上机作业

级数计算[Hamming (1962)]

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+x)}$$

x取值$x=0.0,0.1,0.2,\cdots,1.0,10.0,20.0,\cdots,300.0$共41个值，要求误差小于$10^{-6}$，并给出相应的$k$的取值上界（找到满足条件的最小的$k$）。
输出格式：三列：
x, $\varphi(x)$, k

上机作业1

对函数

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in[-5,5]$$

构造Lagrange插值多项式$p_L(x)$，插值节点取为:

1. $x_i=5-\frac{10}{N}i,\ i=0,1,\cdots,N$
2. $x_i=-5\cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi),\ i=0,1,\cdots,N\quad$ (Chebyshev point)

并计算如下误差

$$\max_i\{|f(y_i)-p(y_i)|,\ y_i=\frac{i}{10}-5,\ i=0,1,\cdots,100\}$$

对$N=5,10,20,40$比较以上两组节点的结果，并在一张图中画出$N=10$时$f(x)$数值计算结果。

输出形式如下：

N=5

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=10

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=20

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=40

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

上机作业2

对函数

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1]$$

构造牛顿插值多项式$p_N(x)$，插值节点取为:

1. $x_i = 1 - \frac{2}{N}i,\ i = 0, 1, \cdots, N$
2. $x_i = -\cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi),\ i = 0, 1, \cdots, N$ (Chebyshev point)

并计算如下误差

$$\max_i\{|f(y_i) - p(y_i)|,\ y_i = \frac{i}{50} - 1,\ i = 0, 1, \cdots, 100\}$$

对$N = 5, 10, 20, 40$比较以上两组节点的结果，并在一张图中画出$N = 20$时$f(x)$数值计算结果。

输出形式如下：

N=5

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=10

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=20

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=40

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

上机作业

对函数

$$f(x) = e^x, x \in [0, 1]$$

构造等距节点的样条插值函数，对以下两种类型的样条函数

1. 一次分片线性样条
2. 满足$S'(0) = 1$, $S'(1) = e$的三次样条

并计算如下误差

$$\max_i \{|f(x_{i-\frac{1}{2}}) - S(x_{i-\frac{1}{2}})|, \quad i = 1, \cdots, N\}$$

这里$x_{i-\frac{1}{2}}$为每个小区间的中点。对$N = 5, 10, 20, 40$比较以上两组节点的结果。讨论你的结果。利用公式计算算法的收敛阶。

$$Ord = \frac{\ln(Error_{old}/Error_{now})}{\ln(N_{now}/N_{old})}$$

输出形式如下：

n	Method (1) error	order	Method (2) error	order
5		–		–
10				
20				
40				

H.W.

编程实现用Richardson外推计算$f'(x)$的值，$h=1$。函数$f(x)$分别取

- $\ln x,\ x=3,\ M=3$
- $\tan x,\ x=\sin^{-1}(0.8),\ M=4$
- $\sin(x^2+\frac{1}{3}x),\ x=0,\ M=5.$

输出相应的三角阵列

$$\begin{array}{ccccc}
D(0,0) & & & & \\
D(1,0) & D(1,1) & & & \\
D(2,0) & D(2,1) & D(2,2) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
D(M,0) & D(M,1) & D(M,2) & \cdots & D(M,M)
\end{array}$$

上机作业

- 分别编写用复化Simpson积分公式和复化梯形积分公式计算积分的通用程序
- 用如上程序计算积分

$$I(f) = \int_0^4 sin(x)dx$$

取节点$x_i, i = 0, \cdots, N$, N为$2^k, k = 1, \cdots, 12$,并分析误差

- 利用公式计算算法的收敛阶。

$$Ord = \frac{\ln(Error_{old}/Error_{now})}{\ln(N_{now}/N_{old})}$$

输出形式如下：

N	复化Simpson error	order	复化梯形error	order
2		–		–
4				
8				
16				
32				
64				
128				
256				
512				
1024				
2048				
4096				

上机作业

对函数

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}, x\in[-1,1]$$

构造Lagrange插值多项式$p_L(x)$，插值节点取为：

1. $x_i=1-\frac{2}{N}i,\ i=0,1,\cdots,N$
2. $x_i=-\cos(\frac{i+1}{N+2}\pi),\ i=0,1,\cdots,N$

利用$\int_{-1}^{1}p_L(x)dx$计算积分$\int_{-1}^{1}f(x)dx$的近似值，并计算如下误差

$$\left|\int_{-1}^{1}p_L(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)dx\right|,$$

对$N=5,10,15,20,25,30,35,40$比较以上两组节点的结果。

输出形式如下：

N	$\int_{-1}^{1} p_L(x)dx$	$\int_{-1}^{1} f(x)dx$	$\lvert \int_{-1}^{1} p_L(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx \rvert$
5			
10			
15			
20			
25			
30			
35			
40			

上机作业

- 利用复化梯形积分公式和复化3点Gauss积分公式计算积分的通用程序计算下列积分

$$I_1(f)=\int_0^1 e^{-x^2}dx,\ \ I_2(f)=\int_0^4 \frac{1}{1+x^2}dx,$$
$$I_3(f)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos(x)}dx$$

取节点$x_i, i=0,\cdots,N$, N为$2^k, k=1,\cdots,7$,给出如下的误差表格,其中阶为$\frac{\ln(Error_{old}/Error_{now})}{\ln(N_{now}/N_{old})}$.

	$I_1(f)$		$I_2(f)$		$I_3(f)$	
N	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2						
4						
8						
16						

- 简单分析你得到的数据

计算机习题 7.4

编写一个子程序，用来执行定义在任意区间[a，b]上的函数 f 的龙贝格算法．用户要具体指定阵列中所计算的行数，并且当计算完成后要看到整个阵列．编写一个主程序并且用下列积分测试你的龙贝格子程序：

a. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

b. $\int_{-1}^1 \frac{\cos x - e^x}{\sin x} dx$

c. $\int_1^\infty (xe^x)^{-1} dx$

编写这些积分的程序，要避免由于减法而产生有效数字的严重丢失．习惯上也用等式 $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ 定义任何可疑点 x_0 上的函数 f．如果极限存在，则这种方法便保证了 f 在 x_0 点的连续性．对于第三个积分，作适当的变量替换，例如 $x=1/t$．计算出龙贝格阵列中的 7 行．打印出每一种情形的阵列，并要求打印格式能够反映出收敛性．

2. 利用四阶龙格-库塔方法和各种 λ 的值，譬如，5，-5 或 -10，数值求解下列初值问题：

$$\begin{cases} x' = \lambda x + \cos t - \lambda \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

在区间[0，5]上比较数值解和解析解．利用步长 $h=0.01$．试问 λ 对数值准确性有什么影响？

程序作业

- 应用RKF45或RKF54方法，设计实现自适应方法，求解如下常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = e^{yx} + \cos(y - x), \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

- 初值步长取为$h = 0.01$. 在自适应方法中步长的选取采用第二种策略。
- 在解溢出前终止。
- 程序的输出：
  1. 解的范围: $[1, ?]$
  2. 提示输入一个介于上述范围的值，应用简单的两点线性插值计算出对应的函数值。

程序作业

初值问题

$$x' = \frac{t - e^{-t}}{x + e^{x}}$$
$$x(0) = 0$$

该方程的真解由等式

$$x^2 - t^2 + 2e^{x} - 2e^{-t} = 0$$

隐式给出。

- 当$t = 1$时，数值求解等式$x^2 - t^2 + 2e^{x} - 2e^{-t} = 0$，将这一数值解作为参考的准确解。

- 利用Adams-Bashforth公式计算方程在$t=1$的数值解，利用Runge − Kunta格式得到初值，取节点$x_i, i=0,\cdots,N$, N为$2^k, k=3,\cdots,8$,给出如下的误差表格,其中阶为

$$\frac{\ln(Error_{old}/Error_{now})}{\ln(N_{now}/N_{old})}$$

N	误差	阶
8		
16		
32		
64		

- 画出五阶Adams-Bashforth公式和五阶Adams-Moulton公式的绝对稳定性区域
- 可以使用Mathematica绘制,使用ImplicitPlot函数

计算机习题 8.9

1. 编写一个用课本上描述的有限差分法求解线性两点边值问题的通用的计算机程序. 允许用户提供 a, α, b, β, n 以及像(3), (4)和(6)式那样的函数 u, v 和 w.

2. (续)对下面的例子测试上题中编写的程序:

a. $\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 3 \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x'' = 2e^t - x \\ x(0) = 2 \qquad x(1) = e + \cos 1 \end{cases}$

[取n=10,20,40,80,160，计算误差阶]

此外, 计算这两种测试情况中数值解的误差. 解分别是: a. $x(t) = 7\sin t + 3\cos t$. b. $x(t) = e^t + \cos t$.