数值分析作业解答

原生生物

* 对应徐岩老师《数值分析》课程作业，教材为 Kincaid、Cheney《数值分析》，包含期中小测。

目录

1 第一次作业

1. (习题 6.1.2)

   由 Lagrange 型插值多项式的定义，必然存在 $y_i, i=0,\dots,n$ 使得 $Lf=\sum_{i=0}^n y_i l_i$，而由于 $(Lf)(x_t)=f(x_t)$，由 l_i 定义可知 $f(x_t)=\sum_{i=0}^n y_i\delta_i^t=y_t$，从而得证一切 $y_i=f(x_i)$。

   由此，$L(af+bg)=\sum_{i=0}^n(af+bg)(x_i)l_i=\sum_{i=0}^n(af(x_i)+bg(x_i))l_i=aLf+bLg$，即得证。

2. (习题 6.1.3)

   由于 l_i 次数为 n，l_i^2 次数为 $2n$，因此 Gf 次数至多为 $2n$。

   由 $Gf(x_t)=\sum_{i=0}^n f(x_i)(\delta_i^t)^2=f(x_t)$ 可知 Gf 为给定结点的插值多项式。

   当 f 非负时，每个 $f(x_i)l_i^2$ 非负，因此 Gf 非负。

3. (习题 6.1.4)

   由习题 6.1.2 的推导可知 x_0 到 x_n 上均有 $Lq(x_i)=q(x_i)$，于是 $Lq-q$ 至少有 $n+1$ 个不同零点，但其次数不超过 n，于是必须为 0，也即 $Lq=q$。

4. (习题 6.1.5)

   由习题 6.1.4，令 $q(x)=1$，代入即得 $\sum_{i=0}^n l_i(x)=1$。

5. (习题 6.1.6)

   $f-p=f-Lf=f-\sum_{i=0}^n f(x_i)l_i$，由习题 6.1.5，$f=f\sum_{i=0}^n l_i$，于是 $f-p=\sum_{i=0}^n(f-f(x_i))l_i$，代入 x 即得结论。

6. (习题 6.1.7)

   内循环中每次进行两次乘法，而外循环中还有一次除法，因此总次数为 $\sum_{k=1}^n(2(k-1)+1)=n^2$。

7. (习题 6.1.8)

   设 $p(x)=ax^2+bx+c$ 可得方程 $\begin{cases}c=p(0)\\a+b+c=p(1)\\2\xi a+b=p'(\xi)\end{cases}$。当 $\xi\neq\frac{1}{2}$ 时，有解 $\begin{cases}a=\frac{p'(\xi)+p(0)-p(1)}{2\xi-1}\\b=\frac{-p'(\xi)-2\xi p(0)+2\xi p(1)}{2\xi-1}\\c=p(0)\end{cases}$，否则当 $p'(\frac{1}{2})=p(1)-p(0)$ 时有无穷多解 $\begin{cases}a=t\\b=p(1)-p(0)-t\\c=p(0)\end{cases}$,$t\in\mathbb{R}$，其余情况无解。

2 第二次作业

1. (习题 6.1.14)

   由其为奇函数，$x=0$ 时由取 0 为插值点显然满足，只需证明 $x>0$ 的情况，$x<0$ 时由对称性成立。

   由 6.1 节定理 4，存在 ξ 使得 $p(x)-f(x)=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)}{n!}f^{(n)}(\xi)x$，由于 $|x-x_i|\le 2$，$f^(n)(\xi)$ 为 $\sinh(\xi)$ 或 $\cosh(\xi)$，估算知在范围内模长 ≤ 2，在 $x>0$ 时有 $|p(x)-f(x)|\le\frac{2^n}{n!}x$。由于 $x>0$ 时 $(\sinh x-x)'=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{2}\ge 0$，且 $\sinh 0=0$，恒有 $\sinh x>x$ 成立，即得 $|p(x)-f(x)|\le\frac{2^n}{n!}f(x)$，得证。

2. (习题 6.1.27)

   由于 e^{x-1} 各阶导数为自己，$\max_{|t|\le 1}|f^{(13)}(t)| \le 1$，于是在 Chebyshev 点下误差 $|p(x)-f(x)| \le \frac{1}{2^{12}13!} = \frac{1}{25505877196800}$。

3. (习题 6.2.3)

   在 $x_1,\dots,x_n$ 以任何子列 (记为 $x_i^{(k)}$) 趋向 x_0 时，$m_k = \max_i |x_i^{(k)} - x_0|$ 必然趋于 0，而利用 6.2 节定理 4，必然存在 $\xi_k \in [x_0 - m_k, x_0 + m_k]$ 满足 $f[x_0, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}] = \frac{f^{(n)}(\xi_k)}{n!}$，由 $\xi_k \to x_0$ 与 f 的 n 阶导函数连续知结论。

4. (习题 6.2.19)

   记要证的函数为 p，直接计算得结论：

$$p(x_0) = \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0}u(x_0) = f(x_0),\ p(x_n) = \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0}v(x_n) = f(x_n)$$

$$p(x_i) = \frac{(x_n - x_i)u(x_i) + (x_i - x_0)v(x_i)}{x_n - x_0} = \frac{x_n - x_i + x_i - x_0}{x_n - x_0}f(x_i) = f(x_i)$$

5. (习题 6.2.23)

   设 $q(x) = p(x) + tx(x+1)(x-1)(x-2)$，则仍然满足在前四点上是插值多项式，且 $10 = q(3) = p(3) + 24t = -38 + 24t$，于是 $t = 2$，即

$$q(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1) + 2x(x+1)(x-1)(x-2)$$

6. (习题 6.3.1)

   完整的均差表如下：

0	2	-9	3	7	5
0	2	-6	10	17	
1	-4	4	44		
1	-4	48			
2	44				

   因此所求多项式为 $p(x) = 2 - 9x + 3x^2 + 7x^2(x-1) + 5x^2(x-1)^2$。

7. (习题 6.3.2)

   $p(x)$ 如习题 6.3.1，记此题所求为 q，设 $q(x) = p(x) + tx^2(x-1)^2(x-2)$，代入 $x = 3$ 可得 $2 = 308 + 36t$，于是 $t = -8.5$，即得

$$q(x) = 2 - 9x + 3x^2 + 7x^2(x-1) + 5x^2(x-1)^2 - 8.5x^2(x-1)^2(x-2)$$

8. (习题 6.3.3)

   同 Lagrange 插值记

$$l_i = \prod_{j\ne i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

   考虑 (t_i 为待定系数，下记 $g_i = l_i^2(t_i(x - x_i) + 1)$)

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i^2(t_i(x - x_i) + 1)$$

   直接计算可验证此时 $p(x_t) = y_t$，而由于 l_i^2 中包含所有 $j \ne i$ 的 $(x - x_j)^2$，必有 $g_i'(x_j) = 0, j \ne i$，于是只需保证 $g_i'(x_i) = 0$。

注意到 $g_i'(x_i)=2l_i(x_i)l_i'(x_i)+l_i^2(x_i)t_i$，利用 $l_i(x_i)=1$ 可得 $t_i=-2l_i'(x_i)$，进一步计算可知 $l_i'(x_i)=\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}$，于是 $t_i=-\sum_{j\neq i}\frac{2}{x_i-x_j}$。

综上得

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\left(1-\sum_{j\neq i}\frac{2}{x_i-x_j}(x-x_i)\right)\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)^2}{(x_i-x_j)^2}$$

另一方面，其次数至多为 $2n+1$，根据 6.3 节定理 1，这是 $2n+1$ 次及以下唯一满足要求的多项式，于是次数最小。

3 第三次作业

1. (习题 6.4.7)

   记三段为 $S_{1,2,3}$，由 $S_1(1)=S_2(1),S_1(3)=S_2(3)$ 可知 $a=c=d$，而此时可以验证 $x=1,3$ 处一、二阶导数均光滑，因此已经为三次样条。

   代入三个点得 $\begin{cases}4a-b=26\\ c=7\\ 4d+e=25\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=c=d=7\\ b=2\\ e=-3\end{cases}$。

2. (习题 6.4.11)

   由于 $d(x-1)^3$ 在 1 处的低于 3 阶导数均为 0，必然有 $a+b(x-1)+c(x-1)^2=3+x-9x^2$，直接展开对比得到 $\begin{cases}a=-5\\ b=-17\\ c=-9\end{cases}$。

   由于 0 到 1 已确定，只需要保证 $\int_1^2[f''(x)]^2\mathrm{d}x=\int_0^1(-18+6dx)^2\mathrm{d}x$ 最小，直接对 d 求导 (这里积分求导可交换) 可得 $\int_0^1 12x(-18+6dx)\mathrm{d}x=0$，解得 $d=4.5$。

   $f''(2)=0$ 也即 $-18+6d=0$，于是 $d=3$，不同于前面所确定的值是由于 $f''(0)\neq 0$，不符合自然样条的另一端点要求。

3. (习题 6.4.12)

   不是三次样条，$\lim_{x\uparrow 0}f'(x)=1\neq -1=\lim_{x\downarrow 0}f'(x)$，而 $\lim_{x\uparrow 0}f''(x)=0=\lim_{x\downarrow 0}f''(x)$。

4. (习题 6.4.14)

   由形式可看出 $f''(-1)=0$，且由于 $2(x+1)+(x+1)^3=x^3+3x^2+5x+3$，其 0 处低于 3 阶导数与 $3x^2+5x+3$ 相同。同理，$3x^2+5x+3=3(x-1)^2+11(x-1)+11$，其 1 处低于 3 阶导数与 $3(x-1)^2+11(x-1)+11-(x-1)^3$ 相同。最后，$f''(2)=6-6*(2-1)=0$，于是这是一个自然三次样条。

5. (习题 6.4.26)

   由于 $x^3=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1$，由 1 处 0 到 2 阶导数相同可知 $a=b=3,c=1$。由于 $f''(3)=3*(3-1)+2*3=12\neq 0$，不是自然三次样条。

4 第四次作业

1. (习题 6.8.8)

归纳，由条件知 p_0 偶函数，下面假设 p_{n-1} 与 $(n>1$ 时$)p_{n-2}$ 满足要求：

$a_n = \langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle^{-1}\int_{-a}^{a} xp_{n-1}^2(x)w(x)\mathrm{d}x$，由于无论 p_{n-1} 奇偶，p_{n-1}^2 为偶函数，因此积分中为奇函数，利用对称性可知 $a_n=0$，于是 $p_n(x)=xp_{n-1}(x)-b_np_{n-2}(x)$。

当 n 为偶数时，p_{n-1} 为奇函数，$xp_{n-1}(x)$ 为偶函数，且 p_{n-2} 为偶函数，于是 p_n 为偶函数；

当 n 为奇数时，p_{n-1} 为偶函数，$xp_{n-1}(x)$ 为奇函数，且 p_{n-2} 为奇函数，于是 p_n 为奇函数。

2. (习题 6.8.18)

(1) $P_n(af+bg)=\sum_{i=1}^n\langle af+bg,u_i\rangle u_i = a\sum_{i=1}^n\langle f,u_i\rangle u_i + b\sum_{i=1}^n\langle g,u_i\rangle u_i = aP_nf+bP_ng$，由此线性。此外，由形式即得 P_nf 被 $u_1,\dots,u_n$ 生成，于是成立。

(2) 由 $j\le n$ 时 $\langle\sum_{i=1}^n\langle f,u_i\rangle u_i,u_j\rangle=\sum_{i=1}^n\langle f,u_i\rangle\langle u_i,u_j\rangle=\langle f,u_j\rangle$ 有 $P_n(P_nf)=\sum_{j=1}^n\langle f,u_j\rangle u_j = P_nf$，于是 $P_n^2=P_n$。

(3) 由 (2)，$\langle P_nf,u_j\rangle=\langle f,u_j\rangle$ 对 $j\le n$ 成立，于是 $\langle f-P_nf,u_j\rangle=\langle f,u_j\rangle-\langle f,u_j\rangle=0$，也即 $f-P_nf\perp \mathrm{Span}(u_1,\dots,u_n)=U_n$。

(4) 设 U_n 中某逼近为 $u+P_nf$，由 (3) 有 $\langle f-P_nf,u\rangle=0$，则 $\|f-u-P_nf\|^2=\|f-P_nf\|^2+\|u\|^2\ge\|f-P_nf\|^2$，从而得证。

(5) 由 (1)(3)，$\langle P_nf,g-P_ng\rangle=0$，因此 $\langle P_nf,g\rangle=\langle P_nf,g\rangle-\langle P_nf,g-P_ng\rangle=\langle P_nf,P_ng\rangle$，同理 $\langle P_nf,P_ng\rangle=\langle f,P_ng\rangle$，从而得证。

3. (习题 6.8.21)

接书例 2 推导，由习题 6.8.8，所有 a_n 必须为 0，计算可得：

$$b_3=\frac{4}{15}\Rightarrow p_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$$

$$b_4=\frac{9}{35}\Rightarrow p_4(x)=x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}$$

$$b_5=\frac{16}{63}\Rightarrow p_5(x)=x^5-\frac{10}{9}x^3+\frac{5}{21}x$$

4. (习题 6.9.2)

假设为 $g(x)=ax+b$，有方程组：

$$\begin{cases} b=\delta \\ a+b-1=\delta \\ \sqrt{t}-at-b=\delta \\ a-\frac{1}{2\sqrt{t}}=0 \end{cases}$$

解得 $\delta=\frac{1}{8},t=\frac{1}{4},g(x)=x+\frac{1}{8}$。

5. (习题 6.9.5)

$$\|f-a\|\ge\max(|M(f)-a|,|a-m(f)|)\ge\frac{|M(f)-a|+|a-m(f)|}{2}\ge\frac{M(f)-m(f)}{2}$$

且当 $a=\frac{M(f)+m(f)}{2}$ 时等号成立，因此最佳逼近是 $\frac{M(f)+m(f)}{2}$。

6. (习题 6.9.16)

记要证为最佳逼近的多项式为 $g(x)$，当 $a_{n+1}=0$ 时，$g=f$，于是为最佳逼近，否则，同乘比例不影响结果，可不妨设 $a_{n+1}=1$，利用本节推论 6，即证明存在 $[-1,1]$ 中的点 $x_0<\cdots<x_{n+1}$ 使得

$$T_{n+1}(x_i)=(-1)^ic\|T_{n+1}\|,i\in[0,n+1],|c|=1$$

由在 $[-1,1]$ 上 $T_{n+1}(x)=\cos((n+1)\arccos x)$，$\|T_{n+1}\|=1$，令 $x_i=\cos\frac{\pi(n+1-i)}{n+1}$，则 $T_{n+1}(x_i)=\cos(n+1-i)\pi$，符合要求。

7. (习题 6.12.6)

   第一条：$\langle f,f\rangle_N=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}|f(2\pi j/N)|^2\geq 0$。

   第二条：$\langle f,g\rangle_N=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f(2\pi j/N)\overline{g(2\pi j/N)}=\overline{\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\overline{f(2\pi j/N)}g(2\pi j/N)}=\overline{\langle g,f\rangle_N}$。

   第三条：将每一项左侧的 f 直接展开即得。

   不是范数：取 $f(x)=\sin(Nx)$，则 $\|f\|_N=0$，但 $f\neq 0$。

8. (习题 6.13.6)

   根据 6.12 节定理 2，可知 $\langle f,E_j\rangle_{2n}=\gamma_j,\langle f,E_{n+j}\rangle_{2n}=\gamma_{n+j}$，而 $u_j=\sum_{k=0}^{2n-1}\gamma_k\langle E_k,E_j\rangle_n=\gamma_j+\gamma_{n+j}$，由此，只需证明 $v_j=\gamma_j-\gamma_{n+j}$。

   注意到 $T_{n/\pi}f=\sum_{k=0}^{2n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}\gamma_i E_i$，于是

   $$v_j=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\pi/n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi/n}\gamma_j+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+n)\pi/n}\gamma_{n-j}\right)=\gamma_j+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\gamma_{n+j}=\gamma_j-\gamma_{n+j}$$

   得证。

5 第五次作业

1. (习题 7.1.4)

   (a)
   $$f'(x_0)=f'(\xi_{x_0})$$

   (b)
   $$f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}+\frac{1}{2}f''(x_0)(x_0-x_1)$$
   $$f'(x_1)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}+\frac{1}{2}f''(x_1)(x_1-x_0)$$

   (c) (题目有误，应为 $n=2$)

   $f'(x_0),f'(x_2)$ 分别为：

   $$\frac{(2x_0-x_1-x_2)f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{(x_0-x_1)f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{(x_0-x_2)f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+\frac{1}{6}f'''(\xi_{x_0})(x_0-x_1)(x_0-x_2)$$

   $$\frac{(x_2-x_0)f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{(2x_2-x_0-x_1)f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+\frac{1}{6}f'''(\xi_{x_2})(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

2. (习题 7.1.6)

   (a)
   $$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+2h^2f''(x)+\frac{4}{3}h^3f'''(x)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x)+\frac{4}{15}h^5f^{(5)}(\xi_1)$$
   $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{6}h^3f'''(x)+\frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x)+\frac{1}{120}h^5f^{(5)}(\xi_2)$$
   $$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)-\frac{1}{6}h^3f'''(x)+\frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x)-\frac{1}{120}h^5f^{(5)}(\xi_3)$$
   $$f(x-2h)=f(x)-2hf'(x)+2h^2f''(x)-\frac{4}{3}h^3f'''(x)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x)-\frac{4}{15}h^5f^{(5)}(\xi_4)$$

   代入可得

   $$LHS-RHS=\frac{h^4}{45}f^{(5)}(\xi_1)-\frac{h^4}{180}f^{(5)}(\xi_2)-\frac{h^4}{180}f^{(5)}(\xi_3)+\frac{h^4}{45}f^{(5)}(\xi_4)=O(h^4)$$

(b)

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+2h^2f''(x)+\frac{4}{3}h^3f'''(x)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x)+\frac{4}{15}h^5f^{(5)}(x)+\frac{4}{45}h^6f^{(6)}(\xi_1)$$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{6}h^3f'''(x)+\frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x)+\frac{1}{120}h^5f^{(5)}(x)+\frac{1}{720}h^6f^{(6)}(\xi_2)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)-\frac{1}{6}h^3f'''(x)+\frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x)-\frac{1}{120}h^5f^{(5)}(x)+\frac{1}{720}h^6f^{(6)}(\xi_3)$$

$$f(x-2h)=f(x)-2hf'(x)+2h^2f''(x)-\frac{4}{3}h^3f'''(x)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x)-\frac{4}{15}h^5f^{(5)}(x)+\frac{4}{45}h^6f^{(6)}(\xi_4)$$

代入可得

$$LHS-RHS=\frac{h^4}{135}f^{(6)}(\xi_1)-\frac{h^4}{960}f^{(6)}(\xi_2)-\frac{h^4}{960}f^{(6)}(\xi_3)+\frac{h^4}{135}f^{(6)}(\xi_4)=O(h^4)$$

3. (习题 7.1.7)

(a)

$$f(x+3h)=f(x)+3hf'(x)+\frac{9}{2}h^2f''(x)+\frac{9}{2}h^3f'''(x)+\frac{27}{8}h^4f^{(4)}(\xi_1)$$

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+2h^2f''(x)+\frac{4}{3}h^3f'''(x)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(\xi_2)$$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{6}h^3f'''(x)+\frac{1}{24}h^4f^{(4)}(\xi_3)$$

代入可得

$$LHS-RHS=-\frac{27h}{8}f^{(4)}(\xi_1)+2hf^{(4)}(\xi_2)-\frac{h}{8}f^{(4)}(\xi_3)=O(h)$$

(b) 利用习题 7.1.6(a) 代入可得

$$LHS-RHS=-\frac{2h^2}{15}f^{(5)}(\xi_1)+\frac{h^2}{120}f^{(5)}(\xi_2)+\frac{h^2}{120}f^{(5)}(\xi_3)-\frac{2h^2}{15}f^{(5)}(\xi_4)=O(h^2)$$

比 (a) 更精确。

4. (习题 7.1.15)

由式 (17) 可得 $L=\frac{4}{3}\varphi\big(\frac{h}{2}\big)-\frac{1}{3}\varphi(h)$，而

$$f'(x)=\varphi(h)-\frac{h^2}{6}f'''(x)-\frac{h^4}{120}f^{(5)}(\xi_1)$$

$$f'(x)=\varphi\Big(\frac{h}{2}\Big)-\frac{h^2}{24}f'''(x)-\frac{h^4}{1920}f^{(5)}(\xi_2)$$

于是误差项为：

$$f'(x)-L=\frac{h^4}{360}f^{(5)}(\xi_1)-\frac{h^4}{1440}f^{(5)}(\xi_2)$$

5. (习题 7.1.17)

利用习题 7.1.7(a) 也即 $\begin{cases}A+B+C+D=0\\3A+2B+C=0\\\frac{9}{2}A+2B+\frac{1}{2}C=1\\\frac{9}{2}A+\frac{4}{3}B+\frac{1}{6}C=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}A=-1\\B=4\\C=-5\\D=2\end{cases}$，误差为 $O(h^2)$。

6. (习题 7.2.1)

   设公式为 $Af(0)+Bf(\frac{1}{3})+Cf(\frac{2}{3})+Df(1)$，代入 $1,x,x^2,x^3$ 即得 $\begin{cases} A+B+C+D=1 \\ \frac{1}{3}B+\frac{2}{3}C+D=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{9}B+\frac{4}{9}C+D=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{27}B+\frac{8}{27}C+D=\frac{1}{4} \end{cases}$，解得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{8}\left(f(0)+3f\big(\frac{1}{3}\big)+3f\big(\frac{2}{3}\big)+f(1)\right)$$

7. (习题 7.2.4)

   令 $f\left(\frac{i}{4}\right)$ 前的系数为 a_i，也即验证 $\sum_i a_i i^j=\frac{4^i}{j+1}$ 对 $j=0,1,2,3,4$ 成立，其中规定 $0^0=1$，代入即得结果。

8. (习题 7.2.9)

   由题意可知 $2\pi a=A_1(a+b)+A_2(a-b)$，于是 $A_1=A_2=\pi$。

   由于

$$\int_0^{2\pi}\sin kx=0=\pi\sin k\pi+\pi\sin 0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(2k+1)x=0=-\pi+\pi=\pi\cos(2k+1)\pi+\pi\cos 0$$

   于是对 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cos(2k+1)x+b_k\sin kx\right)$ 亦精确成立。

6 第六次作业

1. 推导 Gauss-Lobatto 积分公式，并证明系数 $A_i, i=0,\ldots,n$ 是正的。

   考虑区间端点 a,b 时，任何不超过 $2n-1$ 次的多项式 $p(x)$ 都可以写成 $(x-a)(x-b)q(x)+r(x-a)+s(b-x)$，其中 $q(x)$ 是不超过 $2n-3$ 次的多项式。

   直接代入可解出 $r=\frac{p(b)}{b-a}, s=\frac{p(a)}{b-a}$，而另一方面，由积分相同，假设 x_i^* 与 $A_i^*, i=1,\ldots,n-1$ 满足以新权函数 $(x-a)(b-x)w(x)$ 构造的，对不超过 $2n-3$ 次的多项式严格成立的高斯公式，可以直接比对系数计算出

$$\int_a^b p(x)w(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n-1}A_i^*\frac{p(x_i^*)-r(x_i^*-a)-s(b-x_i^*)}{(x_i^*-a)(b-x_i^*)}+r\int_a^b(x-a)w(x)\mathrm{d}x+s\int_a^b(b-a)w(x)\mathrm{d}x$$

   进一步整理即得最终的结点与系数为：

$$x_i=\begin{cases} a & i=0 \\ x_i^* & 0<i<n \\ b & i=n \end{cases}, A_i=\begin{cases} \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b(b-x)w(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_i^*}{x_i^*-a}\right) & i=0 \\ \frac{A_i^*}{(x_i^*-a)(b-x_i^*)} & 0<i<n \\ \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b(x-a)w(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_i^*}{b-x_i^*}\right) & i=n \end{cases}$$

   为证明 $A_i>0$，考虑多项式 $p_i(x)=\begin{cases} (b-x)\prod_{j=1}^{n-1}(x-x_j)^2 & i=0 \\ (x-a)(b-x)\prod_{0<j\neq i<n}(x-x_j)^2 & 0<i<n \\ (x-a)\prod_{j=1}^{n-1}(x-x_j)^2 & i=n \end{cases}$，注意到 $p_i(x)$ 恒非负连续，次数不超过 $2n-1$，且非零点的结点有且仅有 x_i，代入即得证 $A_i>0$。

2. (习题 7.3.8)

利用 6.8 节定理 5 构造正交多项式 (由习题 6.8.8 只需计算 b_n)：

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2 - \frac{3}{5}, p_3(x) = x^3 - \frac{5}{7}x$$

利用定理 1 即可得到 x_i，进一步计算 A_i：

a.

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}, A_0 = A_1 = \frac{1}{3}$$

b.

$$x_0 = -\sqrt{\frac{5}{7}}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{\frac{5}{7}}, A_0 = A_2 = \frac{7}{25}, A_1 = \frac{8}{75}$$

3. (习题 7.3.21)

a. 分别取 $f(x) = 1, x, x^2$ 得 $\begin{cases} A + B + C = 2 \\ A = C \\ \frac{3}{5}(A + C) = \frac{2}{3} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} A = C = \frac{5}{9} \\ B = \frac{8}{9} \end{cases}$。

b.

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{(x-0)(x-\sqrt{3/5})}{6/5} = \frac{5}{9}$$

$$B = \int_{-1}^{1} \frac{(x+\sqrt{3/5})(x-\sqrt{3/5})}{-3/5} = \frac{8}{9}$$

$$C = \int_{-1}^{1} \frac{(x+\sqrt{3/5})(x-0)}{6/5} = \frac{5}{9}$$

4. (习题 7.3.22)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\left(\frac{5}{9}f\left(-\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{a+b}{2}\right) + \frac{8}{9}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{5}{9}f\left(\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{a+b}{2}\right)\right)$$

结果为：

(a) $\frac{1}{4}\pi\left(\frac{5}{9}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{9}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}\right) + \frac{2\pi}{9}\right) = \frac{\pi^2}{8}$

(b) $2\left(\frac{4\sin 2}{9} + \frac{5\sin(2\sqrt{5/3}+2)}{9(2\sqrt{5/3}+2)} + \frac{5\sin(2-2\sqrt{5/3})}{9(2-2\sqrt{5/3})}\right) \approx 1.7580$

5. (习题 7.4.6)

(a) $R(0,0) = \frac{4}{3}, R(1,0) = \frac{7}{6}, R(2,0) = \frac{67}{60}$

$R(1,1) = \frac{10}{9}, R(2,1) = \frac{11}{10}$

$R(2,2) = \frac{742}{675} \approx 1.099$

(b) $R(0,0) = \frac{\pi}{16}, R(1,0) = \frac{3\pi}{64}, R(2,0) = \frac{11\pi}{256}$

$R(1,1) = \frac{\pi}{24}, R(2,1) = \frac{\pi}{24}$

$R(2,2) = \frac{\pi}{24}$

7 第七次作业

1. (习题 8.1.5)

   a. $t_x = x^2, t(0) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3t}, t \in \mathbb{R}$

   b. $t_x = \frac{1}{1+x^2}, t(0) = 0 \Rightarrow t = \arctan x \Rightarrow x = \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

   c. $t_x = \sin x + \cos x, t(0) = 0 \Rightarrow t = \sin x - \cos x + 1 = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1 \Rightarrow$
   $x = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}(t-1) + \frac{\pi}{4}, t \in (-\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$

2. (习题 8.1.12)

   当 $|t| \le \frac{1}{3}, |x| \le 1$ 时，$|f(x,t)| \le 1 + |x| + |x|^2 \le 3$，于是利用定理 1 即得在 $|t| \le \min(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ 内解存在。

3. (习题 8.2.2)

   直接计算验证可知 $x = \frac{t^2}{4}$ 是解。

   利用一阶泰勒级数方法，即 $x(t+h) = x(t) + hx'(t)$，而由于 0 点处 $x = 0, x' = \sqrt{x} = 0$，无论如何递推都只能得到 0。这是由于事实上需要二阶展开才能得到 x 的精确表示，二阶展开得到的 $x'' = \frac{1}{2\sqrt{x}}x' = \frac{1}{2}$(若不代入表达式会产生 0/0 极限) 是准确的。此外，解并不唯一，$x = 0$ 也是方程的解。

4. (习题 8.2.4)

$$x(0) = 1$$
$$x' = x^2 + x\mathrm{e}^t \Rightarrow x'(0) = 2$$
$$x'' = (2x + \mathrm{e}^t)x' + x\mathrm{e}^t \Rightarrow x''(0) = 7$$
$$x''' = (2x + \mathrm{e}^t)x'' + (2x' + 2\mathrm{e}^t)x' + x\mathrm{e}^t \Rightarrow x'''(0) = 34$$
$$x(0.01) \approx x(0) + \frac{1}{100}x'(0) + \frac{1}{20000}x''(0) + \frac{1}{6000000}x'''(0) \approx 1.020356$$

8 第八次作业

1. (习题 8.3.5)

   精确到三阶下

$$x(t+h) = x(t) + hf + \frac{1}{2}h^2(f_t + f_x f) + \frac{1}{6}h^3((f_t + f_x f)f_x + f_{tt} + 2ff_{xt} + f_{xx}f^2) + O(h^4)$$

   而

$$f(t+\delta_t, x+\delta_x) = f(t,x) + \delta_t f_t + \delta_x f_x + \frac{1}{2}\delta_t^2 f_{tt} + \frac{1}{2}\delta_x^2 f_{xx} + \delta_x\delta_t f_{xt} + O(|\delta|^3)$$

   于是有

$$\begin{cases} F_1 = hf \\ F_2 = hf + \frac{1}{2}h^2(f_t + f_x f) + \frac{1}{8}h^3(f_{tt} + 2ff_{xt} + f_{xx}f^2) \end{cases}$$

   于是

$$\frac{9}{4}\left(x(t+h) - x(t) - \frac{2}{9}F_1 - \frac{1}{3}F_2\right)$$

$$= hf + \frac{3}{4}h^2(f_t + f_x f) + \frac{9}{32}h^3(f_{tt} + 2ff_{xt} + f_{xx}f^2) + \frac{3}{8}h^3((f_t + f_x f)f_x) + O(h^4)$$

而由 F_3 前系数 h，F_2 中三次项会成为四次，因此舍去，同理 δ_x^2、$\delta_x\delta_t$ 中只保留 $\frac{9}{16}h^2f^2$、$\frac{9}{16}h^2f$ 一项，得到

$$F_3 = hf + \frac{3}{4}h^2(f_t + f_x f) + \frac{3}{8}((f_t + f_x f)f_x) + \frac{9}{32}h^3(f_{tt} + 2ff_{xt} + f_{xx}f^2) + O(h^4)$$

与上方相同，于是得证。

2. (习题 8.4.8)

由于结点距离未定，以下不失一般性假设 $t_n = 0, h = 1$。

a. 当 $f(t,x) = 1, x = t$ 时有 $1 = A + B$，当 $f(t,x) = 2t, x = t^2$ 时有 $1 = -2B$，联立得 $\begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$，

即 $x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}\right)$。

b. 由数值积分

$$\int_0^1 f(t, x(t))\mathrm{d}t = Af(0, x(0)) + Bf(-1, x(-1))$$

分别代入 $f = 1, f = 2t$ 得到 $\begin{cases} 1 = A + B \\ 1 = -2B \end{cases}$，联立得 $\begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$。

c. 由定义若 $f(0, x(0)) = a, f(-1, x(-1)) = b$，则利用插值得到 $f(t, x(t)) = a + (a - b)t$，于是

$$x(1) = x(0) + \int_0^1 f(t, x(t))\mathrm{d}t = x(0) + a + \frac{1}{2}(a - b) = x(0) + \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b$$

即 $A = \frac{3}{2}, B = \frac{1}{2}$。

3. (习题 8.4.9)

由于结点距离未定，以下不失一般性假设 $t_n = 0, h = 1$。

a. 当 $f(t,x) = 1, x = t$ 时有 $1 = A + B$，当 $f(t,x) = 2t, x = t^2$ 时有 $1 = 2A$，联立得 $\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$，

即 $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n-1})$。

b. 由数值积分

$$\int_0^1 f(t, x(t))\mathrm{d}t = Af(1, x(1)) + Bf(0, x(0))$$

分别代入 $f = 1, f = 2t$ 得到 $\begin{cases} 1 = A + B \\ 1 = 2A \end{cases}$，联立得 $\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$。

c. 由定义若 $f(0, x(0)) = b, f(1, x(1)) = a$，则利用插值得到 $f(t, x(t)) = b + (a - b)t$，于是

$$x(1) = x(0) + \int_0^1 f(t, x(t))\mathrm{d}t = x(0) + b + \frac{1}{2}(a - b) = x(0) + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

即 $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$。

4. (习题 8.4.13)

由于结点距离未定，不失一般性假设 $t_n = 0, h = 1$。由数值积分

$$\int_0^1 f(t, x(t))\mathrm{d}t = Af(0, x(0)) + Bf(-2, x(-2)) + C(-4, x(-4))$$

分别代入 $f=1,f=t,f=t^2$ 得到

$$\begin{cases}1=A+B+C\\ \frac{1}{2}=-2B-4C\\ \frac{1}{3}=4B+16C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{17}{12}\\ B=-\frac{7}{12}\\ C=\frac{1}{6}\end{cases}$$

5. (习题 8.4.17)

也即 $k=3,a_{3,2,1,0}=(1,0,0,-1),b_{3,2,1,0}=\frac{3}{8}(1,3,3,1)$。

$$d_0=\sum_i a_i=0$$
$$d_1=\sum_i ia_i-\sum_i b_i=3-3=0$$
$$d_2=\sum_i\frac{1}{2}i^2a_i-\sum_i ib_i=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}=0$$
$$2d_3=\sum_i\frac{1}{3}i^3a_i-\sum_i i^2b_i=9-9=0$$
$$6d_4=\sum_i\frac{1}{4}i^4a_i-\sum_i i^3b_i=\frac{81}{4}-\frac{81}{4}=0$$
$$24d_5=\sum_i\frac{1}{5}i^5a_i-\sum_i i^4b_i$$

由于 $\sum_i\frac{1}{5}i^5a_i=\frac{243}{5}$，右侧分母不可能为 5，$d_5\neq 0$，阶为 4。

6. (习题 8.5.1)

   a. $p(z)=z^2-1,q(z)=2z$，p 根为 ±1，$p'(1)=q(1)=2$，稳定、相容。

   b. $p(z)=z^3-z,q(z)=\frac{7}{3}z^2-\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}$，$p$ 根为 $0,\pm1$，$p'(1)=q(1)=2$，稳定、相容。

   c. $p(z)=z^3-z^2,q(z)=\frac{3}{8}z^3+\frac{19}{24}z^2-\frac{5}{24}z+\frac{1}{24}$，$p$ 根为 $0,0,1$，$p'(1)=q(1)=1$，稳定、相容。

7. (习题 8.5.4)

$p(z)=z^2+4z-5,q(z)=4z+2$，p 根为 $1,-5$，不稳定、弱不稳定，于是不收敛；$p'(1)=q(1)=6$，相容。

8. (习题 8.5.6)

   a. $p(z)=z^2-1,q(z)=z^2-3z+4$，p 根为 ±1，$p'(1)=q(1)=2$，稳定、相容，于是收敛。

   b. $p(z)=z^2-2z+1$，在 1 重根，不稳定，于是不收敛。

   c. $p(z)=z^2-z-1$，$p(1)\neq 0$，不相容，于是不收敛。

   d. $p(z)=z^2-3z+2$，有根为 2，不稳定，于是不收敛。

   e. $p(z)=z^2-1,q(z)=z^2-3z+2$，$p'(1)=2,q(1)=0$，不相容，于是不收敛。

9. (习题 8.12.4)

$$p(z)=z^2+\alpha z-(1+\alpha),q(z)=-\frac{1}{2}\alpha z^2+\frac{(4+3\alpha)}{2}z$$

稳定：$p(z)$ 根为 $1,-\alpha-1$，稳定性要求 $-\alpha-1\in[-1,1)\Rightarrow\alpha\in(-2,0]$。

相容：$p'(1)=2+\alpha=q(1)$，且 $p(1)$ 为根，一定相容。

收敛：由 8.5 节定理 1 知稳定当且仅当 $\alpha\in(-2,0]$。

A 稳定：条件即对 $\mathrm{Re}(\omega)<0$，$p(z)-\omega q(z)=(1+\frac{\alpha\omega}{2})z^2+(\alpha-\frac{(4+3\alpha)\omega}{2})z-\alpha-1$ 的根在单位圆盘内。考虑极限可知需 $\omega=0$，即 $p(z)$ 的根满足 $|z|\le 1$，因此至少有 $\alpha\in[-2,0]$。这时，由 z^2 前系数 $1+\frac{\alpha\omega}{2}$ 实部大于等于 1，必然会有两个根，解得它们为

$$\frac{-2\alpha+4\omega+3\alpha\omega\pm\sqrt{(1+\alpha)(4+2\alpha\omega)+\big(-2\alpha+4\omega+3\alpha\omega\big)^2}}{4+2\alpha\omega}$$

当 $|\omega|\to\infty$ 时，根即为 $q(z)$ 的根 $0,\frac{4+3\alpha}{\alpha}$，分析可知预它们都在 $[-1,1]$ 范围内须 $\alpha\in[-2,-1]$，下证此即为最终结果。

二阶：

$$\begin{aligned}d_0&=1+\alpha-1-\alpha=0\\d_1&=2+\alpha+\frac{1}{2}\alpha-\frac{4+3\alpha}{2}=0\\d_2&=2+\frac{1}{2}\alpha+\alpha-\frac{4+3\alpha}{2}=0\\2d_3&=\frac{8}{3}+\frac{\alpha}{3}+2\alpha-\frac{4+3\alpha}{2}=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\alpha\end{aligned}$$

其为 0 当且仅当 $\alpha=-\frac{4}{5}$，于是 $\alpha\neq-\frac{4}{5}$ 时为二阶。

9 期中小测

1. (a) 均差表如下：

-1	2	-2	2	-5/6
0	0	2	-1/2	
1	2	1		
2	3			

   (b) 由于是前三个点，使用均差表除最后一斜行外的部分得到

$$p(x)=2-2(x+1)+2(x+1)x$$

2. 由条件设 $p_4^c(x)=p_4(x)+a(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$，代入 $p_4^c(0)=3$ 解得 $a=-\frac{1}{2}$。于是有

$$p_4^c(x)=3+4x+\frac{11}{2}x^2+2x^3+\frac{1}{2}x^4$$

3. 由条件需要对 $1,x,x^2,x^3,x^4$ 都精确成立，于是有

$$\begin{cases}A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=2\\-A_1-\frac{1}{4}A_2+\frac{1}{4}A_4+A_5=0\\A_1+\frac{1}{16}A_2+\frac{1}{16}A_4+A_5=\frac{2}{3}\\-A_1-\frac{1}{64}A_2+\frac{1}{64}A_4+A_5=0\\A_1+\frac{1}{256}A_2+\frac{1}{256}A_4+A_5=\frac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{43}{225}\\A_2=\frac{512}{225}\\A_3=-\frac{44}{15}\\A_4=\frac{512}{225}\\A_5=\frac{43}{225}\end{cases}$$

由于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\big(\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2}\big)\mathrm{d}x$，可知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}\left(\frac{43}{255}f(a)+\frac{15}{255}f\left(\frac{5a+3b}{8}\right)-\frac{44}{15}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{15}{255}f\left(\frac{3a+5b}{8}\right)+\frac{43}{255}f(b)\right)$$

4. (a) 由前两个条件可假设 $p_3(x) = (s + tx)x^2$，而代入可得 $\begin{cases} (s + ta)a^2 = a^5 \\ 2as + 3a^2 t = 5a^4 \end{cases}$ ，当 $a \neq 0$ 时解得

$$p_3(x) = -2a^3x^2 + 3a^2x^3$$

   (b)

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24} x^2 (x - a)^2$$

   由于 $f^(4)(\xi_x) = 120\xi_x$，代入可得

$$\xi_x = \frac{24(x^5 + 2a^3x^2 - 3a^2x^3)}{120x^2(x - a)^2} = \frac{1}{5}(x + 2a)$$

5. 取 ln 可得线性规划问题 $bx + \ln a\, \mathbf{1} \sim \ln y$，其中 $\mathbf{1}$ 代表各分量全为 1 的向量，于是作最小二乘估计可得

$$\begin{cases} \frac{2\ln a}{a}(bx + \ln a\, \mathbf{1} - \ln y)^T \mathbf{1} = 0 \\ 2(bx + \ln a\, \mathbf{1} - \ln y)^T x = 0 \end{cases}$$

   解得

$$\begin{cases} b = \dfrac{\overline{x \ln y} - \overline{x}\overline{\ln y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \\ a = \exp\left(\overline{\ln y} - b\overline{x}\right) \end{cases}$$

   此处上划线代表五项求和后取平均。代入可得

$$\begin{cases} a = \frac{6075}{112} \mathrm{e}^{1/10} \approx 1.49 \\ b = \frac{1}{10} \ln \frac{112}{3} \approx 0.36 \end{cases}$$

6. 记 $X = (1, x, x^2), Y = y - x^3$，则问题变为最小的 $w = (c, b, a)^T$ 使得 $\|Xw - Y\|^2$ 最小，求梯度可得需 (计算验证可知 X^TX 可逆)

$$X^TXw = X^TY \Rightarrow w = (X^TX)^{-1}X^TY$$

   于是计算得

$$\begin{cases} a = -\frac{757}{56} \\ b = \frac{8741}{168} \\ c = -\frac{2803}{56} \end{cases}$$