欧几里德、皮亚诺、希尔伯特、伽罗瓦
与数学前进脚步中的哲学

PB20000296 郑滕飞

一."有"与1的诞生、"最少"的概念

表数的具体符号的诞生时间是一个几乎不可考的问题，比起历史，这篇文章更多谈的也是个人对这些概念与关联的理解。如果说起数学概念中"最基本"的存在，或许很多人都会想到数字1。1在现实中可以有各种指代，既可以是一块石头，也可以是一堆石头，当然还可以是一滴水、一个人，或是一个太阳。在这些指代中，如果想要找到一个共同点，就只能是，它们都代表着某个可以被认识的东西。这或许也就是"最基本"的体现——它的指代具有某种意义上最少的限定性。事实上，这个某种意义上的最少也可以用1的语言来描述——它只是有1条限定性，也就是"有"。或者说，它只要去掉任何1条限定性，都会变得无法认识，也就是"无"。

这样的体系看起来是完备的，不过却暗含问题。我们至少可以发现1的另一个限定：有2。如果我们认为1可以代指一切的有，我们就必须认为，一切的"有"，一切我们认识的事物，可以存在"两个"。对于人、石头这样的定义都是没问题的。但是，我们假设用"宇宙"一词代指我们可以认识的所有事物，那么，"两个宇宙"这个词除了语义上的含义外，是否能成为指代？

我们姑且将这个问题留待之后讨论，因为在历史上，这个问题的解答恐怕得等到1889年。此处，在假设1可以代表"有"后，继续讨论：

二."无"与0、"变"与运算

刚才在"1"的限定性定义中，有一种说法，也就是"去掉任何1条限定性后即会变得无法认识"。既然记号1代表"有"，需要一个记号代表无法认识的"无"状态，这也就是0。值得注意的是，此处0与"无"一样，只是一个语义上的记号，并不能代表限定性。因此，除了与"无"等价这种描述性的说法，很难给0找到一个恰当的定义。

拥有了0与1之后，我们不能让它们孤立存在。在有无之间建立关系要依靠"变"，而0与1之间，则是需要最基本的运算。从去掉限定性的角度，这其实就是一种"$1\underline{-}1=0$"。与之相对，就有"$0\underline{+}1=1$"。之所以加1与减1上要画上下划线是由于这是作为整体而言的运算，也即"前一个"与"后一个"。

有了这两种基本运算，“数”就可以向前、向后延伸。向后的延伸较为正常，1,2,3⋯的数数方式也十分自然。奇怪的是，“向前数”代表什么？如果0已经代表了失去所有限定性的情况，为何还能再向前？

此时，我需要“相对化”的定义来解决问题：“-1”代表0与1的差距（自然也是1与2，2与3的差距）。从差距的角度，负数被纳入了认知的体系中。与此类似，“前一个”与“后一个”的复合成为了加法、减法，加法的复合成为了乘法，通过在乘法的意义下寻找“差距”，分数也被纳入了认知体系。至此，所有的有理数已经纳入了认识中。

0 无

运算 | 变 $\xrightarrow[+]{\text{“后一个”}}$ 正整数 2,3,4 $\xrightarrow[-\ \text{“差距”}]{\text{“前一个”}}$ 负整数 -1,-2,-3 $\xrightarrow[\times]{\text{“+的复合”}}$ $\xrightarrow[\div]{\text{“×的差距”}}$ 分数 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{7}$ [有理数]

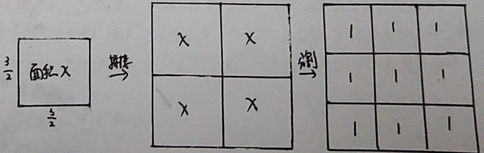
1 有

三. 毕达哥拉斯 vs 希帕索斯、第一次数学危机

在认识到全部有理数后，数学的大厦拔地而起。几何、代数的理论都在有理数的框架下得以发展。问题在于，这个世界上是否有不是有理数的东西存在（可以被认识）？毕达哥拉斯认为答案是否定的，他的“万物皆数”也指的是有理数。然而，希帕索斯给出了著名构造——边长为1的正方形的对角线长度——并以此粉碎了毕达哥拉斯的幻想。他证明了这个长度的任意倍数不可能是1的整数倍，从而此长度只能是「无理」数。

这样的发现为希帕索斯招来了杀身之祸。原因是，当时的一切数学理论都建立在有理数上。例如，我们定义1×1的正方形面积是1，而长方形的面积为它是这个正方形面积的倍数。若长方形的长、宽都是有理数，总可以用若干个拼成大长方形，使长宽都是整数，从而分割出小正方形计算面积。但对无理数，此种操作不再适用，面积又如何定义呢？

由此可见，史称“第一次数学危机”的无理数的发现，并不是由于无理数本身，而是认识到不存在于认识中的概念后用现有的体系无法统一，好比人突然有了新的感官，只能重新描述看到的世界。



$4x = 9 \Rightarrow$ 面积为 $\frac{9}{4}$

A.虚数

有关第一次数学危机的解决，此处先按下不表，与第二次数学危机一同讨论。本段来解决一个有趣的问题：虚数是可以被认识的吗？

与无理数从正方形对角线中而来不同，虚数似乎来自强行定义出 $i^2=-1$。当然，可以将虚数看为一个二维坐标，或是平面上的变换来加以认识，但相关的问题是：数学究竟从哪里彻底脱离了常理的认识？(或许从未脱离过？) 这个问题的答案可能是素数、高维空间，或是抽象代数，然而很多时候，在数学发展出体系后，却发现了其在物理学、信息学等中的重大应用，这难道是巧合吗？

我的回答是否定的。作为数学的学习者，我也并不认为对数学的一些基本内容(如 $1+1=2$) 是一种“宗教式的笃信”。$1+1=2$ 是完全来源于认识的，对量的变化的基本描述。数学的来源都是认识，而让其艰深的关键在于，它将认识里的存在以一种纯抽象的方式推理出结论。例如，虚数的存在，是由于数学家发现，在定义 i 后，极多的理论得以展开，极多的推理得以进行，因而作此定义。纯抽象的优势在于，它可以比基于具体的推理走得更远，甚至到了具体推理在数百年后才赶上的地步。这样看来，“$i^2=-1$”比“$a+bi$ 可以表示旋转”更先出现就不足为奇了。

此段只作为一点补充，接下来说的就是迈出纯抽象第一步的人：

四、欧几里德与《几何原本》

如果要在诸多数学思想中评一个“对数学体系构建意义最大的”，公理化思想当之无愧。公理化指的是：先承认一些事实作为公理(这些事实往往基于具体的认识)，在运用逻辑进行推理，看能导出怎样的结论。这个过程其实包含两部分：选取承认的事实、确立推理的规则。对推理的规则，早期的概念比较模糊，而公理化的先行者，则是欧几里德。

欧几里德在他的几何、代数著作《几何原本》中，提出了五条公理五条公设，结合一些定义，推出了很多被我们所熟悉的结构。他选择的公理、公设包含：等于同量的量彼此相等(著名的“量”的推理)、两点确定一条直线等，最终形成了“欧几里德公理系统”。

公理化最大的重要性是，通过对命题和逻辑的纯抽象，将数学从测量耕地面积、制造车轮这样的具体工作中解放了出来，可以在数

学自身的体系下向前发展。值得注意的事又出现了：这里欧几里德的公理还是将"数"作为一切的本原，至少是数学世界的基本元素。在之后这个体系受到冲击时，处理"公理"变为了很重要的一环。

五、牛顿莱布尼茨 vs 贝克莱、第二次数学危机

数学平稳、高速地发展着，到了十七、十八世纪，牛顿与莱布尼茨独立发明了微积分，解决了大量工程、物理的问题，就在这时，英国主教、由于其唯心论而"臭名昭著"的贝克莱给出了不同意见。此处先举一个例子，对x^2求导时，经过是这样的：

$$(x^2)' \xrightarrow{\text{假设增量}\Delta x\neq 0} \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \xrightarrow{\text{计算}} 2x+\Delta x \xrightarrow{\text{假设增量}\Delta x=0} 2x$$

这其中存在非常明显的问题：Δx不可能一会儿是0一会儿不是0，这个所谓的"无穷小增量"是站不住脚的。

从数为基本元素的角度来说，这之中蕴含着更深的迷思：这个所谓的Δx究竟是代表"无"(0)还是"有"(1)？当前的解释并不能站住脚，这就导致有无之间的界限变得模糊。既使之后用逼近解决了定义的问题，这层模糊仍然存在。(在我查到的资料中，马克思本人在《数学手稿》中批判了逼近的观点，这或许也是在数为基本元素的体系中这个问题无法彻底解决的例证。)

B. 皮亚诺公理

在具体叙述逼近前，我们先回到第一节中提出的问题，也即"0"与"1"的体系所具有的限定性。在1889年，皮亚诺具体总结了自然数所具有的限定性，成为皮亚诺公理：

0是自然数；对每个确定的自然数，存在另一个自然数是它的后继；0不是任何自然数的后继；不同自然数后继不同；数学归纳法在自然数中成立。

可以发现，皮亚诺公理的限定性并不算"最小"，这也代表了自然数不能作为真正意义上的基本元素。当然，从自然数推进至实数、复数的体系并不会因此就发生错误，只不过，在自然数"之前"还有着更为基本的东西，这也就是"集合"。

细看皮亚诺公理，可以得到之前"两个宇宙"悖论的升级版——宇宙不可能有有限多个，因为一定"下一个宇宙"是存在的。

六、从欧都克索斯到柯西、无限逼近

早在古希腊，芝诺就提出了关于无穷的"追乌龟"悖论。在第一次数学危机后，数学家也为"无理数"的合适定义争执不休。

为了解决无理数引起的争端，欧都克索斯创造出了"逼近"的方法：如果一列数与某个数的"差距"足够小，那么它就是那个数。当然，在数学的意义上，"足够小"不仅要很小，还必须越来越小。经过一代代数学家的分析、整理，在柯西这里，终于成为了我们所熟悉的定义：

对任意 ε，存在 N，使得数列 a_n 满足 $n>N$ 的项都有 $|a_n-a|<\varepsilon$，则视为 a_n 的极限是 a，记作 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$.

这个定义中最重要的一环，就是所谓的"差距"。差距的本质，是在某种度量下给两事物用数表示出差异的大小。这样看来，$|a_n-a|$ 与其看作"差的绝对值"，不如视为 a_n 与 a 两点在数轴作为度量意义下的距离。由此，极限可以看作这样的一个过程：首先，我们给一些事物赋予度量——这意味着其中任意两者可以判断距离，接着，为了确定其中的某个，我们取出其中一列，使这一列中落在与彼物任意距离之外的都只有有限多个，则这一列就可以视为彼物。

奇妙的是，这一列中的任一个可以都与彼物不同，但它的结果却视为相同。Δx 可以看作一列全部非 0 的增量，结果却成为了 0，这样的情形下，再不能将"0"作为无的评判，反而代表一种度量下的"相等"。

七、康托 vs 罗素、第三次数学危机

如果数并不是数学的基本元素，那么什么是呢？康托的答案是集合。从集合的角度，很多概念都显得自然——例如，"属加种差"的定义方式，就可以自然地看成指定集合的某个子集。康托看来，这种描述"一堆东西放到一起"的存在，只具有最少的限定性，因此可以作为本原。集合作为基本元素的推导将在下一部分中详细叙述，很遗憾的是，康托的梦碎得有些快，数学家、哲学家罗素提出的"罗素悖论"成为了康托一生的阴影，他甚至因此患上了精神疾病。

罗素悖论的表述是这样：集合 A 表示所有不包含自身的集合的集合，那么集合 A 是否包含自身？

一个更为经典的说法即是"理发师悖论"：一个只给不自己理发的人理发的理发师是否应该给自己理发？经过简单的分

析就可以发现，他无论是否给自己理发都会构成矛盾。如果"一堆东西放到一起"是一个合理的定义，那这样的悖论就不会出现，因此，罗素实质上证明了，集合也是具有某种限定性的，只是康托没有发现而已。

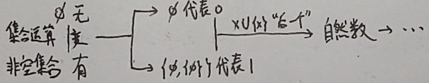
此后，策梅洛与弗伦克尔提出了ZF公理系统，才被数学界认为集合论成为了完备的理论，而这个公理系统里足足有8条公理，这说明，看起来十分基础的"集合"仍然在重重限定之中。

八、集合视角下的有、无、变

尽管如此，集合作为十分基础的存在，讨论在其视角下的体系建立依然有着意义。在集合的世界里，空集∅表示"无"，所有含有元素的集合都代表"有"。可以发现，这时不再会有"负数"之类定义困难的存在了，因为"无"就是空无一物。想要联系不同的集合，最基本的方式就是交、并、补三种运算。不过，除了交、并补，ZF公理系统还给出了其他一些生成新集合的方式，如"配对"、"幂集"、"归纳集"等等，从而生成我们熟悉的集合。

在第四节中提到，当新的体系出现时，我们并不希望旧的"公理"变为错误——至少，其中的大部分需要被保留，因为我们已发展数千年的数学不能就此被舍弃。ZF公理系统中，前四条与无穷公理结合，恰可以构造出符合皮亚诺要求的自然数。之所以把"无穷公理"单拿出来，是因为这其实就是皮亚诺自然数最后一条公理"搬运"到了集合论中。

这样一来，数学的大厦并不会倒塌，只不过重新筑牢了地基，一切又变得井然有序起来。



C.选择公理

在ZF公理系统外，还有一条常被使用的公理，即选择公理（包含选择公理与ZF公理的公理系统称ZFC公理系统）。之所以单独将其拿出来讨论，是因为这是一个颇为有趣的命题：任何一族集合，可构造一个集合，与这族中每个恰有一个相交。

选择公理最特殊之处在于，无论认为它是对是错，都会出现违反直觉的情况：认为它对，我们就可以把一个球分为五份、平移、旋转后形成两个新的球，并且都与原来的球相同；认为它错，就能构造出在一点处间断的函数，以任何数列逼近都十分"连续"。根据公理认识的来源，公理需要符合现实的或物理的认识才有意义，此时"双面反直觉"的情况又如何解释呢？

以承认选择公理的ZFC系统为例，分球悖论的出现，意味着数学世界中存在一些东西，无法被放在秤上称量质量，也就是所谓"不可测集"，常规的度量无法定义在这个集合上。这件事就仿佛无理数出现时带来的危机一样——人们发现，在允许边的长度无理后，原先的"面积"作为度量不再能按有理时定义，最后，通过"逼近"解决了这一问题。由此看来，"不可测"或许也只是一种全新的感官，重新启发我们看待世界的方式。

九、希尔伯特 vs 哥德尔，不完美的数学

欧几里德时代，公理化的思想只是萌芽，而到了希尔伯特手里，这套理论被推到了底层。希尔伯特希望从最基本的逻辑判断里，以纯形式的方式重构数学，做出这样尝试的人不只有希尔伯特。罗素和他的老师怀特海合著的《数学原理》就讨论了从底层进行逻辑演算、谓词演算而成的推理体系。

希尔伯特进行了对数学的重构后，发出豪言壮语："我们必须知道，我们终将知道。"他认为，一切真命题都可被证明，算术系统自身不存在矛盾，并且存在证明一切可证明命题的通法。

然而，正是以纯形式的方式，哥德尔证明了"存在不可证明的真命题"，"自洽的系统无法证明自身的自洽"，此后，"不存在万能证明法"也被证明，希尔伯特的梦想近乎完全破产。

从某种意义上说，这似乎代表了一定程度的“不可知”，不过介于数学的特殊性，对此有种更好的看法：世界的真相不可能在纯形式的推理下得知，因此，看似不那么“精确”的观察与实验是必要的。只有接受这一份“不定”，才能继续向后推进。

形式化的量词公理
$$
\begin{cases}
\forall x\, Z(x) \to Z(t) \\
Z(t) \to \exists x\, Z(x) \\
\forall x\,(W \to Z(x)) \to (W \to \forall x\, Z(x)) \\
\forall x\,(Z(x) \to W) \to (\exists x\, Z(x) \to W)
\end{cases}
$$

十、范畴的世界

在推理上，数学终于前进到了最基础的逻辑，而在元素上，证明了集合不是最基本的代表后，还需要继续寻找。

在伽罗瓦系统发明群论后，抽象代数渐渐发展、庞大。面对抽象代数中的不同对象，数学家们往往会发现一种相似性。由此，数学家将这些对象组成了类，考虑类之间的关系。“类”的概念可以囊括集合，又比集合更大，即可以成为更基本的元素。类是否是最基本的呢？答案是否定的。根据伯特兰·罗素的“恶性循环原则”，正如所有集合不能成为集合，由于任何概念不能包含自身，所有类也不是类。（容易发现，如果定义了所有类为某个东西，其必然还有更上的东西存在。）

但数学家更倾向于认为，比起一次次粉碎概念、寻找新元素，在类上的操作已经基本足以统一整个数学王国。于是，数学家在类上构造态射、合成，使类成为“范畴”，又以函子、自然变换关联范畴，形成了“范畴论”，从而在范畴的视角完成基本的代数。

正如康德在哲学上提出的十二范畴几乎概括了认识，我们研究的数学也逃不开一个个范畴。范畴一片片叠加，数学的色彩也随之丰富，最终成为了现代人眼中光怪陆离的抽象世界。