数值分析进阶作业解答

原生生物

* 对应徐岩老师《数值分析进阶》课程作业，教材为 Briggs、Henson、McCormick《多网格》。

目录

1 第一次作业

1. (习题 2.8)

   记 $B_{(n-1)\times(n-1)}=(b_{ij})=\begin{cases}1 & |i-j|=1\\ 0 & |i-j|\neq 1\end{cases}$，则 $A=\frac{1}{h^2}\big((2+\sigma h^2)I-B\big)$，直接代入特征方程可知 $\lambda_i(A)=\frac{1}{h^2}\big((2+\sigma h^2)-\lambda_i(B)\big)$，于是只需求出 B 的特征值。记 $n-1$ 阶情况为 B_{n-1}。

   记多项式 $p_n(\lambda)=\det(\lambda I_n-B_n)$，则由 Laplace 展开计算可知有递推：规定 $p_0(\lambda)=1$，且 $p_1(\lambda)=\lambda$，有 $p_{n+1}(\lambda)=\lambda p_n(\lambda)-p_{n-1}(\lambda)$。

   考虑 $\lambda\in[-2,2]$，令 $\lambda=2\cos\theta$，对 p_0,p_1 有 $p_i(\lambda)=\frac{\sin(i+1)\theta}{\sin\theta}$，而

   $$2\cos\theta\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sin n\theta+\cos n\theta\sin\theta}{\sin n\theta}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

   于是归纳得 $p_n(\lambda)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$，取 $\lambda=2\cos\frac{k\pi}{n+1},k=1,2,\dots,n$ 为两两不同的 n 个实根，又由于 p_n 为 n 次首一多项式，其根必然只有这些，也即 B_n 的特征值为 $2\cos\frac{k\pi}{n+1},k=1,2,\dots,n$，从而 $n-1$ 阶情况下 A 的特征值为 $\frac{1}{h^2}\big((2+\sigma h^2)-2\cos\frac{k\pi}{n}\big),k=1,\dots,n-1$，这些特征值两两不同。

2. (习题 2.10)

   由于此时 $D=(\frac{2}{h^2}+\sigma)I$，$R_J=D^{-1}(D-A)=I-\frac{h^2}{2+\sigma h^2}A$，于是 $R_\omega=I-\frac{h^2\omega}{2+\sigma h^2}A$。

   直接计算可知

   $$A\alpha=\lambda\alpha\Leftrightarrow R_\omega\alpha=\left(1-\frac{h^2\omega\lambda}{2+\sigma h^2}\right)\alpha$$

   于是二者特征向量相同，对应特征值 $\lambda_i(R_\omega)=1-\frac{h^2\omega\lambda_i(A)}{2+\sigma h^2}$，利用习题 2.8 即得特征值为

   $$1-\omega+\frac{2\omega}{2+\sigma h^2}\cos\frac{k\pi}{n},k=1,\dots,n-1$$

3. (习题 2.14)

   (a) 由 $R_G=(D-L)^{-1}U$，$R_Gw=\lambda w\Leftrightarrow Uw=\lambda(D-L)w=(D-L)\lambda Iw$。

   (b) 方程即 $\lambda(2w_j-w_{j-1})=w_{j+1}$。此递推的特征方程为 $\mu^2=\lambda(2\mu-1)$，当 $\lambda=0$ 或 1 时由边界条件得 w_j 恒为 0，不满足特征向量要求，其余情况下必有两个不同的非零根 $\mu_{1,2}=\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\lambda}$。由于此递推既可写为 $w_{j+1}-\mu_1w_j=\mu_2(w_j-\mu_1w_{j-1})$，又可写为 $w_{j+1}-\mu_2w_j=\mu_1(w_j-\mu_2w_{j-1})$，两边得到等比数列后求解二元一次方程得必有 $w_j=a\mu_1^j+b\mu_2^j$。由于同乘倍数不影响结果，再代入 $w_0=0$ 可不妨设 $w_j=\mu_1^j-\mu_2^j$，且由另一边界知 $\mu_1^n=\mu_2^n$。

   由 $\mu_1\neq\mu_2$ 非零，$\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 必然是某个非 1 的 n 次单位根，也即

   $$\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-\lambda}}{\lambda-\sqrt{\lambda^2-\lambda}}=\exp\left(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}\right),k=1,\dots,n-1$$

   变形有

   $$1-\sqrt{1-\lambda^{-1}}=2\left(\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-\lambda}}{\lambda-\sqrt{\lambda^2-\lambda}}+1\right)^{-1}=2\left(\exp\left(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}\right)+1\right)^{-1}=1-\mathrm{i}\tan\frac{k\pi}{n}$$

   进一步得

   $$1-\frac{1}{\lambda}=-\tan^2\frac{k\pi}{n}$$

   于是 $\lambda=\cos^2\frac{k\pi}{n}$，即特征值只能为某个 $\cos^2\frac{k\pi}{n},k=1,\dots,n-1$，原命题得证。

(c) 由上问，当 $\lambda=\cos^2\frac{k\pi}{n}$ 时，可以解出

$$\mu_{1,2}=\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\lambda}=\cos\frac{k\pi}{n}\exp\left(\pm\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}\right)$$

于是 $\mu_1^j-\mu_2^j=\pm 2\cos^j\frac{k\pi}{n}\sin\frac{kj\pi}{n}$，由于同乘倍数不影响结果即知对应的特征向量为

$$w_{k,j}=\cos^j\frac{k\pi}{n}\sin\frac{kj\pi}{n}$$

2 第二次作业

1. (习题 4.6)

(a) 由于方程为

$$Av=f, A=(a_{ij})=\frac{1}{h^2}\begin{cases}2+c_ih^2 & i=j\\ -1 & |i-j|=1\\ 0 & |i-j|>1\end{cases}$$

代入 R_J 表达式有

$$R_J=\mathrm{diag}((2+c_1h^2)^{-1},\dots,(2+c_{n-1}h^2)^{-1})\begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & & 1\\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

于是

$$R_\omega=\begin{pmatrix}1-\omega & \omega(2+c_1h^2)^{-1} & & \\ \omega(2+c_2h^2)^{-1} & 1-\omega & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \omega(2+c_{n-2}h^2)^{-1}\\ & & \omega(2+c_{n-1}h^2)^{-1} & 1-\omega\end{pmatrix}$$

而 $\omega D^{-1}f=\omega h^2((2+c_1h^2)^{-1}f_1,\dots,(2+c_{n-1}h^2)^{-1}f_{n-1})^T$，因此知迭代为

$$v_j^{m+1}=(1-\omega)v_j^m+\frac{\omega}{2+c_jh^2}(v_{j-1}^m+v_{j+1}^m)+\omega h^2\frac{f_j}{2+c_jh^2}$$

整理即得原式。

(b) 由于 $u=A^{-1}f$，有 $u=R_\omega u+\omega D^{-1}f$，于是 $u-v^{m+1}=R_\omega(u-v_m)$，也即误差的迭代相当于 $f=0$ 的情况，因此

$$e_j^{m+1}=(1-\omega)e_j^m+\frac{\omega}{2+c_jh^2}(e_{j-1}^m+e_{j+1}^m)$$

(c) 代入 $e_j^m=A(m)\exp(\mathrm{i}j\theta)$，两边同除以 e_j^m 得

$$\frac{A(m+1)}{A(m)}=1-\omega+\frac{\omega}{2+c_jh^2}(\exp(-\mathrm{i}\theta)+\exp(\mathrm{i}\theta))=1-\omega+\frac{\omega}{2+c_jh^2}2\cos\theta$$

c_j 取 0 得到

$$A(m+1)=A(m)(1-\omega+\omega\cos\theta)=A(m)\left(1-\omega\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

即为所求。

2. (习题 4.7)

   类似习题 4.6，误差迭代满足令 $f=0$ 的 $e^{m+1}=R_G e^m$，也即 $(D-L)e^{m+1}=Ue^m$。消去 $\frac{1}{h^2}$ 得到 $(2+c_i h^2)e_j^{m+1}=e_{j-1}^{m+1}+e_{j+1}^m$，变形即得要证的式子。

   代入 $e_j^m=A(m)\exp(\mathrm{i}j\theta)$，并令 c_j 取 0，两边同除以 $\exp(\mathrm{i}j\theta)$ 得 $2A(m+1)=A(m+1)\exp(-\mathrm{i}\theta)+A(m)\exp(\mathrm{i}\theta)$，变形得 $A(m+1)=\frac{\exp(\mathrm{i}\theta)}{2-\exp(-\mathrm{i}\theta)}A(m)$，得证。