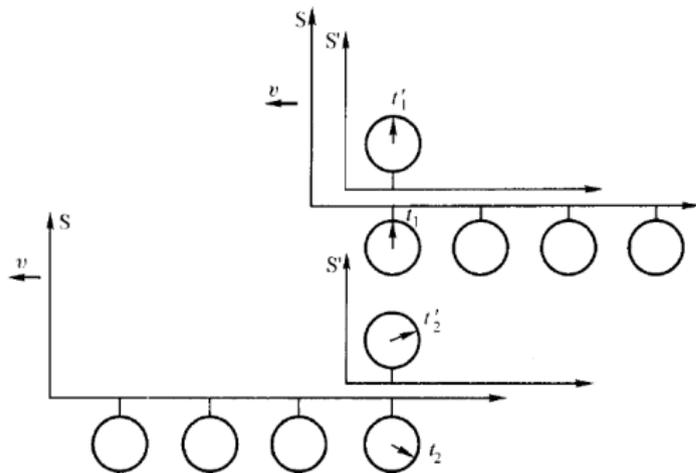


本征时间间隔 I

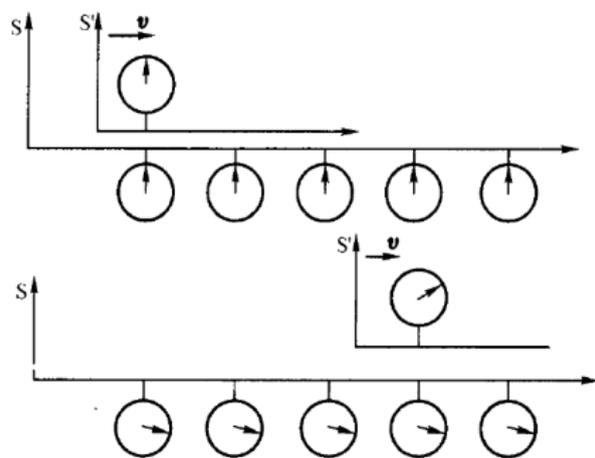
- 在**同一地点**的两个事件的时间间隔是**本征时间间隔**，用 $\Delta\tau$ 表示。
- 位于参考系中两处时钟测得的时间间隔是非本征时间间隔，用 Δt 表示。
- 时间延缓的本质是两事件的本征时间间隔小于这两事件的非本征时间间隔。



本征时间间隔II



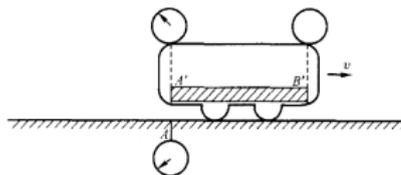
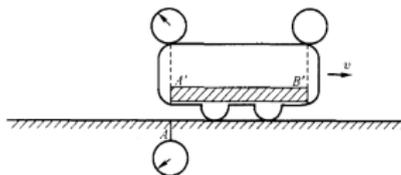
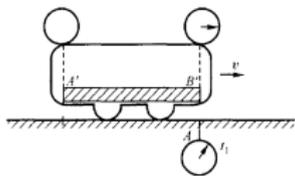
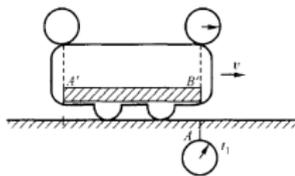
在 S' 系中观测的结果



在 S 系中观测的结果：
运动的钟变慢

运动的尺I

- 当杆的方向与运动方向垂直时，杆的长度与参考系无关。
- 当杆沿着运动方向：
 - 在S系看，当B'通过A时，A的计时是 t_1 ；当A'通过A时，A的计时是 t_2 。则 $L=v(t_2 - t_1)$ 。
 - 在S'系看，当S系的A点与B'重合时，B'处的计时为 t_1' ；当A与A'重合时，A'处的计时为 t_2' 。则： $L'=v(t_2' - t_1')$ 。



运动的尺II

- 这里 t' 是不同地点测量的时间（非本征时间间隔）， t 是同一地点测量的时间（本征时间间隔），则：

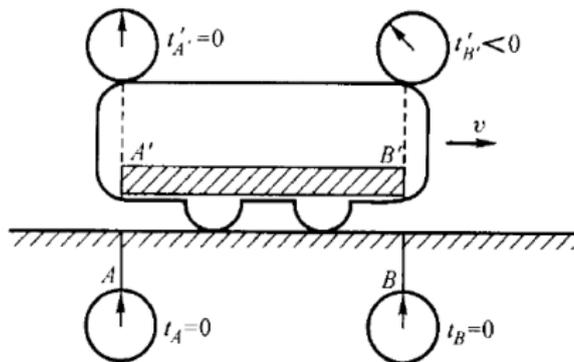
$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- 而 L' 是尺在静止参考系中的长度（本征长度）， L 是尺在运动参考系中的长度（非本征长度）。
- 所以运动的尺收缩。

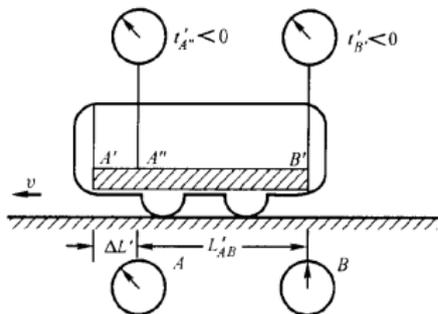
与时钟的关系I

- 运动的时钟变慢、运动的尺变短都与时钟同步有关。
- 考虑下图的情况，以AA'时间作为S与S'系的时钟零点。
 $t_A = t_{A'} = 0$
- 在S系中，AA'与BB'同时发生。 $t_B = 0$ 。
- 在S系看来，S'系中的时钟没有同步， $t'_{B'} < 0$ 。
- 问题是 $t'_{B'}$ 的具体数值是什么？



与时钟的关系II

- $t'_B < 0$ 意味着在BB'事件发生时，S'系中B'点的时钟还不到零点。
- 这样，在S'系看来，BB'比AA'发生的更早。
- 在BB'发生时，S'系中A'时钟的读数与B'的时钟读数一样小于零。此时，与A重合的点为S'系中的A''。因此，与BB'同时发生的事件是AA''。A''A'= $\Delta L'$ 。
- AA'发生时，S'系中A'时钟的读数与B'的时钟读数一样等于零。其落后BB'事件的时间间隔为 $\Delta t'$ 。



与时钟的关系III

$$\Delta t' = \frac{A'A''}{v} = \frac{\Delta L'}{v}$$

$$\Delta L' = L'_{A'B'} - L'_{A''B'} = L'_{A'B'} - L'_{AB}$$

$$L'_{AB} = L_{AB} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$L_{A'B'} = L_{AB} = L'_{A'B'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

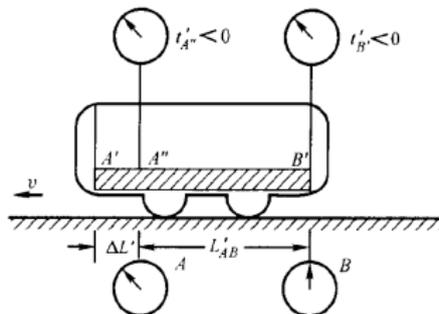


$$L'_{A''B'} = L'_{AB} = L_{A'B'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= L'_{A'B'} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta L' = L'_{A'B'} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Delta t' = \frac{v L'_{A'B'}}{c^2}$$

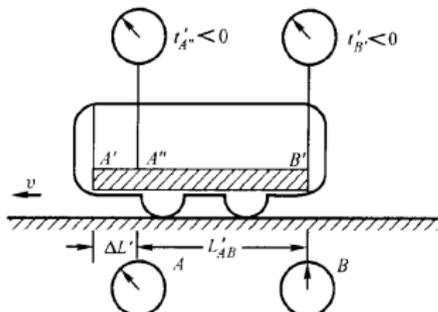
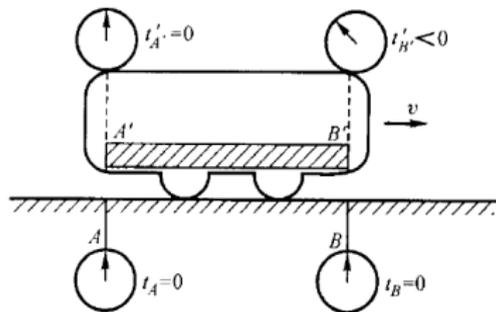


与时钟的关系IV

- 在S'系中相对静止，相距L'的两个经过同步校正的时钟A'与B'。在S系中看来，它们没有同步校正。
- 在S系看来，沿着运动方向前面的钟走的慢，相对变慢的时间与本征长度成正比，与运动速度成正比。
- 在S'系看来，结论是一样的。除了本征长度变为 L_{AB} 。

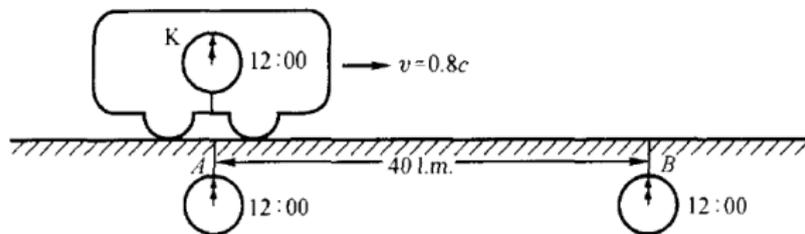
$$\Delta L' = L'_{A'B'} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Delta t' = \frac{vL'_{A'B'}}{c^2}$$



例1-1

一列车上置有一钟K，列车以 $v=0.8c$ 的速度沿平直轨道行驶。轨道上A、B两点的距离为 $AB=40$ 光分（1光分=光在1分钟传播的距离）。分别以地面和车厢为参考系，计算K钟通过A、B两点的时间和A、B间的距离。

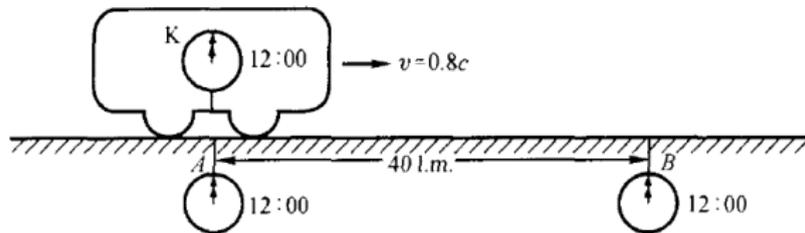


例1-2

以S系来看：

$$t_B - t_A = \frac{AB}{v} = \frac{40 \times c}{0.8c} \text{ min} = 50 \text{ min}$$

若K钟通过A点时，位于A的钟 $t_A=12:00$ ，
则通过B时， $t_B=12:50$ 。



例1-3

以S'系来看:

$$t'_B - t'_A = (t_B - t_A) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 50 \sqrt{1 - (0.8)^2} \text{ min} = 30 \text{ min}$$

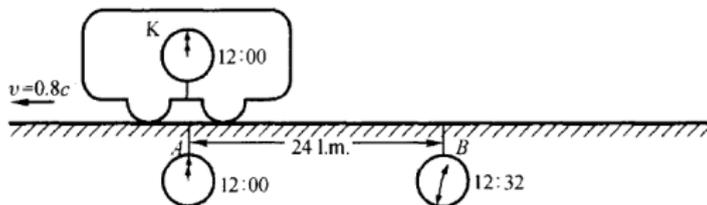
若K钟通过A点时, 位于A的钟 $t'_A=12:00$,
则通过B时, $t'_B=12:30$ 。

在S'系看到的长度为:

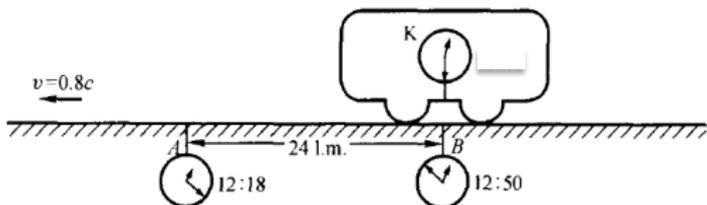
$$L' = v(t'_B - t'_A) = 24 \text{ km}$$

例1-4

- 以S'系来看，S系中的A与B的时钟未校准同步。
- B时钟比A超前 $\Delta t=L_{AB}v/c^2=32$ min。
- 则S'系看到：
 - K钟经过A点时，A钟读数12:00，B钟12:32；
 - K钟经过B点时，A钟读数12:18，B钟12:50。



(a)



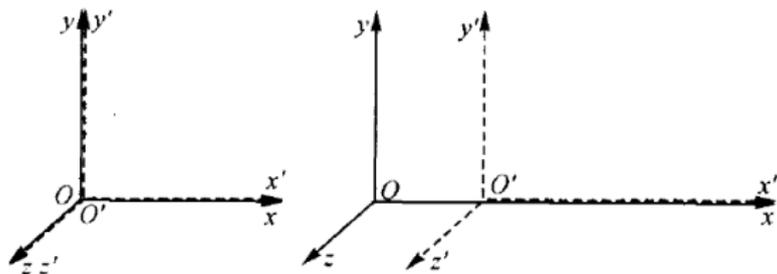
洛伦兹变换及其应用

洛伦兹变换的背景

- 1904年，亨德里克·洛伦兹得到洛伦兹变换的表达式。
- 但它的物理意义在爱因斯坦提出狭义相对论之后才完全搞清楚。
- 洛伦兹变换有不同的推导方式。这里，我们从相对论的假设出发，导出洛伦兹变换的表达式。

坐标系

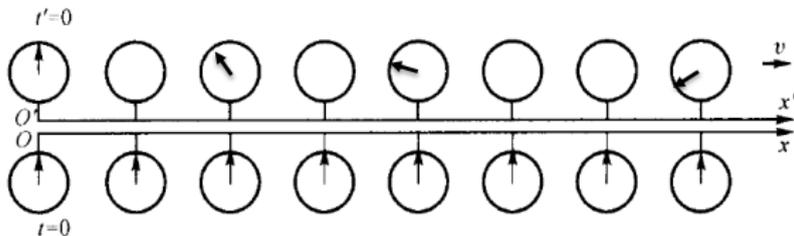
- 考虑下面的参考系系：静止的S系与相对运动的S'系，以及各自的坐标系。
- 在 $t=t'=0$ 时刻，两坐标系重合，之后S'系沿x方向运动。
- 之前已经讨论过，垂直于运动方向的长度与参考系无关，即： $y=y'$ ， $z=z'$ 。
- 这样，我们只考虑x与x'的方向。



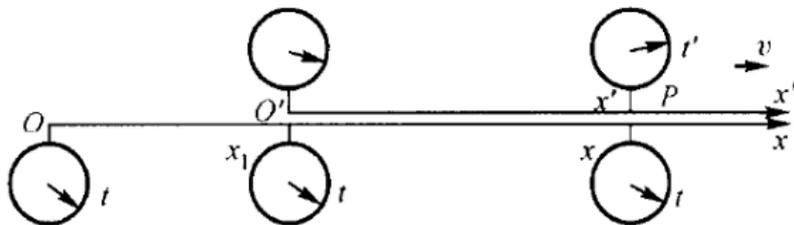
时钟

- 在 OO' 事件发生时刻，在S系看来，S'系中的时钟读数为：

$$t'_{x'=0} = 0 \quad t'_{x'>0} < 0$$



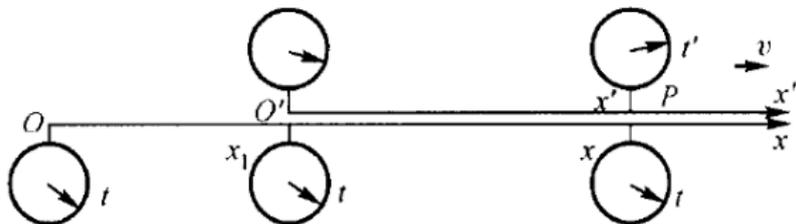
- 在S系看来，P事件发生的时刻为 t ，坐标为 x ；
- 在S'系看来，P事件发生的时刻为 t' ，坐标为 x' 。



时间变换

- 在S系看来，P事件发生时，O'的位置为 x_1
- 在S系看来，S'系中的 x' 处的时钟比O'处的时钟慢

$$t'_{O'} = t' + \frac{vx'}{c^2} \quad \longrightarrow \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$t'_{O'} = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



位置变换

- 在S系看来，P事件发生的位置是：

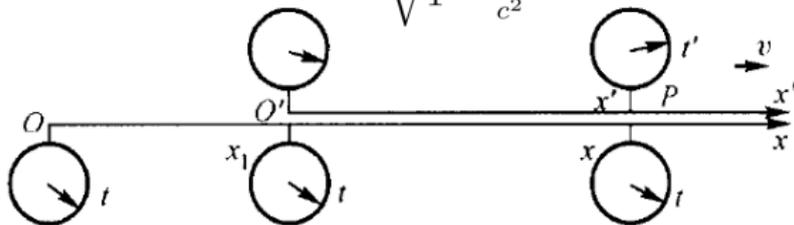
$$x = Ox_1 + xx_1 \quad Ox_1 = vt$$

- 由于O'经过 x_1 与P事件同时，则 xx_1 就是S系中测得的O'x'的长度。

$$xx_1 = L_{O'x'} = L'_{O'x'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$x = vt + x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



洛伦兹变换

$$x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- 可以看到洛伦兹变化将时间与空间耦合起来，3维空间变成了4维空间。
- 根号的存在限制了v的上限是c

洛伦兹变换的推论 I

- 利用洛伦兹变换，我们可以很容易得到之前的一些结论。
- 设一钟在S'系中静止，坐标为 (x'_0, y'_0, z'_0) 。
- S'系相对S系运动，任取发生在 t'_1 和 t'_2 两时刻的两个事件。
- 在S系中有：

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{vx'_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{vx'_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

洛伦兹变换的推论II

- 一杆静止放置在S'系中，两端坐标为 $(x'_1, 0, 0)$ 和 $(x'_2, 0, 0)$ 。

$$l' = x'_2 - x'_1$$

- 在S系看来，杆是运动的，必须在同一时刻同步测量 x_1 和 x_2 。这样利用洛伦兹变换，有：

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

洛伦兹变换的推论III

- 由洛伦兹变换

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- 可得

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{x'v}{c}$$

- 所以在S系看来，S'系中沿着运动方向，x'越大，t'越小。

事件之间的间隔与因果关系

$$\begin{aligned} & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1) - c^2(t_2 - t_1)^2 \\ &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1) - c^2(t'_2 - t'_1)^2 \\ &= \sigma^2 = \text{Constant} \end{aligned}$$

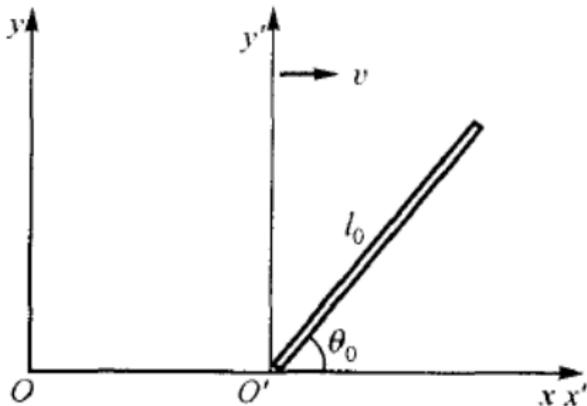
- σ 是两事件的间隔。它在所有惯性参考系下不变。
- 这是光速不变的数学表述。
- $\sigma^2 > 0$ 对应的是类空间隔。这时可以找到S'系使 $t'_1 = t'_2$ 。

$$\sigma^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1) - c^2(t_2 - t_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1) > 0$$

- 类空间隔时，两地的距离大于光信号的传播距离，两地之间的事件不存在联系或因果关系。
- $\sigma^2 < 0$ 对应的是类时间隔，这时可以找到S'系使两事件发生在同一地点。
- 类时间隔的两事件，其空间间隔小于光信号的传播距离，这样两事件间可能存在因果关系。

例2-1

一根长为 l_0 的棒静止放置在 $x'-y'$ 平面内，与 x' 成 θ_0 角度。相对于实验室参考系 Oxy ，棒以速度 v 沿 x 轴正向运动。求在此参考系中棒的长度和取向。



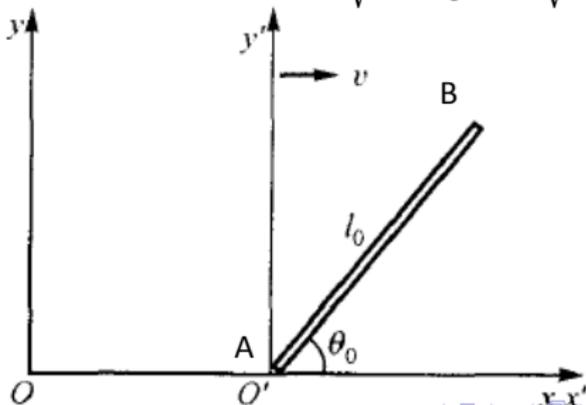
例2-2

S'系中: $x'_A = 0, y'_A = 0, x'_B = l_0 \cos \theta_0, y'_B = l_0 \sin \theta_0$

S系中测量杆: $x_B - x_A = l_0 \cos \theta_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, y_B - y_A = l_0 \sin \theta_0$

$$l = \sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_A - x_B)^2} = l_0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_0 \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\tan \theta = \frac{l_0 \sin \theta_0}{l_0 \cos \theta_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tan \theta_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



相对论速度变换 I

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{vdx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dy' = dy \quad dz' = dz$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt - \frac{vdx}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

相对论速度变换II

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad u'_z = \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt - \frac{vdx}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- 当 u 、 v 远小于 c 时, $u'_x = u_x - v$ $u'_y = u_y$ $u'_z = u_z$
- 当 $u_x=c$ 时, $u'_x=c$
- 当 $u < c$, $v < c$ 时, $u' < c$
- 当 $u_x=0$, u_y 和 u_z 不等于零时:

$$u'_x = -v \quad u'_y = u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad u'_z = u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

纵向多普勒效应I

- 相对波源静止的参考系为S'系。
- 相对接收器静止的参考系为S系。
- S'相对S以速度v在SS'连线方向（x方向）运动。
- 从S'系看，发生了两个事件：
 - 事件1：t'时刻波源发出一光波，波以c向各方向传播；
 - 事件2：t'+1/f'时，波源发出另一个光波；
 - 这两个事件的时间间隔 $\Delta\tau'=1/f'$ 为本征时间间隔。
- 从S系看，上面两个事件发生的时刻和位置为：

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

纵向多普勒效应II

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

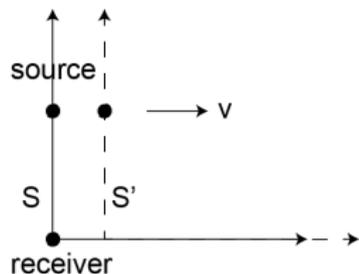
- 在S系看，在事件2发生时，事件1发射出的波已经运动了 $c\Delta t$ 的距离。这样，S系接收到两事件发出的光波的时间差为：

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{c\Delta t - (x_2 - x_1)}{c} = \Delta t - \frac{\Delta x}{c} = \frac{\Delta\tau'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v/f'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{1}{f'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v/c}{f'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{f'} = \frac{1}{f} \end{aligned}$$

$$f = f' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = f' \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

横向多普勒效应

- 相对波源静止的参考系为S'系。
- 相对接收器静止的参考系为S系。
- SS'连线方向为y方向。
- S'相对S以速度v在x方向运动。
- 从S'系看，发生了两个事件：
 - 事件1：t'时刻波源发出一光波，波以c向各方向传播；
 - 事件2：t'+1/f'时，波源发出另一个光波；
- 在S系看，有：



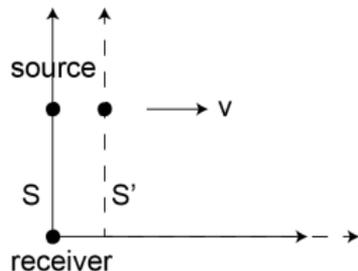
$$t_1 = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x_1 = \frac{vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y_1 = y'$$
$$t_2 = \frac{t' + \frac{1}{f'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x_2 = \frac{v(t' + 1/f')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y_2 = y'$$

横向多普勒效应II

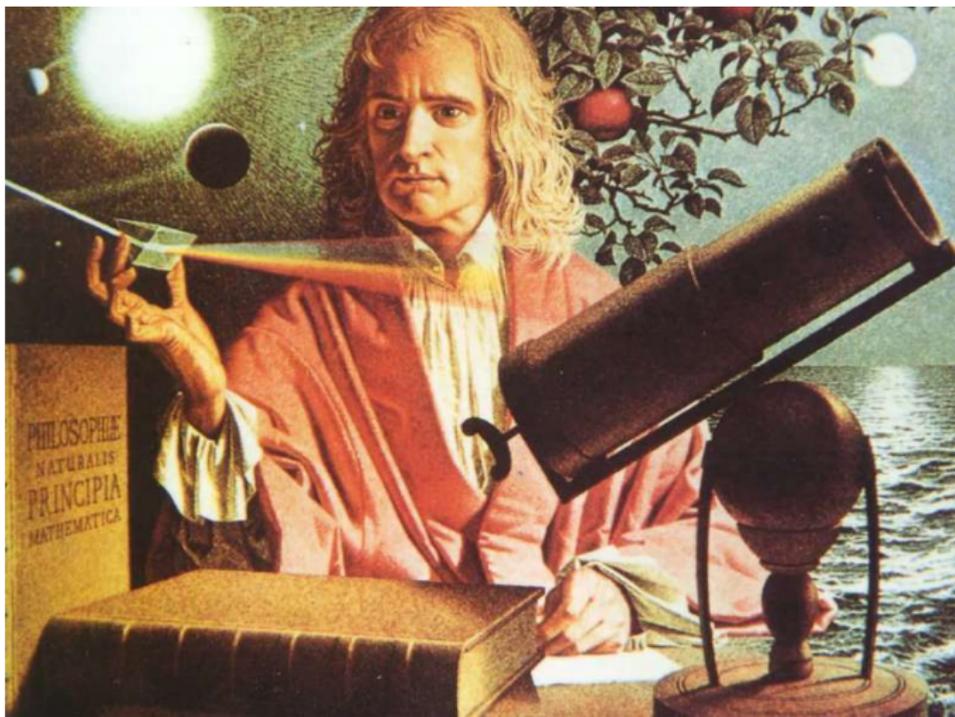
- 当 $L \gg \Delta x$ 时，有接收端收到两事件发出的光的时间差为：

$$\Delta\tau = \frac{1}{f} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{f'}$$

$$f = f' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



第二章 质点动力学



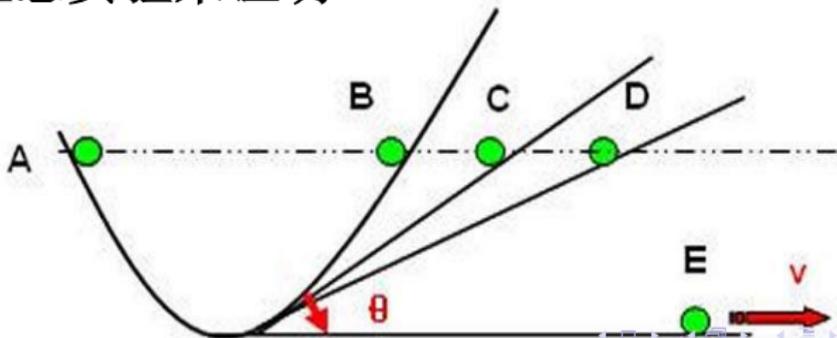
研究物体运动的原因，通常称之为动力学。牛顿动力学就是有关物体的机械运动的动力学。

牛顿动力学中的核心概念是“力”。

2.1 牛顿第一定律（惯性定律）

物体之间的相互作用，用“力”这个概念来表达。

伽利略开始明确地认识到，尽管许多运动的确都要靠外力的维持，但并非凡运动皆如此。伽利略用一个理想实验来证明。



伽利略的分析弄清了，存在一类运动，它们并不是由外力所维持。它们的特征是速度保持不变，即作匀速率的直线运动，或者静止。我们称物体不受外力作用的运动状态为自由运动。总之，处在自由运动状态的物体，必定作匀速直线运动，或者静止。这就是惯性定律。

惯性定律是理想化的物理思想。

惯性定律提出力和惯性的物理概念。

力并不是运动的原因，而是运动变化的原因。运动物体自身具有保持其匀速运动或静止的属性，这种属性称为惯性。

惯性定律的意义是在于断言惯性系的存在：一定存在着这样的参考系，相对于它，所有不受外力作用的物体都保持自己的速度。这类特殊的参考系，称为惯性参考系，或惯性系。

2.2 牛顿第二定律

2.2.1 牛顿第二定律的建立

定律：如果一质点受到外界物体的作用，则它的运动遵循下列关系：

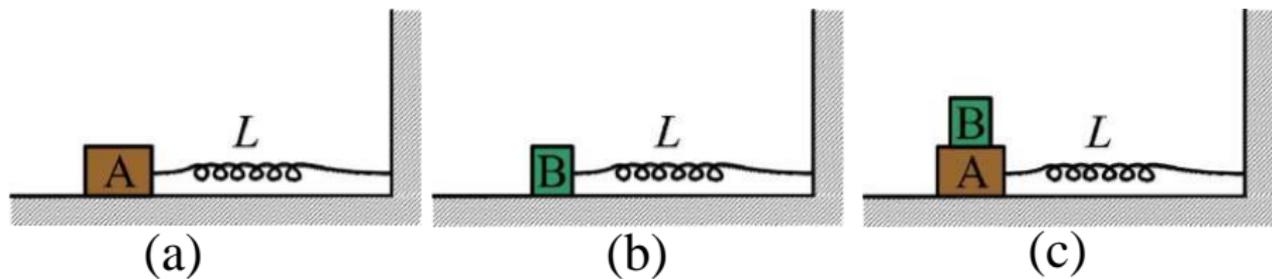
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$

其中 \vec{a} 是质点的加速度， m 是它的质量， \vec{F} 是外界对它的作用力。

在此定律中，我们一下子涉及了两个新的物理量： m 及 \vec{F} 。

在牛顿第二定律的范范围内，可以对质量及力作如下的定义：质量就是质点所受外力与所产生的加速度之比。作用在一个质点上的力就是它的质量乘以由于该力所产生的加速度。

在一足够光滑的固定桌面上，我们做三个实验：



- ① 物体A与一弹簧相连，把弹簧拉长到 L ，然后释放物体A，在弹簧的牵动下，A作加速运动，测量出开始时刻的加速度 a_A ；
- ② 用同一弹簧与物体B相连，仍拉长到 L ，测出释放时刻的加速度 a_B ；
- ③ 仍用同一弹簧，拉长到 L ，和捆在一起的A、B相连，测出释放时刻的加速度 a_{AB} 。

取物体A 的质量作为质量单位的标准，故可任意定其数值为 m_A ，**作为力的定义**，再由实验①测得的 a_A 即可算出弹簧对A的牵动力

$$F = m_A a_A$$

在实验②中，设弹簧对B的牵动力与牵动A时一样，仍为F，**作为质量的定义**，可算出B的质量

$$m_B = \frac{F}{a_B}$$

在实验③中，如果假设A与B在一起的质量 m_{AB} 是分别质量之和（即质量是可加的）： $m_{AB} = m_A + m_B$ 假定牵动力依然是F，就可以**作为定律**，来预言此时的加速度

$$a_{AB} = \frac{F}{m_{AB}} = \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{a_A a_B}{a_B + a_A}$$

式中只含有实验直接可测的量（与我们任意取定无关），亦即牛顿第二定律给出了一组实验[①,②]的数据计算另一实验[③]结果的规则。如果这样计算出来的结果与观测值符合，就为牛顿第二定律的正确性提供了一个实验验证。

这样一个理论与实验之间的全面关系告诉我们什么？

① 在整个分析过程中，我们的确有时将该式作为定义使用，有时又作为定律，但在每个具体环节上它的作用都是明确的，并没有同时既作为定义，又作为定律的情况，因而是“不混乱”的。理论与实验之间由一些测量操作联系着，由此就不难理解它既是定义又是定律的实质。

② 最后结果中**都是实验可以直接测量的量**，也就是说，由原式所给出的预言是明确的，具有可验证性或可否证性。

③ 物理学的规律，例如牛顿第二定律，都**有一定的适用限度**。在限度之外，牛顿第二定律不再成立。在牛顿第二定律不适应范围，用它来预言实验就不再正确，因而这时用它来作为定义也就没有意义了。**上述力及质量的定义也有其适用限度**。

④ 只依靠牛顿第二定律来分析运动性质，还是不够的，**必须扩充其他假定，才有可能预测运动。**在前例中，用了**两个假定：弹簧被拉长到同样的长度时产生同样的牵引力 F ；质量具有可加性。**这个特点也与数学不相同。数学上的已知到求证之间，只能使用定理、定义进行逻辑推理，不外加其他东西。但物理上没有一个如此。必定要补充一些外加的假设，才能从已知测量中作出预言。

牛顿第二定律适用的参考系是**惯性系**。

牛顿第二定律是一个矢量方程，它等价于三个分量方程： $F_x = ma_x$ ， $F_y = ma_y$ ， $F_z = ma_z$

2.2.2 质量与力的单位

质量的单位是千克，千克的标准是保存在国际计量局中的一个铂铱圆柱体。在原子尺度上，利用原子质量单位，用 ^{12}C 的原子质量精确地等于**12**个原子质量。原子质量单位与千克的关系是：

$$1\text{原子质量单位} = 1.6605655 \times 10^{-27}\text{千克}$$

力的单位是牛顿，一牛顿力使质量为一千克的物体产生**1米/秒²**的加速度。



2.3 牛顿第三定律

物体间作用力总是成对出现的，如果质点A对质点B的作用力为 $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ ，那么，质点B对质点A有作用力 $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ ，而且两个力的大小相等，方向相反，并位于两质点的连线上，即

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$



2.4 力与相互作用

2.4.1 几种常见的力及其机制

1. 弹性力

当形变为拉伸、压缩时，弹性力 f 与物体（如固体、弹簧）伸长（或压缩）量 x 成正比： $f = -kx$

当形变为扭转时，恢复力表现为力矩，此力矩与扭转角 φ 成正比： $\tau = -c\varphi$

2. 摩擦力

摩擦力是最常遇到的一种力，但是关于它的规律却是异常复杂的。我们这里仅讨论一些简单的规律。分干摩擦和湿摩擦两种形式。

干摩擦是两固体接触面有相对滑动或有相对滑动趋势时，所产生的阻碍相对滑动或相对滑动趋势的力，前者称为**滑动摩擦力**，后者称为**静摩擦力**。

根据经验，摩擦力与这个法向力成正比： $f = \mu N$

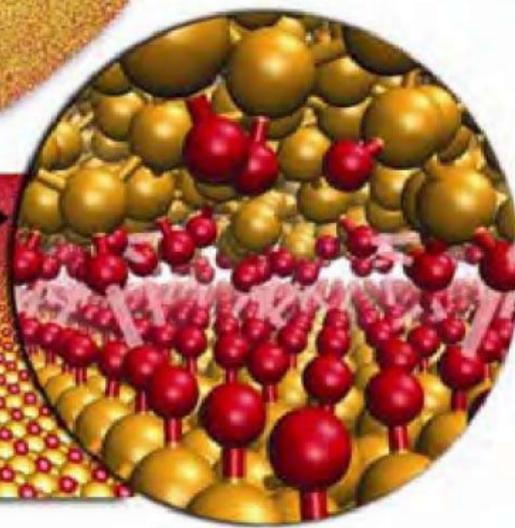
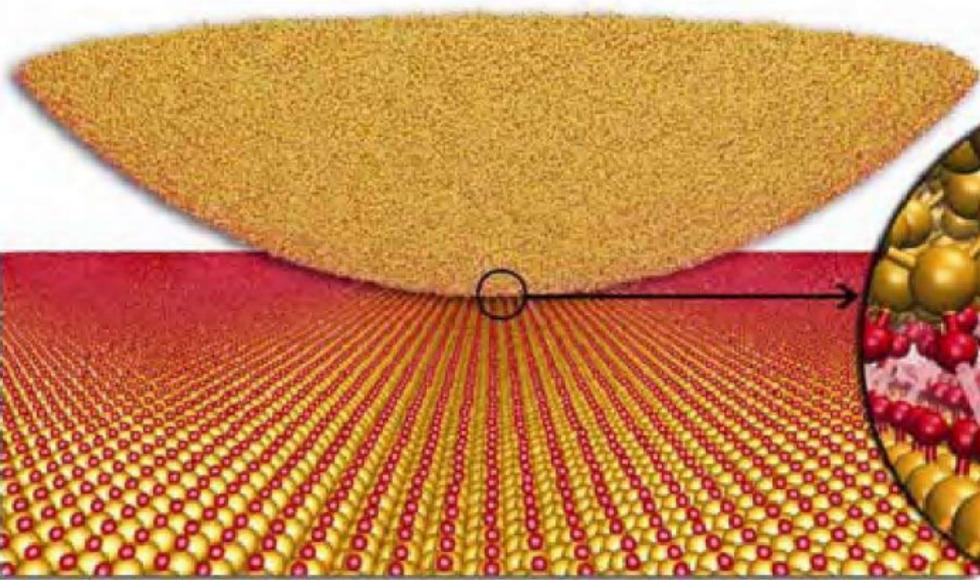
由于使物体起动所需克服的摩擦力（**最大静摩擦力**）往往大于保持物体滑动所需克服的摩擦力（**滑动摩擦力**），所以我们把上式写成两个式子：

$$f_k = \mu_k N \qquad f_s = \mu_s N$$

μ_k 和 μ_s 分别为滑动摩擦系数和静摩擦系数。

应该指出：

- ① 摩擦定律是一个**经验定律**，至今还没有被人们完全理解。因此，要想从理论上估计一下两个物体之间的摩擦系数也是不可能的，只能靠实验测定。
- ② 凡经验定律都有它的**适用范围**，比如法向力过大或运动速度过大，都会产生大量的热，而使定律失效。
- ③ 对此定律的**粗略理解**是：从原子层次看，由于相互接触表面的不平整，存在许多接触点，在接触点上原子靠得很近，好像粘结在一起，当拉动正在滑动的物体时，原子突然分开，随即发生振动，产生波和加剧原子运动，随后产生热。
- ④ 通常所列出的**摩擦系数**表中，所谓铜与铜、钢与钢等的值，实际上不是“铜与铜”等等所引起的，而是由粘附在铜上的杂质（污物、氧化物或别的外来物质）引起的。如果两块绝对纯的铜片，使表面很好接触，那么接触面上的原子分不清自己应属于哪一块铜片，以致相互粘住，因而得不到正确的摩擦系数。



两点注意:

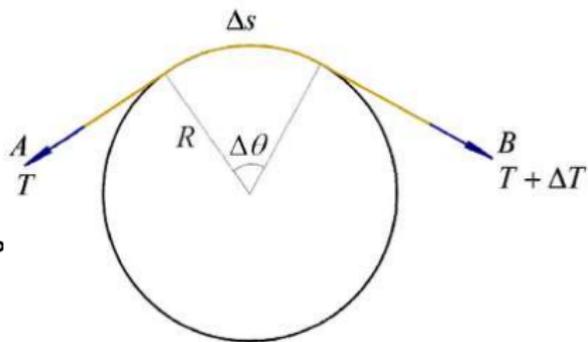
① 正确判断摩擦力的方向。

总是与相对运动（或相对运动趋势）方向相反！
汽车车轮所受到摩擦力的方向如何确定？

② 正确确定静摩擦力的大小。

$f_S = \mu_S N$ 给出的是“最大静摩擦力”

[例题] 一条绳以 $\Delta\theta \ll 1$ 的偏转角擦过一固定圆柱表面，绳垂直于柱的母线，横断面如图所示。设绳与圆柱间的静摩擦系数为 μ ，若绳一端A的张力为 T ，另一端B的张力为 $T + \Delta T$ 。绳子刚刚要向B端滑动，这时绳子张力差 ΔT 等于多少？



[解] 考察绳元 Δs 的受力以及运动情况，把它的运动分解为切向和法向。

在切向上所受到的力为指向B的 $T + \Delta T$ 以及指向A的 T ，圆柱给绳子的摩擦力 μP 指向A，其中 P 是 Δs 给圆柱的正压力。所以，由牛顿第二定律，有：

$$T + \Delta T - T - \mu P = 0 \quad \text{或者} \quad \Delta T = \mu P$$

在法向上，所受的力有向心的是

$$(T + \Delta T)_r = (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx T \frac{\Delta\theta}{2}$$

以及

$$T_r = T \sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx T \frac{\Delta\theta}{2}$$

还有离心的是圆柱给绳元 Δs 的力 P 。所以牛顿方程为：

$$F_r = \sum F_{ri} = (T + \Delta T)_r + (T)_r - P = \Delta m \frac{v^2}{R}$$

因为绳元 Δs 尚未滑动，所以 $v = 0$ 。因此得

$$(T + \Delta T)_r + (T)_r - P = 0 \quad \text{即} \quad T\Delta\theta - \frac{\Delta T}{\mu} = 0$$

得到： $\Delta T = \mu T \Delta\theta$

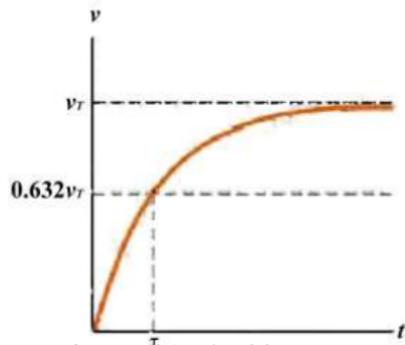
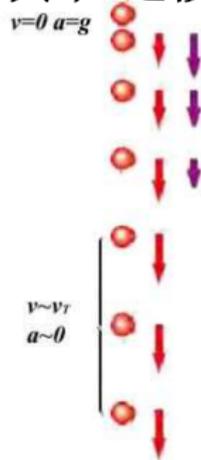
在 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 的极限下，得到： $dT = \mu T d\theta$

湿摩擦

空中飞行的飞机所受的阻力的构成十分复杂，它由冲过机翼的空气、机尾的漩涡以及其它复杂因素综合所致，但是阻力所遵循的定律却出乎意料的简单，它近似地与速度平方成正比，或写为：

$$F = -cV^2$$

其中 c 近似地是一个正的常数



如果速度非常低，低到一般飞机不能起飞，只是在跑道上拖着前进时，定律就发生变化，这时曳引阻力与速度之间大致成正比，即 $F = -\eta V$

其中 η 近似地是一个正的常数

3. 重力

在地球表面附近，一个质量为 m 的物体受到的重力方向垂直于水平面，大小为

$$F = mg \quad \text{其中}g\text{是重力加速度}$$

4. 万有引力

(在第七章专题讨论)

5. 库仑力

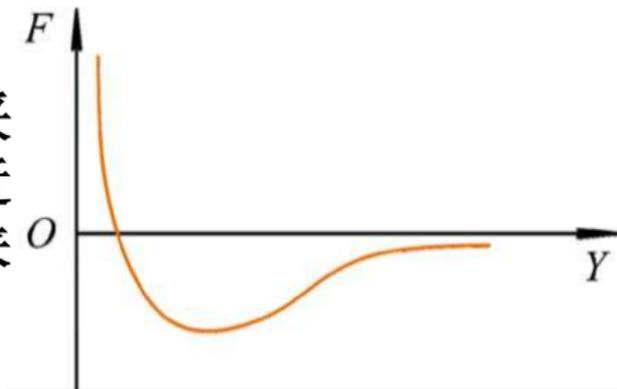
$$F = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

其中 κ 是比例系数， q_1 ， q_2 是两质点的电荷。

6. 分子力

一般在实验的基础上，采用简化模型处理问题，可近似地用下列的半经验公式来表示：

$$F = \frac{\lambda}{r^s} - \frac{\mu}{r^t} \quad (s > t)$$



式中 r 为两个分子中心之间的距离； λ, μ, s, t 都是正数

式中的第一项是正的，代表斥力；第二项是负的，代表引力。由于 s 和 t 都比较大， t 一般约为6—7，所以分子力随分子间距离 r 的增大而急剧地减小。这种力可以认为具有一定的有效作用距离，超出有效作用距离，作用力实际上完全可以忽略。由于 $s > t$ ，所以斥力的有效作用距离比引力的的小。

7. 核力

核力是把原子核中的核子（质子和中子）束缚在一起的力。这种力有效作用距离极短，对于大于约 10^{-15}m 的距离，核力就变得很小，可忽略不计了。但在小尺度内，它却超过核子之间的一切其它形式的相互作用而占支配地位。直到大约 0.4×10^{-15} 米。它还是吸引力。但距离若是再小，就成为强排斥力了。

8. 洛伦兹力

一个带电荷 q 的点电荷以速度 \vec{V} 在磁感应强度为 \vec{B} 的磁场中运动，要受到磁场的作用力，此种力称为洛伦兹力：

$$\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$$

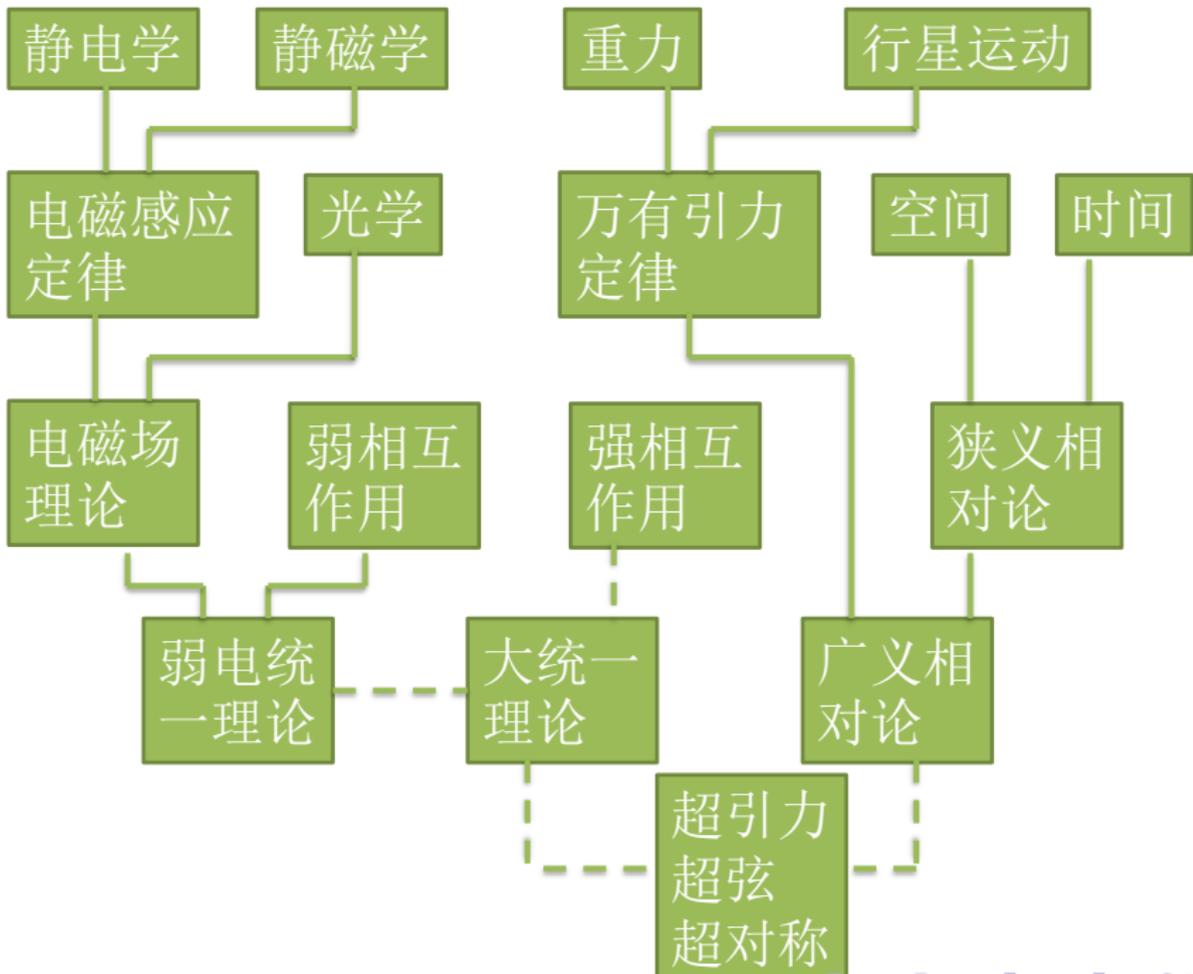
3.4.2 四类基本相互作用及其统一

四类基本作用是：**引力作用**、**电磁作用**、**强相互作用**、**弱相互作用**。

核子参与**强相互作用**，荷电粒子参与**电磁相互作用**，核子及电子、中微子参与**弱相互作用**，任何粒子都参与**引力相互作用**。

四种基本的力的特点

力	相对强度	作用范围	重要性
强相互作用	1	10^{-15}m	使原子核保持在一起
电磁力	10^{-2}	无限远	摩擦力，张力等
弱相互作用	10^{-5}	10^{-18}m	原子核衰变
万有引力	10^{-39}	无限远	组织宇宙

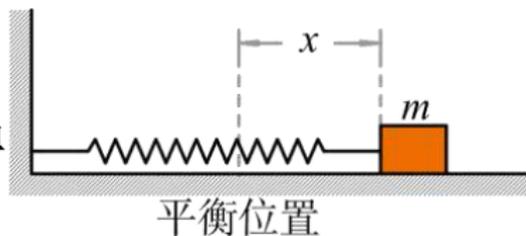


2.3 动力学问题的求解

动力学方程的含义

以弹簧振子为例：

质点受到的弹性力为 $-kx$ ， k 为弹簧的弹性系数， x 为位移。



振子振动时的动力学方程为 $-kx = m \frac{dv}{dt}$

为了讨论方便，改写为 $\frac{dv}{dt} = -x$

这个方程能不能精确地算出这个周期运动的情况？

假定在时刻 t 物体有一定的速度 v 和位置 x ，那么，在稍晚一点的时刻 $t + \Delta t$ 时，速度与位置各为多少呢？如果能够回答这一点，我们说问题就解决了。

如果 Δt 很小，作为一个近似，可以用 t 时刻的位置和速度将时刻 $t+\Delta t$ 的位置表示为： $x(t+\Delta t)=x(t)+v(t)\Delta t$ 。

Δt 越小，精度越高，即使 Δt 不是小到趋于零，此式仍能达到可用的精确度。

为了写出 $t+\Delta t$ 时刻的速度，需知到加速度。如何求得加速度？动力学定律给出了回答。由前面关系知，加速度为 $-x$ ，所以， $v(t+\Delta t)=v(t)+a(t)\Delta t=v(t)-x(t)\Delta t$ 。

因此，**如果知道在一个给定时刻的 x 与 v ，我们就知道加速度，而这又能知道新的速度和新的位置。** 这就是动力学方程内在的含义。

动力学方程的数值解

下面我们就用数值分析的方法解上述问题，由此得到的解称为方程的**数值解**。

假定取 $\Delta t = 0.100\text{s}$ 。初值 $x(0) = 1.00$ 和 $v(0) = 0$ ，可以分别写出：

$$x(0.1) = x(0) + v(0)\Delta t = 1.00$$

$$v(0.1) = v(0) - x(0)\Delta t = -0.10$$

在0.2秒时， $x(0.2) = x(0.1) + v(0.1)\Delta t = 1.00 - 0.10 \times 0.10 = 0.99$

$$v(0.2) = v(0.1) - x(0.1)\Delta t = -0.10 - 1.00 \times 0.10 = -0.20$$

依此类推，一直做下去就可以算出其余的运动。

将计算出的每个时刻的 x, v, a 列为表格或绘成图，可以发现 $x-t$ 图与 $x = \cos t$ 的曲线符合得很好。以后会知道， $x = \cos t$ 正是这个运动方程的精确解。

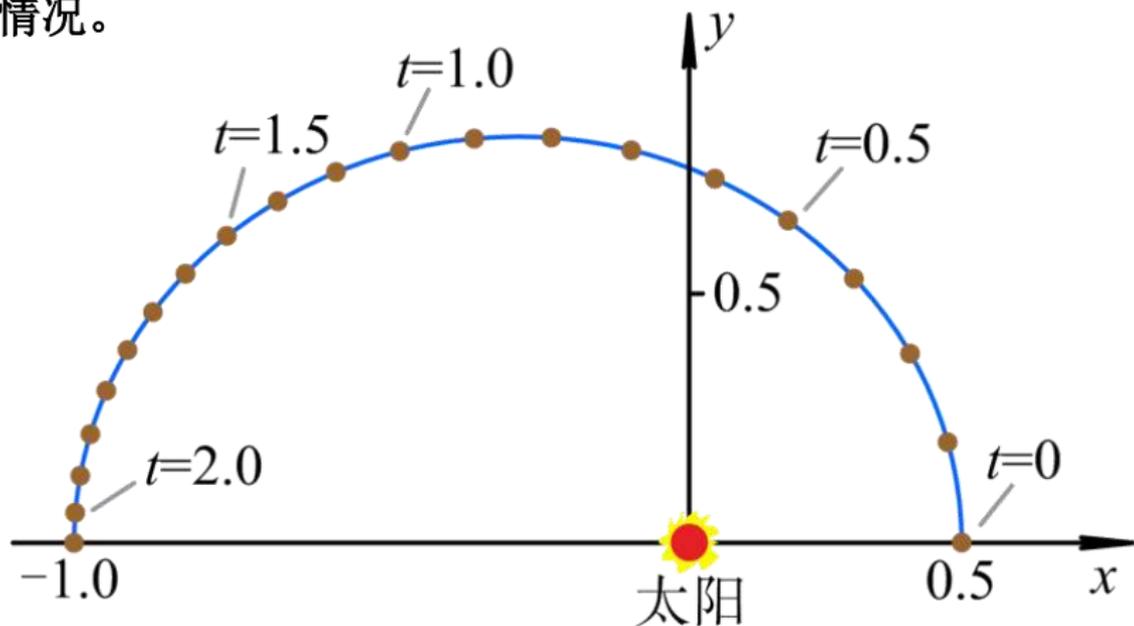
我们可以用同样的方法去处理行星绕日运动，从而得到一定近似下的椭圆轨道。

先写出行星运动的动力学方程 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -GMm \frac{\vec{r}}{r^3}$

在直角坐标系中分别
写出方程分量表达式 $\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -GMmx/r^3 \\ m \frac{dv_y}{dt} = -GMmy/r^3 \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

为了简化数值计算，我们
令 $GM \equiv 1$ 。方程改写为 $\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -x/r^3 \\ \frac{dv_y}{dt} = -y/r^3 \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

初值条件取为： $x(0)=0.500$ ， $y(0)=0.000$ ， $v_x(0)=0$ ， $v_y(0)=1.630$ 。取 $\Delta t=0.100$ ，分别对两个分量进行数值计算。计算进行到 y 出现第一个负值时暂告结束，因为至此已能看清运动情况。



数值分析方法的地位

一些简单的运动**不仅可以用数值方法分析，也可以直接进行数学分析**。比如，前面对谐振子问题采用数值方法计算振子的位置，但我们也能用分析方法轻易解出其一般解为 $\cos t$ 。

三体问题 多体问题

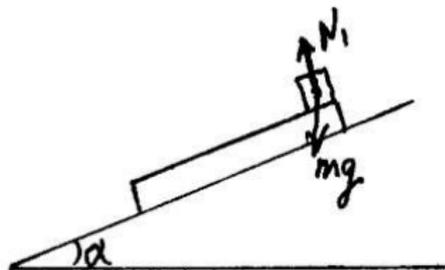
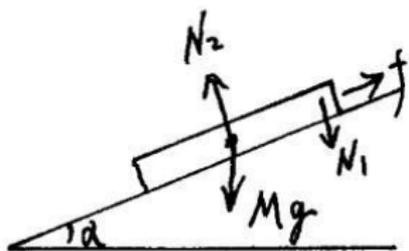
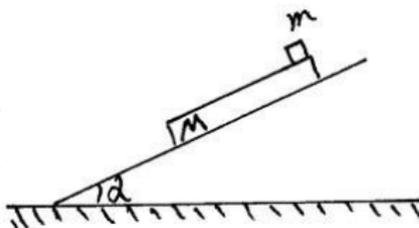
然而，也有一些两种方法都失效的情况。对简单问题可以用分析方法，对适当复杂的问题可以用数值解法，但是对非常复杂的问题这两种方法都不能用。**气体中分子的运动**即为一例，因为我们不可能用那么多的变量作数值计算。这类问题只能借助于其它方法去处理了。

少体问题

牛顿动力学方程的应用

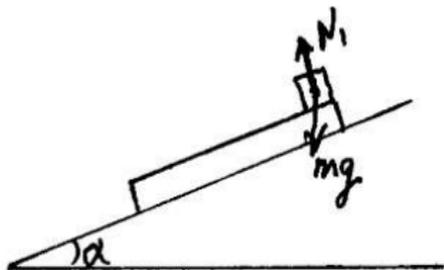
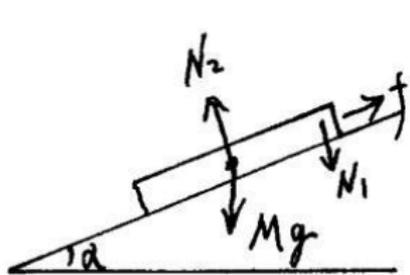
质点动力学所讨论的问题主要是质点受力与运动的相互关系。它可以由牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 处理，**由力求运动，由运动求力、或者由运动和力的一部分求它的另一部分。**

例：在倾角为 $\alpha = 45^\circ$ 的斜面上放一质量 $M = 1$ 千克的板，板上端放一质量 $m = 0.5$ 千克的小方块。设板与斜面间的摩擦系数 μ 等于 (a) 0.7, (b) 0.5, 方块和板间的摩擦忽略不计，起始时刻方块与板都静止不动。求方块从板上滑下的时间。



解：(a) $\mu = 0.7$ 时，分别对 M, m 作受力分析。由方块受力，得：

$$N_1 = mg \cos \alpha$$



由板受力得: $N_2 = N_1 + Mg \cos \alpha = (M + m)g \cos \alpha$

$$f_{\max} = \mu N_2 = (M + m)\mu g \cos \alpha$$

代入数据有关系 $Mg \sin \alpha < f_{\max}$

所以板不下滑, 得方块从板上滑下的时间为

$$t = \sqrt{2l / g \sin \alpha} \approx 0.6(\text{秒})$$

(b) $\mu = 0.5$ 时, 因为 $Mg \sin \alpha > (M + m)\mu g \cos \alpha$

所以板将下滑, 分别写出 m 和 M 的绝对加速度:

$$a_m = g \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}Ma_M &= Mg \sin \alpha - \mu N_2 \\ &= Mg \sin \alpha - (M + m)\mu g \cos \alpha\end{aligned}$$

即 $a_M = g \sin \alpha - (1 + \frac{m}{M})\mu g \cos \alpha$

m的相对加速度:

$$a'_m = a_m - a_M = (1 + \frac{m}{M})\mu g \cos \alpha$$

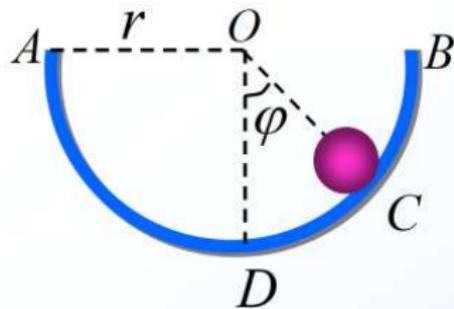
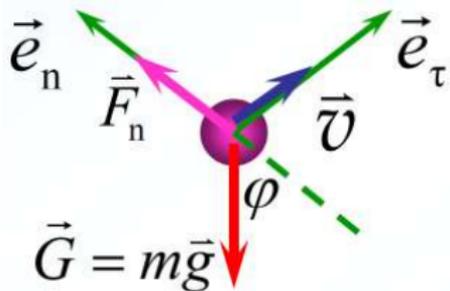
所以方块从板上滑下的时间为

$$t' = \sqrt{2l / a'_m} = \frac{2}{3} \sqrt{3}t = 1.1547t$$

即下滑时间与(a)中相比稍长一些。

例：一质量为 m 的小球最初位于如图所示的A点，然后沿半径为 r 的光滑圆弧的内表面ADCB下滑. 试求小球在C时的角速度和对圆弧表面的作用力.

解：取自然坐标系, 小球受力如图



由牛顿第二定律得：

$$\text{切向} \quad F_{\tau} = ma_{\tau} \quad -mg \sin \varphi = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{法向} \quad F_n = ma_n \quad F_n - mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{r}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \omega = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{v}{r}$$

得到:
$$-mg \sin \varphi = m \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{v}{r}$$

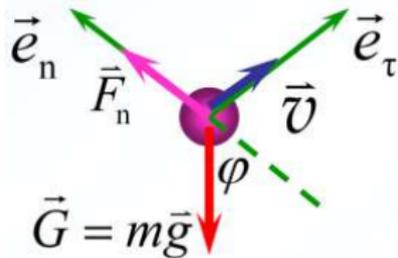
$$\int_0^v v dv = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} (-rg \sin \varphi) d\varphi \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{2rg \cos \varphi}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{2g \cos \varphi}{r}}$$

代入, 得到:
$$F_n = mg \cos \varphi + m \frac{v^2}{r} = 3mg \cos \varphi$$

小球对圆弧的作用力为:

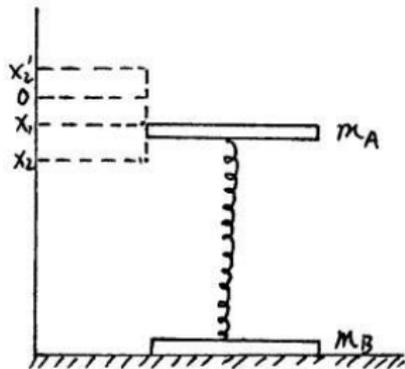
$$F'_n = -F_n = -3mg \cos \varphi$$



例：已知两质量同为1kg的物体用轻质弹簧连接在一起，竖直地放在水平桌面上，求：

①开始时两物体都静止，将桌面突然移掉，在这一瞬间两物体的加速度为多少？

②在 m_A 上加多大压力，并保持其静止，才能使当压力突然撤去时，由于弹簧的反跳导致 m_B 刚刚离开桌面？



解：①平衡时对于 m_A ，重力 $\vec{W}_A = m_A \vec{g}$ ，向下；弹簧的弹力 \vec{N}_A 是向上的，故静力平衡方程为：

$$\vec{W}_A + \vec{N}_A = 0 \quad \text{或} \quad |\vec{W}_A| = |\vec{N}_A| = m_A g$$

对于 m_B ，重力 $\vec{W}_B = m_B \vec{g}$ ，向下；弹簧的伸张力为 \vec{N}_B 也向下；桌面的支持力 \vec{R} 是向上的。故静力平衡方程为：

$$W_B + N_B = R$$

由于弹簧向上下的弹力相同，有 $N_A = N_B$

突然撤去桌面，故 $R = 0$ ，这时，物体A受到的总力为

$$F_A = \sum_i F_{Ai} = W_A - N_A = 0$$

即加速度为 $\vec{a} = 0$

物体B受的总力为 $F_B = \sum_i F_{Bi} = W_B + N_B = m_B g + m_A g$

故加速度为 $\vec{a} = \frac{m_A + m_B}{m_B} \vec{g} = 2\vec{g}$

②如图，弹簧原长在O点，加 m_A 后压缩至 x_1 点，再加压力P后压缩至 x_2 点。因为弹簧反跳的距离等于被压缩的距离，所以撤去压力P后弹簧到达的最高点为 x'_2 ，并且

$$\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1 x'_2}$$

若要求 m_B 能离开桌面，应有 $k\overline{Ox'_2} \geq m_B g$

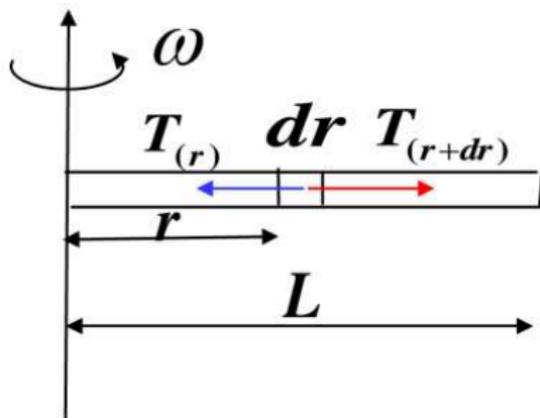
其中 k 为弹簧的倔强系数。因而，压力至少应为

$$P = k\overline{x_1 x_2} = k\overline{x_1 x'_2} = k(\overline{x_1 O} + \overline{Ox'_2}) = k\overline{x_1 O} + k\overline{Ox'_2} \geq m_A g + m_B g$$

所以，当 $P \geq (m_A + m_B)g = 2$ 公斤力时，可使 m_B 离开桌面。

[例题]一条质量为 M 的均匀分布的绳子长度为 L ，一端拴在转轴上并以恒定的角速度在水平面上旋转，设转动过程中绳子始终伸直，且忽略重力和空气阻力，求距转轴为 r 处绳子的张力。

[解]



绳上各点速度不同，张力也不同

- 在距转轴 r 处取一段绳子微元 dr 为研究对象。绳子做圆周运动，根据牛顿第二定律：

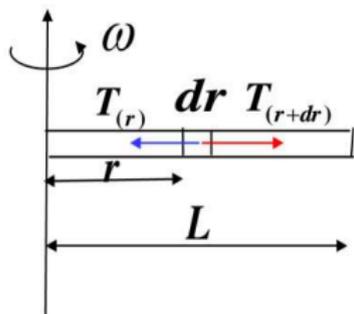
$$T_{(r)} - T_{(r+dr)} = dT = a_n dm = r\omega^2 dm$$

$$\Rightarrow dT = \frac{M}{L} r\omega^2 dr$$

由于绳子末端是自由端，所以 $r=L$ 时， $T=0$

$$\int_0^L dT = \int_L^r \frac{M}{L} r\omega^2 dr$$

$$\Rightarrow T = -\frac{M\omega^2}{2L} (L^2 - r^2)$$



2.4 力学相对性原理与伽利略变换

2.4.1 力学相对性原理

伽利略在1632年出版的著作
《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》

把你和几个朋友关在一条大船甲板下的主舱里，再让你们带几只苍蝇、蝴蝶和其它小飞虫。舱内放一只大水碗，里面放几条鱼。然后挂上一个水瓶，让水一滴一滴地滴到下面的一个宽口罐儿里。船停着不动时，你留神观察，小虫都以等速向舱内各方向飞行，鱼向各个方向随便游动，水滴滴进下面的罐子中。你把任何东西扔给你的朋友时，只要距离相等，向这一方向不必比另一方向用更多的力，你双脚齐跳，无论向哪个方向跳过的距离都相等。当你仔细地观察这些事情后，再使船以任何速度前进。只要运动是匀速的，也不互左忽右地摆动，你将发现，所有上述现象丝毫没有变化，你也无法从其中任何一个现象来确定，船是在运动还是停着不动。

力学相对性原理

一切惯性系在力学上是等价的。

在任何惯性系中，力学定律具有相同的形式。

2.4.2 时间和空间的绝对性

在两个相互作用匀速直线运动的参考系 S 和 S' 中，事件的时空坐标之间有什么关系？

经典力学认为

时间的流逝

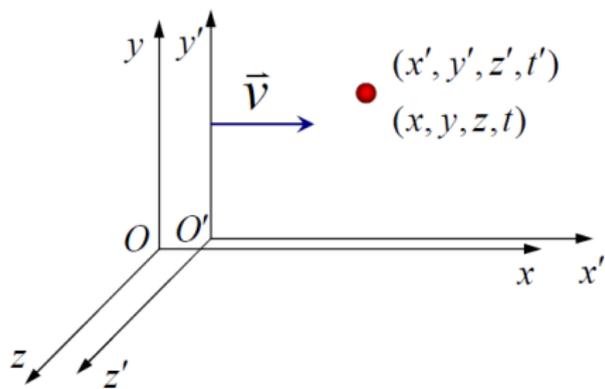
在所有参考系中都相同

$$t = t'$$

空间的距离

在所有参考系中也是相同的

$$l = l'$$



——绝对时空观

时间的流逝和空间的度量与物体的运动没有任何关系

2.4.3 伽利略变换

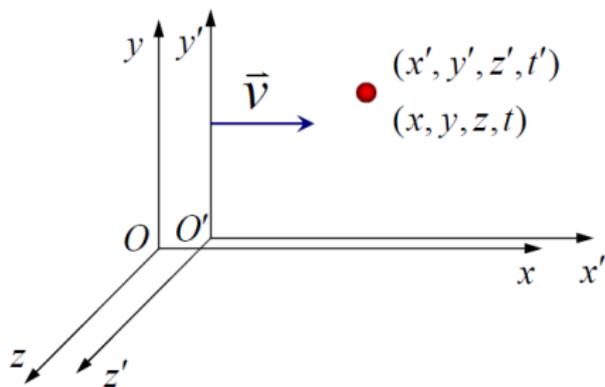
考虑两个相互作用匀速直线运动的参考系S和S'，它们相应的坐标轴彼此平行，S'系相对S系的速度为 v ，沿x轴正方向。在 $t=t'=0$ 时刻，两个参考系的坐标原点重合。

$$\text{伽利略变换} \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

速度变换公式

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$$

相对速度=绝对速度-牵连速度



如果在时刻 t ，质点对于 K ， K' 的速度分别为 $\vec{v}(t)$ ，及 $\vec{v}'(t)$ 而 K' 相对于 K 以 \vec{u} 作**匀速运动**，则有 $\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{u}$

对时间求导：
$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

质点相对于 K 的加速度是 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

而对于 K' 的加速度是 $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} \quad \longrightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a}$

同一质点对于两个**相互匀速运动**的参考系的加速度是**一样的**。换言之，质点的加速度对于**相对匀速运动**的所有参考系，**具有不变性**。

在两个惯性系K和K'中，**牛顿第二定律**成立

$$\vec{F} = m\vec{a}, \vec{F}' = m'\vec{a}'$$
$$\vec{a} = \vec{a}' \quad \downarrow \quad m = m'$$
$$\vec{F} = \vec{F}'$$

在两个惯性系K和K'中，**牛顿第三定律**也成立

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}, \vec{F}'_{A \rightarrow B} = -\vec{F}'_{B \rightarrow A}$$

在任何惯性系中，力学定律具有相同的形式
推广，在任何惯性系中，物理学定律具有相同的形式

[例题] 卡车和小汽车在同一车道上，均以匀速前进。前面卡车的速度为 v_0 ，后面小汽车的速度为 $3v_0$ 。由于雾大，当小汽车司机发现卡车时，两车相距仅为 s_0 ，小汽车立即制动。已知小汽车制动后匀减速前进，需经距离 s_1 才能停止。试确定两车不发生碰撞的条件。

[解] 取卡车为参照系，小汽车的相对加速度为

$$a = \frac{9v_0^2}{2s_1}$$

s_1 为小汽车完全停下来所经过的距离。

小汽车的相对初速度为 $2v_0$ ，相对末速度为 0 时的相对位移为：

$$s' = \frac{(2v_0)^2}{2a} = \frac{4}{9}s_1$$

两车不相碰的条件为：

$$s_0 > s' = \frac{(2v_0)^2}{2a} = \frac{4}{9}s_1$$

[例题] 求解带电粒子在匀强磁场中的运动。假设磁场为 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ ，粒子的质量为 m ，电荷为 q ，初始时粒子处于原点，速度为 $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_y + v_{z0} \mathbf{e}_z$ 。

[解] 磁场中运动的带电粒子受力运动的方程为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

应用牛顿第二定律得

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

分解到直角坐标系，有：

在x方向的加速度为：
$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB_0}{m} v_y$$

在y方向的加速度为：
$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB_0}{m} v_x = -\frac{qB_0}{m} \frac{dx}{dt}$$

在z方向的加速度为：
$$\frac{dv_z}{dt} = 0, \text{ 解为: } z = v_{z0}t$$

对y分量的方程积分，并由初条件得：
$$v_y = -\frac{qB_0}{m} x + v_0$$

[解(续)] 令 $\omega = \frac{qB_0}{m}$, $R = \frac{v_0}{\omega}$ (分别是角速度和半径)
并将积分所得代入x分量方程, 有:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega(-\omega x + v_0) = -\omega^2(x - R)$$

由微分方程的数学知识, 可知这类方程的解的形式为:

$$x - R = A \cos(\omega t + \alpha)$$

这里A和 α 是待定的积分常数。根据题给初始条件有
 $x(0) = 0$, $v_x(0) = 0$, 得 $A = -R$, $\alpha = 0$ 。即:

$$x = R - R \cos(\omega t), \quad v_x = v_0 \sin(\omega t)$$

继而可得:

$$v_y = -\omega x + v_0 = v_0 \cos(\omega t), \quad y = R \sin(\omega t)$$

结果表明带电粒子的运动轨道在xy平面的投影是以(R,0)为中心, R为半径的圆。若 $\omega > 0$ 则带电粒子在xy平面内的投影是沿顺时针方向以角速度 ω 做匀速圆周运动。实际上带电粒子在空间沿等距螺旋线轨道做速率恒定的运动。

[例题] 求解带电粒子在匀强电磁场中的运动。假设磁场为 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ ，电场为 $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x$ ，粒子的质量为 m ，电荷为 q ，初始时粒子处于原点，速度为 $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_y + v_{z0} \mathbf{e}_z$ 。

[解] 匀强电场磁场中运动的带电粒子受力运动的方程为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = m\mathbf{a}$$

令 $\omega = \frac{qB_0}{m}$ ， $R = \frac{v_0}{\omega}$ ，将运动方程分解到直角坐标系，有：

在x方向的加速度为：
$$\frac{dv_x}{dt} = \omega(v_y + \frac{E_0}{B_0})$$

在y方向的加速度为：
$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x$$

在z方向的加速度为：
$$\frac{dv_z}{dt} = 0$$

令 $V_y = v_y + \frac{E_0}{B_0}$ ，则方程组变为：
$$\frac{dv_x}{dt} = \omega V_y, \quad \frac{dV_y}{dt} = -\omega v_x$$
形式与上一例题中的方程一样，并用类似步骤求解

解为：

$$x = R - R \cos(\omega t), \quad v_x = v_0 \sin(\omega t)$$

继而可得：

$$V_y = v_0 \cos(\omega t)$$

因此

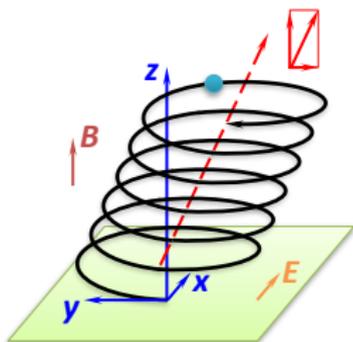
$$v_y = V_y - \frac{E_0}{B_0} = v_0 \cos(\omega t) - \frac{E_0}{B_0}$$

$$y = R \sin(\omega t) - \frac{E_0}{B_0} t$$

这时带电粒子的运动是匀速圆周运动与匀速直线运动的合成运动。其中，匀速直线运动的速度为

$$-\frac{E_0}{B_0} \mathbf{e}_y + v_{0z} \mathbf{e}_z$$

也是带电粒子圆周运动的圆心的运动速度。



3.1 非惯性系中的牛顿动力学

牛顿运动定律只适用于惯性系，然而，有些场合下需要在非惯性系中讨论问题。

3.1.1 非惯性系

所谓非惯性系是指相对于惯性系作变速运动的参考系。在非惯性系中，惯性定律及牛顿第二定律不再成立。

3.1.2 平动加速参考系

设一个参考系A相对于惯性系B以不变加速度 \vec{a}_0 运动。质量为 m 的物体相对于A和B的加速度分别为 \vec{a}' 和 \vec{a} ，它们满足关系

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$$

在惯性系 B 中，牛顿第二定律成立

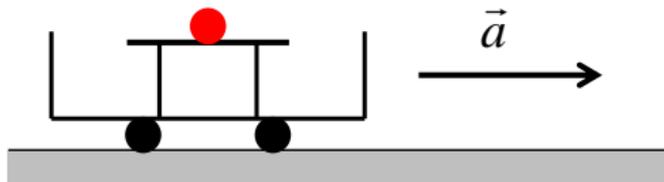
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$$

在加速系 A 中，有动力学方程：

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{\text{惯}}$$

其中 $\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{a}_0$ ，称为**惯性力**或虚拟力。在加速平动参考系中所感受到的虚拟力是均匀的，且**与重力一样与质量成正比**，它起源于参考系的加速运动，而不是物体间的相互作用。

例：向右加速运动的小车是一非惯性系，是一直线加速参考系。

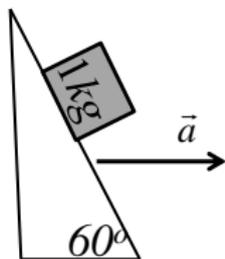


讨论：小球的运动状态：（桌面光滑）

（1）以地面为参考系：小球水平方向不受力，静止。

（2）以小车为参考系：小球相对于车向左以加速度 $-\vec{a}$ 运动，由于水平方向不受力，不符合牛顿第二定律，这时，可设想力 $\vec{f}_{\text{惯}}$ 作用于小球上，方向与小车相对于地面的加速度方向相反，大小等于小球质量与加速度的乘积，该设想的力称为惯性力： $\vec{f}_{\text{惯}} = -m\vec{a}$

- 如图，一个质量为1.0kg的物块放置在没有摩擦的木楔上，木楔倾角 60° ，加速度为 \bar{a} ，方向向右，物块相对于木楔静止。作物块受力分析图，并计算加速度大小。



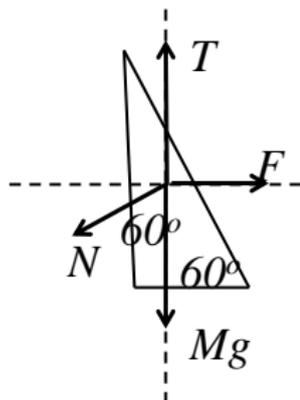
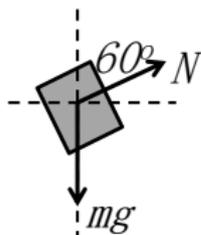
解：惯性系中：

$$\text{物块: } N\cos 60^\circ - mg = 0$$

$$N\sin 60^\circ = ma$$

$$\text{木楔: } F - N\cos 60^\circ = Ma$$

$$Mg + N\sin 60^\circ - T = 0$$



 $a = \sqrt{3}g$

相对于木楔静止的非惯性系中：

$$\text{物块: } N\cos 60^\circ - mg = 0$$

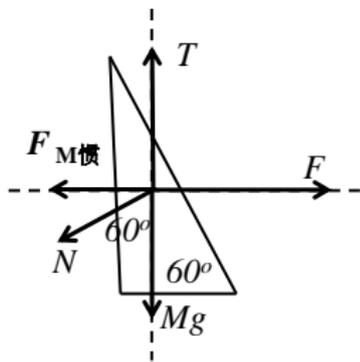
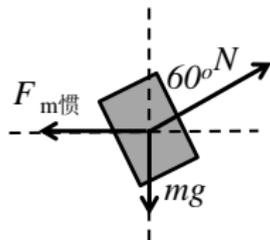
$$N\sin 60^\circ + F_{\text{惯}} = 0$$

其中 $F_{\text{惯}} = -ma$

$$\text{木楔: } F - N\cos 60^\circ - Ma = 0$$

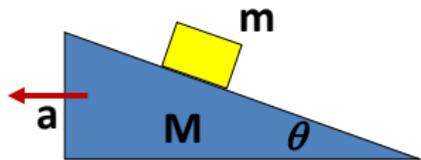
$$Mg + N\sin 60^\circ - T = 0$$

➔ $a = \sqrt{3}g$



例 一质量为 m 的木块静置于质量为 M ，倾角为 θ ，高为 h 的直角劈的顶部，劈置于水平面上，所有的接触面都是光滑的，试用非惯性系观点，求木块 m 相对斜面的加速度。

解：劈的运动以地面为参考系来考察，在水平方向上 $N \sin \theta = Ma$



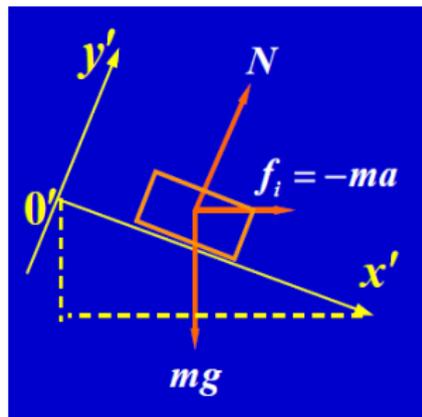
坐标系 $O'X'Y'$ 取在劈上，木块除受真实力 N 和 mg 外，还受惯性力 f_i 。

木块的运动方程为

$$ma \cos \theta + mg \sin \theta = m\ddot{x}'$$

$$N + ma \sin \theta = mg \cos \theta$$

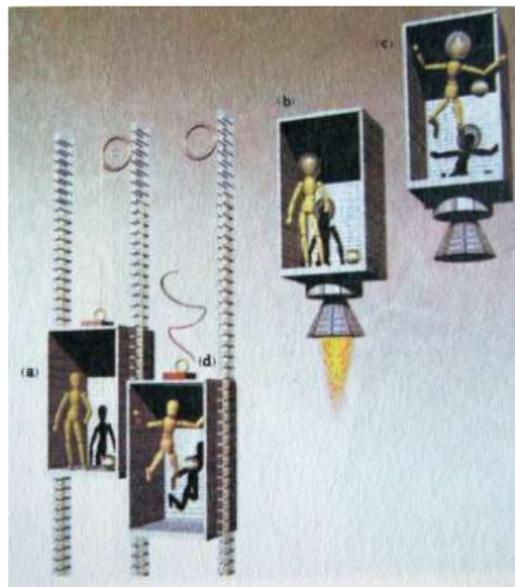
消去 N ，即得 $a = \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{m \sin^2 \theta + M}$



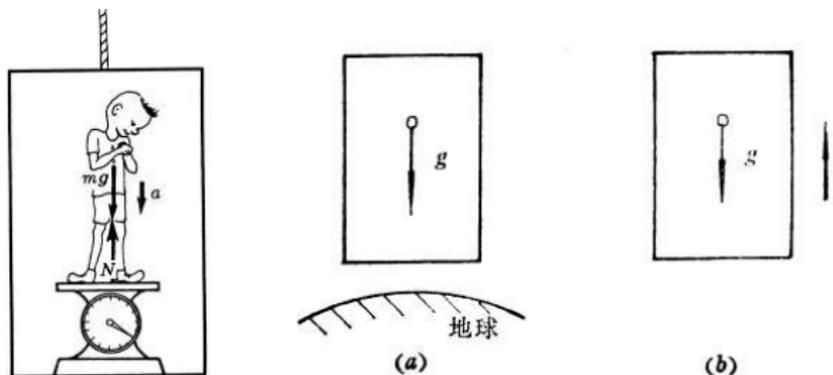
从而，可以得到 $\ddot{x}' = a \cos \theta + g \sin \theta = \frac{(M + m) \sin \theta}{m \sin^2 \theta + M} g$

★等效原理

在加速平动参考系中，我们只要对每一个质点引入一个惯性力 $\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{a}_0$ ，那么这个加速系中的物理定律就和在惯性系中的等同。这个惯性力的一个重要特征是，它永远与质量成正比。重力也是这样。因此，有人提出，有可能重力本身就是一种惯性力，万有引力或许就是由于我们没有选取正确参考系而引起的。



以一个完全封闭的电梯为例。



等效原理告诉我们，究竟是均匀重力加速度 \vec{g} ，还是参照系的加速度 $\vec{a}_0 = -\vec{g}$ ，这在局部范围内是无法加以区分的。

引力的本性就在于引力能在某种参考系中被消除。等效原理是有关于引力最基本的原理。★

3.1.3 转动参考系

相对于惯性系S转动的参考系S'，不管是均匀转动还是非均匀转动，**都是非惯性系**。

设质量为 m 的质点相对于惯性系以加速度 \vec{a} 运动，相对于转动系以加速度 $\vec{a}_{\text{转}}$ 运动。在惯性系中牛顿第二定律成立：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

我们希望在转动系中动力学方程可以写为：

$$\vec{F}_{\text{转}} = m\vec{a}_{\text{转}}$$

如果质点 m 在两个参考系中的加速度满足关系：

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{转}} + \vec{A}$$

则

$$\vec{F}_{\text{转}} = m\vec{a}_{\text{转}} = m(\vec{a} - \vec{A}) = \vec{F} + \vec{F}_{\text{惯}}$$

$$\vec{F}_{\text{转}} = m\vec{a}_{\text{转}} = m(\vec{a} - \vec{A}) = \vec{F} + \vec{F}_{\text{惯}}$$

这里 $\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{A}$ 。至此，与平动系中的讨论完全相同。我们的任务是寻找转动系中的**牵连加速度** \vec{A} 。

① 惯性离心力

一个相对于转动系 S' 静止的物体，在惯性系 S 看来，它必定绕转轴作圆周运动，其上受向心力作用，向心力可表为：

$$\vec{F} = -m\omega^2 r \vec{e}_r$$

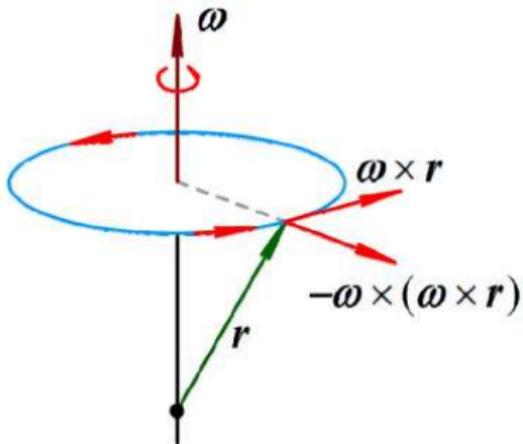
其中 ω 为转动参考系的角速度， r 为物体离转轴距离， \vec{e}_r 为离轴径向单位矢量。

但是在转动系中此物静止不动： $\vec{a}_{\text{转}} = 0$

所以知： $\vec{A} = \vec{a} = -\omega^2 r \vec{e}_r$

惯性力： $\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{A} = m\omega^2 r \vec{e}_r$

此惯性力被称为**惯性离心力**，简称离心力。



当物体所在处的位矢 \vec{r} 并不垂直于转轴时，离心力可表示为

$$\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

其中 $\vec{\omega}$ 为转动系的角速度矢量。

\vec{r} 的原点取在转轴上。

$\vec{F}_{\text{惯}}$ 的方向仍离轴向外。

惯性离心力的应用 (1) 宇航训练



$$F_{\text{离}} = m\omega^2 r$$

航空、航天员训练用的离心机。

空军：5倍自身体重
(持续 2-3秒)

航天：8倍自身体重
(持续40-50秒)

问题：为何需要那么长的悬臂？

试计算：现有一离心机，转速最快为每周2秒。要使人受到的离心力达到8倍体重，旋转臂需要多长？

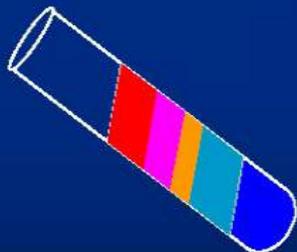
$$8mg = m\omega^2 r \Rightarrow r = 8g / \omega^2 = 8gT^2 / (4\pi^2) = 7.9\text{米}$$

惯性离心力的应用 (2) $F_{\text{离}} = m\omega^2 r$

◎ 增加旋转频率

在血液中有各种密度不同的细胞；在一些化学溶液中有不同密度的悬浮微粒。如何分离出来？

$$F_{\text{离}} = m\omega^2 r$$



密度 低 \longrightarrow 高

核武器的原料收集 ^{235}U 采用了同样的原理。



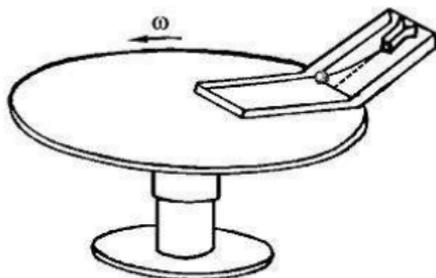
(医用离心机)

② 科里奥利力

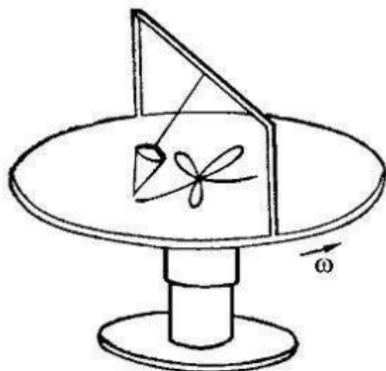
如果物体在转动系中运动，则产生新的惯性力，即科里奥利力。

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}'$$

其中 $\vec{\omega}$ 为转动系的角速度矢量， \vec{V}' 为质点在转动参考系中的相对速度，它可以不垂直于转轴。

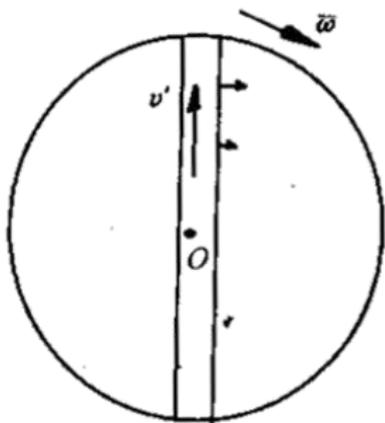


落体偏东的演示



傅科摆模拟演示

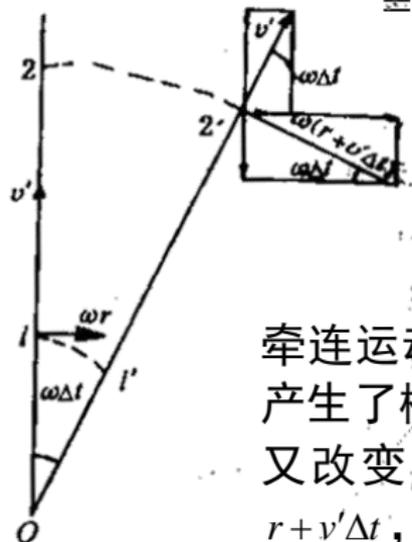
- 例：圆盘半径为 R ，以匀角速度 ω 绕垂直于盘心 O 的轴线转动。一质点沿径向槽自盘心以匀速度 v' 向外运动，试求质点加速度各分量的量值。



解:

$$\begin{aligned}\Delta v_r &= [v' \cos \omega \Delta t - \omega(r + v' \Delta t) \sin \omega \Delta t] - v' \\ &= [v' - \omega(r + v' \Delta t) \omega \Delta t] - v' = -\omega^2 r \Delta t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta v_\theta &= [\omega(r + v' \Delta t) \cos \omega \Delta t + v' \sin \omega \Delta t] - \omega r \\ &= [\omega(r + v' \Delta t) + v' \omega \Delta t] - \omega r = 2\omega v' \Delta t\end{aligned}$$



$$a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_r}{\Delta t} = -\omega^2 r$$

$$a_\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\theta}{\Delta t} = 2\omega v'$$

牵连运动(圆盘转动)改变了相对速度 v' 的方向,因而产生了横向加速度 $\omega v'$;同时,相对运动(质点向外运动)又改变了牵连速度 $\bar{\omega} \times \bar{r}$ 的量值,因为这时 r 已变为 $r + v' \Delta t$,故又一次产生了横向加速度 $\omega v'$,因而沿横向的科里奥利加速度为 $2\omega v'$.

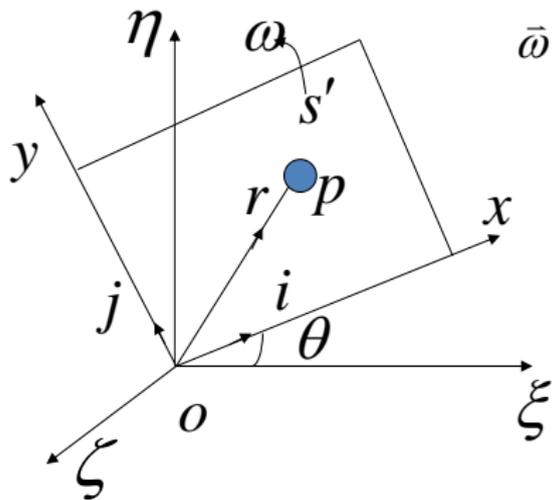
如质点在盘上不动,即 $v' = 0$,则在瞬间 $t + \Delta t$,质点只随着盘转到 $1'$ 的位置,它离盘心 O 的距离仍然等于 r ,所以只有径向加速度 $-\omega^2 r$.

平面转动参照系

S -- 固定参照系 $o-\xi\eta\zeta$

S' -- 运动参照系 (转动) $o-xyz$

$\bar{\omega}$ -- 是 S' 系的转动角速度, 在 z 轴上



位矢 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

求在 S 参照系中的位移、速度、加速度

地球

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= \frac{d\vec{i}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \vec{j} = \omega \vec{k} \times \vec{i} = \vec{\omega} \times \vec{i} \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= \frac{d\vec{j}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\omega \vec{i} = \omega \vec{k} \times \vec{j} = \vec{\omega} \times \vec{j} \end{aligned} \right.$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt}$$

速度 $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$

相对速度

牵连速度

这个结果对于**三维**情况也适用

加速度 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}$

其中 $\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$

$$\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

其中 $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r} = -\omega^2 \vec{r}_\perp$

平面情况: $\vec{r}_\perp = \vec{r}$ 三维情况: $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{r}_\parallel = \vec{r} - \frac{\vec{\omega}}{\omega} \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \vec{r} \right)$

总结：三维空间中的转动坐标系的加速度

设参考系以 ω 匀角速度转动。

$$\text{质点位置: } \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$\text{质点速度: } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

其中 $\mathbf{v}' = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$ 是在转动坐标系中测得的速度，而 $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}$, $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}$, $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$ 。

加速度:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

其中 $\mathbf{a}' = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}$ 是在转动坐标系中测得的加速度。再带入质点速度 \mathbf{v} 的表达式，得

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

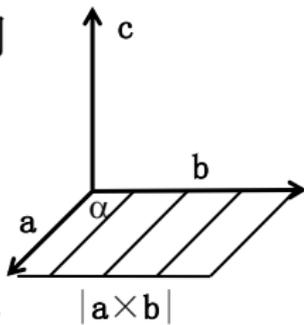
矢量的向量积（叉积）

- 定义：设向量 c 是由两个向量 a 和 b 按以下规定确定：

$$|c| = |a| |b| \sin \alpha, \quad \alpha \text{ 是 } a \text{ 与 } b \text{ 之间的夹角}$$

c 的方向垂直于 a 与 b 决定的平面， c 的指向按右手规则确定，即右手四指以不超过 π 的角度，从 a 转向 b 时，拇指的指向就是 c 的指向。

则称向量 c 是 a 与 b 的**向量积**（叉乘，叉积，外积），记为 $c = a \times b$



例子：力矩 $f \times r = L$ 。三角形两个边的向量叉乘得到面积一半。

向量积

- 向量积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的模 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 等于以 \mathbf{a} , \mathbf{b} 为邻边的平行四边形面积

- 推导: 1) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

2) 两个非零向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

3) 对于单位矢量 \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , 有:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$$

4) 根据右手定则:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

- 向量积的运算性质

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 不交换!

(2) 分配率 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

(3) 结合律 $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$

矢量的向量积

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

连叉乘

连叉乘 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$

- 推导:
- 以 \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 两向量所在平面为直角坐标系的 xy 平面, 向量 \mathbf{a} 在 xy 平面上的投影为 x 轴, 建立直角坐标系, 有

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j}$$

- 则连叉乘

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times (b_x c_y - b_y c_x) \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} \times (b_x c_y - b_y c_x) \mathbf{k} \\ &= (a_x b_y c_x - a_x b_x c_y) \mathbf{j} = a_x c_x (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) - a_x b_x (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j}) \\ &= a_x c_x \mathbf{b} - a_x b_x \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \end{aligned}$$

例：求向量 $\mathbf{A} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 的叉积和它们之间的角度。

解：
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [-1(-2) - 3(-5)]\mathbf{i} + [3(1) - 1(-2)]\mathbf{j} + [1(-5) - (-1)1]\mathbf{k}$$
$$= 17\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + (-4)\mathbf{k} \text{ 。}$$

为了求出 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 之间的角度，我们使用 $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta$ ，先求出 $\sin \theta$ ，从而求出 θ 。

$$A = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11} \quad , \quad B = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{30} \quad ,$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{17^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{330} \quad ,$$

所以，
$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{AB} = \frac{\sqrt{330}}{\sqrt{11}\sqrt{30}} = 1 \quad ,$$
 它告诉我们 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 之间的

的角度是 90° 。这也能通过取点积， $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ 看出。

非惯性系中加速度的证明

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= (\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}) \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} \\ &= (\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}) \times [(\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2) \vec{i} + (\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3) \vec{j} + (\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1) \vec{k}] \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 & \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 & \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1 \end{vmatrix} \\ &= [\omega_2(\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1) - \omega_3(\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3)] \vec{i} && + \omega_1^2 r_1 \vec{i} - \omega_1^2 r_1 \vec{i} \\ &+ [\omega_3(\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2) - \omega_1(\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1)] \vec{j} && + \omega_2^2 r_2 \vec{j} - \omega_2^2 r_2 \vec{j} \\ &+ [\omega_1(\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3) - \omega_2(\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2)] \vec{k} && + \omega_3^2 r_3 \vec{k} - \omega_3^2 r_3 \vec{k} \\ &= \omega_1 \vec{i} (\omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 + \omega_1 r_1) + \omega_2 \vec{j} (\omega_3 r_3 + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2) + \omega_3 \vec{k} (\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3) \\ &- (\omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_1^2) r_1 \vec{i} - (\omega_3^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) r_2 \vec{j} - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) r_3 \vec{k} \\ &= \vec{\omega}(\vec{\omega} \bullet \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}' = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

相对加速度

$$\vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

牵连加速度

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

科里奥利加速度

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

科里奥利加速度是由牵连运动与相对运动相互影响产生的。

惯性力

若K'系的原点相对于K系静止，则K系看，物体受到真实力作用

$$\vec{F} = m\vec{a} = 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

从K系看，为了能形式上使用牛顿定律，则物体受到的**表现力为0**，所以物体除了受到惯性离心力

$\vec{f}_c = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ 之外，还受到科氏力

$$\vec{f}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

即表现力为

$$\vec{F}_{eff} = \vec{F} + \vec{f}_c + \vec{f}_{cor}$$

科里奥利力在地球上的表现

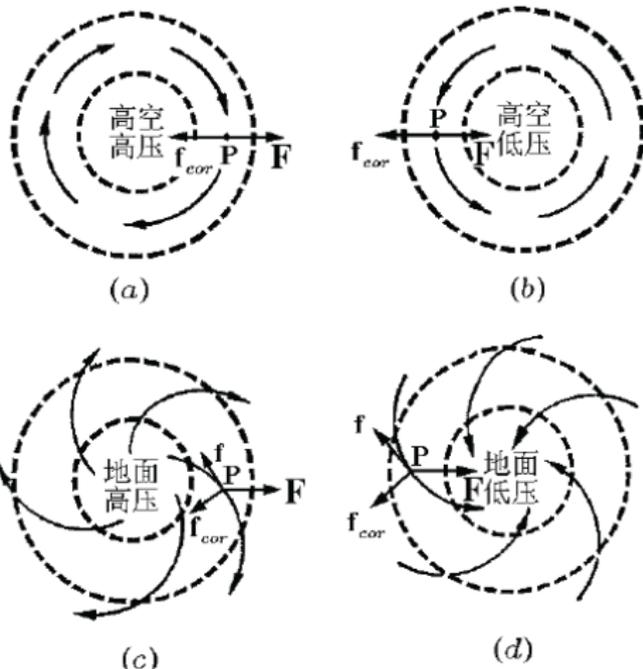


1851年在巴黎先贤祠的大厅里，让·傅科进行实验的67米长的摆。

科里奥利力在地球上的表现



科里奥利力在地球上的表现



科里奥利力引起的气旋(a)与反气旋(b)

空间转动情况下，当转动系为均匀转动时，其惯性力为：

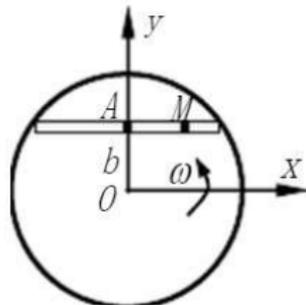
$$\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{V}'$$

[例题]一圆盘以匀角速度 ω 绕过圆心并与圆盘垂直的轴转动。一质点M沿圆盘上的弦，以恒定的相对速度 u 运动，如图所示。已知该弦离盘心的距离为 b 。求在以地面为参考系时，质点M的速度和加速度（表示成质点M离弦中点的距离 x 的函数）。

[解]：在圆盘上建立如图所示的随圆盘转动的直角坐标系O-xyz，地面为惯性系。则：

$$\begin{aligned}\vec{v}_M &= \vec{v}' + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = u\vec{i} + \omega\vec{k} \times (x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= (u - \omega b)\vec{i} + \omega x\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_M &= \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \\ &= 0 + 0 + \omega\vec{k} \times [\omega\vec{k} \times (x\vec{i} + b\vec{j})] + 2\omega\vec{k} \times u\vec{i} \\ &= -\omega^2 x\vec{i} + (2\omega u - \omega^2 b)\vec{j} \quad \text{或} \quad \vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt}\end{aligned}$$



[例题] 半径为 r 竖直放置的光滑圆环，绕通过其圆心的铅直轴以恒定的角速度 $\vec{\omega}$ 转动。在此圆环上套有一质量为 m 的小环，自 $\theta = \pi/4$ 处相对于圆环无初速地沿环下滑。问小环的位置 θ 为何值时，它的滑动将开始反向？这里 θ 是圆心与小环的连线跟转轴之间的夹角。

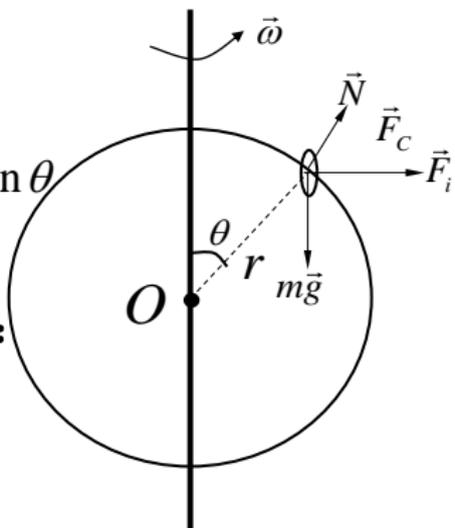
[解] 以圆环为参考系。受力分析如图所示。小环受到重力，大圆环的支持力，科里奥利力

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} = 2m\omega r \dot{\theta} \cos \theta$$

和惯性离心力 $\vec{F}_i = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m\omega^2 r \sin \theta$

在整个运动过程中只有重力 mg 和惯性离心力 \vec{F}_i 有沿圆环切向分力，积分得：

$$mgr \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \theta \right) + \int_{\pi/4}^{\theta} \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} mv^2$$



$$\text{即 } mgr\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\theta\right) + \int_{\pi/4}^{\theta} m\omega^2 r^2 \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{2}mv^2$$

开始反向时, $v=0$

$$\text{即 } \frac{\omega^2 r}{2g} \cos^2\theta + \cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\omega^2 r}{4g} = 0$$

$$\text{解得: } \cos\theta = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{2g}{\omega^2 r} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

显然取 $\cos\theta = -\frac{2g}{\omega^2 r} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

即 $\theta = \arccos\left(-\frac{2g}{\omega^2 r} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, 小环开始反向运动。

例：半径为 r 的齿轮由曲柄 OA 带动，沿半径为 R 的固定齿轮滚动。如曲柄 OA 以等角速度 ω 绕 o 轴转动，求动齿轮上点 M （在 OA 的延长线上）的速度和加速度。

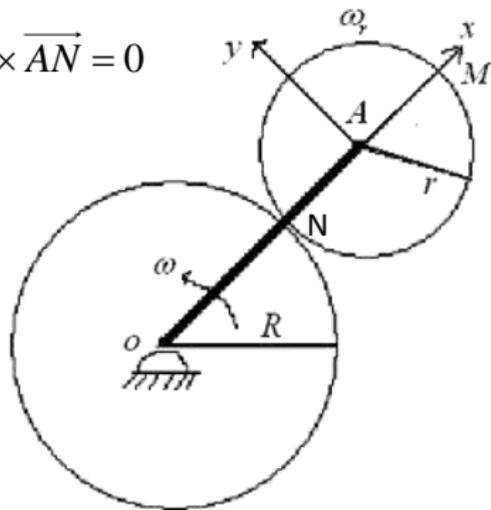
解：建立动系 xAy ， Ax 轴始终沿曲柄 OA 的延长线方向，此动系既有平动又有平面转动，故 M 点的绝对速度

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_r \times \overline{AM}, \quad \vec{v}_N = \vec{v}_A + \vec{\omega}_r \times \overline{AN} = 0$$

其中 $\vec{v}_A = (R+r)\omega\vec{j}, \vec{\omega} \times \overline{AM} = r\omega\vec{j}$

得 $r\omega_r = (R+r)\omega$ 故 $\omega_r = \frac{R+r}{r}\omega$

$$\therefore \vec{v}_r = \vec{\omega}_r \times \overline{AM} = \frac{R}{r}\vec{\omega} \times \overline{AM} = R\omega\vec{j}$$



$$\therefore \vec{v}_M = (R+r)\omega\vec{j} + r\omega_r\vec{j} = 2(R+r)\omega\vec{j}$$

M 点的绝对加速度 $\vec{a}_M = \vec{a}_t + \vec{a}_c + \vec{a}'$

$$\because \vec{a}_t = \vec{a}_A + \vec{a}'$$

$$\vec{a}' = \vec{\omega}_r \times (\vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AM}) = -\omega_r^2 \overrightarrow{AM}$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{a}_M &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}) - \omega_r^2 \overrightarrow{AM} \\ &= -\left(3R + 2r + \frac{R^2}{r}\right)\omega^2\vec{i}\end{aligned}$$

[例] 考察地球自转对自由落体的影响。

[解] 设物体从离地 h 高处落下，初速为零。

① 以地球为参考系研究落体的运动，应当计入惯性力。落体所受重力为 mg ，竖直向下。科里奥利力

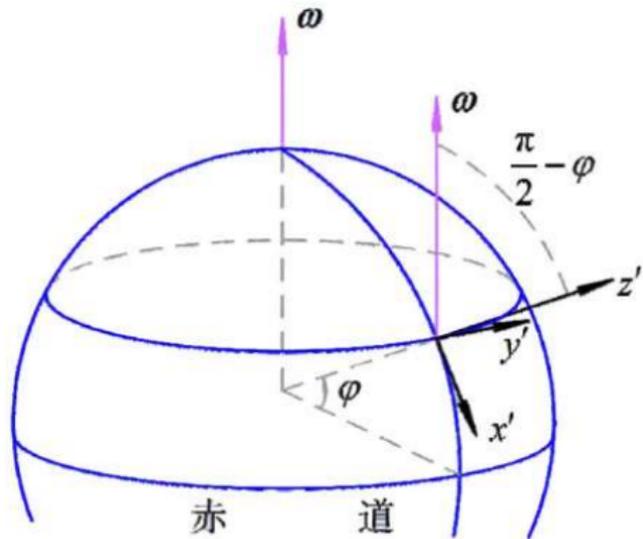
$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

指向东方，其大小

$$F_C = 2m\omega v' \sin(\pi/2 - \varphi)$$

即 $2m\omega v' \cos \varphi$

② 取固定于地球的坐标系。原点在落体初始位置的正下方， x' 轴指向南方， y' 轴指向东方， z' 轴竖直朝上。



$$\dot{x}' \approx 0 \quad \dot{y}' \approx 0 \quad \dot{z}' < 0$$

重力的 x' 分量和 y' 分量为 0 , z' 分量为 $-mg$ 。

科里奥利力的 x' 分量和 z' 分量为 0 , y' 分量为

$$-2m\omega \dot{z}' \cos \varphi$$

(4)

取落体开始下落时刻为 $t=0$ 。初始条件为: $t_0=0$, 有 $x'_0=0$, $y'_0=0$, $z'_0=h$; $\dot{x}'_0=0$, $\dot{y}'_0=0$, $\dot{z}'_0=0$ 。

③列出运动方程:

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = 0, & (1) \\ m\ddot{y}' = -2m\omega \dot{z}' \cos \varphi, & (2) \\ m\ddot{z}' = -mg. & (3) \end{cases}$$

④考虑到初始条件 $\dot{x}'_0=0$, $\dot{y}'_0=0$, (1)式积分结果为

$$x' = 0$$

为积分(2)式, 必须先将(3)式积分。考虑到初始条件 $\dot{z}'_0 = 0$, $z'_0 = h$, (3)式积分结果为

$$\dot{z}' = -gt, \quad z' = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

以(5)代入(2), 则 $\ddot{y}' = 2\omega gt \cos \varphi$

考虑到初始条件 $\dot{y}'_0 = 0$, $y'_0 = 0$, 积分结果为

$$\dot{y}' = \omega gt^2 \cos \varphi, \quad y' = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \varphi \quad (6)$$

⑤现在来计算落地处偏东多少。(5)式的偏离是以时间 t 表示的, 因而还需要先算出落地的时间。为此, 以 $z' = 0$ 代入(5),

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

从而求得落地时间 $t = \sqrt{2h/g}$

以此代入(6)得到落地处偏东距离

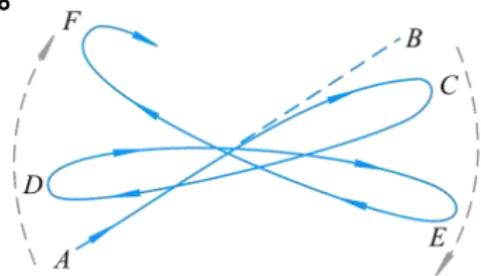
$$y' = \frac{1}{3} g \omega \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} \cos \varphi = \frac{2h}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}} \omega \cos \varphi$$

让物体从 $h=60\text{m}$ 的高度(大约相当于二十多层楼的高度)自由落下。在北京(纬度 $\varphi \approx 40^\circ$), 物体的落地处偏东 0.78cm ; 在合肥(纬度约 32°), 则偏东 0.86cm 。由于存在其他因素(例如风)的干扰, 这个偏东现象通常是难以察觉的。

⑥本例一开始曾确认落体基本上不受地球自转影响, 其“相对”速度基本上是竖直向下, 从而推论 F_C 向东, 得出落体偏东的结论。

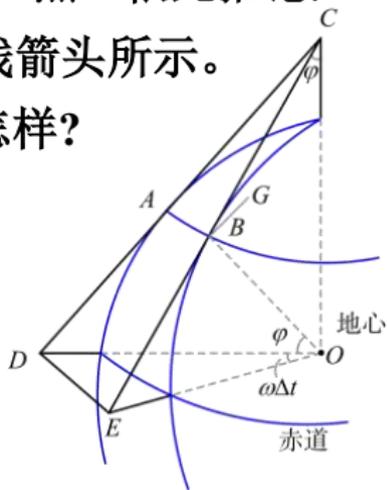
[例题] 考察地球自转对单摆运动的影响。

[解] 假如没有惯性力，单摆将沿直线 AB 来回摆动。事实上，单摆从 A 向 B 摆动时，由于科里奥利力的作用而逐渐向右偏，并没有达到 B 点而是达到 C 点。从 C 向回摆动时仍然逐渐向右偏，结果达到 D 点。依此推论，摆动平面将顺着时针方向不断偏转，如虚线箭头所示。



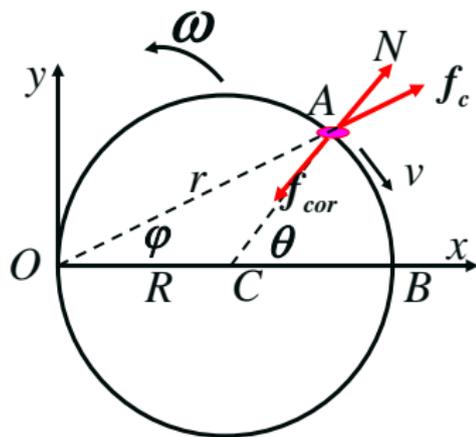
现在进一步问：摆动平面偏转的速率怎样？

摆原在 A 点，沿 AC 方向摆动。过了 Δt 时间，由于地球自转，到了 B 点。由于惯性，单摆保持平行于 AC 方向即沿 BG 方向来回摆动。在地球上的人看来，摆动平面已由南北方向顺时针“偏转”到 BG 方向。



例题 质量为 m 的小环套在半径为 R 光滑大圆环上，后者在水平面内以匀角速度 ω 绕其上一点 O 转动。试分析小环在大环上运动时的切向加速度和水平面内所受的约束力。

解：如图，以直径 OCB 为极轴，位矢 \overrightarrow{OA} 与极轴的夹角为 φ 。位矢 \overrightarrow{CA} 与极轴的夹角为 θ 。在随大环转动的参考系中，小环受到三个水平力：



大环的约束力 N (法向)

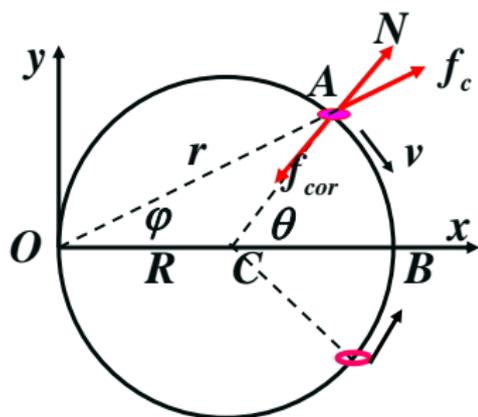
惯性离心力 $f_c = mr\omega^2$ (沿 \overrightarrow{OA})

其中 $r = \overline{OA} = 2R \cos \varphi$, $\varphi = \frac{\theta}{2}$

科氏力 $f_{cor} = 2mv\omega$ (法向)

其中 $v = R \frac{d\theta}{dt}$

为小环相对于大环速度，沿圆环的切线方向。



(1)在自然坐标系中，切向加速度

$$\begin{aligned} a_{\tau} &= \frac{1}{m} f_c \sin \varphi = r \omega^2 \sin \varphi \\ &= 2R \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi = R \omega^2 \sin \theta \end{aligned}$$

此式表明，小环的运动是以B点为平衡位置来回摆动.

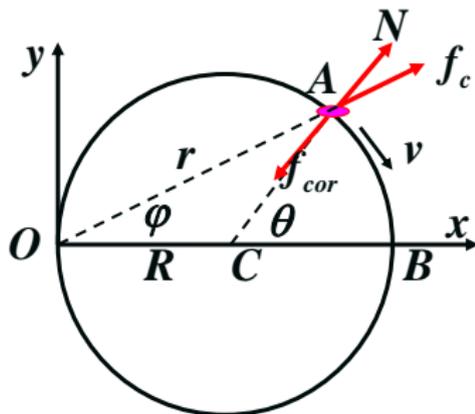
(2) 在自然坐标系中，水平面内约束力有

$$-N + f_{cor} - f_c \cos \varphi = ma_n = \frac{mv^2}{R}$$

$$\therefore N = -f_c \cos \varphi + f_{cor} - \frac{mv^2}{R}$$

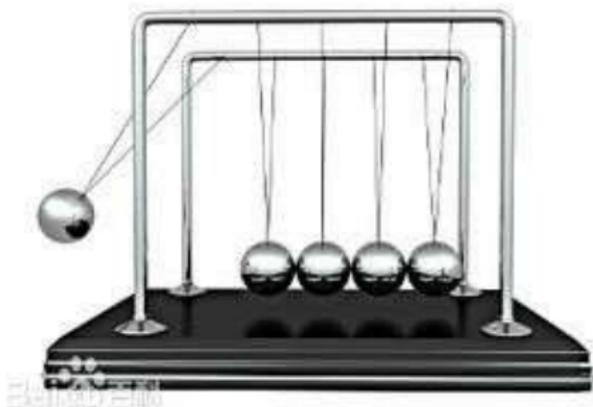
$$= -mr\omega^2 \cos \varphi + 2mv\omega - \frac{mv^2}{R}$$

$$= -mR\omega^2 (1 + \cos \theta) + 2mv\omega - \frac{mv^2}{R}$$



小环在大环上运动时所受的约束力沿大环的法线方向。

第四章 动量定理



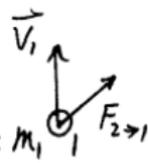
4.1 动量守恒定律与动量定理

4.1.1. 孤立体系与与动量守恒

前面我们大都讨论单个质点的运动。现在我们要讨论由许多质点构成的体系的运动规律。这种问题，常称为**质点系问题**，或**多体问题**。在质点系中，每个质点的运动一般是相当复杂的。

在质点系中有一类是特别的，即所有质点都没有受到体系之外的物体的作用力。也可以简单地说，整个体系不与外物相互作用，这种质点体系称为**孤立体系**。

首先讨论一个最简单的质点系，它只包括两个质点1和2。如果它是**孤立体系**，那么，作用在质点1上的力，只有2对它的作用力 $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ ；



而作用在质点2上的力，只有1对它的作用

力 $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ 。根据第二定律，有 $m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ ， $m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$

又 $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ 可得 $m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$ ， 改写为 $\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0$ 。

定义 $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ ， 有 $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ ， 最终得到 $\vec{P} = \text{不变量}$ 。

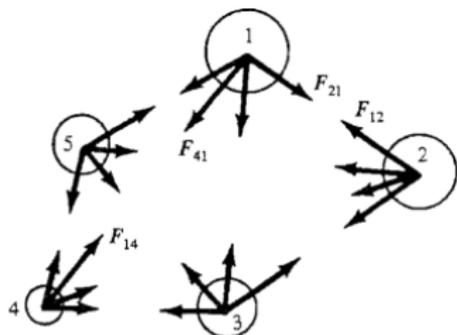
对于两个质点构成的**孤立体系**，我们找到了一个新的**不变量** \vec{P} ，称为**动量**。

对于多个质点所构成的孤立体系，可以用完全类似的方法证明体系的总动量不随时间变化，即

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n = \text{不变量}$$

或者 $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

这就是**动量守恒定律**。



作用在一组物体上的内力

对于单个质点，我们可以**定义它的动量为** $p_i = m\vec{v}$ ，那么，动量守恒可以表述为： $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{不变量}$ ，其中 \vec{p}_i 是第 i 个质点的动量。

孤立体系，每个质点的动量时刻在变化着，但它们的总和不变。

当体系与外界有相互作用，即非孤立状态时，动量守恒一般不成立，但当外力总和为零时，动量守恒仍然成立。

4.1.2 冲量与质点的动量定理

根据牛顿第二定律，对于单个质点，有 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ 。

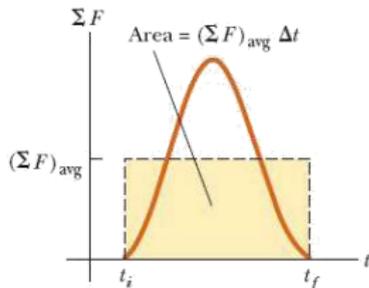
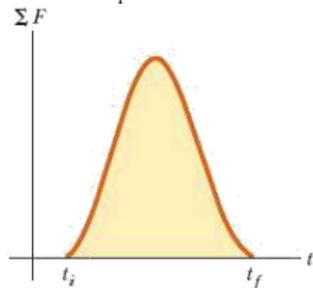
因单个质点的动量为 $\vec{p} = m\vec{v}$ ，故方程可写为 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ 。

即**质点动量的变化率等于外力**。

若质点在 t_1 时，具有动量 \vec{p}_1 ；在 t_2 时，变到 \vec{p}_2 ，可积分得：

$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ 即**质点动量的变化，等于力对时间的积分**。

定义 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ 为**冲量**。所以，冲量就是度量动量变化的物理量。



状态量 \longleftrightarrow **过程量**

4.1.3 质点系动量定理

1. 两质点体系

$$\begin{cases} \dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_1 + \vec{f}_{12} \\ \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_2 + \vec{f}_{21} \end{cases}$$

牛顿第三定律 $\Rightarrow \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

体系总动量: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$

令 $\vec{F}_{ex} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

有 $\vec{F}_{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ 或 $\int_0^t \vec{F}_{ex} dt = \vec{P} - \vec{P}_0$

守恒定律是认识世界的有力武器。在新现象研究中，当发现某个守恒定律不成立时，往往作以下考虑：

- (1)寻找被忽略的因素，从而恢复守恒定律的应用。
- (2)引入新概念，使守恒定律更普遍化。
- (3)无法“补救”时，宣布该守恒定律失效。

中微子的发现

•问题的提出:

- β 衰变: 核A \longrightarrow 核B + e
- 如果核 A静止,则由动量守恒应有 $\vec{P}_B + \vec{P}_e = 0$ 但 β 衰变云室照片表明, B、e的径迹并不在一条直线上。

- 问题何在? 是动量守恒有问题?
还是有其它未知粒子参与?

- 物理学家坚信动量守恒。

- 1930年泡利(W.Pauli)提出中微子假说,以解释 β 衰变各种现象。

- 1956年(26年后)终于在实验上直接找到中微子。

- 1962实验上正式确定有两种中微子:

电子中微子 ν_e

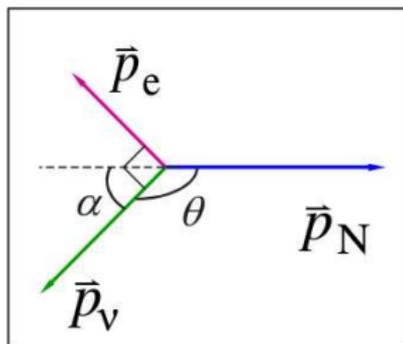
μ 子中微子 ν_μ

[例题] 设有一静止的原子核，衰变辐射出一个电子和一个中微子后成为一个新的原子核. 已知电子和中微子的运动方向互相垂直，电子动量为 $1.2 \times 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，中微子的动量为 $6.4 \times 10^{-23} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. 问新的原子核的动量的值和方向如何？

[解] $\because \sum \vec{F}_i^{\text{ex}} \ll \sum \vec{F}_i^{\text{in}}$

$$\therefore \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{恒矢量}$$

即 $\vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_N = 0$

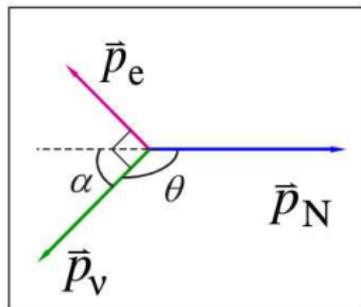


$$p_e = 1.2 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$p_v = 6.4 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

系统动量守恒，即

$$\vec{p}_e + \vec{p}_v + \vec{p}_N = 0$$



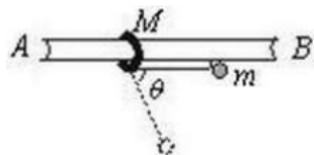
又因为 $\vec{p}_e \perp \vec{p}_v \quad \therefore p_N = (p_e^2 + p_v^2)^{1/2}$

代入数据计算得 $p_N = 1.36 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\alpha = \arctan \frac{p_e}{p_v} = 61.9^\circ$$

[例题]如图所示，**AB**为一光滑水平横杆，杆上套一质量为**M**的小圆环，环上系一长为**L**质量不计的细绳，绳的另一端拴一质量为**m**的小球。现将绳拉直，且与**AB**平行，由静止释放小球，则当线绳与**AB**成 **θ** 角时，圆环移动的距离是多少？

[解]：虽然小球、细绳及圆环在运动过程中合外力不为零（杆的支持力与两圆环及小球的重力之和不相等）系统动量不守恒，但是系统在水平方向不受外力，因而水平动量守恒。



设细绳与**AB**成 **θ** 角时小球的水平速度为**v**，圆环的水平速度为**V**，则由水平动量守恒有： **$MV = mv$** 且在任意时刻或位置**V**与**v**均满足这一关系，加之时间相同，公式中的**V**和**v**可分别用其水平位移替代，则上式可写为：

$$Md = m[(L - L\cos\theta) - d]$$

解得圆环移动的距离：
$$d = \frac{mL(1 - \cos\theta)}{M + m}$$

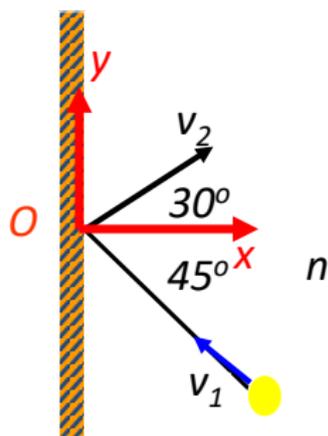
[例题] 质量 $m=10\text{kg}$ 的质点受力 $F=30+40t$ 的作用，且力方向不变。 $t=0\text{s}$ 时从 $v_0 = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 开始作直线运动（ v_0 方向与力方向相同），求：（1） $0\sim 2\text{s}$ 内，力的冲量 I ；（2） $t=2\text{s}$ 时质点的速率 v_2 。

[解] (1) $I = \int F(t)dt = \int_0^2 (30 + 40t)dt = 140\text{N} \cdot \text{s}$

(2) 应用质点动量定理： $m v_2 - m v_0 = I$

代入数据解得： $v_2 = 24\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

[例题]质量为2.5g的乒乓球以10 m/s 的速率飞来，被板推挡后，又以 20 m/s 的速率飞出。设两速度在垂直于板面的同一平面内，且它们与板面法线的夹角分别为 45° 和 30° ，求：（1）乒乓球得到的冲量；（2）若撞击时间为0.01s，求板施于球的平均冲力的大小和方向。



[解]：取挡板和球为研究对象，由于作用时间很短，忽略重力影响。设挡板对球的冲量为 \vec{F} 则有：

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

取坐标系，将上式投影，有：

$$I_x = \int F_x dt = mv_2 \cos 30^\circ - (-mv_1 \cos 45^\circ) = \bar{F}_x \Delta t$$

$$I_y = \int F_y dt = mv_2 \sin 30^\circ - mv_1 \sin 45^\circ = \bar{F}_y \Delta t$$

$$\Delta t = 0.01s, v_1 = 10m/s, v_2 = 20m/s, m = 2.5g$$

$$I_x = 0.061Ns, \quad I_y = 0.0073Ns$$

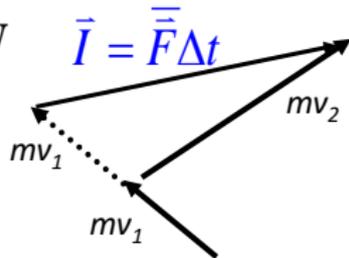
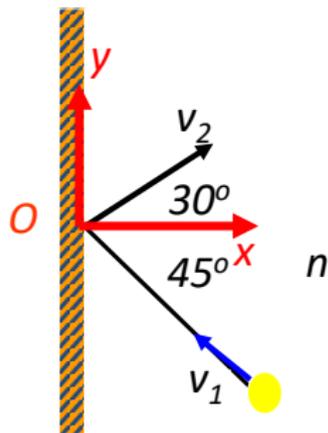
$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = 6.14 \times 10^{-2} Ns$$

$$\tan \alpha = \frac{I_y}{I_x} = 0.1200, \alpha = 6^\circ 52'$$

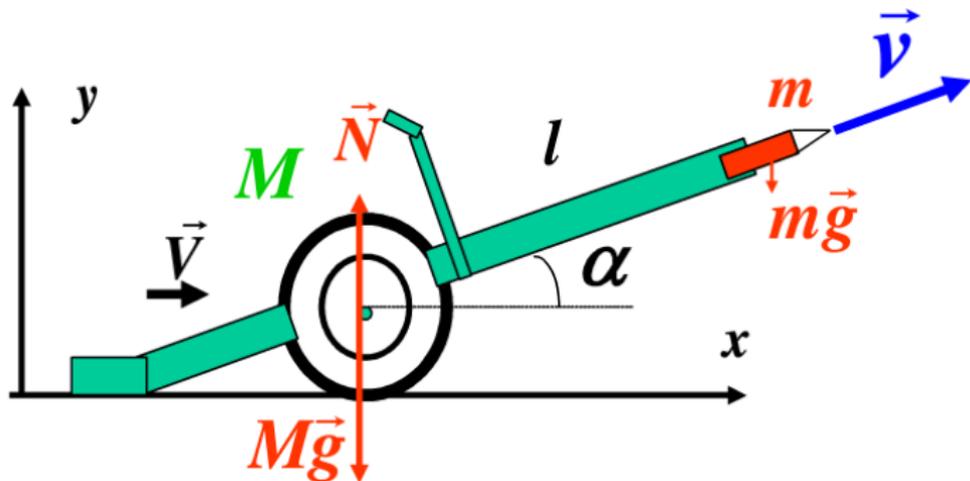
α 为 I 与 x 方向的夹角

$$\bar{F}_x = 6.1N, \bar{F}_y = 0.73N, \bar{F} = \sqrt{\bar{F}_x^2 + \bar{F}_y^2} = 6.14N$$

$$\bar{I} = \bar{F} \Delta t$$



[例题] 已知导轨上的炮车仰角为 α ，质量为 M ，炮弹质量为 m ，炮弹相对炮筒的射出速度为 \vec{u} 。忽略导轨的摩擦。求
 (1) 炮弹刚射出时，炮车的反冲速度； (2) 若炮筒长为 l ，发射过程中炮车移动的距离。



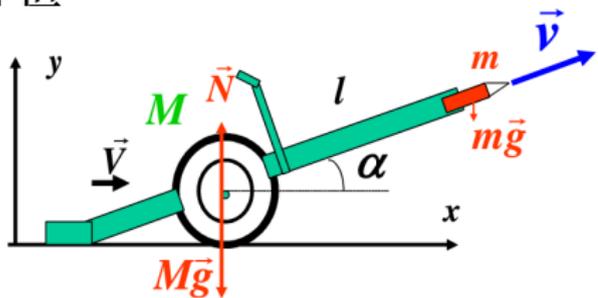
[解] (1) 炮车的反冲速度

水平方向不受力，动量守恒

$$m v_x + M V = 0$$

$$v_x = u \cos \alpha + V$$

$$\rightarrow V = -\frac{m}{M+m} u \cos \alpha$$



(2) 发射过程中炮车移动的距离

炮车移动过程非匀速，也非变速

设发射过程经历的时间为 T

在发射过程中，炮车的位移为：

$$\Delta x = \int_0^T V dt = \int_0^T -\frac{m}{M+m} u \cos \alpha dt$$

$$= -\frac{m}{M+m} l \cos \alpha$$

4.2. 质心运动定理

质心定理是动量守恒的另一种描述方式。

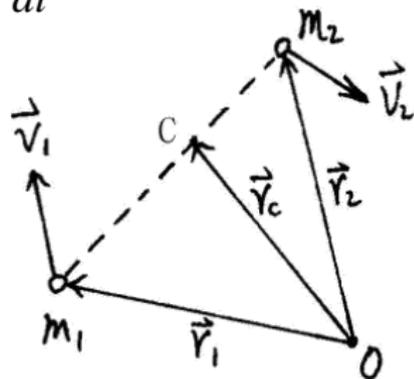
首先讨论由质量为 m_1 , m_2 , 位矢为 \vec{r}_1, \vec{r}_2 的两个质点所构成的孤立体系。这个体系的动量守恒, 即 $d\vec{P}/dt = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{或 } P &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) \\ &= (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = (m_1 + m_2) \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \text{不变量} \end{aligned}$$

式中, 用了一个新的物理量 \vec{r}_c , 定义为

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

它表示一位置, 即图中的C点, 称为体系的质心位置。



对前面的守恒式求导，得 $(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = 0$ ，即 $\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = 0$ 。

表明，**对孤立体系，其质心的加速度为零**，即c点的加速度为零。因此，动量守恒定律又可表述为：**孤立体系的质心作匀速直线运动或静止**，这就是**质心定理**。

很容易把质心定理推广到多质点构成的孤立体系。由动量守恒定律，用上述类似的推导可知，一个由质点 m_1, m_2, \dots, m_n 所构成的体系，其质心位置为

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

其中 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ 分别为各质点的位置。这时，动量守恒定律可写为：

$$\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = 0$$

现在我们进一步讨论不仅有**内力**作用，而且也有**外力**作用的非孤立体系的情况。仍采取上述质心的定义，则质心速度为

$$\begin{aligned}\vec{v}_c &= \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{\sum_i m_i} (m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \cdots + m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}) \\ &= \frac{1}{\sum_i m_i} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots + m_n \vec{v}_n)\end{aligned}$$

质心的加速度为

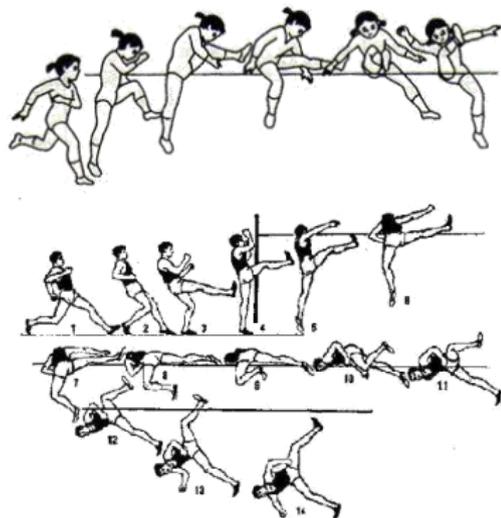
$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}_c}{dt} &= \frac{1}{\sum_i m_i} (m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \cdots + m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt}) \\ &= \frac{1}{\sum_i m_i} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n)\end{aligned}$$

其中 \vec{F}_i 是第 i 个质点所受到的总力，包括**内力**与**外力**。

根据牛顿第三定律，体系的内力成对出现，且大小相等，方向相反，所以在式中内力全部相互抵消。因此可写为

$$\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{1}{\sum_i m_i} (\vec{F}_{1\text{外}} + \vec{F}_{2\text{外}} + \cdots + \vec{F}_{n\text{外}}) \quad \text{或} \quad M_{\text{总}} \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{外}}$$

其中， $M_{\text{总}} = \sum_{i=1}^n m_i$ 为体系的总质量； $\vec{F}_{\text{外}} = \vec{F}_{1\text{外}} + \vec{F}_{2\text{外}} + \cdots + \vec{F}_{n\text{外}}$ 是体系所受到的总外力； $\vec{F}_{i\text{外}}$ 是第 i 个质点所受外力。



$$\vec{F}_{\text{外}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M_{\text{总}} \frac{d\vec{v}_c}{dt} = M_{\text{总}} \vec{a}_c$$

质心运动定理

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_{\text{外}} dt = M_{\text{总}} \vec{v}_c - M_{\text{总}} \vec{v}_{c0}$$

质心动量定理

• 几点说明

- 质心运动定理是矢量方程。
- 质心的位矢是各质点位置矢量的带权平均值。
- 质心的坐标与原点的选取有关，质心与体系各质点的相对位置与坐标原点的选取无关。
- 质量连续分布的物体，有
$$\begin{cases} m_c = \int dm = \int \rho dV \\ \vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \rho \vec{r} dV}{\int \rho dV} \end{cases}$$
- 质心是一个抽象的物理概念，不对应实物
- 质心运动定理与牛顿第二定律适用范围相同
- 质点组的动量等于质心的动量

质心系中质点系的动量

质心坐标系——以质心为原点，坐标轴总与基本参考系平行。
质点系相对质心坐标系的动量

$$\vec{P}_c = \sum_i m_i \vec{v}_{ic} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_i \vec{r}_{ic}}{m} \right)$$

而 $\frac{\sum m_i \vec{r}_{ic}}{m} = \mathbf{0}$ （质心系中质心位置矢量）

$\therefore \vec{P}_c = \mathbf{0}$ 即质点系相对质心坐标系的动量总为零。

[例题] 大量运动微粒撞击物体壁产生的平均效果是均匀而持续的压力。假设微粒的数密度（单位体积内的粒子数）为 n ，每个粒子质量为 m ，且具有均一的速度 v 向着物体壁运动。求下列两种情况下的压强：

(1) 粒子陷入壁面。

(2) 粒子完全反弹。

[解] 设物体壁面积为 S ， Δt 时间内粒子能运动的距离为 $v \Delta t$ 。物体壁前的体积 $V = S \cdot v \Delta t$ 中的粒子都会在 Δt 时间内与壁发生碰撞，碰撞的粒子数为 $N = n \cdot V$ 。按照情况1，碰撞前后粒子的动量分别为 mv 和 0 ，由压强公式和力的公式，可得压强为：

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta p}{S \Delta t} = \frac{N \cdot mv}{S \Delta t} = \frac{n \cdot V \cdot mv}{S \Delta t} = \frac{n \cdot S \cdot v \Delta t \cdot mv}{S \Delta t} = nmv^2$$

按照情况2，粒子碰撞后的动量为 $-mv$ ，这样粒子动量的变化是情况1的2倍，因此可得压强：

$$P = 2nmv^2$$

[例题]如图，求质量均匀的直角三角形的质心位置。

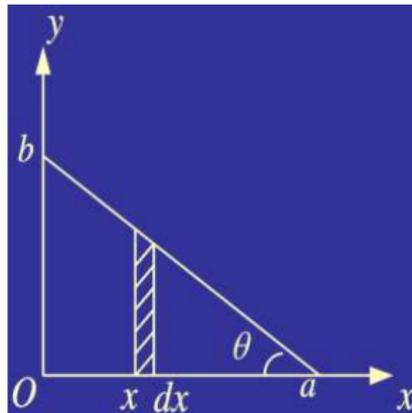
[解]

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{\int x dm}{\int dm} \\&= \frac{\int_0^a x \sigma (a-x) \tan \theta dx}{\sigma ab}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}a$$

同理

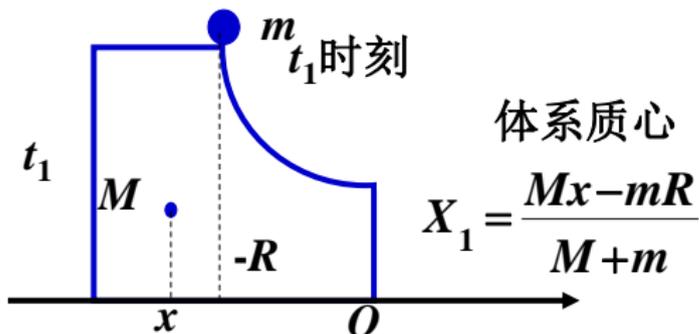
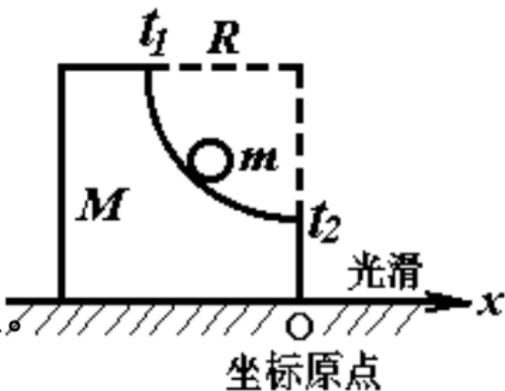
$$y_c = \frac{1}{3}b$$



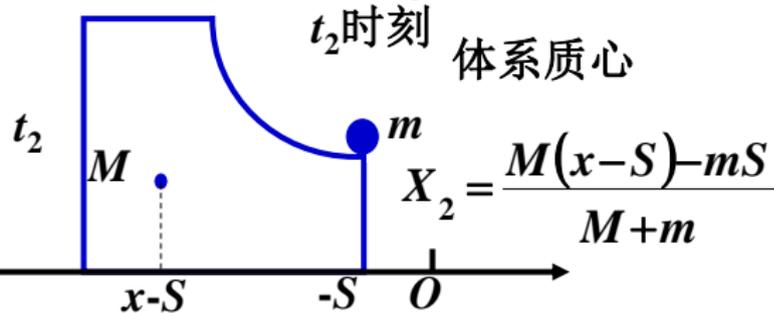
例题：已知1/4圆 M ， m 由静止下滑：
求 $t_1 \rightarrow t_2$ 过程 M 移动的距离 S 。

解：选 $(M+m)$ 为体系

水平方向合外力=0，水平方向质心静止。



质心静止 $X_1 = X_2$



M 移动的距离

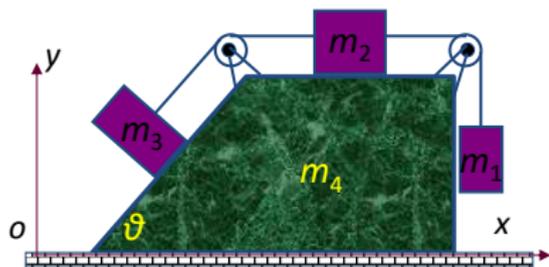
$$S = \frac{m}{M+m} R$$

[例题]: 图示机构, 地面光滑, 初始时刻系统静止。
问 m_1 下降 h 时, m_4 水平移动多少?

[解]: 1. 建立坐标架

记四个物块的质心初始时刻
坐标分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 。

2. 质心运动定理

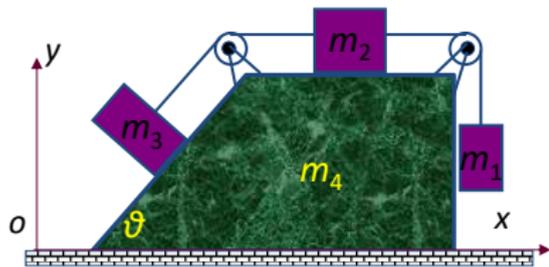


$$\text{由 } ma_{Cx} = m \frac{dv_{Cx}}{dt} = \sum F_{ix}^E = 0$$

得 $v_{Cx} = \text{const}$ 而初始时刻系统静止 $\therefore v_{Cx} = 0$

$$\text{又 } \therefore \frac{dx_c}{dt} = v_{Cx} = 0 \quad \therefore x_c = \text{const}$$

记四个物块的质心初始时刻
坐标分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 。
 $x_C = \text{const}$



初始时刻质心坐标:

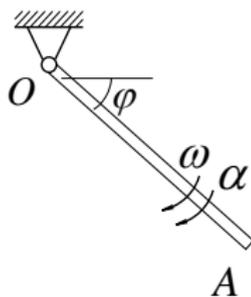
$$x_{C0} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

m_1 下降 h 时, 假设 m_4 向左水平移动 S :

$$x_{C1} = \frac{m_1(x_1 - S) + m_2(x_2 + h - S) + m_3(x_3 + h \cos \theta - S) + m_4(x_4 - S)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$\text{由 } x_{C1} = x_{C0} \text{ 得 } S = \frac{m_2 h + m_3 h \cos \theta}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

例题 质量为 m 长为 $2l$ 的均质杆 OA 绕水平固定轴 O 在铅垂面内转动，如图。已知在图示位置杆的角速度为 ω ，角加速度为 α 。试求此时杆在 O 轴的约束反力。



解1: 用质心运动定理。

以杆为研究对象, 受力如图, 建立如图坐标。

$$a_{Cx} = -a_C^t \sin \varphi - a_C^n \cos \varphi = -l\alpha \sin \varphi - l\omega^2 \cos \varphi$$

$$a_{Cy} = -a_C^t \cos \varphi + a_C^n \sin \varphi = -l\alpha \cos \varphi + l\omega^2 \sin \varphi$$

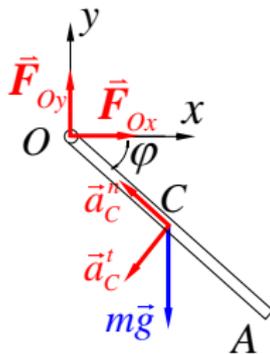
$$-ml(\alpha \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) = F_{Ox}$$

$$-ml(\alpha \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) = F_{Oy} - mg$$

解得

$$F_{Ox} = -ml(\alpha \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi)$$

$$F_{Oy} = mg - ml(\alpha \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi)$$



解2: 用动量定理。

以杆为研究对象, 受力如图, 建立如图坐标。

$$p_x = -ml\omega \sin \varphi$$

$$p_y = -ml\omega \cos \varphi$$

由 $\frac{d p_x}{d t} = \sum F_x^{(e)}$, $\frac{d p_y}{d t} = \sum F_y^{(e)}$ 得

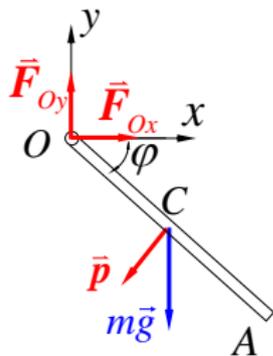
$$-ml(\alpha \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) = F_{Ox}$$

$$-ml(\alpha \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) = F_{Oy} - mg$$

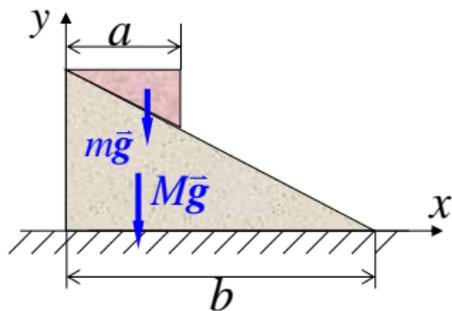
解得

$$F_{Ox} = -ml(\alpha \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi)$$

$$F_{Oy} = mg - ml(\alpha \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi)$$



例题 质量为 M 的大三角块放在光滑水平面上，其斜面上放一和它相似的小三角块，其质量为 m 。已知大、小三角块的水平边长各为 a 与 b 。试求小三角块由图示位置滑到底时大三角块的位移。



解：取系统分析，受力如图，建立如图坐标。

由于 $\Sigma F_x^{(e)} = 0$ ，且初始系统静止，
所以

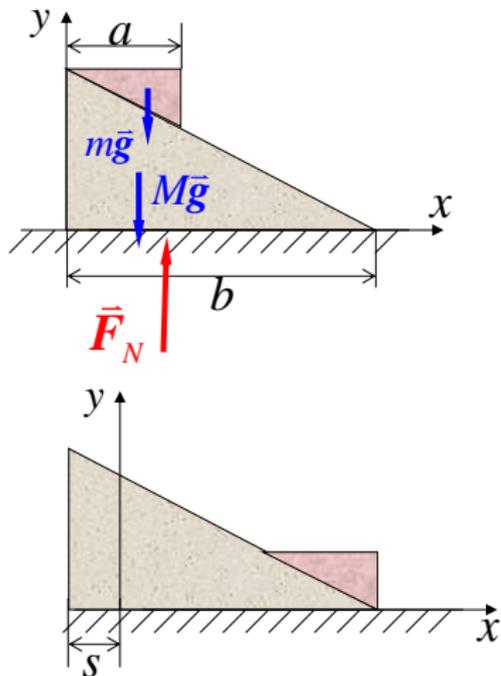
$$x_{C2} - x_{C1} = 0$$

设大三角块向右的位移为 s ，则

$$x_{C2} - x_{C1} = \frac{Ms + m(s + b - a)}{M + m} = 0$$

解得

$$s = -\frac{m(b - a)}{M + m}$$



[例题] 如图所示, 均质杆 AB 长为 l , 铅垂地立在光滑的水平面上, 求它从铅垂位置无初速度地倒下时, 端点 A 得轨迹。

解: AB 杆初始静止, 且有

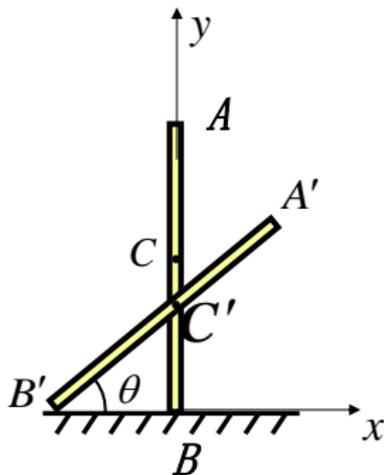
$$\sum F_x = 0$$

即沿 x 轴方向质心位置应守恒, 质心 C 始终在 y 轴上, A 点的坐标可表示为:

$$x_A = \frac{l}{2} \cos \theta \quad y_A = l \sin \theta$$

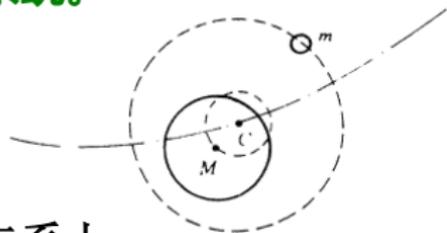
消去 θ , 得: $4x_A^2 + y_A^2 = l^2$

即 A 点的轨迹为椭圆。



将质心概念和质心运动定理用于地月系统。

地心和月心绕它们两者的质心而转。



太阳引力作用在地球和月球组成的质点系上，
地球和月球的质心沿椭圆轨道绕太阳公转。

地月质心离地心约为地球半径的 $2/3$ 。

日地月三者质心可认为就在日心，并认为地月体系绕太阳公转。

4.3. 变质量物体的运动

这里讨论的变质量物体并非指相对论中描述的质量随运动物体速度而变化的相对论情况，而是指在运动过程中**不断与外界交换质量的物体**的运动。

可以把质量不断变化的物体（称为主体）和由它放出来的物体（或附着其上的物体）看成一个质点系，就可以和不变质量的质点系一样处理。

以增质量为例。由体系的动量定理，

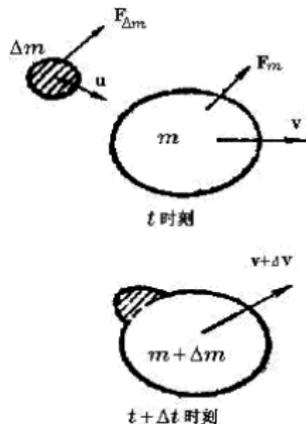
得：

$$(m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) - (m\vec{v} + \Delta m \vec{u}) = \vec{F} \Delta t$$

$$\cancel{m\vec{v}} + m \Delta \vec{v} + \Delta m \vec{v} + \boxed{\Delta m \Delta \vec{v}} - \cancel{m\vec{v}} - \Delta m \vec{u} = \vec{F} \Delta t$$

$$m \Delta \vec{v} = \Delta m (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{F} \Delta t$$

整理后两边除以 Δt ，并取极限 $\Delta t \rightarrow 0$ ，得： $m \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} + \vec{F}$



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} + \vec{F}$$

减质量时，同样可得到相同的方程。因此，该方程称为**变质量物体的运动微分方程**。其中 m 为主体质量。在增质量时， $(\vec{u} - \vec{v})dm$ 为质量 dm 附着主体前相对于主体的动量。 $(\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt}$ 为附着过程中主体的动量增加率，即主体受到的冲击力；减质量时， dm 为负， $(\vec{u} - \vec{v}) |dm|$ 为主体给予 $|dm|$ 的冲量， $(\vec{u} - \vec{v}) \left| \frac{dm}{dt} \right|$ 为主体给予的推力， $(\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt}$ 为对主体的反冲力。最后一项 \vec{F} 为系统受到的合外力。由于 $|dm|$ 是被忽略的小量， \vec{F} 就是主体受到的合外力。当 $\vec{u} = 0$ 时，方程可改写为 $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$
当 $\vec{u} = \vec{v}$ 时，方程又可改写为 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

[例题] 雨滴开始自由下落时质量为 m_0 ，在下落过程中，单位时间凝聚的水汽质量为 λ 。试求雨滴经时间 t 下落的距离。忽略空气阻力。

[解] 设水汽附着于水滴前的速度 $\bar{u} = 0$ ，利用 $\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}$ ，有：

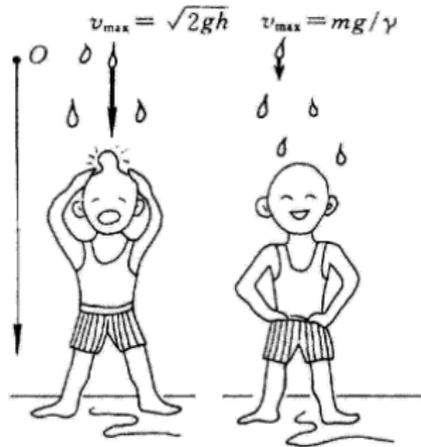
$$\frac{d}{dt}[(m_0 + \lambda t)v] = (m_0 + \lambda t)g$$

积分，并利用初始条件： $t = 0$ 时， $v = 0$ ；得 $v = \frac{m_0 t + \frac{1}{2} \lambda t^2}{m_0 + \lambda t} g$

$$\text{即 } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} g t + \frac{m_0 g}{2\lambda} - \frac{m_0^2 g / 2\lambda}{m_0 + \lambda t}$$

再积分，并利用初始条件： $t = 0$ 时， $x = 0$ ；得：

$$x = \frac{1}{2} g \left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{m_0}{\lambda} t - \left(\frac{m_0}{\lambda} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{\lambda}{m_0} t \right) \right]$$



[例题] 火箭利用把燃烧后的废气逐渐向外喷出的办法来增加自身的运动速度。设喷出废气的相对速度 $(\bar{u} - \bar{v})$ 沿运动物体轨道切向，且为一常量 v_r ；火箭在运行中不受任何外力作用；火箭起始质量为 m_0 ，其中燃料质量为 m' ，空火箭质量为 m_s （即 $m_0 - m'$ ）；火箭单位时间内喷出废气的质量为常数 k 。求火箭能够达到的速度。

[解] 利用方程 $m \frac{d\bar{v}}{dt} = (\bar{u} - \bar{v}) \frac{dm}{dt} + \bar{F}$ ，有

$$m \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dm}{dt} \quad \text{即} \quad \frac{dv}{v_r} = -\frac{dm}{m}$$

积分，并利用初始条件： $t = 0$ 时， $v = 0$ ， $m = m_0$ ，得： $v = v_r \ln \frac{m_0}{m}$

当燃料烧完时，火箭所具有的速度为： $v = v_r \ln \frac{m_0}{m_s} = v_r \ln \left(1 + \frac{m'}{m_s} \right)$

为获得大的速度 v ，应增大喷射速度，增大燃料与空火箭质量之比。但增大喷射速度对增加最后火箭速度更为有效。

[例题] 长为 l 质量为 m 的软绳，自静止下落。开始($t=0$)时，绳的下端与桌面恰相接触，求下落过程中桌面对绳的反作用力。

[解] 坐标原点取在桌面上， z 轴竖直向上。

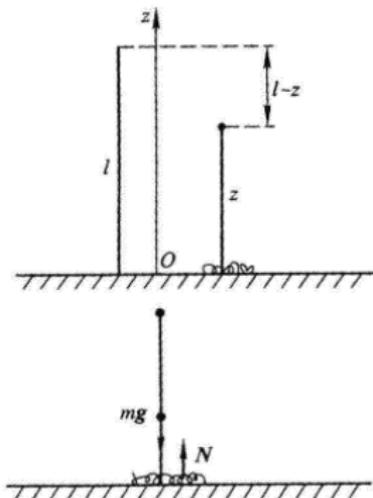
整根绳子看作一个质点系，线密度 $\rho = m/l$ ，在下落过程中，尚在空中的绳子长度记作 z ，落在桌子上的绳长为 $l-z$ 。

重力 mg 指向负 z 方向，桌面的反作用 N 指向正 z 方向。 $N - mg = ma_0$ ， a_0 是整根绳子的质心加速度。

按照质心坐标公式，整根绳子的质心坐标为

$$z_0 = [(l-z)\rho \cdot 0 + z\rho \cdot z/2] / m = z^2 \rho / 2m = z^2 / 2l$$

对时间求导两次，有 $v_0 = z\dot{z}/l$ ， $a_0 = (\dot{z}^2 + z\ddot{z})/l$ 。 $\ddot{z} = -g$



上端点坐标为 z 时，它已落下距离 $l-z$ ，按自由落体公式，

$$\dot{z} = -\sqrt{2g(l-z)}$$

代入 a_0 式求得 $a_0 = (2l - 3z)g/l$ (★)

将其代入第一式，有 $N - mg = m(2l - 3z)g/l$

解出 $N = 3mg(1 - z/l)$

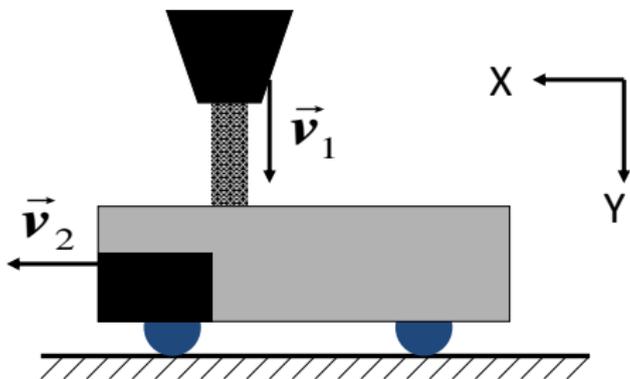
$z = 0$ 时，即绳子刚好全部落到桌面的一瞬间， $N = 3mg$ 。

一个问题：已落在桌面绳子的加速度是零，尚在空中的加速度是 $-g$ 。似乎可以写出

$$a_0 = [(l-z)\rho \cdot 0 + z \cdot \rho(-g)]/m = -z\rho g/m = -zg/l$$

与(★)不符，是错误的。**它错在哪儿呢？**显然这样计算未考虑不同速度部分的质量是变化的，这样计算质心加速度是错误的。

[例题]列车在平直铁轨上装煤,列车空载时质量为 m_0 ,煤炭以速率 v_1 竖直流入车厢,每秒流入质量为 α 。假设列车与轨道间的摩擦系数为 μ ,列车相对于地面的运动速度 v_2 保持不变,求机车的牵引力。



[解]: 车和煤为系统, 向下为Y正向, 向左为X正向, 建立坐标系。

$$t \rightarrow t + dt \text{ 时刻, } dm = \alpha dt$$

$$\vec{P}(t) = (m_0 + \alpha t) \vec{v}_2 + \alpha dt \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{P}(t + dt) = (m_0 + \alpha t + \alpha dt) \vec{v}_2$$

$$d\vec{P} = \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \alpha dt$$

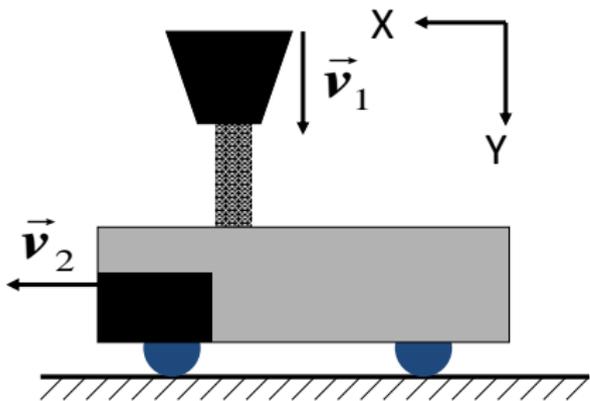
$$\vec{F} + \vec{f} + \vec{N} + (m_0 + \alpha t) \vec{g} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$= \alpha \vec{v}_2 - \alpha \vec{v}_1$$

竖直

$$(m_0 + \alpha t)g - N = -\alpha v_1$$

$$N = \alpha v_1 + (m_0 + \alpha t)g$$



水平

$$F - f = \alpha v_2$$

$$\therefore F = \alpha v_2 + f = \alpha v_2 + \mu N$$

$$= \mu(m_0 + \alpha t)g + \alpha(v_2 + \mu v_1)$$

第五章 动能定理



5.1 功与能

5.1.1 元功与动能定理

定义 $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ 为外力作用在物体上并有位移时所做的元功。

如果 \vec{F} 由若干个外力组成 $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ ，这时的 ΔW 可以写成

$$\Delta W = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}, \quad \Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}$$
 是各个力对物体所做的元功。

说明：

- ① 功是标量，没有方向，但有正负。
- ② 对于真实力或惯性力在惯性系或非惯性系中做功的计算是一样。
- ③ 几个力同时作用在物体上时，所作的功：

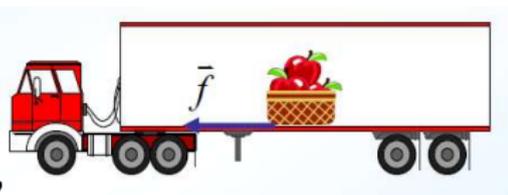
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_i + \cdots$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (\vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \cdots) = W_1 + W_2 + \cdots$$

合力对质点所作的功，等于每个分力所作的功的代数和。

④ 功与参考系相关，具有相对性

作加速运动的车厢中有一筐静止的苹果，苹果筐受到向前的摩擦力。以车厢作参考系，摩擦力不做功；以地面作参考系，摩擦力做功。



同时考虑牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ ，有

$$\begin{aligned}\Delta W &= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = m\vec{a} \cdot \Delta \vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \Delta \vec{r} \approx m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{r} \approx m\vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \\ &= \frac{1}{2} m \Delta(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m \Delta v^2 = m v \Delta v\end{aligned}$$

写成微分关系，为 $dW = m v dv = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$

写成积分关系，为 $W - W_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$

定义：物体的质量与其速率平方的乘积的一半叫做该物体的**动能**。用 **T** 表示， $T = \frac{1}{2}mv^2$ 为一标量，则有 $\Delta W = \Delta(\frac{1}{2}mv^2) = \Delta T$ 。

即：**作用在一质点上的合力所做之功等于该质点动能的变化。**

这就是**动能定理**，表明外界向物体所做的功等于物体动能的增量，**将外界的作用与系统状态参量的变化联系起来。**

说明：

- ① 动能是标量，是状态量 **v** 的单值函数，也是状态量。
- ② 功与动能的区别和联系：它们的单位和量纲相同；动能是状态量，功是过程量。外力的功是动能变化的量度。
- ③ 动能定理由牛顿第二定律导出，因此仅适用于**惯性系**。动能与参考系有关。动能定理提供一种计算功的方法。

[例题] 某汽车以 $50\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ 的速度行驶，制动距离为 15m 。当该车在相同条件下以 $100\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ 的速度行驶时，制动距离为多少？假定路面与轮胎之间的摩擦力不随速率变化。

[解] 设汽车行驶速度为 v ，制动距离为 s ，路面与轮胎之间的摩擦力为 f ，汽车的质量为 m ，根据动能定理，有

$$-f \cdot s = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \qquad s = \frac{1}{2} \frac{m}{f} v^2$$

因为 f 不随速度大小变化，汽车的质量 m 恒定，所以。汽车速度增加一倍，制动距离则变为四倍。所以这时的制动距离为 60m 。

定义功率为单位时间内所做之功。机器的平均功率等于它所做的总功除以完成这功所需的时间，即 $P = \frac{dW}{dt}$

结合元功的定义 $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ 有 $P = \frac{dW}{dt} \approx \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

由定义式可以得出 $dW = Pdt$

对时间积分即得出在一段时间内所做的功 $\Delta W = P\Delta t$

国际单位：	功、能	焦耳	$1J = 1N \cdot m$
	功率	瓦	$1W = 1J \cdot s^{-1}$

$$\Rightarrow E_{ki}(t) - E_{ki}(t_0) = A_i + A_{i1} + A_{i2} + \cdots + A_{i(i-1)} + A_{i(i+1)} + \cdots + A_{in}$$

其中 $A_i = \int_{t_0}^t \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt$, $A_{ij} = \int_{t_0}^t \vec{f}_{ij} \cdot \vec{v}_i dt$

对所有的*i*求和, 得 $E_k(t) - E_k(t_0) = A_{\text{外}} + A_{\text{内}}$

质点系
动能定理

其中 $E_k(t) = \sum_{i=1}^n E_{ki}$, $A_{\text{外}} = \sum_{i=1}^n A_i$, $A_{\text{内}} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_{ij}$

质点系的总动能

外力做功

内力做功

质点系动能定理与动量定理:

- 质点系动能定理是标量式, 质点系动量定理是矢量式;
- 质点系动能定理和质点系动量定理是相互独立的;
- 内力作用不改变体系的总动量, 但改变体系的总动能。



比较 $\vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ 与 $T_2 - T_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ，前者是力对时间的积分，后者是力对空间的积分：前者反映力与时间的联系，后者反映力与空间的联系。由此也可看到动量守恒与能量守恒二者的相同与不同。

5.1.2. 变力所做之功

①在有限长轨道上外力所做的功

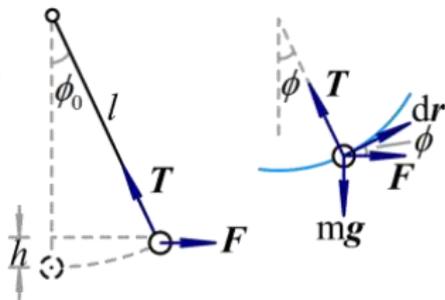
在质点沿空间轨道从起点移动到终点的过程中，受到一大小和方向都可能改变的外力的作用，在整个过程中，外力所做的功为各段元功的总和，用积分表示，为 $W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_e} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ，积分的上、下限分别为有限长轨道的终点和起点。

如果作用在物体上的外力可以分解成若干个组成部分 $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ ，可以定义各个组成部分 \vec{F}_i 单独做的功 $W_i = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_e} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$ ，而总的功为各个组成成分单独做功 W_i 之和 $W = \sum_i W_i$ ，即**功具有可加性**。

在整个运动过程中物体动能的增量等于合外力所做的功：

$$T_e - T_0 = W$$

[例题] 单摆如图所示，在球上施加一方向水平 \vec{F} 向右的力将小球沿半径为 l 的圆弧路径从 $\phi=0$ 移到 $\phi=\phi_0$ ，对应垂直位移为 h ，在此过程中力做功为多少？



[解]
$$W = \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\phi_0} F \cos \phi ds \quad \text{或} \quad W = \int_{x=0, y=0}^{x=(l-h)\tan\phi_0, y=h} (F_x dx + F_y dy)$$

$F_x = T \sin \phi, \quad |m\vec{g}| = T \cos \phi, \quad \text{消去 } T, \quad \text{得 } F_x = mg \tan \phi, \quad F_y = 0$

$\therefore W = \int_{x=0, y=0}^{x=(l-h)\tan\phi_0, y=h} (F_x dx + F_y dy) = \int_{x=0, y=0}^{x=(l-h)\tan\phi_0, y=h} mg \tan \phi dx$

而 $\tan \phi = \frac{dy}{dx}$ 或 $dy = \tan \phi dx \quad \therefore W = \int_{y=0}^{y=h} mg dy = mg \int_0^h dy = mgh$

另: $W_g = -\int_0^{\phi_0} mg \sin \phi \cdot l d\phi = mgl(\cos \phi_0 - 1) = -mg(l - l \cos \phi_0) = -mgh$

为在此过程中重力所做的功。

$W_g = -W$

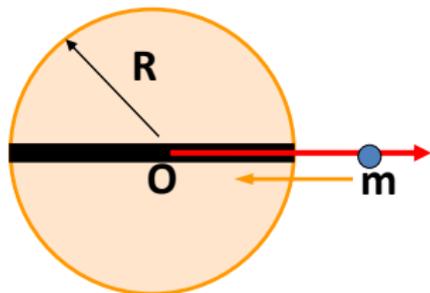
例题：假定地球的密度是均匀的，并沿地球的直径钻一个洞，质点从很高的位置 h 落入洞中，求质点通过地心的速度。

解：矢径方向如图所示，设通过地心的速度为 v_0

由动能定理：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 &= \int_{R+h}^0 \vec{f} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{R+h}^R \vec{f}_{\text{外}} \cdot d\vec{r} + \int_R^0 \vec{f}_{\text{内}} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{R+h}^R f_{\text{外}} dr - \int_R^0 f_{\text{内}} dr \end{aligned}$$

质点在地球外受力为 $f_{\text{外}} = \frac{GMm}{r^2}$



质点在地球内受力为

$$f_{\text{内}} = G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{m}{r^2} = \frac{GMmr}{R^3}$$

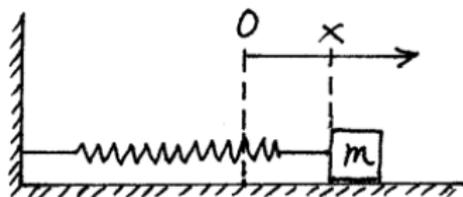
$$\text{由: } \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = - \int_{R+h}^R f_{\text{外}} dr - \int_R^0 f_{\text{内}} dr$$

$$= - \int_{R+h}^R \frac{GMm}{r^2} dr - \int_R^0 \frac{GMmr}{R^3} dr$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$$

②周期运动中外力所做之功

以谐振子为例， O 为平衡位置，质量为 m 的物体在 O 点附近作简谐振动。



每过一个周期，物体都回到原位，位移为零，由 $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ 可知弹簧弹力所做的功为零。但在整个过程中 \vec{F} 与 $\Delta\vec{r}$ 有时同向，有时反向，所做的功有时为正，有时为负，代数和为零。

③功与路径的关系

还有一类做功是与物体的路径有关系的，比如摩擦力。求这类力做功时必需对整条路径积分，而不能仅仅由起始位置决定。这类力叫**耗散力**，或**非保守力**。而**做功与路径无关只与起始和结束位置有关的力叫保守力**。物体所受的保守力只与物体在力场中的位置有关。

5.2 机械能守恒

5.2.1. 保守力场与势能

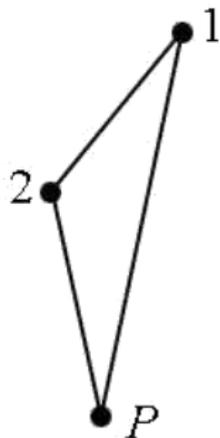
如果一个力对沿着任何闭合路径运动一周的质点所做之功为零，则此力为**保守力**。如果一个力对沿着任何闭合路径运动一周的质点所做之功不为零，则此力为**非保守力**。

或：如果在两点之间移动一个质点，力对质点所做之功仅决定于这两点的位置而与所取路径无关，则此力为**保守力**；如果在两点之间移动一个质点，力对质点所做之功决定于这两点之间所取的路径，则此力为**非保守力**。

在保守力做功的情况下，就可以引进与相对位置有关的能量——**势能 U** 的概念。

在一确定的保守力场中，任取一标准点“ P ”，则从 P 点到空间一特定点此保守力所做的功必定是空间位置的函数。当然，这个功也取决于 P ，但在分析时，点 P 固定不动。设这个位置函数为 $-U(x,y,z)$ ，并设 $U(x_1, y_1, z_1)=U(1)$ ， $U(x_2, y_2, z_2)=U(2)$ 。

$$\int_P^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(1) = -\int_1^P \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



则从位置1到位置2此保守力做的功可以写为

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^P \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_P^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^P \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_2^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(1) - U(2)$$

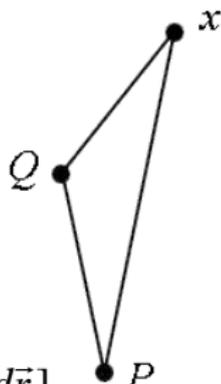
我们把 $U(1)-U(2)$ 称为势能的减少，并把 $U(1)$ 和 $U(2)$ 分别称为位置1和位置2处的**势能**。如果物体处于位置 P ，它的势能为零。

假如我们用保守力场中的 Q 点代替 P 点作为标准点，在此新的标准点下，空间各点势能记为 U' ，则 U' 与 U 的关系为：

$U'(x) = U(x) - U(Q)$ ，其中 x 为空间任意一点。

这是因为：

$$\begin{aligned} U'(x) &= -\int_Q^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left[\int_Q^P \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_P^x \vec{F} \cdot d\vec{r}\right] \\ &= -U(Q) + U(x) \end{aligned}$$



在标准点 P 下， $U(Q)$ 为一定值，用 Q 代替 P 作为标准点，势能将改变一个常量。因此，势能的标准点（即**势能零点**）是可以任意选取的。

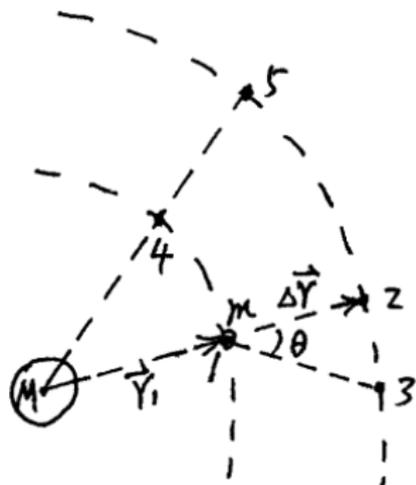
5.2.2 引力势能与万有引力做的功

在一个均匀重力场中，当我们不涉及可以与地球半径相比的高度时 ($z \ll R$)，重力是一个沿竖直方向向下的恒力，所做的功就是力乘以竖直距离。于是 $U(z) = mgz$ ，此式表示在 $z=0$ 的平面上任意一点为势能零点。若选取 $z=b$ 的平面上任意一点为势能零点，则势能可写为 $mg(z-b)$ 。由于重要的是势能之差，因此，不会给问题产生影响。

下面更一般地讨论万有引力势能。

将 m 沿着径向连线方向从1移至2，当移动距离很小时，引力做的功近似为

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -G \frac{mM}{r_1^2} \Delta r$$



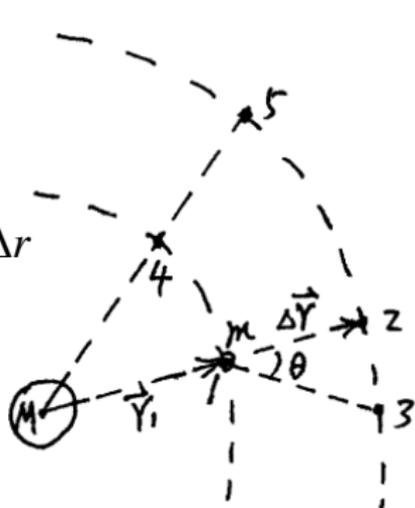
再考虑 m 从1移动到3，在这条路径上力与位移夹角为 $(\pi-\theta)$ ，而位移大小为 $\Delta r/\cos\theta$ ，所以引力做功近似为

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{GmM}{r_1^2} \frac{\Delta r}{\cos\theta} (-\cos\theta) = -\frac{GmM}{r_1^2} \Delta r$$

而在从3到2的路径上，引力总是与位移垂直，所以不做功。因此我们证明了沿路径1→3→2引力做功与相应的径向路径1→2上引力做功相同，这是万有引力做功的**第一个性质**。

引力在4→5的路径上所做的功与在1→2上所做的功相同，因为引力的大小只与 m 及 M 之间的距离有关，而与方向无关。这是引力做功的**第二个性质**。

万有引力是一个保守力。



由 a 到 b , 引力做功可写为

$$W = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -\int_{r_a}^{r_b} G \frac{mM}{r^2} dr = G \frac{mM}{r_b} - G \frac{mM}{r_a}$$

根据动能定理, $W = T_b - T_a = G \frac{mM}{r_b} - G \frac{mM}{r_a}$

有: $T_a + (-G \frac{mM}{r_a}) = T_b + (-G \frac{mM}{r_b}) = \text{常量}$

我们找到了质点在引力作用下的一个不变量。因为 a, b 是任意的, 所以可以一般地写成 $T + (-G \frac{mM}{r}) = \text{不变量} = E$

定义 $V = -G \frac{mM}{r}$ 为**引力势能**, E 就是**总机械能**。

当 $r \rightarrow \infty$ 时, 引力势能趋于零。

对地表附近的重力势能 $U(z)=mgz$ 求梯度，有 $\nabla U(z)=mg$ ，也就是重力的大小。考虑到方向的关系，可以得到重力

$$\vec{F} = m\vec{g} = -\nabla U(z)$$

对引力势能 $V = -G\frac{mM}{r}$ 求梯度，有引力 $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r = -\nabla V(r)$

更加一般地，对于这类保守力 \vec{F} ，我们总可以找到一个 φ ，其梯度的负值也就是该力的公式表述，即 $\vec{F} = -\nabla\varphi$ 。

一般称标量函数 φ 为“**位函数**”，有时简称“**位**”，也就是对应的势能或位能。**位移和速度可不可以有“位函数”？**

引力势能实际上是属于 m 及 M 二者组成的**体系**的。因势能决定于二者之间的相对距离。

其它的势能也有同样特点，也应是属于一个体系的**(弹簧振子)**。

5.2.3 弹性势能与弹性力的功

把弹簧从平衡点压缩（或拉伸）距离 x ，弹性力做功为

$$W = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^x -kx dr = -\frac{1}{2} kx^2$$

又 $W = \Delta T = T_x - T_0 = -\frac{1}{2} kx^2$ ，有 $T_x + \frac{1}{2} kx^2 = T_0 = \text{常量} = E$

定义 $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$ 为**弹性势能**， E 就是总的**机械能**，在整个过程中**机械能守恒**。

若取 $x=b$ 处的势能为零，则弹簧的弹性力做功为

$$W = \int_b^x -kr dr = -\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} kb^2 = T_x - T_b$$

$$T_x + \frac{1}{2} kx^2 = T_b + \frac{1}{2} kb^2 = \text{常量} = E$$

$$U'(x) = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kb^2$$

5.2.4. 非保守力做功与功能原理

按照牛顿的观点，力可以是非保守的。但按照现在更加深入的看法，不存在非保守力。这是因为事实上自然界所有已知的基本力都是保守力。

“热” → 晶格振动(机械能)

在经典物理中利用非保守力的概念对处理问题起到简化作用，不必动辄揭示其基本力给出分析处理。

[例题] 汽车启动过程中是什么在做功？地面与汽车驱动轮之间的摩擦力做功吗？

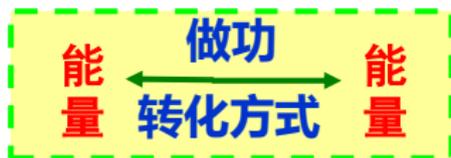
[解] 汽车启动过程中归根结底是发动机在做功，也有人为了分析的方便而采用“汽车驱动轮向后推动地面做功”或“地面与汽车驱动轮之间的摩擦力推动汽车前进”的说法。这些说法是否正确？这一过程的物理图像应该是什么样子的？

分析汽车启动过程中谁在做功的问题。**地面与汽车驱动轮之间的摩擦力是不可能做功的**，我们在刚体运动中会作详细分析。至少，车轮着地点相对地面是静止的(假设没有打滑)，相对运动的速度 v 为零，所以摩擦力 f 做功的功率 $P = f \cdot v = 0$ ，当然相应的做功也为零。

把汽车看成是一个质点的模型不适用了，现在不能把汽车，甚至驱动轮，再看成是一个质点了。汽车发动机最终把力作用在驱动轮上，而车轮与地面之间的磨擦使两者的接触点处保持相对静止，但车轮发生了变形，因而产生了张力，是相对静止的接触点与车轮其它部分之间的这一张力拉动车轮进而整个汽车向前运动。

5.2.5. 能量的各种形式

“能量”是物理学一个极为普遍、极为重要的物理量，有机械能、热能、电磁能、辐射能、化学能、生物能、核能等多种形式，各种形式的能量可以相互转换。能量这一概念的重大价值，在于它转换时的守恒性。

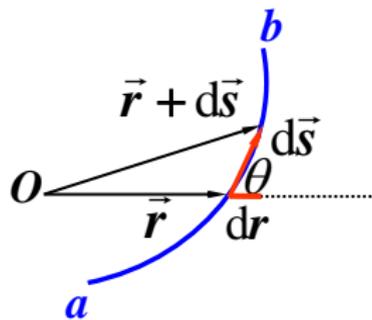


例题：质点在力的作用下由位置 \vec{r}_a 运动到 \vec{r}_b ，经过的路程为 s ，如果力函数分别为 $\vec{F}_1 = k\vec{e}_r$ ， $\vec{F}_2 = k\vec{v}$ 其中 k 为常数， \vec{e}_r ， \vec{v} 分别是沿矢径和速度方向的单位矢量

(1) 分别求两种力在该过程所做的功。

(2) 说明 \vec{F}_1 和 \vec{F}_2 哪个是保守力。

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad A_1 &= \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} = \int k\vec{e}_r \cdot d\vec{s} \\ &= \int k |d\vec{s}| \cos \theta \\ &= \int k dr = k(|\vec{r}_b| - |\vec{r}_a|) \end{aligned}$$



保守力

$$A_2 = \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} = \int k\vec{v} \cdot d\vec{s} = \int k|\vec{v}| |d\vec{s}| = kvs$$

非保守力

5.2.3 势能曲线

• 势能与力的比较:

- 势能是标量，力是矢量，确定标量函数容易。
- 微观上，力和速度等概念不再适用，能量概念继续存在

势能图：势能与两质点相对关系的图形。

势能为一维情况，势能图为势能曲线

常见势能曲线

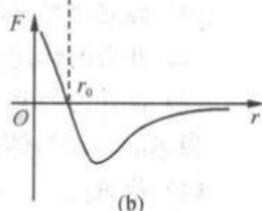
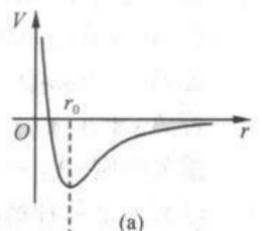
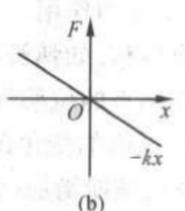
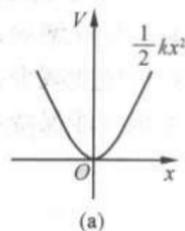
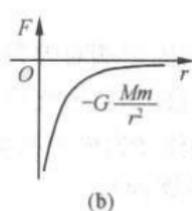
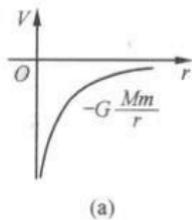
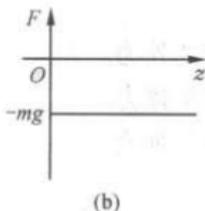
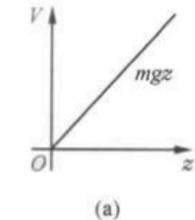


图 5.3 重力势能 图 5.4 万有引力势能 图 5.5 弹性力势能 图 5.6 双原子分子势能

5.4 质心系

5.4.1 柯尼希定理

质心系中质点系的动量

质心坐标系——以质心为原点，坐标轴总与基本参考系平行。
质点系相对质心坐标系的动量

$$\vec{P}_c = \sum_i m_i \vec{v}_{ic} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_i \vec{r}_{ic}}{m} \right) = 0$$

即质点系相对质心坐标系的动量总为零。

质心系中质点系的能量-柯尼希定理

质心系中第*i*个质点*m_i*，相对基本参考系*v_i*，相对质心系*v'_i*。
质点系相对基本参考系总动能

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

设质心速度 \vec{v}_c $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}'_i$

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_c^2 + v_i'^2 + 2\vec{v}_c \cdot \vec{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}'_i \end{aligned}$$

质心系, 则 $\sum_i m_i \vec{v}'_i = \vec{r}'_c = \mathbf{0}$,

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$$

质心动能

质点系相对质心动能

柯尼希定理——质点系相对于某基本参考系的动能等于质心动能和相对动能之和. 质点系的动量等于质心的动量, 质点系的动能, 在一般情况下并不等于质心的动能。

5.4.2 质心系中的功能定理和机械能守恒定律

选择质心系，即使质心系不是惯性系，也不需要考虑惯性力所做的功！

若 $\vec{a}_c = 0$ ，则质心系是惯性系；若 $\vec{a}_c \neq 0$ ，则质心系是非惯性系，具有加速度 \vec{a}_c 的平动参考系。选取质心系，则所有质点都受到惯性力作用。

作用在质点*i*的惯性力为： $-m_i \vec{a}_c$

该惯性力对质点*i*所做的功： $\int_{t_0}^t -m_i \vec{a}_c \cdot d\vec{r}_{ci}$

惯性力所做的总功：

$$\begin{aligned} A &= \sum_i \int_{t_0}^t -m_i \vec{a}_c \cdot d\vec{r}_{ci} = -\int_{t_0}^t \vec{a}_c \cdot \sum_i m_i d\vec{r}_{ci} \\ &= -\int_{t_0}^t \vec{a}_c \cdot d \sum_i (m_i \vec{r}_{ci}) = -\int_{t_0}^t \vec{a}_c \cdot d(m_c \vec{r}_{cc}) = 0 \end{aligned}$$

5.5 两体问题

考虑两个质点的孤立体系，质点间的作用力满足牛顿第三定律。

动力学方程

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f}_{12}$$

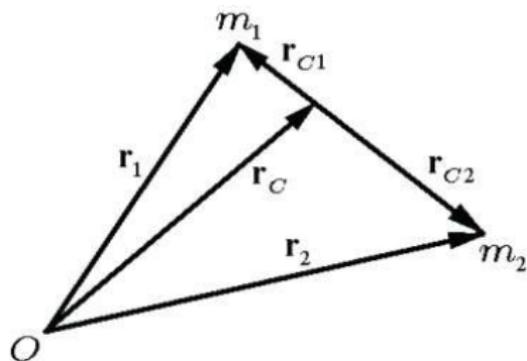
$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{f}_{21}$$

方程相加 \Rightarrow $m_c \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = 0$

这里

$$m_c = m_1 + m_2$$

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$



质心做匀速运动

质心系是惯性系

为质量组质量

为质心位矢

考虑 m_1 相对于 m_2 的运动。记相对位移和相对速度为：

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{f}_{12} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{f}_{21} \end{aligned} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}$$

定义折合质量或约化质量：

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

原方程写成： $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ 由方程解出： $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

在两体问题中，如果用约化质量，就可以把两体问题化为单个约化质量质点的运动问题。

在质心系中的坐标

$$\vec{r}_{C1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_C = \vec{r}_1 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\mu \vec{r}}{m_1}$$

$$\vec{r}_{C2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_C = \vec{r}_2 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{\mu \vec{r}}{m_2}$$

即 $\vec{r}_{C1} \parallel \vec{r}_{C2}$ ，质心在两质点的连线上，并且质点与质心的距离反比于质点的质量。

在实验室系（即静止的坐标系）中的坐标和速度：

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_C + \frac{\mu \vec{r}}{m_1} \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_C + \frac{\mu \vec{v}}{m_1}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_C - \frac{\mu \vec{r}}{m_2} \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_C - \frac{\mu \vec{v}}{m_2}$$

- 质心系中的机械能

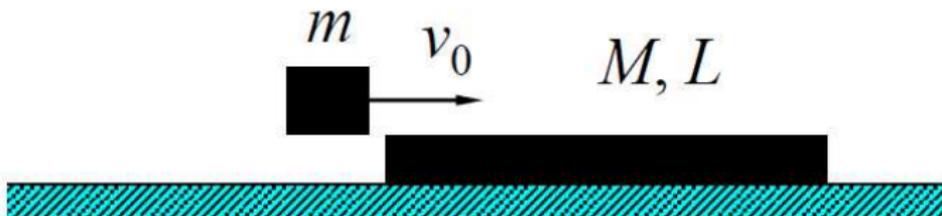
$$\begin{aligned}\Rightarrow E &= \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{C1}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{C2}^2 + V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{\mu v}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-\frac{\mu v}{m_2}\right)^2 + V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}\mu v^2 + V(\mathbf{r})\end{aligned}$$

- 实验室系中的机械能

由柯尼希定理有 $\Rightarrow E = \frac{1}{2}m_c\vec{v}_C^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 + V(\mathbf{r})$

利用约化质量代替 m_1 ，不仅可以把S系当惯性系处理，而且在S系中求得的机械能为在质心系中的机械能。

长 L 、质量 M 的平板放在光滑水平面上，质量 m 的小木块以水平初速 v_0 滑入平板上表面，两者间摩擦系数为 μ ，试求小木块恰好未能滑离平板上表面的条件。



解法一：

小木块运动到平板右端时与平板速度相同 $(M + m)v = mv_0$

过程中 m 与 M 间一对摩擦力做功 $W = -\mu mgL$

地面惯性系中动能定理 $W = \frac{1}{2}(M + m)v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$v_0^2 = 2\mu \frac{M + m}{M} gL$$

解法二

在随木板运动的非惯性系中

木块以初速 v_0 滑入，最后静止在木板右端。
在这个过程中，摩擦力和惯性力做功。

$$\text{平动加速度 } a_0 = \frac{\mu mg}{M}$$

$$\text{木块所受惯性力 } F_i = -m \frac{\mu mg}{M}$$

$$\text{动能定理 } m \frac{\mu mg}{M} L + \mu mg L = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_0^2 = 2\mu g L \frac{M+m}{M}$$

解法三

当作两体问题处理

木块以初速 v_0 滑入，最后静止在木板右端。

$$\mu mgL = \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} v_0^2$$

$$v_0^2 = 2\mu gL \frac{M+m}{M}$$

5.6. 碰撞

所谓碰撞，包括相当广泛的一类物体间的相互作用过程。处理碰撞问题，是**动量守恒定律最重要的应用之一**。

按照碰撞前与碰撞后物体的性质，可将碰撞分成两大类：**弹性碰撞**及**非弹性碰撞**。所谓弹性碰撞是指碰撞后的物体仍然是原来的物体，而且这些物体的内部状态没有变化。碰撞后的物体不同于碰撞前的，或者物体虽同但内部状态不同的碰撞都属于非弹性碰撞。

由上述弹性与非弹性的分类原则，可以断言：**机械能守恒的碰撞，是弹性碰撞**；**机械能不守恒的碰撞，是非弹性碰撞**。



(1) 弹性碰撞

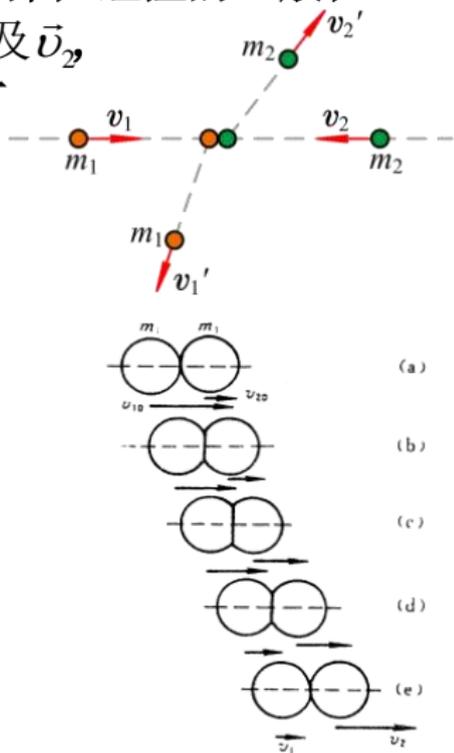
现在研究质量为 m_1 和 m_2 的两个质点的弹性碰撞的一般性质。假设在碰撞前二质点的速度分别为 \vec{v}_1 及 \vec{v}_2 ，碰撞后分别是 \vec{v}_1' 及 \vec{v}_2' 。根据动量守恒，有

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

因为是弹性碰撞，故机械能守恒。由于碰撞前后两质点都处在没有相互作用的自由运动状态，所以碰撞前后只有动能，根据机械能守恒，总动能不变，即

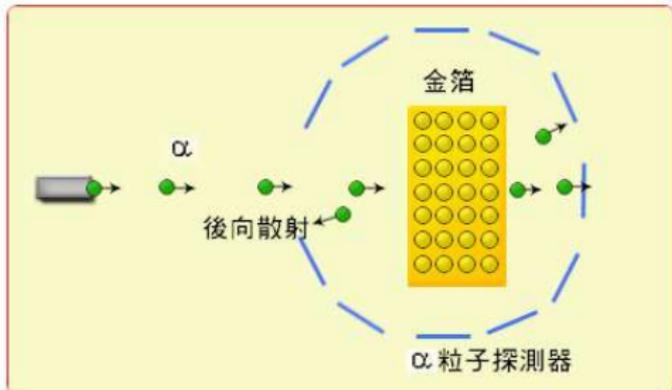
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

如果我们想知道碰撞的细节，则必须弄清楚作用力的具体情况。



(2) 实验室系和质心系

在研究两球碰撞时，通常选定其中一个球是静止的坐标系，这种坐标系称为**实验室系(L系)**，例如研究 α 粒子和金原子相碰撞时，通常选取金原子是静止的实验室系。其中静止的物体称为靶，运动的物体称为弹。



另外一种常用的惯性系，称为**质心系(C系)**，坐标系固定在体系的质心上，即在坐标系中体系的质心处于静止状态。**碰撞问题在质心系中求解，往往较为简单。**

(3) 对心碰撞与斜碰撞

碰撞前两球的速度处在两球中心的连线上的碰撞为**正碰撞**，也称为**对心碰撞**。

在**实验室系(L系)**中，碰撞前后两质点的速度分别为 u_1, u_2 和 v_1, v_2 。则质心速度为
$$v_c = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}。$$

在**质心系(C系)**中，碰撞前后两质点的速度分别为 u'_1, u'_2 和 v'_1, v'_2 ，有 $m_1 u'_1 + m_2 u'_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = 0$

结合能量守恒定律，有 $v'_2 - v'_1 = u'_1 - u'_2$

联立两式可解得 $v'_1 = -u'_1, v'_2 = -u'_2$ 。

结果表示，在**C系**中每个质点**碰后的速度为其碰前速度的负值**。

一般情况下，碰后两物体沿不同角度分开，这种碰撞为**斜碰撞**，这是因为碰前两球的速度不在两球中心连线上的缘故。通常，碰前速度 \vec{u}_1, \vec{u}_2 和碰后速度 \vec{v}_1, \vec{v}_2 处于两个不同的平面，所以它是一个**三维问题**。这里讨论 $\vec{u}_2 = 0$ 的情况，它是一个**二维问题**，所有运动均在 (\vec{v}_1, \vec{v}_2) 平面内。

弹性碰撞满足动量守恒和动能守恒，有方程：

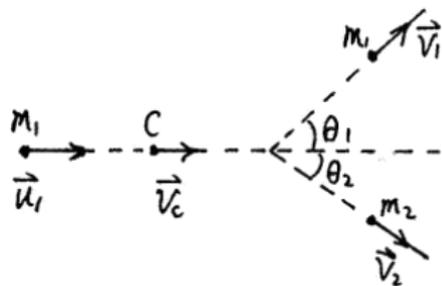
$$m_1 \vec{u}_1 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

在 (\vec{v}_1, \vec{v}_2) 平面内取 **x-y** 坐标，**x** 轴沿 \vec{u}_1 方向，**y** 轴与之垂直。动量守恒矢量方程在此坐标下可以用两个分量式写出：

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2$$

$$0 = m_1 v_1 \sin \theta_1 + m_2 v_2 \sin \theta_2$$



θ_1, θ_2 称为
散射角

在质心系(C系)中讨论。

由于 $\bar{u}_2 = 0$ ，质心速度为 $\bar{v}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{u}_1$

在C系中碰前两小球的速度分别为

$$\bar{u}'_1 = \bar{u}_1 - \bar{v}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{u}_1$$

$$\bar{u}'_2 = \bar{u}_2 - \bar{v}_c = -\bar{v}_c = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{u}_1$$

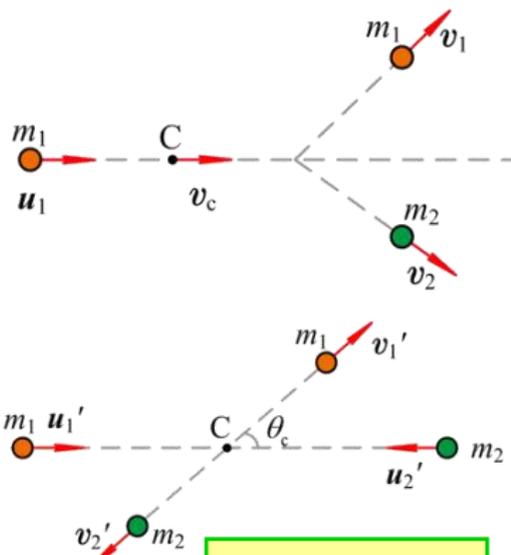
显然，有关系 $m_1 \bar{u}'_1 + m_2 \bar{u}'_2 = 0$

碰后，系统动量仍为零： $m_1 \bar{v}'_1 + m_2 \bar{v}'_2 = 0$

可见， \bar{v}'_1, \bar{v}'_2 仍在一条直线上。再考虑到动能守恒关

系： $\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

必有结论： $v'_1 = u'_1, v'_2 = u'_2$ 。



C系中的偏
离用 θ_c 表示。

在C系中，两小球弹性碰撞后，每个小球只改变方向，不改变大小，且碰后小球速度仍在一直线上，只是改变直线的方位。

例题 一质量为 m 的质子以 v_0 ($v_0 \ll c$) 的速度去撞击静止的质量为 $4m$ 的氦核, 用

实验室参考系, 质子以 $\frac{1}{2}v_0$ 的速率和 30° 的角度散射.

求:

(1) 用实验室参考系, 撞击后氦核的速率及运动方向;

(2) 用质心平动参考系, 质子的散射速度.

解 (1) 取 v_0 的方向为 x 轴正向, 质子和氦核碰撞

后的速度如图 2.87 所示.

由动量守恒,

$$mv_0 = m \cdot \frac{1}{2}v_0 \cos 30^\circ + 4mv_{2x}$$

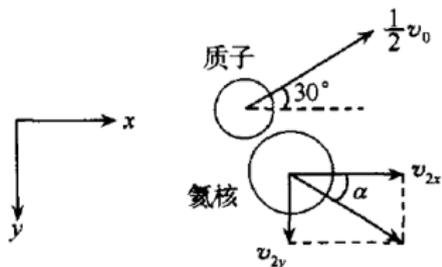
$$0 = m \left(-\frac{1}{2}v_0 \sin 30^\circ \right) + 4mv_{2y}$$

$$v_{2x} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \sqrt{3} \right) v_0 = 0.142v_0$$

$$v_{2y} = \frac{1}{16}v_0 = 0.0625v_0$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 0.155v_0$$

$$\alpha = \arctan \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = 23.8^\circ$$



$$(2) (m+4m)v_c = mv_0, \quad v_c = \frac{1}{5}v_0$$

$$v_{1c} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v_0\cos 30^\circ - \frac{1}{5}v_0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}v_0\sin 30^\circ\right)^2} = 0.342v_0$$

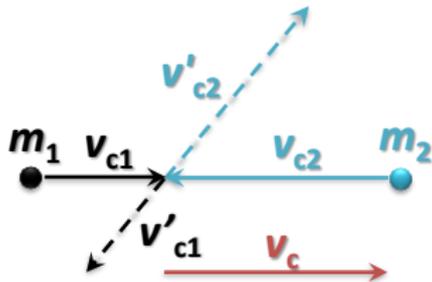
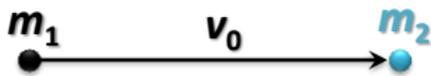
v_{1c} 与 x 轴的夹角(向 $-y$ 轴的转角)为

$$\beta = \arctan \left[\frac{\frac{1}{2}v_0\sin 30^\circ}{\frac{1}{2}v_0\cos 30^\circ - \frac{1}{5}v_0} \right] = 47.0^\circ$$

[例题] 已知两粒子质量分别为 m_1 和 m_2 ($m_1 > m_2$)，靶粒子 m_2 静止。求 m_1 运动与 m_2 碰撞后的偏转角 θ 的最大值。

[解]

设 m_1 入射速度为 v_0 ，而 m_2 的速度为0，图中箭头代表速度矢量：



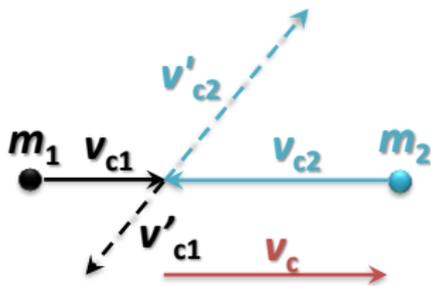
在质心系中， m_1 的速度为 $v_{c1} = \mu v_0 / m_1$ ，而 m_2 的速度为 $v_{c2} = \mu v_0 / m_2$ ，而质心速度为 $v_c = -v_{c2}$ 。碰撞后的速度用带撇的表示，质心系的速度用下标带C表示。

碰撞后， m_1 和 m_2 在质心系中的速率不变，但方向可任意转变。

[例题] 已知两粒子质量分别为 m_1 和 m_2 ($m_1 > m_2$)，靶粒子 m_2 静止。求 m_1 运动与 m_2 碰撞后的偏转角 θ 的最大值。

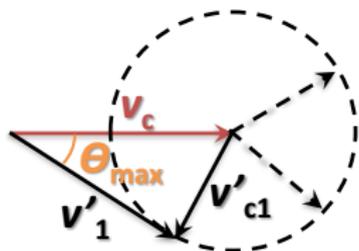
[解]

碰撞后， m_1 和 m_2 在质心系中的速率不变，但方向可任意转变，因此，矢量 \mathbf{v}'_{c1} 可能是以 \mathbf{v}'_{c1} 长度为半径的圆上的任一半径。



矢量 \mathbf{v}'_{c1} 叠加矢量 \mathbf{v}_c 得到 \mathbf{v}'_1 ，当 \mathbf{v}'_1 与圆相切时，偏转角为最大

$$\theta_{\max} = \arcsin(v'_{c1}/v_c)$$

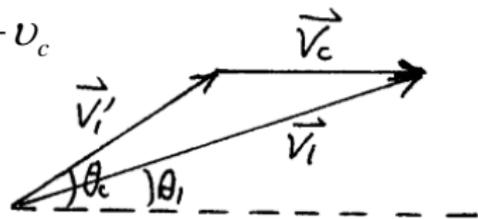


[例题] 已知两粒子质量分别为 m_1 和 m_2 ，靶粒子 m_2 静止。试导出L系和C系中入射粒子的散射角 θ_1 和 θ_c 的关系。

[解] 根据入射粒子 m_1 碰后速度关系式 $\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_c$ 画出矢量图。

写出两分量方程： $v_1 \cos \theta_1 = v'_1 \cos \theta_c + v_c$

$$v_1 \sin \theta_1 = v'_1 \sin \theta_c$$



联立得到
$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta_c}{\cos \theta_c + \frac{m_1}{m_2}}$$

当 $m_1 = m_2$ 时有
$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta_c}{\cos \theta_c + 1} = \tan \frac{\theta_c}{2}, \quad \text{即 } \theta_1 = \frac{\theta_c}{2}$$

所以

$$\tan\theta_1 = \frac{v'_{r1} \sin\theta_c}{v'_{r1} \cos\theta_c + v_c}$$

而质心速度为

$$v_c = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

以及

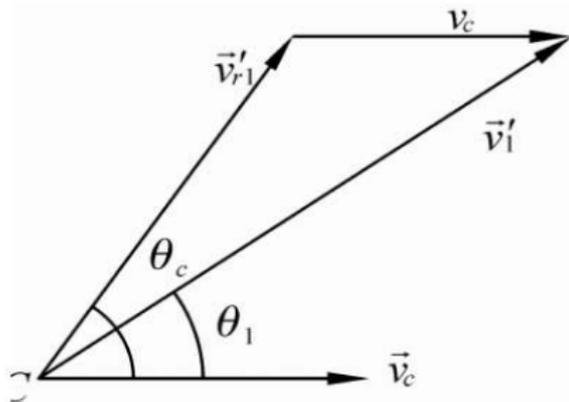
$$v'_{r1} = v_{r1} = v_1 - v_c = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2}$$

就可求得两散射角的变换关系

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c + \frac{m_1}{m_2}}$$

从上式看出：(1) 当 $m_1/m_2 \ll 1$ ，则 $\theta_1 \approx \theta_c$ ；(2) 当 $m_1/m_2 = 1$ ，则 $\theta_1 = \theta_c/2$ 。

再从



(4) 非弹性碰撞

对于一般的非弹性碰撞，**动量守恒仍然成立**；但**动能守恒不再满足**，或者说**碰后相对分离速度不再等于碰前相对接近速度**。

实验指出，一般非弹性碰撞的**相对分离速度与相对接近速度**有关系： $|\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2| = e |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ ，带撇的速度是碰撞后的， e 为**弹性恢复系数**。完全弹性体， $e=1$ ，如象牙接近于此；完全非弹性体， $e=0$ ，如粘泥；一般非弹性体， $0 < e < 1$ 。

由动量守恒和速度关系式可得碰撞后两质点的速度：

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_C + \frac{\mu}{m_1} v \vec{e} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_C - \frac{\mu}{m_2} v \vec{e}$$

其中 $v = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ ， $|\vec{e}| = e$ 是弹性恢复系数， \vec{e} 的方向为质心系中 m_1 的偏转方向。

碰撞过程中损失的动能为 $\quad v = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$

完全弹性碰撞， $e=1$ ，动能守恒；完全非弹性碰撞， $e=0$ ，动能损失最大。

现在考察 $m_2 \gg m_1$ 且 $u_2 = 0$ 的特例。这时有

$$\begin{cases} v_1 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} - e \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 u_1}{m_2} - e \frac{m_2 u_1}{m_2} \approx 0 - e u_1 = -e u_1 \\ v_2 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} + e \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 u_1}{m_2} + e \frac{m_1 u_1}{m_2} \approx 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

球2保持不动；球1向相反方向弹回去。弹回的速度小于接近的速度，前者为后者的 e 倍。

一个测定物体与地面相碰的恢复系数的简便方法：令物体从高度 H 自由落下：其落到地面的速度为 $u_1 = \sqrt{2gH}$ ，即以此速度与地面相碰撞。碰撞后的反跳速度 v_1 难以直接量度，但可以观察其上升的最大高度 h ，而 $h = v_1^2 / 2g$ 。于是恢复系数

$$e = \frac{|v_1|}{|u_1|} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

如果 $m_2 \approx m_1$ ，同样球2碰撞前的速度 $u_2 = 0$ ，若发生的是弹性碰撞， $e = 1$ ，则有

$$\begin{cases} v_1 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} - e \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 u_1}{2m_1} - e \frac{m_1 u_1}{2m_1} = 0 \\ v_2 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} + e \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 u_1}{2m_1} + e \frac{m_1 u_1}{2m_1} = u_1 \end{cases}$$

即 m_1 的速度全部转移到 m_2 ， m_1 几乎静止下来。在核反应堆里，氢是最有效的中子减速剂。



[例题] 一质量为 m 的电子和一质量为 M ，最初静止的原子进行正碰撞。碰撞的结果是，一定量的能量 E 被贮存到原子的内部。问，电子必须具有多大的最小初速度 v_0 ？

[解]

$$\begin{cases} m v_0 = m v + M V \Rightarrow v = \frac{m v_0 - M V}{m} \\ \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 + E \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(m v_0 - M V)^2}{m} + \frac{1}{2} M V^2 + E \end{cases}$$

$$\cancel{m^2 v_0^2} = \cancel{m^2 v^2} - 2 M m V v_0 + M^2 V^2 + M m V^2 + 2 m E$$

$$M(M+m)V^2 - 2Mm v_0 V + 2mE = 0$$

要使方程对于 V 有实根， $4M^2 m^2 v_0^2 - 8Mm(M+m)E \geq 0$

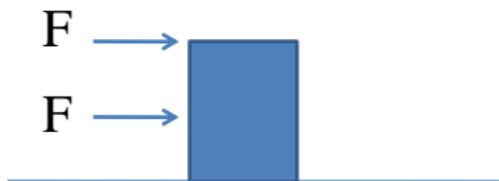
$$M m v_0^2 \geq 2E(M+m)$$

$$\therefore v_0 \geq \sqrt{2E \frac{M+m}{Mm}}$$

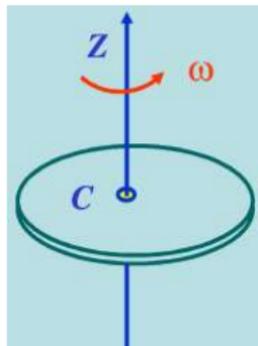
第六章 角动量定理



- 角动量（动量矩）
- 角动量定理
- 角动量守恒
- 实例



与旋转有关

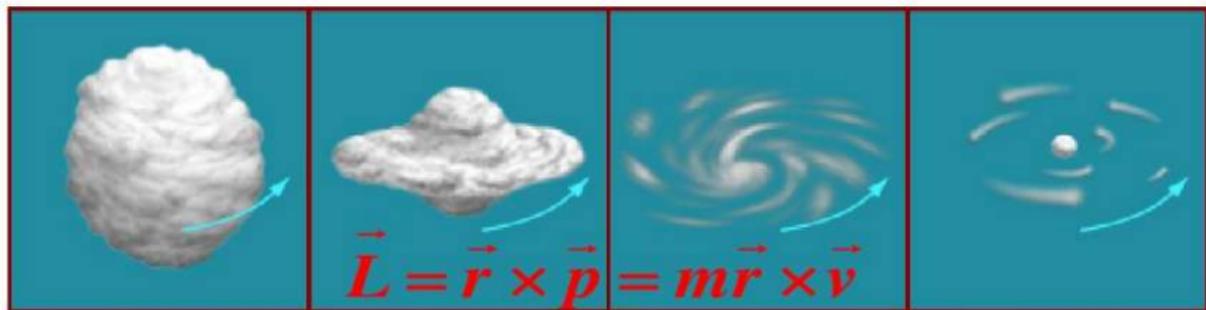


变速自行车



为什么星系是扁状，盘型结构？

18世纪哲学家提出星云说，认为太阳系是由气云组成的。气云原来很大，由自身引力而收缩，最后聚集成一个个行星、卫星及太阳本身。但是万有引力为什么不能把所有的天体吸引在一起而是形成一个扁平的盘状？

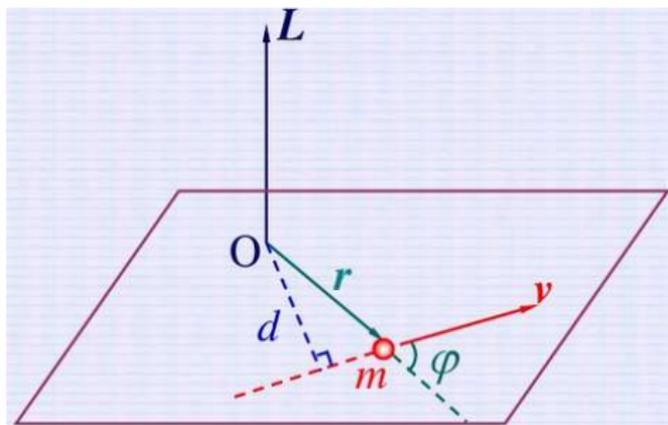


康德认为除了引力还有斥力，把向心加速的天体散射到一个方向。19世纪数学家拉普拉斯完善了康德的星云说，**指出旋转盘状结构的成因是角动量守恒。**

6.1.1 角动量（动量矩）

质点对参考点O的角动量定义为：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



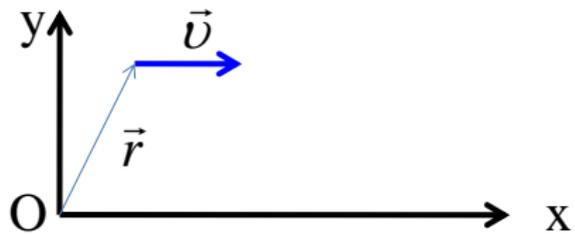
转动中心 O

大小： $L = rp \sin \varphi = mvr \sin \varphi$

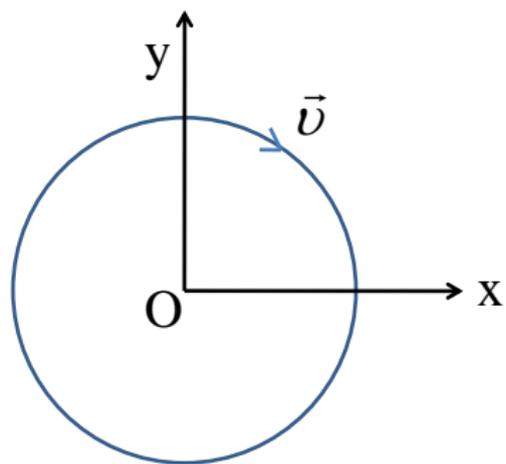
方向：沿 $\vec{r} \times \vec{p}$ 方向

单位： $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

匀速直线运动



匀速圆周运动



6.1.2 力矩、角动量定理

单质点孤立体系

质点的角动量为 $\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ ，其变化率为

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

因为 $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ，而 \vec{v} 与 \vec{p} 平行，故右边第一项为零。

在右边第二项中代入 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ ，得到 $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$

定义 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ，称为力 \vec{F} 对坐标原点 O 的**力矩**，则有

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}$$

表明，**角动量的变化率等于力矩**。这个公式与动量形式的牛顿第二定律 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ 很相似。角动量与动量相对应，力矩与力相对应。

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M} \quad \text{角动量定理的微分形式}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{l}}{dt} dt = \vec{l}_2 - \vec{l}_1 \quad \text{角动量定理的积分形式}$$

冲量矩

力矩对时间的积累—冲量矩

类比:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

例：一质量为**m**的质点沿一条二维曲线运动，

$$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}, \text{ 其中 } a、b、\omega \text{ 为常数。}$$

求：该质点对原点的角动量矢量。

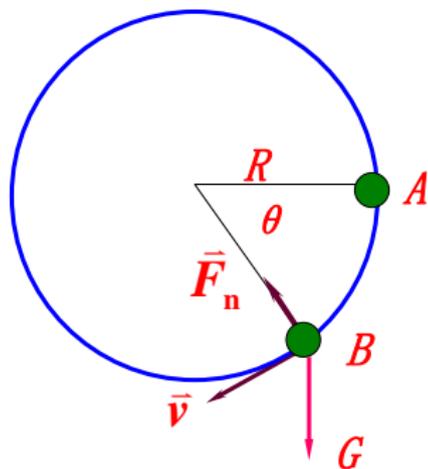
解：

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m\vec{r} \times \vec{v} = m(a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}) \\ &\quad \times (-a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}) \\ &= m(ab\omega\cos^2\omega t\vec{k} + ab\omega\sin^2\omega t\vec{k}) \\ &= \mathbf{mab\omega\vec{k}} \quad (\text{恒矢量})\end{aligned}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0!}$$

例 一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内. 一质量为 m 的小球穿在圆环上, 并可在圆环上滑动. 小球开始时静止于圆环上的点 A (该点在通过环心 O 的水平面上), 然后从 A 点开始下滑. 设小球与圆环间的摩擦略去不计. 求小球滑到点 B 时对环心 O 的角动量和角速度.



用功能原理也可求解

解 小球受重力和支持力作用, 圆环的支持力为有心力, 力矩为零; 重力矩垂直纸面向里

$$M = mgR \cos \theta$$

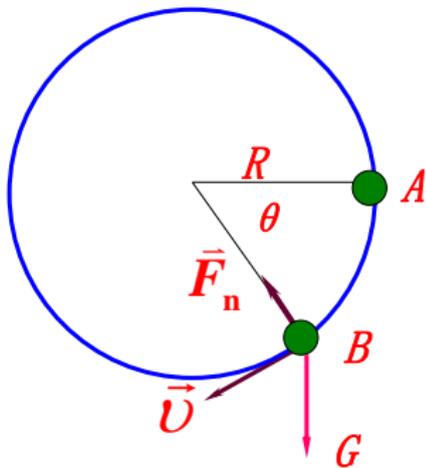
由质点的角动量定理

$$mgR \cos \theta = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = mgR \cos \theta dt$$

$$\because \omega = \frac{d\theta}{dt}, L = mRv = mR^2\omega \quad \therefore dt = \frac{mR^2 d\theta}{L}$$

得 $LdL = m^2 gR^3 \cos \theta d\theta$



$$L dL = m^2 g R^3 \cos \theta d\theta$$

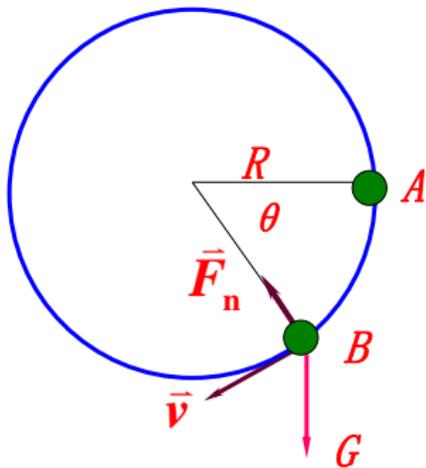
由题设条件积分上式

$$\int_0^L L dL = m^2 g R^3 \int_0^\theta \cos \theta d\theta$$

$$L = mR^{3/2} (2g \sin \theta)^{1/2}$$

$$\therefore L = mR^2 \omega$$

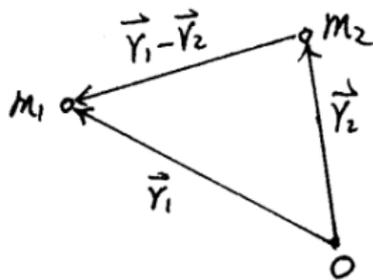
$$\omega = \left(\frac{2g}{R} \sin \theta \right)^{1/2}$$



6.1.3 角动量守恒

由两个质点构成的孤立体系开始讨论。
图示的两质点体系，其动力学方程是：

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$



没有外力的作用。根据牛顿第三定律 $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

用矢量 \vec{r}_1 对第一式两边进行矢乘，得到 $\vec{r}_1 \times m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

根据矢量的微分法则，上式左边有

$$m_1 \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{v}_1}{dt} = m_1 \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) - m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{v}_1 = m_1 \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) - m_1 \underline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_1} = m_1 \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1)$$

所以， $m_1 \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

同样方法，可得 $m_2 \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$

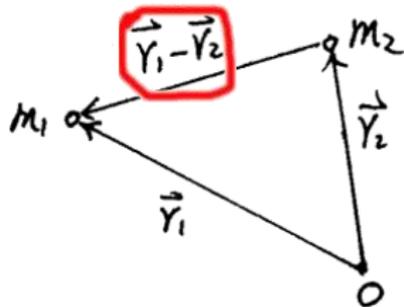
两式相加，得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2) &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2 \rightarrow 1} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \underline{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \times \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \end{aligned}$$

所以 $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2) = 0$

定义 $\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$ ，称为体系的角动量。有 $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ 或 $\vec{L} = \text{不变量}$ 。

对于孤立体系，每个质点的角动量时刻在变化，但它们之和却不随时间变化，这就是**角动量守恒定律**。



多质点体系对固定点的角动量

定义各个质点对固定点O的角动量的矢量和，即

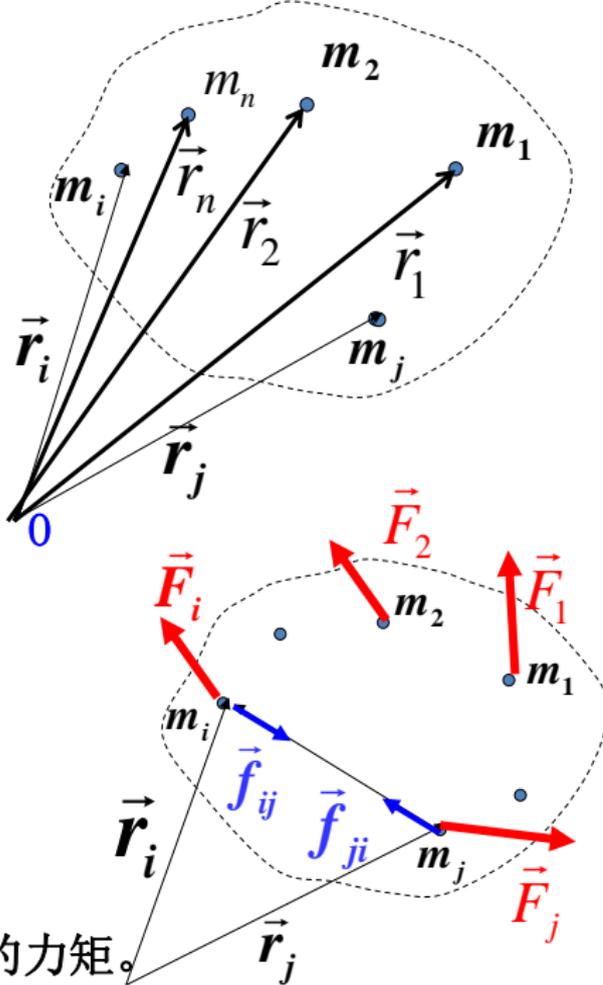
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

对第 i 质点，用角动量定理为

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i = \vec{r}_i \times \left(\underbrace{\vec{F}_i}_{\text{外力}} + \sum_{j \neq i} \underbrace{\vec{f}_{ij}}_{\text{内力}} \right)$$

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \right)$$

第 i 质点受的外力和内力对O点产生的力矩。



$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \right)$$

将上式对质点系内所有质点求和，得

$$\sum_{i=1} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1} \vec{L}_i = \sum_{i=1} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1} \left(\vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \right)$$

将上式表示为

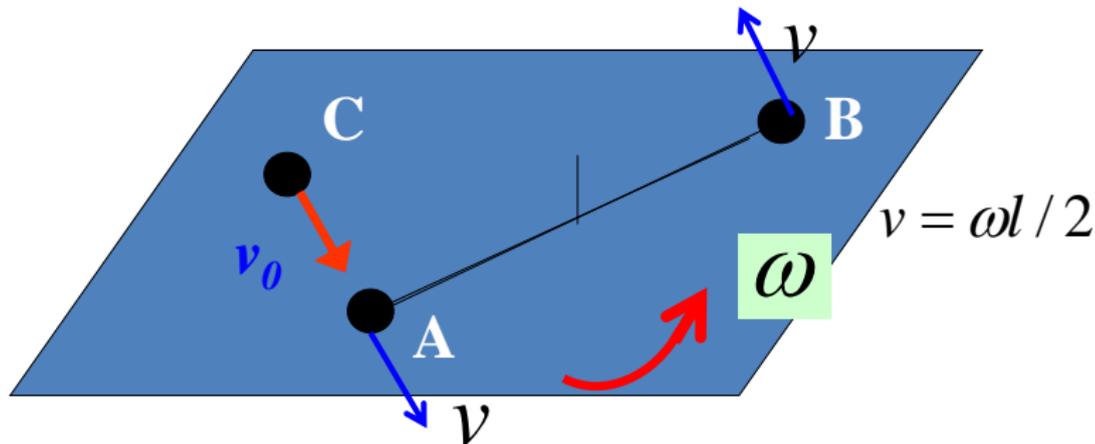
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{M}}_{\text{合外力矩}} + \underbrace{\vec{M}}_{\text{合内力矩}}$$

两质点体系合内力矩为0

$$\vec{M}_{\text{外力矩}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

质点系的角动量定理：质点系所受的合外力矩等于该质点系的角动量对时间的变化率！

例：一长为 l 的轻质细杆两端分别固接小球 A 和 B，杆可绕其中点处的细轴在光滑水平面上转动。初始时杆静止，后另一小球 C 以速度 v_0 垂直于杆碰 A，碰后与 A 合二而一。设三个小球的质量都是 m ，求：碰后杆转动的角速度 ω 。



解： 选系统：A+B+C

碰撞过程中，系统的动量和角动量守恒吗？

设碰后 B 球的速度为 v

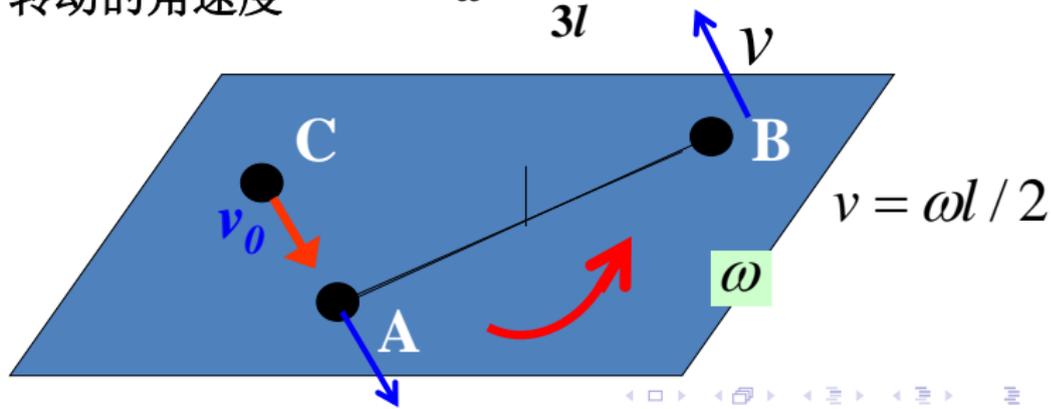
$$mv_0 \frac{l}{2} = (2m)v \left(\frac{l}{2} \right) + mv \left(\frac{l}{2} \right) \quad v = \omega l / 2$$

即

$$mv_0 \frac{l}{2} = 2m\omega \left(\frac{l}{2} \right)^2 + m\omega \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

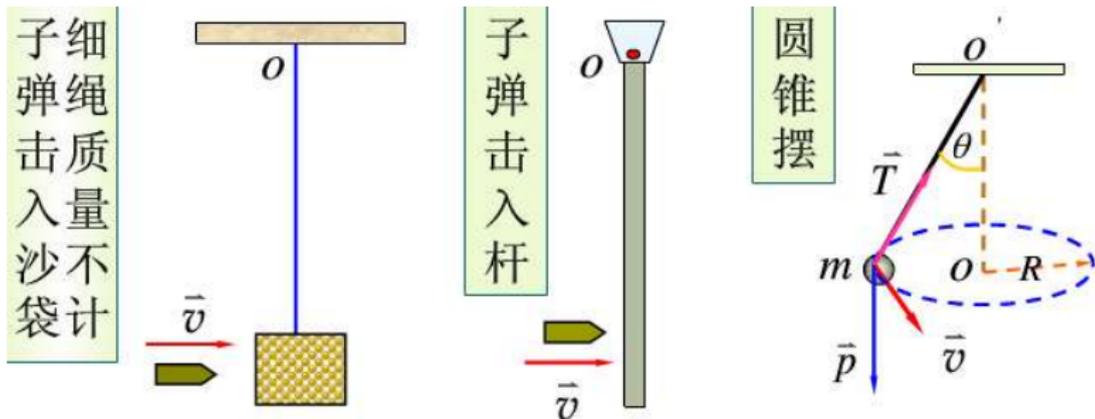
得杆转动的角速度

$$\omega = \frac{2v_0}{3l}$$



角动量守恒也是一个独立的规律，即它并不包含在能量守恒和动量守恒规律中。

例：系统的动量、角动量、动能是否守恒



	以子弹和沙袋为系统	以子弹和杆为系统	圆锥摆系统
动量：	守恒；	不守恒；	不守恒；
角动量：	守恒；	守恒；	守恒；
机械能：	不守恒。	不守恒。	守恒。

角动量守恒也是一个矢量关系，它包括三个不变的量，即

$$L_x = \text{不变量}, \quad L_y = \text{不变量}, \quad L_z = \text{不变量}$$

例： 已知： $\vec{r} = 3\vec{i} + 8\vec{j}$ $\vec{F} = -7\vec{i}$

$$\vec{v} = 5\vec{i} - 6\vec{j} \quad m = 3$$

求角动量和力矩

解： $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = 3(3\vec{i} + 8\vec{j}) \times (5\vec{i} - 6\vec{j})$

$$= -174\vec{k} (\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s})$$

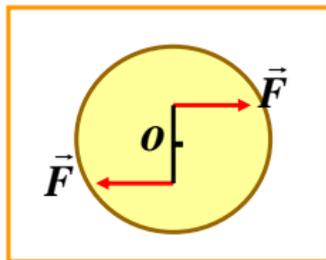
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (3\vec{i} + 8\vec{j}) \times (-7\vec{i})$$

$$= 56\vec{k} (\text{N} \cdot \text{s})$$

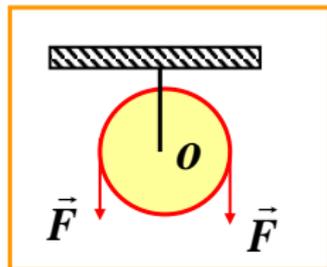
合力为零时，其合力矩是否一定为零？

合力矩为零时，合力是否一定为零？

例：



$$\sum \vec{F} = 0, \sum \vec{M}_o \neq 0$$

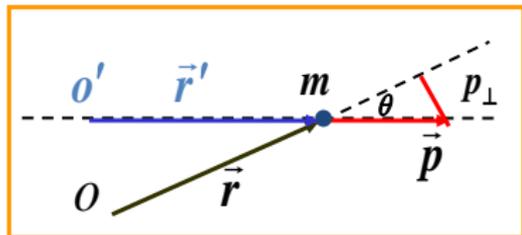


$$\sum \vec{F} \neq 0, \sum \vec{M}_o = 0$$

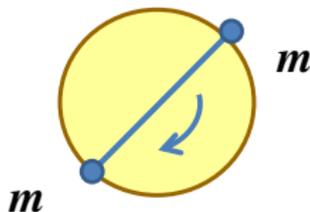
力矩为零的情况： $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

(1) 力 \vec{F} 等于零；

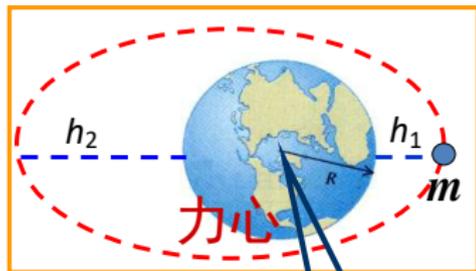
按惯性定律知此时物体保持静止或者匀速直线状态



(2) 合外力矩 $\vec{M} = 0$



(3) 力 \vec{F} 的作用线与矢径 \vec{r} 共线 (即 $\sin \theta = 0$) 即过0点的有心力



有心力:

物体所受的力始终指向 (或背离) 某一固定点

固定点

有心力场与角动量守恒

有心力场中的质点运动

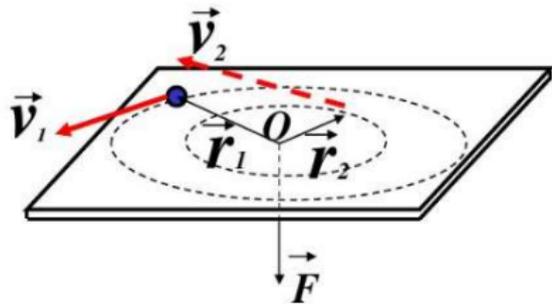
例: 质量为 m 的小球系在绳的一端, 另一端通过圆孔向下, 水平面光滑, 开始小球作圆周运动(r_1, v_1)然后向下拉绳, 使小球的运动轨迹为 r_2 的圆周

求: $v_2 = ?$

解: 作用在小球的力始终通过 O 点(有心力)由质点角动量守恒:

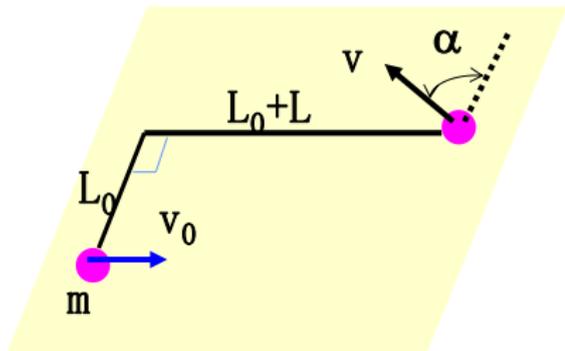
$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2$$

$$v_2 = v_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \quad (> v_1)$$



星云学说

例：光滑的水平面上用一弹性绳（ k ）系一小球（ m ）。开始时，弹性绳自然伸长（ L_0 ）。今给小球与弹性绳垂直的初速度 v_0 ，**试求**当弹性绳转过90度且伸长了 L 时，小球的速度大小与方向。



解 由机械能守恒有：

$$\therefore \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kL^2 \quad \therefore v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}L^2}$$

求角度 α

由于质点在有心力作用下运动，故角动量守恒。
有：

$$\therefore mv_0L_0 = mv \cos \alpha \cdot (L_0 + L)$$

$$\therefore \cos \alpha = v_0L_0 / v(L_0 + L)$$

万有引力是有心力

例：行星运动的开普勒第二定律认为，对于任一行星，由太阳到行星的径矢在相等的时间内扫过相等的面积。试用角动量守恒定律证明之。

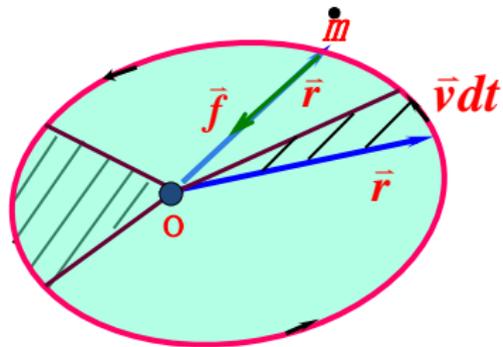
解：将行星看为质点，在 dt 时间内以速度 \vec{v} 完成的位移为 $\vec{v}dt$ ，矢径 \vec{r} 在 dt 时间内扫过的面积为 dS （图中阴影）。

$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt|$$

根据质点角动量的定义

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\text{则 } dS = \frac{L}{2m} dt$$



矢径在单位时间内扫过的面积（称为**掠面速度**）

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$$

万有引力属于有心力，行星相对于太阳所在处的点 O 的角动量是守恒的，即 $\vec{L} = \text{恒矢量}$ ，故有

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{恒量}$$

行星对太阳所在点 O 的角动量守恒，不仅角动量的大小不随时间变化，即掠面速度恒定，而且角动量的方向也是不随时间变化的，即行星的轨道平面在空间的取向是恒定的。

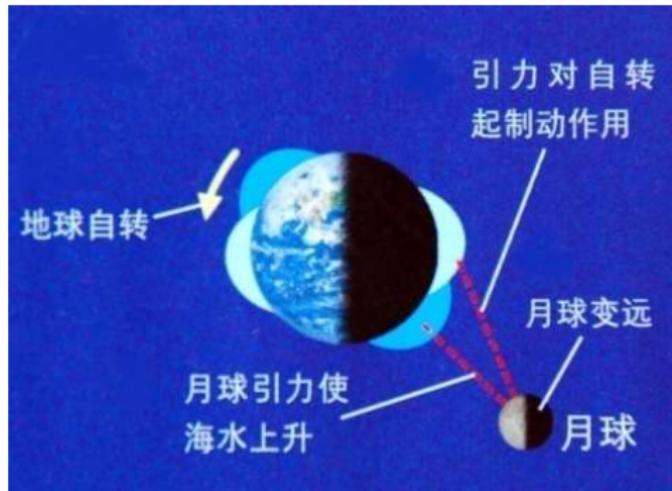
$\vec{L} \perp \vec{r}$ 二维平面问题

我们再讨论一下潮汐现象。

地球与海面凸出部分之间有相对运动。两部分之间存在摩擦，**其力矩是使地球自转变慢。**



把地球和月球看作一个孤立体系，它的总动量矩应当是守恒的。**地球动量矩减少，必定意味着月球动量矩增加。**根据开普勒定律，月球速度与地月距离有确定的关系，**要想增加动量矩，只能增大地、月之间的距离。**也就是说，**随着地球自转变慢，月亮将离我们越来越远。**



[例题] 月球引力在地球上引起的潮汐，会使地球的自转变慢。试分析在这一过程中动量矩由地球自转向月球公转的转移及其效果。

[解] 设月球公转动量矩为 J ，增加量为 ΔJ ，月球公转角速度为 ω ，线速度为 v ，地球质量为 M ，月球质量为 m ，有 $J = mr v = mr^2 \omega$ ，
$$\Delta J = 2mr\omega\Delta r + mr^2\Delta\omega。$$

因为 $\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$ ，则 $r^3\omega^2 = GM$ 为常量，所以有

$$\Delta(r^3\omega^2) = 3r^2\omega^2\Delta r + 2r^3\omega\Delta\omega = \Delta(GM) = 0, \text{ 即 } 3\omega\Delta r = -2r\Delta\omega。$$

可以得出 $\Delta r = -\frac{2r}{3\omega}\Delta\omega$ 或 $\Delta\omega = -\frac{3\omega}{2r}\Delta r$ 。

因此，
$$\Delta J = 2mr\omega\Delta r + mr^2\Delta\omega = -2mr\omega\frac{2r}{3\omega}\Delta\omega + mr^2\Delta\omega$$

$$= -\frac{4m}{3}r^2\Delta\omega + mr^2\Delta\omega = -\frac{1}{3}mr^2\Delta\omega \quad \Delta\omega = -\frac{3\Delta J}{mr^2}$$

$$\begin{aligned} \text{或 } \Delta J &= 2mr\omega\Delta r + mr^2\Delta\omega = 2mr\omega\Delta r - mr^2\frac{3\omega}{2r}\Delta r \\ &= 2mr\omega\Delta r - \frac{3}{2}mr\omega\Delta r = \frac{1}{2}mr\omega\Delta r \end{aligned} \quad \Delta r = \frac{2\Delta J}{mr\omega}$$

所以有 $\Delta r = \frac{2\Delta J}{mr\omega}$ 或 $\Delta\omega = -\frac{3\Delta J}{mr^2}$ 。

进一步可以得出

$$\Delta v = \Delta(r\omega) = r\Delta\omega + \omega\Delta r = -r\frac{3\Delta J}{mr^2} + \omega\frac{2\Delta J}{mr\omega} = -\frac{\Delta J}{mr}$$

即，随着月球公转动量矩的增加，月地之间的距离增大，绕地公转的角速度和线速度都减小。现代的观测表明，月地距离增大每年大约2~4厘米。

6.2 质心系的角动量定理

质点系对O点的角动量

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

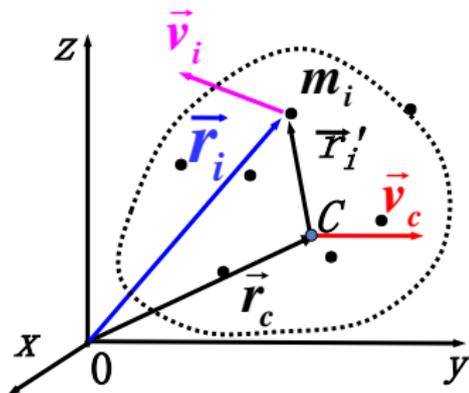
质心C 对O点的角动量

$$\vec{L}_C = \vec{r}_C \times (\sum m_i) \vec{v}_C$$

质心系中质点系对质心的角动量

$$\vec{L}' = \sum \vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}'_i)$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_C$$



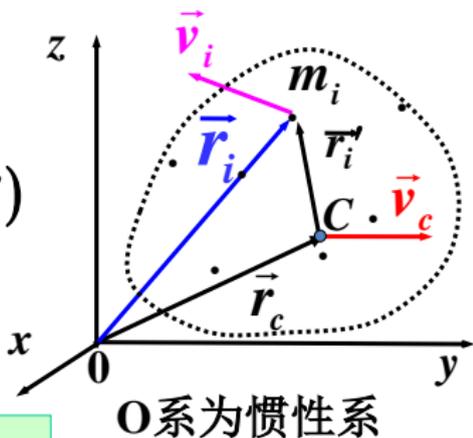
O系为惯性系

质点系对O点的角动量 等于质心对O点的角动量加上质心参考系中质点系对质心的角动量。

证明

质点系对O点的角动量为

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum m_i (\vec{r}_C + \vec{r}'_i) \times (\vec{v}_C + \vec{v}'_i) \\ &= \vec{r}_C \times (m\vec{v}_C) + \vec{r}_C \times \sum m_i \vec{v}'_i + \\ &\quad (\sum m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v}_C + \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i\end{aligned}$$



$$\because \vec{r}'_c = \frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{m} = 0$$

$$\because \vec{v}'_c = \frac{\sum m_i \vec{v}'_i}{m} = 0$$

质心系

$$\vec{L} = \vec{r}_C \times (m\vec{v}_C) + \vec{r}_C \times m\vec{v}'_c + m\vec{r}'_c \times \vec{v}_C + \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i$$

质心相对于O点

$\vec{0}$

$\vec{0}$

质心系中质点系

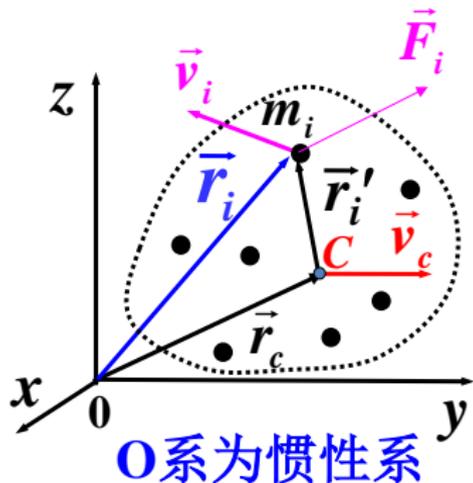
的角动量 \vec{L}_C

的角动量 \vec{L}'

质点系对质心的角动量定理

将式 $\vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_C$ 对时间求导得:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}'}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{L} - \vec{L}_C) = \frac{d}{dt}(\vec{L} - \vec{r}_C \times \vec{P}) \\ &= \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{d\vec{r}_C}{dt} \times \vec{P} - \vec{r}_C \times \frac{d\vec{P}}{dt} \\ &= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \mathbf{0} - \vec{r}_C \times \sum \vec{F}_i \\ &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_C) \times \vec{F}_i \\ &= \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \vec{M}'_{\text{外}}\end{aligned}$$



$$\vec{M}'_{\text{外}} = \frac{d\vec{L}'}{dt}$$

质心系中的（对质心）角动量定理：质点系受外力对质心产生的合外力矩等于质心参考系中该质点系对质心的角动量变化率。

下面将惯性系与质心系中的角动量定理做对比：

惯性系中角动量定理

$$\vec{M}_{\text{外}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

质心系中角动量定理

$$\vec{M}'_{\text{外}} = \frac{d\vec{L}'}{dt}$$

这里质心系可以不是惯性系！

这再次显示了质心的特殊之处！

质点系对质心的角动量守恒定律：

当质点系受外力对质心的合外力矩 $\vec{M}'_{\text{外}} = 0$ 时， $\vec{L}' = \text{常矢量}$

注： 质心系中的功能原理，
质心系中机械能守恒定律，
也都与惯性系中形式相同
(不管质心系是否为惯性系)。

所以，有时选择质心系来讨论问题有它的优点。

[例题] 质量为 m_1 和 m_2 的两个质点，其位矢和速度分别为 \vec{r}_1 、 \vec{v}_1 和 \vec{r}_2 、 \vec{v}_2 ，试求：

(1) 每个质点相对于它们质心的动量。

(2) 两质点相对于它们的质心的角动量。

[解] (1) 在质心系中两质点的速度分别为

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{u} \quad \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}$$

其中 $\vec{u} = \vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$

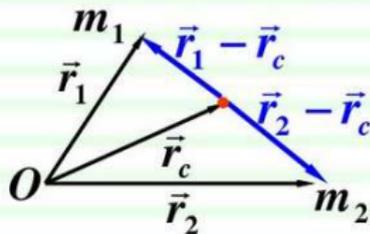
$$\therefore \vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{u} = \mu \vec{u}$$

$$\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{u} = -\mu \vec{u}$$

$$(2) \quad \therefore \vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_c = \frac{m_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_c = \frac{m_1 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2}$$



故两质点相对于它们质心的角动量为

$$\vec{L}_c = \vec{r}'_1 \times \vec{p}'_1 + \vec{r}'_2 \times \vec{p}'_2$$

$$= \frac{m_2 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2} \times (\mu \vec{u}) + \left(-\frac{m_1 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2}\right) \times (-\mu \vec{u})$$

$$= \mu \vec{r}_{12} \times \vec{u} = \vec{r}_{12} \times (\mu \vec{u})$$

6.3 势函数的对称性与物理量守恒

6.3.1 势函数

设作用在质点上的力 $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$ 的各分量满足关系

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

这时的 \vec{F} 称为有势力，而 $U = U(x, y, z, t)$ 称为相应于 \vec{F} 的势函数。

引入梯度符号的直角坐标表示 $\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ ，有

$$\vec{F} = -\nabla U, \quad \vec{g} = -\nabla \phi \quad \circ$$

U 只是地点及时间的函数。物体在有势力场中受到的力只与地点及时间有关，而与运动状态（如速度等）无关；如果势函数进一步还与时间无关， $U = U(x, y, z)$ ，这时的力场称为**定常有势力场**。

静电场同样适用。

6.3.2 势函数的时间-空间平移对称性和能量-动量守恒定律

(1) 设势函数 $U = U(x, y, z, t)$ 具有时间平移对称性, 则势函数必然与时间无关, $U = U(x, y, z)$, 即为定常有势力场。质点的运动方程为

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} = -(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z})U = -\nabla U$$

由于

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + U \right) = m \sum_{i=1}^3 v_i \frac{dv_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \left(m \frac{dv_i}{dt} - F_i \right) = 0$$

得到结论: **如势函数具有时间平移对称性, 则质点的机械能守恒。**

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow E = \text{不变量}$$

这就建立了势函数时间平移对称性和物体能量守恒之间的重要关系。

(2) 设势函数具有沿某个方向（如x方向）的平移对称性，即**势函数U与x坐标无关**，则质点动量的x方向分量守恒。

$$\frac{dp_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \rightarrow p_x = \text{不变量}$$

如：重力场的势函数 **$U = mgz$** ，与 **t, x, y** 无关。因此，在重力场中运动的质点的机械能以及x方向和y方向的动量分量守恒。

上面得到的势函数的空间—时间对称性与质点运动的动量—能量守恒之间的关系可以统一写成 $\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \rightarrow p_i = \text{不变量}$ ， $i = 1, 2, 3, 4$
这里 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ct)$ ； $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c})$ 。

物理规律的时间无关性 —— 运动过程中能量守恒。

物理规律的地点无关性 —— 运动过程中动量守恒。

能量守恒是物理规律不随时间改变的结果，动量守恒是物理规律不随空间改变的结果。

6.3.3 势函数的空间旋转对称性与角动量守恒

在柱坐标系中, $U=U(\rho, \varphi, z, t)$; $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ 。

如果 U 与角度 φ 无关, 则角动量 \vec{l} 的 z 分量, 即动量 \vec{p} 对 z 轴的矩守恒。

记 $l_3 = \vec{k} \cdot \vec{l}$ 为 \vec{l} 的 z 分量, 则

$$\frac{dl_3}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{k} \cdot \vec{l}) = \vec{k} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{k} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{F} \cdot (\vec{k} \times \vec{r})$$

将 $\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$ 代入, 并注意 $\vec{k} \times \vec{r} = x\vec{j} - y\vec{i}$

$$\begin{aligned} \frac{dl_3}{dt} &= -\nabla U \cdot (x\vec{j} - y\vec{i}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) \cdot (x\vec{j} - y\vec{i}) \\ &= -\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) \cdot (x\vec{j} - y\vec{i}) \end{aligned}$$

因 U 与 φ 无关, 所以有 $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) \cdot (x\vec{j} - y\vec{i})$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j}\right) \cdot (x\vec{j} - y\vec{i})$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho} (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x\vec{j} - y\vec{i})$$

$$= 0 \Rightarrow l_3 = \text{不变量}$$

即所要证明的结论。

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}$$

引力是有心力并满足平方反比规律，势函数 $U=U(r)$ 只是距离 r 的函数。在选择柱坐标 (ρ, φ, z) 时， z 轴的方向是可以任意选择的，而势函数 $U = U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) = U(\rho, z)$ 与 φ 无关，所以在引力场中质点角动量的 z 分量 l_3 是守恒的。 **又由于任何过力心的轴都可以充当 z 轴，因此动量矩在任意轴上的分量都是守恒的。** 所以 **角动量也是守恒的。**

守恒定律总结

空间平移对称



动量守恒



力



动量定理

空间旋转对称



角动量守恒

对称性破缺

力矩



角动量定理

时间平移对称



机械能守恒



功



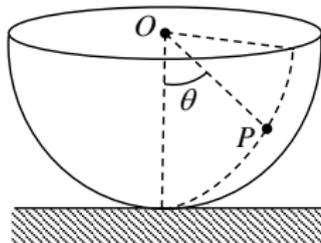
动能定理

补充例题（角动量）：

一半径为 R 、内侧光滑的半球面固定在地面上，开口水平且朝上。一小滑块在半球面内侧最高点处获得沿球面的水平速度，其大小为 v_0 ($v_0 \neq 0$)。求滑块在整个运动过程中可能达到的最大速率。重力加速度大小为 g 。

解：

以 O 为原点，因重力、支持力产生的力矩都是水平方向，故竖直方向角动量分量守恒。带入初始条件，有（这里球坐标 θ ，是原题图中 θ 的余角）：



$$\sin^2 \theta \dot{\phi} = \frac{v_0}{R}$$

以及机械能守恒

$$\frac{1}{2} v^2 + gR(-\cos \theta) = \frac{1}{2} v_0^2$$

其中

$$v^2 = (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) R^2$$

从守恒式可以看出, θ 越小则 v 越大, 为求速度最大值, 考虑 $\dot{\theta} = 0$ 时, θ 处于极值的情况。由以上各式得, 此时:

$$2gR \cos \theta = v_0^2 \cot^2 \theta$$

舍弃 $\cos \theta = 0$ 的初始情况, 得:

$$2gR(1 - \cos^2 \theta) = v_0^2 \cos \theta$$

化为

$$\cos^2 \theta + \frac{v_0^2}{2gR} \cos \theta - 1 = 0$$

求解得 (舍弃绝对值大于 1 的负根)

$$\cos \theta = -\frac{v_0^2}{4gR} + \sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2}{4gR}\right)^2}$$

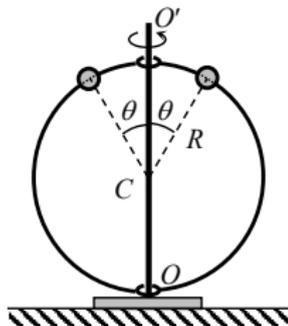
由机械能守恒式, 得最大速度

$$\begin{aligned} v_m &= \sqrt{v_0^2 + 2gR \cos \theta} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(v_0^2 + \sqrt{16g^2R^2 + v_0^4} \right)} \end{aligned}$$

如图所示, 半径为 R 、质量为 m_0 的光滑均匀圆环, 套在光滑竖直细轴 OO' 上, 可沿 OO' 轴滑动或绕 OO' 轴旋转. 圆环上串着两个质量均为 m 的小球. 开始时让圆环以某一角速度绕 OO' 轴转动, 两小球自圆环顶端同时从静止开始释放.

(1) 设开始时圆环绕 OO' 轴转动的角速度为 ω_0 , 在两小球从环顶下滑过程中, 应满足什么条件, 圆环才有可能沿 OO' 轴上滑?

(2) 若小球下滑至 $\theta = 30^\circ$ (θ 是过小球的圆环半径与 OO' 轴的夹角) 时, 圆环就开始沿 OO' 轴上滑, 求开始时圆环绕 OO' 轴转动的角速度 ω_0 、在 $\theta = 30^\circ$ 时圆环绕 OO' 轴转动的角速度 ω 和小球相对于圆环滑动的速率 v .



解:

(1) 因圆环光滑, 故机械能守恒

$$2 \times \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

$$+2mgR(\cos\theta - 1) + \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}^2 - \omega_0^2) = 0$$

其中，圆环的转动惯量 $I = \frac{1}{2}MR^2$ 。

重力和支持力的力矩都在水平方向，故竖直方向的角动量分量守恒，即

$$2 \times mR^2 \sin\theta \dot{\varphi} \cdot \sin\theta + I(\dot{\varphi} - \omega_0) = 0$$

每个小球所受作用力（ $-\vec{e}_r$ 分量）：

$$N + mg \cos\theta = mR\dot{\theta}^2 + m(R \sin\theta)\dot{\varphi}^2 \cdot \sin\theta$$

环向上运动的条件为 $2 \times N \cos\theta > Mg$
化为

$$6m \cos^2\theta - 4m \cos\theta + M$$

$$+ \frac{MR\omega_0^2 \cos\theta}{2g} \left(\left(\frac{M}{M + 4m \sin^2\theta} \right)^2 - 1 \right) < 0$$

(2) 当 $\theta = 30^\circ$ 时，可得 $N = \frac{Mg}{2 \cos\theta} = \frac{Mg}{\sqrt{3}}$ ，从而从作用力方程求得

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 &= \frac{1}{mR} (N + mg \cos\theta) \\ &= \left(\frac{M}{3m} + \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{3}g}{R} \end{aligned}$$

由角动量守恒式得 $\left(\frac{m}{M} + 1 \right) \dot{\varphi} = \omega_0$ ，代入机械能守恒式，得

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{2Mg(2\sqrt{3}M + 9\sqrt{3}m - 12m)}{3mR(m + 2M)}}$$

以及

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \left(\frac{m}{M} + 1\right) \dot{\phi} \\ &= (m + M) \sqrt{\frac{2g(2\sqrt{3}M + 9\sqrt{3}m - 12m)}{3mMR(m + 2M)}}\end{aligned}$$

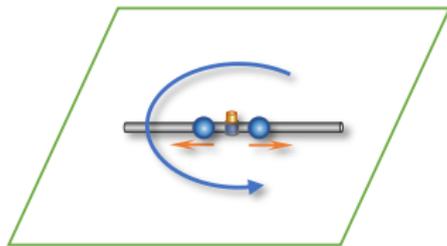
例题：

质量皆为 m 的两个珠子可在光滑轻杆上自由滑动，杆可在水平面内绕过 O 点的光滑竖直轴自由转动。原先两珠子对称地位于 O 点两侧，与 O 相距为 L ，在初始时，对杆施加冲量矩，使杆在极短时间内即以角速度 ω_0 绕竖直轴旋转，求 t 时刻杆的角速度 ω ，角加速度 β 及两珠与 O 点的距离 r 。

解：使用极坐标，由角动量守恒得

$$2mr^2\dot{\theta} = 2mL^2\omega_0$$

由机械能守恒得



$$2 \times \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = 2 \times \frac{1}{2} mL^2\omega_0^2$$

由以上两式得到

$$\dot{r}^2 = L^2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{L^2}{r^2}\right)$$

考虑珠子一直是远离 O 点的, 即有

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{L^2}{r^2}}} = L\omega_0 dt$$

积分得

$$\sqrt{r^2 - L^2} = L\omega_0 t$$

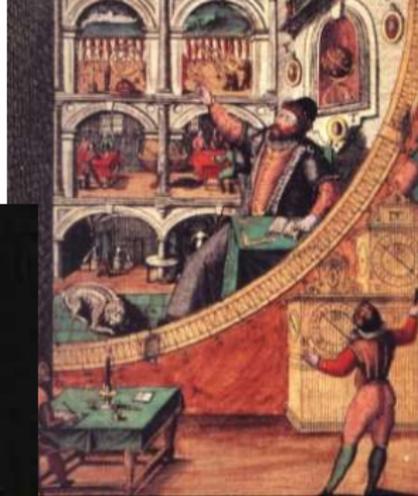
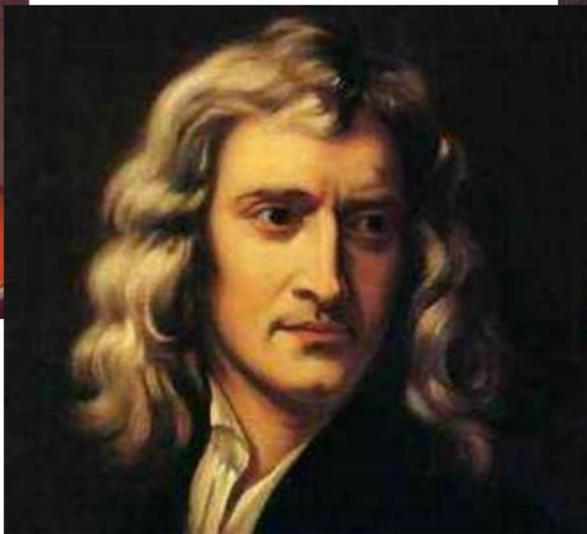
化为

$$r = L\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}$$

从而

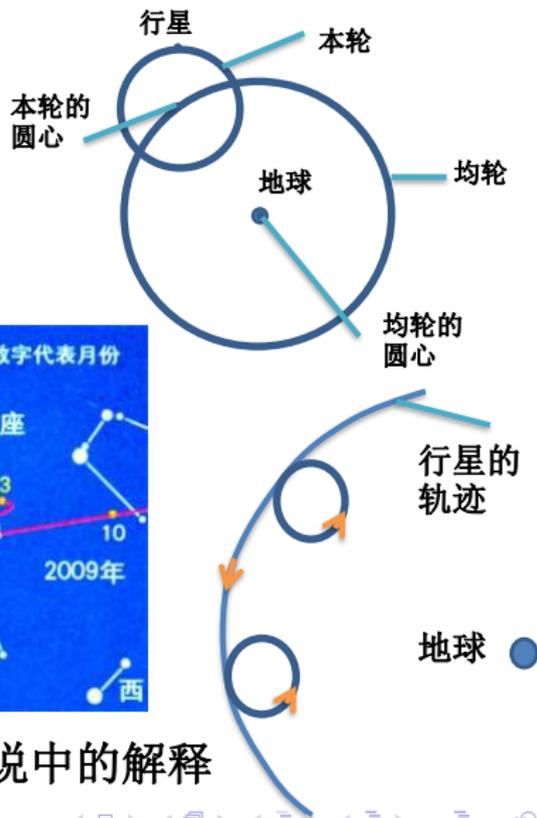
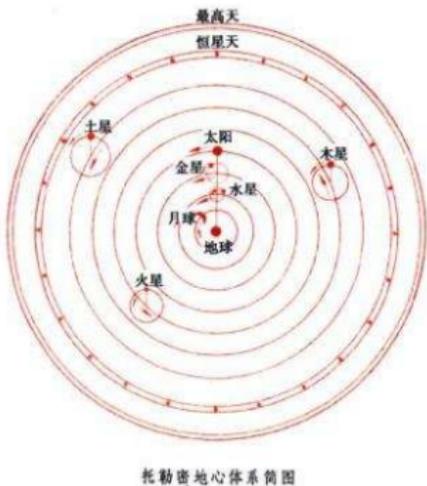
$$\omega = \dot{\theta} = \frac{L^2 \omega_0}{r^2} = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2 t^2}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\omega_0^3 t}{(1 + \omega_0^2 t^2)^2}$$

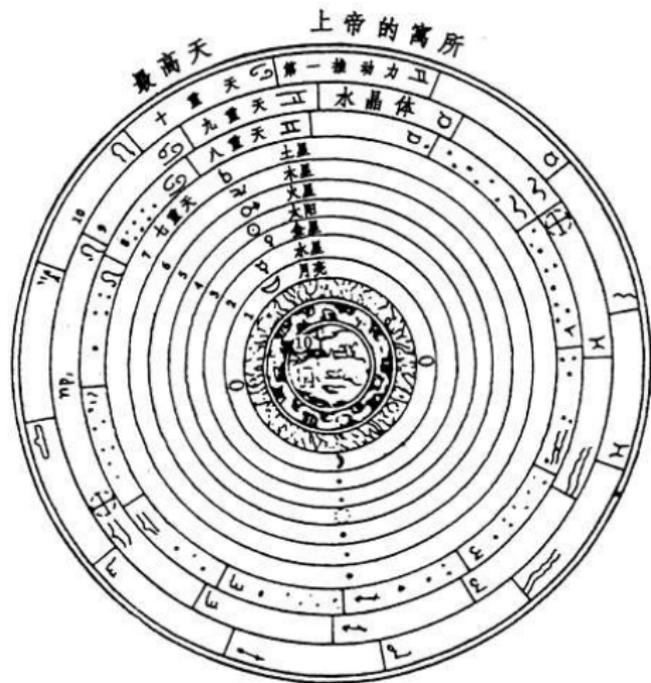


7.1 开普勒行星运动三定律与万有引力定律的建立

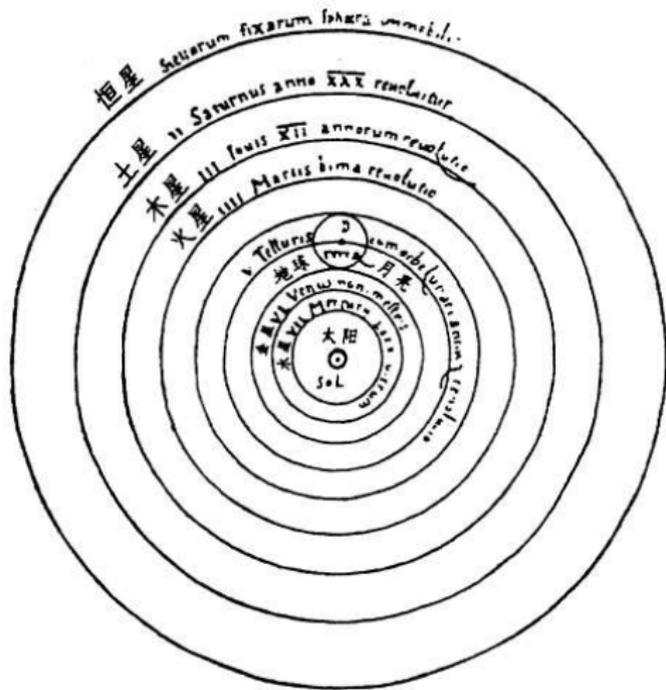
7.1.1 行星运动的描述



火星的退行以及在地心说中的解释

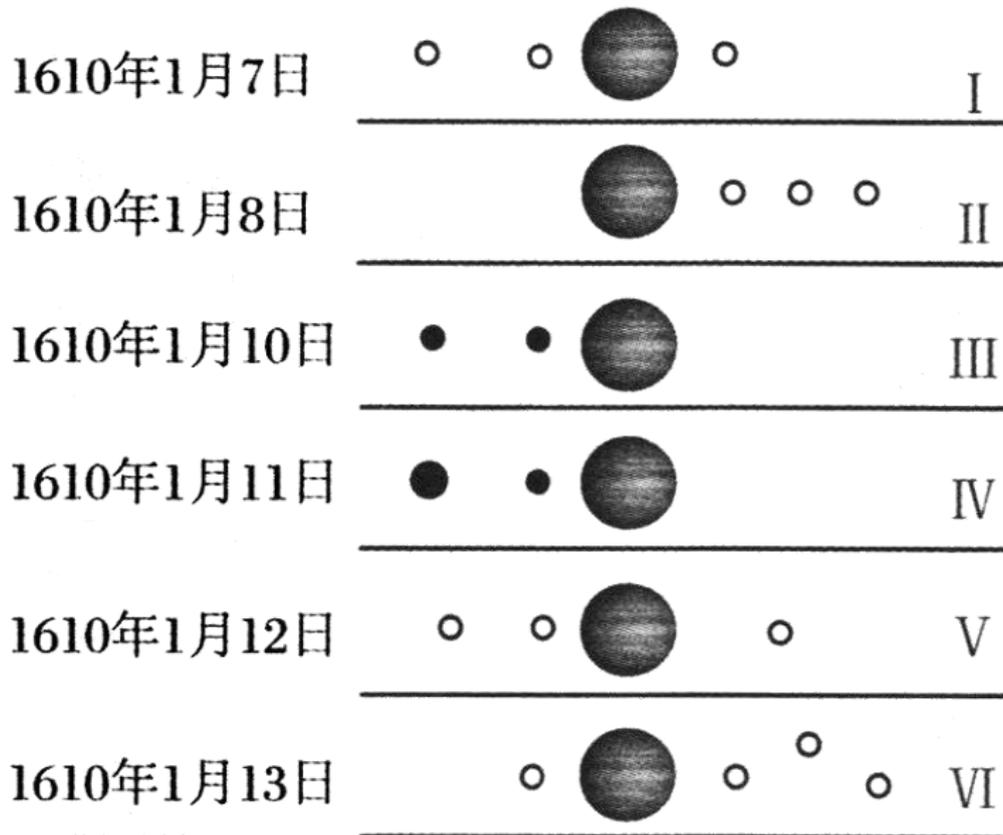


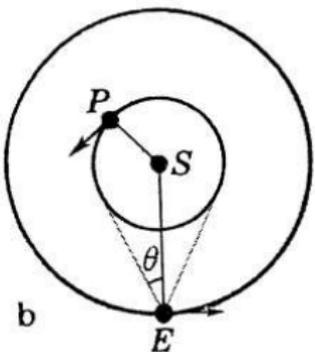
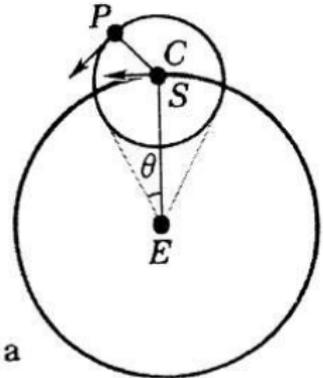
宇宙的地心体系



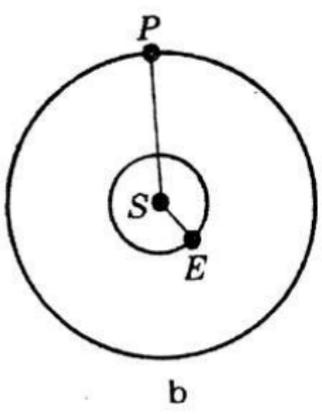
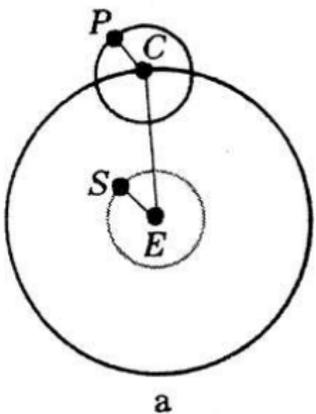
哥白尼的日心体系

伽利略将他刚刚制作的望远镜指向木星，发现：

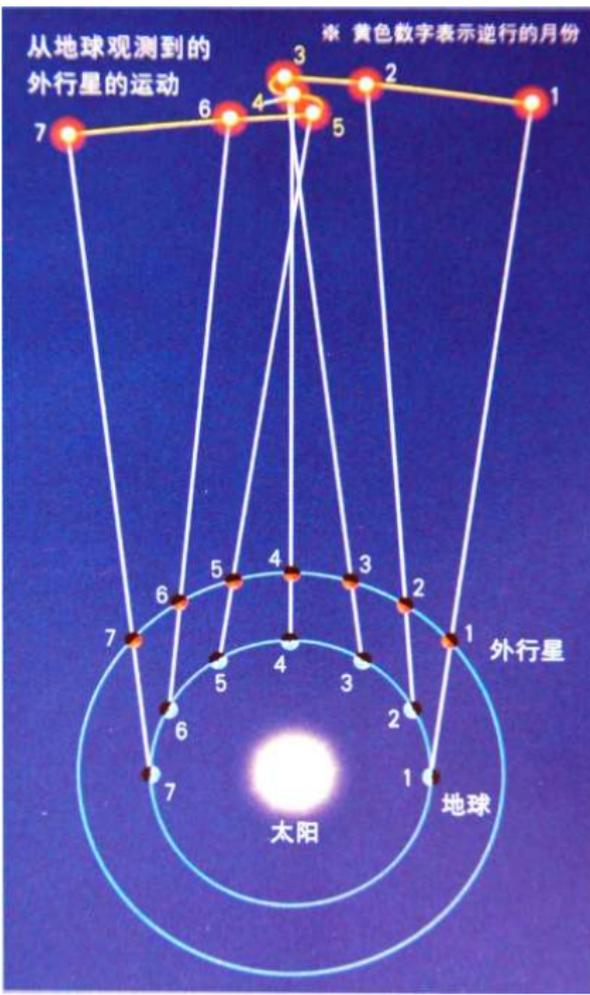




从地心系和日心系看内行星

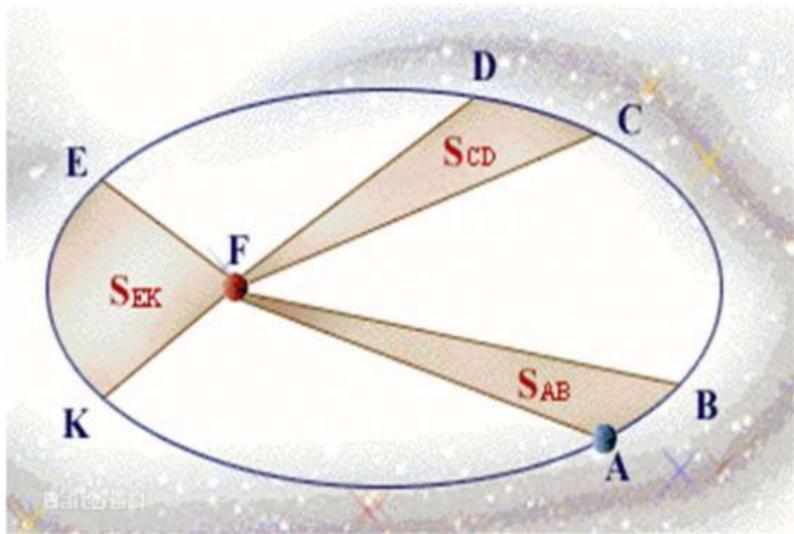


从地心系和日心系看外行星



7.1.2 开普勒行星运动三定律

- 所有行星都沿着椭圆轨道运行，太阳则位于这些椭圆的一个焦点上。这称**轨道定律**。
- 任何行星到太阳的连线在相同的时间内扫过的面积相同。这称为**面积定律**。

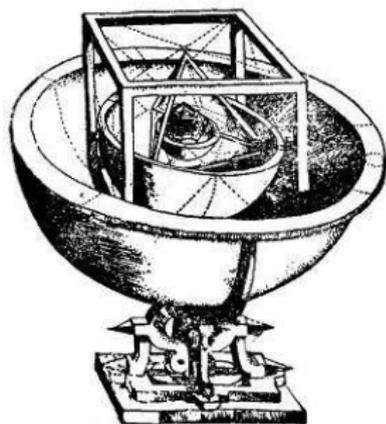


•任何行星绕太阳运动的周期的平方与该行星的椭圆轨道的半长轴的立方成正比，即

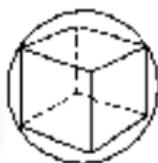
$$T \propto r^{\frac{3}{2}}$$

式中， T 是行星运动的周期； r 是椭圆轨道的半长轴。
这称为**周期定律**。

局限性：
周期定律是宇宙
的对称与和谐的表现



开普勒的太阳系



(a)土星



(b)木星



(c)火星

(d)地球

(e)金星

(f)水星

根据行星运动的这三条定律，牛顿得出了万有引力定律。

7.1.3 万有引力定律及其建立

具有质量 m_1 和 m_2 且相隔距离 r 的任意两个质点之间的力是沿着连接两质点的直线而作用的吸引力，其大小为：

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

式中 G 是对所有的质点对都具有相同数值的普适常数。

这就是牛顿的万有引力定律。

假设行星轨道是圆形。则行星的加速度为 $a = \frac{v^2}{r}$

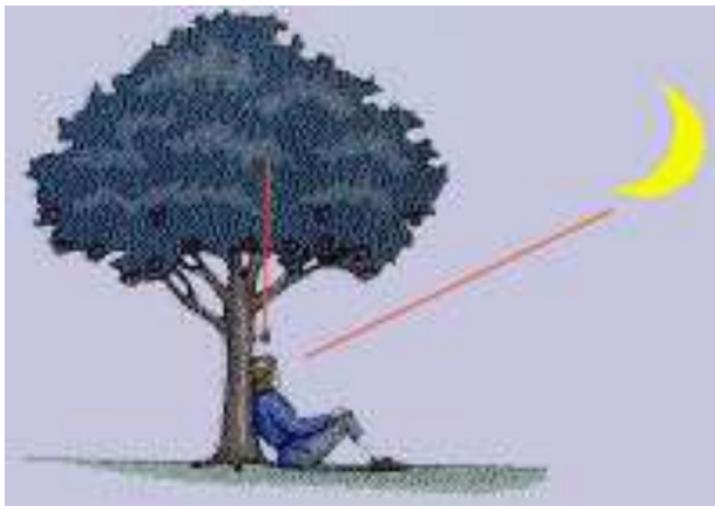
根据开普勒第三定律 $T \propto r^{3/2}$ ，又 $v = \frac{2\pi r}{T}$ ，故 $v \propto \frac{r}{r^{3/2}} = \frac{1}{r^{1/2}}$

代入 $a = \frac{v^2}{r}$ ，得 $a \propto \frac{1}{r^2}$ ，或 $F = ma \propto \frac{m}{r^2}$

其中 m 是行星的质量。取比例系数为 α ，则得 $F = m \frac{\alpha}{r^2}$

显然 α 应取决于太阳的性质。由此牛顿得到第一个重要结果：如果太阳引力是行星运动的原因，则这种力应和 r 的平方成反比。

进一步，牛顿认为这种引力是万有的、普适的、统一的，即所有物体之间都存在这种引力作用，称之为万有引力。这一步是关键性的。



“这使牛顿想到：两种力可能有着相同的起源。这一事实，距今已有几百年了，这在今天已经成为老生常谈了，以致我们很难想象出当时牛顿的魄力与胆识。为了把行星绕太阳或月亮绕地球的运动，想象为一个“降落”过程，就像石头从手中扔出去后的降落一样，遵从着相同的规律和在相同的力的作用下，这需要多么惊心的想象力啊！”

——玻恩(M. Born, 1882 ~ 1970)

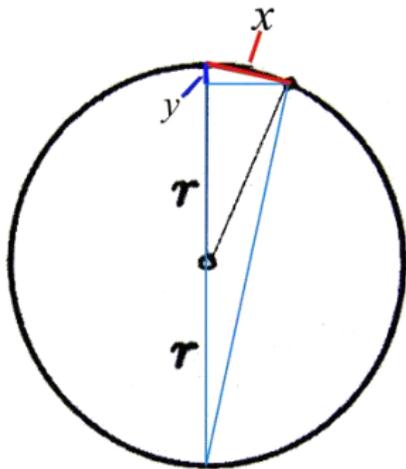
现在讨论一秒钟内月球落向地球的距离。

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{2r} \quad y = \frac{x^2}{2r}$$

$$r \approx 3.84 \times 10^5 \text{ km}, \quad x \approx 1.02 \times 10^3 \text{ m},$$

所以, $y \approx 1.36 \times 10^{-3} \text{ m}$, 即 1/20 吋。

$$\frac{6400 \text{ km}}{3.84 \times 10^5 \text{ km}} = \frac{1}{60} \quad \frac{1.36 \times 10^{-3} \text{ m}}{4.9 \text{ m}} \approx \frac{1}{3600}$$



地球对月球的引力可以写为 $F_{\text{地} \rightarrow \text{月}} = m_{\text{月}} \frac{\alpha'}{l^2}$

反过来，月球对地球的引力为 $F_{\text{月} \rightarrow \text{地}} = m_{\text{地}} \frac{\alpha''}{l^2}$

根据牛顿第三定律， $F_{\text{地} \rightarrow \text{月}}$ 与 $F_{\text{月} \rightarrow \text{地}}$ 大小相等，即 $\frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{m_{\text{地}}}{m_{\text{月}}}$

因此，其解为 $\alpha' = Gm_{\text{地}}$ ， $\alpha'' = Gm_{\text{月}}$

这样，前面两式可以统一为 $F = G \frac{m_{\text{地}} m_{\text{月}}}{l^2}$

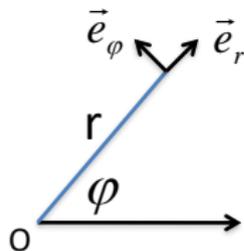
这就是牛顿的**万有引力定律**。

由开普勒三定律推导万有引力定律（极坐标系）

- 平面极坐标

在所研究的平面内，取固定于参照物的一点为原点，称为极点，过此极点取一条射线，称为极轴，方向始于极点。这就组成了平面极坐标系。

质点在此坐标系下的位置由极径 r 和极角 φ 决定。 r 是质点所在位置与极点间的距离， φ 是质点的连线与极轴的夹角，表示质点相对于极轴方位。 r, φ 统称质点的极坐标。



- 由开普勒三定律推导万有引力定律

开普勒第一定律：行星绕太阳公转的轨道为椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上。

以太阳为极点建立极坐标系，则行星轨道表示为：

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

开普勒第二定律：行星面积速度守恒，即：

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{r^2 d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{常量} \implies r^2 \dot{\theta} = h(\text{常量})$$

开普勒第三定律：轨道半长轴的立方与行星绕太阳运动周期的平方成正比，即：

$$\frac{a^3}{T^2} = K(\text{常量})$$

极坐标系中加速度表示为： $\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$

极坐标系中加速度的表达

有：
$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta \qquad \vec{e}_\theta = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) = (-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta) = (-\vec{i} \cos \theta - \vec{j} \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

由此可得：

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

• 极坐标系中加速度表示为： $\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$

其中： $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$

因为开普勒第二定律 $r^2 \dot{\theta} = h$ (常量), 有 $a_\theta = 0$,

所以： $\vec{F} = ma_r \vec{e}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r$

假设 $u = \frac{1}{r}$, 有： $\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta}$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{d}{d\theta} \left(h \frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{h}{r^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

有： $F = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m(-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{h^2}{r^3}) = -mh^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$

带入开普勒第一定律

$$u = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{p} \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{e \cos(\theta - \theta_0)}{p}$$

则有：

$$F = -\frac{mh^2u^2}{p} = -\frac{h^2}{p} \frac{m}{r^2}$$

由面积速度

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{\sqrt{a^3/K}} = \pi \sqrt{pK}$$

得：

$$h = 2 \frac{dS}{dt} = 2\pi \sqrt{pK}$$

则有：

$$F = -\frac{h^2}{p} \frac{m}{r^2} = -4\pi^2 K \frac{m}{r^2}$$

其中 K 为太阳系常量，与行星的性质无关。

由牛顿第三定律得，太阳也受到行星给它的引力，而且大小与行星受到的太阳的引力相等。而由上可知，引力的大小又与太阳的质量成正比。因此，行星受到的太阳的引力大小，与行星和太阳质量的乘积成正比。

综上所述，将引力作用推广到任意两个物体，则两物体之间的万有引力表示为

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r$$

7.1.4 万有引力定律的天文学验证

一条定律的重大价值并不在于总结了前人根据大量观察得到的种种事实，而是由此定律**预言并证实**了前所未知或未被人们认识的事实。

牛顿利用引力定律对月球运动的分析是一个预测，并与事实相符，**统一了天上、地上两类不同运动的概念**。

利用引力定律可以精确计算得到行星按椭圆轨道运行和解释了许多以前不能理解的现象，如潮汐、地球的椭圆形、行星撕裂、天王星对椭圆轨道的“偏离”。等现象。

1994年7月16日至22日，苏梅克-列维9号彗星断裂成21个碎块（其中最大的一块宽约4公里），以每秒60公里的速度撞向木星



7.2 引力的讨论

7.2.1 惯性质量与引力质量

$$m_{\text{月}} \frac{v_{\text{月}}^2}{r} = G \frac{m_{\text{月}} M_{\text{日}}}{r^2}, \quad m_{\text{地}} \frac{v_{\text{地}}^2}{r} = G \frac{m_{\text{地}} M_{\text{日}}}{r^2}$$

左边反映物体惯性的大小，所以称为**惯性质量**。

右边反映物体之间引力的大小，所以称为**引力质量**。

$$(m_{\text{月}})_{\text{惯}} \frac{v_{\text{月}}^2}{r} = G \frac{(m_{\text{月}})_{\text{引}} M_{\text{日}}}{r^2}, \quad (m_{\text{地}})_{\text{惯}} \frac{v_{\text{地}}^2}{r} = G \frac{(m_{\text{地}})_{\text{引}} M_{\text{日}}}{r^2}$$

要求 $v_{\text{月}} = v_{\text{地}}$ ，等价于 $\frac{(m_{\text{月}})_{\text{惯}}}{(m_{\text{月}})_{\text{引}}} = \frac{(m_{\text{地}})_{\text{惯}}}{(m_{\text{地}})_{\text{引}}}$

这就是我们处理地月相互关系时可以忽略太阳作用的根据。

推广，得到对任何物体 A 都有 $\frac{(m_A)_{\text{惯}}}{(m_A)_{\text{引}}} = \frac{(m_{\text{地}})_{\text{惯}}}{(m_{\text{地}})_{\text{引}}}$

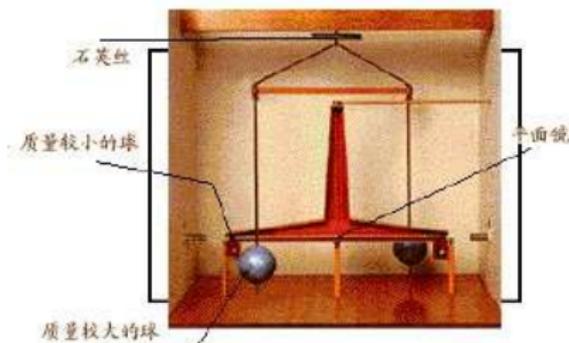
因此，任一物体的惯性质量与引力质量之比都应等于一普
适常数，即 $\frac{m_{\text{惯}}}{m_{\text{引}}} = \text{普适常数}$

显然，只要单位选择适当，总可以使这个普适常数为1。

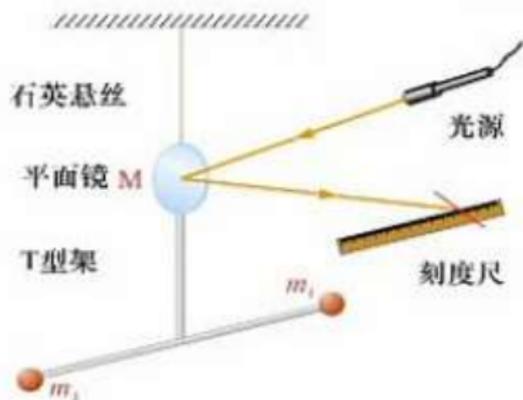
存在普适常数是引力所具有的一个基本性质，即**引力的几何性**。

7.2.2 万有引力常数G值及其测量

为了确定万有引力常数 G 的数值，要测量两个已知质量的物体之间的引力。1798年卡文迪许作了第一个精确的测量，用的是扭秤法。后人又用多种方法(包括天平法、扭秤周期法、扭秤共振法等)进行过测量。二百多年来，测量的结果在 $6.658 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 到 $6.754 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 之间，最新的结果是 $6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$



卡文迪许扭秤实验



7.2.3 引力的几何性

$$\frac{m_{\text{惯}}}{m_{\text{引}}} = \text{普适常数}$$

存在普适常数是引力所具有的一个基本性质，即**引力的几何性**。

• **开普勒第三定律**：任何行星绕太阳运动的周期的平方与该行星的椭圆轨道的半长轴的立方成正比，即 $T \propto r^{3/2}$

• **万有引力定律**： $\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{a} = -G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r$ **广义相对论**

• **电磁力**： $\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$ **是否涉及“物性”**

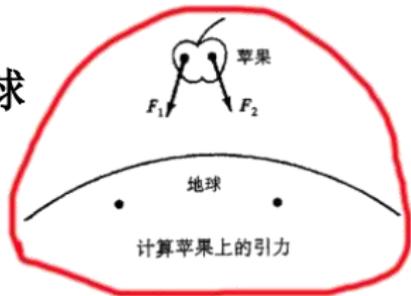
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{v} \times \vec{B}}{m}$$

7.3 引力的计算

7.3.1 多质点体系的万有引力

牛顿的万有引力定律公式是对两个**质点**而言的。牛顿在发展引力理论过程中，重要的一步是把月球运动和落体运动统一起来。在这个分析中，一个关键的问题是牛顿认为地球表面落体运动的加速度可以写为： $g = G \frac{M_{\text{地}}}{R^2}$ ，其中 R 是地球半径。

这里有一个很大的疑问，**为什么能把地球和落体间的距离看为 R ？**如果说在讨论月球运动时，把地球和月球看作质点是一个足够好的近似，那么讨论落体运动时，把地球看作质点显然是不合理的。为了研究这个问题，我们必须来讨论一下**多质点体系的引力问题**。



现在我们先来讨论一种简单情况。在原点有一质量为 m 的质点，空间分布着质量分别为 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i$ 的若干个质点，它们的位置矢量分别为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_i$ 。为了求质点 m 所受到的引力，必须把引力公式作些推广。根据引力公式可知：

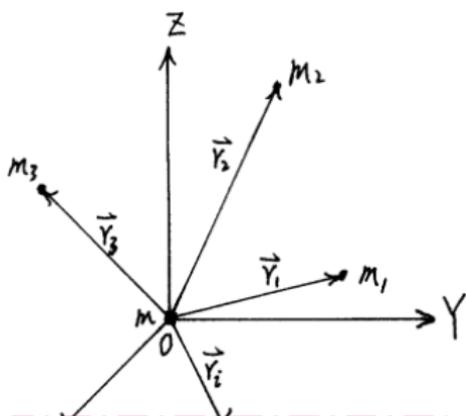
$$\text{第一个质点对 } m \text{ 的引力为 } \vec{F}_1 = G \frac{mm_1}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1}$$

$$\text{第二个质点对 } m \text{ 的引力为 } \vec{F}_2 = G \frac{mm_2}{r_2^2} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

.....

.....

$$\text{第 } i \text{ 个质点对 } m \text{ 的引力为 } \vec{F}_i = G \frac{mm_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$



引力的线性叠加性

因此，可以自然地认为， m 所受到的总力为

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i$$

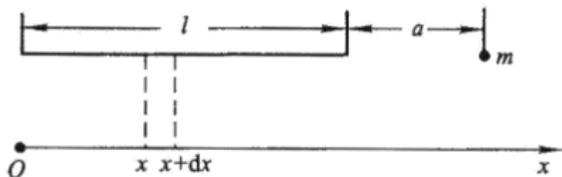
$$= \sum_I G \frac{mm_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

7.3.2. 连续体的万有引力

以均质细杆对质点的引力为例。

“微元”

细杆质量为 M ，长为 l ，距细杆的一端 a 处有一质量为 m 的质点，计算细杆对质点 m 的引力。



把细杆分成许多小段(微元)，每一小段可看作质点。细杆上 x 至 $x+dx$ 的一小段可看作质量为 Mdx/l 的质点，对质点 m 的引力为

$$dF = -\frac{GMm dx}{l(l-x+a)^2}$$

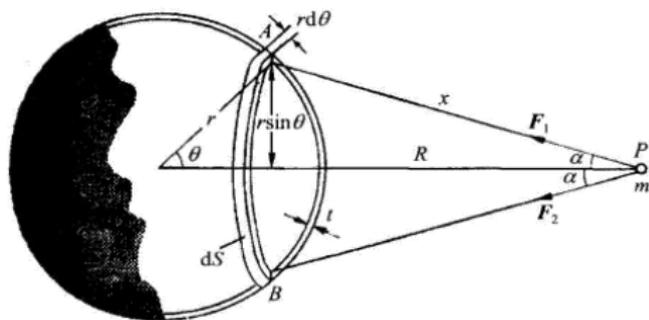
求合力只需计算代数和

$$F = \int dF = -\int_0^l \frac{GMm dx}{l(l-x+a)^2} = -\frac{GMm}{l} \frac{1}{l-x+a} \Big|_0^l = -\frac{GMm}{l} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right)$$

结果是 $F = -GMm/a(l+a)$ 。

均匀球壳与质点的万有引力势能

考虑一密度均匀的薄球壳，它的厚度比它的半径 r 小得多。求它与在距球心 R 处的 P 点的质点 m 的引力势能。



考虑质量为 M 的球壳上一环带，它长为 $2\pi(r\sin\theta)$ ，宽为 $rd\theta$ ，距 P 点为 x 。则环带的面积为 $dS = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ ，质量 $dm = M dS / (4\pi r^2)$ 。因此，整个球壳对 P 点处的质点 M 的引力势能为

$$\begin{aligned} U &= -\int_S \frac{Gm \cdot dm}{x} = -\int_0^\pi \frac{GmM \cdot \sin\theta d\theta}{2\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta}} \\ &= -\frac{GmM}{2Rr} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta} \Big|_0^\pi = \frac{GmM}{2Rr} (|R-r| - R-r) \end{aligned}$$

$$\text{当 } R < r \text{ 时} \quad U = -\frac{GmM}{r}$$

$$\text{当 } R > r \text{ 时} \quad U = -\frac{GmM}{R}$$

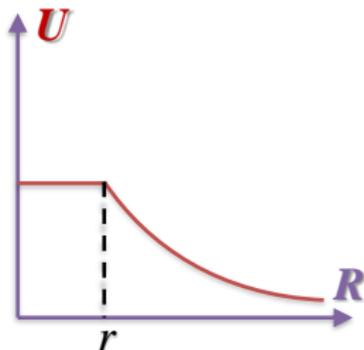
对于质量球对称分布的星球，可视为多个球壳嵌套而成处理。特别是P点位移星球外， M 即为星球总质量。

由球对称引力势能，可得引力：

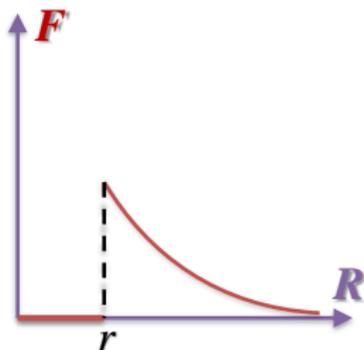
$$F = -\frac{dU}{dR}$$

$$\text{当 } R < r \text{ 时} \quad F = 0$$

$$\text{当 } R > r \text{ 时} \quad F = -\frac{GmM}{R^2}$$

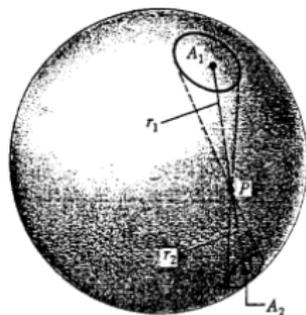
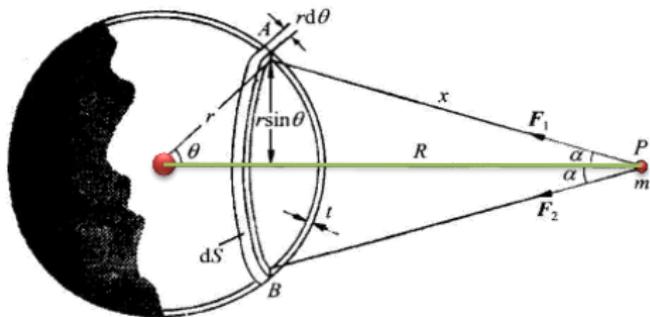


引力势能图



引力图

这个结果表明：**一个密度均匀的球壳对球壳外一质点的引力，等效于它的所有质量都集中于它的中心时的引力。**



球壳内点质量上力的确定

球壳对内部任一质点的引力为零。

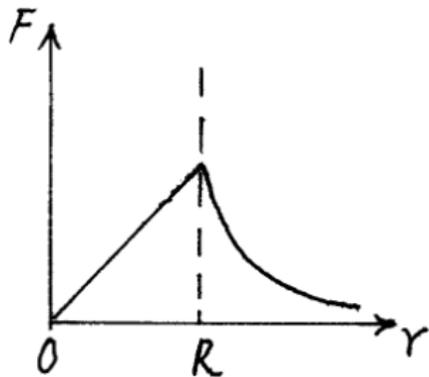
这个结果非常有意义。

均匀球体的万有引力

对于半径为 R ，密度为 ρ 的均匀球体，可以推出万有引力公式：

$$F = G \frac{4}{3} \pi R^3 \rho m / r^2 = G \frac{m \frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{r^2}, \quad r > R$$

$$F = G \frac{4}{3} \pi r^3 \rho m / r^2 = G m \frac{4}{3} \pi r \rho, \quad r < R$$



7.6 万有引力的几个重要应用

在分析了几个守恒定律之后，我们再回过头来以其为基础，讨论一下万有引力的一些重要应用。

7.6.1 第一宇宙速度

这时，地球和物体之间的距离可用地球半径 R 代替，根据牛顿第二定律和万有引力定律，得

$$G \frac{M_{\text{地}} m}{R^2} = m \frac{v^2}{R} = mg$$

所以 $v = \sqrt{G \frac{M_{\text{地}}}{R}}$ 或 $v = \sqrt{Rg}$

用 $R \approx 6400 \text{ km}$ ， $g = 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ 代入，得到 $v \approx 7.9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ ，
即第一宇宙速度的数值。

7.6.2 第二宇宙速度

要使物体能逃离地球，不再返回，它的速度应更高，即至少要具有**第二宇宙速度**的值才行。

因为无限远处的势能为0，根据引力场中的机械能守恒，其离开地球时的机械能至少应该为 $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0$ 。所以有

$$v = \sqrt{2G \frac{M_{\text{地}}}{R}} \approx 11 \text{ km/s}$$

★ 对于一个质量为 M ，半径为 r 的体系，同样可以规定它的

“第一宇宙速度”为 $v_1 = \sqrt{G \frac{M}{r}}$

“第二宇宙速度”为 $v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

如果有一个引力**体系的第二宇宙速度等于光速**， $\sqrt{\frac{2GM}{r}} = c$ 。

若体系的半径 $r < \frac{2GM}{c^2}$ ，它的**第二宇宙速度就要大于光速**。这

就是说，在这种物体上发射的光都不能克服引力的作用，最终

一定要落回到该体系上来。简言之，这种物体根本不可能有光

发射出去，因此，我们不能看到它，故称为“**黑洞**”。因此，

$r_g = \frac{2GM}{c^2}$ 也是一个关键性的物理量，称为“**引力半径**”。

地球质量约为 $6 \times 10^{24} \text{kg}$ ，可求得引力半径 $r_g \approx 0.9$ 厘米。

下面我们来看一个较实际的例子。

考虑一个球形体系，半径为 r ，其中物质均匀分布，密度为 ρ ，则体系的质量为 $M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$

如果这个体系的半径恰好达到自己的引力半径，则

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = \frac{8\pi G r^3 \rho}{3c^2}$$

亦即引力半径为 $r_g = \left(\frac{3c^2}{8\pi G \rho}\right)^{\frac{1}{2}}$

说明对于生活在密度为 ρ 的环境中的人，他不可能把光发射到超出 r_g 的范围。

我们的宇宙的密度平均约为 $\rho \approx 10^{-29} \text{g/cm}^3$ ，因此，可求得引力半径为 $r_g \approx 10^{28} \text{cm} \approx 10^{10}$ 光年，也就是说，我们不可能把光发射到 10^{26} 米之外，我们称这个尺度为**宇宙大小**，或**宇宙半径**。

7.6.3 第三宇宙速度

从地面发射的火箭如具有“**第三宇宙速度**”，那就不仅能够脱离地球，而且可以逃逸出太阳系。

火箭如果能够逃出太阳系，机械能至少应等于0。由于机械能守恒，在地球这样的距离上， E 也至少等于零，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R_1} = 0$$

这里 R_1 为地球与太阳的距离。由上式解得 $v = \sqrt{2GM / R_1} \approx 42.2 \text{ km/s}$

但**这里的42.2km/s**应当是已脱离了地球引力范围时的速率。那么火箭从地面出发时相对于地球的速率应当多大呢？

选用“静止”参考系。火箭已脱离了地球引力范围时的动能应为 $\frac{1}{2}m(42.2\text{km/s})^2$ ，其时火箭-地球势能为0。应当沿地球公转方向发射火箭，以最大限度地利用地球的公转。火箭以相对速率 v' 从地面出发时的动能为 $\frac{1}{2}m(v'+29.8)^2$ ，其时火箭-地球势能为 $(-mgR^2/\rho)|_{\rho=R}$ ， R 为地球半径。由机械能守恒定律，

$$\frac{1}{2}m(v'+29.8\text{km/s})^2 - \frac{mgR^2}{\rho}\Big|_{\rho=R} = \frac{1}{2}m(42.2\text{km/s})^2$$

由此求得

$$v' = (\sqrt{42.2^2 + 11.2^2} - 29.8)\text{km/s} = (42.5 - 29.8)\text{km/s} = 12.7\text{km/s}$$

但这结果是完全错误的。

必须计及地球动能的改变，才可以得出正确的结果。

选取“地球-火箭”系的质心坐标系。在质心坐标系中，地球的动能始终为零。火箭已脱离了地球引力范围时的动能应为

$$\frac{1}{2}m(42.2\text{ km/s} - 29.8\text{ km/s})^2$$

其时地球-火箭势能为零。火箭以相对速率 v' 从地面出发时的动能为 $\frac{1}{2}mv'^2$ ，地球-火箭势能为 $(-mgR^2/\rho)|_{\rho=R}$ 。根据机械能守恒定律，

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{mgR^2}{\rho} \Big|_{\rho=R} = \frac{1}{2}m(42.2\text{ km/s} - 29.8\text{ km/s})^2$$

由此解得第三宇宙速度

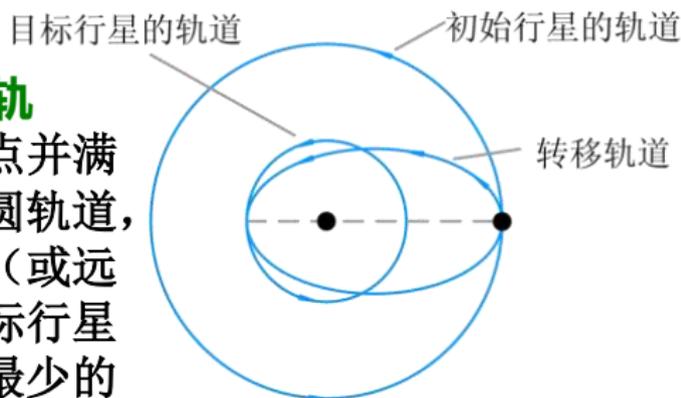
$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{(42.2^2 - 29.8^2) + 11.2^2} \text{ km/s} \\ &= \sqrt{12.4^2 + 11.2^2} \text{ km/s} \\ &= 16.7 \text{ km/s} \end{aligned}$$

7.6.4. 万有引力在飞船轨道设计中的应用

转移轨道

如何设计飞船的轨道才能使其顺利航行到别的行星上去？最简单的解决方案是用蛮力，更巧妙和更经济实用的方法：**利用太阳的万有引力和行星运动的基本规律。**

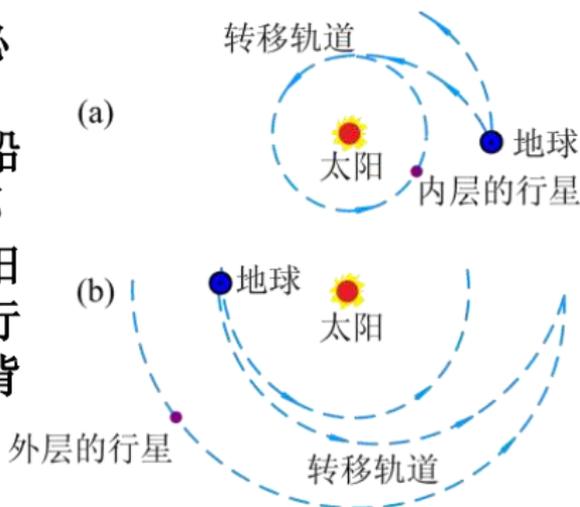
“转移轨道”，又叫**“霍曼轨道”**，是一个以太阳为一个焦点并满足开普勒行星运动定律的半椭圆轨道，远日点（或近日点）和近日点（或远日点）分别位于地球轨道和目标行星轨道上。这种模式的航行需要最少的燃料，所以在实际的飞船轨道设计中非常重要。



转移轨道为宇宙航行提供了经济的方案，但也施加了限制。我们不能在任意时候把飞船送到任何行星上去；必须当地球和目标星球处在合适的相对位置上才能发射，这种状态叫做**发射机会**。

当出现发射机会时，飞船开始发往一个绕地球的临时轨道，这个轨道叫做**停放轨道**。

即使在发射机会期间，飞船也必须在它停放轨道上的正确地点发射。这个地点叫做**发射窗**。如果宇宙飞船要到内层的一个行星(水星或金星)那里去，那么当飞船处于地球朝向太阳的一面时出现发射窗。要向外层的行星发射，那么必须当飞船接近地球背向太阳的一面时才能离开停放轨道。

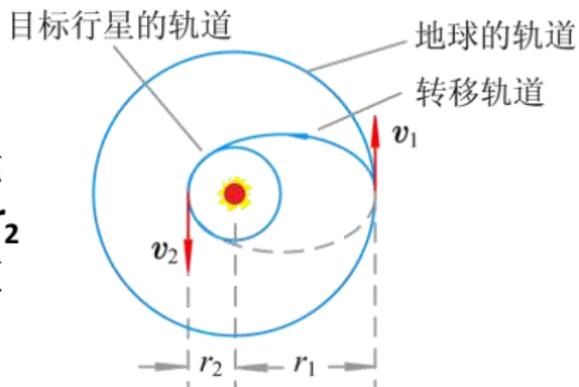


现在从数学上来说明计算转移轨道的步骤。为了简化计算，同时也为了突出物理思想，假设两个行星的轨道都是圆的。我们还忽略了地球引力的作用，以及飞船在停放轨道上的速率。

前面讨论过，转移轨道是半个椭圆，两个行星分别处于近日点和远日点。要画出这样一条轨道，第一步就是要找出椭圆长轴的长度。如果 r_1 和 r_2 是两个行星轨道的半径，则转移轨道长轴的长度为

$$2a = r_1 + r_2$$

下一步计算飞船进入转移轨道必须具有的速率。任何绕太阳运行的物体都具有能量 $E = -G \frac{mM_0}{2a}$ 一旦知道了 $2a$ ，总的能量就确定了。



因为飞船在离开地球公转轨道时的能量为 $E = \frac{1}{2}m v_1^2 - G \frac{mM_0}{r_1}$

不难解出其进入转移轨道所需的速率 v_1 。从地球的轨道速率可以精确地得出把飞船送进转移轨道所必须的速率的增加或减小。

如果飞船飞向内层行星，会因为更加靠近太阳而速率增加；如果飞向外层行星，则会速率降低。不管是哪种情况，飞船的速率都必须改变以适应目标行星的公转速率。所以需要知道飞船到达目标行星轨道时的速率 v_2 。因为在转移轨道上动量矩守恒，有 $m v_1 r_1 = m v_2 r_2$ ，从这个方程可以解出 v_2 。

从开普勒第三定律可以求出宇宙飞船沿着转移轨道行进的时间；它是周期 T 的一半。利用开普勒第三定律，有 $\frac{T^2}{T_E^2} = \frac{a^3}{a_E^3}$ ，其中 T_E 是地球轨道的周期， a_E 是其半长轴的长度，即地球到太阳的平均距离； T 和 a 则是转移轨道的对应值。这样就可以找出适当的发射机会。

- [例题]** 假设地球和金星的公转轨道都是圆的，金星轨道的半径为 0.72AU ，公转周期和速率分别为 225 天和 $35.0\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ 。试确定：
- ①地球和金星之间转移轨道长轴的长度；
 - ②飞船进入转移轨道所必须的速率；
 - ③当宇宙飞船到达金星时所需的速率变化；
 - ④旅行的时间和
 - ⑤发射时金星与地球的相对位置。

[解] ①如图，转移轨道长轴的长度是

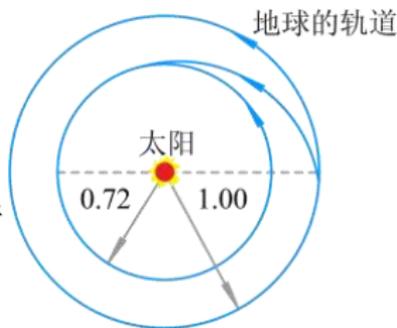
$$2a = 0.72\text{AU} + 1.00\text{AU} = 1.72\text{AU} = 1.72r_E$$

②假设开始时飞船的速率与地球的公转速率相同。飞船随地球运动的速率为

$$v_0 = (GM_0 / r_E)^{1/2} = 29.8\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$$

能量为 $E_0 = -G \frac{mM_0}{2r_E} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{mM_0}{r_E}$

转移轨道的能量 $E = -G \frac{mM_0}{1.72r_E} = \frac{1}{2}mv_1^2 - G \frac{mM_0}{r_E}$



v_1 是宇宙飞船从地球轨道进入转移轨道所必须的速率。

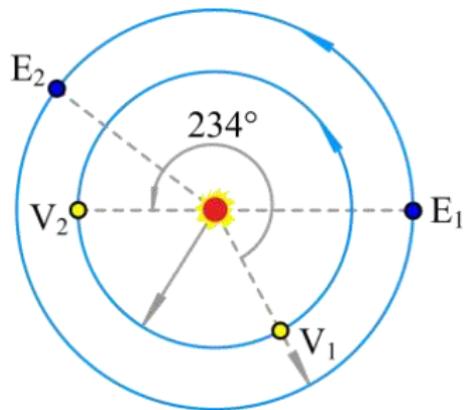
可以解出 $v_1 = (0.84GM_0 / r_E)^{1/2} = 0.91v_0 = 27.2\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$

所以需要火箭反向的冲力使飞船的速率减小**2.6km·s⁻¹**。

③利用动量矩守恒计算当宇宙飞船到达金星轨道时的速率 v_2 。因为动量矩守恒, $mv_1r_E = mv_2r_V$, 其中 r_V 是金星轨道的半径。我们可求出 $v_2=37.8\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ 。金星的公转速率是 $35.0\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, 所以飞船需将速度减小 **2.8km·s⁻¹**。

④根据开普勒第三定律 $\frac{T^2}{T_E^2} = \frac{a^3}{a_E^3}$, 可以求出转移轨道的周期 T 。因此, 旅行时间(周期 T 的一半) $t \approx 0.4\text{年} \approx 146\text{天}$ 。

⑤因为金星的公转周期为**225天**，当飞船花**146天**向金星行进时，金星移动了 $(146/225) \times 360^\circ = 234^\circ$ 。因此，如图所示，当飞船离开地球轨道进入转移轨道时，金星应该在点**V₁**上，该点与到达点**V₂**之间相隔**234°**，相比地球落后 **$234^\circ - 180^\circ = 54^\circ$** 。在这个过程中，地球转了 $(146/365) \times 360^\circ = 144^\circ$ ，到了图上的**E₂**点。



[例题] 假设火星的公转轨道是个圆，半径为 $1.52r_E$ ，公转速率是 $24.1\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ ，试设计一条自地球到火星的转移轨道。

[解] 分析与处理方法与前例类似，只是飞船要去的是一条更高的轨道，意味着在发射和到达时速率要更大一些。

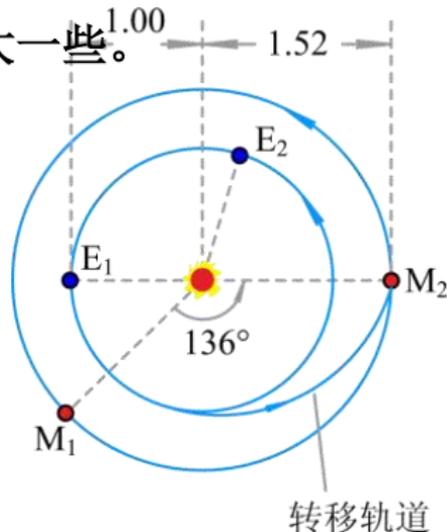
如图，转移轨道长轴的长度为 $2.52r_E$ 。利用它确定转移轨道的能量并让能量等于

$$E = \frac{1}{2}m v_1^2 - G \frac{M_0 m}{r_E}$$

即可求出飞船进入转移轨道所必需的速率

$$v_1 = 1.10v_0 = 32.8\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$$

地球的公转速率为 $29.8\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ ，所以飞船需要把速率提高 $3.0\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

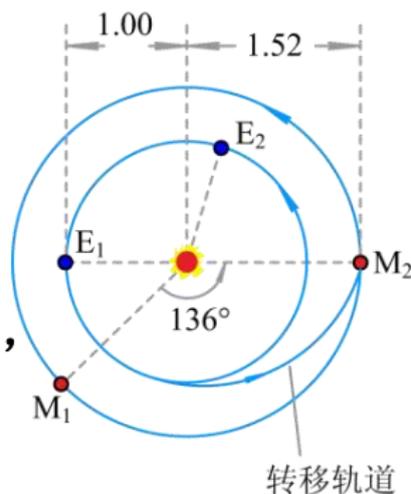


由转移轨道的动量矩守恒 $m v_1 r_E = m v_2 r_M$ ，得到飞船到达火星轨道时的速率 $v_2 = 0.72 v_0 = 21.6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 。因火星的公转速率是 $24.1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ，所以当飞船到达这一点时需要把速率提高 $2.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

由开普勒第三定律可以计算出转移轨道的周期 T ，而旅行时间就是 T 的一半，所以

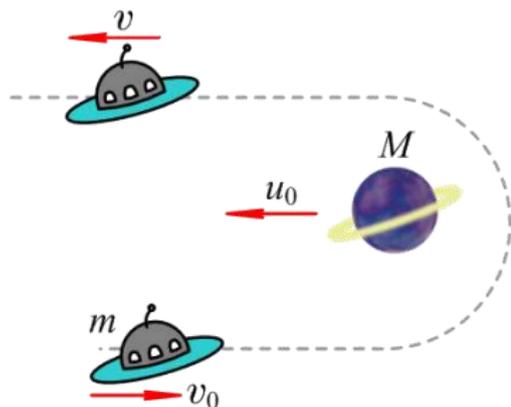
$$t = \frac{1}{2} (1.26)^{3/2} \text{ 年} \approx 0.71 \text{ 年} \approx 259 \text{ 天}$$

火星公转周期是687天，在飞船花259天奔向火星的同时，火星转过了 $(259/687) \times 360^\circ = 136^\circ$ 。因此，当火星处在其轨道上点 M_1 处，也就是地球前方 $180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$ 时就有了发射机会。可以证明，当宇宙飞船到达时，地球处在点 E_2 处，与它发射时的位置成 255° 角。

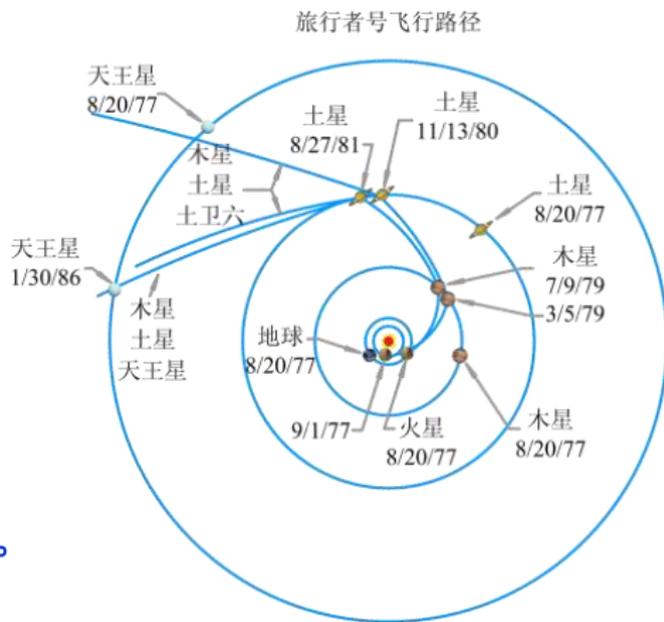


弹弓效应与引力援助

人们发现，当飞船迎向某星体运动，在星体万有引力的作用下从星体一侧绕行半周后从另一侧以更高的速率返回，这种现象被称为“**弹弓效应**”。所以在设计飞船轨道时要考虑利用一些行星的引力场为飞船提供额外的推动力，这种技术叫做“**引力援助**”。在现代航天技术中，“引力援助”是用来增大探测器速率的一种经济而有效的方法。

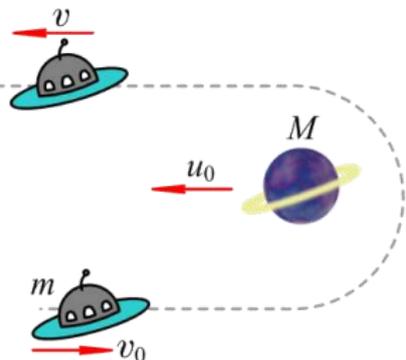


1977年，美国发射旅行者2号一次性旅行到外层的四个行星——木星、土星、天王星和海王星。在设计轨道时就采用了“**引力援助**”技术，利用这些行星自己的引力为旅行者2号提供额外的推动力。通过来自木星的引力援助，旅行者2号可以在12年内访问土星、天王星和海王星。如果直接向着土星发射飞船，那么旅行就要花6年多。在没有引力援助的情况下去天王星需要16年，可能永远到不了海王星。



弹弓效应其实也属于广义的碰撞，可以采用处理碰撞问题的方法来进行分析。大速率的行星能够给飞船更强的引力援助。

[例题] 如图，土星 M 以相对于太阳的轨道速率 $u_0=9.69.6\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ 运行；一飞船 m 以相对太阳 $u_0=10.49.6\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率迎着土星飞行。由于土星的吸引力，探测器绕过土星，沿与原来相反的方向离去，求它离开土星后的速率 v 。



[解] 飞船接近又离开土星的这一过程可以当作碰撞来处理。速度的变化可通过公式

$$v_1 = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

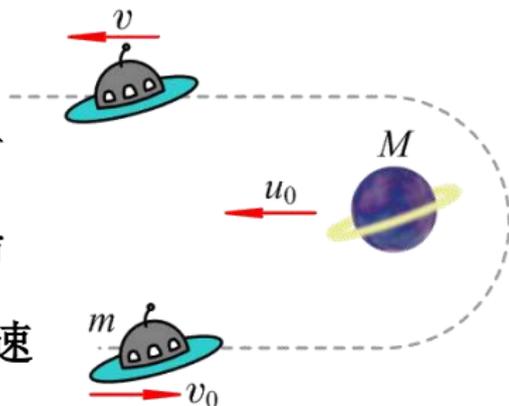
求得，其中 $e=1$ 。由于土星的质量 m_2 远大于飞船的质量 m_1 ，所以 m_1 可忽略，得到飞船离开土星后的速度为

$$v_1 = -u_1 + 2u_2 = -10.4 - 2 \times 9.6 = -29.6(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$$

这说明，飞船从土星旁绕过后由于弹弓效应而速率增大了。

我们也可以在质心系中分析这一过程。

因为土星的质量比飞船大很多，可以把质心看作就在土星上。由于是和一质量非常大的物体发生弹性碰撞，飞船离开质心(即土星)的速度就等接近时的速度 $10.4+9.6=20.0(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$ 。而质心(土星)相对于太阳运行的速度为 $9.6\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ ，所以最终飞船相对于太阳的速度为 $20.0+9.6=29.6(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$ ，与前面解出的结果相同。



7.7 质点在有心力场中的运动

7.7.1 研究有心力问题的基本方程

设质点的质量为 m ，在有心力 $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ 作用下，其运动方程为：

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\hat{r}$$

由于有心力是保守力，故在有心力场中质点运动的一般特征为：

1. 角动量守恒。运动必定在一个平面上且掠面速度守恒。
2. 质点的机械能守恒。（因为保守力场可以定义势能）

显然，讨论质点在有心力场中的运动，选平面极坐标系比较方便。沿径向和横向的分量式为：

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r), \quad m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = C$$

角动量守恒

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{r} \times m\dot{r} = r\hat{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta})$$

令： $L = mh$ 其中 h 为掠面速度的两倍

$$\because h = r^2\dot{\theta}, \quad \therefore m\left(\dot{r}dr - \frac{h^2}{r^3}dr\right) = f(r)dr$$

$$\begin{aligned} \dot{r}dr &= \frac{dr}{dt}dr \\ &= dr \frac{dr}{dt} = r\dot{r}dr \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}_0^2 + \frac{mh^2}{2r_0^2} + U(r_0) = E$$

机械能守恒

机械能守恒 $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r) = E$

角动量守恒 $h = r^2\dot{\theta}$

有心力问题的基本方程

7.7.2 有心力问题的定性处理，有效势能与轨道特征

设在有心力作用下，质点的动量矩 $L=mh$ ，总能量为 E ，则

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} + U(r) = E$$

有效势能

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{mh^2}{2r^2} + U(r)$$

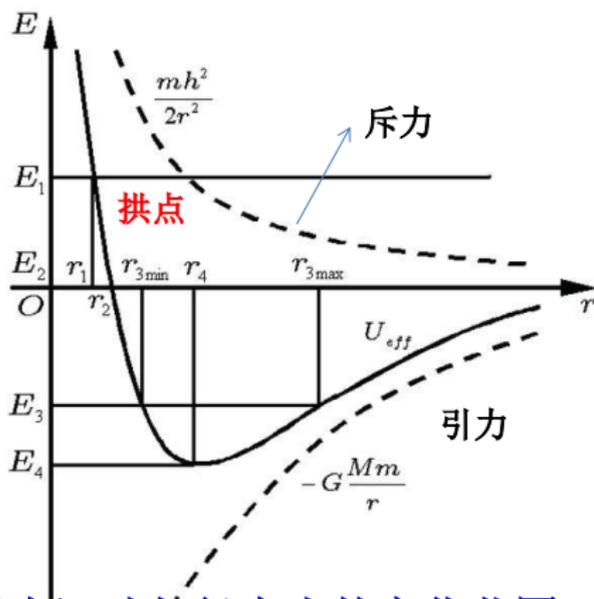
下面就引力场情况对轨道特征作些定性讨论。

对于在力源 M 的万有引力作用下的质点，其势能为

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{mh^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r} = E$$



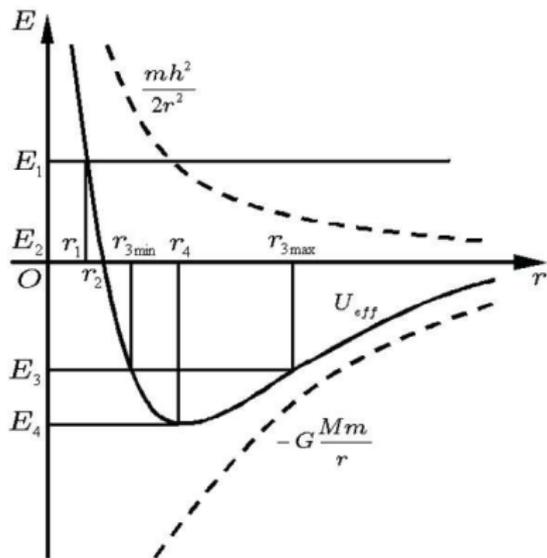
利用有效势能曲线可以讨论质点运动矢径大小的变化范围，此范围取决于质点的总能量 E 。代表总能量为 E 的水平线与有效势能曲线相交的点叫做**拱点**。

在**拱点**处， r 取极值，径向速度 $v_r = \dot{r} = 0$ ，只有角向速度 v_θ ，

$$r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{mh^2}{2E} = 0 \Rightarrow r, \quad E = E_1 > 0$$

在 $r \rightarrow \infty$ 时，等效斥力势能趋于0的速度比 $U(r)$ 的绝对值快，故有效势能曲线当 $r \rightarrow \infty$ 时是从负的一侧趋于0的。所以 $E > 0$ 和 $E = 0$ 时水平线与有效势能曲线只有一个交点，在这里 r 取极小值；另一头轨道是开放的， r 延伸到无穷远。

$$r_{\min} < r < +\infty$$



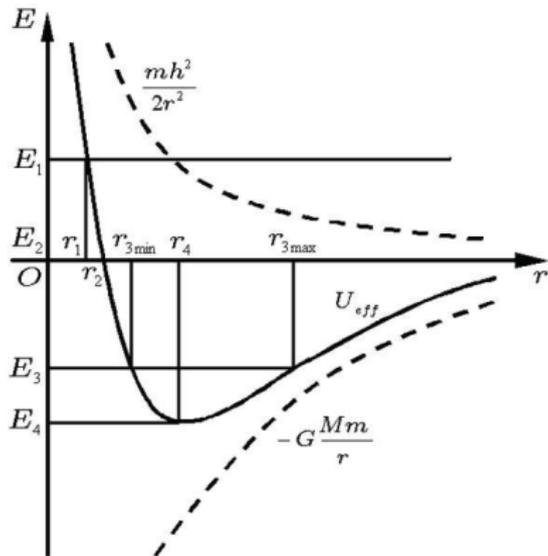
$$(a) \quad r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{mh^2}{2E} = 0 \Rightarrow r, \quad E = E_1 > 0$$

分析质点的运动轨道

由方程得到一个正根：

$$r_1 = -\frac{GMm}{2E} + \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E}}$$

可以证明能量为 $E = E_1$ 的质点运行轨道为一双曲线 C_1



$$(b) \quad r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{mh^2}{2E} = 0 \Rightarrow r, \quad E = E_2 = 0$$

$$r_2 = \frac{h^2}{2GM}$$

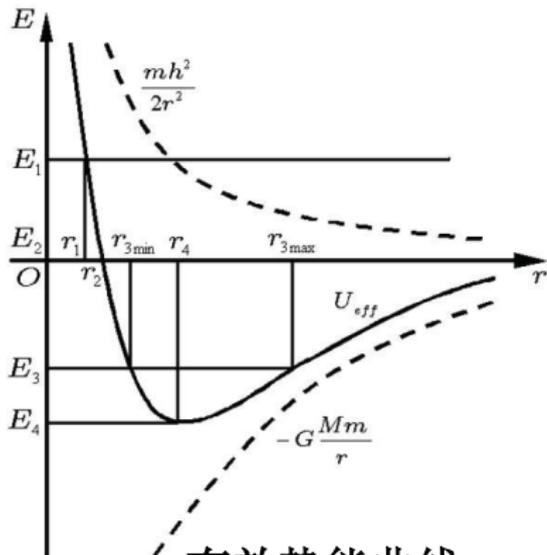
可以证明能量为 $E = E_2$ 的质点运行轨道为一抛物线 C_2

$$(c) \quad r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{mh^2}{2E} = 0 \Rightarrow r, \quad E = E_3 < 0$$

$$\Rightarrow r_{3\max} = -\frac{GMm}{2E} + \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E}}$$

$$r_{3\min} = -\frac{GMm}{2E} - \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E}}$$

可以证明，对应的轨道为一椭圆 C_3 ，力心为椭圆的一个焦点



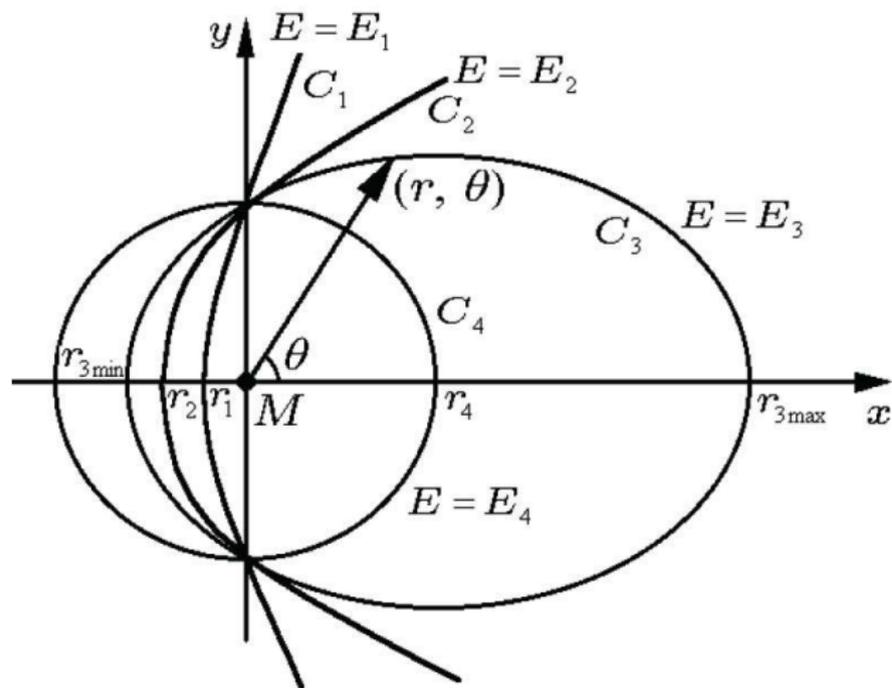
$$(d) \quad r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{mh^2}{2E} = 0 \Rightarrow r, \quad E = E_4$$

有效势能曲线
最小值

$$r_4 \text{ 为方程重根, 即 } \left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E} = 0 \Rightarrow E_4 = -\frac{G^2 M^2 m}{2h^2}$$

$r_4 = \frac{h^2}{GM}$ 即质点 m 到力心 M 的距离恒定不变，对应轨道为圆

各能量下，质点在有心力场中的轨道



7.7.2 有心力问题的定量处理及轨道问题

1、运动的详尽情况

有心力问题的基本方程

角动量守恒 $h = r^2 \dot{\theta}$

机械能守恒 $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m h^2}{2 r^2} + U(r) = E$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2U(r)}{m} - \frac{h^2}{r^2}} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2U(r)}{m} - \frac{h^2}{r^2}}} = \pm dt$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} r &= r(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned}$$

2、轨道问题

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r), \quad h = r^2\dot{\theta}$$

做变换 $u = \frac{1}{r}$ $\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta}$

得到
$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{hdr}{r^2 d\theta} = hu^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) = -h \frac{du}{d\theta} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-h \frac{du}{d\theta} \right) = hu^2 \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right) = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \end{cases}$$

代入,
$$-mh^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - mh^2 u^3 = f$$

$$\Rightarrow h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{f}{m}$$

即轨道的微分方程, 称为比内公式

$$h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{f}{m}$$

只要知道 f 的表达式，可以求得轨道方程式；反之，如果已知轨道方程，可以求得 $f(r)$ 的表达式

例：万有引力 $f = -\frac{GMm}{r^2} = -GMmu^2$

那么，比内公式为：
$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} = \frac{1}{r_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \left(u - \frac{1}{r_0} \right)}{d\theta^2} + u - \frac{1}{r_0} = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{r_0} + \frac{\varepsilon}{r_0} \cos(\theta - \theta_0) \Rightarrow r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

离心率 ε 与总能量关系

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E_0$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow \dot{r} = -h \frac{du}{d\theta}$$

$$r^2\dot{\theta} = h \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = hu^2 \Rightarrow r^2\dot{\theta}^2 = h^2u^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\left[\left(h \frac{du}{d\theta}\right)^2 + h^2u^2\right] + V(r)$$

$$u = A \cos \theta + \frac{GM}{h^2}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -A \sin \theta$$

$$V = -\frac{GMm}{r} = -GMmu$$

$$\varepsilon = A \frac{h^2}{GM} = \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \frac{h^2}{G^2 M^2}}$$

$$\frac{1}{2}mh^2\left(A^2 + \frac{G^2 M^2}{h^4}\right) = E + \frac{G^2 M^2}{h^2} \Rightarrow A = \frac{GM}{h^2} \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \frac{h^2}{G^2 M^2}}$$

轨道问题

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

$\varepsilon = 0$	圆
$0 < \varepsilon < 1$	椭圆
$\varepsilon = 1$	抛物线
$\varepsilon > 1$	双曲线

$$\begin{aligned}\varepsilon &= A \frac{h^2}{GM} \\ &= \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \frac{h^2}{G^2 M^2}}\end{aligned}$$

例 求使一个粒子在 $r = a(1 + \cos \varphi)$ 的轨道上运动的有心力

解

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 + \cos \varphi)}$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi}{a(1 + \cos \varphi)^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{\cos \varphi}{a(1 + \cos \varphi)^2} + \frac{2 \sin^2 \varphi}{a(1 + \cos \varphi)^3}$$

$$= \frac{1 + \cos \varphi}{a(1 + \cos \varphi)^2} - \frac{1}{a(1 + \cos \varphi)^2} + \frac{2(1 - \cos \varphi)}{a(1 + \cos \varphi)^2}$$

$$= u - au^2 - 2u + \frac{4}{a(1 + \cos \varphi)^2}$$

$$= u - au^2 - 2u + 4au^2 = -u + 3au^2$$

$$F = -mh^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right)$$

$$= -mh^2u^2(-u + 3au^2 + u) = -\frac{3mah^2}{r^4}$$

例 一个质量为 m 的质点在有心力 $F = -\frac{k}{r^3}$ (k 为正值常量) 作用下运动, 选择总能量 E 和动量矩 L 的什么值时, 它的轨道有 $r = ae^{b\varphi}$ (a 、 b 为常量) 形式。

解

$$F = -\frac{k}{r^3} \Rightarrow V(r) = -\frac{k}{2r^2}$$

$$r = ae^{b\varphi} \Rightarrow \dot{r} = abe^{b\varphi} \dot{\varphi} = br\dot{\varphi} = \frac{bh}{r}$$

$$E(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + V(r)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{b^2h^2}{r^2} + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{k}{2r^2} \quad E = E(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{b^2h^2}{r^2} + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{k}{2r^2} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{k}{m(b^2 + 1)}, \quad L = mh = \sqrt{\frac{mk}{b^2 + 1}}$$

比内公式
$$h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{f}{m}$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a} e^{-b\varphi}, \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{b}{a} e^{-b\varphi}, \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{b^2}{a} e^{-b\varphi} = b^2 u$$

$$f(u) = -ku^3$$

得到:
$$mh^2 u^2 (b^2 u + u) = -ku^3$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{k}{m(b^2 + 1)}, \quad L = mh = \sqrt{\frac{mk}{b^2 + 1}}$$

例 在一个顶角为 2α 的圆锥形光滑杯中放置一个质量为 m 的质点。圆锥的轴沿竖直方向，杯口朝上。求证：当 $E > 0$ 时，质点在两个水平圆环之间的杯壁上运动，并写出决定这两个圆环半径的方程。

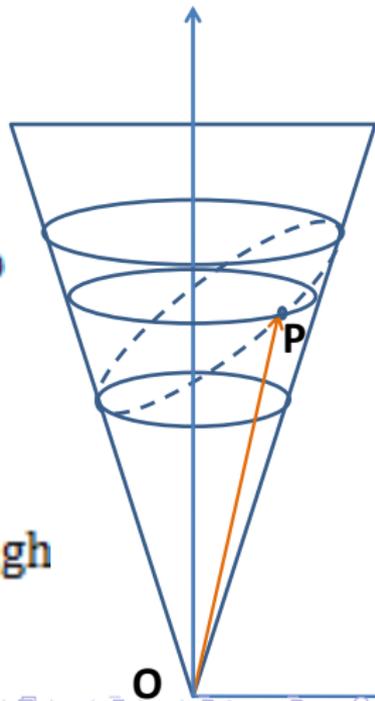
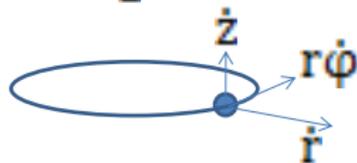
解： 设质点运动到图示位置 P 。

它的运动分解成

水平面上的径向分量 \dot{r}

和切向分量 $r\dot{\phi}$

z 方向上的分量 \dot{z}



它的总能量为

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mgh$$

质点受到的重力是保守力，杯壁的支持力对质点不做功。所以，质点总能量 E 是恒量，不变。

同时，分别考察重力和支持力带来外力矩，都在水平面内，所以 z 方向上的角动量 L_z 守恒。

三个方向的速度中， $r\dot{\phi}$ 中包含 z 分量，其他两个方向的速度产生的角动量都在水平面内。

$$L_z = l \times r\dot{\phi} \times \sin\alpha = hr\dot{\phi} = r^2\dot{\phi}\text{ctg}\alpha = \text{恒量}$$

得到
$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{r^2 \text{ctg}\alpha} \quad \text{其中} \quad \text{tg}\alpha = \frac{r}{h}$$

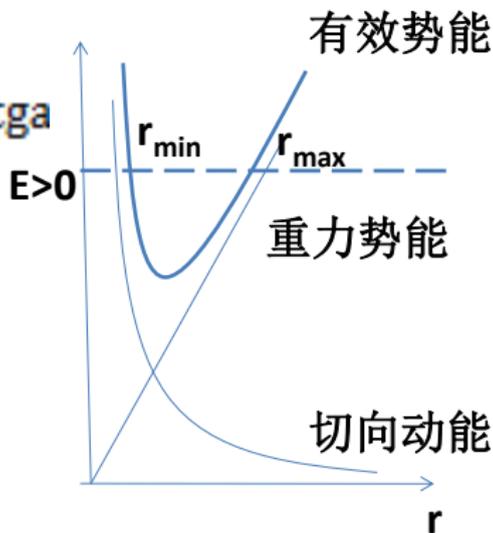
代入总能量表达式

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{r^2} + \dot{r}^2 \text{ctg}^2\alpha \right) + mgr\text{ctg}\alpha$$

有效势能=切向动能+重力势能

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{r^2} + \dot{r}^2 \text{ctg}^2 \alpha \right) + mgr \text{ctg} \alpha$$

当 $E > 0$ 时，可能与有效势能曲线有两个交点 r_{\min} 和 r_{\max} 。在交点处， E 的能量全部为有效势能，在径向分量上的速度 $\dot{r} = 0$ ，即半径达到极小和极大值，质点在两个水平圆环之间的杯壁上运动。



由上式中 $\dot{r} = 0$ ，进一步化简，得到半径的约束方程

$$E = \frac{1}{2}m \frac{L_z^2}{r^2} + mgr \text{ctg} \alpha$$

是 r 的一元三次方程，有两个正根如图。有一个负根，舍去。

万有引力

开普勒三定律

开普勒通过整理对行星的观测数据，提出三个定律：

1. 行星运动轨道为椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上。

事实上，在引力场中运动的轨迹不止是椭圆，如果天体的机械能等于 0，轨迹则是抛物线，如果机械能大于 0，则运动轨迹是双曲线。太阳都是在这些二次曲线的焦点上。

在极坐标情况下，将太阳放在原点，轨道的二次曲线（开口向左）的方程可写为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

这里 e 是偏心率，如图 7.1，行星与太阳的距离 OP ，是它到准线距离 PQ 的 e 倍，准线在 $x = \frac{p}{e}$ 处，由这些条件可以推导出上面的轨道方程。当 $0 < e < 1$ 时轨道是椭圆，当 $e = 1$ 时是抛物线，当 $e > 1$ 时是双曲线。

2. 行星与太阳的连线在单位时间内扫过相同的面积

凡是有心力场的角动量都是守恒的，因为 \vec{r} 与 \vec{F} 同向或反向，故力矩 $\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{J}}{dt} = 0$ ，从而角动量 $\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}$ 守恒。

如图 7.2，行星从 P 点经过 Δt 的时间，产生位移 $\vec{v}\Delta t$ ，到达 Q 点，扫过的面积正好是 $|\vec{r} \times \vec{v}\Delta t|$ 表示的平行四边形面积的一半，令

$$\sigma = \frac{1}{2} \vec{e}_z \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

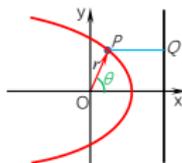


图 7.1

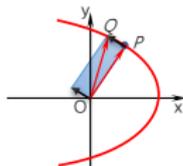


图 7.2

单位时间内行星与太阳的连线扫过相同的面积即为 $|\sigma|$ 。

3. 行星运动周期 T 的平方与椭圆轨道半长轴 a 的立方之比为常数

取 $\theta = 0$ 和 π 分别得到椭圆的近地点和远地点的值:

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}, \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

椭圆的长轴

$$2a = r_{\max} + r_{\min}$$

故

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad \text{或} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

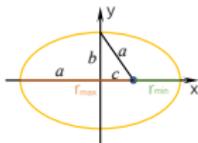


图 7.3

这里 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ 是椭圆的短半轴, c 是焦点到椭圆中

心的距离, 且满足

$$c = \frac{1}{2}(r_{\max} - r_{\min}) = \frac{pe}{1-e^2} = ae$$

设在近地点和远地点, 速度分别为 \vec{v}_{\min} , \vec{v}_{\max} , 速度方向均与其位置矢量垂直, 因此

$$2\sigma = r_{\min}v_{\min} = r_{\max}v_{\max}$$

由机械能守恒, 有

$$E = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 - \frac{GMm}{r_{\min}} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{GMm}{r_{\max}}$$

以上两式可以解出

$$E = -\frac{GMm}{2a}, \quad 2\sigma = \sqrt{GMp} = \frac{J}{m}$$

行星运动的周期为

$$T = \frac{\pi ab}{|\sigma|} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{GMp}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

因此

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

是与具体的行星无关的参数。

轨道方程

由角动量守恒和机械能守恒，有：

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\theta} &= h \\ \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} &= E \end{aligned}$$

这里

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \left(\frac{h}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

即得

$$\left(h \cdot \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = \frac{2E}{m}$$

可得(利用题给积分公式)

$$\theta = \int_{r_0^{-1}}^{r^{-1}} \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \frac{2GM}{h^2 r} - \frac{1}{r^2}}} d\frac{1}{r} = \int_{r_{\min}^{-1}}^{r^{-1}} \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \left(\frac{GM}{h^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2}\right)^2}} d\frac{1}{r}$$

令

$$\frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2} = A \cos \phi, \quad A = \sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \left(\frac{GM}{h^2}\right)^2}$$

则

$$\theta = \int_0^\phi \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 - A^2 \cos^2 \phi}} d(A \cos \phi) = \pm \phi$$

即有

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad p = \frac{h^2}{GM}, \quad e = \frac{h^2 A}{GM} = \sqrt{\frac{2Eh^2}{G^2 M^2 m} + 1}$$

对于椭圆轨道, $e < 1$, 可得对应的机械能 $E < 0$; 特别当 $e = 0$, 对应轨道 $r = p$, 是半径为 p 的圆轨道。

对于抛物线轨道, $e = 1$, 对应机械能 $E = 0$;

对于双曲线轨道, $e > 1$, 对应机械能 $E > 0$ 。

如果要运动到无穷远, 脱离引力中心的束缚, 必须机械能 $E \geq 0$ 。彗星通常能达到非常远的地方, 可认为 $E \approx 0$, 常把彗星轨道当成抛物线来处理。

例题

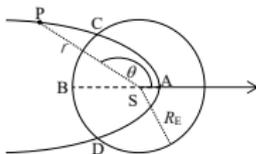
星体 P (行星或彗星) 绕太阳运动的轨迹为圆锥曲线

$$r = \frac{k}{1 + e \cos \theta}$$

式中, r 是 P 到太阳 S 的距离, θ 是矢径 SP 相对于极轴 SA 的夹角 (以逆时针方向为正), $k = \frac{L^2}{GMm^2}$, L 是 P 相对

于太阳的角动量, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ 为引力常量, $M \approx 1.99 \times 10^{30} \text{kg}$ 为太阳的质量, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$ 为偏

心率, m 和 E 分别为 P 的质量和机械能。假设有一颗彗星绕太阳运动的轨道为抛物线, 地球绕太阳运动的轨道可近似为圆, 两轨道相交于 C、D 两点, 如图所示。已知地球轨道半径 $R_E \approx 1.49 \times 10^{11} \text{m}$, 彗星轨道近日点 A 到太阳的距离为地球轨道半径的三分之一, 不考虑地球和彗星之间的相互影响。求彗星



- (1) 先后两次穿过地球轨道所用的时间;
 (2) 经过 C、D 两点时速度的大小。

已知积分公式 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+a}} = \frac{2}{3}(x+a)^{3/2} - 2a(x+a)^{1/2} + C$, 式中 C 是任意常数。

解:

对于彗星, 轨道近似抛物线, 因此有

$$\varepsilon = 1$$

由题给的 ε 表达式, 可得

$$E = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GMm}{r} = 0$$

这里 v_r 是径向速度分量, v_θ 是角向速度分量。在顶点处 $v_r = 0$, $v_\theta = v_{\theta 0}$, $r = \frac{R}{3}$, 有

$$\frac{1}{2}mv_{\theta 0}^2 - \frac{3GMm}{R} = 0$$

而角动量守恒

$$v_\theta r = v_{\theta 0} \frac{R}{3}$$

由以上各式可得

$$v_r^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2GM}{r^2} \left(r - \frac{R}{3}\right)$$

因此

$$t = 2 \int_{\frac{R}{3}}^R \frac{dr}{v_r} = \sqrt{\frac{2}{GM}} \int_{\frac{R}{3}}^R r dr \left(r - \frac{R}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{GM}} \left[\frac{2}{3} \left(r - \frac{R}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2R}{3} \left(r - \frac{R}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{R}{3}}^R = \frac{20}{9} \sqrt{\frac{R^3}{3GM}}$$

利用题给数据, 计算出

$$t = 6.4 \times 10^6 \text{ s} \approx 74 \text{ d} \approx 0.20 \text{ y}$$

对于地球, 设 R 是地球轨道半径, 周期 $T = 1$ 年, 有

$$\frac{GMm}{R^2} = mR \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

这样, 可得

(2) 在 C, D 点处, 有

$$t = \frac{10T}{9\sqrt{3}\pi} \approx 0.2 \text{ (year)}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 42.2 \text{ (km/s)}$$

可得

前言

对于机械运动的研究，只局限于质点的情况是很不够的。物体是有形状大小的，它可以作平动、转动，甚至更复杂的运动。一般固体在外力的作用下，形变并不显著，故**设想另一个抽象模型-- 刚体**。以刚体为研究对象，除了研究它的平动外，还研究它的转动以及平动与转动的复合运动等。



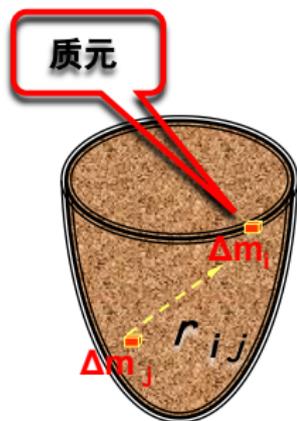
8.1 自由度与刚体

◎ 刚体模型：

刚体是指整体及其各部分的形状和大小均保持不变的物体。

特点：

1. 是实际物体（指固体）的理想化模型。
2. 是一个质点组（刚体可以看成由许多质点组成，每个质点叫做刚体的一个质元）
3. 质元之间的距离保持不变→刚体的内力做功为0
4. 刚体是弹性系数很大的一类物体的抽象



刚体的内力做功为0

考察刚体的第 j 个质点与第 k 个质点相互作用的 \vec{F}_{jk} 与 \vec{F}_{kj} 这一对内力。如刚体稍微改变其位置，第 j 个质点与第 k 个质点的位移各为 $d\vec{r}_i$ 与 $d\vec{r}_k$ ，则这一对内力所作功的和为：

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ki} \cdot d\vec{r}_k &= \vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_i - \vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_k \\ &= \vec{F}_{ik} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_k) = \vec{F}_{ik} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_k)\end{aligned}$$

由于刚体内任意两质点间的距离保持不变，故有：

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_k) = \text{常量}$$

$$\text{微分一次，得：} 2(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = 0$$

$$\text{即：} (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \perp d(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \quad \text{而} \quad \vec{F}_{ik} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_k)$$

于是刚体的内力做功为零。刚体中的动能定理中也无须计及内力，这是不同于一般质点组的。

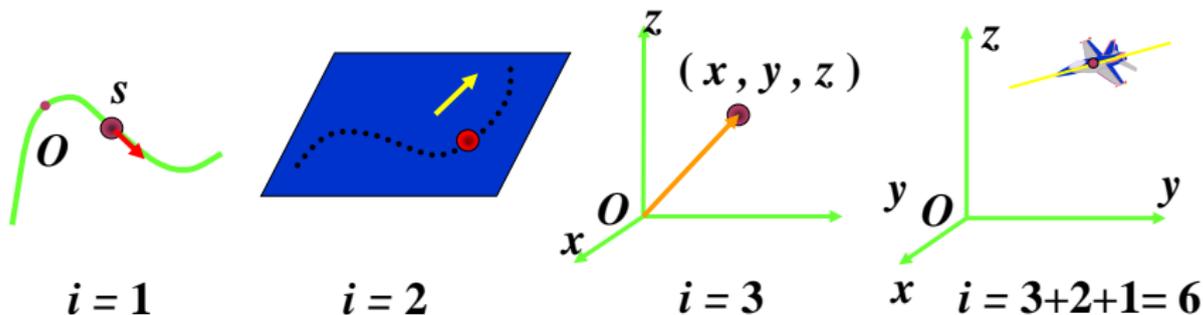
- ◎ 抽象的具体含义：实际物体在外力作用下，其形状和大小或多或少会有一些变化，但只要这种变化与**物体的几何线度**相比很小，对**所讨论的问题**的影响可以忽略，这种情况下我们可以把这个物体看成刚体。
- ◎ 举例：
 - 两个钢球的碰撞问题—形变很小，但是是碰撞瞬间能量转换的载体，此时钢球看成弹性体
 - 摆动的橡胶棒—可以忽略其形变看成刚体

◎ 8.1.1 自由度

自由度：确定一个力学体系在空间的几何位形所需的独立变数的个数

例：单个质点的自由度—3个

为了确定一个质点在空间的位置，需要3个独立的坐标变数，如直角坐标 x ， y ， z



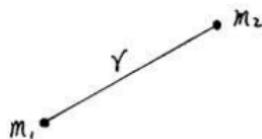
◎ 7.1.2 多质点体系的自由度与刚体模型

例：两个自由质点的自由度—6个

例：距离保持不变的二质点体系—5个

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2 \quad (7.1.1)$$

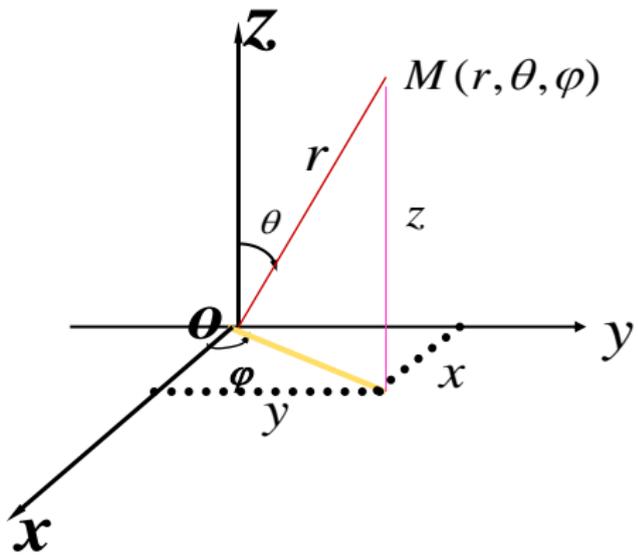
6个坐标中只有5个是独立的



例：距离保持不变且不在同一直线上的三质点体系的自由度—6个

5个独立变数确定两个质点位置之后，与这两个质点距离一定的第三个质点可位于以这两个质点连线为轴的圆周上的任一点，此时只要用一个方位角就能确定其位置

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



◎ 实例：两个氢原子和一个氧原子组成的体系。

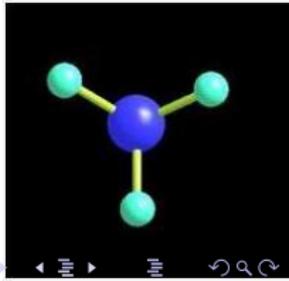
若三个原子是完全自由的，则有9个自由度。如果化合成水分子，两两之间的距离固定，形成三角形，则描写三个原子位置的9个坐标应满足3个类似于式(7.1.1)的代数关系。所以此时该体系的独立坐标个数为 $9-3=6$ ，即有6个自由度。



例：距离保持不变的四质点体系的自由度—6个

再增加一个质点，且它与原来三个质点的距离也都固定，则增加一个质点，就要增加3个坐标，但同时却增加了3个代数关系式。因此，整个体系的自由度不变，仍然是6。

- ◎ 实例：由四个原子组成的分子，如 NH_3 在化合之前，有 $3 \times 4 = 12$ 个自由度，化合成氨分子之后，形成四面体，两两原子之间的距离固定，共有6个代数关系，所以这体系的自由度为 $12 - 6 = 6$ 。



例：距离保持不变的五质点体系的自由度—6

再增加一个质点，且它与原来四个质点的距离也都固定，则增加一个质点，就要增加3个坐标，但同时却增加了4个代数关系式。要注意，新增加的4个代数关系式并不是完全独立的。因为在这4个关系式中，任何3个确定之后，第4个也就确定了。故仅有3个新的独立代数关系式。因此，整个体系的自由度不变，仍然是6。

推广到更多质点组成的体系，得一个结论：含有三个质点以上的多质点体系，若体系中所有质点之间的距离都是固定的，且不在一条直线上，则都有6个自由度。

刚体是指整体及其各部分的形状和大小均保持不变的物体。刚体的自由度—6

◎ 刚体—6个自由度

刚体具有6个自由度，即描写刚体的几何位形需要6个独立坐标。与3质点系统的自由度相同。

这6个变数可以理解为确定刚体上某一点（如质心）位置的3个变数、确定刚体上过该点的一轴线的方位的2个变数以及刚体绕该轴转动角度的1个变数。

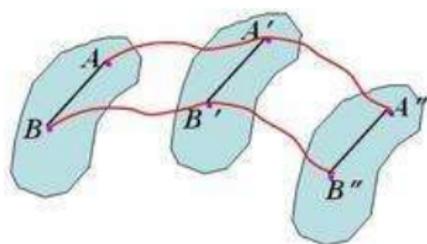
在某些条件下，确定刚体的位形可能不需要6个独立坐标。因此，刚体自由度数 ≤ 6 。刚体自由度的具体个数随条件而定。

- ①定轴转动 自由度为1；
- ②平动 自由度为3；
- ③平面平行运动 自由度为3。

8.2 基本的刚体运动

8.2.1 刚体的平动 (n=3)

连接刚体中任意两点的线段在运动中始终保持平行。刚体上所有点的运动轨迹都相同，可当作质点来处理。



取参考点 O

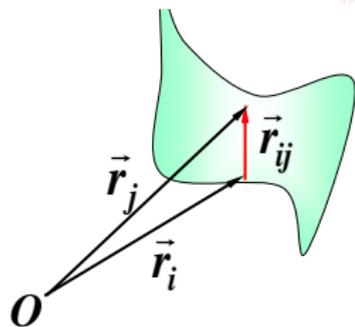
图中 \vec{r}_{ij} 表示质元 i 指向质元 j 的矢量，

$\vec{r}_j = \vec{r}_i + \vec{r}_{ij}$ 由平动定义 \vec{r}_{ij} 为恒矢量

$$\therefore \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \vec{v}_j = \vec{v}_i$$

$$\frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \quad \vec{a}_j = \vec{a}_i$$

结论：刚体平动时，其上各点具有相同的速度、加速度及相同的轨迹。可用一个质点的运动代替刚体的运动。



◎ 8.2.2 刚体的定轴转动 ($n=1$)

刚体上某两个点固定，刚体只能绕着过这两个点的固定轴转动，这种运动称为刚体的定轴转动。

自由度：刚体绕轴线转过的角度

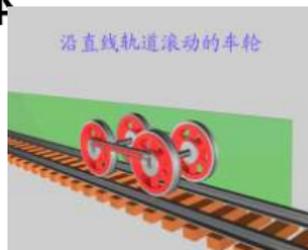


◎ 8.2.3 刚体的平面平行运动 ($n=3$)

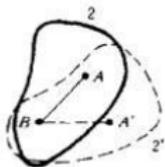
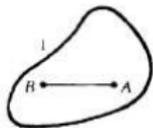
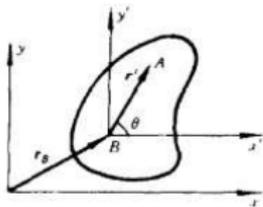
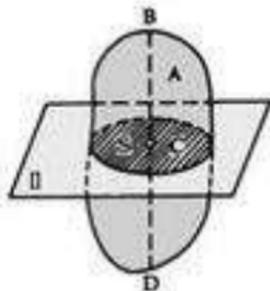
刚体运动时，刚体中的每一个点始终在平行于某一固定平面的平面内运动，这种运动称为刚体的平面平行运动。

自由度：

1. 在某一平面内任一点的平动(2)
2. 绕过此点且垂直于固定平面的固定轴的转动(1)



将刚体的运动可用与固定平面相平行的任一截面的运动来代表。任一截面的运动可以用其上任意一点A(基点)在平面上的移动和与相对于通过基点A并垂直运动平面的轴的转动的叠加。在与基点相对静止的参考系上,转动为定轴转动。



◎ 8.2.4 刚体的定点转动($n=3$)

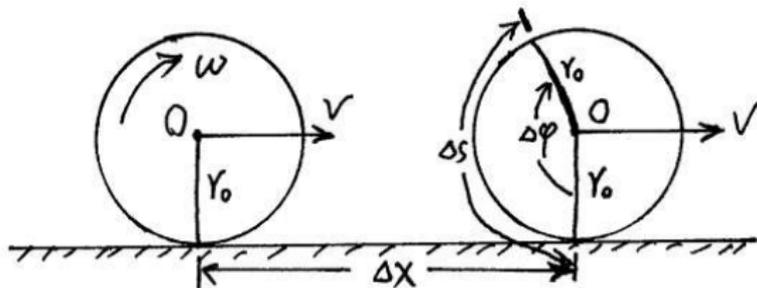
刚体运动时,始终绕一固定点转动。



•8.2.5 刚体的一般运动 (n=6)

刚体的一般运动可以看成随刚体上某一点（如质心）的平动和绕该点的转动的组合。

以车辆在地面上沿直线的纯滚动为例：

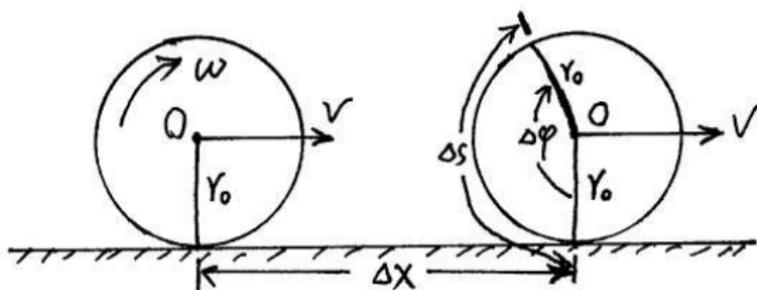


纯滚动，就是车轮前进的距离 Δx ，就等于车轮滚过的弧长 $\Delta \hat{s}$ ，即

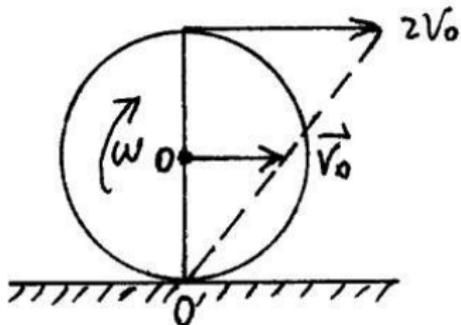
$$\Delta x = r_0 \Delta \varphi$$

在滚动中只有车轮中心O的运动轨迹是直线，其它各点的轨迹都是曲线，O点的速度为

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = r_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = r_0 \omega$$



车轮的运动分解为以O点为基点的平动，其速度为 v_0 ，以及绕O点的转动，其角速度为 ω 。车轮上任何一点的速度都是这两种运动速度的合成。

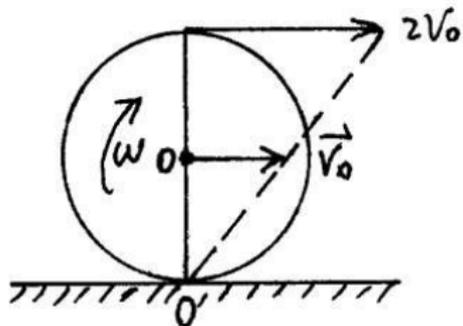


高于O点的各点合速度为

$$v = v_0 + r\omega$$

低于O点的各点合速度为

$$v = v_0 - r\omega$$



O'点

$$v = v_0 - r\omega$$

→ $\vec{V}_{O'} = 0$

纯滚动的运动中，车轮与地面相接触处，总是相对静止的。将此接触点称为**瞬心**。在接触处静摩擦力，其功率为 $F \cdot v$ 。因为在接触处速度为零，摩擦力不做功。

车轮在该瞬时的运动看成是绕O'点(车轮与地面接触点)的转动，即过O'点作垂直于车轮平面的转动轴，**绕这个轴的角速度是 ω 。???**

8.2.6 角速度的绝对性

1. 角速度矢量

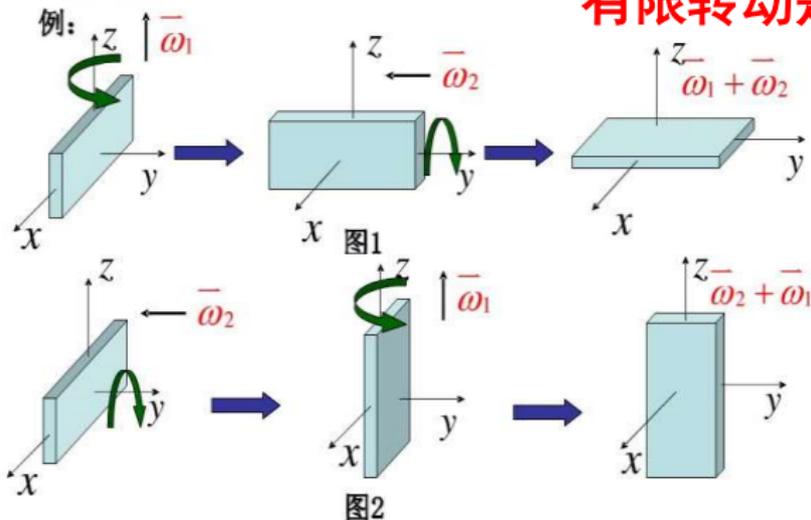
角速度是不是矢量？

- 有限转动与无限小转动

有大小和方向的物理量不一定是矢量。矢量的重要特征是应满足平行四边形相加法则。

1 有限转动

有限转动是不是矢量？ 否



$$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \neq \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1$$

无限小转动是不是矢量？ 是

设刚体绕通过定点 O 的某轴线转动了一个微小角度 $\Delta\theta$ ， $\Delta\theta$ 是一个有方向的量，用转动轴上截取的有向线段 Δn 来表示 $\Delta\theta$ 的值和大小。 Δn 称为角位移。

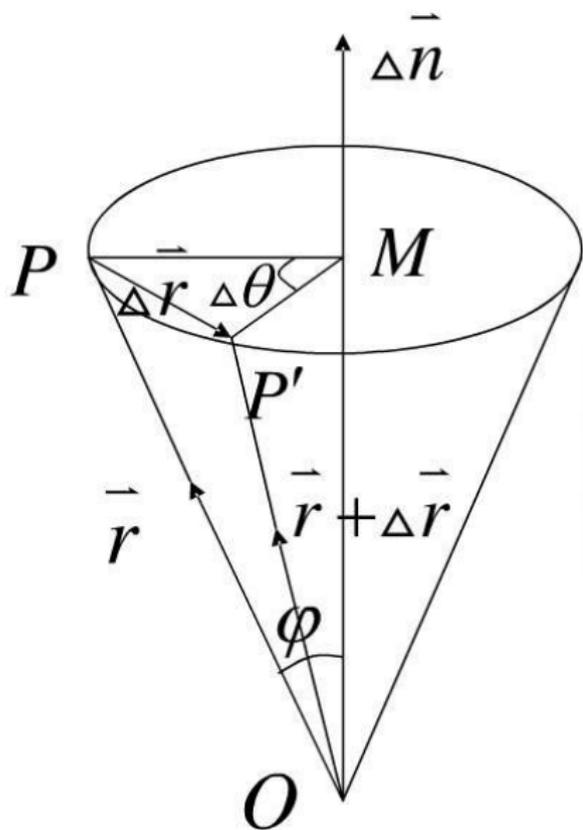
Δr 为无限小量 $\rightarrow \Delta r \perp$ 平面 OPM ，
且有 $|\Delta r| = PM \cdot \Delta\theta$

因为 $PM = r \sin\varphi$

所以

$|\Delta r| = r \Delta\theta \sin\varphi = |\mathbf{r}| \cdot |\Delta n| \cdot \sin\varphi$ ，即 $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{n} \times \mathbf{r}$

我们现在知道 Δn 是有方向的量



Δn 能否满足矢量加法的交换律

两个微小转动 Δn 和 $\Delta n'$ 的合成

假设刚体先后绕通过O点的轴线作了两个微小转动 Δn 和 $\Delta n'$ ，则P点的位矢为

① 转动前： r

② 转动 Δn 后： $r + \Delta n \times r$

③ 再转动 $\Delta n'$ 后： $r + \Delta n \times r + \Delta n' \times (r + \Delta n \times r)$

略去二价小量，则合成位移为

$$\Delta n \times r + \Delta n' \times r = \Delta r + \Delta r'$$

如果交换转动次序，则合成位移为

$$\Delta n' \times r + \Delta n \times r = \Delta r' + \Delta r$$

因为 Δr 和 $\Delta r'$ 是矢量，可以交换，即 $\Delta r + \Delta r' = \Delta r' + \Delta r$

所以 $\Delta n \times r + \Delta n' \times r = \Delta n' \times r + \Delta n \times r$

即 $(\Delta n + \Delta n') \times r = (\Delta n' + \Delta n) \times r$

对任意 r 都成立，所以 $\Delta n + \Delta n' = \Delta n' + \Delta n$ ，也是可以交换的

Δn 满足矢量加法的交换律，是矢量

角速度 $\vec{\omega}$ 与无限小角位移 Δn 是相关的，它是无限小角位移与无限小时间间隔之比。 Δn 是矢量，所以 $\vec{\omega}$ 也是矢量。

总结：

- ① 有限大角位移不是矢量
- ② 无限小角位移是矢量
- ③ (瞬时)角速度只与无限小的角位移相联系，因此是矢量。

2. 角量与线量的关系

刚体定轴转动的角位移、角速度和角加速度确定后，刚体内任一点的位移、速度和加速度也完全确定。若某点至转轴的距离为 ρ ，则该点的线速度为

$$v = \omega\rho$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$a_{\tau} = \beta\rho$$

$$a_n = \omega^2\rho$$

由此可见，尽管刚体是一个复杂的质点系，但是引入角量后，刚体定轴转动的描写就十分简单。

引入**角速度矢量**后，定轴转动刚体上各点的速度、加速度与角速度的关系更加简洁明了。在转轴上任取一点作为坐标原点，则刚体上任一点P的位置用位矢 \vec{r} 表示，则P点的速度为

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_n = \omega^2 r \sin\alpha \hat{n} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

刚体角速度（矢量）的绝对性

一般来说，刚体的任何运动都可分解为基点的平动和绕该点的定点转动的合成。选择不同的基点，平动速度就不同；而转动角速度就与基点的选择无关。即刚体上的角速度矢量的大小和方向都相同。这即是刚体角速度的绝对性。

如图表示一个刚体相对于坐标系 K 的位形， O_1 ， O_2 ， P 是刚体上的任意三点。它们的位置矢量分别是 \vec{R}_1 ， \vec{R}_2 ， \vec{R} 。显然，这三点的速度分别为：

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{R}_1}{dt} \quad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

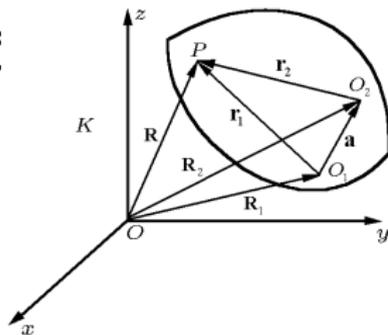


图 6.4 刚体角速度的绝对性

若选 O_1 为基点 $\vec{v} = \frac{d\vec{R}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$

若选 O_2 为基点 $\vec{v} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$

$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{R}_1}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{a}$

由以上三式

$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{a} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$

其中 $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{a}$

$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$



$(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_2 = 0$

由于点的任意性, 故有: $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$

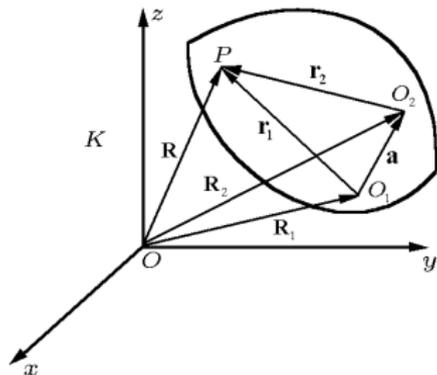
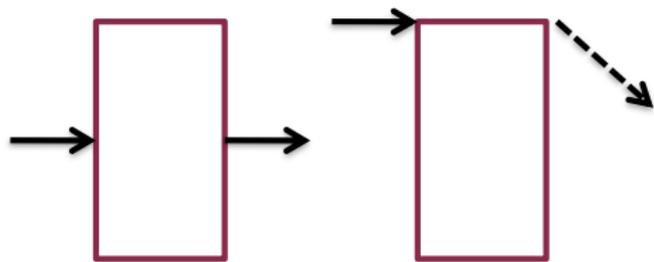
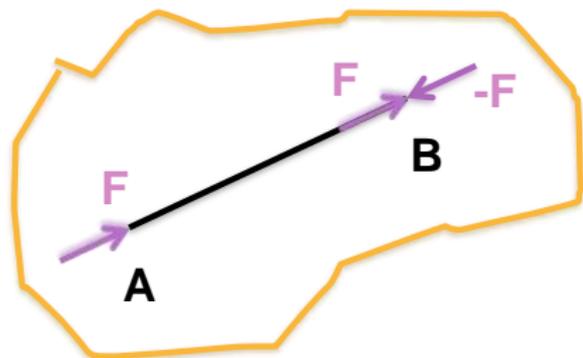


图 6.4 刚体角速度的绝对性

作用在刚体上的力系及其简化

1. 作用在刚体上的力是滑移矢量。力有大小、方向、作用点三个要素。就它对物体产生的效果而言，三个要素都起作用。因而，在一般情况下，力不能平移。但是由于刚体是一个刚性整体，当力沿着作用线在刚体上滑移时，对刚体的作用不变，因而，作用在刚体上的力是滑移矢量。

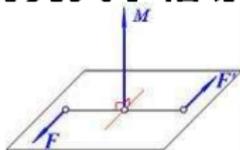


作用力可以沿作用线滑移，
但作用线的位置不能随意
移动。

2. 合力存在的条件：

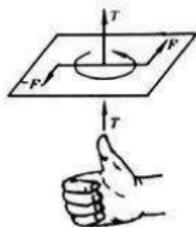
- ① 共点力系：所有力的作用线（或其延长线）交于一点的力系。可以等效为大小和方向等于各个力的矢量和、作用点为该交点的一个力，即合力。
- ② 平行力系：所有力的作用线都互相平行的力系。

如果两平行力大小相等方向相反，但不在同一直线上，如图，



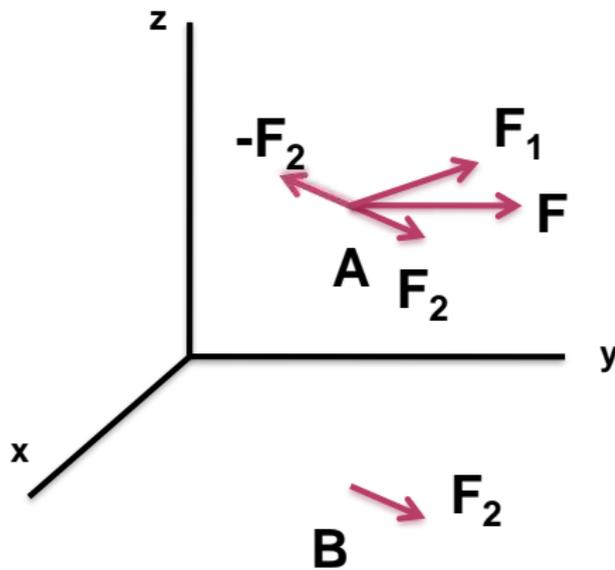
则这对力称为力偶；两力作用线间的垂直距离为力偶臂，力和力偶臂的乘积为力偶矩。

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



- ③ 共面力系：所有力的作用线位于同一平面的力系。

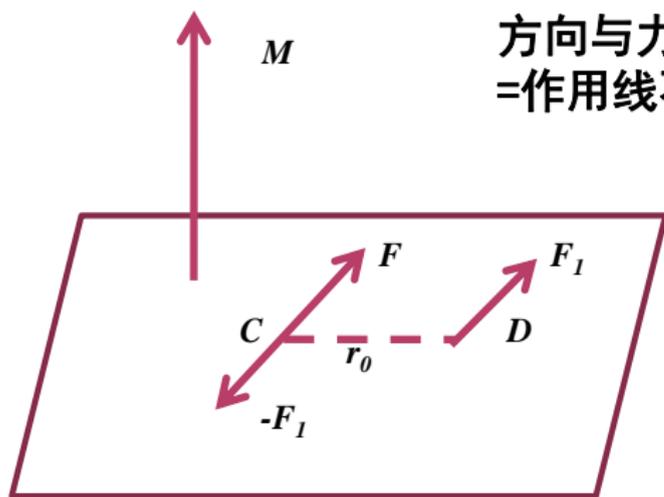
3. 一般力系可等效为一个力和一个力偶



考虑不互相平行且不共面的两个力：作用在A上的力 F_1 在平面yz内和作用在B上的力 F_2 在平面xy内

分析：

可假想在A上有一对力 F_2 和 $-F_2$ ，不会改变A的运动
作用在A上的力 F_1 和 F_2 构成一个合力 F ，作用在B上的力 F_2 和作用在A上力 $-F_2$ 构成一个力偶。



方向与力 F 垂直的力偶矩 M +力 F
=作用线不同的新力 F

方向与力 F 成任意角度的力偶矩 M
=方向与力 F 垂直的力偶矩 M_1 +方向与力 F 平行的力偶矩 M_2

作用在刚体上的任何力系，可以等效为一个作用于刚体上某一点的力和一个方向与力平行的力偶。

8.2.7 刚体质心的运动

①质心的运动（质心运动定理）

➤由质点(m_1, m_2, \dots, m_n)所构成的体系，其质心位置为

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

➤质心运动定理

$$M_{\text{总}} \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}_{\text{外}}$$

系统质心的运动行为好像一个质点的运动行为，此质点的质量等于系统的总质量，作用在此质点的力等于系统所受到的总外力。

②刚体质心的确定

对质量连续分布的物体，其质心位矢可用积分表示：

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \rho \vec{r} dv}{\int \rho dv}$$

其中 ρ 为物体密度。这个质心位矢表达式是一个矢量式，实际上是三个式子，在 x, y, z 三个方向每个方向一个：

$$X_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad Y_{CM} = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad Z_{CM} = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

假设一个物体由A, B两部分组成，质心 x 方向表达式（ y, z 方向也同样）可写为

$$X_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_A x dm + \int_B x dm}{\int_A dm + \int_B dm} = \frac{\int_A x dm + \int_B x dm}{m_A + m_B} = \frac{\left[\frac{\int_A x dm}{m_A} \right] m_A + \left[\frac{\int_B x dm}{m_B} \right] m_B}{m_A + m_B} = \frac{(X_{CM})_A m_A + (X_{CM})_B m_B}{m_A + m_B}$$

此式表示物体质心可以这样求：先分别求出A, B两部分的质心 $(X_{CM})_A$ 和 $(X_{CM})_B$ 以及每部分的总质量 m_A 和 m_B ，然后把这两部分作为位置在各自质心处，质量分别为 m_A 和 m_B 的两质点，再求其质心，此质心即为整个物体的质心。假设物体由三部分或更多部分组成可以仿此求出整个物体的质心。对于物体中挖去一部分的形状，可以用密度取负值的方法求解。

例：半径为 R 的大球内有一个半径为 $R/2$ 的球形空腔，空腔的下部放置了一个半径为 $R/4$ 的小球。已知大球和小球的质量密度相同。

求：系统的质心。

解：该系统可看成由质量分布均匀(无空腔)的大、中、小三个球体组成，它们各自的质心分别处于球心处。中球的质量为负。

$$V_1 : V_2 : V_3 = R_1^3 : R_2^3 : R_3^3 = 64 : 8 : 1$$

设小球质量为 m_0 ，则质量和质心坐标分别为：

$$\text{大球: } m_1 = 64m_0, x_1 = 0, y_1 = 0$$

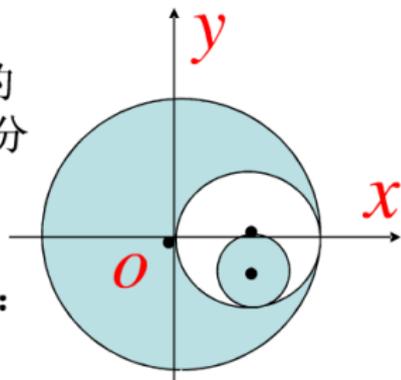
$$\text{中球: } m_2 = -8m_0, x_2 = R/2, y_2 = 0$$

$$\text{小球: } m_3 = m_0, x_3 = R/2, y_3 = -R/4$$

系统的总质量为 $m = m_1 + m_2 + m_3 = 57m_0$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m} = \frac{0 - 4m_0 R + m_0 R/2}{57m_0} = -\frac{7}{114} R$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m} = \frac{0 + 0 - m_0 R/4}{57m_0} = -\frac{1}{228} R$$



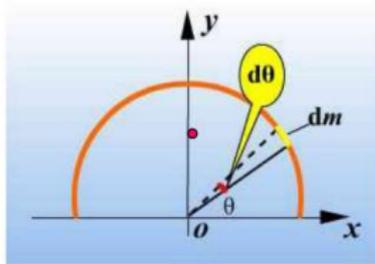
三个球体可视为质量各自集中在质心（球心）处的三个质点。

例：已知半圆环质量为M，半径为R

求：它的质心位置？

解：建立坐标系如图，

由对称性 $x_c = 0$



线密度 $\lambda = \frac{M}{\pi R}$

取 $dl \rightarrow dm = \lambda dl$

$dl = R d\theta$

$$dm = \frac{M}{\pi R} R d\theta \quad y = R \sin \theta$$

$$y_c = \frac{\int y dm}{M} = \frac{\int R \sin \theta \frac{M}{\pi R} R d\theta}{M} = \frac{R \int_0^\pi \sin \theta d\theta}{\pi}$$

$$= \frac{R}{\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{R}{\pi} (1+1) = \frac{2R}{\pi}$$

质心不在物体上，但
相对半圆环位置固定

③ 巴普斯定理

假设在一个平面上取任一闭合区域，令其上各点垂直于平面的方向运动使其形成一个立体，则此立体总体积等于闭合区域面积乘以区域质心在运动中所经过的路程。

一条平面曲线上各点沿垂直于曲面平面方向运动而形成一个曲面，则此曲面面积等于曲线质心运动的距离乘以曲线的长度

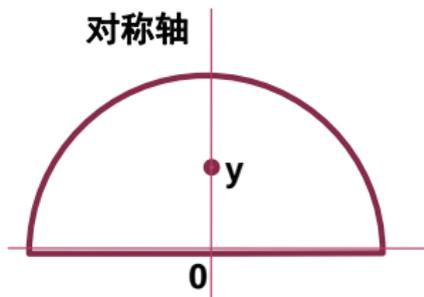
例：如前

质心在对称轴上离原点 O 距离 y
以连接半圆形两端点的直径为轴，
旋转一周，得到一球面。球面面积为

$4\pi R^2$ ，质心经过距离为 $2\pi y$ ，半圆形长度为 πR ，则有

$$4\pi R^2 = 2\pi y \cdot \pi R$$

即 $y = 2R / \pi$



例题：求均匀半圆盘的质心位置，圆盘半径为R。

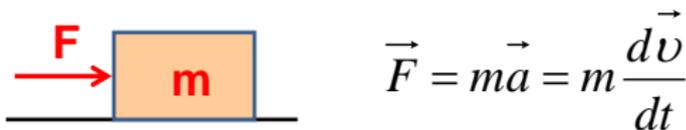
解：由对称性可知质心必在对称轴上，设质心距离半圆盘直边距离为x。半圆盘以直边为轴旋转成一球体，则有：

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 2\pi x \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{4}{3\pi} R$$

8.3 刚体的动能

8.3.1 转动惯量

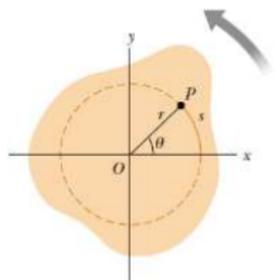
- 运动的物体有惯性，惯性与其质量大小有关



- 转动的物体也有转动惯性，其惯性与其转动惯量有关



- ✓ 门的质量?
- ✓ 门的质量分布?



- ✓ 角位移
- ✓ 角速度
- ✓ 角加速度
- ✓ 转动动能
- ✓ 角动量/动量矩

□ 质点绕某一个中心 O 作半径为 r 的圆周运动

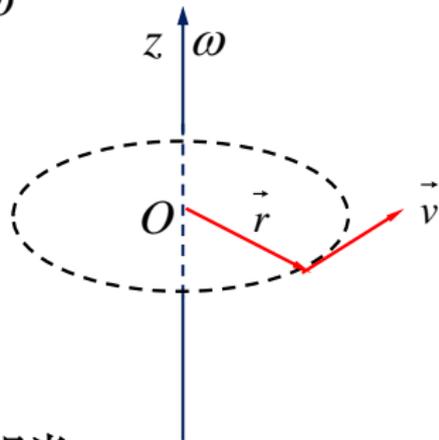
质点的动量矩 $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ 遵循方程 $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}$

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = rmv\vec{k} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow v = r\omega$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M} \quad \rightarrow \quad \frac{dl_z}{dt} = M_z = M$$

$$\therefore \frac{d(mr^2\omega)}{dt} = M \Rightarrow mr^2 \frac{d\omega}{dt} = M$$

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$



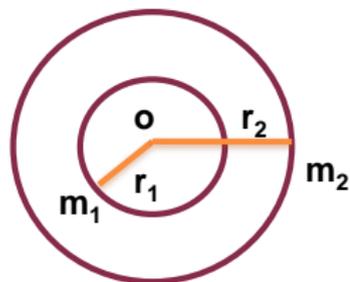
□ M 与 F 的地位相当； mr^2 与 m 的地位相当。

□ 质量 m 是惯性的度量，在同样力 F 的作用下，质量 m 越大，越不易加速。

□ 在同样的力矩 M 作用下， mr^2 越大，角加速度越小。 mr^2 是关于转动运动的惯性的度量，我们称它为质点的转动惯量。

8.3.2 刚体转动惯量的计算

下面把转动惯量的概念作些推广。首先讨论由质量为 m_1, m_2 的两个质点构成的体系，它们在同一平面内绕同一中心 O 作半径分别为 r_1, r_2 的圆周运动



$$\text{对 } m_1 \text{ 有 } m_1 r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt} = M_1$$

$$\text{对 } m_2 \text{ 有 } m_2 r_2^2 \frac{d\omega_2}{dt} = M_2$$

式中 M_1, M_2 分别是质点 m_1, m_2 所受到的总力矩，既包括外界物体作用在体系中质点上的力矩，也包括体系内质点间相互作用的力矩。前者称为**外力矩**，后者称为**内力矩**。

将两式相加，得

$$m_1 r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt} + m_2 r_2^2 \frac{d\omega_2}{dt} = M_1 + M_2$$

在牛顿第三定律成立的条件下，体系的**内力矩相互抵消**，总和应为零，所以上式可写为

$$m_1 r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt} + m_2 r_2^2 \frac{d\omega_2}{dt} = M_{\text{外}}$$

$M_{\text{外}}$ 是体系受到的总外力矩。用类似的方法，可以把上述结果推广到多质点所构成的体系，即有 n 个质点都绕 O 作圆周运动，则有

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \frac{d\omega_i}{dt} = M_{\text{外}}$$

其下标 $i=1, 2, 3, \dots, n$ ，指第 i 个质点的相应量。

对于刚体转动，所有质点的角速度都相同

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \cdots = \omega_n = \omega$$

简化为 $(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2) \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{外}}$

定义

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

称为刚体转动体系的对某一选定转轴的转动惯量。

刚体的转动惯量
$$I = \sum \Delta m_i r_i^2 = \begin{cases} \int r^2 \eta dl & \text{线分布} \\ \int r^2 \sigma dS & \text{面分布} \\ \int r^2 \rho dV & \text{体分布} \end{cases}$$

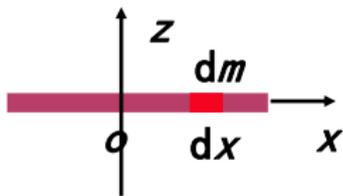
说明：

- ① 刚体的转动惯量是由**总质量**、**质量分布**、**转轴的位置**三个因素决定；
- ② 同一刚体对不同转轴的转动惯量不同，凡是提到转动惯量，必须指明它是对哪个轴的才有意义。

1) 均匀细棒

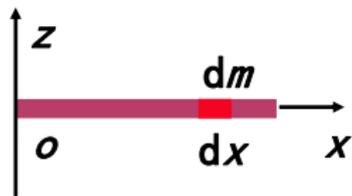
a) 转轴过中心与杆垂直

$$I = \int r^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} ml^2$$



b) 转轴过棒一端与棒垂直

$$I = \int r^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{3} ml^2$$



应用平行轴定理

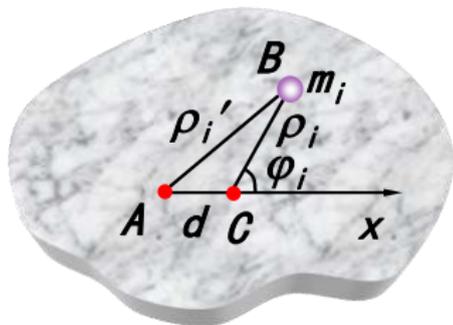
$$I = I_c + I_d = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

转动惯量 / 和转轴有关同一个物体对不同转轴的转动惯量是不同的

✓ **平行轴定理** $I_A = I_C + md^2$

其中 I_C 为刚体绕**质心轴**的转动惯量； d 为两平行轴间距离。

证明：设刚体绕过质心C的转轴的转动惯量为 I_C ；绕过A点的转轴的转动惯量为 I_A ；两个转轴互相平行，相距为 d 。



对C $I_C = \sum \rho_i^2 m_i$

对A $I_A = \sum \rho_i'^2 m_i$

由图 $\rho_i'^2 = \rho_i^2 + d^2 + 2\rho_i d \cos \varphi_i$

$$I_A = \sum \rho_i'^2 m_i = \sum m_i (\rho_i^2 + d^2 + 2\rho_i d \cos \varphi_i) = mx_c = 0$$

$$= \sum m_i \rho_i^2 + \sum m_i d^2 + \sum m_i \rho_i \cos \varphi_i \cdot 2d$$

$$\begin{aligned} & \sum m_i \rho_i \cos \varphi_i \\ &= \sum m_i x_i \end{aligned}$$

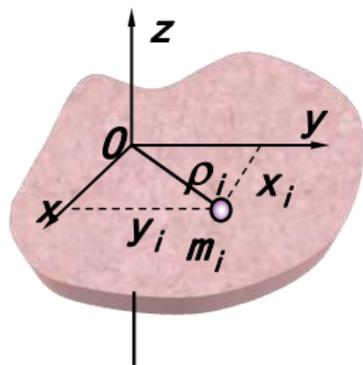
$\therefore I_A = I_C + md^2$ 平行轴定理

✓垂直轴定理 $I_z = I_x + I_y$

其中 x , y 为平面内正交的轴; z 为垂直平面的轴

✓可叠加原理

若一个复杂形状的物体是由许多简单形体组成, 则这个复杂物体对某轴的转动惯量等于各简单形体对同一转轴的转动惯量之叠加.



例题：如图，圆环质量 m_1 ，半径 R ，短棒质量 m_2 ，长度 d ，求对 x 轴的转动惯量

解：圆环转轴通过直径的转动惯量，根据垂直轴定理有

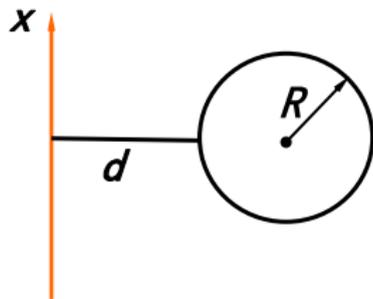
$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

根据平行轴定理，圆环对转轴 x 的转动惯量为

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 (R + d)^2$$

因此，整个元件对 x 轴的转动惯量为

$$I = \frac{1}{3} m_2 d^2 + \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 (R + d)^2$$

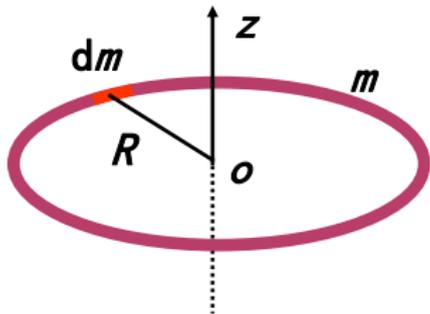


2) 均匀细圆环

转轴过圆心与环面垂直

$$dm = \lambda \cdot dl \quad \lambda = \frac{m}{2\pi R}$$

$$I = \int R^2 dm = \lambda R^2 \int_0^{2\pi R} dl = mR^2$$

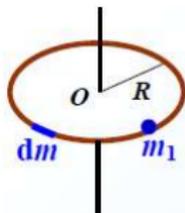


思考1：圆环转轴通过圆环直径的转动惯量

$$I_x = I_y = mR^2/2$$

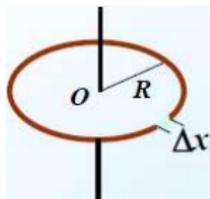
思考2：圆环上加一质量为 m_1 质点，求 I_z

$$I_z = mR^2 + m_1R^2$$



思考3：圆环有一 Δx 的缺口，求 I_z

$$I_z = mR^2 - \frac{m}{2\pi R} \Delta x R^2$$



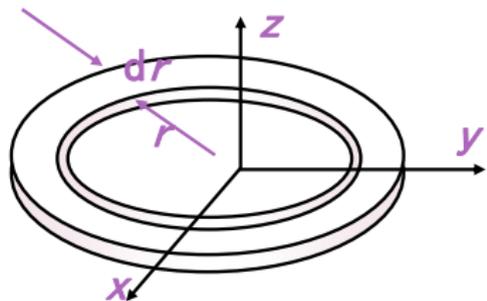
3) 均匀圆盘绕中心轴的转动惯量

质量为 m ，半径为 R 的均匀圆盘，转轴过圆心与圆盘垂直
圆盘上取半径为 r 宽度 dr 的圆环作为研究对象，质量为 dm

dm 的转动惯量 $dI = r^2 dm$

$$dm = \sigma dS = \frac{m}{\pi R^2} dS = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

$$I = \int dI = \int r^2 \times \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$$
$$= \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} mR^2$$



均匀圆盘的厚度为 L 时

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

4) 绕中心轴的转动惯量

空心圆柱的转动惯量为大小两个实心圆柱体的转动惯量之差。

实心圆柱的转动惯量

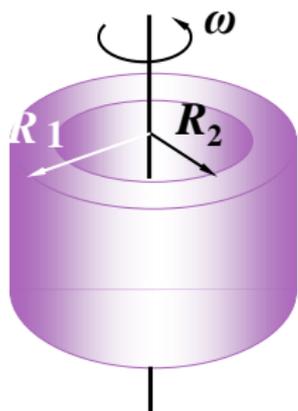
$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2, I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$$

$$m_1 = \pi \rho l R_1^2, m_2 = \pi \rho l R_2^2$$

$$\rho = \frac{m}{\pi(R_1^2 - R_2^2)l}$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} \pi \rho l (R_1^4 - R_2^4) = \frac{m(R_1^4 - R_2^4)}{2(R_1^2 - R_2^2)}$$

$$= \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$



5) 均匀球体绕直径的转动惯量

设球体的半径为 R ，总质量为 m ，则密度为 $\rho = 3m/4\pi R^3$ 。将球体分成一系列半径不同的质量为 dm 的“微元”薄圆盘组成

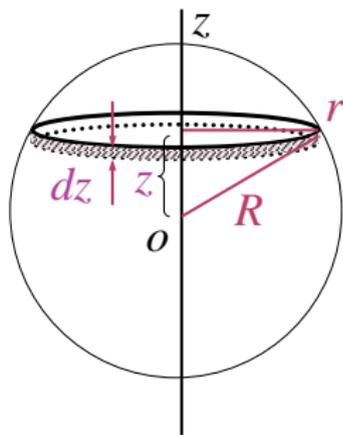
由薄圆盘的转动惯量式

$$I = \frac{1}{2} m R^2 \quad \longrightarrow \quad dI = \frac{1}{2} r^2 dm$$

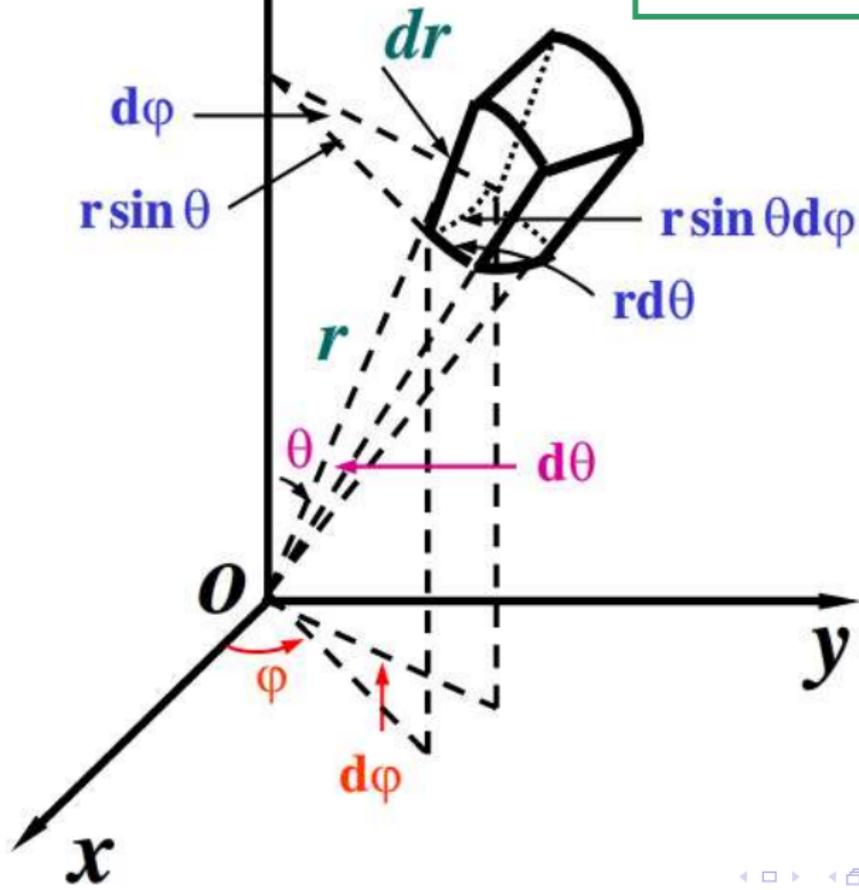
$$I = \int dI = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \rho (\pi r^2 \cdot dz) \cdot r^2$$

$$= \frac{\rho}{2} \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz$$

$$= \frac{2}{5} m R^2$$



$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

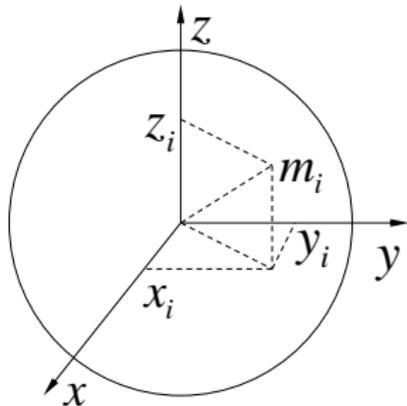


6) 质量 m 、半径为 R 的匀质薄球壳，求其以直径为转轴的转动惯量。

$$I_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_y = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2)$$

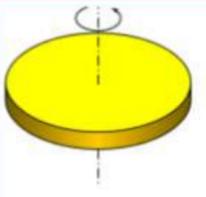
$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



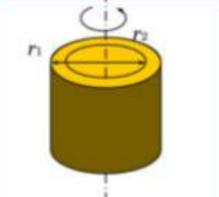
$$I_x + I_y + I_z = 2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2mR^2$$

$$I_x = I_y = I_z = I \longrightarrow I = \frac{2}{3}mR^2$$

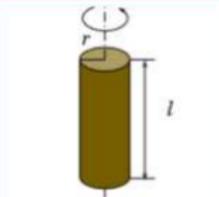
几个典型形状刚体的转动惯量



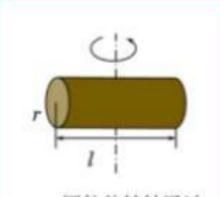
薄圆盘转轴通过
中心与盘面垂直

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$


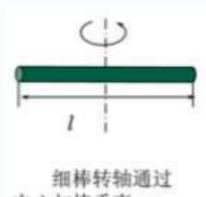
圆筒转轴沿几何轴

$$J = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$$


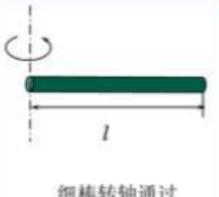
圆柱体转轴沿几何轴

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$


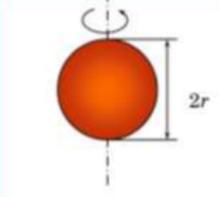
圆柱体转轴通过
中心与几何轴垂直

$$J = \frac{m r^2}{4} + \frac{m l^2}{12}$$


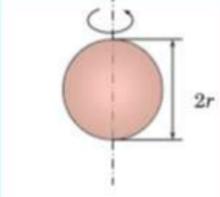
细棒转轴通过
中心与棒垂直

$$J = \frac{m l^2}{12}$$


细棒转轴通过
端点与棒垂直

$$J = \frac{m l^2}{3}$$


球体转轴沿直径

$$J = \frac{2 m r^2}{5}$$


球壳转轴沿直径

$$J = \frac{2 m r^2}{3}$$

◎ 8.3.3 刚体的动能

刚体是由许多质点组成的。所以，刚体的动能就等于各质点的动能之和，即

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

刚体的运动总可以分解为随着某基点O的平动和绕该点的转动，而且基点是可以任意选取的。那么前面的动能表达式是否也可以分解成平动动能和转动动能呢？这是可以做到的。但对基点的选取有特殊的要求，即只有当选取刚体的质心C作为基点时，才可以进行这种分解。

刚体中每个质点的速度 \vec{v}_i 可分解成平动部分及转动部分。如果取质心C作为基点，那么，平动部分的速度就是质心速度 \vec{v}_c ，转动部分的速度就是质点相对于质心系的运动速度 \vec{v}'_i ，根据速度合成，有：

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}'_i$$

所以，上式可以写为：

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_c^2 + \vec{v}'_i^2 + 2\vec{v}_c \vec{v}'_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_c \vec{v}'_i \end{aligned}$$

因为 $\vec{v}'_i = \frac{d\vec{r}'_i}{dt}$, \vec{r}'_i 是第 i 个质点相对于质心的位矢,
所以

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i$$

按质心的定义, 应有 $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i = 0$

所以, 式中最后一项总为零, 故有

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2$$

其中 $m = \sum_{i=1}^n m_i$ 是刚体的总质量。此式表示刚体的动能的确可以看成两部分的和, 即以基点的平动动能 $\frac{1}{2} m v_c^2$ 及相对于质心的转动动能 $T_{\text{转}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2$

如果转动角速度为 ω ，则 $v_i = r_i \omega$

其中 r_i 是第 i 个质点与转动轴的距离。代入得到

$$T_{\text{转}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

其中
$$I_C = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

就是该刚体相对于通过质心的转轴的转动为 ω 的转动惯量。

刚体动能可以写为
$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

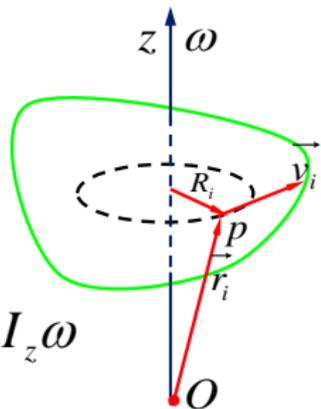
这就是刚体动能的最终表达式。

！只有选择质心作为分解平动及转动的基点时，上式才是适用的。

根据质心的定义 
$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_c \cdot \vec{v}'_i = 0$$

动能定理

如图所示，考虑以角速度 ω 绕固定轴 z 轴转动的一个刚体，其总角动量为



$$L_z = \omega \cdot \sum (x_i^2 + y_i^2) m_i = \omega \cdot \sum R_i^2 m_i = I_z \omega$$

质点系角动量定理 $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow M_z = \frac{dL_z}{dt}$

$$\therefore \frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z \Rightarrow \omega \frac{d(I_z \omega)}{dt} = \omega M_z = M_z \frac{d\varphi}{dt}$$

如果 I 不随时间变化

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_z \omega^2 \right) = M_z \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{其中 } \varphi \text{ 是质点绕轴转过的角度}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_z \omega^2 \right) = M_z \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{对 } t \text{ 积分, 得}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{1}{2} I_z \omega^2 \right)_2 - \left(\frac{1}{2} I_z \omega^2 \right)_1 = \int_1^2 M_z d\varphi$$

$$\text{动能定理} \quad \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)_2 - \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)_1 = \int_1^2 F dx$$

力矩与力相对应，角位移与位移相对应，转动惯量与质量相对应，角速率与速率相对应。

质点运动与刚体定轴转动对照表

质点运动	刚体定轴转动
位移 \vec{r}	位移 θ
速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	角速度 ω
加速度 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	角加速度 α
质量 (惯性) m	转动惯量 $I = \int r^2 dm$
力 \vec{F}	力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$	转动定律 $\vec{M} = I\vec{\alpha}$
动量 $\vec{P} = m\vec{v}$	动量矩 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = I\vec{\omega}$
冲量 $\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$	冲量矩 $\int_{t_0}^t \vec{M} dt$
动量定理 $\int_{t_0}^t \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$	动量矩定理 $\vec{L} = \int_{t_0}^t \vec{M} dt = I\omega_2 - I\omega_1$
动能 $\frac{1}{2}mv^2$	动能 $\frac{1}{2}I\omega^2$
功 $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$	功 $W = \int_A^B \vec{M} \cdot d\vec{\theta} = \int_A^B M d\theta$
动能定理 $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$	动能定理 $\int_A^B M d\theta = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$
动量守恒 $\int_{t_0}^t \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = 0$	动量矩守恒 $\int_{t_0}^t \vec{M} dt = I\omega_2 - I\omega_1 = 0$

8.4 刚体的动力学方程

8.4.1 刚体的动力学方程

□任一质点系，其质心运动方程

$$m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}$$

其中 m 是刚体质量， \vec{r}_c 是刚体的质心位置， \vec{F} 是刚体所受到的总外力。

□刚体的动量矩定理 $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

其中 \vec{L} 是刚体的角动量， $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$ 是刚体所受到的总外力矩。

因为刚体只有6个自由度，两个矢量方程已经能够描写刚体的全部的动力学。因此，它们称为刚体的动力学方程。

◎ 8.4.2 刚体运动中的外力做功

□ 讨论转动轴线不固定，但其方向不变(例如平行于z轴)的情况。

刚体动能表达式(以质心为基点) $T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$

根据动能定理 $W = T_2 - T_1$

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{1}{2} m v_{c2}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_{c1}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_1^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} m v_{c2}^2 - \frac{1}{2} m v_{c1}^2 \right) + \left(\frac{1}{2} I_c \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_c \omega_1^2 \right) \end{aligned}$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_{c2}^2 - \frac{1}{2} m v_{c1}^2 = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}_c$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \rightarrow \quad M_z = \frac{dL_z}{dt} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} I_c \omega_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} I_c \omega_1^2 \right) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$$

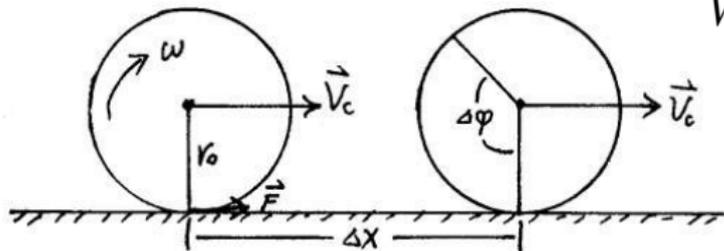
$$\therefore W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$$

外力做功：外力引起平动动能增加而做的功；第二项是外力矩引起转动动能的增加而做的功。

当刚体受到多个外力的情况，第 i 个外力 \vec{F}_i 及其力矩所做的功也类似可以写成为

$$W_i = \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_c + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{zi} d\varphi$$

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int M_z d\varphi \\ &= \int F dx + \int (-Fr_0) d\varphi \\ &= F\Delta x + (-Fr_0\Delta\varphi) \\ &= F(\Delta x - r_0\Delta\varphi) \\ &= 0 \end{aligned}$$



纯滚动过程中摩擦力并不做功。

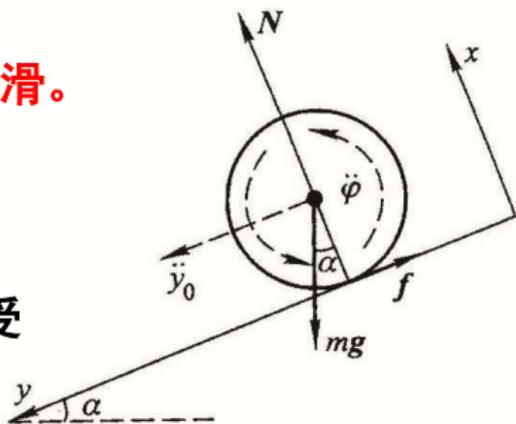
例题：半径为 R 、质量为 m 的匀质圆柱，沿倾角为 α 的静止斜面滚下。斜面与柱之间的摩擦系数为 μ 。试求圆柱滚下时质心的加速度。

圆柱可能无滑动滚下，也可能既滚且滑。

□圆柱无滑动滚下

圆柱受力分析：圆柱受重力 mg ，竖直向下；圆柱受到斜面的正压力 N ；又受到斜面的静摩擦力 f 。

取固定于斜面的坐标系。 x 轴垂直于斜面向上， y 轴沿斜面向下。质心的加速度平行于斜面向下， x 方向的分量永远为零。



质心运动定理

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - f = m\ddot{y}_0 & (1) \\ N - mg \cos \alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

动量矩定理，相对于质心坐标系 $fR = I_c \dot{\omega} = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\omega}$ (3)

不打滑的运动学判据 $\ddot{y}_0 = R\dot{\omega}$ (4)

由方程(1)——(4)组成的方程组解得

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{mR}{I_c + mR^2} g \sin \alpha \\ \ddot{y}_0 = \frac{mR^2}{I_c + mR^2} g \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} f = \frac{I_c}{I_c + mR^2} mg \sin \alpha \\ N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

I_c 越大，加速度 \ddot{y}_0 越小，反映出其惯量的概念。

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{2}{3} \frac{1}{R} g \sin \alpha \\ \ddot{y}_0 = \frac{2}{3} g \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} f = \frac{1}{3} mg \sin \alpha \\ N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

“无滑动滚下”成立的条件是 $f \leq \mu N$

$$f \leq \mu N \quad \rightarrow \quad \mu \geq \frac{1}{3} \tan \alpha$$

角动量定理，相对于瞬心O，瞬轴

$$mgR \sin \alpha = I_o \dot{\omega} = (I_c + mR^2) \dot{\omega} = \frac{3}{2} mR^2 \dot{\omega} \quad (5)$$

对O点而言，只有重力才有力矩，支持力N和摩擦力过O点，其力矩为零。

由方程(1)，(2)，(4)，(5)组成的方程组可得相同的解

□ 圆柱既滚且滑

- ✓ 圆柱受到斜面的动摩擦力 $f = \mu N$,
- ✓ 质心的加速度与圆柱的角加速度是各自独立的。

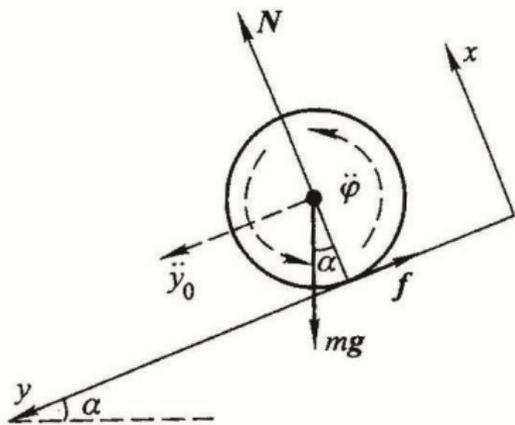
质心运动定理

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - \mu N = m\ddot{y}_0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N - mg \cos \alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

角动量定理，相对于质心坐标系

$$\mu NR = I_c \dot{\omega} = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\omega} \quad (3)$$



由方程(1) — (3)组成的方程组解得

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{mR}{I_c} \mu g \cos \alpha \\ \ddot{y}_0 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} f = \mu mg \cos \alpha \\ N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

I_c 越大, 加速度 $\dot{\omega}$ 越小, 反映出其惯量的概念。

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{2}{R} \mu g \cos \alpha \\ \ddot{y}_0 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} f = \mu mg \cos \alpha \\ N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

“既滚且滑” 成立的条件是 $\ddot{y}_0 > R\dot{\omega}$

$$\ddot{y}_0 > R\dot{\omega} \quad \rightarrow \quad \mu < \frac{1}{3} \tan \alpha$$

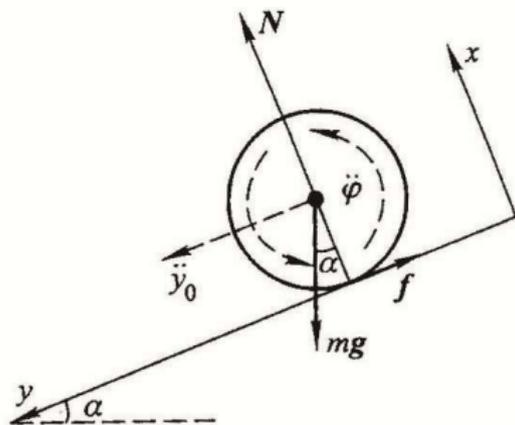
例题：前例中的圆柱开始静止于高度 h 处，沿着斜面**无滑动地滚下**，试求其滚到斜面底端时的速度。

□施于圆柱的力有：重力、正压力 N ，**静摩擦力 f** 。重力是保守力； N 与 f 总是不做功。**机械能守恒定律适用。**

□规定圆柱在斜面底端处的势能为零。开始时圆柱动能为零，势能为 mgh ，所以开始时机械能等于 mgh 。

□圆柱到达斜面底端，动能应为

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times m R^2 \omega^2$$



□机械能守恒定律 $mgh = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$ (1)

不打滑的运动学判据 $v_0 = R\omega$ (2)

由方程(1) — (2)组成的方程组解得

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

圆柱既滚且滑时，机械能守恒？

相对于瞬心O，刚体的动能

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_0 + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}'_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}'_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (r'_i)^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \end{aligned}$$

□机械能守恒定律 $mgh = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} (I_c + mR^2) \omega^2$

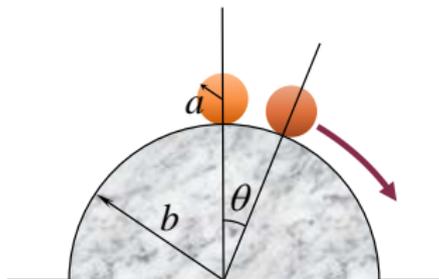
不打滑的运动学判据 $v_0 = R\omega$

由以上方程组成的方程组解得

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

例题：已知质量为 m ，半径为 a 的匀质球体，自半径为 b 的固定半圆柱顶端由静止经小扰动后做纯滚动地滚下。求球体脱离圆柱时球心的位置。

设球心速度为 v ，转动角速度为 ω ，球心与半圆柱中心连线与垂线夹角为 θ 。



由运动的约束关系，即接触点速度为0的条件得：

$$v = \omega a$$

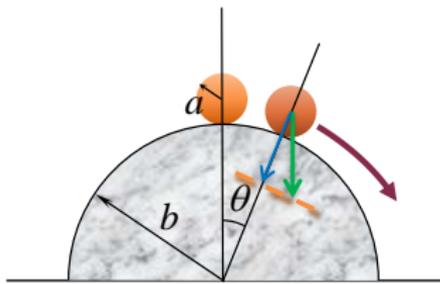
由机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mg(a+b)(1 - \cos\theta)$$

其中小球转动惯量为： $I = \frac{2}{5}ma^2$

在离开半圆柱面对小球支撑力恰好为0时，小球离开。
此时

$$mg \cos \theta = m \frac{v^2}{a+b}$$



综合以上各式得：

$$\cos \theta = \frac{10}{17} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos \frac{10}{17}$$

由此可知小球离开半圆柱时的位置。

此题如果给定最大摩擦因数，则在小球未脱离半圆柱之前，支撑力减小使摩擦力也减小，后来不足以使小球加速滚动，会产生滑动。

例题：两个质量同为 m 、半径同为 R 匀质实心滑轮，用不可伸长轻绳连接，定滑轮可无摩擦的转动。将系统从静止释放，求下面滑轮的平动加速度。

上面的滑轮 $TR = I\beta_1, I = \frac{1}{2}mR^2$

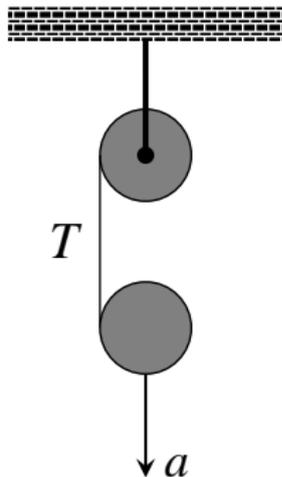
下面的滑轮

质心运动 $mg - T = ma$

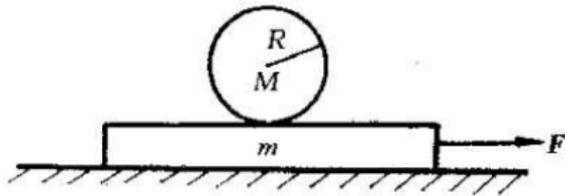
相对质心的转动 $TR = I\beta_2$

运动约束关系 $a = (\beta_1 + \beta_2)R$

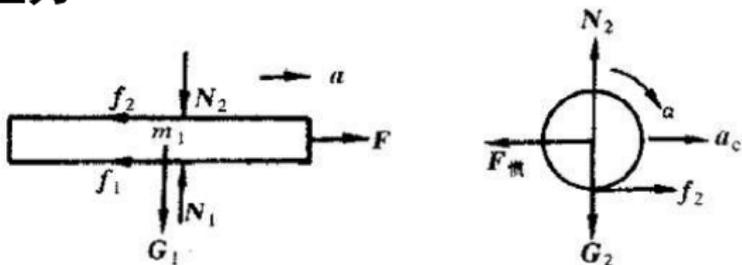
→ $a = \frac{4}{5}g$

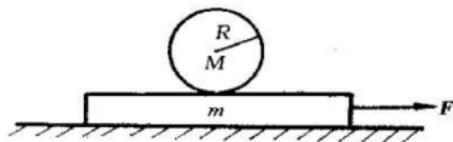
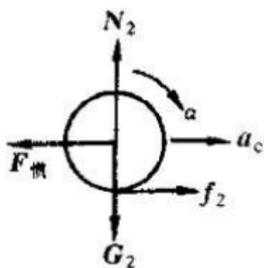
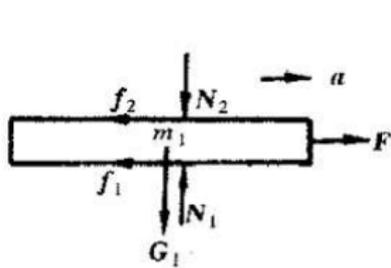


例题：质量为 m 的平板受水平力 F 的作用沿水平面运动，板与水平面之间的摩擦系数为 μ 。板上放置一质量为 M ，半径为 R 的圆柱体。(1) 如果圆柱体在平板上的运动为纯滚动，求板的加速度。(2) 为使圆柱体在平板上作纯滚动，求 F 的最大值，设圆柱体与板之间的摩擦系数为 μ 。



□ 平板和圆柱体的受力分析，由于圆柱体在平板上运动，而平板有向右的加速度，圆柱体的质心坐标系为非惯性，要考虑到惯性力





$$F - f_1 - f_2 = ma \quad (1)$$

□对平板

$$f_1 = \mu(m + M)g \quad (2)$$

□对圆柱体

$$f_2 - Ma = Ma' \quad (3)$$

$$f_2 R = -I_c \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2} MR^2 \alpha \quad (4)$$

□无滑动滚动 $R\alpha = a'$ (5)

□由方程(1)-(5)解得
$$a = \frac{F - \mu(m + M)g}{M \cdot 1/3 + m}$$

□当 F 达到最大值 F_{\max} 时，圆柱体开始滑动，圆柱体和平板之间的摩擦力为滑动摩擦力 $f_2 = \mu Mg$ 。和前面的方程 (1)，(3)-(5) 可得

$$F_{\max} = 2(M + 2m)\mu g$$

思考：在圆柱体的质心坐标系中，**惯性力过质心**，因此其相对于质心的力矩为零，写出的角动量定理中不需要惯性力矩的贡献。假如我们以**瞬心为参考点**，如何讨论？**惯性力矩的贡献？**

例题：镜框贴着墙立在有摩擦的钉子上，稍受扰动其即向下倾倒，当到达一定角度 θ 时，此镜框将跳离钉子，求 θ 。
(提示：跳离钉子时，镜框对钉子的作用力为零。)

解：由能量守恒，势能转换为刚体转动动能

$$\frac{1}{2} mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} ml^2 \omega^2$$

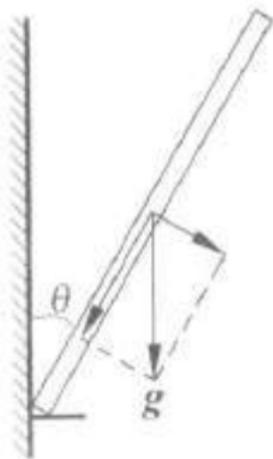
两边约分

$$3g(1 - \cos \theta) = l\omega^2 = l\dot{\theta}^2$$

求关于时间的导数

$$2l\dot{\theta}\ddot{\theta} = 3g \sin \theta \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

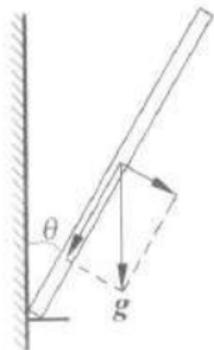
镜框跳离钉子，我们需要寻找此现象的临界条件，即镜框对钉子的作用力为零。



镜框在转动时，质心的

$$\text{向心加速度 } a_n = \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{3}{2} g(1 - \cos \theta)$$

$$\text{切向加速度 } a_\tau = \frac{l}{2} \ddot{\theta} = \frac{3}{4} g \sin \theta$$



解法一：将“镜框对钉子的作用力为零”理解成在镜框的方向上没有力的作用，因此重力加速度在径向的分量与向心加速度相等。

$$mg \cos \theta = \frac{l}{2} m \dot{\theta}^2 = \frac{3m}{2} g(1 - \cos \theta) = m a_n$$

$$\therefore 2 \cos \theta = 3 - 3 \cos \theta \Rightarrow \theta = \arccos(3/5)$$

在镜框的垂直方向上 $ma_\tau = \frac{3}{4} mg \sin \theta = \frac{3}{5} mg$

重力在此方向上分量

$$mg \sin \theta = \frac{4}{5} mg$$

不相等

✓钉子对镜框的支持力和摩擦力可能合成出这两者的差别。因此重力加速度在径向的分量与向心加速度相等并不能得到“镜框对钉子的作用力为零”

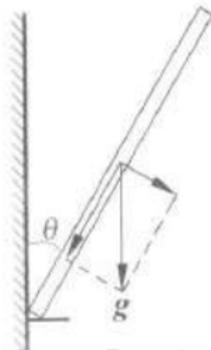
解法二：将“镜框对钉子的作用力为零”理解成在镜框在水平方向上没有力的作用，因此水平加速度为零。

$$a_n \sin \theta = a_\tau \cos \theta$$

$$\frac{3}{2} g(1 - \cos \theta) \sin \theta = \frac{3}{4} g \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \theta = \arccos(2/3)$$

在垂直方向上的加速度 $a_n \cos \theta + a_\tau \sin \theta = \frac{3}{4} g$

✓钉子对镜框仍有支持力，只是镜框相对于钉子没有横向运动的趋势。横向加速度为零，并不能得出镜框跳离钉子。



解法三：将“镜框对钉子的作用力为零”理解成在镜框在垂直方向的加速度为重力加速度。

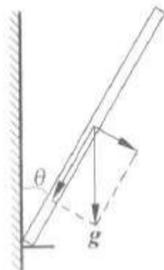
$$a_n \cos \theta + a_\tau \sin \theta = g$$

$$\frac{3}{2} g(1 - \cos \theta) \cos \theta + \frac{3}{4} g \sin^2 \theta = g \Rightarrow \theta = \arccos(1/3)$$

在水平方向上的加速度 $a_n \sin \theta - a_\tau \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} g$

- ✓ 镜框在水平方向上加速度不为零。由谁提供？镜框跳离钉子？
- ✓ 在镜框跳离钉子跳离之前，支撑力，摩擦力和重力提供向心力。过了“跳离”这个临界点。摩擦力会“突然”消失，质心开始垂直向下运动。
- ✓ 此时沿镜框方向的向心加速度为

$$a_n = \frac{3}{2} g(1 - \cos \theta) = g$$



✓水平方向摩擦力和重力沿镜框方向的合力产生的加速度为

$$\frac{\sqrt{2}}{2} g \sin \theta + g \cos \theta = g$$

与 a_n 相同。说明确实是向左摩擦力和重力一起提供了向心力。

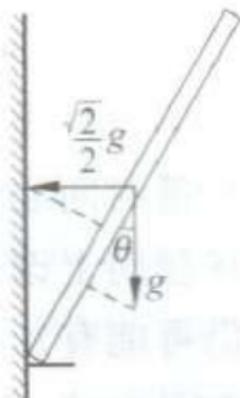
✓在镜框垂直方向的加速度 $a_r = \frac{3}{4} g \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} g$

水平方向摩擦力和重力在镜框垂直方向上合力产生的加速度为

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} g \sin \theta + g \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} g$$

与 a_t 相同。

✓在镜框水平和垂直方向上结果均吻合，说明解法三正确。出现水平加速度不为零。**摩擦力的作用过程的简化**

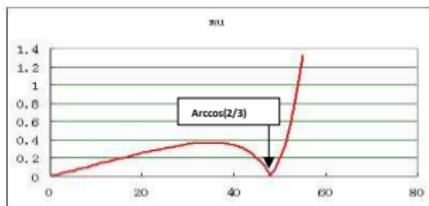
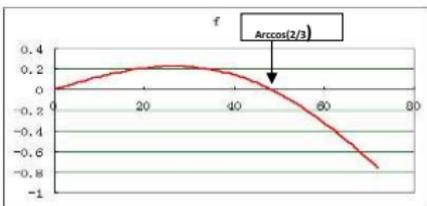
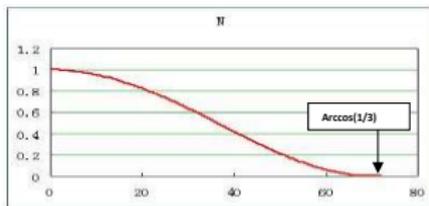
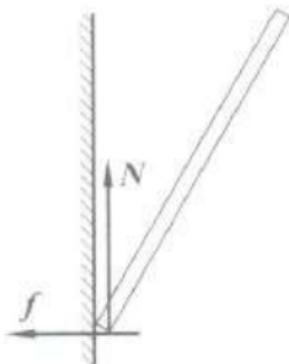


✓根据质心运动定理

$$N = mg \left[\frac{9}{4} \cos^2 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \right]$$

$$f = \frac{3}{2} mg \sin \theta \left[\frac{3}{2} \cos \theta - 1 \right]$$

$$\mu = \frac{f}{N}$$



✓在随着角度 θ 的增加，支持力 N 持续减小，**摩擦系数逐渐增大**，才能保持镜框在镜框跳离钉子跳离之前作定轴转动。

✓镜框底端相对于钉子的运动趋势由摩擦力 f 的方向确定，因此与摩擦系数相关。

8.4.3 刚体的平衡

刚体处于平衡状态，是指其质心加速度为零，同时角动量不变的状态

$$\vec{F} = 0 \quad \vec{M} = 0$$

作用在刚体上的外力矩在OZ轴上的分量为零。

$$L_z = \text{不变量} = (I\omega)_z$$

即转动运动保持不变，刚体依靠“惯性”而永远转动，如果刚体中物质的相对位置变化了，导致转动惯量从 I_1 变到 I_2 ，则角速率将从 ω_1 变到 ω_2 。并且 $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$



花样滑冰运动员通过改变身体姿态即改变转动惯量来改变转速。

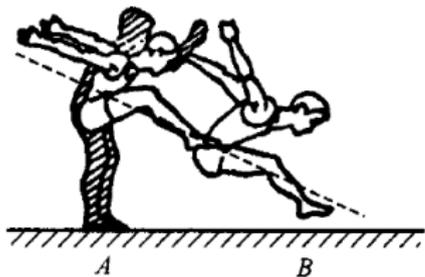
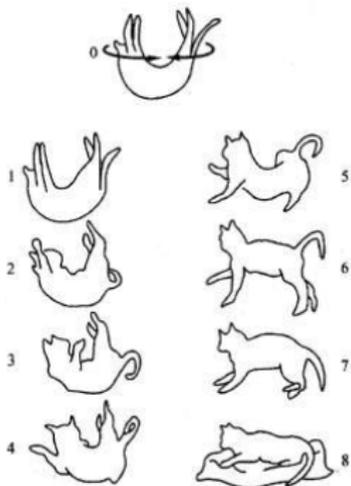
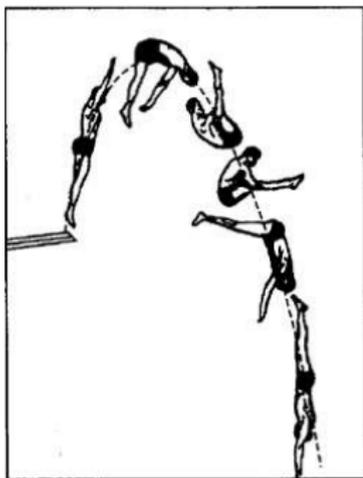


图 6.4-3 不同姿势着地对
跳远成绩的影响



例题：太阳绕自转轴的旋转周期为26天，若坍缩成中子星，估计它的转速将如何？

解：中子星中的物质可以简单地看成密排的中子，估计其密度

$$\rho_n = \frac{m_p}{\frac{4\pi}{3} r_0^3} = \frac{1.67 \times 10^{-27}}{\frac{4\pi}{3} (1.5 \times 10^{-15} m)^3} = 1.18 \times 10^{17} \text{ kg} / \text{m}^3$$

太阳质量 $M_{\text{日}}=1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，半径 $R_{\text{日}}=6.9599 \times 10^8 \text{ m}$ 。太阳坍缩成中子星，则半径将变为 R' ，它满足关系

$$R'^3 = M_{\text{日}} / \left(\frac{4\pi}{3} \rho_n \right) = 4.024 \times 10^{12} \text{ m}^3 \Rightarrow R' = 1.59 \times 10^4 \text{ m}$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 = \frac{\frac{2}{5} M_{\text{日}} R_{\text{日}}^2}{\frac{2}{5} M_{\text{日}} R'^2} \omega_1 = \left(\frac{R_{\text{日}}}{R'} \right)^2 \omega_1 = 5.36 \times 10^3 \text{ 弧度/秒}$$

$$T_2 = \left(\frac{R'}{R_{\text{日}}}\right)^2 T_1 = \left(\frac{1.59 \times 10^4}{6.9599 \times 10^8}\right)^2 \times 26 \text{天} = 1.36 \times 10^{-8} \text{天} \approx 1.17 \text{毫秒}$$

若太阳坍缩成中子星，其转速是1.17毫秒一周。

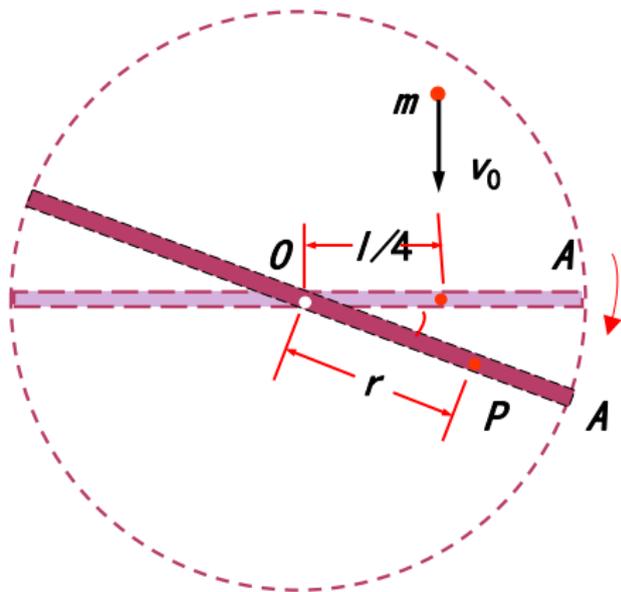
例题：质量很小，长度为 l 的均匀细杆，可绕通过其中心点 O 并与纸平面垂直的轴在竖直平面内转动，当细杆静止在水平位置时，有一只小虫以速率 v_0 垂直落在距点 O 为 $l/4$ 处，并背离点 O 向细杆的端点 A 爬行。设小虫的质量与细杆的质量均为 m 。问：欲使细杆以恒定的角速度转动，小虫应以多大速率向细杆端点爬行。

解：小虫落在细杆上，可视为完全非弹性碰撞，且碰撞时间极短。重力的冲量矩可略去不计，细杆带着小虫一起以角速度 ω 转动。碰撞前后，小虫与细杆的动量矩守恒

$$mv_0 \cdot \frac{l}{4} = \left[\frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right] \omega$$

故由上式可得细杆角速度为

$$\omega = \frac{12}{7} \cdot \frac{v_0}{l}$$



作用在细杆和小虫系统的外力矩仅为小虫所受的重力矩，即

$$M = mgr \cos \theta \quad (1)$$

由于要求细杠角速度恒定，故从转动定律可得

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = \omega \frac{dI}{dt} \quad (2)$$

而 $I = \frac{1}{12} ml^2 + mr^2$  $\frac{dI}{dt} = 2mr \frac{dr}{dt}$ (3)

(1) - (3) 式联立求解得：

$$mgr \cos \theta = 2mr\omega \frac{dr}{dt}$$

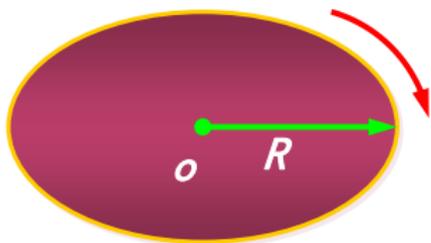
考虑到 $\theta = \omega t$ ，并且将 ω 值代入上式得：

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{g}{2\omega} \cos \omega t = \frac{7gl}{24v_0} \cos\left(\frac{12v_0}{7l} t\right)$$



讨论：机器人吸尘器中的部分力学问题

例题：一半径为 R ，质量为 m 的均匀圆盘平放在粗糙的水平面上。若它的初角速度为 ω_0 ，绕中心 o 旋转，问经过多长时间圆盘才停止？（设摩擦系数为 μ ）



□圆盘中心 o 旋转，取垂直于圆盘且过中心 o 的轴为 z 轴（向上为正），圆盘绕 z 轴作定轴转动，角速度沿 z 轴负方向。

□圆盘会受到重力和地面对圆盘的支持力，它们相等和过均匀圆盘中心 o 且平行于 z 轴。摩擦力，其大小和方向如何？“微元”

□取 (x, y) 处的微元 $dx dy$ ，其离 o 点的距离为 r 。微元作圆周运动，摩擦力与微元的速度方向相反。摩擦力对 o 点的力矩为 Z 轴正方向。（摩擦力的合力是多少？）

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{f} \parallel \vec{v}$$

$$f = \mu N = \mu mg$$

□圆盘上每一点微元的摩擦力方向都不同，但是其对0点的力矩均为Z轴正方向。

$$M_f = \int \mu g r dm = \iint \mu g r \sigma dx dy$$

□采用变化

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow dx dy = r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} M_f &= \iint \mu g r \sigma dx dy = \iint \mu g r \sigma r dr d\theta = \mu g \sigma \iint r^2 dr d\theta \\ &= \mu g \sigma \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3} \mu g \sigma R^3 = \frac{2}{3} \mu m g R \end{aligned}$$

□对圆盘，过0点的力矩只有摩擦力的贡献。

□圆盘：角动量定律在z轴方向的分量

$$M_f = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(-I_c \omega) \Rightarrow \frac{2}{3} \mu mg R = -\frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$\therefore \int_0^t dt = -\int_{\omega_0}^0 \frac{3R}{4\mu g} d\omega \Rightarrow t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

$$\frac{2}{3} \mu mg R = -\frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

$$\therefore \int_0^\theta d\theta = -\int_{\omega_0}^0 \frac{3R}{4\mu g} \omega d\omega \Rightarrow \theta = \frac{3R}{8\mu g} \omega_0^2$$

圆盘转过的角度

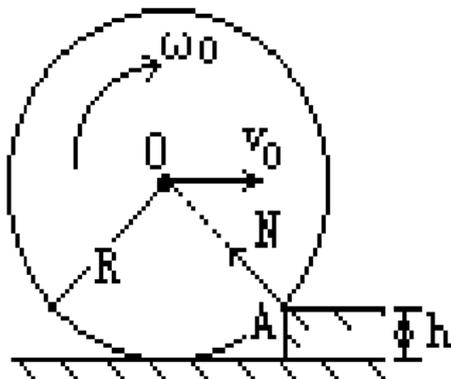
例题：半径为 R 的圆木以角速度 ω_0 在水平地面上作**纯滚动**，在前进的路上撞在一高度为 h 的台阶上。设碰撞是完全非弹性的，即碰撞后圆木不弹回。要圆木能够翻上台阶而又始终不跳离台阶，对台阶的高度有什么要求？

解：

碰前：质心速度 $v_0 = R\omega_0$

角动量 $I_c\omega_0 + mv_0(R-h)$

碰后： $I_A\omega$ $I_A = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$



碰撞过程角动量守恒 $I_c\omega_0 + mv_0(R-h) = I_A\omega$

$$\frac{1}{2}mR^2\omega_0 + m\omega_0R(R-h) = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\omega$$

解得: $\omega = \frac{3R-2h}{3R} \omega_0$

翻上台阶条件: $\frac{1}{2} I_A \omega^2 > mgh \quad \omega^2 > \frac{2mgh}{I_A}$

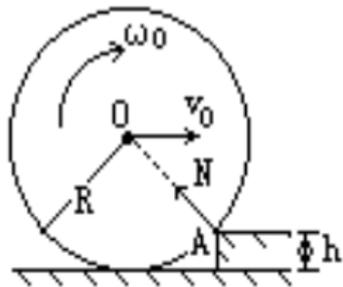
$$\frac{(3R-2h)^2}{9R^2} \omega_0^2 > \frac{2mgh}{3mR^2/2} \quad \omega_0^2 > \frac{12gh}{(3R-2h)^2}$$

不跳离台阶 $N > 0$

牛顿运动定律 $mg \cos \theta - N = mR\omega^2$

初始位置 N 最小 $\cos \theta = \frac{R-h}{R}$

$$N = mg \frac{R-h}{R} - mR \frac{(3R-2h)^2}{9R^2} \omega_0^2 > 0$$



不跳离台阶 $\omega_0^2 < \frac{9g(R-h)}{(3R-2h)^2}$

翻上台阶 $\omega_0^2 > \frac{12gh}{(3R-2h)^2}$

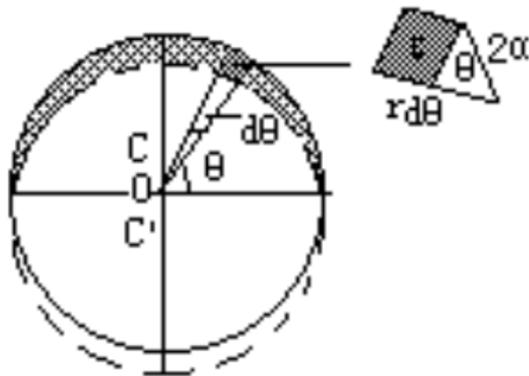
$$\frac{12gh}{(3R-2h)^2} < \omega_0^2 < \frac{9g(R-h)}{(3R-2h)^2} \quad \longrightarrow \quad h < \frac{3R}{7}$$

例题：一半径为 r 的粗糙圆盘与水平地面紧密接触。圆盘一面绕自转轴以角速度 ω 旋转，一面以速度 v 平移($v \ll r\omega$)。设摩擦系数 μ 与速度无关，求圆盘所受的阻力。

解：如图，瞬心 O 在质心 C 之下
距离为：

$$a = \frac{v}{\omega}$$

在 O 之下距离为 a 处取对称点 C' ，以同样半径做圆弧。该圆弧之下刚体上各质点的速度分布是相对于瞬心 O 对称的，与速度方向相反的摩擦力全部抵消。圆盘所受的阻力为月牙形面积上所受阻力的合力，由对称性可以看出，其合力与平动速度反向平行。



以O为原点取坐标的极轴沿平动速度的方向，沿 θ 方向月牙厚度为

$$\tau = 2a \sin \theta$$

θ 到 $\theta + d\theta$ 之间面元的面积为

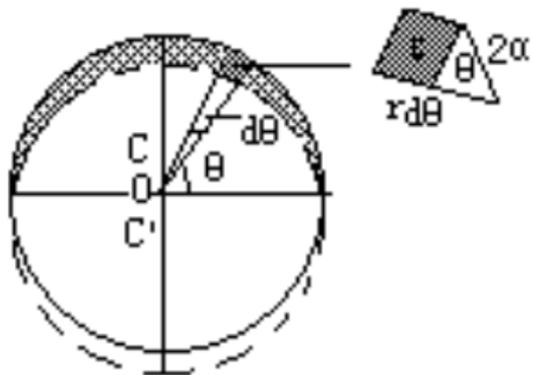
$$dS = \tau d\theta$$

摩擦力大小为 $df = \mu \sigma g dS$

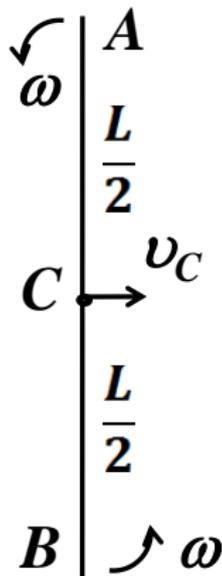
摩擦力沿极轴方向分量为 $-df \sin \theta = -\frac{2\mu m g a}{\pi r} \sin^2 \theta d\theta$

圆盘所受的阻力为：

$$f = \int_0^\pi -df \sin \theta = \int_0^\pi -\frac{2\mu m g a}{\pi r} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\mu \nu m g}{\omega r} \propto -\frac{\nu}{\omega}$$



例题：质量 M 长为 L 的匀质细杆 AB ，某时刻在水平桌面上绕着它的中心 C 以角速度 ω 逆时针方向旋转，同时 C 又具有与杆垂直的水平向右速度 v_C ，如图。设细杆各部位与桌面间的摩擦系数为 μ ，试求该时刻 C 的加速度和细杆的角加速度。



解：细杆下半部CB各部分合速度均向右，上半部分CA各部分合速度在 ω 较小时也均向右，但在 ω 较大时，靠近C的部分合速度向右，靠近A的部分合速度向左。据此，分两种情况讨论。

(1) $\omega < 2v_C/L$ ，即 $\omega L/2 < v_C$ 时

瞬心在A端上方，细杆各部分合速度均朝右，所受摩擦力都向左，合摩擦力为 μmg ，方向向左。

C的加速度为：

$$a_C = \frac{f}{M} = \mu g$$

摩擦力相对于C的力矩和 $M_f=0$ ，角加速度为 β

(2) $\omega \geq 2v_c/L$, 即 $\omega L/2 \geq v_c$ 时

瞬心P与质心C的距离为

$$l = \frac{v_c}{\omega} \leq \frac{L}{2}$$

P' 是P的对称点。将CP段所受摩擦力记为 f_1 , PA段所受摩擦力记为 f_2 . 方向如图, 大小分别为

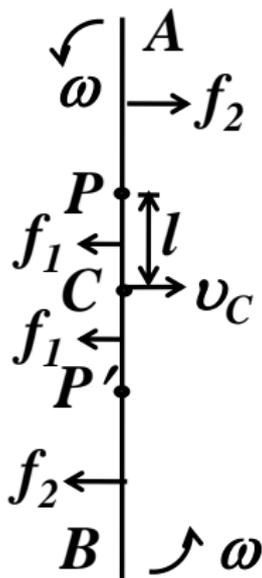
$$f_1 = \mu \frac{M}{L} l g = \mu \frac{M v_c g}{\omega L}$$

$$f_2 = \mu \frac{M}{L} \left(\frac{L}{2} - l \right) g = \mu \frac{M}{L} \left(\frac{L}{2} - \frac{v_c}{\omega} \right) g$$

细杆所受合摩擦力为:

$$f = 2f_1 = \frac{2M v_c g}{\omega L}$$

方向向左



C的加速度为 $a_C = \frac{f}{M} = \frac{2\mu v_C g}{\omega L}$ ，方向向左

细杆受摩擦力相对C点力矩合的方向垂直纸面朝内，大小为：

$$M_f = 2f_2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} + 1 \right) \right] = \mu \frac{M}{L} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{v_C^2}{\omega^2} \right) g$$

由转动定理，角加速度方向垂直纸面向内，大小为

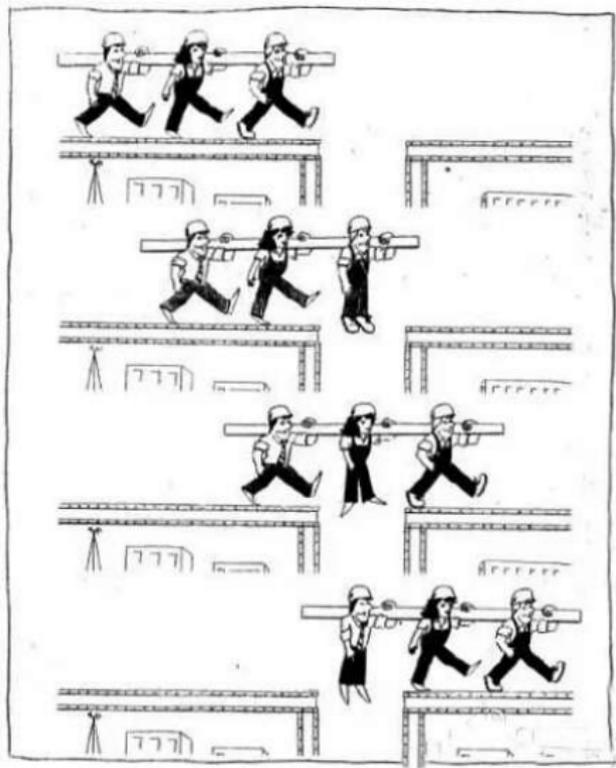
$$\beta = M_f / I_C = \frac{3\mu}{L} \left(1 - \frac{4v_C^2}{\omega^2 L^2} \right) g$$

8.5 静力学中的结构受力分析

静力学主要涉及平衡结构及作用力的计算。我们先对结构受力进行分析，然后讨论各种结构在不出现显著形变或断裂的情况下所能承受的力。



流动式架桥机





◎ 8.5.1 平衡及其条件

➤刚体处于平衡状态，是指合力为零，同合力矩也为零的状态。

$$\vec{F} = 0 \quad \vec{M} = 0$$

8.5.2 受力分析及在工程中的应用

例题：一质量 $m=25.0\text{kg}$ ，长度为 2.20m 的均匀横梁用铰链安装在墙上，如图所示。横梁由一根与其夹角为 30.0° 的吊索拉到水平位置。横梁末端悬吊着质量 $M=280\text{kg}$ 的物体。试求铰链作用在横梁上力 F_H 的分量，以及吊索上张力 F_T 的分量。

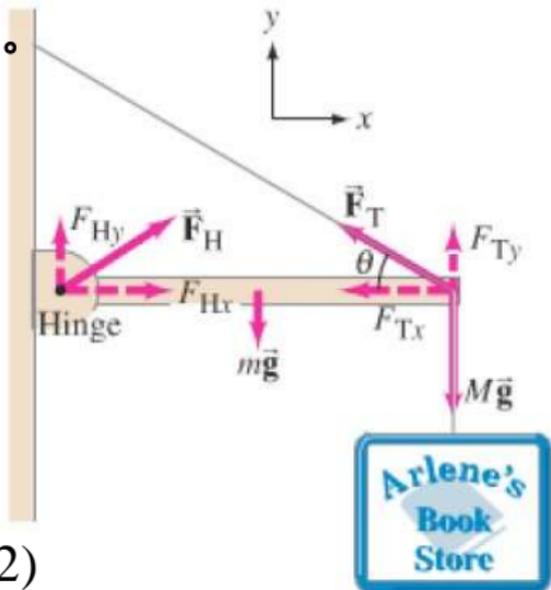
解：绳索只能沿它的长度方向施加力。图中给出了所有作用在横梁上的力；同时也给出了力 F_H 和 F_T 的分量。

在水平(x)方向，合力为

$$\sum F_x = F_{Hx} - F_{Tx} = 0 \quad (1)$$

在垂直(y)方向，合力为

$$\sum F_y = F_{Hy} + F_{Ty} - mg - Mg = 0 \quad (2)$$



选 F_T 和 Mg 的作用点作为原点。只有 mg 和 F_{Hy} 对合力矩有贡献

$$-(F_{Hy})(2.20\text{m}) + (mg)(1.10\text{m}) = 0 \quad (3)$$

$$F_{Hy} = \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}(25.0\text{kg})(9.8\text{m} \cdot \text{s}^{-2}) = 123\text{N}$$

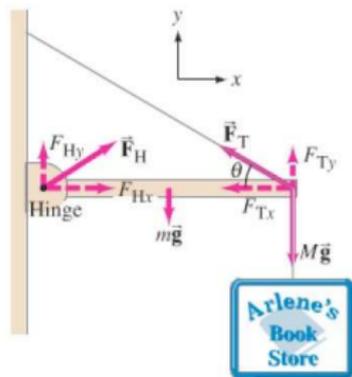
张力 F_T 沿着吊索方向 ($\theta=30$) $F_{Ty} = F_{Tx} \tan \theta = 0.577 F_{Tx}$

从方程(1), (2), (3), 解得方程

$$F_{Ty} = (m + M)g - F_{Hy} = 2870\text{N}$$

$$F_{Tx} = \frac{F_{Ty}}{0.577} = 4970\text{N}$$

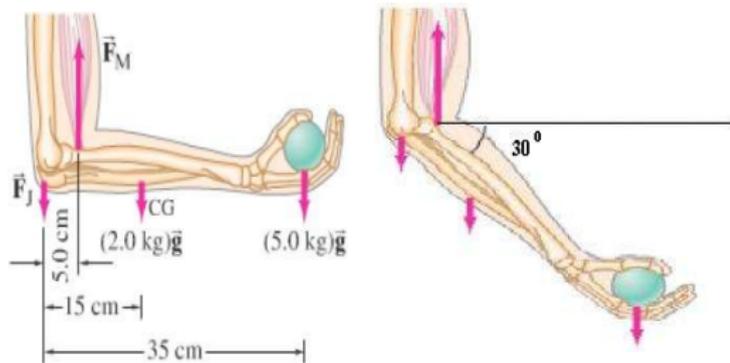
$$F_{Hx} = F_{Tx} = 4970\text{N}$$



F_H 的分量为 $F_{Hy}=123\text{N}$ 和 $F_{Hx}=4970\text{N}$ 。吊索上的张力为5740N

例题：当手里举着5.0kg的物体时，二头肌的作用力是多少？
 (a)小臂平举，如图a，(b)小臂与水平成 30° 角时，如图b。
 设小臂和手的质量为2.0kg，质心位置如图中所示。

(a)如图a所示，作用在小臂上的力包括肌肉施加的向上的力 F_M 和关节处大臂骨的作用力 F_J (设两者都垂直)。根据力矩平衡，可很容易地求出 F_M 。选作用轴通过关节，因此 F_J 不参于计算。



$$(0.050\text{m})(F_M) - (0.15\text{m})(2.0\text{kg})g - (0.35\text{m})(5.0\text{kg})g = 0$$

$$\therefore F_M = 400\text{N}$$

(b)三个力相对于关节的力臂都要乘上因子 $\cos 30^\circ$ 。除此之外，与前面建立的方程没有差别。方程两边相同因子可以消去，所以结果一样， $F_M=400\text{N}$ 。



浙大力学哥经典之作

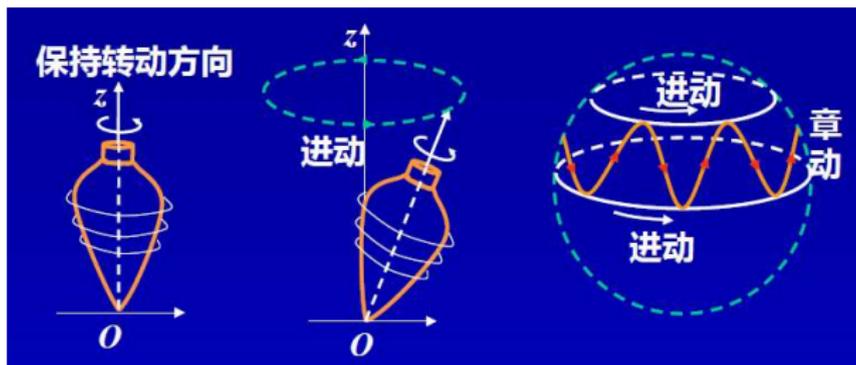
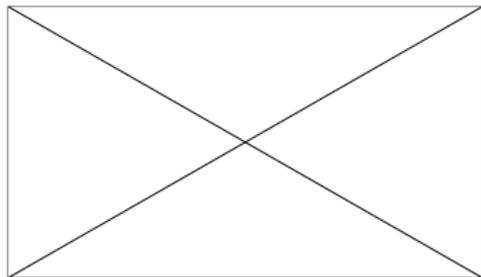
8.6 刚体的进动与章动

◎ 陀螺

绕对称轴高速旋转的刚体称为陀螺，或称回转仪。陀螺在运动过程中通常有一点保持固定，故属刚体的定点运动。

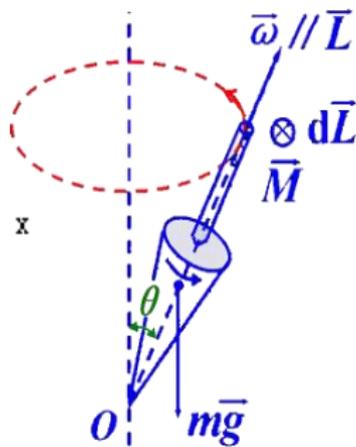
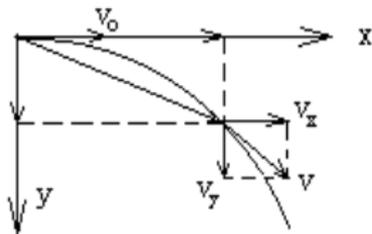
进动：高速自转物体的轴 OZ 在空间转动的现象。

当陀螺的自转角速度不够大时，则除了自转和进动外，陀螺对称轴 OZ 还会在铅垂面内上下摆动，即角会有大小波动，称为章动。



➤为什么刚体在重力矩的作用下，当急速旋转时就不会倾倒呢？其实，这不过是机械运动矢量性的一种表现。

质点所受外力方向重力与原有的运动方向不一致。实际的运动方向又由此两方向确定。类似于平抛运动



□刚体对自身对称轴的角动量与角速度方向相同。可以把刚体的角动量看出过0点的一个矢量。

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

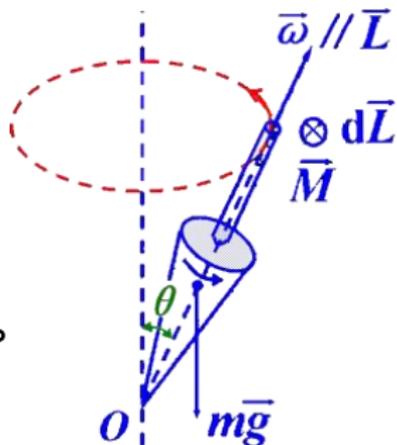
□对固定点0，陀螺只受重力矩的作用。

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} \\ &= \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{m} \times m \vec{g} = \vec{r}_c \times m \vec{g} \end{aligned}$$

$\vec{r}_c \parallel \vec{\omega}$ }

刚体的形状不是非常大

□重力矩的方向垂直于刚体的角动量方向



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} \parallel \vec{M} \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} \perp \vec{L}$$

□刚体角动量的大小不变但是方向发生变化。从刚体的顶部向下看，刚体的对称轴的回转方向是逆时针。

在dt 时间内，角动量的增量

$$d\vec{L} = \vec{M}dt \quad \rightarrow \quad dL = Mdt \quad \because d\vec{L} // \vec{M}$$

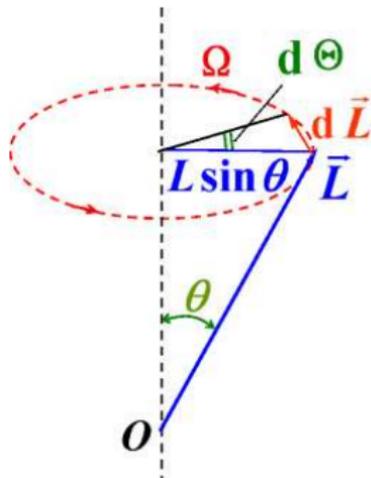
其大小为 $dL = L \sin \theta d\Theta = I\omega \sin \theta d\Theta$

$$\therefore Mdt = I\omega \sin \theta d\Theta$$

进动角速度

$$\Omega = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{M}{I\omega \sin \theta}$$

进动角速度 Ω 与外力矩成正比，与刚体自转的角动量成反比。因此 当刚体自转角速度很大时，进动角速度较小；在刚体自转角速度很小时，进动角速度却较大。



□相对跟着陀螺一起进动的参考系而言，陀螺的角动量的大小和方向保持不变。**进动参考系是匀速转动参考系，并且是一非惯性系。**

□陀螺的质元受到**重力**，**惯性离心力**，**科里奥利力**的贡献。

□惯性离心力的合力通过0点，可由支点上的约束力抵消。

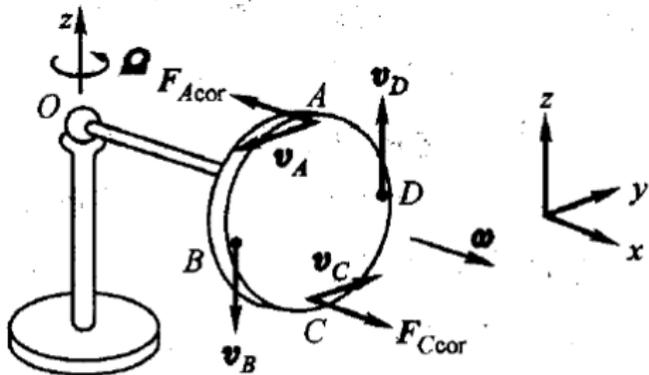


图 6.7-6 陀螺在进动参考系中受科里奥利力

$$-m\Omega^2 \vec{r}$$

□科里奥利力的贡献 $\vec{F}_{cor} = 2m\vec{v}' \times \vec{\Omega}$ $\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$
 分析得出A, B, C, D四点的科氏力方向。对于A和C两点的科氏力的力矩(对0点)沿-y方向。陀螺上所有质元的科氏力的合力矩(对0点)沿-y方向，称此力矩为**回转力矩**。与重力矩方向相反。

□在开始时，进动引起的回旋力矩不够大，还小于重力矩，陀螺的转轴会因重力矩的作用进一步下倾，进而产生比较快的进动，由进动引起的回旋力矩也随之增长。在某个时刻，由进动产生的回旋力矩和重力矩相等。由于惯性，陀螺会将进动保持下去。

进动现象是自旋物体在外力矩作用下，沿外力矩方向不断改变其自旋角动量方向的结果。

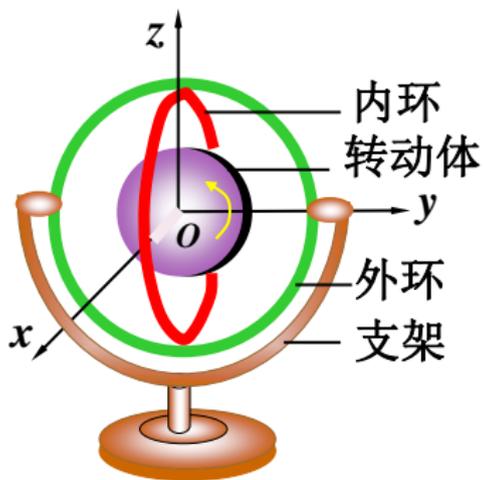
✓炮筒内壁上刻出螺旋线：它在飞行中受到的空气阻力的力矩将不能使它翻转，而只是使它绕着质心前进的方向进动。这样，它的轴线将会始终只与前进的方向有不大的偏离，而弹头就总是大致指向前方了。





坦克炮管内的膛线

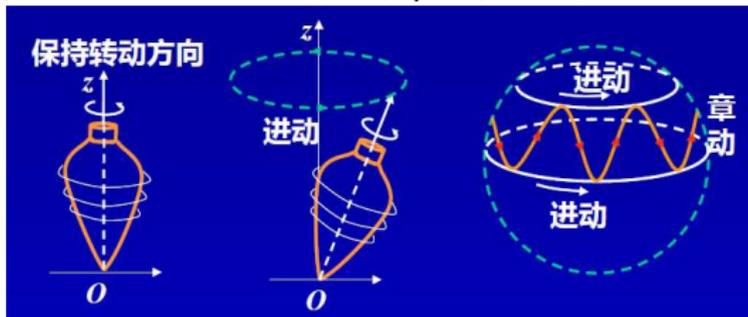
✓高速自转的陀螺具有极大的反抗外力矩的作用，力图保持其转轴在空间的方向不变. 广泛应用于航海、航空、航天、导弹和火箭等系统的定向、导航和自动驾驶等。



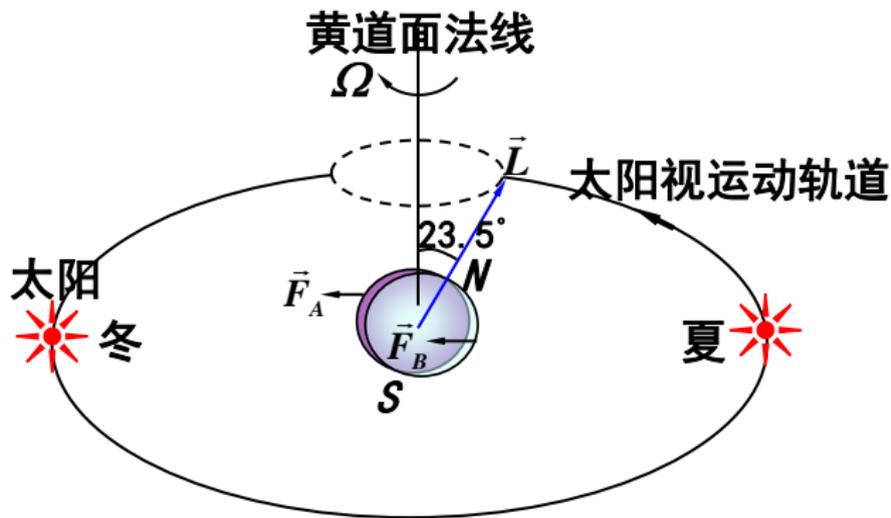
iPhone: 微电机系统陀螺仪芯片，用于测量手机的运动方向数据。



当陀螺的自转角速度不够大时，则除了自转和进动外，陀螺对称轴还会在铅垂面内上下摆动，即角会有大小波动，称为**章动**。



□在回旋力矩和重力矩相等时。由于惯性，陀螺的自转轴还是继续下顾，回旋力矩超过重力矩，下顾逐渐减慢，最后停止下顾。但由于回旋力矩超过重力矩，自转轴于是开始上抬。随之自转轴的上抬，回旋力矩减小，在某个时刻，回旋力矩减小到和重力矩相等，但是由于惯性，自转轴要继续上抬，这样回旋力矩小于重力矩，所有上升减慢，最后停止上升。由于回旋力矩小于重力矩，自转轴又开始下顾。因此陀螺的自转轴交替性的上升和下顾，形成了章动。



地球在太阳引力矩的作用下的进动

章动—— $\vec{\Omega}$ 和 $\vec{\omega}$ 的夹角发生周期性的变化

地球进动周期= 25770年 \approx 26000年

地球章动周期= 18.6年 \approx 19年

例：地球的进动

如图所示，地球的自转轴与它绕太阳的轨道平面的垂线间的夹为 $\theta = 23.5^\circ$ ，由于太阳和月球对地球的引力产生力矩，地球的自转轴绕轨道平面的垂线进动，进动周期 T_1 约为 **27 725 a**（年）。已知地球的质量为 $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ，地球的半径 R 为 $6.378 \times 10^6 \text{ m}$ 。

试求：（1）地球的自转轴绕轨道平面的垂线进动的角速度；（2）地球自转角动量变化率的大小，以及太阳和月球的合力矩的大小。

解 (1)

$$\begin{aligned}\omega_p &= \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2 \times 3.14}{27725 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60} \\ &= 7.27 \times 10^{-12} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

(2) 地球自转周期 (1恒星日) 为 $T_2 = 8.616 \times 10^4 \text{ s}$

$$\begin{aligned}M &= \left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = J\omega \sin\theta \omega_p \\ &= \frac{2}{5} mR^2 \cdot \frac{2\pi}{T_2} \cdot \sin\theta \omega_p \\ &= 1.67 \times 10^{22} \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

例题：在长为 l 的轴的一端，装上回转仪的轮子，轴的另一端吊在长为 L 的绳子上。当轮子绕轴快速旋转时，轮子将在水平面上绕过支点 O 的铅垂轴作均匀运动。轮子的质量为 M ，对过质心的自转轴的转动惯量为 I_0 ，自转角速度为 ω_s ，求绳子和铅直线所成的小角 β 。

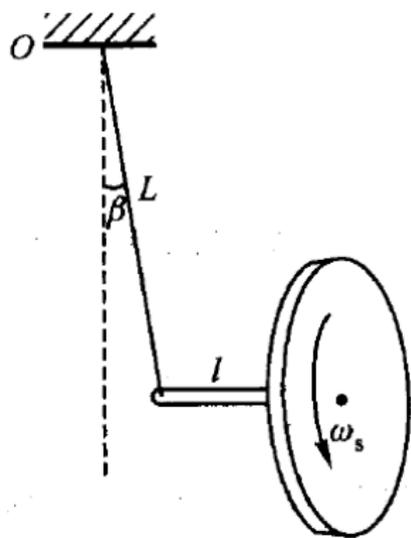
解：轮子在自身重力的作用下作均匀进动，进动角速度为：

$$\omega = \frac{Mgl}{I_0 \omega_s}$$

因轮子近似作半径为 l 的圆周运动，所以绳子上的张力沿轴方向提供轮子向心力：

$$Mg\beta = M\omega^2 l$$

$$\rightarrow \beta = \frac{M^2 gl^3}{I_0^2 \omega_s^2}$$



力学 第九章

振动与波 I

盛东

dsheng@ustc.edu.cn

中国科学技术大学

引言

- 振动与波是紧密相连的，它可以理解为运动形态的不同表现形式。
- 这种运动在质点或刚体上表现为振动。
- 在连续介质中表现为波。
- 本章也是分两部分讲授，分别讨论振动与波。

本部分内容

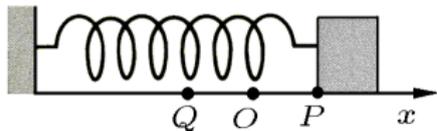
- 简谐振动
- 振动的合成与分解
- 阻尼振动
- 受迫振动与共振
- 课后作业

简谐振动

弹簧振子

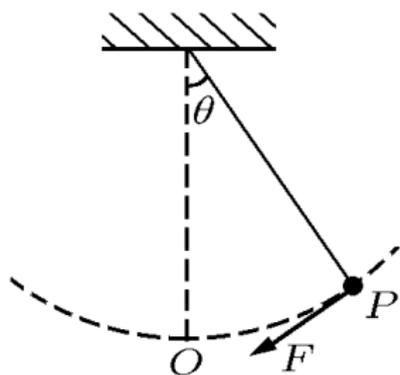
- 对处于稳定平衡或亚稳平衡而扰动较小的情况，此时物体将会发生振动。我们把振动的物体称为振子。
- 下图的弹簧振子有一个平衡位置 O 。把物体从平衡位置移到点 P ，然后放手，拉长的弹簧有收缩的趋势，它施加于物体的作用力驱使物体向平衡位置移动。这种驱使物体向平衡位置移动的力叫作恢复力。

$$F = -kx$$



准弹性力

- 除了弹簧外，其他的力也可能具有恢复力的形式。
- 如右图所示的单摆，如将小球从平衡位置拉到点再松手，小球将在平衡位置点附近往复摆动。它的结构虽与上述弹簧振子完全不同，但它们的运动性质是十分相似的。

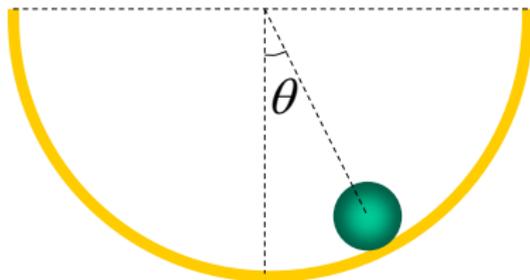


$$F = -mg \sin \theta \approx -mg\theta$$

- 可见，单摆所受的虽不是弹性力，但形式上与弹簧振子完全相似。我们把这种与弹性力具有相似表达式的力，叫做准弹性力。

例1-1

如图所示，半径为 r 的小球在半径为 R 的半球形大碗内作纯滚动，这种运动是简谐振动吗？如果是，求出它的周期。



例1-2

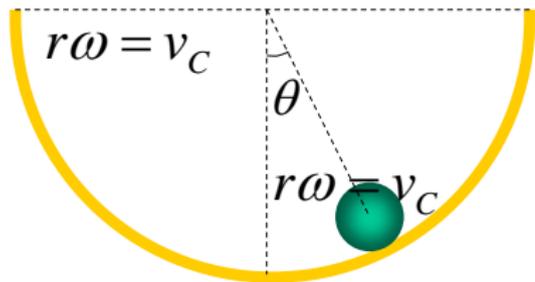
- 设小球质心速度 v_C ，角速度 ω ，机械能为：

$$mg(R-r)(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = E_0$$

其中 $I_C = \frac{2}{5}mr^2$ $v_C = (R-r)\dot{\theta}$

- 两边对 t 求导

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta = 0$$



- 小角度时的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$

复摆 I

- 在重力作用下，绕不通过质心的水平轴运动的刚体称为复摆（物理摆）。
- 与单摆不同，复摆无法进行简单的简化。
- 在小摆幅的情况下，复摆的势能和动能为：

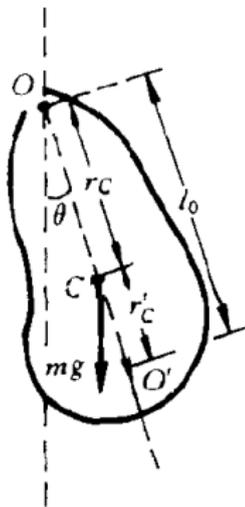
$$U(\theta) = mgr_c(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}mgr_c\theta^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

- 复摆的运动周期为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{U''_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_c}}$$

- 定义 $L_0 = \frac{I}{mr_c}$ ，由 $I = I_c + mr_c^2$ 得 $L_0 = r_c + \frac{I_c}{mr_c}$



复摆II

- 找另一点 O' ，使复摆绕过其的水平轴运动时运动周期与之前的结果一样，有：

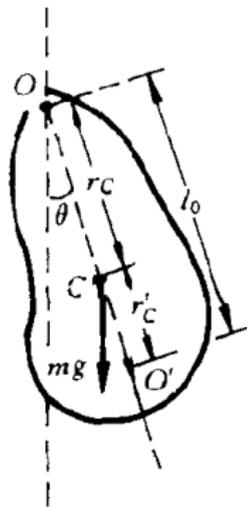
$$L_0 = r'_c + \frac{I_c}{mr'_c}$$

- 这样， r_c 与 r'_c 满足两种关系：

- $r_c = r'_c$

- 或者 $r_c r'_c = \frac{I_c}{m}$

$$r_c + r'_c = r_c + \frac{I_c}{mr_c} = L_0$$

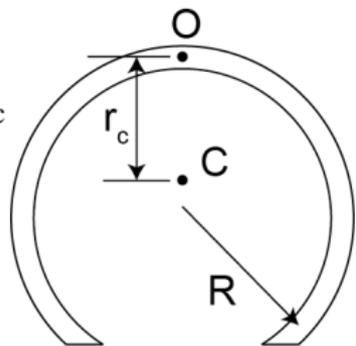


圆环摆

- 被截取一段圆弧的圆环，固定在O点。
- 此时圆心不再是质心，新的质心距圆心 $R-r_c$
- 考虑绕圆心的转动惯量，有：

$$I_o = I_c + m(R - r_c)^2 = mR^2$$

$$I_c = mr_c(2R - r_c)$$



- 根据复摆的分析，知决定复摆周期的长度尺度为：

$$L_0 = r_c + \frac{I_c}{mr_c} = r_c + 2R - r_c = 2R$$

- 可知圆环摆周期与截断的圆弧长度无关。

简谐振动

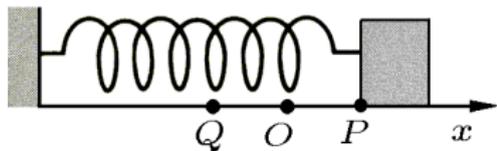
- 与弹簧振子运动类似的运动就是简谐振动
- 如下图所示，设弹簧振子的质量为 m ，弹簧的倔强系数为 k ，选取 x 轴，以平衡位置 O 为原点，则运动方程为：

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

振幅 角频率 相位



相位

- 两频率相同的谐振动：

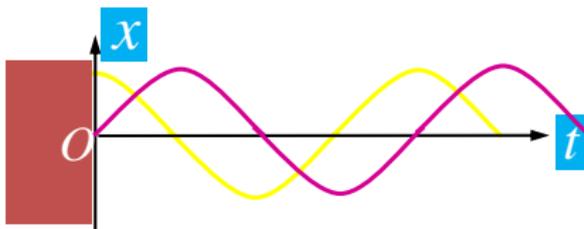
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

- 若相位差

$$\Delta\Phi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$$

称振动2超前振动1，或振动1滞后振动2

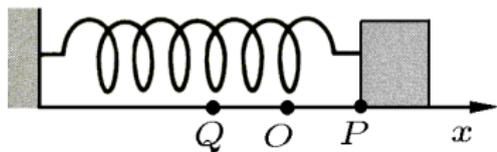


初始条件

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\begin{cases} x|_{t=0} = x_0 = A \cos \varphi_0 \\ v|_{t=0} = v_0 = -A\omega_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad \tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$



简谐运动的动力学量

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

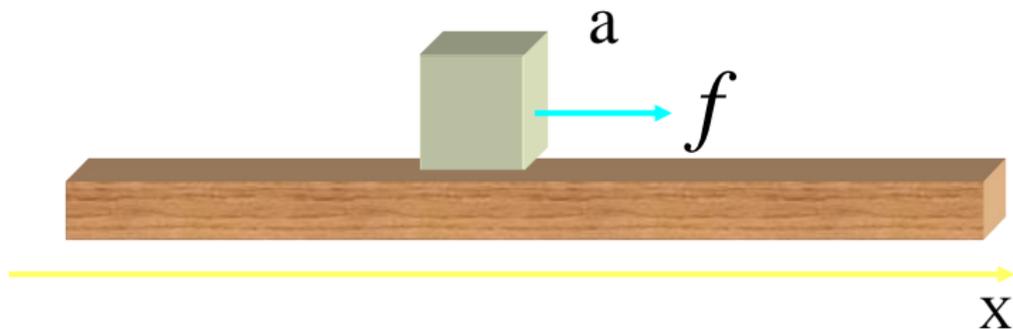
$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ &= \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ &= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) \end{aligned}$$

例2-1

一物体放在水平平板上，此板沿水平方向作谐振动， $\nu=2\text{Hz}$ ，物体与板面间的摩擦系数 $\mu=0.50$ ，问：

- (1) 要使物体在板上不滑动，振幅的最大值是多少？
- (2) 若使该板作竖直方向的谐振动， $A=5\text{cm}$ ，使物体与板保持接触的最大频率是多少？

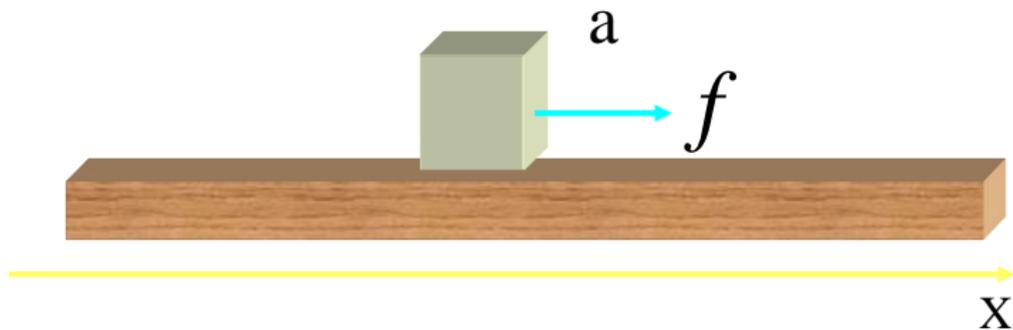


例2-2

(1)

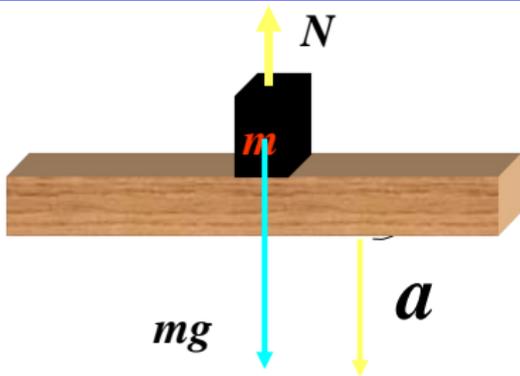
$$f_{\max} = \mu mg \geq ma_{\max} = m\omega^2 A$$

$$A \leq \frac{\mu g}{\omega^2} = 0.031m$$



例2-3

- (2) 据分析可知物体应该在平衡位置上方才能分离（当在下方时， $N - mg = ma > 0$ ，不可能分离）

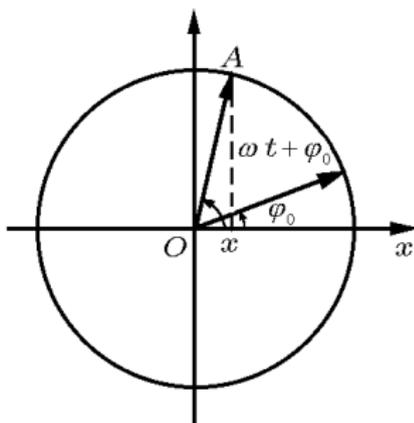


$$\therefore a_{\max} = \omega^2 A \leq g$$

$$\nu_{\max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = 2.2 \text{ Hz}$$

简谐振动的表示方法

- 简谐运动的一个表示方法是用旋转振幅矢量（也称相矢量）来表示。
- 自原点画一条长等于振幅的矢量 A ，开始时（ $t=0$ ），让矢量 A 与 x 轴的夹角等于振动的初位相，令 A 以角速度（就是振动角频率）逆时针方向旋转，则矢量在轴上的投影就是振动的位移（如右图）。



简谐振动的表示方法II

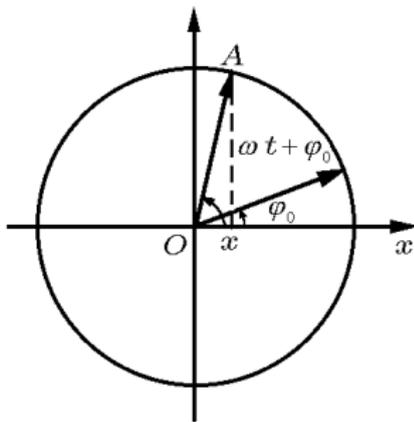
- 另一个等价的方法是利用三角函数与复数的关系，简谐振动也可用复数表示：

$$x = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$x = A'e^{i\omega t}$$

$$A' = Ae^{i\varphi_0}$$

- 这里的复振幅已包含了初位相。但要注意，有意义的是其实部。



复振幅

- 对于一维简谐振子，考虑其动力学方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 很明显 $\tilde{x}(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$ 也是方程的解。而式中的 A 、 ω 、 φ 分别对应振动的振幅、固有角频率和初相位。
- 对复数解进行展开

$$\tilde{x}(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + iA \sin(\omega t + \varphi)$$

- 其实部就是真实解。

谐振子能量

- 振子的坐标和速度为：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \omega^2 = k/m$$

$$\text{动能: } E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{A^2}{2}m\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 \cdot \frac{1}{2}[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)]$$

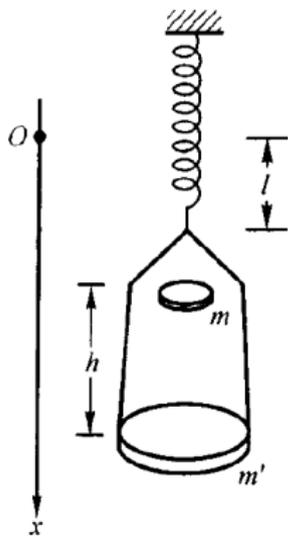
$$\text{势能: } V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 \cdot \frac{1}{2}[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)]$$

$$\text{机械能: } E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{kA^2}{2}[\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}kA^2$$

- 机械能守恒。
- 简谐运动的动能与势能的时间平均值为机械能的一半。

例3-1

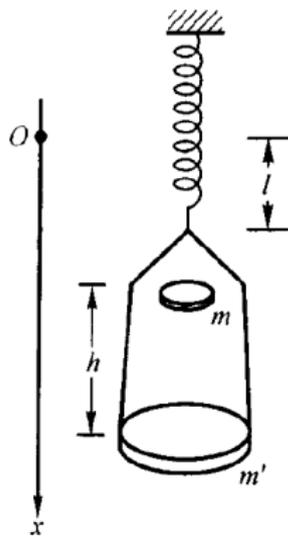
- (1) 质量为 m 的盘子系于竖直悬挂的轻弹簧下端。平衡时，弹簧拉长了 l ，求盘子上下振动的角频率。
- (2) 一质量为 $m'=m$ 的砝码从 $h=l$ 处自由落体，以砝码落在盘上瞬间为零点，求盘子位移与时间的关系。



例3-2

(1) 质量为 m 的盘子系于竖直悬挂的轻弹簧下端。平衡时，弹簧拉长了 l ，求盘子上下振动的角频率。

$$\begin{aligned}kl &= mg \\ k &= \frac{mg}{l} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\end{aligned}$$



例3-3

(2) 一质量为 $m=m'$ 的砝码从 $h=l$ 处自由落体，以砝码落在盘上瞬间为零点，求盘子位移与时间的关系。

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m+m'}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{g}{2l}}$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

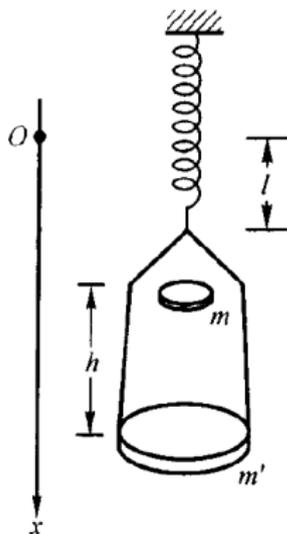
动量守恒

$$mv_0 = 2mv$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$$

能量守恒

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}2m\frac{gl}{2} + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 \\ &= mgl = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$



例3-4

(2) 一质量为 $m'=m$ 的砝码从 $h=l$ 处自由落体，以砝码落在盘上瞬间为零点，求盘子位移与时间的关系。

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m+m'}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{g}{2l}}$$

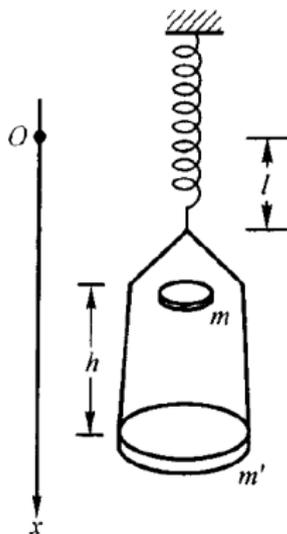
$$x = A \cos(\omega't + \varphi)$$

$$v = -\omega' A \sin(\omega't + \varphi)$$

$$A = \sqrt{\frac{2mgl}{mg/l}} = \sqrt{2}l$$

$$-\sqrt{\frac{g}{2l}} \sqrt{2}l \sin \varphi = \sqrt{\frac{gl}{2}}$$

$$\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi = -\frac{3\pi}{4} \quad (x < 0, v > 0)$$



振动的合成与分解

分类

- 简谐振动是最简单、最基本的振动，任何一个复杂的振动都可以看成若干个简谐振动的合成。
- 这里讨论以下几种情况：
 1. 方向、频率相同，初位相不同的两个简谐振动的合成。
 2. 方向相同，频率不同的两个简谐振动的合成。
 3. 方向垂直、频率相同的两个简谐振动的合成（二维振动）。
 4. 方向垂直、频率不同的两个简谐振动的合成，利萨如图形。
 5. 振动的分解、谐波分析（Fourier分析）。

方向、频率相同

- 物体同时参与两个同方向、同频率的简谐振动，每个振动的位移与时间关系可表为

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= A_1(\cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1) + A_2(\cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2) \\ &= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega t \\ &= A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{cases}$$

同向、不同频

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

为简单起见，设 $A_1 = A_2 = A$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2 \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1, \omega_2$$

$$x \approx 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\omega_1 t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

拍频 I

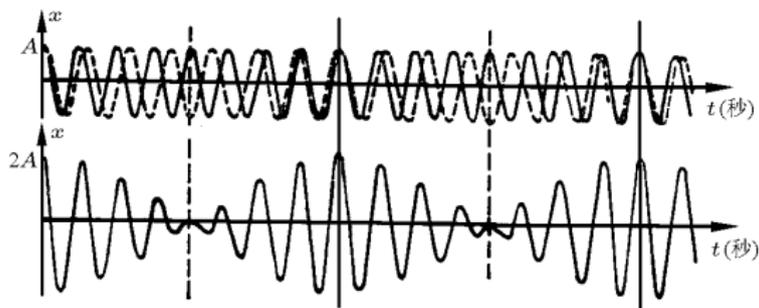
- 振幅随时间的变化为 $2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$
- 由于振幅所涉及的是绝对值，故其变化频率为：

$$\nu = \frac{1}{T} = \left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} \right| = |\nu_1 - \nu_2| = |\Delta\nu|$$

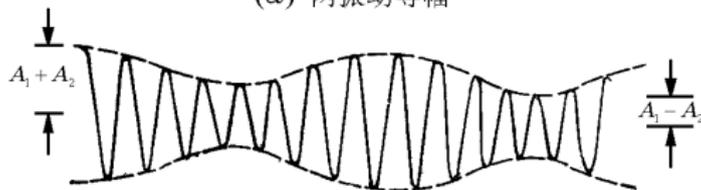
- 这一现象称为拍， $\Delta\nu$ 称为拍频。
- 当两振动的振幅不等，即 $A_1 \neq A_2$ 时，也有拍现象，此时合振幅仍有时大时小的变化，但不会达到零。

$$\begin{aligned}x &= \left(\frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{2}\right) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \left(\frac{A_1 + A_2}{2} - \frac{A_1 - A_2}{2}\right) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\&= 2B_1 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) - \\&\quad 2B_2 \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\end{aligned}$$

拍频II



(a) 两振动等幅



(b) 两振动不等幅

方向垂直、同频

- 振动系统可以同时参与方向互相垂直的两个振动，例如单摆，就可以同时参与这样的两个振动。设一个振动沿 x 方向，一个沿 y 方向，即：

$$\begin{cases} x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \end{cases}$$

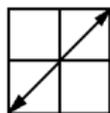
$$\frac{x}{A_x} + \frac{y}{A_y} = \cos(\omega t + \varphi_x) + \cos(\omega t + \varphi_y) = 2 \cos(\omega t + \bar{\varphi}) \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{x}{A_x} - \frac{y}{A_y} = \cos(\omega t + \varphi_x) - \cos(\omega t + \varphi_y) = 2 \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

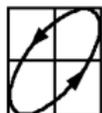
$$\frac{\left(\frac{x}{A_x} + \frac{y}{A_y}\right)^2}{4 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{x}{A_x} - \frac{y}{A_y}\right)^2}{4 \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} = 1$$

椭圆轨道

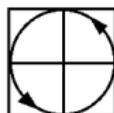
$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi)$$



$$\varphi_x - \varphi_y = 0$$



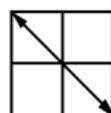
$$\frac{\pi}{4}$$



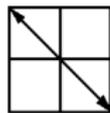
$$\frac{\pi}{2}$$



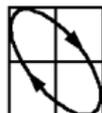
$$\frac{3\pi}{4}$$



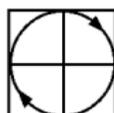
$$\pi$$



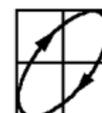
$$\pi$$



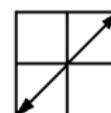
$$\frac{5\pi}{4}$$



$$\frac{3\pi}{2}$$



$$\frac{7\pi}{4}$$

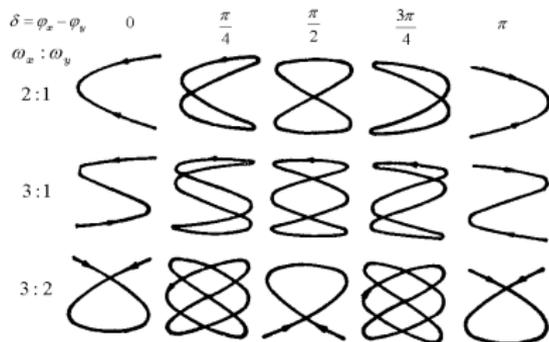


$$2\pi$$

方向垂直、不同频

$$\begin{cases} x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) \\ y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y) \end{cases}$$

- 当 ω_x 与 ω_y 成整数比时，合振动的轨迹仍是一些闭合曲线，称为利萨如图形。
- 当 ω_x 与 ω_y 的比例一定时，初位相差不同，对应的曲线形状和走向也不同。



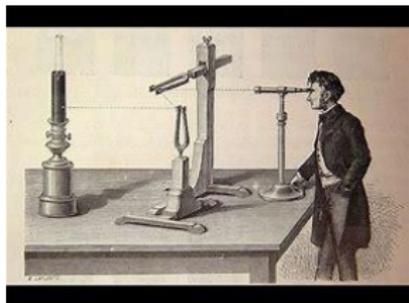
李萨如图形



Nathaniel Bowditch,
1773-1838
纳撒尼尔·鲍迪奇
美国数学家
1815年研究了这一类
曲线



Jules Lissajous
1822-1880
纳撒尼尔·李萨如
法国物理学家
1857年通过光在两个
音叉间反射成像研究
了这个问题

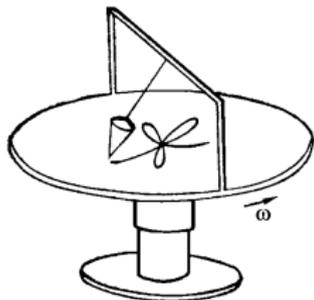


傅里叶分析

- 对于非简谐振动，直接分析它们往往较困难。如果把它们分解为许多简谐振动的叠加，事情就好办得多，数学上称这种分解为傅里叶（Fourier）分析。
- 任何一个周期性的振动都可分解为一系列频率为原振动频率（称为基频）整数倍的简谐振动，在数学上这称为谐波分析。
- 以频率为横坐标、各谐频振幅为纵坐标所做的图解，叫做频谱，此时的频谱为分立谱。不同的乐器有不同的频谱，反映在它们不同的音色上。
- 非周期振动也可以用频谱来表示。这时频谱不再为分立谱，而是连续谱。

傅科摆

- 1851年，傅科设计了一个长67 m、末端悬挂了一个重28 kg铁球的摆。他将其悬挂在巴黎先贤祠的屋顶上，第一次在室内展示了地球自转的效应。



Leon Foucault
(1819-1868)
莱昂·傅科
法国物理学家

虚拟力

$$\vec{F}' = -m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\frac{D\vec{\omega}}{Dt} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

K'系中的
虚拟力

K'系的平
动加速度

科里奥利力

惯性离心力



Gustave-Gaspard Coriolis
(1792 -1843)

古斯塔夫·科里奥利，
法国数学家、工程师

傅科摆分析-1

- 设傅科摆放置在纬度为 φ 的位置。
- 单摆的运动可以近似在平面上。
- xy 平面就是当地的地平面。
- 单摆的运动角速度为 ω ，地球的自转角速度是 Ω 。

科里奥利力 $F_c = 2m\dot{x} \times \vec{\Omega} + 2m\dot{y} \times \vec{\Omega}$
 $= 2m\Omega\dot{y} \sin \varphi \hat{x} - 2m\Omega\dot{x} \sin \varphi \hat{y}$

平动虚拟力 $F_0 = -m\omega^2 x \hat{x} - m\omega^2 y \hat{y}$
单摆回复力

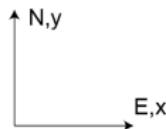
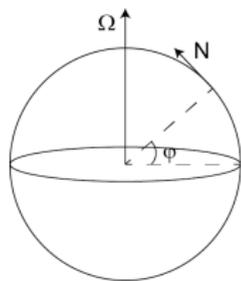
$$\ddot{x} = -\omega^2 x + 2\Omega\dot{y} \sin \varphi$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - 2\Omega\dot{x} \sin \varphi$$

作变换:

$$z = x + iy$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z + 2i\Omega\dot{z} \sin \varphi = 0$$



傅科摆分析-2

$$\ddot{z} + \omega^2 z + 2i\Omega \dot{z} \sin \varphi = 0$$

设解的形式为: $z = ae^{ift}$

$$f = -\Omega \sin \varphi \pm \sqrt{\omega^2 + \Omega^2 \sin^2 \varphi} \approx -\Omega \sin \varphi \pm \omega$$

一般解为: $z = e^{-i\Omega \sin \varphi t} (a_1 e^{-i\omega t} + a_2 e^{i\omega t})$

$$x = c_1 \cos(\Omega \sin \varphi t) \cos \omega t - c_2 \sin(\Omega \sin \varphi t) \sin \omega t$$

$$y = -c_1 \sin(\Omega \sin \varphi t) \cos \omega t - c_2 \cos(\Omega \sin \varphi t) \sin \omega t$$

- 傅科摆的运动平面在xy平面旋转，其角速率为 $\Omega \sin \varphi$ 。
- 巴黎的纬度接近 49° ，所以傅科摆原始实验的转动周期为32小时。

阻尼振动

运动分析

- 前面所讨论的振动，振幅保持不变，振动能量也保持不变。这只是实际情况的一种抽象，实际振动系统的振动，当无外界能量补充时，振幅都要随时间逐渐衰减。
- 衰减的原因，一是有摩擦力存在，将振动能量逐渐变为热能耗散了；二是振动能量以波的形式向四周传播，使振动能量逐渐变为波的能量。
- 我们主要考虑摩擦力与速度成正比的情形。当速度不大时，粘滞阻力就属这种情形。在考虑了粘滞阻力后，弹簧振子的运动方程变为

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$$

运动方程

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad 2\beta = \frac{h}{m}$$

- ω_0 是阻力不存在时振子的固有角频率。
- β 称为阻尼因数或衰减常数。

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

方程求解

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- 试探解： $x = e^{rt}$
- 其中 r 为待定常数（复数），可解得：

$$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

- A_1, A_2 由初始条件决定。

欠阻尼振动

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

$$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

- $\beta < \omega_0$ 时:

$$x = (A_1 e^{i\omega_f t} + A_2 e^{-i\omega_f t}) e^{-\beta t}$$

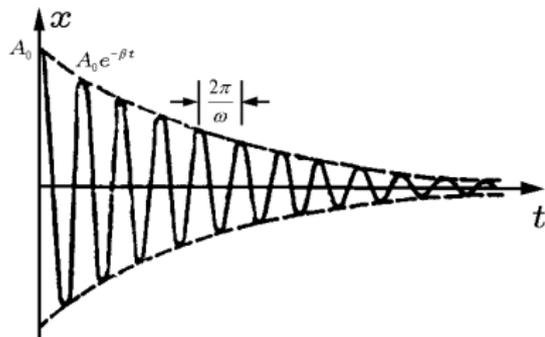
$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

- 取上式的实部得:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \varphi_0)$$

- 此时振子作衰减振荡, 其振幅和周期为

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$



欠阻尼振动能量I

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega_f t + \varphi_0) + \omega_f \sin(\omega_f t + \varphi_0)]$$

• 动能: $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} [\beta \cos(\omega_f t + \varphi_0) + \omega_f \sin(\omega_f t + \varphi_0)]^2$

• 势能: $V = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t} \cos^2(\omega_f t + \varphi_0)$
 $= \frac{1}{2} m (\omega_f^2 + \beta^2) A_0^2 e^{-2\beta t} \cos^2(\omega_f t + \varphi_0)$

• 机械能: $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$
 $= \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} [\omega_f^2 + \beta \omega_f \sin 2(\omega_f t + \varphi_0) + 2\beta^2 \cos^2(\omega_f t + \varphi_0)]$ 47

欠阻尼振动能量II

$$E = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} [\omega_f^2 + \beta \omega_0 \sin 2(\omega_f t + \varphi_0) + 2\beta^2 \cos^2(\omega_f t + \varphi_0)]$$

- 可见机械能并不守恒。
- 当 $\beta \ll \omega_0$ 时, 有 $\omega_f \approx \omega_0$

$$E \approx \frac{1}{2} m \omega_f^2 A_0^2 e^{-2\beta t} \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t} = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -2m\beta A_0^2 e^{-2\beta t} [\beta \cos(\omega_f t + \varphi_0) + \omega_f \sin(\omega_f t + \varphi_0)]^2 < 0$$

$$\frac{dE}{dt} = -hv^2 = (-hv)v$$

- 这是摩擦力的功率, 即损失的能量用于克服摩擦力做功。

品质因数

- 衰减常数的大小反映了阻尼的大小。
- 我们也可用一周中振子损失的能量在总能量中所占的比例来描写阻尼的大小。
- 通常将 t 时刻时振子的能量 E 与经一周后损失的能量 ΔE 之比的 2π 倍称为振子的品质因数，并用 Q 表示：

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

- 小阻尼 $\beta \ll \omega_0$ 情况下：

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t} (1 - e^{-2\beta T})} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} \quad Q \approx \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

- Q 仅由振动系统本身的性质决定。

过阻尼振荡

- 过阻尼情况为 $\beta > \omega_0$
- 此时 r_1, r_2 皆为实数

$$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0, \quad r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$x = A_1 \exp[(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t] + A_2 \exp[(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t]$$

- 其中 A_1, A_2 可由初条件决定，此时已没有振动现象。

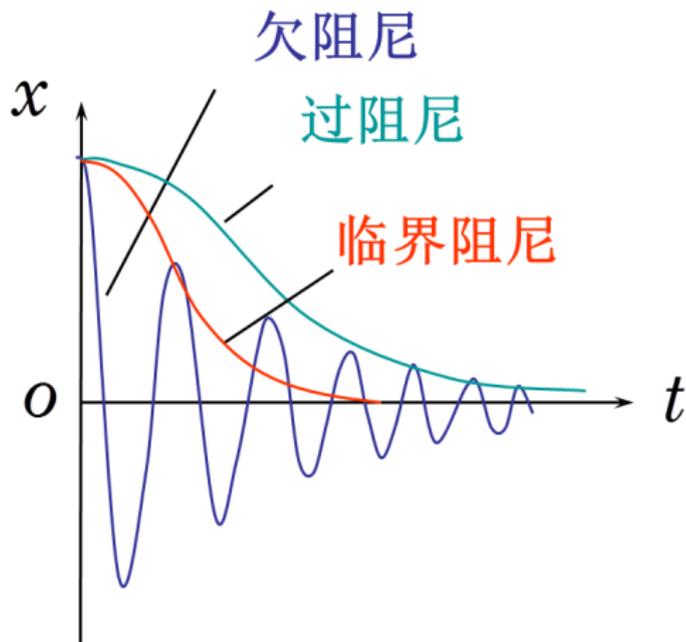
临界状态

- 临界阻尼情况为 $\beta = \omega_0$
- 此时 $r_1 = r_2 = -\beta$
- 阻尼方程的解为：

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}$$

- 临界阻尼状态之所以重要，是因为它所对应的回复时间，即由静止开始从偏离平衡位置的某处回复到平衡位置（在一定观察精度内）所需的时间，比欠阻尼和过阻尼状态都要短。

阻尼振动对比



受迫振动与共振

受迫振动

- 只受弹性力或准弹性力和粘滞阻力作用的振动系统，其振幅总是随时间衰减，振动不能持久。
- 如果要使振动持久不衰，就必须由外界不断供给能量。振动系统在外界强迫力作用下的振动，叫做受迫振动。
- 设外界的强迫力 F_0 为常数，则阻尼振动系统满足的方程为

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_0$$

$$x = X + F_0 / k$$

$$m\ddot{X} = -kX - h\dot{X}$$

- 这就回到了之前讨论的阻尼运动的方程，只是平衡位置改变了。即当外界的强迫力 F_0 为常数时，不产生任何新的内容，故我们以后不考虑恒定的外力作用。

受周期外力的受迫振动

- 任何非正弦型外力都可以看成正弦型外力的线性迭加。
- 研究了振动系统对正弦型外力的响应，也就原则上解决了振动系统对任何外力的响应问题。
- 下面我们仅考虑简谐强迫力 $F_0 \cos \omega t$
- 弹簧振子的运动方程为：

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$\beta = \frac{h}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

方程复数化

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

- 将方程写成复数形式:

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\beta \dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$x = \operatorname{Re} \tilde{x} \quad \tilde{x} = \tilde{B} e^{rt}$$

$$\tilde{B}(r^2 + 2\beta r + \omega_0^2) e^{rt} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$r = i\omega$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \frac{f_0}{r^2 + 2\beta r + \omega_0^2} = \frac{f_0}{-\omega^2 + i2\beta\omega + \omega_0^2} \\ &= \frac{f_0 [(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\beta\omega]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \end{aligned}$$

受迫振动方程稳态解

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= (B_r + iB_i)e^{i\omega t} \\ &= (B_r \cos \omega t - B_i \sin \omega t) + i(B_i \cos \omega t + B_r \sin \omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{Re} \tilde{x} = B_r \cos \omega t - B_i \sin \omega t \\ &= B \left[\frac{B_r}{B} \cos \omega t - \frac{B_i}{B} \sin \omega t \right] = B \cos(\omega t - \varphi)\end{aligned}$$

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_i^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{B_r}{B}, \quad \sin \varphi = -\frac{B_i}{B}, \quad \tan \varphi = -\frac{B_i}{B_r} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

受迫振动方程通解

- 上面讨论的是受迫振动方程的稳态解，因为它的幅度不随时间变化。
- 实际上该方程的通解还要加上 $F=0$ 时的解，即之前讨论的阻尼振动的解，这个解为瞬态解。

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \varphi_0) + B \cos(\omega t - \varphi)$$

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{B_r}{B}, \quad \sin \varphi = -\frac{B_i}{B}, \quad \tan \varphi = -\frac{B_i}{B} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- 其中 A_0 和 φ_0 由初始条件决定。

受迫振动方程解的讨论

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \varphi_0) + B \cos(\omega t - \varphi)$$

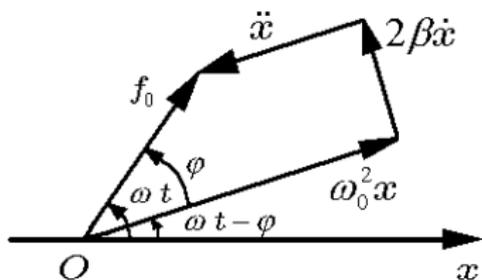
- 开始时，振子的运动比较复杂，为暂态解和稳态解的叠加，经过一段时间以后，暂态解衰减掉了，只留下稳态解。
- 稳态解的特点是它的频率与强迫力频率相同，它的振幅及初位相与初始条件无关，完全由强迫力和系统的固有参量决定，而暂态解的频率由系统本身性质决定，振幅及初位相则由初始条件决定。

稳态解的矢量关系

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$$x = B \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\tan \varphi = -\frac{B_i}{B} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



$$\dot{x} = -\omega B \sin(\omega t - \varphi) = \omega B \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 B \cos(\omega t - \varphi)$$

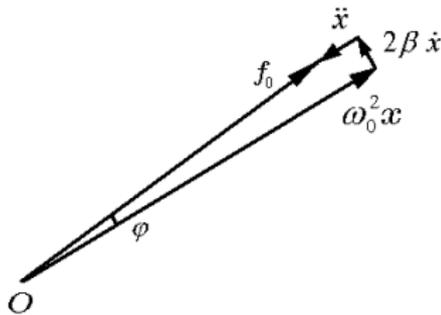
低频驱动的稳态解

- 考虑欠阻尼情况，且驱动频率很低 $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

$$\omega \ll \omega_0, \beta \omega \ll \omega_0^2$$

$$\begin{cases} B = B_0 \approx \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \\ \varphi \approx \tan^{-1} \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2} \approx 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{F_0}{k} \cos \omega t$$



- 物体加速度和速度均很小，故物体的惯性与阻力都可以忽略，弹力几乎时时与外力相平衡。
- 振幅矢量稍落后于矢量外力，振动与外力同位相。

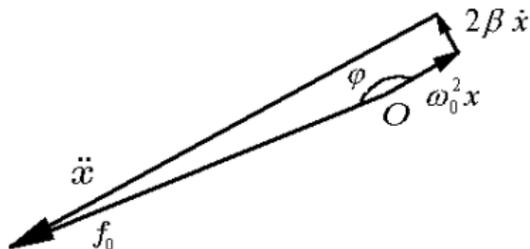
高频驱动的稳态解

- 考虑相反的情况 $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

$$\omega \gg \omega_0, \omega^2 \gg \omega\omega_0 > \beta\omega$$

$$\begin{cases} B = B_\infty \approx \frac{f_0}{\omega^2} \approx 0 \\ \varphi \approx \tan^{-1} \frac{2\beta\omega}{-\omega^2} \approx \tan^{-1}(-0) \approx \pi \end{cases}$$

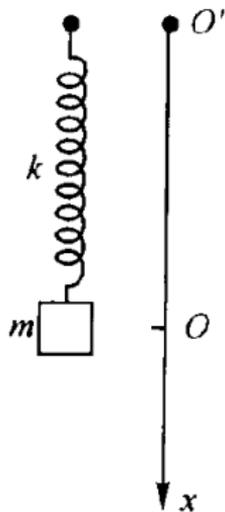
$$x = -\frac{f_0}{\omega^2} \cos \omega t$$



- 因频率甚高，物体的惯性很重要。速度并不大，位移更小，阻力和弹力均可忽略，物体几乎只在外力作用下振动，而且振幅很小。
- 振幅矢量落后于矢量外力 f_0 ，相位约为 π 。

例4-1

质量为 m 的重物悬挂在弹性系数为 k 的弹簧下端，平衡于 O 点。从 $t=0$ 开始，弹簧端 O' 以 $x'=a\sin\omega t$ 作上下振动。问：稳定后，物体将作何运动？
设系统的阻尼系数为 δ 。



例4-2

- O' 以 $x' = a \sin \omega t$ 作上下振动。

$$m\ddot{x} + h\dot{x} = k(x' - x)$$

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = ka \sin \omega t$$

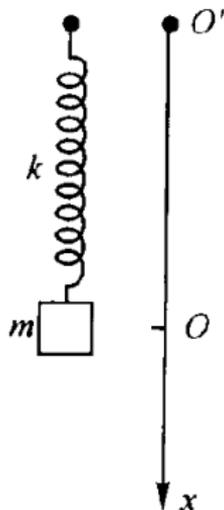
$$B = \frac{ka/m}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- 当 $\omega \gg \omega_0$ 时,

$$B = \frac{ka/m}{\sqrt{\omega^4 + 4\delta^2\omega^2}} = a \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega^4 + 4\delta^2\omega^2}} \ll a$$

- 这就是重的平台被动隔振的原理。



近共振的稳态解

$$x = B \cos(\omega t - \varphi)$$

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad \tan \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- 当 $dB/d\omega=0$ 时, B 最大, 此时称为达到振幅共振。

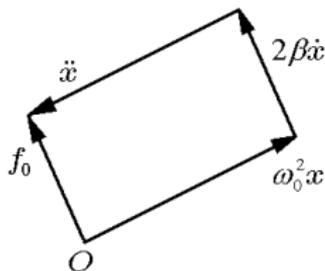
$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\beta\omega}{2\beta^2} = \tan^{-1} \frac{\omega}{\beta}$$

$$x = B \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\dot{x} = B\omega \cos \omega t$$

- 即位移落后于驱动力 $\pi/2$ 相位, 而速度恰好与驱动力同相位。
- 功率 = $F_0 v$, 故此时外力永远做正功。



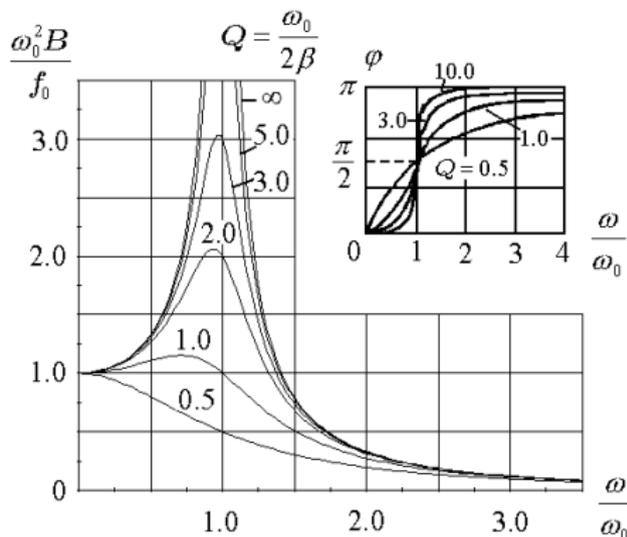
振幅响应曲线

- B - ω 图常称频率响应曲线或称共振曲线。
- 当 $Q > 1$ 时，所有的曲线都有一个峰，这就是**共振峰**。

$$Q \approx \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

- 品质因素 Q 越大，曲线的峰越明显。
- 共振峰位置：

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



共振峰锐度

- 通常用锐度来描写共振曲线的尖锐程度，共振峰锐度定义为：

$$S = \frac{\omega_r}{\omega_2 - \omega_1} \approx \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

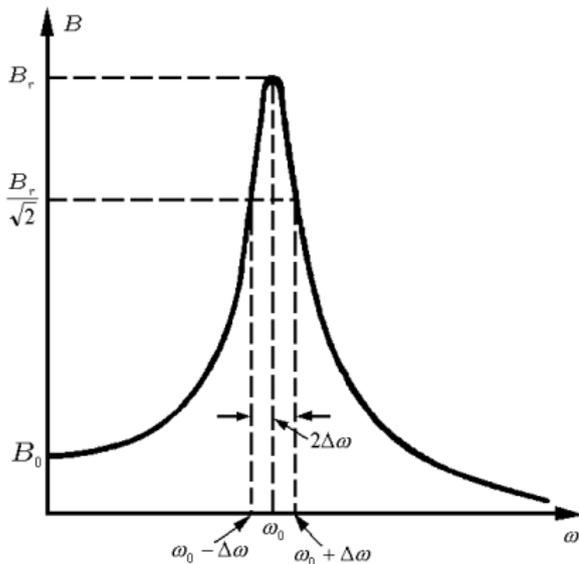
- 共振峰宽度由峰平方的半高宽决定：

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

- 在 $\beta \ll \omega_0$ 时，有：

$$\Delta\omega = \beta$$

$$S = \frac{\omega_0}{2\beta} = Q$$



受迫振动中的功能关系 I

$$v = \dot{x} = -\omega B \sin(\omega t - \varphi)$$

- 外力 and 阻力的功率为：

$$P_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\omega F_0 B \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$$

$$P_f = (-h\dot{x})v = -h\omega^2 B^2 \cos^2(\omega t - \varphi)$$

- 一个周期内，外力和阻力做功为：

$$\int_t^{t+T} P_F dt = F_0 \omega B \sin \varphi \frac{T}{2} = F_0 \omega B \frac{T}{2} \frac{2\beta\omega B}{f_0} = 2m\beta\omega B\pi = h\omega B^2\pi$$

$$\sin \varphi = \frac{2\beta\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2}} = \frac{2\beta\omega_0}{f_0/B}$$

$$\int_t^{t+T} P_f dt = \int_t^{t+T} -h\omega^2 B^2 \sin^2(\omega t - \varphi) dt = -h\omega B^2\pi$$

受迫振动中的功能关系II

- 振子运动稳定时，在一个周期内外力供给振子的能量等于阻力消耗的能量。
- 振子单位周期得到的平均功率：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T h \dot{x}^2 dt = \frac{1}{2} h (\omega B)^2 = \frac{hf_0^2 \omega^2}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]}$$

- 当 $dP/d\omega = 0$ 时， P 最大，此时称为能量共振。此时， $\omega = \omega_0$ 。
- 共振时强迫力与速度同位相，因而时刻对体系作正功。随着振幅的增大，阻力的功率也不断增大，最后与强迫力的功率相抵，遂使振子的振幅保持恒定。
- 此后，共振时强迫力的功率时刻与阻力的功率相抵。这时振子以固有频率振动，犹如一个不受阻力的自由振子。

受迫振动中的功能关系III

- 一个周期内，阻力做功为：

$$\int_t^{t+T} P_f dt = \int_t^{t+T} -h\omega^2 B^2 \sin^2(\omega t - \varphi) dt = -h\omega B^2 \pi$$

- 而振子能量为：

$$W = \frac{1}{2}k B^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 B^2$$

$$\frac{W_f}{W} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{4\pi\beta}{\omega} = \frac{2\pi}{Q}$$

课后作业

- 9.7/9.8/9.14/9.16/9.17/9.19/9.23/9.25/9.26
- 9.26 : dyn 达因 , $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$

力学 第九章

振动与波II

盛东

dsheng@ustc.edu.cn

中国科学技术大学

本部分内容

- 机械波
- 波的空间传播
- 波的叠加
- 多普勒效应
- 课后作业

机械波

波

- 如果在空间某处发生的扰动，以一定的速度由近及远向四处传播，则称这种传播着的扰动为波。
- 机械扰动在弹性介质内的传播形成机械波（又称弹性波）。
- 波是能量传播的形式之一。

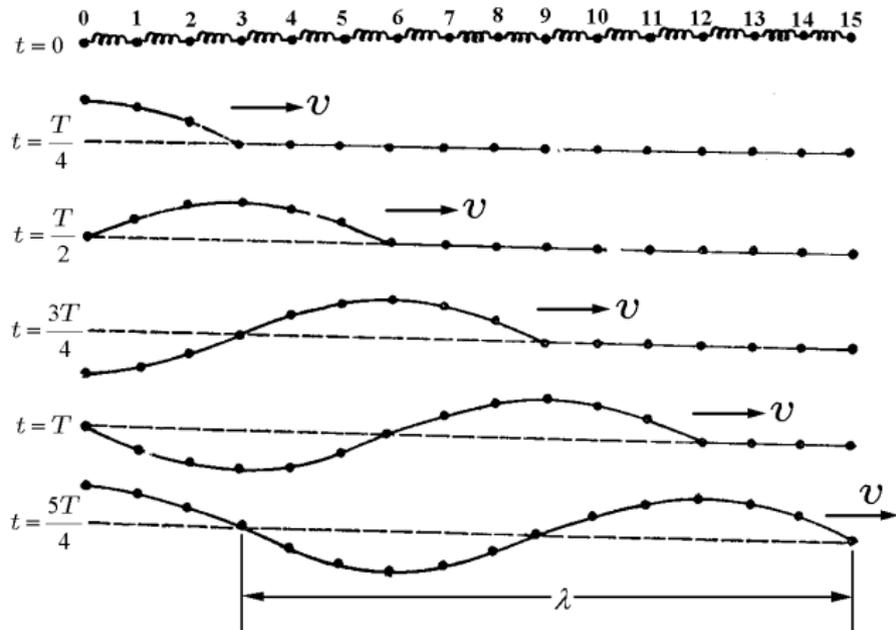
机械波的特点

- 机械波是一种机械运动形式，必须具备两个条件：波源（引起媒质振动的振动物体）和传播介质。
- 由连续不断的、无穷个质点构成的系统，若其各部分有相互作用力而且可以有相互运动，称为**连续介质**。
- 若连续媒质之间的相互作用力是弹性力，则称为**弹性介质**。
- 在弹性介质中，设想各质点（质元）有一个平衡位置，一离开平衡位置，即受到各附近质点的指向平衡位置的合力。
- 波的传播是质点振动状态的传播过程，即振动位相的传播过程，而所有的质点都仍在各自的平衡位置附近振动。
- 质元间的相互作用使波得以传播，**质元的惯性使波以有限的速度传播**。

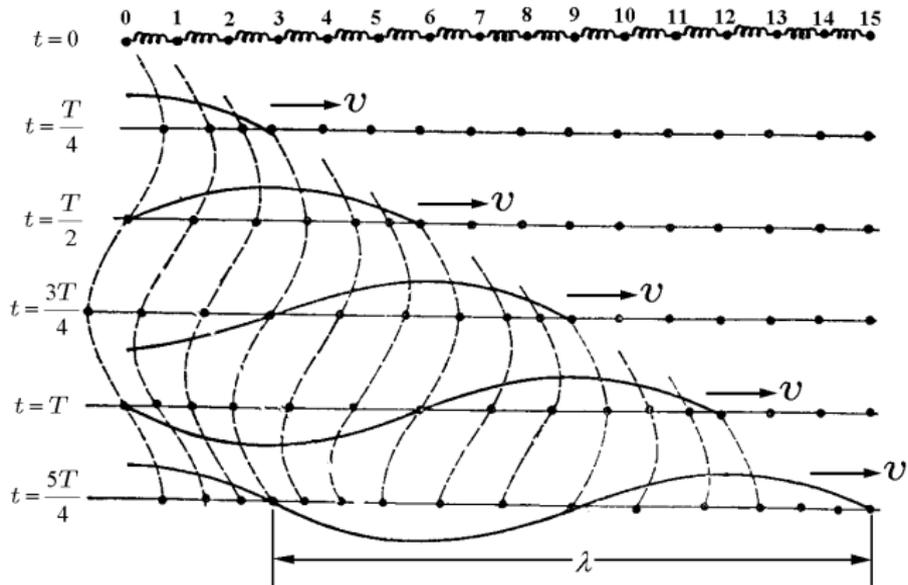
弹性介质分类

- 切变：**物体受力后层间发生位移的现象称为切变**。切变物体企图恢复原状而产生的弹性力称为切变弹性。在此介质中传播的波为横波。
- 张变：**介质伸长或压缩这种变形称为张变**。张变物体企图恢复原状而产生的弹性力称为张变弹性。在此介质中传播的波为纵波。
- 在机械波中，横波只能在固体中出现；纵波可在气体、液体和固体中出现。空气中的声波是纵波。液体表面的波动情况较复杂，不是单纯的纵波或横波。

横波

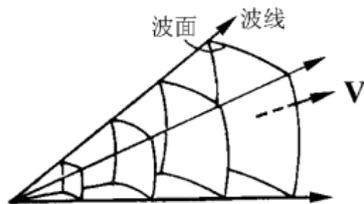


纵波

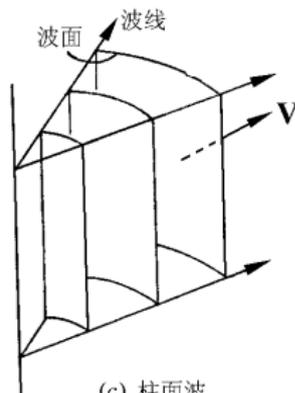


机械波的波前

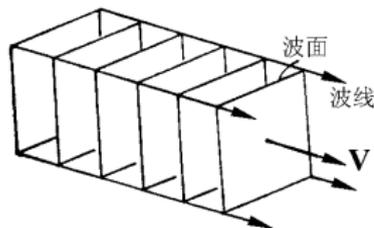
- 介质中振动相位相同的点的轨迹称为波面。
- 波传播方向最前面的波面为波前。



(a) 球面波



(c) 柱面波

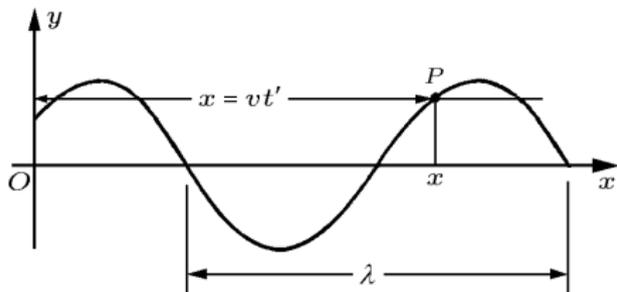


(b) 平面波

平面简谐波 I

- 如果波源作简谐振动，介质中各质点也将相继作同频率的简谐振动，这样形成的波叫简谐波。
- 如果波面为平面，则这样的波称为平面简谐波。
- 由于平面简谐波的波面上每一点的振动和传播规律完全一样，故平面简谐波可以用一维的方式来处理。
- 如右图所示，设一简谐波沿正 x 方向传播，已知在 t 时刻坐标原点 O 处振动位移的表式为

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

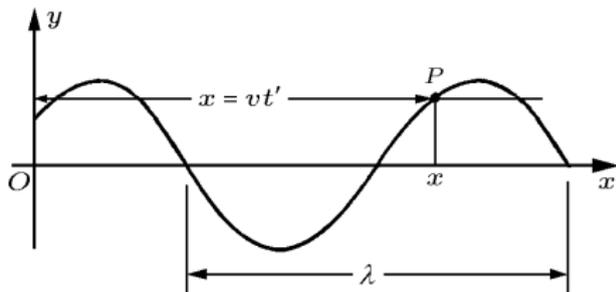


平面简谐波波速 I

- 图中 P 点的位移为

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]$$

- v 为波的相速度，也称为波速，它表示单位时间某一振动相位所传播的距离。
- 上式就是简谐波的运动学方程。由于波是向右传播的，又称为右行波。



$$\lambda = vT$$

- λ 称为波长，它表示振动在一个周期中传播的距离。

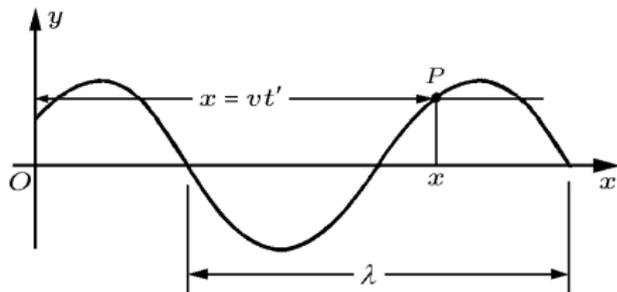
平面简谐波波矢

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\omega = 2\pi / T$$

$$y = A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$



- k 称为波数，它表示在 2π 米内所包含的波长数。
- 若 v 与 ω 无关，则称波是无色散的。
- 简谐波方程又可以写成：

$$y = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

平面简谐波说明

- 将以上各方程中的 v 换成 $-v$ ，则右行波变为左行波：

$$y = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right] = A \cos[\omega t + kx + \varphi_0]$$

- y 一定，则波的位相一定 $\omega t - kx + \varphi_0 = \text{常数}$

则随着时间的增加，波必须在空间传播一定的距离。
将上式对时间求导，得

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_p$$

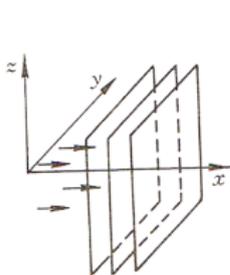
- v_p 称为波的位相速度，简称**相速度**。它表示确定的位相在单位时间内传播的距离。

波的空间传播 I

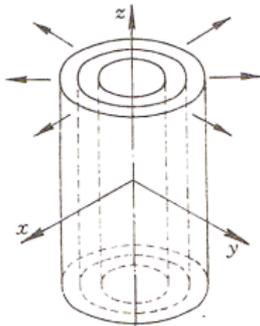
- 在空间中传播的平面简谐波的运动学方程为

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{A} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$$

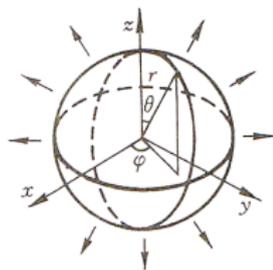
- 其中 \mathbf{k} 称为波矢，它是一个矢量，而它的绝对值就是波数。



平面波



柱面波



球面波

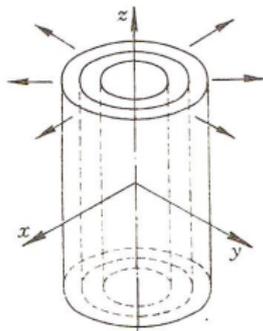
波的空间传播II

- 柱面波的波阵面为柱面，对应波函数：

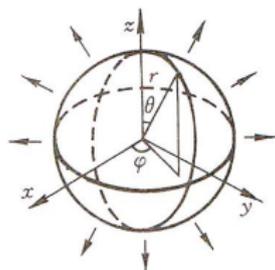
$$u(r, t) = \frac{a}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- 球面波的波阵面为球面，对应波函数：

$$u(r, t) = \frac{b}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



柱面波



球面波

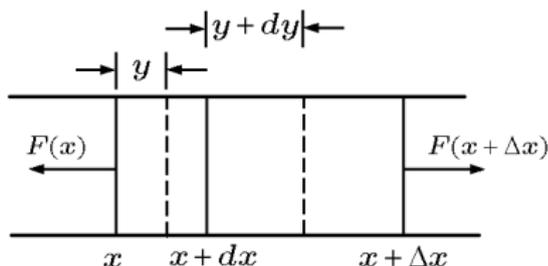
波动方程

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

纵波波动方程 I

- 设波在其中传播的介质是质量连续分布的弹性棒。棒的截面积 S ，密度为 ρ 。
- 当棒中有纵向扰动传播时，各截面的位移并不相同，棒中发生纵向形变，从而出现应力。
- 考虑 x 处受到左方介质所施的弹力 $F(x)$ 和右方介质所施弹力 $F(x + \Delta x)$ 的作用， $F(x)$ 由 x 处的相对形变决定。
- 设 x 处的横截面的位移为 y ， $x + dx$ 处的横截面的位移为 $y + dy$ ，则 x 处的相对形变为 dy/dx 。



纵波波动方程II

- 单位截面受力为 $T = Y \frac{dy}{dx}$
- 式中 Y 称为杨氏模量。于是, x 处与 $x + \Delta x$ 处的弹力:

$$F(x) = SY \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x} \quad F(x + \Delta x) = SY \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x+\Delta x}$$

$$\rho S \Delta x \frac{d^2 y}{dt^2} = SY \frac{dy}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - SY \frac{dy}{dx} \Big|_x = SY \frac{d^2 y}{dx^2} \Delta x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v_{\parallel}} \right)$$

$$v_{\parallel} = \pm \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

横波波动方程

- 当介质中有横向扰动传播时，介质发生切向形变，在与波传播方向相垂直的横截面上出现切应力，因而横波的传播速度与介质的切向弹性模量有关，类似于上面的推导，可以求得横波的波速为：

$$v_{\perp} = \pm \sqrt{\frac{N}{\rho}}$$

- 式中 N 称为切变模量，它是切应力 T 与横向相对形变 dy/dx 之比，即：

$$T = N \frac{dy}{dx}$$

介质波速 I

- 任一形式的波动都可以看做是很多简谐波的叠加。
- 介质中的波速只与介质参量有关，原则上与传播的简谐波的频率无关。
- 但实际中，波速与频率都有关系，这样就会有色散。
- 考虑有色散的介质，当不同频率的波在其中传播时，合成的峰（波包）的传播速度与相速度就不同：

$$y_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad y_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right)$$

$$A_m = 2A \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right)$$

- 在不长的时间、不大的空间内，可认为振幅 A_m 几乎不变。

群速度与相速度 I

- 合成波的相速度为：
$$u_p = \frac{(\omega_1 + \omega_2)/2}{(k_1 + k_2)/2} \approx \frac{\omega}{k}$$
- 合成波的振幅为：
$$A_m = 2A \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right)$$
- 一定振幅对应的方程为
$$\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x = \phi_0$$
- 合成波的任一给定振幅传播的速度是群速度：

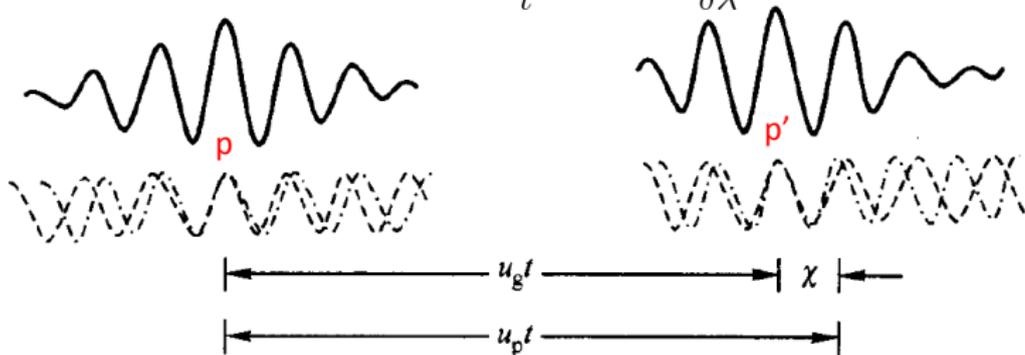
$$u_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\delta\omega}{\delta k} = u_p - \lambda \frac{\delta u_p}{\delta \lambda}$$

群速度与相速度 I

- 下图虚线为角频率为 ω_1 的波1，点虚线为角频率为 ω_2 的波2
- 初始时刻两波在点p同相位
- 过了一段时间，波2与波1在点p'相位

$$u_g t = u_p t - \lambda, \quad t = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u_1 - u_2}$$

$$u_g = u_p - \frac{\lambda}{t} = u_p - \lambda \frac{\delta u}{\delta \lambda}$$



波的能量 I

- 动能 $\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \quad \Delta V = S\Delta x$
- 势能 $E_p = \int_0^{\Delta L} F dx = \int_0^{\Delta L} YS \frac{x}{L} dx = \frac{YS}{L} \frac{(\Delta L)^2}{2} = \frac{YSL}{2} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}Y\Delta V \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}Y\Delta V \frac{\omega^2}{u^2} A^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

波的能量 II

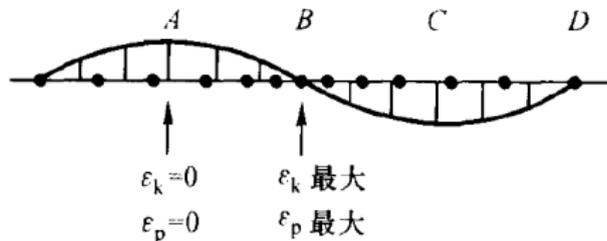
$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} Y \Delta V \frac{\omega^2}{u^2} A^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

$$u^2 = \frac{Y}{\rho} \quad \Delta E_k = \Delta E_p$$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

- 与谐振子不同，介质中任一质元的势能是由相对形变决定的



波的能量III

- 这样，介质中任一质元与周围的质元不停地交换能量。
- 波的传播过程也是能量的传播过程。

波的强度

- 单位时间内，波通过与其传播方向相垂直的单位截面的能量称为能流密度 I

$$I = u \frac{E}{V} = u\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \quad I = \bar{\varepsilon}u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u$$

- 平均功率 P

$$P = IS$$

- 对球面波

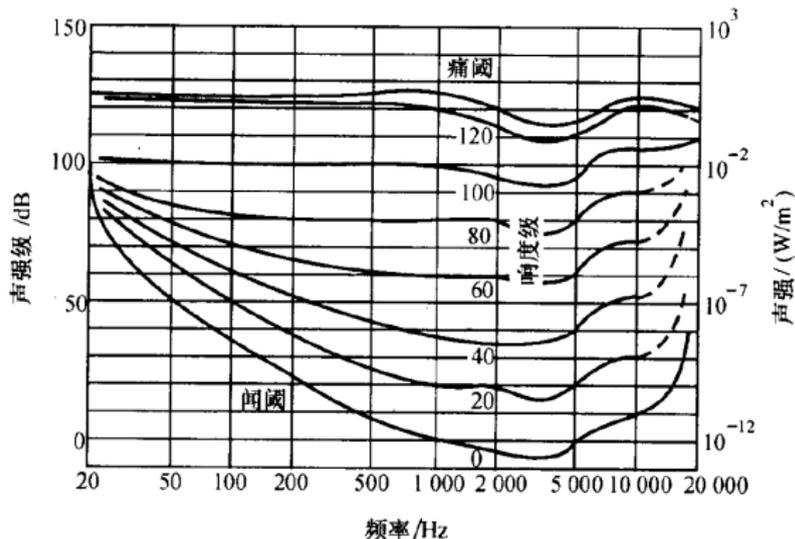
$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

- 结合能流密度的表达式得：

$$A \propto \frac{1}{r}$$

声波的强度

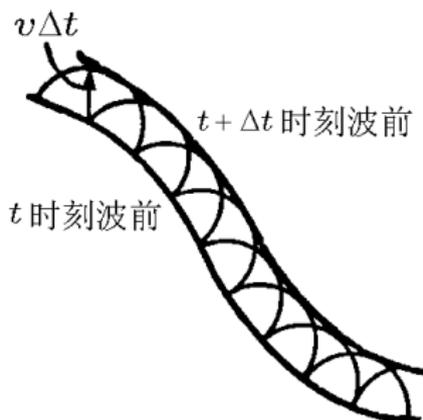
- 声波的频率在16~20000 Hz范围内。
- 定义声强级 $L=10\log_{10}(I/I_0)$ ，单位是dB。 $I_0=1 \text{ pW/m}^2$ 。
- 人耳对尖锐（f大）的声音更敏感。
- 相同声强级，不同频率，人耳听到的响度是不同的。



波的空间传播

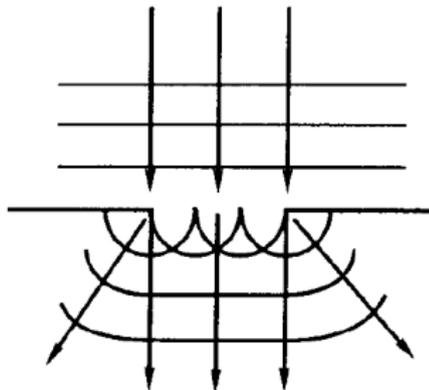
惠更斯原理

- 在波的传播过程中，波前上的每一点均可看成一个子波源。
- 在 t 时刻的波前上的这些子波源发出的子波，经 Δt 时间后形成半径为 $v\Delta t$ (v 为波速) 的球面，在波的前进方向上。
- 这些子波的包迹就成为时刻 $t + \Delta t$ 的新波前，如图所示。
- 这种借助于子波概念解释波前怎样推进的原理叫作**惠更斯原理**。



波的衍射

- 波前达到孔面，孔上各点作为子波源。
- 波不再是平面波，在边缘为球面，使波线可以偏离原方向向外延展。
- 当孔的线度与波长可比时，衍射现象明显。



波的反射

$$\because A_3B_3 = AB = ut$$

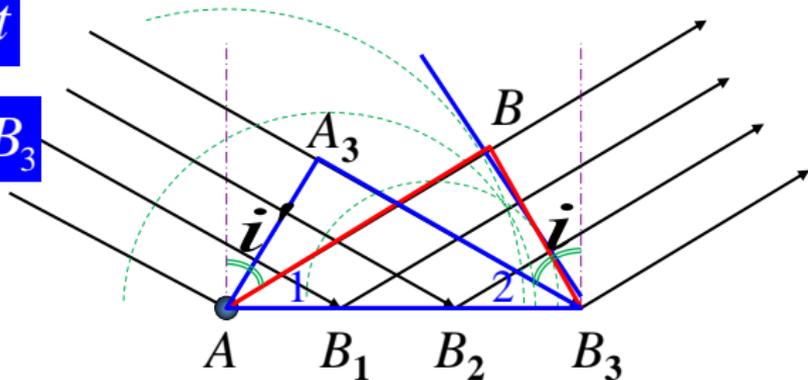
$$\angle ABB_3 = \angle AA_3B_3$$
$$= 90^\circ$$

$$AB_3 \equiv AB_3$$

$$\triangle AA_3B_3 = \triangle ABB_3$$

$$\angle 1 = \angle 2$$

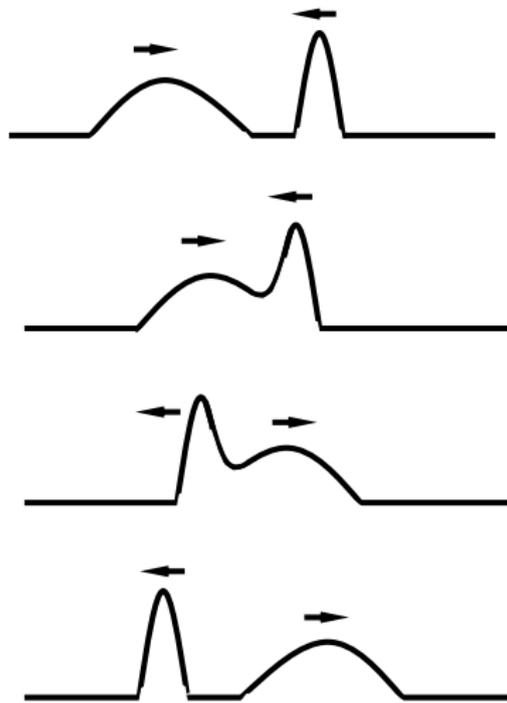
$$i = i'$$



波的叠加

波的叠加原理

- 当空间同时存在两列或两列以上的波时，每列波在传播中将不受其他波的干扰而保持其原有特性（频率、波长、振幅、振动方向和传播方向）不变，而空间任一点的振动位移则等于各列波单独在该点引起的振动位移的矢量和。
- 两波在空间某点相遇，相遇处质点的振动是各列波到达该点所引起振动的叠加；相遇后各波仍保持其各自的特性继续沿原方向传播。



波的叠加方程

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial x^2}$$

波的干涉 I

- 介质中同时传播着的两列波相遇时，在它们重叠区域的某些点振动始终加强，某些点振动始终减弱，形成稳定的叠加图样，这种现象称为波的干涉。
- 能产生干涉现象的必要条件称为波的相干条件。
- 满足波的相干条件而能产生干涉现象的两列波称为相干波。
- 产生相干波的波源称为相干波源。

波的干涉II

- 如右图所示，设两波源 S_1 和 S_2 的振动方程各为：

$$y_{10} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

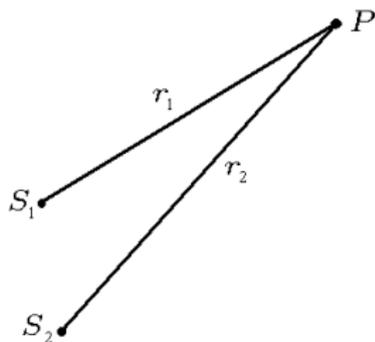
$$y_{20} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

- 假定振动的方向都垂直于纸面，由 S_1 、 S_2 发出的两列波在空间 P 点引起的振动各为：

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1) \quad y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2)$$

- 根据波的叠加原理， P 点的合振动为：

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2)$$



波的干涉III

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1 - kr_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2 - kr_2)$$

$$\Delta = \phi_1 - \phi_2 + k(r_2 - r_1) = 2n\pi \quad y_m = A_1 + A_2$$

$$\Delta = \phi_1 - \phi_2 + k(r_2 - r_1) = (2n + 1)\pi \quad y_m = |A_1 - A_2|$$

- 要在空间维持稳定的干涉现象，各点的振幅应保持恒定。
- 波的相干条件为：
 1. 两列波具有相同的频率；
 2. 两列波的相位相同，或相位差恒定；
 3. 两列波的振动方向相同。

驻波

- 介质中有反向行进的两个同频率的波存在时，这两个波叠加后也将产生干涉现象。为简单起见，设弹性弦上传播着具有相同的振幅、相反传播方向的两波，运动方程为

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \quad \text{右行波}$$

$$y_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2) \quad \text{左行波}$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

- 在合成波的表式中，合成波实际上是一种振动，不再是振动的传播，故称为驻波。
- 位相逐点传播的波，即通常意义下的波称为行波。

波腹

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

$$1. \quad kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$x = \frac{n\pi}{k} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2k} = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

$$\left| \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right| = 1$$

- 振幅最大，这种位置称为波腹，这时质点的振幅为分波振幅的两倍。
- 相邻波腹的距离为 $\lambda/2$ 。

波节

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

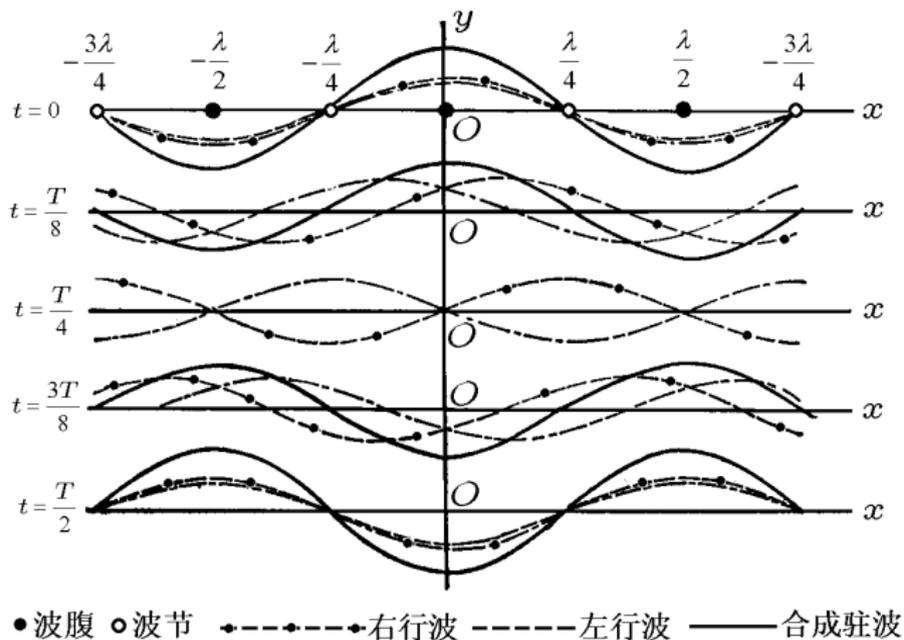
$$2. \quad kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$x = \frac{(2n+1)\pi}{2k} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2k} = \frac{(2n+1)\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

$$\left| \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right| = 0$$

- 振幅为零，这种位置称为波节。
- 相邻波节的距离也为 $\lambda/2$ 。

驻波示意图



多普勒效应

多普勒效应

- 当波源与接收端有相对运动时，接收端接收到波的频率相对于没有相对运动的情况会有变化。这就是多普勒效应。
- 多普勒效应的应用包括：测定星球相对于地球的运动速度；利用基于反射波多普勒效应原理的雷达系统，测定流体的流动、振动体的振动、车辆导弹等运动目标速度；利用超声波的多普勒效应检查人体内脏、血管的运动和血液（红细胞）的流速和流量；激光冷却等。



Christian Doppler

1803-1853

克里斯蒂安·多普勒
奥地利数学家和物理学家
1842年发现多普勒效应。

波源静止、观察者运动

- 如右图所示，静止点波源发出的球面波波面是同心的，若观察者以速度 u_D 向波源运动，则波动相对于观察者的传播速度变为

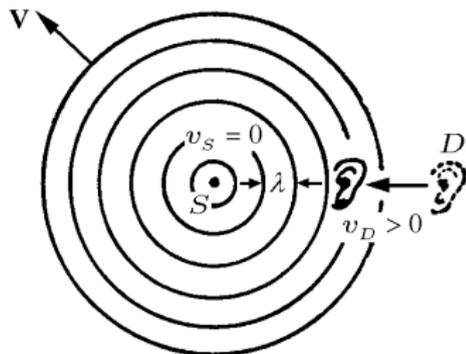
$$u' = u + u_D$$

- 于是观察者感受到的频率为：

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda} = \frac{u + u_D}{\lambda}$$

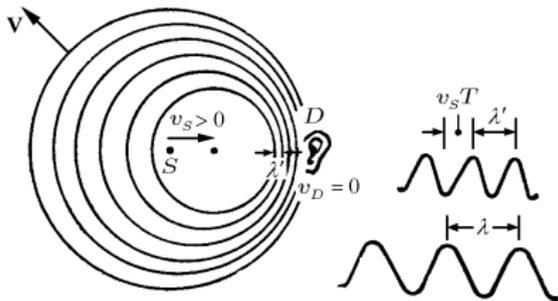
- 故它与波源频率之比为：
$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{u + u_D}{u}$$

- 上式中 u_D 可正可负，当 $u_D < 0$ 时表示观察者向离开波源的方向运动。



波源运动、观察者静止

- 波源运动时，当第一个等相面自波源发出后，该面即以速度 u 向前行进，在第二个同位相的等相面发出时，波源已向前移动了的距离 $u_S T$ ，而这时第一个等相面已向前行进 $uT = \lambda$ 的距离，结果两同位相等相面之间的距离变为 $\lambda - u_S T$
- 式中 u_S 可正可负，当 $u_S < 0$ 时表示波源向离开观察者的方向运动。



$$v' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - u_S T}$$

$$= \frac{u}{(u - u_S)T} = \frac{u v}{u - u_S}$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{u}{u - u_S}$$

波源与观察者都运动

- 这时 $u_S \neq 0, u_D \neq 0$
- 只要把上述两种情况结合起来，即可得波源和观察者都运动时观察者接收到的频率与波源频率之比为：

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{u + u_D}{u - u_S}$$

- 如果二者运动不在一条线上，只要把速度在连线上的分量作 u_S 和 u_D 即可。

红移测量 I

- 1929年，美国天文学家哈勃发现星体间距不断增大，提出了宇宙膨胀理论。
- 之后，伽莫夫和他的两位学生提出了宇宙热大爆炸模型。
- 然后科学界都认为宇宙在以一个恒定的速度膨胀。
- 1998年，三位科学家宣布宇宙的膨胀速度在加快，它的起源可能是暗物质、暗能量。



Edwin Hubble 1889-1953
爱德文·哈勃，美国天文学家



George Gamow 1904-1968
乔治·伽莫夫，美籍俄裔物理学家

红移测量II

- 按照现有的宇宙测量的结果，宇宙一直在膨胀，离我们越远的地方，远离我们的速度也越快。

The Nobel Prize in Physics 2011



© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Saul Perlmutter

Prize share: 1/2



© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Brian P. Schmidt

Prize share: 1/4



© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Adam G. Riess

Prize share: 1/4

The Nobel Prize in Physics 2011 was divided, one half awarded to Saul Perlmutter, the other half jointly to Brian P. Schmidt and Adam G. Riess "for the discovery of the accelerating expansion of the Universe through observations of distant supernovae."

红移测量III

- 可以利用自然界原子的光谱，对比其谱线的移动。因为星体远离我们，所以测得的谱线频率总是偏小，所以叫红移。
- 利用红移就可以测得星体的速度。
- 有了速度就可以按照已知的速度与距离的关系求出星体的距离。

课后作业

- 9.32/9.33/9.35/9.37/9.38/9.39/9.40/9.42/9.44

力学部分内容

- 质点运动学
- 质点动力学
- 非惯性参考系
- 动量定理、动能定理、角动量定理
- 万有引力
- 刚体力学
- 振动与波
- 相对论

力学部分内容 I

- 质点运动学
 - 法向速度、切向速度、曲率半径
- 非惯性参考系
 - 惯性离心力

三维→二维

- 速度矢量： $\vec{v}(t) = v(t)\hat{\mathbf{v}}(t)$
- 其中 $\hat{\mathbf{v}}(t)$ 是沿着轨道切向，指向运动方向的单位矢量。 $v(t)$ 没有法向分量。
- 加速度：

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t)\hat{\mathbf{v}}(t+\Delta t) - v(t)\hat{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \{v(t)[\hat{\mathbf{v}}(t+\Delta t) - \hat{\mathbf{v}}(t)] + [v(t+\Delta t) - v(t)]\hat{\mathbf{v}}(t+\Delta t)\} = \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

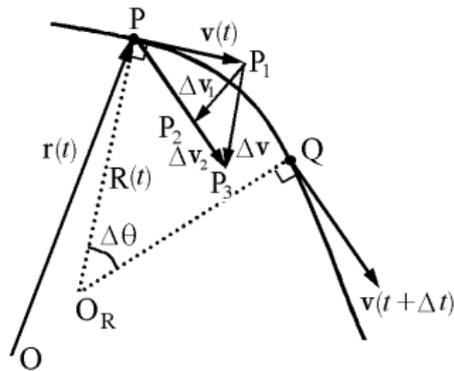


图 1.12 加速度的切向和法向分量

切向加速度

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \bullet \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \hat{v}(t + \Delta t) = \frac{dv(t)}{dt} \hat{v}(t)$$

该项沿轨迹的切向，也即是速度的方向，我们称这一项为**切向加速度**。

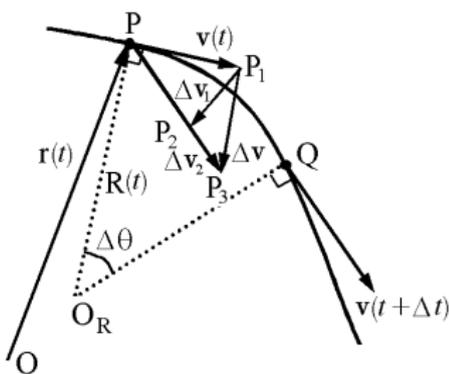


图 1.12 加速度的切向和法向分量

法向加速度

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v(t) \frac{\hat{v}(t + \Delta t) - \hat{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v(t) \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} \hat{n} = \frac{v^2(t)}{R(t)} \hat{n}(t)\end{aligned}$$

该项沿轨迹的法向，我们称这一项为**法向加速度**。

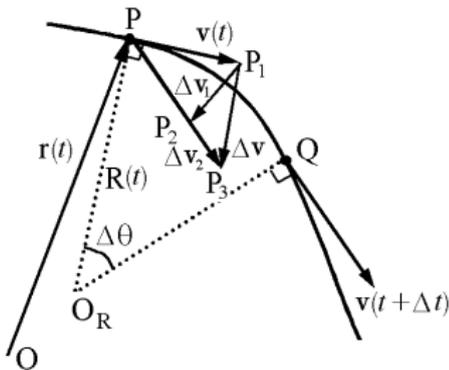


图 1.12 加速度的切向和法向分量

曲率半径

$$\vec{a}(t) = \hat{\mathbf{v}}(t) \frac{dv(t)}{dt} + \hat{\mathbf{n}}(t) \frac{v^2(t)}{R(t)} = a_t \hat{\mathbf{v}} + a_n \hat{\mathbf{n}}$$

其中切向加速度，表示速度大小的变化

$$a_t = \vec{a} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \frac{dv(t)}{dt}$$

法向加速度，表示速度方向的变化

$$a_n = \vec{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{v^2(t)}{R(t)} \longleftarrow \text{曲率半径}$$

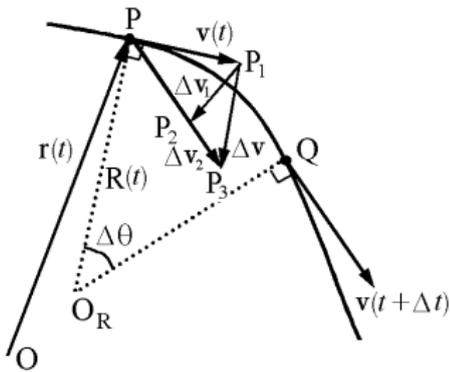


图 1.12 加速度的切向和法向分量

$$R(t) = \frac{v^3(t)}{|\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)|}$$

虚拟力

$$\vec{F}' = -m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\frac{D\vec{\omega}}{Dt} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

K'系中的
虚拟力

K'系的平
动加速度

科里奥利力

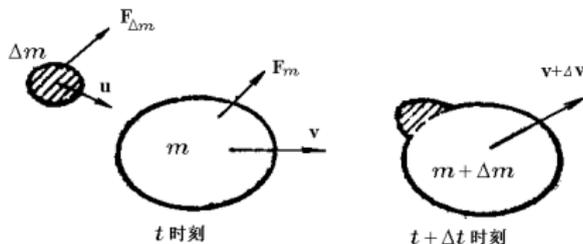
惯性离心力

力学部分内容II

- 动量定理、动能定理、角动量定理
 - 变质量问题
- 万有引力
 - 开普勒第三定律、轨道与能量关系

变质量体系

- 变质量体系研究的是运动过程中不断与外界交换质量的物体的运动。这种变化是由于外界不断有新的质量进入体系，或是体系内部不断有质量输送到外界。
- 我们可以过程分成一系列元过程，在每个元过程的起始时刻，原来的体系（主体）和即将进入主体的物体（附体）是分离的，经过时间，附体并入主体构成一个新体系。
- 在每一元过程中，对相应的体系，均可应用体系动量定理。由此即可导出主体的运动方程。



变质量体系运动方程

t 时刻: 主体质量 m , 速度 \mathbf{v} , 外力 \mathbf{F}_m
附体质量 Δm , 速度 \mathbf{u} , 外力 $\mathbf{F}_{\Delta m}$

$t + \Delta t$ 时刻: 主体质量 $m + \Delta m$, 速度 $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$, 外力 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_{\Delta m}$

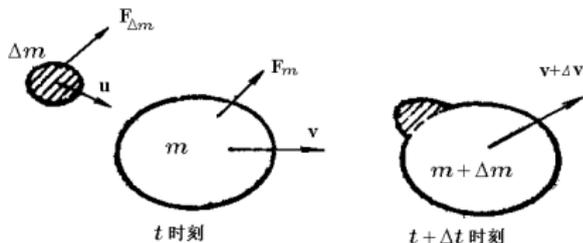
体系的动量定理: $(m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) - (m\vec{v} + \Delta m\vec{u}) = \vec{F}\Delta t$

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{\Delta m}{\Delta t} + \vec{F} - \Delta \vec{v} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 则 $\Delta \mathbf{v} \rightarrow 0$, 上式取极限得:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} + \vec{F}$$

这就是变质量质点 (即主体) 的运动方程。



运动方程说明

- 当 $\mathbf{u} = 0$ 时，方程变为：

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

这与牛顿第二定律一样。

- 上式虽然是在 $dm/dt > 0$ 情况下导出的，但当 $dm/dt < 0$ 时，结论依然正确，火箭就是这种情况的例子。

有效势能

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} + U(r) = E \quad l = mh \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

- 这等效的一维运动质点的势能，称为**有效势能**。
- 有效势能由两部分组成， $mh^2/2r^2$ 是一等效的斥力势能，它对应一斥力 mh^2/r^3 作用在质点上
- $U(r)$ 则视有心力的具体形式决定。
- 利用上面的势能和机械能表达式可以进行一维定性分析，通过对有效势能的分析可以给出各种情况下的轨道在空间中的分布。

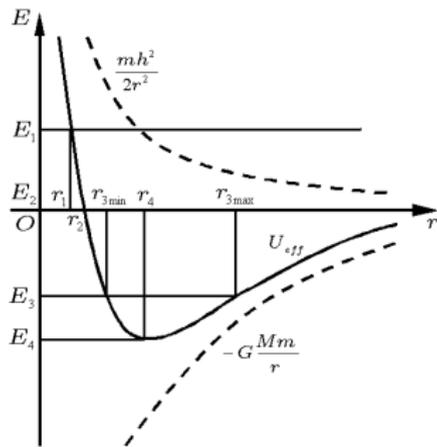
有效势能曲线

- 下图画出了对应的势能曲线
- 其中虚线分别为等效的斥力势能曲线和引力势能曲线
- **实线为有效势能曲线**，它由斥力势能和引力势能两曲线叠加而成。

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

$$U_{eff}(r) = \frac{mh^2}{2r^2} - G\frac{Mm}{r}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} - G\frac{Mm}{r} = E$$



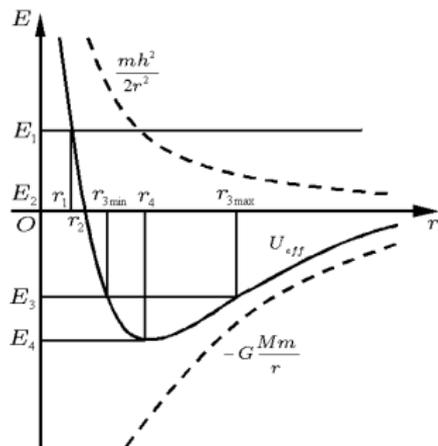
E > 0

$$r^2 + G \frac{Mm}{E} r - \frac{mh^2}{2E} = 0$$

- 若 $E = E_1 > 0$ ，由有效势能曲线图可知 r 有最小值 r_1 ，但最大值无限制，即 $r_1 \leq r < \infty$ 。可求得 r 只有一个正根，为：

$$r_1 = -G \frac{Mm}{2E} + \sqrt{\left(G \frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E}}$$

- 可以证明，此轨道为一双曲线。



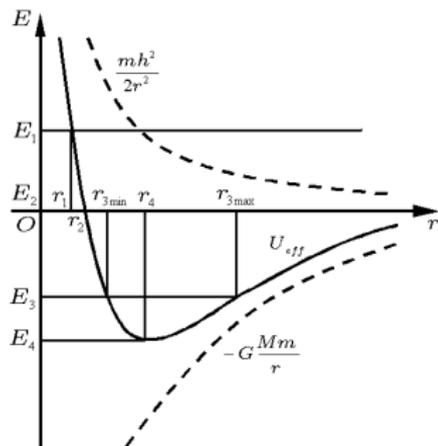
E=0

$$r^2 + G \frac{Mm}{E} r - \frac{mh^2}{2E} = 0$$

- 若 $E = E_2 = 0$ ，由有效势能曲线图可知 r 有最小值 r_2 ，但最大值无限制，即 $r_2 \leq r < \infty$ 。 r_2 比 r_1 略大，可求得 r 只有一个正根，为：

$$r_2 = \frac{h^2}{2GM}$$

- 可以证明，此轨道为一抛物线。



$$E < 0$$

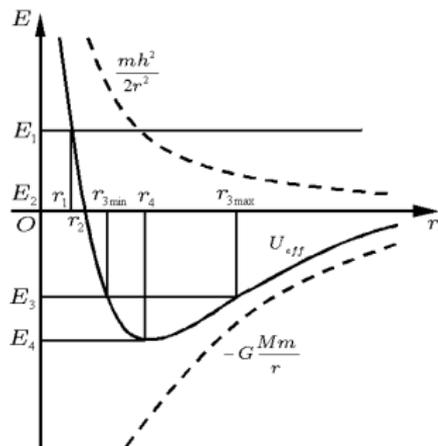
$$r^2 + G \frac{Mm}{E} r - \frac{mh^2}{2E} = 0$$

- 若 $E = E_3 < 0$ ，由有效势能曲线图可知 r 是有界的，即 $r_{3\min} \leq r \leq r_{3\max}$ ，可求得：

$$r_{3\max} = -G \frac{Mm}{2E} + \sqrt{\left(G \frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E}}$$

$$r_{3\min} = -G \frac{Mm}{2E} - \sqrt{\left(G \frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{mh^2}{2E}}$$

- 可以证明，对应的轨道为一椭圆，力心为椭圆的一个焦点。



长轴与角动量无关

$$a = \frac{GMm}{2|E|}$$

E最小值

$$r^2 + G \frac{Mm}{E} r - \frac{mh^2}{2E} = 0$$

- 若 $E = E_4$ 为有效势能曲线的最小值点，则 $r = r_4$ ，该值为上面方程(7)的重根

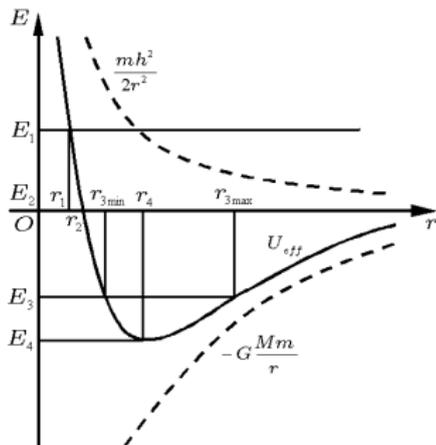
$$\left(G \frac{Mm}{2E} \right)^2 + \frac{mh^2}{2E} = 0$$

$$E = -G^2 M^2 m / 2h^2$$

- 于是可求得方程的重根为：

$$r_4 = \frac{h^2}{GM}$$

即质点 m 到力心 M 的距离恒定不变，对应的轨道为圆。



开普勒第三定律

- 对椭圆轨道，运动周期由椭圆面积和掠面速度所决定。
- 椭圆面积 $S=\pi ab$

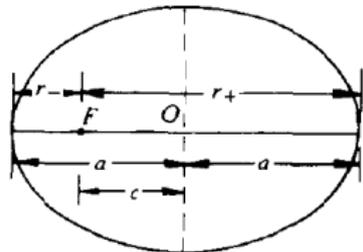
$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{1+\epsilon} + \frac{r_0}{1-\epsilon} \right) = \frac{r_0}{1-\epsilon^2} \quad b = \sqrt{ar_0} = \frac{r_0}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

- 掠面速度由角动量一章定义可知： $s=L/2m=h/2$ 。

$$T = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{\pi \frac{r_0^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}}}{h/2} = \frac{2\pi r_0^2}{h(1-\epsilon^2)^{3/2}}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{2\pi r_0^2}{h(1-\epsilon^2)^{3/2}} \right)^2}{\left(\frac{r_0}{1-\epsilon^2} \right)^3} = \frac{4\pi^2 r_0}{h^2}$$

$$r_0 = \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{h^2}{GM} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$



力学部分内容III

- 刚体力学
 - 转动惯量、动能与角动量定理
 - 纯滚动
- 振动与波
 - 受迫振动
 - 波的叠加

转动惯量

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

$$I_z = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2$$

- 利用角动量的表达式，可将 z 方向的角动量定理可写成：

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \beta$$

- I_z 称为刚体绕 z 轴的**转动惯量**，它是一个常量。
- 此式是刚体作定轴转动时沿转轴（即 z 轴）方向的动力学方程，常称为**转动定律**。它就是角动量定理沿固定轴方向的分量式。
- 转动定律与牛顿定律的形式 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 很相似，**力矩与力相当**，**角加速度与加速度相当**，**转动惯量与质量相当**。

转动惯量的计算

$$I_z = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2$$

$$I = \int_m r^2 dm$$

- 只有对于几何形状规则、质量连续且均匀分布的刚体，才能用积分计算出刚体的转动惯量。

动能

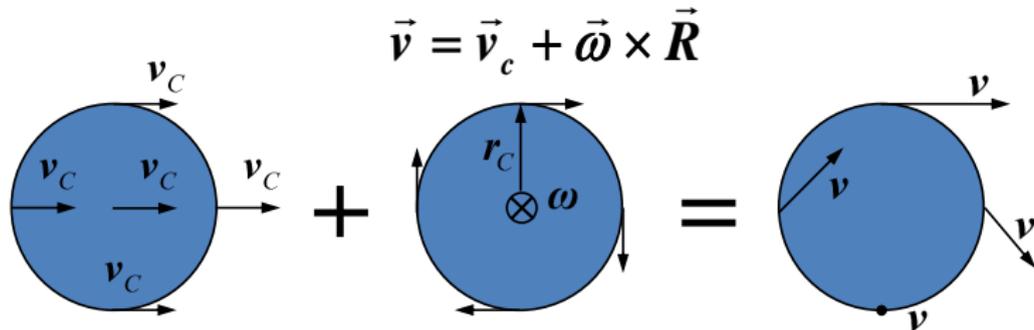
- 按照柯尼希定理，质点组的总动能 E_k 等于相对于质心系的动能 E_{kC} ，加上刚体整体随质心平动的动能 $m_C v_C^2/2$ 。
- 对于刚体的平行平面运动，有

$$E_{kC} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

- 故刚体的动能为：
$$E_k = \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$
- 右端第一项称为刚体的**平动能**，第二项称为刚体的**转动能**。
- 对于定轴转动， $|v_c| = \omega|r_c - r_o|$ 上式可写为：

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad I = I_C + m(r_c - r_o)^2$$

纯滚动



- 接触面之间有相对滑动的滚动称为有滑动滚动，**接触面之间无相对滑动**的滚动称为**无滑动滚动**，或称**纯滚动**。

$$v_c = R\omega, \quad a_c = R\beta$$

- 纯滚动的运动学判据，其中 v_c, a_c 是圆心（通常即质心）的速度和切向加速度的大小， ω 和 β 为滚动物体的角速度和角加速度（即物体在质心参照系中的角速度和角加速度）， R 是滚动物体的圆半径。

纯滚动的静摩擦力

- 对于质点的运动，静摩擦力做功为零。下面我们证明，对于刚体的纯滚动，静摩擦力做功也为零。如右图，静摩擦力做功可以用写为

$$A = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int M d\varphi = f\Delta x + M\Delta\varphi$$

- 利用纯滚动的运动学条件可得 $\Delta x = -r_0\Delta\varphi$

$$M = fr_0$$

$$A = -fr_0\Delta\varphi + fr_0\Delta\varphi = 0$$

