

# 小波分析基础：从理论到应用

2019 年 10 月 12 日



# 目 录

<b>第一章 绪论</b>	<b>1</b>
1.1 内积的定义	1
1.2 $L^2$ 空间和 $l^2$ 空间	2
1.3 正交和正交投影	3
1.3.1 Gram-Schmidt正交化方法	9
<b>第二章 傅里叶级数</b>	<b>13</b>
2.1 引言	13
2.2 傅里叶级数的计算	15
2.2.1 周期是 $2\pi$ 函数的傅里叶级数	15
2.2.2 任意周期函数的傅里叶级数	16
2.2.3 正弦级数和余弦级数	17
2.2.4 傅里叶级数的复数形式	20
2.3 傅里叶级数的收敛性	22
2.4 傅里叶级数的进一步认识	31
<b>第三章 傅里叶变换</b>	<b>37</b>
3.1 从傅里叶级数到傅里叶变换	37
3.2 频谱的意义	46
3.3 傅里叶变换的性质	48
3.4 $L^2$ 上的傅里叶变换	57
3.5 广义函数	61
3.5.1 基本空间	62
3.5.2 广义函数序列的极限	63
3.5.3 广义函数序列的微商	64
3.5.4 广义函数序列的卷积	66
3.5.5 傅里叶变换对	67
3.6 线性时不变滤波器	70
3.7 采样定理	73
3.7.1 混叠	77
3.8 离散傅里叶变换	77
3.8.1 离散傅里叶变换的性质	81
3.8.2 利用离散傅里叶变换分析细分曲面的性质	82
3.8.3 快速傅里叶变换	85

3.8.4	离散滤波器	90
3.9	稀疏傅里叶变换*	92
3.9.1	SFFT的理论框架	92
3.9.2	稀疏傅里叶变换在实际中的应用	97
<b>第四章</b>	<b>小波变换</b>	<b>103</b>
4.1	窗口傅里叶变换	105
4.1.1	窗口傅里叶变换的时频窗	106
4.2	测不准原理	109
4.3	连续小波变换	112
4.4	二进小波变换	117
4.5	小波框架和正交小波	120
4.5.1	框架理论	120
4.5.2	小波框架与正交小波	125
<b>第五章</b>	<b>多分辨率分析</b>	<b>127</b>
5.1	一个简单的例子	127
5.2	多分辨率框架	129
5.3	双尺度方程	130
5.3.1	双尺度方程的时域描述	130
5.3.2	双尺度方程的频域描述	133
5.3.3	小波滤波器	135
5.4	小波子空间和 $L^2$ 空间的正交分解	137
5.4.1	构造小波的通用步骤	140
5.5	常见小波	140
5.6	分解重构算法	144
5.6.1	分解算法	144
5.6.2	重构算法	147
5.6.3	小波滤波器	149
5.6.4	应用的例子	150
5.7	尺度函数的迭代构造	151
<b>第六章</b>	<b>Daubechies小波</b>	<b>161</b>
6.1	小波的正则性和消失矩	161
6.2	Daubechies小波的构造	165
6.3	Daubechies小波的性质	172
6.4	Daubechies小波的计算	174

<b>第七章 小波包</b>	<b>181</b>
7.1 小波包	182
7.2 小波包正交分解	185
7.3 最优小波包分解算法	187
7.3.1 小波库	187
7.3.2 代价函数	188
7.3.3 最优小波包基函数的选取	190
7.3.4 小波包的分解重构算法	193
<b>第八章 提升小波</b>	<b>197</b>
8.1 多分辨率分析	197
8.2 提升小波的构造	200
8.2.1 多相位矩阵的因子分解	200
8.2.2 提升算法	204
8.3 提升小波举例	207
8.4 提升小波与信号处理	207
8.5 基于细分曲面的提升小波构造	210
8.5.1 细分曲面的多分辨分析	210
8.6 基于Loop细分的提升小波构造	214
8.6.1 Loop细分格式	215
8.6.2 Loop提升小波	216
<b>第九章 傅里叶和小波变换的应用*</b>	<b>223</b>
9.1 信号处理	223
9.1.1 小波变换与信号处理	223
9.2 图像处理	227
9.2.1 图像降噪	230
9.2.2 图像压缩	231
9.2.3 图像增强	234
9.2.4 图像融合	238
9.3 样条小波	239
9.3.1 样条小波的构造	240
9.4 偏微分方程求解	242
9.5 小波与指纹识别	244
9.5.1 指纹图像预处理	244
9.5.2 指纹图像的特征提取	246

6

参考文献

目 录

249

# 第一章 绪论

这一章介绍本书所涉及到的部分数学概念和工具。本书处理的对象属于某个向量空间(vector space)。向量是由一系列性质所决定的对象，它的含义远远超过我们通常所说的“一个有方向的量”。但是没有任何附加属性的向量空间在实际中是没有用处的。内积(Inner product)的引入使向量空间可以做几何运算和分析。因此，它是一个向量空间的本质概念，是实际应用的基础。内积可以诱导出来范数(Norm)，进一步可以诱导出距离(Distance)。巴拿赫空间(Banach space)是包含所有序列的极限点的集合。在这个空间中，微积分的运算是有意義的。将内积和巴拿赫空间结合在一起，就得到了希尔伯特空间(Hilbert space)。

## §1.1 内积的定义

内积空间是线性代数里的基本概念，它为向量空间增添了一个额外结构。这个额外结构叫做内积。内积将一对向量与一个标量连接起来，允许我们严格地谈论向量的“夹角”和“长度”，并进一步谈论向量的正交性。内积刻划了两个向量之间的相关性。

**定义 1.1** 一个复的矢量空间  $V$  上的内积是从  $V \times V$  到复数  $C$  的函数  $\langle *, * \rangle$ ，通常也记作  $\langle *, * \rangle_V$  或者  $\langle *, * \rangle$ 。内积满足下面性质，

1. 正性：对所有的  $v \in V$ ， $\langle v, v \rangle \geq 0$ ，且  $\langle v, v \rangle = 0$  当且仅当  $v = 0$ 。
2. 共轭对称性： $\overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle$ ，对所有的  $v, w \in V$ 。
3. 齐次性：对所有的复数  $c$  和  $v, w \in V$ ， $\langle cv, w \rangle = c \langle v, w \rangle$ 。
4. 可加性：对所有的  $u, v, w \in V$ ， $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ 。

下面给出几个内积的例子，它们可以构成内积空间的证明留做习题。

**例 1.1** 在  $n$  维复线性空间  $C^n$  中，对  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ， $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in C^n$ ，定义内积

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \overline{w_i}.$$

则  $C^n$  构成一个内积空间。

**例 1.2** 在 2 维复线性空间  $C^2$  中，给定一个正定的 Hermitian 矩阵  $A$  (即  $A$  的共轭转置矩阵等于  $A$  本身)，对任意的  $v = (v_1, v_2)$ ， $w = (w_1, w_2) \in C^2$ ，定义内积

$$\langle v, w \rangle = (\overline{w_1}, \overline{w_2}) A (v_1, v_2)^T.$$

则  $C^2$  构成一个内积空间。

**例 1.3** 设 $V$ 是闭区间 $[a, b]$ 上所有连续复函数组成的复向量空间 $C_{[a,b]}$ , 对任意的函数 $f(x) \in C_{[a,b]}$ ,  $g(x) \in C_{[a,b]}$ , 定义内积

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

则 $C_{[a,b]}$ 在该内积下构成一个内积空间。

内积可以自然诱导出范数和距离。

**定义 1.2** 给定一个内积空间 $V$ , 它的内积 $\langle *, * \rangle_V$ 可以自然诱导出一个范数和距离。

1. 诱导范数:  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ , 对任意的 $v \in V$ 。
2. 距离:  $d(v, w) = \|v - w\|$ , 对任意的 $v, w \in V$ 。

有了距离, 就可以定义收敛。一个序列 $\{v_k, k = 1, 2, \dots\}$ 收敛到 $v$ 是指

$$\|v_k - v\| \rightarrow 0.$$

对任一个赋范线性空间 $X$ , 给定 $a \in X$ , 如果存在一个无穷多项互不相同的序列 $\{a_i\}$ 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ , 则称 $a$ 是 $X$ 的聚点。 $X$ 的全体聚点的集合记作 $X'$ , 记 $\bar{X} = X' \cup X$ 称为 $X$ 的闭包。如果 $\bar{X} = X$ , 则称 $X$ 为闭集, 如果 $\bar{X} = W$ , 则称 $X$ 在 $W$ 中稠密。

给定一个赋范线性空间 $X$ 中的序列 $a_i$ , 如果任意给定 $\epsilon > 0$ , 存在正整数 $N$ , 当 $m, n > N$ 时,  $\|a_m - a_n\| < \epsilon$ , 则称该序列是一个基本列。如果一个赋范线性空间 $X$ 的任意一个基本列都收敛到 $X$ 的某一个元素, 则称该空间是完备的, 我们也称该空间是一个Banach空间。如果一个内积空间在他所诱导出来的范数中成为一个Banach空间, 则称该内积空间为Hilbert空间。

## §1.2 $L^2$ 空间和 $l^2$ 空间

本节将讨论一类无穷维向量空间, 它在信号的分析中特别有用, 因为它可以表示所有能量有限的信号(大部分信号都满足)。

**定义 1.3** 对于 $a \leq t \leq b$ , 空间 $L^2([a, b])$ 表示所有平方可积函数组成的空间, 即

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

需要说明的是, 本书处理的积分基本上是利用Riemann积分, 但是在 $L^2([a, b])$ 空间中积分的定义需要用Lebesgue积分来理解。因为我们认为 $f(t) = 0$ 当且仅当 $f(t)$ 在



区间 $[a, b]$ 中除了一个测度为0的集合外都为零。因此,  $\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$  等价于 $f(x) = 0$ 。而从信号处理的角度看这个定义也是合理的, 因为一个信号在某个孤立点时刻的特性几乎没有什么价值, 而在一个时间段中的性质才重要。

**定义 1.4** 空间 $L^2([a, b])$ 上的 $L^2$ 内积定义为

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt, f(t), g(t) \in L^2([a, b]).$$

在 $L^2([a, b])$ 空间中, 我们可以讨论函数的收敛问题, 这里有三种不同的收敛。

**定义 1.5** 1. 一个函数系列 $\{f_n(t)\}$ 逐点收敛到 $f(t)$ 是指对每一个 $t \in [a, b]$ 和任意给定的 $\epsilon > 0$ , 存在一个正整数 $N$ , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$ 。

2. 一个函数系列 $\{f_n(t)\}$ 一致收敛到 $f(t)$ 是指对任意给定的 $\epsilon > 0$ , 存在一个正整数 $N$ , 使得当 $n > N$ , 对任意的 $t \in [a, b]$ 和, 有 $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$ 。

3. 一个函数系列 $\{f_n(t)\}$ 依范数收敛到 $f(t)$ 是指对任意给定的 $\epsilon > 0$ , 存在一个正整数 $N$ , 使得当 $n > N$ , 有 $\|f_n(t) - f(t)\|_{L^2} < \epsilon$ 。

一个序列一致收敛可以得出序列的逐点收敛, 反之不行。逐点收敛和依范数收敛没有直接的关系。在任意区间上, 一致收敛和依范数收敛也没有直接的关系, 但是在有限区间上, 一致收敛可以得出依范数收敛。

**定理 1.1** 在一个有限区间 $a \leq t \leq b$ 上, 如果一个序列 $f_n(t)$ 一致收敛到 $f(t)$ , 则序列 $f_n(t)$ 依范数收敛到 $f(t)$ 。反之不真。

证明见作业。

### §1.3 正交和正交投影

在欧式空间中, 余弦定理对我们每个人都不陌生, 它描述了三角形中任何一个夹角和三个边的关系, 换句话说, 给定三角形的三条边, 我们可以用余弦定理求出三角形各个角的角度。假定三角形的三条边为 $a, b$ 和 $c$ , 对应的三个角为 $A, B$ 和 $C$ , 那么角 $A$ 的余弦:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (1.1)$$

如果我们将三角形的两边 $b$ 和 $c$ 看成是两个向量 $\vec{b}, \vec{c}$ , 那么上述公式等价于:

$$\cos A = \frac{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|} \quad (1.2)$$

这一节将欧式空间的余弦定理和角度概念推广。为了定义角度, 需要先证明下面的Cauchy - Schwarz不等式。

**定理 1.2** 给定内积空间 $V$ , 对任意的 $v, w \in V$ , 我们有

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle, \quad (1.3)$$

其中等号当且仅当 $v, w$ 线性相关时成立。

**证明** 显然, 当 $w = 0$ 时, 由于 $\langle v, w \rangle^2 = 0 = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$ , 不等式中的等号成立。以下设 $w \neq 0$ , 从而 $\langle w, w \rangle > 0$ 。设 $\langle v, w \rangle = |\langle v, w \rangle| e^{i\phi}$ , 由内积的性质知, 对任意的实数 $t$ , 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|e^{-i\phi}v - w\|^2 \\ &= \langle e^{-i\phi}v - w, e^{-i\phi}v - w \rangle \\ &= \|v\|^2 - t(\langle e^{-i\phi}v, w \rangle + \langle w, e^{-i\phi}v \rangle) + t^2\|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2t(\operatorname{Re}(e^{-i\phi}\langle v, w \rangle)) + t^2\|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2t|\langle v, w \rangle| + t^2\|w\|^2 \end{aligned}$$

于是, 判别式满足

$$4|\langle v, w \rangle|^2 - 4\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \leq 0.$$

因此, *Cauchy - Schwarz*不等式成立。另一方面, 如果等号成立, 则方程 $\|e^{-i\phi}v - w\|^2 = 0$ 有双重实根 $t_0$ , 从而 $e^{-i\phi}v - t_0w = 0$ , 即 $v = e^{i\phi}t_0w$ , 这表明 $v, w$ 线性相关。反之, 如果 $v, w$ 线性相关, 很容易验证不等式等号成立。 #

根据*Cauchy - Schwarz*不等式, 可以定义两个非零向量 $v, w$ 的夹角

$$\theta = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

**例 1.4** 这个例子来自吴军老师的《数学之美》中的余弦相似定理和新闻分类 [1]。余弦定理和新闻的分类似乎是两件八杆子打不着的事, 但是它们确有紧密的联系。具体说, 新闻的分类很大程度上依靠余弦定理。*Google* 的新闻是自动分类和整理的。所谓新闻的分类无非是要把相似的新放到一类中 (聚类)。计算机其实读不懂新闻, 它只能快速计算。这就要求我们设计一个算法来算出任意两篇新闻的相似性。为了做到这一点, 我们需要想办法用一组数字来描述一篇新闻。

我们来看看怎样找一组数字, 或者说一个向量来描述一篇新闻。对于一篇新闻中的所有实词, 我们可以计算出它们的单文本词汇频率/逆文本频率值 (*TF/IDF*)。不难想象, 和新闻主题有关的那些实词频率高, *TF/IDF* 值很大。我们按照这些实词在词汇表的位置对它们的 *TF/IDF* 值排序。比如, 词汇表有 64000 个词, 在一篇新闻中, 这 64,000 个词的 *TF/IDF* 值。如果单词表中的某个词在新闻中没有出现, 对应的值为零, 那么这 64,000 个数, 组成一个 64,000 维的向量。我们就用这个向量

来代表这篇新闻，并成为该新闻的特征向量。如果两篇新闻的特征向量相近，则对应的新闻内容相似，它们应当归在一类，反之亦然。举一个具体的例子，假如新闻 $X$ 和新闻 $Y$ 对应向量分别是 $x = (x_1, \dots, x_{64000})$ 和 $y = (y_1, \dots, y_{64000})$ ，那么他们的夹角 $\theta$ 为

$$\cos \theta = \frac{x_1 y_1 + \dots + x_{64000} y_{64000}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{64000}^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_{64000}^2}}$$

当两篇新闻向量夹角的余弦等于一时，这就说明两篇新闻对应的词汇以及词汇出现的次数也完全一样，即它们完全重复(用这个办法可以删除重复的网页)；当夹角的余弦接近于一时，两条新闻相似，从而可以归成一类；夹角的余弦越小，两条新闻越不相关。

**例 1.5** 图 1.1 给出了一个函数和两个不同的正弦函数的内积的图像。注意到在这个例子中，如果函数变化的趋势和某个特定频率的正弦函数不一样，那么乘积的函数就会有正有负，从而积分的值不会太大。另一方面，如果函数变化的趋势和这个正弦函数一样，那么乘积的函数就会出现很多的正数，从而积分的值就会比较大。从这个例子可以看出，内积反映了两个不同信号的相似性。

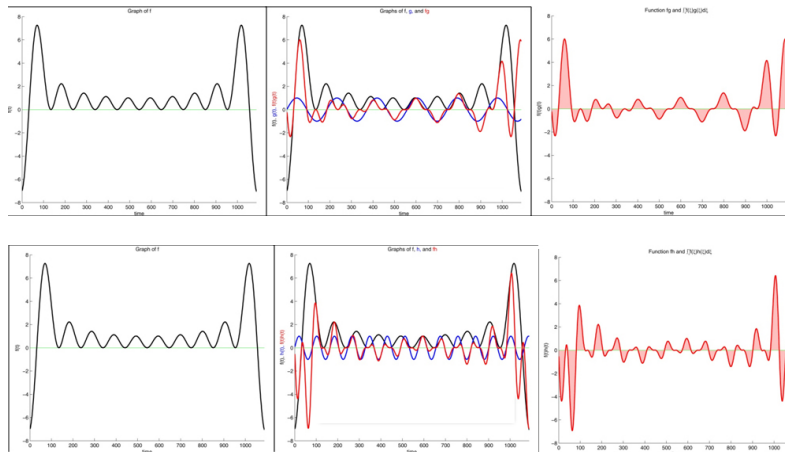


图 1.1 函数和两个不同正弦函数的内积，从左到右分别是原始函数，正弦函数和乘积函数的图像。我们可以看出这两个正弦函数差别不大，但是它们和给定函数的内积差别比较大。

在角度的定义中，有一个特殊情形，就是 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\langle v, w \rangle = 0$ ，我们称之为正交。

**定义 1.6** 设 $V$ 是一个内积空间,

- $V$ 中两个向量 $v$ 和 $w$ , 如果 $\langle v, w \rangle = 0$ , 则称 $v$ 和 $w$ 正交;
- 两个子空间 $V_1, V_2 \subseteq V$ 称为正交, 是指 $V_1, V_2$ 中的任一个元素都相互正交;
- 一个向量集 $\{v_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 称为标准正交集是指 $\|v_i\| = 1$ 且 $i \neq j$ 时,  $v_i$ 和 $v_j$ 正交; 如果 $\{v_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 是 $V$ 的一组基函数, 那么 $\{v_i\}$ 称为 $V$ 的一组标准正交基。

正交性为线性空间的展开和投影提供了计算上的便利, 主要结果如下。

**定理 1.3** 设 $V_0$ 是内积空间 $V$ 的一个 $n$ 维子空间, 假设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 $V_0$ 的一组标准正交基, 则对任意的 $v \in V_0$ , 有

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i.$$

**证明** 由于 $v \in V_0$ , 所以存在 $\alpha_i$ 使得

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

在上式两段同时对 $e_k$ 取内积:

$$\langle v, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i e_i, e_k \rangle$$

由于 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 $V_0$ 的一组标准正交基, 所以上式的右端只有 $i = k$ 时非零, 从而有

$$\langle v, e_k \rangle = \langle \alpha_k e_k, e_k \rangle = \alpha_k.$$

即:  $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$ . #

可以看出在线性空间 $V_0$ 的任一个元素在标准正交基下都有非常简洁的表达形式。如果 $v \in V, v \notin V_0$ , 当然不能用 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 的线性组合来表示。所以一个自然的问题是如何用最好的组合来表示 $v$ 呢? 这个问题的提出和解决都可以归宿到经典的逼近论了。

**定义 1.7** 假设 $V_0$ 是内积空间 $V$ 的一个有限维的子空间, 对任意的 $v \in V, v$ 在 $V_0$ 上的正交投影是唯一的向量 $v_0$ , 使得

$$\|v - v_0\| = \min_{w \in V_0} \|v - w\|.$$

**定理 1.4** 如果  $V_0$  是内积空间  $V$  的一个有限维子空间, 设  $v$  是  $V$  中的一个元素, 则  $v_0$  是  $v$  在  $V_0$  上的正交投影当且仅当  $v - v_0$  和  $V_0$  中任意一个元素都正交,

**证明** 记关于  $t$  的实函数

$$f(t) = \|v_0 + t\omega - v\|^2, t \in R.$$

对任意的  $t$ ,  $v_0 + t\omega \in V_0$ , 另外,  $v_0$  是  $v$  在  $V_0$  上的正交投影, 所以当  $t = 0$  时,  $f(t)$  最小, 故其导数在  $t = 0$  处为 0. 又

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle v_0 - v + t\omega, v_0 - v + t\omega \rangle \\ &= \|v_0 - v\|^2 + 2t\langle v_0 - v, \omega \rangle + t^2\|\omega\|^2. \end{aligned}$$

从而

$$f'(t) = 2\langle v_0 - v, \omega \rangle + 2t\|\omega\|^2.$$

所以  $0 = f'(0) = 2\langle v_0 - v, \omega \rangle$ . 由此得出结论  $v - v_0$  和  $V_0$  中任意一个元素都正交。另一方面, 如果  $v - v_0$  和  $V_0$  中任意一个元素都正交, 则对任意的  $\omega \in V_0$ ,

$$\begin{aligned} \|v - \omega\|^2 &= \langle v - \omega, v - \omega \rangle \\ &= \langle v - v_0 + v_0 - \omega, v - v_0 + v_0 - \omega \rangle \\ &= \langle v - v_0, v - v_0 \rangle + \langle v_0 - \omega, v_0 - \omega \rangle \\ &\geq \langle v - v_0, v - v_0 \rangle. \end{aligned}$$

从而  $v_0$  是  $v$  在  $V_0$  上的正交投影。 #

**定理 1.5** 如果  $V_0$  是内积空间  $V$  的一个有限维子空间, 且它的一组标准正交基是  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , 设  $v$  是  $V$  中的一个元素,  $v_0$  是  $v$  在  $V_0$  上的正交投影, 则  $v_0 = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$ .

**证明** 由于  $v_0 \in V_0$ , 所以存在  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  使得  $v_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ . 另外,  $v - v_0$  和  $V_0$  中的每一个元素都正交, 从而  $v - v_0$  和  $e_i$  都正交。即对任意的  $i$ ,

$$0 = \langle v - v_0, e_i \rangle = \left\langle v - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, e_i \right\rangle = \langle v, e_i \rangle - \alpha_i.$$

所以  $\alpha_i = \langle v, e_i \rangle$ . #

**例 1.6** 设  $V_0$  是由空间  $L^2([-\pi, \pi])$  中函数  $\cos x$  和  $\sin x$  张成的空间, 函数  $e_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$  和  $e_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$  在  $L^2([-\pi, \pi])$  中是标准正交的。令  $f(x) = x$ , 则  $f(x)$  在  $V_0$  上的投影是由下式给出:

$$f_0 = \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2.$$

其中,

$$\begin{aligned}\langle f, e_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = 0, \\ \langle f, e_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = 2\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

因此:  $f_0 = 2 \sin x$ , 如图 1.2 a 所示。

例 1.7 设  $V_0$  是由空间  $L^2([0, 1])$  中函数  $\phi(x) = 1, 0 \leq x < \frac{1}{2}$  和

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

张成的空间, 这两个函数是标准正交的。令  $f(x) = x$ , 则  $f(x)$  在  $V_0$  上的投影是由下式给出:

$$f_0 = \langle f, \phi(x) \rangle \phi(x) + \langle f, \psi(x) \rangle \psi(x).$$

其中,

$$\begin{aligned}\langle f, \phi(x) \rangle &= \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}, \\ \langle f, \psi(x) \rangle &= \int_0^1 f(x) \psi(x) dx = -\frac{1}{4},\end{aligned}$$

因此,  $f(x)$  在该空间的正交投影  $f_0 = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$ , 如图 1.2 b 所示。

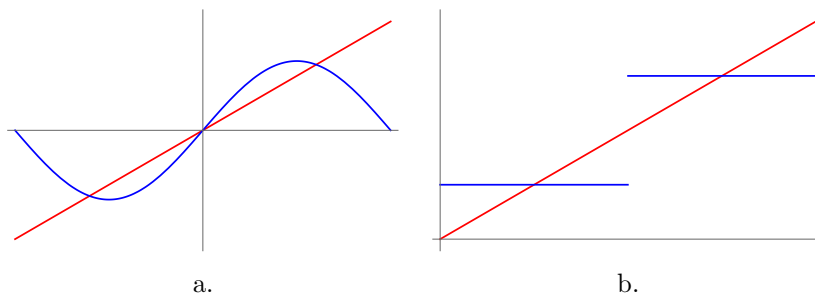


图 1.2 正交投影.

定义 1.8 设  $V_0$  是  $V$  的子空间,  $V_0$  的正交补空间, 记为  $V_0^\perp$ , 是  $V$  上所有与  $V_0$  正交的向量集合, 即

$$V_0^\perp = \{v \in V : \langle v, \omega \rangle = 0, \omega \in V_0\}$$

**定理 1.6** 设  $V_0$  是内积空间  $V$  的有限维子空间, 对每一个向量  $v \in V$ , 可以唯一的表示为  $v = v_0 + v_1$ , 其中  $v_0 \in V$ ,  $v_1 \in V_0^\perp$ . 即:

$$V = V_0 \oplus V_0^\perp.$$

这个定理的证明留作作业。

### §1.3.1 Gram-Schmidt 正交化方法

可以看出: 标准正交基函数对计算函数的表达以及正交投影的计算上都带来极大的便利, 从而关键问题是如何构造一组标准正交基函数。下面给出的结果说明, 任意一组基函数可以通过下面阐述的 Gram-Schmidt 正交化方法生成一组标准正交基。

设  $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$  是  $L^2[a, b]$  中一组线性无关函数系, 记  $\psi_1(t) = v_1(t)$ ,

$$\psi_n(t) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle, \dots, \langle v_1, v_{n-1} \rangle & v_1 \\ \langle v_2, v_1 \rangle, \dots, \langle v_2, v_{n-1} \rangle & v_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle, \dots, \langle v_n, v_{n-1} \rangle & v_n \end{vmatrix}$$

以及  $\Delta_0 := 1, \Delta_n := \det(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^n$ , 则

$\varphi_k(t) = \frac{\psi_k(t)}{\sqrt{\Delta_k \Delta_{k-1}}}, k \geq 1$  是一组规范正交系, 且

$$\text{span}\{\varphi_i\}_1^k = \text{span}\{v_i\}_1^k, k = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

**证明** 由  $\psi_n(t)$  的定义, 显然有  $\langle \psi_n, v_k \rangle = \begin{cases} \Delta_n & k = n \\ 0 & k < n \end{cases}$ , 因而, 当  $k \leq n$  时,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle &= \frac{\langle \psi_n, \psi_k \rangle}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1} \Delta_k \Delta_{k-1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1} \Delta_k \Delta_{k-1}}} \left\langle \psi_n, \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i v_i + \frac{\Delta_{k-1}}{\sqrt{\Delta_k \Delta_{k-1}}} v_k \right\rangle \\ &= \delta_{k,n}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

这就证明了  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  的标准正交性, 又因为

$$\varphi_{k+1} = \frac{\Delta_k}{\sqrt{\Delta_{k+1} \Delta_k}} v_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in M_{k+1}$$

但  $\varphi_{k+1} \notin \text{span}\{v_i\}_{i=1}^k$ , 所以,  $\text{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^{k+1} = \text{span}\{v_i\}_{i=1}^{k+1}$ . #

下面通过一个简单的例子来理解上述正交化的计算过程。

**例 1.8** 给定一个基函数  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , 构造一组标准正交基  $\{E_1, E_2, E_3\}$ 。

首先, 定义  $E_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ , 则  $\|E_1\| = 1$ 。令  $p_1$  是  $v_2$  在  $E_1$  所张成空间上的正交投影, 即

$$p_1 = \langle v_2, E_1 \rangle E_1.$$

记  $e_2 = v_2 - p_1$ , 则  $\langle e_2, E_1 \rangle = \langle v_2, E_1 \rangle - \langle p_1, E_1 \rangle = 0$ , 从而  $e_2$  和  $E_1$  正交, 设  $E_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|}$ , 则  $E_1$  和  $E_2$  标准正交。

同理, 令  $p_2$  是  $v_3$  在  $E_1, E_2$  所张成空间上的正交投影, 即

$$p_2 = \langle v_3, E_1 \rangle E_1 + \langle v_3, E_2 \rangle E_2.$$

记  $e_3 = v_3 - p_2$ , 则  $\langle e_3, E_2 \rangle = \langle v_3, E_2 \rangle - \langle p_2, E_2 \rangle = 0$ ,  $\langle e_3, E_1 \rangle = \langle v_3, E_1 \rangle - \langle p_2, E_1 \rangle = 0$ , 从而  $e_3$  和  $E_1, E_2$  正交, 设  $E_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|}$ , 则  $E_1, E_2, E_3$  组成一组标准正交基。

**作业 1.1** 1. 试证明内积的双线性性和共轭齐次性:

(a) 对任意的  $u, v, w \in V$ ,  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ 。

(b) 对任意的  $c \in C$ ,  $v, w \in V$ ,  $\langle v, cw \rangle = \bar{c} \langle v, w \rangle$ 。

2. 证明文中给出的三个内积空间的例子满足内积性质。

3. 证明文中空间  $L^2([a, b])$  上的  $L^2$  内积满足内积性质。

4. 证明定理 1.1。

5. 对  $n > 0$ , 令  $f_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ , 证明在  $L^2[0, 1]$  上有  $f_n(t)$  逐点收敛到 0, 但是  $f_n(t)$  不一致收敛到 0。

6. 对  $n > 0$ , 令  $f_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & 0 < t < \frac{1}{n^2}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ , 证明在  $L^2[0, 1]$  上有  $f_n(t)$  依范数收敛到 0, 但是  $f_n(t)$  不是逐点收敛到 0。

7. 证明内积诱导的距离满足三角不等式。即: 给定内积空间  $V$ , 对任意的  $v, w \in V$ , 有

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

8. 证明内积诱导的范数满足平行四边形公式。即: 给定内积空间  $V$ , 对任意的  $v, w \in V$ , 有

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$



9. 证明定理1.6。
10. 计算向量 $(1, 2, 1)$ 张成的 $R^3$ 子空间的正交补空间。
11. 如果 $f(t) = 1, 0 \leq t \leq 1$ , 则在 $L^2[0, 1]$ 上 $f(t)$ 的正交补空间是均值为0的所有函数组成的空间。
12. 利用Gram-Schmidt正交化方法求由 $\{1, x, x^2\}$ 张成的 $L^2[0, 1]$ 的子空间的标准正交基。
13. 求 $\sin(x) + \cos(x)$ 在由 $\{1, x, x^2\}$ 张成的 $L^2[0, 1]$ 的子空间的正交投影。
14. 设 $e_1, \dots, e_k$ 是 $n$ 维内积空间 $V$ 的一组两两正交的单位向量, 给定 $v \in V$ , 记 $\alpha_i = \langle v, e_i \rangle$ , 则

$$\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \leq \|v\|^2$$

而且 $v - \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \perp e_i, i = 1, \dots, k$ 。

15. 设 $e_1, \dots, e_n$ 是 $n$ 维内积空间 $V$ 的一组向量, 证明下面的条件等价:

- $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 $V$ 的一组标准正交基;
- 对任意的 $\alpha, \beta \in V$ ,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, e_i \rangle \langle e_i, \beta \rangle$$

- 对任意的 $\alpha \in V$ ,

$$\|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \alpha, e_i \rangle|^2$$



## 第二章 傅里叶级数

### §2.1 引言

这一章介绍定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的三角函数展开, 即将函数展开成如下形式

$$a_0 + \sum_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

上述展开形式被称为傅里叶级数。

那为什么要将函数展开成这样的形式呢? 这个答案随着所关注的领域和应用不同而不同。本章会给出一个从信号处理的角度来看待傅里叶级数的展开。

在18世纪, 三角函数的展开和简谐振动的研究有关, 但是那时没有人对它进行系统的研究。1808年, 傅里叶完成了著名的热力学论文集的第一版, 即“热的分析理论”。在该著作中, 作者详细的研究了三角级数, 并利用它解决了许多热传导问题。可是, 从数学上看, 该著作的有些结论无确凿依据, 因此饱受争议, 而文章直到1822年才得以出版。当时, 在论文里有个在当时具有争议性的决断: 任何连续周期信号都可以由一组适当的正弦曲线组合而成。当时审查这篇论文的学者拉格朗日坚决反对此论文的发表, 而后在近50年的时间里, 拉格朗日坚持认为傅立叶的方法无法表示带有棱角的信号, 比如方波信号。那么谁是对的呢? 从理论上讲拉格朗日是对的: 正弦曲线无法组合成一个带有棱角的信号。但是, 我们可以用正弦曲线来逼近的表示它, 逼近到两种表示方法不存在能量差别, 基于此, 傅立叶是对的。从数学上讲, 拉格朗日的结论是基于傅里叶级数的一致收敛, 而傅立叶的结论是基于傅里叶级数的依范数收敛的。

虽然傅里叶的论证不完全正确, 但是傅里叶在文中引入了一个很重要的概念: 频谱, 这一思想带来了科学和技术上的极大的进步。傅里叶级数以及相应的傅里叶变换的应用涵盖了概率和统计、信号处理和量子力学等学科。在数学上, 黎曼积分和勒贝格积分都是起源对傅里叶级数的研究。

函数展开成三角函数的和式形式起源对偏微分方程的研究。下面考虑一个很简单但是很重要的例子: 圆棍上的热力学方程。

**例 2.1** 求解下面的偏微分方程:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), t > 0, 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0$$

该偏微分方程的解 $u(x, t)$ 表示在长为 $\pi$ 的圆棍上, 点 $x$ 处在时刻 $t$ 时对应的温度, 其初始温度(即 $t = 0$ 时)由函数 $f(x)$ 给出, 而在端点处(即 $x = 0$ 和 $x = \pi$ )的温度保持0。

假设在区间  $-\pi \leq x \leq \pi$  上,  $u(x, t)$  具有如下的表示形式:

$$u(x, t) = A_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \cos kx + B_k(t) \sin kx.$$

由于  $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$ , 所以  $A_k = 0, k = 0, \dots, +\infty$ 。再代入到方程中, 有

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} B'_k(t) \sin kx \\ u_{xx}(x, t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 B_k(t) \sin kx \end{aligned} \quad (2.1)$$

从而, 得到

$$B_k(t)k^2 + B'_k(t) = 0.$$

所以,

$$B_k(t) = C_k e^{-k^2 t}.$$

进而得到,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

我们定义  $f_o(x)$ , 使得在区间  $-\pi \leq x \leq 0$ ,  $f_o(x) = f(-x)$ , 在区间  $0 \leq x \leq \pi$  上,  $f_o(x) = f(x)$ 。并设  $f_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kx$ , 将  $u(x, t)$  的表达式代入到初值条件, 可得  $C_k = f_k$ , 即

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

可以看出, 如果我们假设函数  $u(x, t)$  和  $f(x)$  具有傅里叶级数形式的展开, 则上述的热力学方程问题就可以直接求解。这也是傅里叶在文献“热的分析理论”中给出的结果。

傅里叶级数的另外一个应用是在信号处理中。在许多实际的应用需要将函数展开成三角函数和式的形式。如果  $f(t)$  为一个信号, 那么分解  $f$  所得到的三角级数就可以描述各个频率分量。比如, 如果一个信号可以写成

$$f(x) = 2 \sin x + 200 \cos(5x) + 50 \sin(200x),$$

在这个信号中包含了三个频率分量, 分别在一个  $2\pi$  周期中振动 1 次, 5 次和 200 次。另外, 根据系数的大小, 振动频率为 5 的分量最占优势。

信号处理中有两个很重要的工作: 去噪和压缩。如果将  $f(x)$  表示成三角级数的形式

$$f(x) = a_0 + \sum_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

则可以应用于信号的去噪和压缩。比如, 如果需要去掉高频噪声, 只需要将足够大的 $k$ 所对应的系数 $a_k$ 和 $b_k$ 置为零即可。数据压缩的一个目标就是用尽可能少的数据发送信号, 同时希望可以保持信号的变化尽量小。一旦将信号写成三角级数的形式, 只需要发送绝对值比给定阈值小的那些系数即可, 然后利用这些给定的系数可以直接重构原始的信号。

总之, 将一个函数表示成三角级数的形式可以提炼出这个函数在不同频率下的分量, 而频率是自然界很多对象的共同特征, 因而傅里叶级数具有很大的普适性。下面将给出这种表示形式的数学基础, 即傅里叶级数的数学基础。

## §2.2 傅里叶级数的计算

### §2.2.1 周期是 $2\pi$ 函数的傅里叶级数

在这一节中, 我们需要计算 $[-\pi, \pi]$ 上的周期函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$a_0 + \sum_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.2)$$

的系数 $a_k$ 和 $b_k$ 。为此, 我们首先给出下面的正交性结果。

引理 2.1 集合

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

构成 $L^2[-2\pi, 2\pi]$ 的一组标准正交集。

在式子2.2的两边同时乘以 $\cos kx$ , 然后积分就可以得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left( a_0 + \sum_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \cos(kx) dx$$

注意到当 $k \neq 0$ , 右边只有 $a_k \neq 0$ , 从而右边等于 $\pi a_k$ , 从而得到

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

而当 $k = 0$ 时, 右边等于 $2\pi a_0$ , 从而

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

同理, 我们可以求得

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

上述结论可以总结为下面的定理。

**定理 2.1** 如果周期为 $2\pi$ 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上 $f(x) = a_0 + \sum_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , 则

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2.3)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (2.4)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (2.5)$$

这里 $a_k$ 和 $b_k$ 称为傅里叶系数。

傅里叶级数的展开也可以通过正交投影来理解。事实上, 如果我们记 $V_n$ 是由 $\{1, \cos(kx), \sin(kx), k = 1, \dots, n\}$ 张成的线性空间, 记 $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , 则 $f_n(x)$ 是 $f(x)$ 在空间 $V_n$ 上的正交投影, 从而对任意的 $g(x) \in V_n$ , 我们有

$$\|f(x) - f_n(x)\|_{L^2} \leq \|f(x) - g(x)\|_{L^2}.$$

### §2.2.2 任意周期函数的傅里叶级数

我们来计算 $[-a, a]$ 上周期为 $2a$ 的周期函数的傅里叶展开。此时, 基本的构成块是 $\cos \frac{k\pi x}{a}$ 和 $\sin \frac{k\pi x}{a}$ 。利用积分换元很容易得到下面任意区间的傅里叶级数的计算方法, 具体计算过程作为作业。

**定理 2.2** 如果 $[-a, a]$ 上的周期函数 $f(x) = a_0 + \sum_k (a_k \cos \frac{k\pi x}{a} + b_k \sin \frac{k\pi x}{a})$ , 则

$$a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx \quad (2.6)$$

$$a_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx \quad (2.7)$$

$$b_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx \quad (2.8)$$

**例 2.2** 设一个周期为2的函数设 $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1; \\ 0, & \{-2 \leq x \leq -1\} \cup \{1 \leq x \leq 2\}. \end{cases}$ , 下面计算它的傅里叶系数。

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

对于 $k \geq 1$ 时:

$$a_k = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi}$$

当 $k$ 是偶数的时候,  $a_n = 0$ 。当 $k = 2n - 1$ 是奇数时,  $a_{2n+1} = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}$ 。类似的

$$b_k = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{k\pi x}{2} dx = 0.$$

所以,  $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}.$$

该函数 $f(x)$ 的图像和傅里叶级数展开到第10, 30和50项的图像在图2.1中。

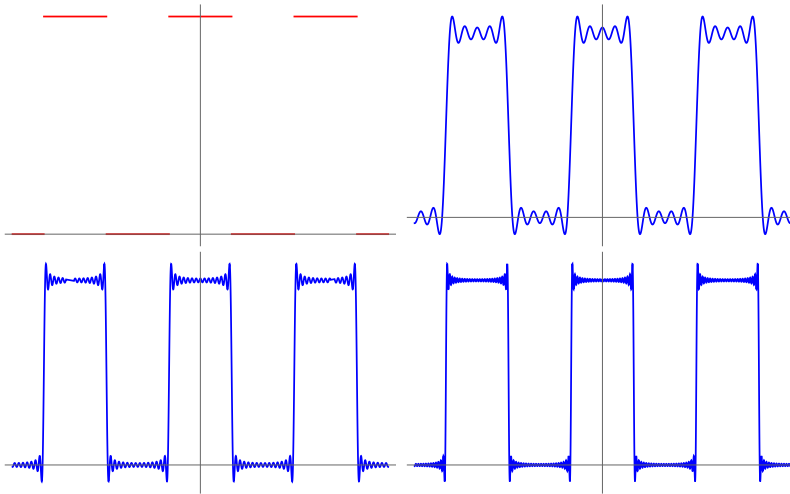


图 2.1 例子2.2中的 $f(x)$ 的图像和傅里叶级数展开到第10, 30和50项的图像

### §2.2.3 正弦级数和余弦级数

在傅里叶级数展开式中, 如果给定的函数 $f(x) = f(-x)$ , 即 $f(x)$ 是偶函数, 那么 $f(x) \sin(\frac{k\pi x}{a})$ 就是奇函数, 从而,  $b_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin(\frac{k\pi x}{a}) dx = 0$ 。所以傅里叶级数中只包含余弦项的级数, 这样的级数称为余弦级数。

同样, 如果给定的函数是一个奇函数, 那么 $f(x) \cos(\frac{k\pi x}{a})$ 就是奇函数, 从而,  $a_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos(\frac{k\pi x}{a}) dx = 0$ 和 $a_0$ 都为零, 从而级数只包含正弦项级数, 这样的级数称为正弦级数。

假设函数 $f(x)$ 是定义在 $[0, a]$ 上的函数, 那么有两种不同的办法将 $f(x)$ 延拓成周

期为 $2a$ 的函数。如果将 $f(x)$ 展开成余弦级数,就需要偶延拓,即

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq a; \\ f(-x), & -a \leq x < 0. \end{cases}$$

由于 $f_e(x)$ 是定义在 $R$ 上的偶函数,从而它的傅里叶级数是余弦级数,从而在 $[0, a]$ 上,原函数就展开成余弦级数。

如果将 $f(x)$ 展开成正弦级数,就需要奇延拓,即

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq a; \\ -f(-x), & -a \leq x < 0. \end{cases}$$

由于 $f_o(x)$ 是定义在 $R$ 上的奇函数,从而它的傅里叶级数是正弦级数,在 $[0, a]$ 上,原函数就展开成正弦级数。

**例 2.3** 考虑 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(x) = x$ , 假设我们对它进行奇延拓,从而展开成正弦级数,在 $a_k = 0$ ,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

所以,它对应的正弦级数为

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

此时函数对应的傅里叶级数展开成10, 30, 50项的结果如图2.2和2.3所示。

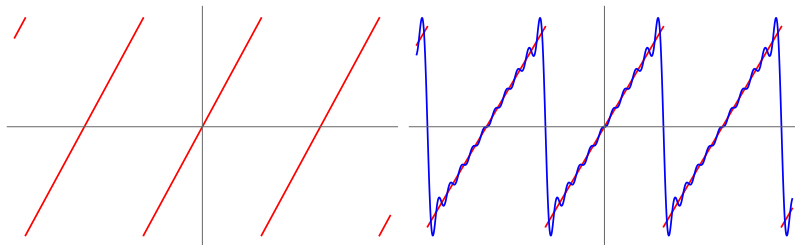


图 2.2 例子2.3中的 $f(x)$ 的图像和傅里叶正弦级数展开到第10项的图像

假设我们对它进行偶延拓,从而展开成余弦级数,在 $b_k = 0$ ,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$



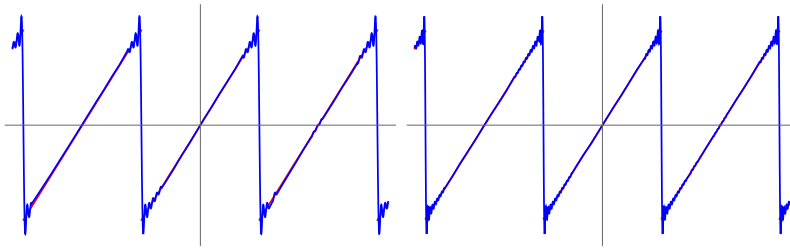


图 2.3 例子2.3中函数傅里叶正弦级数展开到第30项和第50项的图像

所以，它对应的正弦级数为

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

此时函数对应的傅里叶级数展开成10, 30, 50项的结果如图2.4和2.5所示。

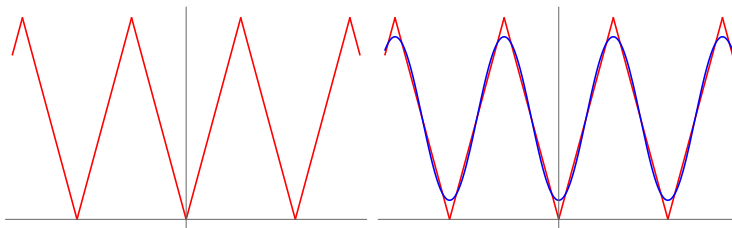


图 2.4 例子2.3中的  $f(x)$  的图像和傅里叶余弦级数展开到第10项的图像

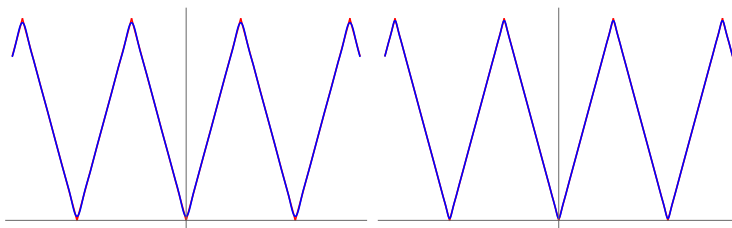


图 2.5 例子2.3中的  $f(x)$  的傅里叶余弦级数展开到第30项和第50项的图像

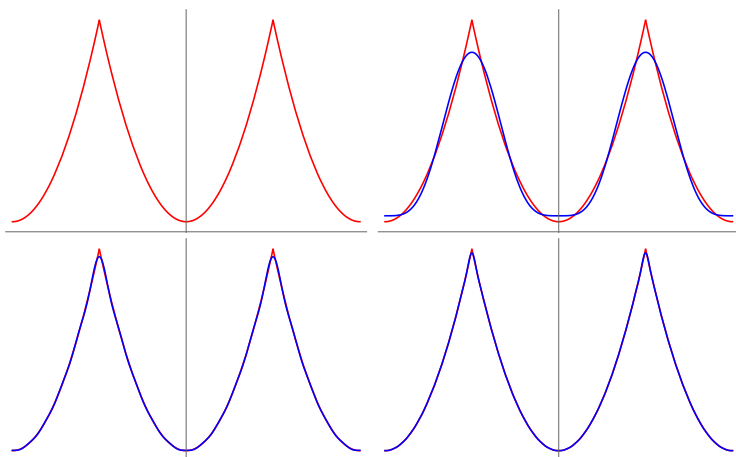


图 2.6 例子2.4中的 $f(x)$ 的图像和傅里叶余弦级数展开到第10, 30,50项的图像

**例 2.4** 设函数 $f(x) = x^2 + 1, 0 \leq x \leq 1$ 。如果将函数做偶延拓可以得到 $f_e(x) = x^2 + 1, -1 \leq x \leq 1$ 。将 $f_e(x)$ 看成周期为2的周期函数并进行傅里叶展开可以得到它的傅里叶系数。

$$a_0 = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}.$$

$$a_k = 2 \int_0^1 (x^2 + 1) \cos(n\pi x) dx = \frac{4((\pi^2 n^2 - 1) \sin(\pi n) + \pi n \cos(\pi n))}{\pi^3 n^3}.$$

此时函数对应的傅里叶级数展开成10, 30, 50项的结果如图2.6所示。

但是如果我们对函数进行奇延拓并看成周期是2的周期函数，我们可以计算出它的傅里叶系数

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 (x^2 + 1) \sin(n\pi x) dx$$

利用分部积分两次可以得到

$$b_n = \frac{4(n\pi)^2(-1)^{n+1} + 4(-1)^n - 4 + (n\pi)^2}{(n\pi)^3}.$$

此时函数对应的傅里叶级数展开成10, 30, 50项的结果如图2.7所示。

#### §2.2.4 傅里叶级数的复数形式

由于复指数 $e^{ikt}$ ,  $i^2 = -1, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 具有简单的计算性质，因此，在一些复杂的运算中，将傅里叶级数表示成复指数形式会更方便些。基于复指数的傅里叶级数的展开也是基于它的正交性。

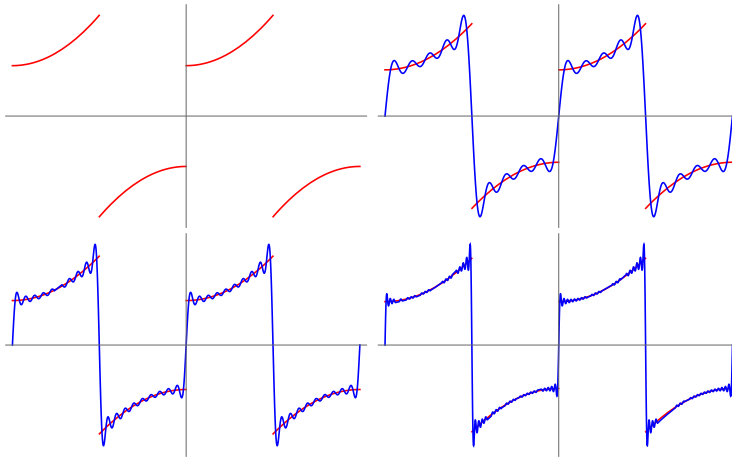


图 2.7 例子2.4中的 $f(x)$ 的图像和傅里叶正弦级数展开到第10, 30,50项的图像

### 引理 2.2 函数集

$$\left\{ \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \right\}$$

在 $L^2[-\pi, \pi]$ 上是标准正交的。

利用正交性，我们可以得到下面的傅里叶技术的复指数形式。

**定理 2.3** 如果 $[-\pi, \pi]$ 上的周期函数 $f(t) = \sum_k \alpha_k e^{ikt}$ ，则

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (2.9)$$

**例 2.5** 设一个周期为 $2\pi$ 的函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi; \\ -1, & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$ ，其第 $k$ 个复的傅里叶级数的系数为

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-ikx} dx \quad (2.11)$$

$$= -\frac{(1 - \cos(k\pi))i}{k\pi} \quad (2.12)$$

$$= \begin{cases} \frac{-2i}{k\pi}, & k \text{ 为奇数;} \\ 0, & k \text{ 为偶数.} \end{cases} \quad (2.13)$$

所以,  $f(x)$  的傅里叶级数是

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-2i}{(2k+1)\pi} e^{i(2k+1)x}.$$

**定理 2.4** 函数集

$$\left\{ \frac{e^{ik\pi t/a}}{\sqrt{2a}}, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \right\}$$

在  $L^2[-a, a]$  上是标准正交的。如果  $f(t) = \sum_k \alpha_k e^{ik\pi t/a}$ , 则

$$\alpha_k = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) e^{-ik\pi t/a} dt \quad (2.14)$$

### §2.3 傅里叶级数的收敛性

傅里叶级数的收敛性可以从三个层面来阐述: 逐点收敛, 一致收敛和依范数收敛。本节将在一定的条件下, 分别阐述傅里叶级数在一定的条件下的收敛行为。

研究傅里叶级数收敛问题的主要工具是下面的Riemann引理。

**引理 2.3** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上可积且绝对可积的函数, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(kx) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(kx) dx = 0. \quad (2.15)$$

**证明** 我们通过下面三步来证明这个引理。

(一): 假设  $f(x)$  是一个阶梯函数, 即

$$f(x) = T(x) = \begin{cases} c_i, & x_{i-1} \leq x < x_i, i = 1, 2, \dots, n \\ c_n, & x = x_n. \end{cases} \quad (2.16)$$

这里  $c_i$  是常数, 且  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 。对于这样的  $f(x)$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos(kx) dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} c_i \cos(kx) dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{k} (\sin(kx_i) - \sin(kx_{i-1})) \right| \\ &\leq \frac{2}{k} \sum_{i=1}^n |c_i|. \end{aligned}$$

从而对于阶梯函数, 引理成立。

(二) 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的有界可积函数, 我们首先证明对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $T(x)$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - T(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

事实上, 由于  $f(x)$  可积, 所以存在  $[a, b]$  的一个分割  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2},$$

其中,  $M_i, m_i$  是  $f(x)$  在区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的上下确界. 定义下面的阶梯函数

$$T(x) = \begin{cases} f(x_{i-1}), & x_{i-1} \leq x < x_i, i = 1, 2, \dots, n \\ f(x_{n-1}), & x = x_n. \end{cases} \quad (2.17)$$

则

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - T(x)| dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \\ &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

所以,

$$\left| \int_a^b (f(x) - T(x)) \cos(kx) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - T(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.18)$$

又

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(kx) dx \right| \leq \left| \int_a^b (f(x) - T(x)) \cos(kx) dx \right| + \left| \int_a^b T(x) \cos(kx) dx \right| \rightarrow 0.$$

(三) 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的无界但是绝对可积, 不妨设  $b$  是瑕点, 则对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\eta > 0$ , 使得

$$\int_{b-\eta}^b |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2},$$

从而

$$\int_a^b f(x) \cos kx dx = \int_a^{b-\eta} f(x) \cos kx dx + \int_{b-\eta}^b f(x) \cos kx dx.$$

对于第一部分积分  $\int_a^{b-\eta} f(x) \cos kx dx$ , 由于它没有瑕点, 由(二)的证明可知它随着  $k$  趋向  $\infty$  而趋向 0. 对于第二部分积分  $\int_{b-\eta}^b f(x) \cos kx dx$ , 由刚才的定义知

$$\left| \int_{b-\eta}^b f(x) \cos kx dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \left| \int_{b-\eta}^b \cos kx dx \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (2.19)$$

这样也可以同样证明该引理。 #

**定理 2.5** 对任意的  $x_0 \in (-\pi, \pi)$ , 如果存在  $s$  使得函数  $\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s$  满足: 对任意的正数  $\delta$ , 函数  $\frac{\varphi(t)}{t}$  在  $[0, \delta]$  上可积且绝对可积, 在  $f(x)$  的傅里叶级数在  $x_0$  处收敛到  $s$ .

**证明** 我们先看傅里叶级数的部分和

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) \cos(kt) \cos(kx) + f(t) \cos(kt) \sin(kx)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(x-t)) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{2 \sin(\frac{1}{2}(t-x))} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+x) + f(t-x)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin(\frac{x}{2})} dx \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} S_n(x_0) - s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt \end{aligned}$$

因为当  $t \rightarrow 0$  时,  $2 \sin(\frac{t}{2}) \sim t$ , 又由假定  $\frac{\varphi(t)}{t}$  在  $[0, \delta]$  上可积且绝对可积, 所以  $\frac{\varphi(t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$  也在  $[0, \delta]$  上可积且绝对可积, 因而在  $[0, \pi]$  上也可积且绝对可积, 由 Riemann 引理, 我们知上式在  $n \rightarrow \infty$  时趋向 0. 这样就证明了该定理。 #

特别的, 在下面的分段可微的条件下, 傅里叶级数就是收敛的。

**定义 2.1** 假设一个函数  $f(x)$  定义在区间  $[a, b]$  上, 如果存在一个分割  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 使得函数

$$g_i(x) = \begin{cases} f(x_{i-1} + 0), & x = x_{i-1}; \\ f(x), & x \in (x_{i-1}, x_i); \\ f(x_i - 0), & x = x_i. \end{cases} \quad (2.20)$$

都是可微的, 则称函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是分段可微的。

**定理 2.6** 如果一个函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上是分段可微的, 在  $f(x)$  在每一个点  $x_0$  都收敛到  $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ 。

我们可以看出, 为了使傅里叶级数收敛到函数本身, 除了要求函数在一个点处连续, 还要求函数在这个点处有一阶导数或者左右导数。一个自然的问题是: 如果只有连续性, 是否保证其傅里叶级数收敛到本身呢? 事实上, 傅里叶级数的逐点收敛是一个非常困难的问题, 即使对连续周期函数也是如此。1876年, Du Bois-Reymond 举出了一个连续函数的例子, 它的傅里叶级数在某些点是发散的。后来, 连续函数的发散点处处稠密的例子也已经找到。如果在 Lebesgue 可积函数中考虑, Kolmogorov 举出了  $f$  的傅里叶级数几乎发散和处处发散的例子。1966年, Carleson 证明解决了一个长期的猜想: 平方可积函数的傅里叶级数几乎处处收敛。

在非连续条件下, 傅里叶级数一般不是一致收敛的。那么, 在什么条件下, 傅里叶级数是一致收敛的呢? 事实上, 在连续且分段可微的条件下, 傅里叶级数是一致收敛的。

**定理 2.7** 假设连续函数  $f(x)$  的周期是  $2\pi$  且分段光滑, 那么它的傅里叶级数在区间  $[-\pi, \pi]$  上一致收敛到  $f(x)$ 。

**证明** 依定理的条件知  $f'(x)$  存在且  $f'(x)$  对应的傅里叶级数收敛。不妨设  $f(x)$  的傅里叶级数的系数是  $a_n, b_n$ ,  $f'(x)$  的傅里叶级数的系数是  $c_n, d_n$ , 那么不难证明

$$c_0 = 0, c_n = nb_n, d_n = -na_n.$$

从而

$$\begin{aligned} |a_n| + |b_n| &= \left| \frac{c_n}{n} \right| + \left| \frac{d_n}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{c_n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{d_n^2} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c_n^2} + \frac{1}{d_n^2} \right) \end{aligned}$$

再由作业8知, 原傅里叶级数一致收敛。

#

然而，如果函数 $f(x)$ 不是一个连续函数，这个时候他的傅里叶级数是不一致收敛的。那么这个不一致收敛会导致什么样的行为呢？Josiah W. Gibbs在1899年最先研究了不一致收敛导致在间断点附近的现象，得到了被后人称为的Gibbs现象。

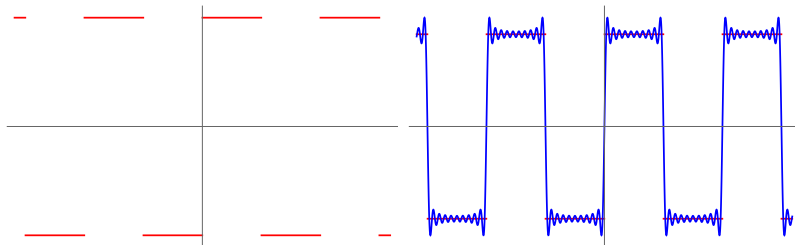


图 2.8 例子中的 $f(x)$ 的图像和傅里叶级数展开到第20项的图像

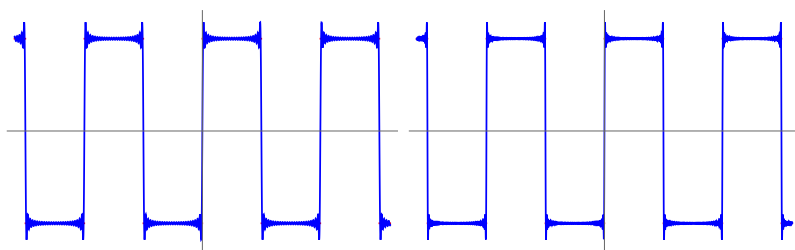


图 2.9 傅里叶级数展开到第50项和第100项的图像

例 2.6 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi; \\ 0, & 0, \pm\pi; \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

把 $f(x)$ 延拓成周期 $2\pi$ 的奇函数，它的傅里叶系数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx \\ &= \begin{cases} \frac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k - 1; \\ 0, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$



所以它的傅里叶级数的部分和为

$$S_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

由收敛定理, 我们知道  $S_{2n-1}(x)$  逐点收敛到  $f(x)$ 。下面我们考察  $S_{2n-1}(x)$  在  $x=0$  附近的行为。

注意到当  $x \neq 0$ ,

$$S'_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x = \frac{2 \sin(2nx)}{\pi \sin(x)}$$

所以  $S_{2n-1}(x)$  在  $x=0$  的右边的第一个极大值点是  $x_n = \frac{\pi}{2n}$ , 其极大值为

$$\begin{aligned} S_{2n-1}(x_n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{x_n} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{2n \sin(\frac{t}{2n})} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} \frac{\frac{t}{2n}}{\sin(\frac{t}{2n})} dt \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}(x_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = 1.17989 \dots$$

所以无论  $n$  多大, 都至少存在一个点,  $x_n = \frac{\pi}{2n}$ , 使得

$$|S_{2n-1}(x_n) - f(x_n)| > c \approx 0.17989 \dots$$

可以看出, 不连续函数的傅里叶级数并不能很好的逼近原函数。那么在这个时候, 我们该怎么去度量傅里叶级数的逼近呢? 这就是傅里叶级数的依范数收敛的结果。首先我们给出一个事实, 对任意一个  $L^2[-\pi, \pi]$  的函数  $f(x)$ , 对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在连续函数  $g_\epsilon(x)$ , 使得  $\|f(x) - g_\epsilon(x)\|_{L^2} < \epsilon$ 。除此之外, 我们还给出 Weierstrass 逼近定理。

**定理 2.8** 如果函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 且  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 则它可以用三角多项式一致逼近。

证明 记

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \left( \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) \left( \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \\ &\doteq \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \left( \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt\end{aligned}$$

由于  $f(x)$  在  $R$  上是一个连续函数, 所以在  $[-\pi, \pi]$  上一致连续, 对于给定的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta \in (0, \pi)$ , 当  $0 \leq t < \delta$  时,

$$|f(x+t) - f(x)|, |f(x-t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

对所有的  $x \in [-\pi, \pi]$  成立。

因而  $\varphi_x(t) < \epsilon$  对所有的  $x \in [-\pi, \pi]$  成立。记

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\delta \varphi_x(t) \left( \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt, \\ I_2 &= \frac{1}{2n\pi} \int_\delta^\pi \varphi_x(t) \left( \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt.\end{aligned}$$

则

$$|I_1| \leq \frac{\epsilon}{2n\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt = \frac{\epsilon}{2}.$$

另外, 存在  $M$ , 使得  $|f(x)| \leq M$ 。于是  $|\varphi_x(t)| \leq 4M$ 。所以

$$|I_2| \leq \frac{1}{2n\pi} \int_\delta^\pi |\varphi_x(t)| \left( \frac{1}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \leq \frac{2M}{n \sin^2(\frac{\delta}{2})},$$

从而当  $n > \frac{4M}{\epsilon \sin^2(\frac{\delta}{2})}$  时,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq |I_1| + |I_2| < \epsilon,$$

即  $\sigma_n(x)$  一致逼近  $f(x)$ 。注意到  $\sigma_n(x)$  是一个  $n-1$  次三角多项式, 从而证明了定理。

#

**定理 2.9**  $f(x)$  的傅里叶级数依范数收敛到  $f(x)$ 。

**证明** 假设  $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ , 对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在光滑函数  $g(x)$ , 使得

$$\|f(x) - g(x)\|_{L^2} < \epsilon \quad (2.22)$$

设  $g_n(x)$  是  $g(x)$  的傅里叶级数的部分和, 在  $g_n(x)$  一致收敛到  $g(x)$ , 从而存在  $n_0$ , 当  $n > n_0$  时, 对任意的  $x \in [-\pi, \pi]$ , 都有  $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}}$ , 即

$$\|g_n(x) - g(x)\|_{L^2}^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\epsilon^2}{2\pi} dt = \epsilon^2,$$

所以当  $n > n_0$  时,

$$\|f - g_n\| = \|f - g + g - g_n\| \leq \|f - g\| + \|g - g_n\| < 2\epsilon$$

由于  $f_n(x)$  是  $f(x)$  在空间  $V_n$  的正交投影, 所以  $\|f - f_n\| \leq \|f - g_n\| < 2\epsilon$ , 即  $f_n(x)$  依范数收敛到  $f(x)$ . #

在傅里叶展开中, 我们将一个函数 (信号)  $f(x)$  表示成一个级数的形式, 这个级数完全由它的系数  $a_k$  和  $b_k$  确定。在物理中, 我们知道能量是守恒的。信号的  $L^2$  范数通常解释成信号的能量, 而级数的展开应该不会损失能量, 因此, 级数分解后的各个频率的能量和应该和原始能量相同。这个结果就是下面著名的 Parseval 等式。

**定理 2.10** Parseval 等式的实数形式: 设

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \in L^2[-\pi, \pi],$$

则

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2.$$

**定理 2.11** Parseval 等式的复数形式: 设

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx} \in L^2[-\pi, \pi],$$

则

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

进一步的, 对于  $L^2[-\pi, \pi]$  空间上的函数  $f(x)$  和  $g(x)$ , 其傅里叶级数的系数分别是  $\alpha_k$  和  $\beta_k$ , 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k}.$$

**证明** 我们这里只证明复数形式, 实数形式完全类似。令

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ikx},$$

$$g_N(x) = \sum_{k=-N}^N \beta_k e^{ikx},$$

分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的傅里叶级数的部分和。在 $L^2[\pi, -\pi]$ 上, 当 $N$ 趋向无穷的时候, 我们有 $f_N(x) \rightarrow f(x)$ ,  $g_N(x) \rightarrow g(x)$ 。从而有

$$\langle f_N(x), g_N(x) \rangle = \left\langle \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ikx}, \sum_{k=-N}^N \beta_k e^{ikx} \right\rangle = 2\pi \sum_{k=-N}^N \alpha_k \overline{\beta_k}.$$

另外:

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle - \langle f_N, g_N \rangle| &= |(\langle f, g \rangle - \langle f, g_N \rangle) + (\langle f, g_N \rangle - \langle f_N, g_N \rangle)|, \\ &= |\langle f, g - g_N \rangle + \langle f - f_N, g_N \rangle| \\ &\leq \|f\| \|g - g_N\| + \|f - f_N\| \|g_N\| \end{aligned}$$

由于在 $L^2$ 空间上,  $\|f_N - f\| \rightarrow 0$ ,  $\|g_N - g\| \rightarrow 0$ , 从而当 $N \rightarrow \infty$ 时, 上边不等式的右边收敛到0, 因此, 该定理得证。 #

**例 2.7** 设函数 $f(x) = x, \pi \leq x < \pi$ , 将它看出周期是 $2\pi$ 的函数展开成傅里叶级数为

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx).$$

利用Parseval等式得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

从而我们可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**例 2.8** 设函数 $f(x)$ 为锯齿波函数, 其傅里叶级数为

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((4k+2)x).$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且左右可导, 所以 $F(0) = f(0)$ , 从而可以得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

利用Parseval等式得

$$\frac{\pi^2}{8} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{6},$$

从而我们可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

## §2.4 傅里叶级数的进一步认识

这一节我们重新审视傅里叶级数。傅里叶级数的展开可以看成是一个变换：输入一个函数 $f(t)$ ，输出这个函数对应的傅里叶级数系数的序列 $\{\alpha_k\}$ 。这个变换的意义是什么呢？为了初步回答这个问题，我们首先介绍本书接下来会经常面对的对象——信号与信息。

信号是表示消息的物理量，是运载消息的工具，是消息的载体。从广义上讲，它包含光信号、声信号和电信号等。例如，古代人利用点燃烽火台而产生的滚滚狼烟，向远方军队传递敌人入侵的消息，这属于光信号；当我们说话时，声波传递到他人的耳朵，使他人了解我们的意图，这属于声信号；遨游太空的各种无线电波、四通八达的电话网中的电流等，都可以用来向远方表达各种消息，这属电信号。

信息则是表示对一个物理系统状态或特性的描述。著名科学家香农(Shannon)认为“信息是用来消除随机不确定性的东西”。而控制论创始人维纳(Wiener)认为“信息是人们在适应外部世界，并使这种适应反作用于外部世界的过程中，同外部世界进行互相交换的内容和名称”。从数学上讲，信号定义为一个或多个独立变量的函数，该函数含有物理系统的信息或表示物理系统状态或行为。人们通过对光、声、电信号进行接收，才知道对方要表达的消息，这就是信息。所以，信号分析与处理的一个根本任务是提取信息。

傅里叶级数和提取信息有什么关系呢？上面说到，从数学上，我们可以认为信号就是一个函数。一旦我们知道这个函数 $f(t)$ ，那么这个信号所包含的所有信息都应该知道。然而，即使我们知道一个函数在每一个点的值，并不等于我们了解这个函数。比如我们看下面这个例子。为了直观了解一个函数，我们给出这个函数的图像，如下图2.10所示。从这个图像中我们应该很难看出这个函数是什么。

但是如果我们将下面四个图像，应该知道每一个图像都是某个余弦函数。而事实上，图2.10中的信号就是图2.11中四个信号的和。虽然这两个图中的信号包含的信息完全一样，但是对我们而言，表示成图2.11的形式更加利于提取相应的信息。

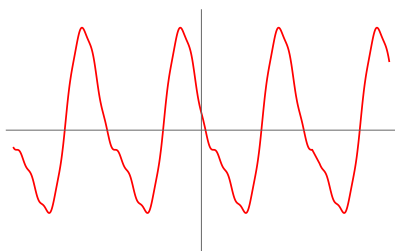


图 2.10 一个函数的图像

傅里叶级数理论告诉我们任意给定一个周期函数，在 $L^2$ 范数意义下，可以表示成一系列正弦和余弦函数的和。因此，给定一个固定区间 $[0, T]$ 上的一个函数（信号），首先我们对这个信号进行周期延拓，就可以得到一个周期为 $T$ 或者 $2T$ 的函数。由傅里叶级数理论，这个函数可以分解成一些谐波的和，其中第 $k$ 个谐波对应的系数 $\alpha_k$ 。则 $\{\alpha_k\}$ 包含了原始给定信号的所有信息。虽然，信号本身和系数序列 $\{\alpha_k\}$ 包含的信息是完全一样的，但是原本隐藏在函数中的一些信息可以通过系数序列得到。比如，系数 $\alpha_k$ 是复数，所以也可以用振幅和相位来表示这个系数。一般来说，振幅反映了该信号和第 $k$ 个谐波的相似性。这是直接从原始信号没有办法得到的信息。傅里叶级数的几何意义的示意图如图??所示。

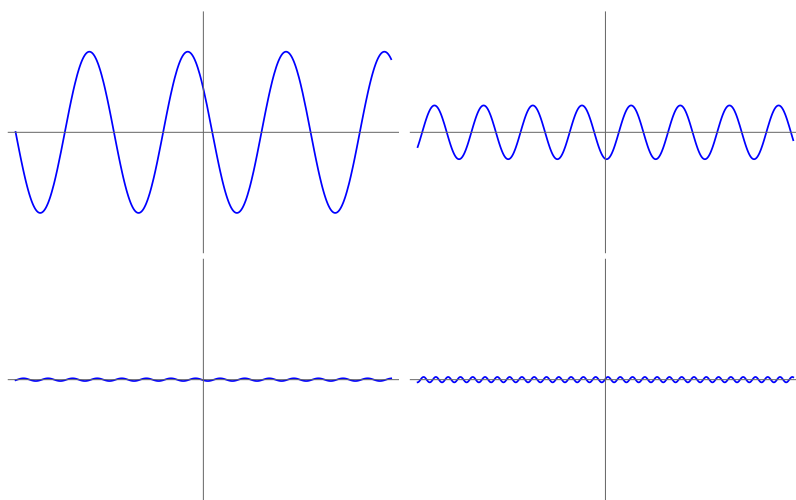


图 2.11 四个谐波函数的图像

然而，傅里叶级数有两个弊端，一个是它只能处理周期信号，另外一个它是它将

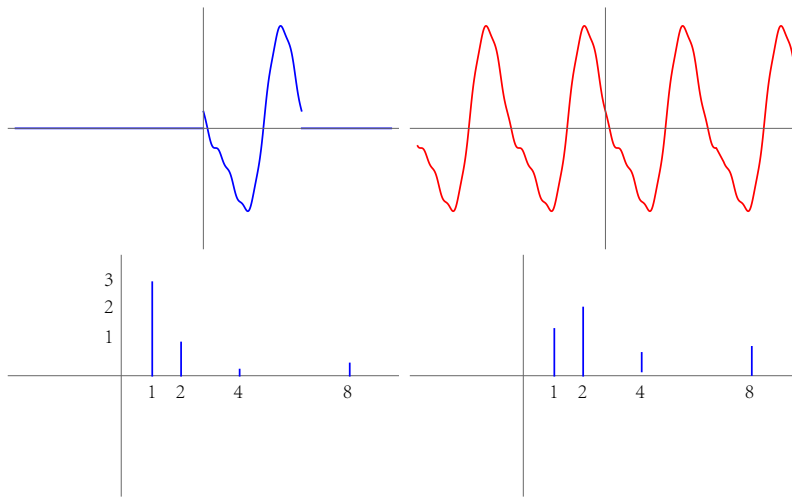


图 2.12 将一个周期函数表示成一些谐波的和。只需要傅里叶级数系数的振幅和相位的图像就可以表示恢复原始函数的图像。

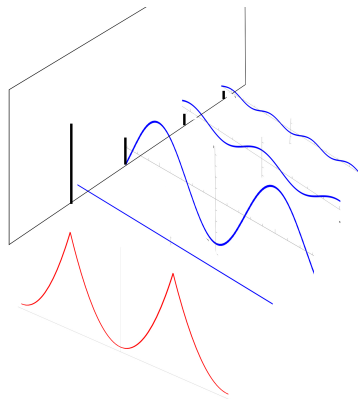


图 2.13 理解傅里叶级数示意图，红色曲线表示给定的函数，蓝色部分是将该函数表示对红色函数不同频率的分解，其系数显示在另外一个平面上。

一个连续的量变成了一个离散的系列。这两个弊端可以在下一章用同样的技术克服。

作业 2.1 1. 试证明引理2.1。

2. 给出任意区间的傅里叶系数计算公式的证明。

3. 试证明引理2.2。

4. 试证明定理2.3。

5. 如果 $f(t)$ 是一个实函数, 它的复的傅里叶级数的系数为 $\alpha_k$ , 它的实的傅里叶级数的系数是 $a_k, b_k$ , 试证明

$$\alpha_0 = a_0 \quad (2.23)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad (2.24)$$

6. 函数 $f(x)$ 定义如下

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 偶延拓到 $[-\pi, 0]$ 上并延伸成一个周期为 $2\pi$ 的周期函数就可以得到锯齿波, 试计算锯齿波的傅里叶级数展开。

7. 证明傅里叶部分和推导中最后一个等式。

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 其傅里叶级数的系数 $a_n, b_n$ , 则级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

收敛, 且

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \int_R f^2(x) dx$$

9. 求解下面的热力学方程:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), t > 0, 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x, 0) = x - x^2, 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$$



10. 求解下面的热力学方程:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), t > 0, 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 0) &= 2 - x^2, 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= 2, u(1, t) = 1 \end{aligned}$$

11. 证明

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2}, \quad (2.25)$$

并利用它证明

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

12. 证明:

$$\int_0^\pi \left( \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt = n\pi.$$

13. 针对例子2.3中的函数, 分析其傅里叶级数在间断点的Gibbs现象。

14. 证明定理2.6。

15. 证明: 如果 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上二阶可微, 则它的傅里叶级数一致收敛到它本身。

16. 给出文中傅里叶级数所对应的Parseval恒等式。



## 第三章 傅里叶变换

这一章详细讨论傅里叶变换和傅里叶逆变换。上一章介绍傅里叶级数可以看成将一个函数变成傅里叶系数所对应的数列的变换。傅里叶变换可以看成傅里叶级数的连续形式。它将一个函数分解成频率是 $\lambda$ 的函数，这里 $\lambda$ 可以是任意实数，甚至是复数。傅里叶变换本身具有很重要的意义，而且对后续小波变换的理解也非常重要。

### §3.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

傅里叶级数展开需要函数 $f(x)$ 是一个周期函数。然而，在实际应用中的信号一般都不是周期函数。我们一般会在函数 $f(x)$ 定义域中选择一个闭区间，然后将 $f(x)$ 的定义周期延拓到 $R$ 上。但是，一个自然的问题就是如何选择这样的闭区间，这个闭区间的选择对傅里叶级数的展开有什么影响。下面我们通过一个简单的例子来看看这个过程。

例 3.1 设

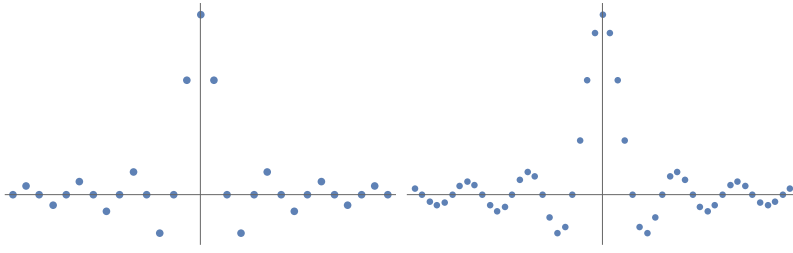
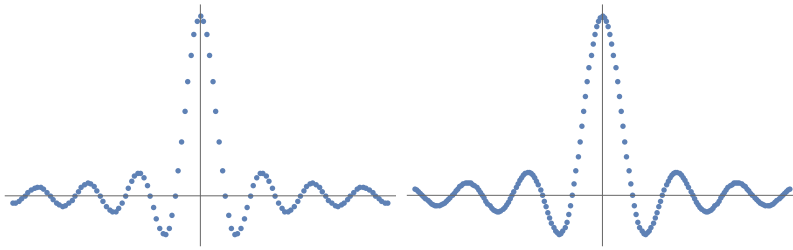
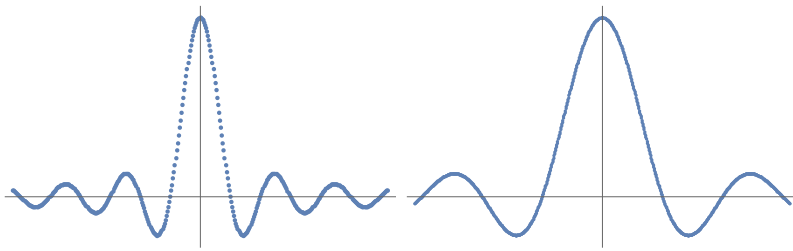
$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases},$$
$$f_T(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1; \\ 0, & [-T, -1] \cup [1, T]. \end{cases}.$$

由于 $f(x)$ 不是周期函数，我们可以将 $f(x)$ 延拓成周期是 $2T$ 的函数 $f_T(x)$ ，从而可以计算 $f_T(x)$ 展开成傅里叶级数的系数 $c_n^T$ 。不难计算

$$\begin{aligned} c_n^T &= \frac{1}{2T} \int_{-1}^1 e^{-iw_n^T x} dx \\ &= \frac{1}{T} \frac{\sin(w_n^T)}{w_n^T}, \end{aligned}$$

这里 $w_n^T = \frac{n\pi}{T}$ ， $c_0^T = \frac{1}{T}$ 。也许从这些数值上很难看出什么规律，下面给出不同的 $T$ 所对应的系数的图片。

上面六个图分别显示了 $T = 4$ ， $T = 8$ ， $T = 16$ ， $T = 32$ ， $T = 64$ 和 $T = 256$ 是系数的图片。我们可以很容易发现虽然 $f_T(x)$ 对于不同的 $T$ 周期不一样，但是这些函数展开成傅里叶级数后的系数形成的图像却几乎一样。注意到，令一个周期函数的周期趋向无穷时，这个函数就会趋向一个非周期函数，即当 $T$ 趋向无穷时， $f_T(x)$ 就趋向 $f(x)$ 。所以，研究周期是无穷的傅里叶级数的系数应该可以给出傅里叶级数内蕴的一些性质。

图 3.1  $T = 4$ 和 $T = 8$ 图 3.2  $T = 16$ 和 $T = 32$ 图 3.3  $T = 64$ 和 $T = 256$

现在从傅里叶级数出发, 让函数的周期 $T$ 趋向无穷, 我们看看会发生什么. 假设给定一个周期为 $2T$ 的周期函数 $f(x)$ , 则 $f(x)$ 可以展开成如下的傅里叶级数形式:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{i \frac{k\pi x}{T}} \quad (3.1)$$

其中,

$$\alpha_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i \frac{k\pi t}{T}} dt \quad (3.2)$$

令 $T$ 趋向无穷, 将 $\alpha_k$ 代入前面的和式, 得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i \frac{k\pi t}{T}} dt \right) e^{i \frac{k\pi x}{T}} \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{i \frac{k\pi(x-t)}{T}} dt \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

我们希望将右边的和式写成积分的黎曼和的形式. 所以, 令 $\lambda_k = \frac{k\pi}{T}$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\pi}{T}$ , 有

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{i \frac{k\pi(x-t)}{T}} dt \right] \Delta\lambda \quad (3.4)$$

令

$$F_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{i \frac{k\pi(x-t)}{T}} dt,$$

则

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_T(\lambda) \Delta\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_T(\lambda) d\lambda. \quad (3.5)$$

另一方面, 当 $T \rightarrow \infty$ ,  $F_T(\lambda)$ 即为积分 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i \frac{k\pi(x-t)}{T}} dt$ , 因此有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda.$$

记

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

称之为函数 $f(t)$ 的傅里叶变换. 在本书中, 我们有时也会用一个新的记号

$$\mathfrak{F}[f](\lambda) = \hat{f}(\lambda).$$

傅里叶变换的计算是具有非常明确的几何意义。假设 $f(t)$ 是一个实值函数，固定 $\lambda$ ，记

$$x_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(t) \cos \lambda t, y_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(t) \sin \lambda t,$$

则 $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ 对应参数 $t$ 的一条参数曲线。

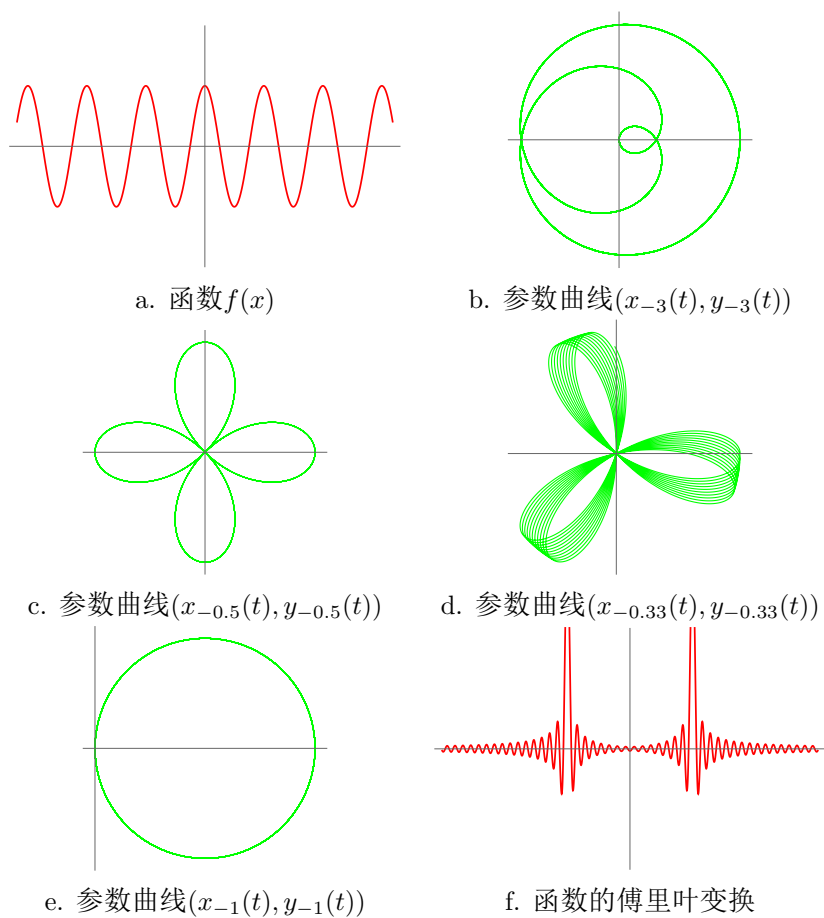


图 3.4 余弦函数和它对应参数曲线在 $\lambda = 3$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 0.33$ ,  $\lambda = 1$ 的图像，最后一个图是它的傅里叶变换的图像。

注意到傅里叶变换可以写成

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{-\lambda}(t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} y_{-\lambda}(t) dt\end{aligned}$$

即傅里叶变换的实部和虚部正比于参数曲线 $(x_{-\lambda}(t), y_{-\lambda}(t))$ 围成区域的重心的 $x$ 和 $y$ 坐标。为了进一步说明这个想法，这里给出一个例子。图3.4给了一个函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -100 \leq x \leq 100; \\ 0, & \text{else.} \end{cases},$$

它对应参数曲线在 $\lambda = 3$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 0.33$ ,  $\lambda = 1$ 的图像如图3.4b-e所示，最后一个图是它的傅里叶变换的图像。可以看出，在 $\lambda = 1$ 时，它对应的重心离原点的距离最大，即它的傅里叶变换的模在 $\lambda = 1$ 时最大。

下面给出几个傅里叶变换的例子。

**例 3.2** 计算图3.5给出的矩形波的傅里叶变换：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x \leq \pi; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

将函数代入傅里叶变换公式得到

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \lambda x \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin \lambda \pi}{\sqrt{\pi} \lambda}\end{aligned}\tag{3.6}$$

傅里叶变换图像如图3.5所示。如上所述，傅里叶变换 $\hat{f}(\lambda)$ 代表了频率 $\lambda$ 的分量。在这个例子中， $f(x)$ 是分段常值函数，而常值函数代表的频率是0，因此 $\hat{f}(\lambda)$ 的最大值出现在 $\lambda = 0$ 附近。

**例 3.3** 计算图3.6给出的矩形波的傅里叶变换：

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & -\pi \leq x \leq \pi; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

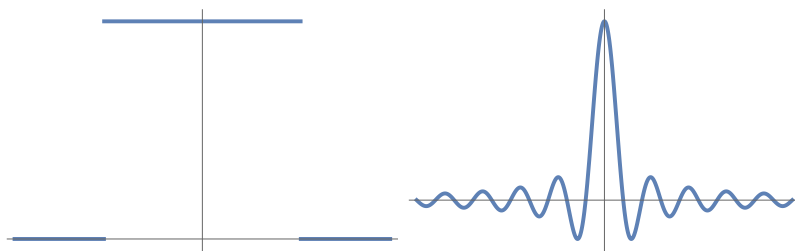


图 3.5 矩形波和它的傅里叶变换对应的图像

将函数代入傅里叶变换公式得到

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2x \cos \lambda x \\
 &= \frac{\sqrt{2} \sin \lambda \pi}{\sqrt{\pi}(4 - \lambda^2)}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

傅里叶变换图像如图 3.6 所示。

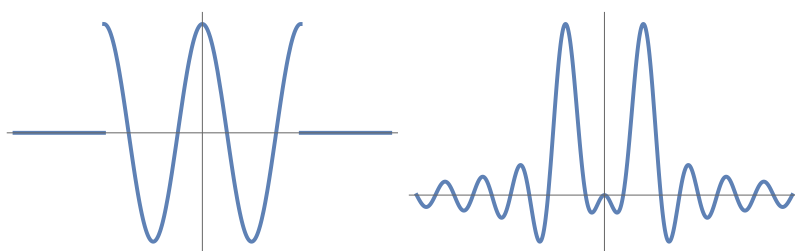


图 3.6 分段余弦函数和它的傅里叶变换对应的图像

**例 3.4** 计算图 3.7 给出的矩形波的傅里叶变换:

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & -\pi \leq x \leq \pi; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$



将函数代入傅里叶变换公式得到

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} i \sin 2x \sin \lambda x \\ &= \frac{-2\sqrt{2}i \sin \lambda\pi}{\sqrt{\pi}(4-\lambda^2)}\end{aligned}\quad (3.8)$$

由于这里得到的傅里叶变换是一个纯虚数，所以我们下面画出的图像是这个函数乘以 $-i$ 得到的图像，如图3.7所示。同样，傅里叶变换 $\hat{f}(\lambda)$ 代表了频率 $\lambda$ 的分量。在

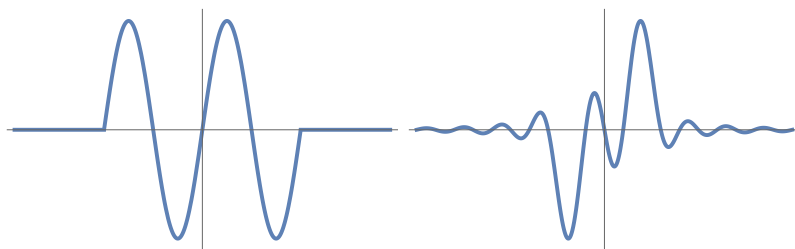


图 3.7 分段正弦函数和它的傅里叶变换对应的图像

这两个例子中， $f(x)$ 是分段余弦（正弦）函数，它所代表的频率是 $2$ ，因此 $\hat{f}(\lambda)$ 的最大值出现在 $\lambda = 2, -2$ 附近。

**例 3.5** 计算图3.8给出的三角波的傅里叶变换： $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi \leq x \leq 0; \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$

将函数代入傅里叶变换公式得到

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{e^{-i\pi t} (-1 + e^{i\pi t})^2}{\sqrt{2\pi}t^2}\end{aligned}\quad (3.9)$$

这个傅里叶变换的详细计算作为作业。傅里叶变换图像如图3.8所示。注意到，在这个例子中， $f(x)$ 是一个连续函数，它所对应的傅里叶变换 $\hat{f}(\lambda)$ 会更快的趋向零。

**例 3.6** 计算

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}\quad (3.10)$$

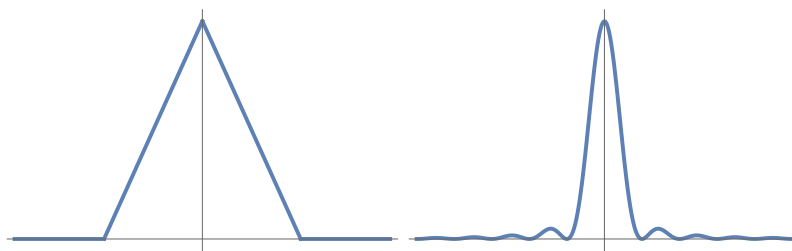


图 3.8 三角波函数和它的傅里叶变换对应的图像

的傅里叶变换。

将函数代入傅里叶变换公式得到

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1-x^2)e^{-i\lambda x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} (1-x^2) \Big|_{x=-1}^1 - \frac{2}{i\lambda} \int_{-1}^1 x e^{-i\lambda x} dx \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{i\lambda} \left( \frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} x \Big|_{x=-1}^1 + \frac{1}{i\lambda} \int_{-1}^1 e^{-i\lambda x} dx \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{i\lambda} \left( \frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} \left( x + \frac{1}{i\lambda} \right) \Big|_{x=-1}^1 \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{i\lambda} \left( \frac{e^{-i\lambda} \left( 1 + \frac{1}{i\lambda} \right) - e^{i\lambda} \left( -1 + \frac{1}{i\lambda} \right)}{-i\lambda} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{4 \cos \lambda}{\lambda^2} - \frac{4 \sin \lambda}{\lambda^3} \right)
 \end{aligned}$$

傅里叶变换图像如图3.9所示。

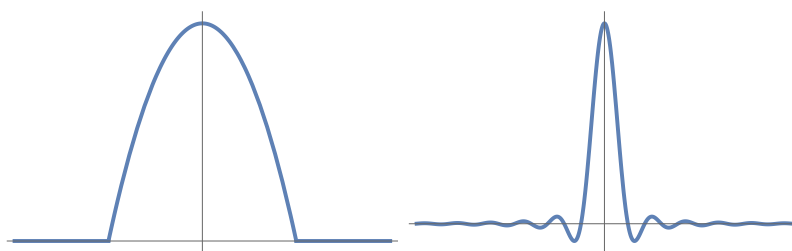


图 3.9 分段二次函数和它的傅里叶变换对应的图像

例 3.7 计算  $e^{-ax^2}$  的傅里叶变换  $g(\lambda)$ 。

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(ax^2+i\lambda x)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+\frac{i\lambda}{2a})^2 - \frac{\lambda^2}{4a}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{a}x + \frac{i\lambda}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{a}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{a\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \end{aligned}$$

在上面的推导中, 由  $f(x)$  的定义知

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

即  $f(x)$  可以表示成傅里叶变换  $\hat{f}(\lambda)$  的积分形式, 这个称为傅里叶逆变换,

$$\mathfrak{F}^{-1}[\mathfrak{F}[f]] = f$$

这个论述的严格描述可以概括为下面的定理。

定理 3.1 如果  $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$ , 则

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

证明 利用  $\hat{f}(\lambda)$  的表达式可得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda$$

由于  $f(t)e^{i\lambda(x-t)}$  在  $\mathbb{R}^2$  上不可积, 不能直接用 Fubini 定理, 所以, 我们用  $e^{-\frac{\epsilon^2 \lambda^2}{4}}$  去乘以  $f(t)e^{i\lambda(x-t)}$ 。注意到当  $\epsilon$  趋向 0 时,  $e^{-\frac{\epsilon^2 \lambda^2}{4}}$  趋向 1。定义

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{\epsilon^2 \lambda^2}{4}} e^{i\lambda(x-t)} dt \right) d\lambda \quad (3.11)$$

利用Fubini定理, 我们采用两种不同的方法计算 $I_\epsilon(x)$ 。将上式对 $t$ 求积分得到

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{-\frac{\epsilon^2 \lambda^2}{4}} e^{i\lambda x} d\lambda \quad (3.12)$$

因为 $|\hat{f}(\lambda) e^{-\frac{\epsilon^2 \lambda^2}{4}} e^{i\lambda x}| \leq |\hat{f}(\lambda)|$ , 而且 $\hat{f}(\lambda)$ 可积, 应用控制收敛定理可得

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (3.13)$$

另一方面, 应用Fubini定理对 $\lambda$ 积分可得

$$I_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(x-t) f(t) dt \quad (3.14)$$

其中 $g_\epsilon(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\lambda} e^{-\frac{\epsilon^2 \lambda^2}{4}} d\lambda$ 。由例子3.7可知:

$$g_\epsilon(u) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\epsilon^2}}.$$

从而,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |I_\epsilon(x) - f(x)| dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int g_\epsilon(x-t) |f(x) - f(t)| dx dt = 0$$

再利用式子3.13即可证明定理。 #

### §3.2 频谱的意义

在傅里叶变换中, 最重要的贡献是引入了频谱 $\lambda$ 。后来发现, 在自然界中, 频谱是一个大家共同的属性。

复色光中有着各种波长(或频率)的光, 这些光在介质中有着不同的折射率。因此, 当复色光通过具有一定几何外形的介质(如三棱镜)之后, 波长不同的光线会因出射角的不同而发生色散现象, 投射出连续的或不连续的彩色光带。光带的颜色表示其频率, 而明暗可表示其比例的多寡, 这就是光的频谱, 一般称为光谱。这个原理亦被应用于著名的太阳光的色散实验, 如图 3.10所示。太阳光呈现白色, 当它通过三棱镜折射后, 将形成由红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫顺次连续分布的彩色光谱, 覆盖了大约在390到770纳米的可见光区。历史上, 这一实验由英国科学家牛顿爵士于1665年完成, 使得人们第一次接触到了光的客观的和定量的特征。

声音是由物体振动产生的声波, 是通过介质(空气或固体、液体)传播并能被人或动物听觉器官所感知的波动现象。最初发出振动的物体叫声源。声音以波形的形

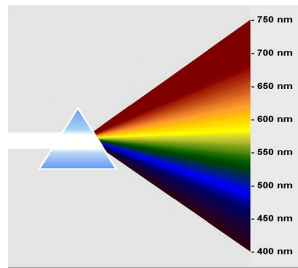


图 3.10 白光分解成光谱。

式振动传播。作为波的一种，频率和振幅是描述声音的重要属性。频率的大小与我们通常所说的音高对应，而振幅影响声音的大小。傅里叶级数理论告诉我们，任何周期函数，都可以看作是不同振幅，不同相位正弦波的叠加。对于声音而言，这个结论我们可以理解为：利用对不同琴键不同力度，不同时间点的敲击，可以组合出任何一首乐曲。

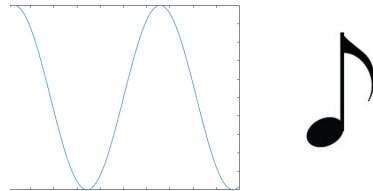


图 3.11 声音和五线谱。

在广播及通信的领域中，频谱会由许多不同的信号来源共享。每个广播电台及电视台所传送信号的频率均需在各自己指定的范围内，称为“信道”。任何一个广播接收器只能接收单一信道的信号，因此会使用某种电路来选择单一的信道或频率范围，然后将接收到的信息解调制，得到需要的信息。当许多广播同时发送信号时，各个信道上有各自独立的信息，广播的频谱即为所有个别信道信号的总和，分布在很广的频率范围内。

我们常见的二维图像也可以在频谱中表示。图像的频率是表征图像中灰度变化剧烈程度的指标，是灰度在平面空间上的梯度。如：大面积的沙漠在图像中是一片灰度变化缓慢的区域，对应的频率值很低；而对于地表属性变换剧烈的边缘区域在图像中是一片灰度变化剧烈的区域，对应的频率值较高。对于图像而言，傅立叶变换的物理意义是将图像的灰度分布函数变换为图像的频率分布函数，傅立叶逆变换是将图像的频率分布函数变换为灰度分布函数。我们首先就可以看出，图像的

能量分布,如果频谱图中暗的点数更多,那么实际图像是比较柔和的(因为各点与邻域差异都不大,梯度相对较小),反之,如果频谱图中亮的点数多,那么实际图像一定是尖锐的,边界分明且边界两边像素差异较大的。

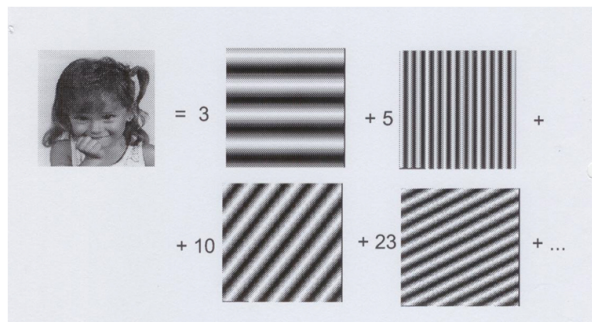


图 3.12 将图像表示成一系列标准图像的和。

可以看出,我们的世界是一个随时间变化的动态世界。世间万物的运动都在随着时间不停的变化,我们可以用一个随时间变换的函数来描述这种运动,这种以时间作为参照来观察动态世界的方法我们称其为时域分析。在有些运动中,比如太阳系中行星的运动,钟摆的摆动,发球器发出球的轨迹等等,可以给出他们运动规律的精确函数表述。另一方面,有些运动却只能给出它们在一些离散时间点的信息,比如股票的走势、不同人身高的变化、在拥挤路面上汽车运动的轨迹都会随着时间发生改变。但是这些运动很难给出函数的精确描述。这一章告诉我们,还存在另外一种描述方法,在不改变时域分析的信息的情况下,可以提供一种新的观察世界的方法,这个方法就是频谱分析。

频谱是指一个时域的信号在频域下的表示方式,可以针对信号进行傅里叶变换而得。许多物理信号均可以表示为许多不同频率简单信号的和。找出一个信号在不同频率下的信息(可能是幅度、功率、强度或相位等)的作法就是频谱分析。频谱分析所得的结果一般可以用变换后关于频率的振幅和相位的函数来表示,分别称为“振幅频谱”和“相位频谱”。频谱分析可以对整个信号进行,也可以将信号分割成几段,再针对各段的信号进行频谱分析。大部分的仪器及软件都用傅里叶变换来产生频谱的信号。一个函数的傅里叶变换包括了原始信号中的所有信息,只是表示的形式不同,因此可以用傅里叶逆变换来重建原始的信号。

### §3.3 傅里叶变换的性质

下面给出傅里叶变换和傅里叶逆变换的部分性质,在这些性质中,我们都假设

函数 $f$ 和 $g$ 都是定义在实轴上的可微函数,而且对于足够大的 $|t|$ ,有 $f(t) = g(t) = 0$ 。

首先给出傅里叶变换的基本性质。

1. 傅里叶变换是 $L^1(R)$ 到 $L^\infty(R)$ 的有界线性算子;
2. 如果 $f \in L^1(R)$ ,那么 $\hat{f}(\lambda)$ 在 $R$ 上一致连续;
3. 如果 $f \in L^1(R)$ ,那么 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$ 。

这三个性质的证明都留作作为作业。其中第三个性质的证明和Riemann引理的证明非常类似。

注意到,给定一个函数 $f(t) \in L^1(R)$ ,它的傅里叶变换

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt \\ &\doteq R(\lambda) - I(\lambda)i\end{aligned}$$

记 $|\mathfrak{F}[f](\lambda)| = \sqrt{R^2(\lambda) + I^2(\lambda)}$ ,它被称为傅里叶变换的振幅, $\varphi(\lambda) = \arctan\left(\frac{I(\lambda)}{R(\lambda)}\right)$ ,它被称为傅里叶变换的相位。如果 $f(t)$ 是一个实值函数,则

$$R(-\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\lambda t) dt = R(\lambda)$$

$$I(-\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(-\lambda t) dt = -I(\lambda)$$

所以,振幅是一个偶函数,而相位是一个奇函数。进一步的,如果 $f(t)$ 是一个实的偶函数,则 $I(\lambda) = 0$ ,从而它的傅里叶变换就是一个实的偶函数。如果 $f(t)$ 是一个实的奇函数,则 $R(\lambda) = 0$ ,从而它的傅里叶变换就是一个纯虚的奇函数。同样,如果 $f(t)$ 是一个纯虚函数,则

$$R(-\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(-\lambda t) dt = -R(\lambda)$$

$$I(-\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\lambda t) dt = I(\lambda)$$

即振幅是一个奇函数,而相位是一个偶函数。

下面给出傅里叶变换的运算性质。

1. 傅里叶变换和逆变换是线性算子, 即对任意的常数  $c$ , 有

$$\mathfrak{F}[f + g] = \mathfrak{F}[f] + \mathfrak{F}[g], \mathfrak{F}[cf] = c\mathfrak{F}[f]$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[f + g] = \mathfrak{F}^{-1}[f] + \mathfrak{F}^{-1}[g], \mathfrak{F}^{-1}[cf] = c\mathfrak{F}^{-1}[f]$$

2. 傅里叶变换的导数和导数的傅里叶变换:

**定理 3.2** (a) 设  $f(x), xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 则  $\mathfrak{F}[f](\lambda)$  可微, 并且

$$\mathfrak{F}[xf(x)](\lambda) = i\mathfrak{F}[f]'(\lambda).$$

(b) 如果  $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 在任何有界闭区间上绝对连续, 且  $f'(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 则

$$\mathfrak{F}[f'(x)](\lambda) = i\lambda\mathfrak{F}[f(x)](\lambda)$$

**证明** (a) 考虑差商

$$\frac{\hat{f}(\lambda + h) - \hat{f}(\lambda)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left( \frac{e^{-ixh} - 1}{h} \right) e^{-ix\lambda} dx \quad (3.15)$$

从而有不等式

$$\left| f(x) \left( \frac{e^{-ixh} - 1}{h} \right) \right| \leq |x||f(x)| \in L^1(\mathbb{R}),$$

而且

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) \left( \frac{e^{-ixh} - 1}{h} \right) = -ixf(x).$$

在式子3.15中, 令  $h$  趋于0并由控制收敛定理有

$$\mathfrak{F}[f]'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)(-ix)e^{-i\lambda x} dx = -i\mathfrak{F}[xf(x)](\lambda).$$

(b) 因为  $f(x)$  和  $e^{-i\lambda x}$  绝对连续, 且  $f'(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可积, 所以对任意的  $A > 0, B > 0$ , 由分部积分得

$$\int_{-B}^A f'(x)e^{-i\lambda x} dx = f(x)e^{-i\lambda x} \Big|_{-B}^A + i\lambda \int_{-B}^A f(x)e^{-i\lambda x} dx$$

下面证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



由于 $f(x)$ 在任何有界闭区间上绝对连续, 所以有

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(u) du$$

又 $f'(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 所以存在 $c_1, c_2$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c_1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c_2$$

下面证明 $c_1 = 0$ 。否则, 不妨设 $c_1 > 0$ , 则存在 $A$ , 使得当 $x > A$ ,  $f(x) > \frac{c_1}{2}$ , 从而当 $N > A$ , 有

$$\int_A^N f(x) dx \geq \frac{c_1}{2}(N - A) \rightarrow +\infty,$$

这个和 $f$ 可积矛盾。同理可证明 $c_2 = 0$ 。这样就证明了这个定理。

#

3. 傅里叶变换的高阶导数和高阶导数的傅里叶变换成立的条件可以直接从第二个性质得到, 这里只是给出计算公式而略去条件和证明。

$$\mathfrak{F}[t^n f(t)](\lambda) = i^n \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \mathfrak{F}[f](\lambda)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[\lambda^n f(\lambda)](t) = i^n \frac{d^n}{dt^n} \mathfrak{F}^{-1}[f](t)$$

4. 导数的傅里叶变换:

$$\mathfrak{F}[f^{(n)}(t)](\lambda) = (i\lambda)^n \mathfrak{F}[f](\lambda)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[f^{(n)}(\lambda)](t) = (-it)^n \mathfrak{F}^{-1}[f](t)$$

下面给出的几个性质和傅里叶变换在工程上的应用以及对傅里叶变换的理解息息相关。

- 时移和频移性:

$$\mathfrak{F}[f(t - a)](\lambda) = e^{-i\lambda a} \mathfrak{F}[f](\lambda),$$

$$\mathfrak{F}[e^{iat} f(t)](\lambda) = \mathfrak{F}[f](\lambda - a).$$

**证明** 对于第一个式子,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f(t-a)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda(t+a)} dt \\ &= e^{-i\lambda a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt = e^{-i\lambda a} \mathfrak{F}[f](\lambda)\end{aligned}$$

对于第二个式子,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[e^{iat}f(t)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iat}e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\lambda-a)t} dt \\ &= \mathfrak{F}[f](\lambda-a)\end{aligned}$$

#

从这个公式可以看出,时间的延迟对应到频率的移相。就是说,时间的延迟不会改变信号在频率域的振幅,只是在它对应的相位上移动一个和频率相关的角度。频移特性产生频谱的搬移,也称为调制特性。由

$$\mathfrak{F}[f(t)\cos(\lambda_0 t)] = \mathfrak{F}\left[f(t)\frac{e^{i\lambda_0 t} + e^{-i\lambda_0 t}}{2}\right] = \frac{\mathfrak{F}[f](\lambda - \lambda_0) + \mathfrak{F}[f](\lambda + \lambda_0)}{2},$$

$$\mathfrak{F}[f(t)\sin(\lambda_0 t)] = \mathfrak{F}\left[f(t)\frac{e^{i\lambda_0 t} - e^{-i\lambda_0 t}}{2}\right] = \frac{\mathfrak{F}[f](\lambda - \lambda_0) - \mathfrak{F}[f](\lambda + \lambda_0)}{2},$$

知幅度调制是将信号乘以一高频的正弦或者余弦信号,该过程在时域中表现为信号改变了正弦或余弦信号的幅度,在频域中则使的频谱产生搬移。在幅度调制中,将携带信息的信号称为调制信号,高频的正弦或余弦信号称为载波,两者相乘的信号称为已调信号。

**例 3.8** 以三角波为例来看一下这个性质,其中三角波的定义如下

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi \leq x \leq 0; \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

它的傅里叶变换图像如图3.8所示。现在来考虑时移函数 $g(x) = f(x-3)$ 和调制函数 $h(x) = f(x)\cos(\lambda x)$ 的傅里叶变换。对于函数 $g(x)$ ,我们知道时间的移动对应于傅里叶变换的频率的相位的移动,其实部,虚部和振幅的图像如图3.13所示。对于函数 $h(x)$ ,由上面的分析可知,其傅里叶变换是将原来的傅里叶变换在频率域平移,其中 $\lambda = 3$ 和 $\lambda = 7$ 对应的图像如下图3.14所示。

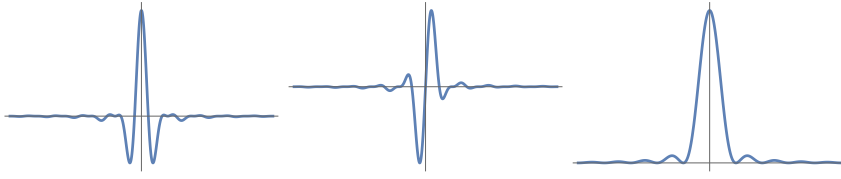


图 3.13 三角波在时间上的平移后的傅里叶变换，上图分别是实部，虚部和振幅对应的图像

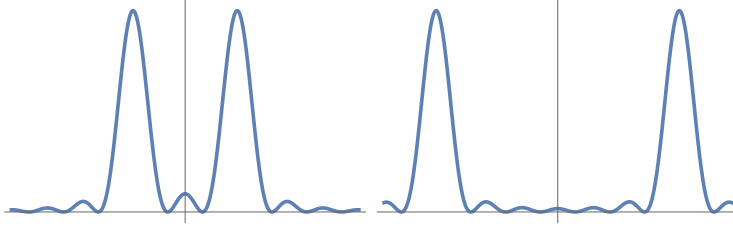


图 3.14 三角波调频后的傅里叶变换，上图分别是 $\lambda = 3$ 和 $\lambda = 7$ 对应的图像

- 尺度变换:

$$\mathfrak{F}[f(bt)](\lambda) = \frac{1}{|b|} \mathfrak{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right), b \neq 0.$$

**证明** 如果 $b > 0$ , 则

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f(bt)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(bt)e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t/b} \frac{1}{b} dt \\ &= \frac{1}{b} \mathfrak{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right) \end{aligned}$$

同理, 如果 $b < 0$ , 则

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f(bt)](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(bt)e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(t)e^{-i\lambda t/b} \frac{1}{b} dt \\ &= \frac{1}{-b} \mathfrak{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right) \end{aligned}$$

从而, 命题成立。 #

**说明 3.1** 对于尺度变换的性质, 我们需要理解信号  $f(x)$  和  $f(bx)$  之间的关系。不妨设  $b > 1$ , 如果我们对信号在时域和频域进行测量, 测量的精度有限。那么信号  $f(bx)$  在时域中的测量精度比信号  $f(x)$  要高。然而, 有尺度变换的性质可知, 信号  $f(bx)$  的傅里叶变换在频域中的测量的精度就会比  $f(x)$  的傅里叶变换低。换句话说就是不可能在时域和频域都达到很高的精度, 这事实上就是后面要讲的测不准原理。

**例 3.9** 还是以三角波为例来看一下这个性质, 假设  $f(x)$  是三角波。现在来考虑  $g(x) = f(bx)$  的傅里叶变换, 其中  $b = 3$  和  $b = \frac{1}{3}$  对应的图像如下图 3.15 所示。

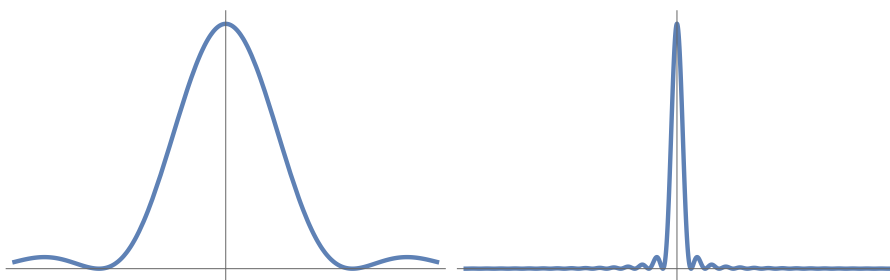


图 3.15 三角波在尺度变换下的傅里叶变换, 上图分别是  $b = 3$  和  $b = \frac{1}{3}$  对应的图像

• 卷积定理:

**定义 3.1** 设  $f(t)$  和  $g(t)$  是  $R$  上的两个函数, 如果积分

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

存在, 称其为  $f$  和  $g$  的卷积。

**例 3.10** 求下面两个函数的卷积:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-\alpha t}, & t \geq 0. \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

这里  $\alpha, \beta > 0, \alpha \neq \beta$ 。

如果  $t \leq 0$ ,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$$

在这个积分中, 由于 $x$ 和 $t-x$ 至少有一个不大于零, 从而 $f_1(x)f_2(t-x) = 0$ , 即

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如果 $t > 0$ , 由卷积的定义可知:

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx \\ &= \left( \int_{-\infty}^0 + \int_0^t + \int_t^{\infty} \right) f_1(x)f_2(t-x)dx \\ &= \int_0^t e^{-\alpha x} e^{-\beta(t-x)} dx \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

**定理 3.3** 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , 则 $(f * g)(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 满足

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

且

$$\mathfrak{F}[f * g](\lambda) = \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}[f](\lambda) \mathfrak{F}[g](\lambda)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f\hat{g}}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g$$

**证明**

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \right| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-x)| dt dx \\ &= \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

从而,  $(f * g)(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 且 $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ 。

根据卷积和傅里叶变换的定义,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f * g](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f * g(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) g(x) dx e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) e^{-i\lambda(t-x)} g(x) dt e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} g(x) dt e^{-i\lambda x} dx \\ &= \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}[f](\lambda) \mathfrak{F}[g](\lambda)\end{aligned}$$

第二个式子可以利用傅里叶变换的逆变换公式即可。

#

- Parseval和Plancherel等式:

**定理 3.4** 设  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , 则

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

特别的, 如果  $g = f$ , 则得到 *Plancherel* 等式:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

**证明** 令  $G(t) = \overline{g(-t)}$ ,  $h = f * G$ , 则  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , 由卷积性质有

$$\hat{h}(\lambda) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\lambda) \hat{G}(\lambda)$$

将傅里叶逆变换应用到  $\hat{h}$ , 并计算  $h(0)$ , 有

$$\langle f, g \rangle = h(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\lambda) d\lambda = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

特别的, 如果我们取  $g(t) = f(t)$ , 就可以得到 *Plancherel* 等式。

#

- 函数的正则性:

**定理 3.5** 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda)| (1 + |\lambda|^p) d\lambda < \infty,$$

则  $f$  及其直到  $p$  次导数连续有界。

**证明**  $p = 0$ 的情形就是作业1的结果。对于 $p = 1$ , 注意到

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) \left( \frac{e^{-i\lambda h} - 1}{h} \right) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (3.17)$$

由于

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) \left( \frac{e^{-i\lambda h} - 1}{h} \right) d\lambda \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)| (1 + |\lambda|) d\lambda < \infty,$$

从而上式的右端可积。令 $h$ 趋向0, 可得上式的左边是 $f'(x)$ , 即 $f(x)$ 可微, 并且

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)| |\lambda| d\lambda < \infty.$$

对于 $p > 1$ , 首先通过归纳可以证明 $f$ 的 $p-1$ 阶导都存在, 且连续有界。对于 $p$ 阶导, 在式子3.17中将 $f(x)$ 换成 $f^{(p-1)}(x)$ 并利用导数的傅里叶变换公式即可同理证明其 $p$ 阶导存在且连续有界。 #

作为这一节的总结, 这里给出前面给出的傅里叶性质的一个总览:

性质	函数 $f(t)$	傅里叶变换 $\widehat{f}(\lambda)$
逆变换	$\widehat{\widehat{f}}(t)$	$f(-\lambda)$
卷积	$f_1 * f_2(t)$	$\sqrt{2\pi} \widehat{f}_1(\lambda) \widehat{f}_2(\lambda)$
乘积	$f_1 f_2(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_1 * \widehat{f}_2(\lambda)$
平移	$f(t-a)$	$e^{-ia\lambda} \widehat{f}(\lambda)$
调制	$e^{i\lambda_0 t} f(t)$	$\widehat{f}(\lambda - \lambda_0)$
尺度	$f(bt)$	$\frac{1}{ b } \widehat{\mathfrak{F}}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right)$
时域求导	$f^k(t)$	$(i\lambda)^k \widehat{f}(\lambda)$
频域求导	$(-it)^k f(t)$	$\widehat{f}^k(\lambda)$

### §3.4 $L^2$ 上的傅里叶变换

如果 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 但是 $f \notin L^1(\mathbb{R})$ , 则 $f$ 的傅里叶变换不能用前一节的公式来计算, 因为 $f(x)e^{-i\lambda t}$ 可能不可积。然而, 正如绪论中说的, 傅里叶变换和小波变换面对的对象是在 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中。所以, 我们需要建立理论来计算 $L^2(\mathbb{R})$ 中的傅里叶变换。这里关键的想法是利用 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 中的函数的傅里叶变换的极限来定义 $f$ 的傅里叶变换。

因为连续函数空间在 $L^1(R)$ 和 $L^2(R)$ 中都稠密, 所以空间 $L^1(R) \cap L^2(R)$ 在 $L^2(R)$ 中稠密. 因此可以找到 $L^1(R) \cap L^2(R)$ 中收敛到 $f$ 的函数类 $\{f_n, n = 1, \dots, \infty\}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0.$$

由于 $\{f_n, n = 1, \dots, \infty\}$ 收敛, 所以 $\{f_n, n = 1, \dots, \infty\}$ 也是一个Cauchy序列, 这就意味着当 $m, n$ 足够大的时候,  $\|f_m - f_n\|$ 可以任意小. 另外,  $f_n \in L^1(R)$ , 所以可以定义 $f_n$ 的傅里叶变换 $\widehat{f}_n(\lambda)$ .

另外, 由Plancherel等式,

$$\|\widehat{f}_n(\lambda) - \widehat{f}_m(\lambda)\| = \|f_n - f_m\|,$$

可知 $\widehat{f}_n(\lambda)$ 也是一个Cauchy列. 由Hilbert空间的完备性知, 所有的Cauchy列收敛到该空间的一个元素. 因此, 存在 $\widehat{f}(\lambda) \in L^2(R)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_{L^2} = 0.$$

$\widehat{f}$ 被定义为 $f$ 的傅里叶变换.

注意到当傅里叶变换扩充到 $L^2(R)$ 后, Parseval等式, Plancherel等式, 卷积定理都成立. 但是, 对于卷积定理, 这里有些不同的地方. 首先我们给出下面的定理.

**定理 3.6** 如果 $f(x), g(x) \in L^2(R)$ , 则

$$\mathfrak{F}[f(x)g(x)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f} * \widehat{g})(\lambda)$$

**证明** 设 $\lambda$ 固定, 记 $h(x) = \overline{g(x)}e^{i\lambda x}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \widehat{h}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \overline{g(x)} e^{i\lambda x} e^{-iux} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \overline{g(x) e^{-i(\lambda-u)x}} dx \\ &= \overline{\widehat{g}(\lambda - u)} \end{aligned}$$



因为  $(fg) \in L^1(\mathbb{R})$ , 从而

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\widehat{h}(x)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\overline{\widehat{h}(u)} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\widehat{g}(\lambda - u) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\widehat{f} * \widehat{g})(\lambda)\end{aligned}$$

#

在上面的定理中, 我们只讨论了函数  $f(x)g(x)$  的傅里叶变换, 这是因为  $f(x)g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 所以我们可以定义它的傅里叶变换。但是, 即使  $f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 我们不能得到  $f(x)*g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 从而不能讨论  $f(x)*g(x)$  的傅里叶变换。但是如果  $f$  和  $g$  至少有一个是在  $L^1(\mathbb{R})$  的时候,  $f(x)*g(x)$  的傅里叶变换就可以定义了。

**定理 3.7** 如果  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 则

$$\mathfrak{F}[f(x)*g(x)](\lambda) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)$$

**证明** 因为  $\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^1}$ , 所以知  $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ 。另一方面, 由  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$ , 可知  $\widehat{f}\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ 。所以, 我们证明

$$\mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}\widehat{g}] = \frac{1}{2\pi} f * g.$$

记  $f_r(x) = \int_{-r}^r \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda$ , 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^r \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x} \left( \int_{\mathbb{R}} g(u)e^{-i\lambda u} du \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(u) \left( \int_{-r}^r \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda(x-u)} d\lambda \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(u)f_r(x-u) du = \frac{1}{2\pi} (f_r * g)(x).\end{aligned}$$

另一方面,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \|f_r - f\|_{L^2} = 0$ , 从而

$$\|f_r * g - f * g\|_{L^2} \leq \|f_r - f\|_{L^2}\|g\|_{L^1} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty.$$

所以

$$\mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f\hat{g}}] = \frac{1}{2\pi} f * g.$$

再在两边做傅里叶变换即可证明该定理。

#

**例 3.11** 试计算函数  $f(t) = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\beta^2}}$ ,  $\beta > 0$  的傅里叶变换。

首先我们看  $g(t) = e^{-\frac{t^2}{\beta^2}}$  的傅里叶变换。为此, 我们对  $g(t)$  求导得

$$g'(t) = -\frac{2t}{\beta^2} e^{-\frac{t^2}{\beta^2}},$$

上式两边取傅里叶变换得

$$i\lambda \mathfrak{F}[g](\lambda) = \frac{-2i}{\beta^2} \frac{d}{d\lambda} \mathfrak{F}[g](\lambda)$$

从而可以通过求解常微分方程得

$$\mathfrak{F}[g](\lambda) = C e^{-\frac{\beta^2 \lambda^2}{4}}$$

其中,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\beta^2}} dt \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

从而  $\mathfrak{F}\left[\frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\beta^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{4}\lambda^2}$ 。

我们现在来仔细研究一下函数  $f(t) = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\beta^2}}$ , 首先, 可以证明 (见作业) 对任意的  $\beta > 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.$$

另一方面, 当  $\beta$  越来越小并趋向零的时候, 对于  $t \neq 0$ ,  $f(t)$  的值会趋向 0, 而  $f(0)$  的值会趋向无穷。就是说函数的极限是一个非常古怪的函数, 它在除了零之外的所有点的值都是零, 但是它的积分是 1。

这个函数在物理和信号处理中非常有名, 叫  $\delta$  函数。 $\delta$  函数最开始的定义是该函数在零点为无穷大, 其他都是零的实数变量函数, 同时它在实数轴上积分为 1。这个定义在数学上有着明显的缺陷。一般来说, 函数的值不能是无穷大。当然可以认

为这是广义上的函数，把值域扩充到包含有无穷大。这样说的函数可以接受，但这个在0点是无穷大，其它处处为0的函数，对黎曼积分没定义，勒贝格的积分也是0，这和积分的定义矛盾。麻烦还不仅于此。在数学上，函数是从定义域到值域的一个映射，以此确定了函数的所有性质。上述的定义并非如此，定义的前半部分建立了自变量与函数值的对应关系，已经完全确定了函数。这函数乘上常数 $c$ ，仍然保持相同的映射，即保持这函数不变，它的积分也应该保持不变；在而后半部分，这函数乘上一个常数 $c$ ，从积分的线性关系，积分值将变成 $c$ 。应用定义的不同部分，推导出不同的结果，说明定义中有矛盾，这在数学上是不允许的。为了理解 $\delta$ 函数，我们这里简单介绍一些广义函数的基础知识。

### §3.5 广义函数

在物理学上，我们经常使用点量来描述对应的物理对象，比如点质量、点电荷、偶极子、瞬时打击力、瞬时源等。这些物理量描述起来不仅方便、物理含义清楚，而且它可以当作普通函数参加运算，所得到的数学结论和物理结论是吻合的，如对它进行微分和傅里叶变换，将它参与微分方程求解等。然而，经典函数定义了数和数的对应关系，在处理物理现象中的一切点量概念时无能为力，这就迫使人们要为这类怪函数确立严格的数学基础。

历史上第一个广义函数是由物理学家狄拉克引进的，他因为陈述量子力学中某些量的关系时需要引入了“ $\delta$ ”函数：这个函数在所有点都是零除了零处是无穷大。最初理解的方式之一是把这种怪函数设想成直线上某种分布所相应的“密度”函数。所以广义函数又称为分布，广义函数论又叫做分布理论。用分布的观念为这些怪函数建立基础虽然很直观，但对于复杂情况就又显得繁琐而不很明确。后来随着泛函分析的发展，施瓦茨(1945)用泛函分析观点为广义函数建立了一整套严格的理论，接着盖尔范德对广义函数论又作了重要发展。广义函数被广泛地应用于数学、物理、力学以及分析数学的其他各个分支，例如微分方程、随机过程、流形理论等等，它还被应用到群的表示理论，特别是它有力地促进了偏微分方程近30年来的发展。广义函数理论使得微分学摆脱了由于不可微函数的存在带来的某些困难，这是通过把它扩充到比可微函数大得多的一类对象实现的，同时它保持了微积分原来的形式。除此之外，广义函数需要满足：

1. 每一个连续函数应该是一个广义函数；
2. 每一个广义函数都应该具有(偏)导数，而且(偏)导数也是一个广义函数；
3. 运算的通常规则应该成立；
4. 具有相应的收敛定理，从而可以处理通常的极限过程。

## §3.5.1 基本空间

为了定义广义函数, 首先我们需要定义基本函数空间。定义在  $R$  上具有任意阶连续微商的函数全体组成的空间记作  $C^\infty(R)$ 。但是, 它们在  $R$  上不一定可积。我们希望考虑的空间不仅自身可积, 而且乘以任意可积的函数后还是可积。所以, 我们选择  $C^\infty(R)$  具有紧支集的函数全体记作  $C_0^\infty(R)$ 。注意到  $C_0^\infty(R)$  是不为空集的(见作业)。  $C_0^\infty(R)$  只是由函数组成的集合, 我们需要定义收敛性。只有这样才可能以它为定义域定义连续线性泛函, 而且还需要使得它按照这种收敛性成为完备的空间。

**定义 3.2** 设  $\varphi_j, \varphi \in C_0^\infty(R)$ , 如果

- 存在  $R$  中的紧集  $K$ , 使得  $\varphi_j, \varphi$  的支集都包含在  $K$  中;
- $\varphi_j$  以及任意阶导数都一致收敛到  $\varphi$  和  $\varphi$  的相应的导数;

则线性空间  $C_0^\infty(R)$  在给定上述收敛后的空间称为基本空间, 记作  $D$

**定义 3.3** 设  $\varphi_j \in D$ , 如果

- 存在  $R$  中的紧集  $K$ , 使得  $\varphi_j, \varphi$  的支集都包含在  $K$  中;

•

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \left( \max_{x \in K} |D^m \varphi_j - D^m \varphi_i| \right) = 0$$

则称  $\varphi_j$  是基本空间  $D$  中的基本列。

事实上, 我们可以证明按照上面定理得到的基本空间一定是完备的, 即下面的引理成立(证明留作作为作业)。

**引理 3.1**  $D$  中的基本列一定是收敛列, 即  $D$  是完备的。

**定义 3.4** 基本空间  $D$  上的连续线性泛函称为  $D$  上的广义函数, 即如果  $D$  上的实值线性泛函  $u$  满足

1. 对任意的  $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ ,  $c_1, c_2 \in R$ ,

$$u(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1u(\varphi_1) + c_2u(\varphi_2),$$

2. 如果  $\varphi_j, \varphi \in D$ , 且  $\varphi_j \rightarrow \varphi$ , 则

$$u(\varphi_j) \rightarrow u(\varphi),$$

则称  $u$  是  $D$  上的广义函数。

**例 3.12** 设  $f$  是  $R$  上任意紧集上都可积的函数, 定义  $D$  上的泛函

$$u_f(\varphi) = \int_R f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D,$$

很容易证明上述泛函是  $D$  上的线性连续泛函。由上式所确定的广义函数称为正则的。

**例 3.13** 定义广义函数  $\delta$  函数为

$$\delta(\varphi) = \varphi(0), \forall \varphi \in D.$$

首先, 它显然是  $D$  上的线性泛函, 并且, 如果  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = 0$ , 有

$$|\delta(\varphi_j)| = |\varphi_j(0)| \leq \sup_{x \in R} |\varphi_j(x)| \rightarrow 0,$$

所以  $\delta$  函数连续。于是  $\delta$  函数是广义函数。

不过  $\delta$  函数一定不是正则的。事实上, 如果存在可积函数  $f(x)$ , 使得

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) = \int_R f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in D.$$

为此, 取

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a; \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

按照上述假定有,

$$\int_R f(x)\varphi_a(x)dx = \varphi_a(0) = e^{-1},$$

但是左边的积分

$$\begin{aligned} \left| \int_R f(x)\varphi_a(x)dx \right| &= \left| \int_{|x| < a} f(x)e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} dx \right| \\ &\leq \int_{|x| < a} |f(x)| dx \rightarrow_{a \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

显然这两个是矛盾的。因此  $\delta$  函数不是正则的。

### §3.5.2 广义函数序列的极限

广义函数空间是一个线性空间, 可以定义如下的收敛性。

**定义 3.5** 设  $u_j, u$  是广义函数, 如果对每一个  $\varphi \in D$ , 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(\varphi) = u(\varphi)$$

就称  $\{u_j\}$  收敛到  $u$ , 记作  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u$ 。

例 3.14 设  $f_j(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin jx}{x}$ ,  $x \in R$ , 则

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \delta.$$

事实上, 可以证明对任意的  $\varphi \in D$ , 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_R \varphi(x+t) \frac{\sin jt}{t} dt = \varphi(x).$$

这个证明留作作业。

从而, 取  $x = 0$ , 便可以得到

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(\varphi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \varphi(x) \frac{\sin jx}{x} = \varphi(0) = \delta(\varphi),$$

即

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \delta.$$

### §3.5.3 广义函数序列的微商

对于广义函数的微商, 我们希望它具有任意阶的微商, 并且当函数是连续可微的时候, 广义函数的微商必须和古典的微商一致。这一节给出广义函数微商的定义。

假设  $f(x)$  是  $R$  上连续可微的函数,  $\varphi \in D$ , 由分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_R f'(x) \varphi(x) dx &= f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_R f(x) \varphi'(x) dx \\ &= - \int_R f(x) \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

所以, 对于广义函数可以定义微商  $f'(\varphi) = f(\varphi')$ 。

定义 3.6 设  $u$  是广义函数, 定义  $u$  的微商  $u'$  是  $D$  上的线性泛函, 并且满足

$$u'(\varphi) = u(\varphi'), \forall \varphi \in D.$$

不难证明  $u \in D$ ,  $u' \in D$ , 从而我们可以证明广义函数具有任意阶导数, 并且

$$D^m u(\varphi) = (-1)^m u(D^m \varphi).$$

例 3.15 函数  $H(x)$  为:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} H'(\varphi) &= -H(\varphi') \\ &= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x) \\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(x) \\ &= \varphi(0) = \delta(\varphi) \end{aligned}$$

所以  $H'(x) = \delta(x)$ 。

**例 3.16** 设  $f(x) \in C^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , 记  $a = f(+0) - f(x-0)$ , 又设  $f$  和  $f'$  在紧集上可积, 则

$$\frac{d}{dx}f = a\delta + f'$$

这是因为对于任意的  $\varphi \in D$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(\varphi) &= -f(\varphi') \\ &= -\int_{-\infty}^0 f(x)\varphi'(x)dx - \int_0^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -f(-0)\varphi(0) + \int_{-\infty}^0 f(x)\varphi'(x)dx + f(+0)\varphi(0) + \int_0^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= a\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= a\delta(\varphi) + f' \end{aligned}$$

这个例子告诉我们, 如果  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 则广义函数的导数和经典的导数定义一致, 但是如果函数具有第一类间断点, 则广义函数的导数会在间断点处引入  $\delta$  函数。

我们还可以定义广义函数和无穷次可微函数的乘积以及相应的导数。

**定义 3.7** 设  $u$  是广义函数,  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 则它们的乘积  $fu$  定义为

$$(fu)(\varphi) = u(f\varphi), \forall \varphi \in D$$

很容易验证  $fu$  是一个广义函数。类似的, 我们也可以定义乘积对应的广义函数的导数。不难证明:

$$D(fu) = fu' + uf'$$

这是因为

$$\begin{aligned} (D(fu))(\varphi) &= -(fu)(\varphi') = -u(f\varphi') = -u((f\varphi)' - \varphi f') \\ &= u'(f\varphi) + u(\varphi f') = (fu' + uf')(\varphi) \end{aligned}$$

## §3.5.4 广义函数序列的卷积

两个可积函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  的卷积定义为

$$(f * g)(x) = \int_R f(x-y)g(y)dy,$$

从而如果将它看出一个正则的广义函数, 有

$$\begin{aligned} (f * g)(\varphi) &= \int_R (f * g)(z)\varphi(z)dz \\ &= \int_R \left( \int_R f(z-y)g(y)dy \right) \varphi(z)dz \\ &= \int_R g(y) \left( \int_R f(z-y)\varphi(z)dz \right) dy \\ &= \int_R g(y) \left( \int_R f(z)\varphi(z+y)dz \right) dy \end{aligned}$$

因此, 两个广义函数的卷积可以定义为

**定义 3.8** 设  $u, v$  是两个广义函数, 如果由下式定义的  $\omega$  是一个广义函数,

$$\omega(\varphi) = v_y [u_x(\varphi(x+y))]$$

则称  $\omega$  是  $u, v$  的卷积, 记作  $\omega = u * v$ . 其中上式的定义中  $u_x$  表示广义函数  $u$  的定义以  $x$  作为积分变量。

**说明 3.2** 上述卷积的定义不是对所有的广义函数都成立, 因为在这个定义中我们需要  $\varphi(x) \in D$  时,  $\varphi(x+y) \in D$ . 这个不是对所有的广义函数成立. 因此, 我们这里给出一个卷积可以定义的条件. 设  $u, v$  是广义函数, 记  $A, B$  是  $u, v$  的支集, 给定一个紧集  $F$ , 定义

$$\tilde{F} = \{(x, y) | x + y \in F\},$$

如果对任意的紧集  $F$ ,  $\tilde{F}$  都是有界集, 则  $u * v$  就是一个广义函数。

**例 3.17**  $\delta(x)$  的性质如下:

1.  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ , 特别的  $\delta(-x) = \delta(x)$ ;
2.  $x\delta(x) = 0$ ,  $x\delta(x-a) = a\delta(x-a)$ ;
3.  $\frac{d}{dx}\delta(x-a) = -\delta(x-a)\frac{d}{dx}$ ;
4.  $f * \delta = f(x)$ ;



**证明** 第一、三、四式的证明留作作业。对于第二个式子, 由广义函数的运算法则, 有

$$\begin{aligned}(g(x)\delta(x-y), \varphi(x)) &= (\delta(x-y), g(x)\varphi(x)) \\ &= g(y)\varphi(y) = (g(y)\delta(x-y), \varphi(x))\end{aligned}$$

从而,

$$g(x)\delta(x-y) = g(y)\delta(x-y),$$

故

$$x\delta(x) = 0\delta(x) = 0$$

则, 对任意的 $a$ ,  $0 = (x-a)\delta(x-a)$ , 即

$$x\delta(x-a) = a\delta(x-a).$$

#

物理学者和工程师经常凭证直观想象的类比, 不严谨地套用公式, 经常得到丰硕的成果, 但有时也错得离谱。即便是历史上数学大师, 如费尔马, 欧拉等, 以其丰富地类比想象, 而硕果累累, 但也有些不靠谱的错误论断。数学上严谨的证明, 如同物理实验一样, 在逻辑上验证一种类比猜想的正确性。在数学的学习和应用中, 不仅要知其然, 还要知其所以然, 对应用对象有真实的感觉和经验, 才能用虚拟世界里的想象, 指引现实天空下的飞翔。

### §3.5.5 傅里叶变换对

前面说到, 在工程计算中,  $\delta$ 函数具有非常重要的意义和应用背景。但是, 按照传统的傅里叶变换的定义, 我们不能对 $\delta$ 函数做傅里叶变换, 为此我们首先定义了广义函数, 并给出 $\delta$ 函数严格的数学定义。从广义函数的定义出发定义其傅里叶变换比较自然, 比如给定一个广义函数 $u$ ,  $u$ 的傅里叶变换 $\hat{u}$ 也是一个连续线性泛函, 且满足,

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}).$$

然而, 在上述定义中有一个问题, 就是如果 $\varphi \in D$ , 我们不能得到 $\hat{\varphi} \in D$ 。所以, 为了定义广义函数的傅里叶变换, 我们不能直接在基本空间上定义, 需要寻找另外一个空间上的连续线性泛函, 这个空间就是速降空间。这里, 我们不准备给出所有的细节, 只是给出我们所需要的计算, 具体的内容可以参考相关书籍[2]。

注意到傅里叶变换和傅里叶逆变换的形式非常类似, 他们具有一定的对称性。事实上, 如果 $f(t)$ 的傅里叶变换是 $\hat{f}(\lambda)$ , 如果 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , 则 $\hat{f}$ 作为一个函数也可以计算它的傅里叶变换。它的傅里叶变换是

$$\mathfrak{F}[\hat{f}](\lambda) = f(-\lambda).$$

证明

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \quad (3.18)$$

所以

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda = \mathfrak{F}[\widehat{f(\lambda)}](t).$$

#

所以, 一个函数和它的傅里叶变换称为一个傅里叶变换对。

**例 3.18** 我们现在看一下我们前面提到的 $\delta(x)$ 函数。

$$\mathfrak{F}[\delta](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.19)$$

所以, 我们认为 $\delta(x)$ 和常函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 构成一个傅里叶变换对, 即

$$\mathfrak{F}[\delta(x)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right](\lambda) = \delta(-\lambda) = \delta(\lambda).$$

**例 3.19** 同理,

$$\mathfrak{F}[\delta(x-a)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x} \Big|_{x=a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\lambda} \quad (3.20)$$

所以, 我们认为 $\delta(x-a)$ 和常函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\lambda}$ 构成一个傅里叶变换对, 即

$$\mathfrak{F}[\delta(x-a)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\lambda}, \mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iax}\right](\lambda) = \delta(a-\lambda) = \delta(\lambda-a).$$

**例 3.20** 求正弦函数 $f(t) = \sin(\lambda_0 t)$ 的傅里叶变换。

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f(t)](\lambda) &= \mathfrak{F}\left[\frac{e^{i\lambda_0 t} - e^{-i\lambda_0 t}}{2i}\right] \\ &= \frac{i}{2} (\delta(\lambda + \lambda_0) - \delta(\lambda - \lambda_0)) \end{aligned}$$

**例 3.21** 设 $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1}{2}, & t = 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$ , 则 $H(t)$ 的傅里叶变换是 $\mathfrak{F}[H(t)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{i\lambda} + \pi\delta(\lambda)\right)$ 。

这里不直接计算函数 $H(t)$ 的傅里叶变换, 而改成计算函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{i\lambda} + \pi\delta(\lambda)\right)$ 的逆傅

里叶变换。

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{i\lambda} + \pi\delta(\lambda)\right)\right](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{i\lambda} + \pi\delta(\lambda)\right) e^{i\lambda t} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi\delta(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda t} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\lambda t) + i \sin(\lambda t)}{i\lambda} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d\lambda \\
 &= H(t)
 \end{aligned}$$

最后一个等式是因为

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & t < 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

所以,  $\mathfrak{F}[H(t)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{i\lambda} + \pi\delta(\lambda)\right)$ 。因此,  $H(t)$  和  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{i\lambda} + \pi\delta(\lambda)\right)$  构成一个傅里叶变换对。

**例 3.22** 函数  $H(t)e^{-\beta t}$ ,  $\beta \neq 0$  的傅里叶变换是  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta + i\lambda}$ 。

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}[H(t)e^{-\beta t}](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (H(t)e^{-\beta t}) e^{-i\lambda t} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-i(\lambda - \beta i)t} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{i(\lambda - \beta i)} + \pi\delta(\lambda - \beta i) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta + i\lambda}
 \end{aligned}$$

例 3.23 函数  $e^{-\beta t^2}$  的傅里叶变换是  $\frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}$ 。事实上,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[e^{-\beta t^2}](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(t-\frac{i\lambda}{2\beta})^2 - \frac{\lambda^2}{4\beta}} dt \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\beta}t - \frac{i\lambda}{2\sqrt{\beta}})^2} dt \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{\beta}} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\beta}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\beta}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\end{aligned}$$

作为总结,下面给出的就是最常见的五个傅里叶变换对。

函数 $f(t)$	傅里叶变换 $\widehat{f}(\lambda)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$\delta(t-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\lambda}$
$H(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{1}{i\lambda} + \pi\delta(\lambda))$
$H(t)e^{-\beta t}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta+i\lambda}$
$e^{-\beta t^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\beta}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}$

### §3.6 线性时不变滤波器

滤波器这个名词想必大家也不陌生,比如带有“降噪”功能的麦克风,说白了就是把高频的噪音信号给过滤掉。更专业一点,滤波器是能过滤某些特定频段,留下需要信号的部件,比如低通滤波器(只留下低频分量)、高通滤波器(只留下高频分量)、带通滤波器(只留下特定范围内的分量)。

从数学的观点看,信号就是一个函数,而滤波器可以看成是一个变换  $L$ , 它将信号  $f$  映射到另外一个信号。如果滤波器是线性的,则变换  $L$  必须满足下面两个性质。

- 相加:  $L[f+g] = L[f] + L[g]$
- 齐性:  $L[cf] = cL[f]$ , 其中  $c$  是常数

除此之外,一般的滤波器还满足另外一个性质是时不变性。比如说,假设我们现在放一张旧的有杂音的唱片,如果将声音信号通过一个去噪滤波器,就可以听到清晰的音乐。那么,如果我们第二天放同样的唱片,通过同样的滤波器,那么我们应该听到同样的声音。这个就是时不变性。从数学上说,记 $f(t-a) = f_a(t)$ ,则时不变性可以这样定义。

**定义 3.9** 变换 $L$ 称为时不变是指,对于任意的信号 $f$ 和实数 $a$ ,有

$$L[f_a](t) = (Lf)(t-a)$$

就是说,如果信号延时 $a$ 个单位,则经过变换后的信号就是原始变换的信号延时 $a$ 个单位,则这个变换是时不变的。

**例 3.24** 设 $h(t)$ 是一个具有有限支撑的函数,对于信号 $f$ ,令

$$(Lf)(t) = (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x)f(x)dx,$$

则线性算子 $L$ 是时不变的。

事实上,对任意的 $a$ ,有

$$\begin{aligned} (Lf)(t-a) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-a-x)f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-y)f(y-a)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-y)f_a(y)dy \\ &= (Lf_a)(t) \end{aligned}$$

所以, $L$ 是时不变的。

但是,并不是所有的线性变换是时不变的,比如下面的例子。

**例 3.25** 令

$$(Lf)(t) = \int_0^t f(x)dx,$$

则,一方面,

$$L[f_a](t) = \int_0^t f(x-a)dx = \int_{-a}^{t-a} f(x)dx,$$

另一方面

$$(Lf)(t-a) = \int_0^{t-a} f(x)dx,$$

可以看出,由于 $a \neq 0$ ,所以 $L[f_a](t)$ 和 $(Lf)(t-a)$ 是不同的,就是说 $L$ 不是时不变的。

下面的定理说明, 卷积就是典型的时不变线性滤波器, 并且每一个时不变滤波器对应一个函数, 而且这个函数可以非常容易确定。

**定理 3.8** 设 $L$ 是线性时不变的, 其作用的信号是分段连续的, 则存在一个可积函数 $h$ , 使得对所有的信号 $f$ , 有

$$L(f) = f * h.$$

**证明** 这个证明包含两步。第一步, 我们证明对任意的 $\lambda \in R$ , 存在 $h$  满足

$$L[e^{i\lambda x}](t) = \sqrt{2\pi}\hat{h}(\lambda)e^{i\lambda t}, t \in R.$$

事实上, 定义函数

$$h^\lambda(t) = L[e^{i\lambda x}](t), t \in R.$$

因为 $L$ 是时不变的, 所以对任意的 $a \in R$ ,

$$L[e^{i\lambda(x-a)}](t) = h^\lambda(t-a)$$

又因为 $L$ 是线性的, 我们有

$$L[e^{i\lambda(x-a)}](t) = e^{-i\lambda a}L[e^{i\lambda x}](t) = e^{-i\lambda a}h^\lambda(t)$$

从而对任意的 $a \in R$ ,

$$h^\lambda(t-a) = e^{-i\lambda a}h^\lambda(t).$$

特别的, 当 $t = a$ 时, 有

$$h^\lambda(0) = e^{-i\lambda a}h^\lambda(a).$$

从而对任意的 $t \in R$ ,

$$h^\lambda(t) = e^{i\lambda t}h^\lambda(0).$$

于是,

$$L[e^{i\lambda x}](t) = h^\lambda(t) = h^\lambda(0)e^{i\lambda t}$$

令 $\hat{h}(\lambda) = \frac{h^\lambda(0)}{\sqrt{2\pi}}$ 即可。

第二步就是利用 $\hat{h}(\lambda)$ 来确定算子 $L$ 。将算子 $L$ 作用于傅里叶变换反演公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda$$

的两边得

$$\begin{aligned} L[f](t) &= L \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \right] (t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \hat{f}(\lambda) L[e^{i\lambda x}] d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \hat{f}(\lambda) (\sqrt{2\pi} \hat{h}(\lambda) e^{i\lambda t}) d\lambda \\ &= (f * h)(t) \end{aligned}$$

#

这里函数 $h(t)$ 具有明确的意义,事实上在上式中令 $f(x) = \delta(x)$ ,就可以得到

$$L[\delta(x)](t) = (\delta(x) * h(x))(t) = h(t),$$

即 $h(t)$ 是脉冲信号通过 $L$ 后的响应函数。

**说明 3.3** 定理3.8是有非常明确的意义和应用价值。由于 $L$ 是任意的时不变线性算子,所以这个定理具有很好的通用性。在实际的应用中, $L$ 通常对应一个任意的线性滤波器。这个定理告诉我们即使我们不知道这个滤波器是什么作用,我们也可以指导这个滤波器是怎么工作的,就是输入信号和某个函数的卷积。同时这个函数可以非常容易确定,就是在滤波器中输入一个脉冲信号,输出的就是这个函数。所以,时不变线性算子就等价于一个函数的卷积。这从另外一个方面说明了卷积在信号处理中的重要地位。

### §3.7 采样定理

在我们前面的介绍中,我们都假设我们的信号是一个连续函数,但是在实际中,我们都需要将一个连续信号转换成一个离散序列。采样是将一个信号(即时间或空间上的连续函数)转换成一个数值序列(即时间或空间上的离散函数)的过程。通常,采样就是以间隔 $s$ 记录信号 $\{f(js), j \in Z\}$ 的值。所以一个自然的问题就是如何从这些离散函数恢复原始的信号。下面我们介绍的采样定理指出,如果信号是带限的(信号中高于某一给定值的频率成分必须是零,或至少非常接近于零。严格的定义见定义3.10),那么上面的 $s$ 只要比较小,那么,原来的连续信号可以从采样样本中完全重建出来。

采样定理,又称香农采样定理,奈奎斯特采样定理,是信息论,特别是通讯与信号处理学科中的一个重要基本结论。

为了说明下面的定理,我们先给出一个简单的例子。假设我们现在来观察一个带指针的旋转的圆盘,假设这个指针是以一秒为周期顺时针旋转。不过,我们不知

道这些信息,我们希望通过采样指针的离散信息了解这个指针的运行情况,即隔一段时间记录指针当前的位置。

- 如果采样的时间间隔是 $\frac{1}{3}$ 秒,那么在一个周期中,我们可以采样到时刻 $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 秒的信息。这时,我们可以计算出此时满足条件的最大的周期是1秒,而且,可以判断出它是顺时针旋转;
- 如果采样的时间间隔是 $\frac{1}{2}$ 秒,那么在一个周期中,我们可以采样到时刻 $0, \frac{1}{2}$ 秒的信息。这个情况下,我们可以计算出它此时满足条件的最大的周期是1秒,但是不能确定是顺时针还是逆时针旋转;
- 如果采样的时间间隔是 $\frac{2}{3}$ 秒,那么我们可以采样到时刻 $0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ 秒的信息。这个情况下,我们错误计算出此时满足条件的最大的周期是2秒,并且不能确定是顺时针还是逆时针旋转;
- 如果采样的时间间隔是1秒,那么我们只能看到一幅静止的图片,我们会认为指针根本就没动,所以它的周期和方向都没有办法计算。

从这个简单的例子可以看出,是否可以恢复原始信号和采样的密度有非常密切的联系,下面给出这个结果的理论基础。

**定义 3.10** 如果存在常数 $\Omega > 0$ ,使得

$$\hat{f}(\lambda) = 0, |\lambda| > \Omega,$$

则函数 $f$ 称为频率带限信号。当 $\Omega$ 是满足上式的最小的频率时,自然频率 $\nu = \frac{\Omega}{2\pi}$ 称为Niquist频率, $2\nu = \frac{\Omega}{\pi}$ 称为Niquist采样率。

**定理 3.9** 假设 $\hat{f}(\lambda)$ 是分段光滑且连续的,而且对于 $\lambda > \Omega$ ,有 $\hat{f}(\lambda) = 0$ ,其中 $\Omega$ 是一个固定的正数。则

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{j\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - j\pi)}{\Omega t - j\pi}.$$

**证明** 将 $\hat{f}(\lambda)$ 在 $[-\Omega, \Omega]$ 上展开成傅里叶级数:

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{i\pi k\lambda}{\Omega}}, c_k = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\lambda) e^{-\frac{i\pi k\lambda}{\Omega}} d\lambda,$$

由于 $\lambda > \Omega$ ,有 $\hat{f}(\lambda) = 0$ ,所以上面的积分区间可以改成负无穷到正无穷:

$$c_k = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{-\frac{i\pi k\lambda}{\Omega}} d\lambda.$$



注意到上式可以写成

$$c_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{-i\pi k\lambda/\Omega} d\lambda = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\left(-\frac{k\pi}{\Omega}\right).$$

将上式代入到级数展开式中, 同时将求和指标 $k$ 换成 $j = -k$ , 得

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\left(\frac{j\pi}{\Omega}\right) e^{-\frac{i\pi j\lambda}{\Omega}}.$$

由于 $\hat{f}(\lambda)$ 是分段光滑的函数, 所以上述级数是一致收敛的. 从而我们有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f\left(\frac{j\pi}{\Omega}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-\frac{i\pi j\lambda}{\Omega} + i\lambda t} d\lambda \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{j\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - j\pi)}{\Omega t - j\pi} \end{aligned}$$

#

**例 3.26** 记 $f(t) = \frac{4\sin t - 4t \cos t}{t^3}$ , 则 $f(t)$ 的傅里叶变换是

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \begin{cases} \sqrt{2\pi}(1 - \lambda^2), & |\lambda| \leq 1; \\ 0, & |\lambda| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $f(t)$ 是一个频率带限信号, 所以只要我们取 $\Omega \geq 1$ , 就可以对原始信号完全重构。

我们可以从另外一个角度来看这个采样定理, 如图3.16所示, 设 $a = \frac{\pi}{\Omega}$ , 记 $\phi_a(t) = \frac{\sin(\pi t/a)}{\pi t/a}$ , 则上式可以写成

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(ja) \phi_a(t - ja) = \phi_a * \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(ja) \delta(t - ja).$$

注意到 $\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(ja) \delta(t - ja)$ 对应于一个信号 $f$ 的任意均匀采样 $f_d(t)$ ,

$$f_d(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(ja) \delta(t - ja), \quad (3.22)$$

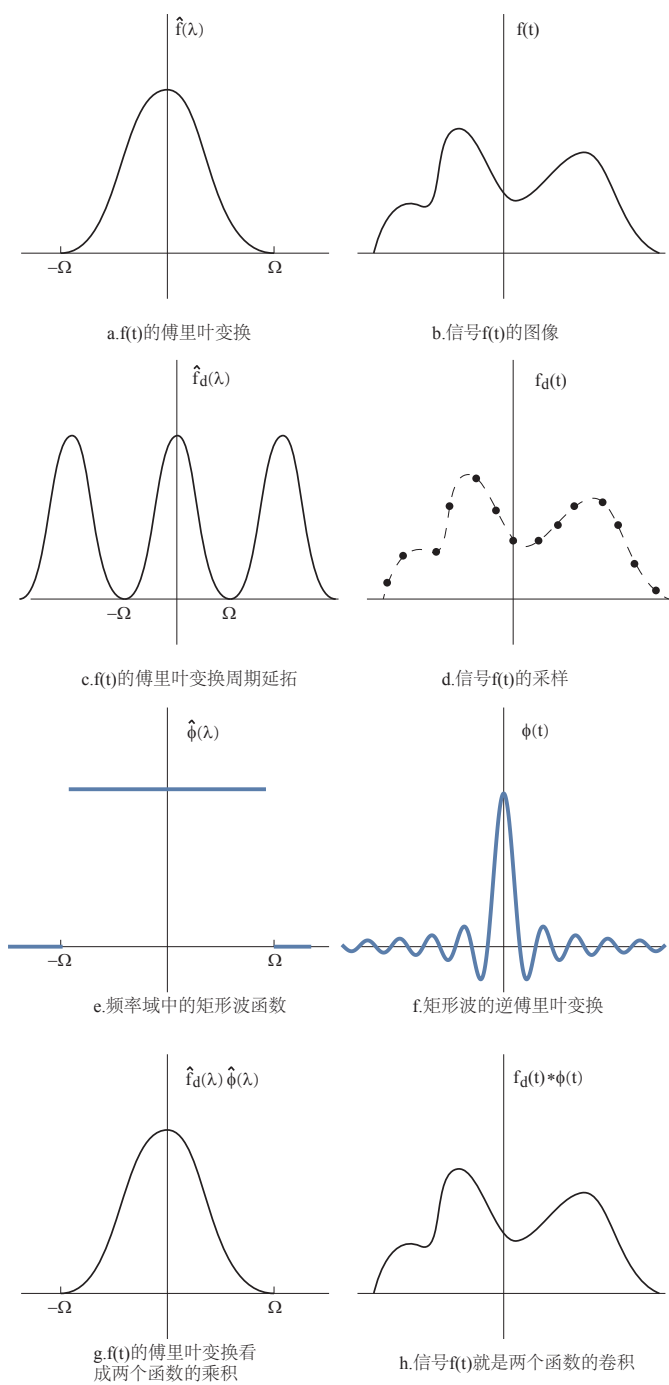


图 3.16 理解采样定理的示意图。

所以, 采样定理说明

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\hat{\phi}_a(\lambda)\hat{f}_d(\lambda) = r_{a,\Omega}(\lambda)\hat{f}_d(\lambda),$$

这里  $r_{a,b}(\lambda) = \begin{cases} a, & -b \leq \lambda \leq b; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 。事实上可以证明  $f_d(t)$  的傅里叶变换是

$$\hat{f}_d(\lambda) = \frac{1}{a} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda - 2k\Omega) \quad (3.23)$$

### §3.7.1 混叠

如果  $\hat{f}$  的支集超出  $[-\Omega, \Omega]$ , 一般的, 对于某些非零的  $j \neq 0$ ,  $\hat{f}(\lambda - 2j\Omega)$  的支集和  $[-\Omega, \Omega]$  相交, 则高频部分折叠到低频区间, 这个称之为混叠。由于存在混叠,  $\frac{1}{a} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda - 2k\Omega)$  完全不同于  $\hat{f}$  的支集属于  $[-\Omega, \Omega]$  的情形, 这个过程可以用图3.17来解释。

**例 3.27** 考虑高频振荡

$$f(t) = \cos(\lambda_0 t) = \frac{e^{i\lambda_0 t} + e^{-i\lambda_0 t}}{2}$$

其傅里叶变换是

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\lambda - \lambda_0) + \delta(\lambda + \lambda_0))$$

如果  $\Omega < \lambda_0 < 2\Omega$ , 则

$$\sqrt{2\pi}\hat{\phi}_a(\lambda)\hat{f}_d(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\lambda - 2\Omega + \lambda_0) + \delta(\lambda + 2\Omega - \lambda_0)) \quad (3.24)$$

因此, 混叠将高频  $\lambda_0$  移至低频  $2\Omega - \lambda_0 \in [-\Omega, \Omega]$ 。

## §3.8 离散傅里叶变换

傅里叶变换可以用来分析连续的信号, 然而在许多的应用场合, 信号本身已经是离散的, 在这种情况下, 需要利用傅里叶变换的离散形式来分析离散信号。为此, 我们先看几个例子。

**例 3.28** 我们先看一下如何近似计算傅里叶系数

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

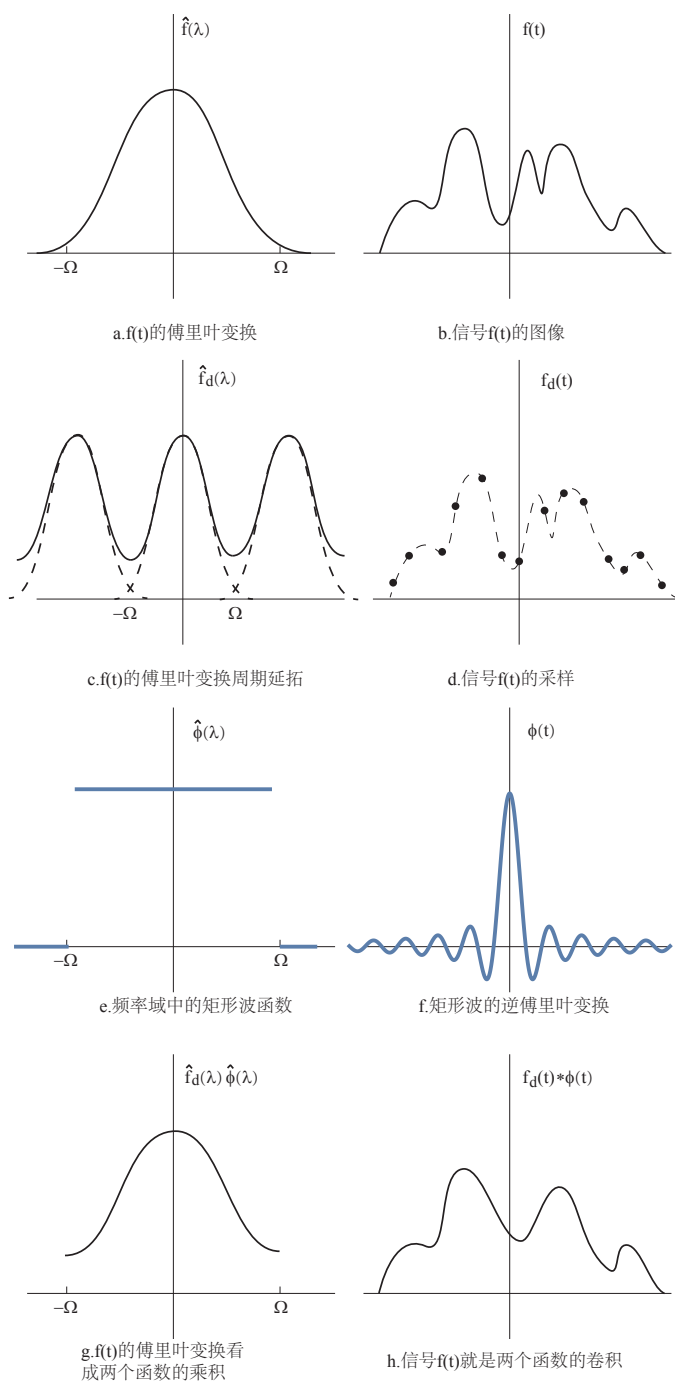


图 3.17 混叠产生的原因。

利用梯形积分公式

$$\begin{aligned}\alpha_k &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{-\frac{2\pi i j k}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{-\frac{2\pi i j k}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \bar{\omega}^{jk}\end{aligned}$$

其中,  $y_j = f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$ ,  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 。

**例 3.29** 假设  $f$  以  $2\pi$  为周期, 并且已知  $f$  在等距节点  $x_j = \frac{2\pi j}{n}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  的值  $y_j = f(x_j)$ , 求三角多项式

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}$$

在节点  $x_j$  插值  $f(x_j)$ 。

很显然这个问题可以转化成线性方程组

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\frac{2\pi i j k}{n}} = y_j, 0 \leq j \leq n-1.$$

对任意的  $0 \leq p \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-\frac{2\pi i j p}{n}} &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\frac{2\pi i j (k-p)}{n}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i j (k-p)}{n}}\end{aligned}$$

由

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i j (k-p)}{n}} = \begin{cases} n, & k = p; \\ 0, & k \neq p. \end{cases} \quad (3.25)$$

可得

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-\frac{2\pi i j p}{n}} = n c_p$$

所以

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-\frac{2\pi i j k}{n}}.$$

**例 3.30** 假设  $f$  的支集位于  $[a, b]$  中, 且在  $[a, b]$  上连续,  $f(b) = f(a)$ . 已知  $f$  在  $a + j\frac{b-a}{n}, j = 0, 1, \dots, n-1$  处的采样值, 数值计算傅里叶变换

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

由变量代换  $\theta = 2\pi \frac{t-a}{b-a}$ , 可得

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b-a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{(b-a)\theta}{2\pi}\right) e^{-i\lambda\left(a + \frac{(b-a)\theta}{2\pi}\right)} d\theta \\ &= \frac{b-a}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\lambda a} \int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{(b-a)\theta}{2\pi}\right) e^{-i\lambda\left(\frac{(b-a)\theta}{2\pi}\right)} d\theta \end{aligned}$$

令  $g(\theta) = f\left(a + \frac{(b-a)\theta}{2\pi}\right)$ , 且  $\lambda_k = \frac{2\pi}{b-a} k$ , 可得

$$\widehat{f}(\lambda_k) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda_k a} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \right)$$

对任意的  $0 \leq j \leq n-1$ , 令  $y_j = g\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)$ , 可以近似求得

$$\widehat{f}(\lambda_k) = \frac{b-a}{n\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda_k a} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-\frac{2\pi i j k}{n}}.$$

从上面可以看出上述运算都涉及到形如  $\sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{\omega_n}^{jk}$ ,  $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  的计算, 这个就是我们需要定义的离散傅里叶变换。

**定义 3.11** 令  $\mathbb{S}_n$  表示以  $n$  为周期的复序列空间, 即对任意的  $y = \{y_i\} \in \mathbb{S}_n$ ,  $y_{i+n} = y_i$ .

假设  $y = \{y_i\} \in \mathbb{S}_n$ , 则  $y$  的离散傅里叶变换序列  $\mathfrak{F}y = \{\widehat{y}_i\}$ , 其中

$$\widehat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{\omega_n}^{jk}, \omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

离散傅里叶变换可以写成下面的矩阵形式:

$$\mathfrak{F}_n[y] = \widehat{y} = (\overline{F}_n) \cdot (y),$$

其中,  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ ,  $\widehat{y} = (\widehat{y}_0, \widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_{n-1})$ , 并且

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

## §3.8.1 离散傅里叶变换的性质

和连续傅里叶变换类似，离散傅里叶变换具有很多类似的性质。

1.  $\mathfrak{F}_n$  是从  $\mathbb{S}_n$  到  $\mathbb{S}_n$  的线性算子；
2. 假设  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{S}_n$ ,  $\hat{y} = \mathfrak{F}_n[y]$ , 则

$$y_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k \omega_n^{jk}.$$

3. 假设  $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$ ,  $z = \{z_k\} \in \mathbb{S}_n$  而且  $z_k = y_{-k}$ , 则

$$\mathfrak{F}_n[z]_j = \mathfrak{F}_n[y]_{-j}$$

4. 假设  $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$ ,  $z = \{z_k\} \in \mathbb{S}_n$  而且  $z_k = \overline{y_k}$ , 则

$$\mathfrak{F}_n[z]_j = \overline{\mathfrak{F}_n[y]_{-j}}$$

上述结论可以自然得到下面的推论：

- $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$  是奇（偶）系列  $\iff \mathfrak{F}_n[y]$  是奇（偶）系列；
  - $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$  是实系列  $\iff \mathfrak{F}_n[y]_j = \overline{\mathfrak{F}_n[y]_{-j}}$ ；
  - $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$  是实的偶系列  $\iff \mathfrak{F}_n[y]$  是实的偶系列；
  - $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$  是实的奇系列  $\iff \mathfrak{F}_n[y]$  是纯虚的奇系列；
5. 假设  $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$ ,  $z = \{z_k\} \in \mathbb{S}_n$  而且  $z_k = y_{k+p}$ , 则

$$\mathfrak{F}_n[z]_j = \omega_n^{pj} \mathfrak{F}_n[y]_j$$

6. 假设  $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$ ,  $z = \{z_k\} \in \mathbb{S}_n$  而且  $z_k = \omega_n^{-pk} y_k$ , 则

$$\mathfrak{F}_n[z]_j = \mathfrak{F}_n[y]_{j+p}$$

7. 离散卷积定理：

**定义 3.12** 假设  $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$ ,  $z = \{z_k\} \in \mathbb{S}_n$ , 则  $y$  和  $z$  的卷积  $y * z \in \mathbb{S}_n$  定义为：

$$(y * z)_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j z_{k-j} = \sum_{j=0}^{n-1} y_{k-j} z_j$$

假设  $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$ ,  $z = \{z_k\} \in \mathbb{S}_n$ , 则

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_n[y * z] &= \mathfrak{F}_n[y]\mathfrak{F}_n[z] \\ \mathfrak{F}_n[y \times z] &= \frac{1}{n}\mathfrak{F}_n[y] * \mathfrak{F}_n[z]\end{aligned}$$

8. 假设  $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}_n$ , 则

$$n \sum_{k=0}^{n-1} |y_k|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |\mathfrak{F}[y]_j|^2$$

### §3.8.2 利用离散傅里叶变换分析细分曲面的性质

作为离散傅里叶变换在计算机图形学中的一个应用, 我们这里简单介绍一下离散傅里叶变换在分析细分曲面的性质上的一个应用。

在曲面造型中, 由于单一的参数曲面只能表示拓扑同剖于平面的曲面, 难以表示复杂拓扑结构的自由曲面。而采用多片拼接的方法来表示复杂拓扑的曲面又涉及到边界光滑性条件的指定问题。在这样的需求下, 细分曲面应运而生。细分曲面是计算机辅助几何设计上继样条参数曲面后发展的一种新的造型技术, 为解决任意拓扑自由曲面提供了一种有效的解决方案。

细分曲面是将一定的拓扑规则和几何规则作用到一个给定的初始网格, 并且不断重复这个过程生成的光滑的极限曲面的过程。1974年, Chaikin 提出了切角法用来生成自由光滑曲线, 这个公认是细分思想的萌芽。后来在1987年, 这一想法才分别由Doo-Sabin和Catmull-Clark 推广到曲面, 得到了图形学领域里著名的Doo-Sabin和Catmull-Clark细分格式。其中, Caumull-Clark细分是将三次均匀B样条曲面推广到任意拓扑。Catmull-Clark 的拓扑细分规则就是将一个边数为 $n$ 的面分裂成 $n$ 个小的四边形。我们可以看出, 经过一次细分后, 所有的面都是四边形。它的几何规则如下:

#### 1. 新面点:

每一个面会增加一个新的点, 称为新面点。假设  $V_i, i = 0, \dots, n-1$  是一个面的 $n$ 个顶点, 则新的面点  $V_F$  通过下式计算:

$$V_F = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} V_i}{n}.$$

#### 2. 新边点:

每一条边会增加一个新的点, 称为新边点。假设这条边的两个顶点分别是  $E_1$  和  $E_2$ , 它相邻两个面的新面点分别是  $F_1$  和  $F_2$ , 则新边点  $V_E$

$$V_E = \frac{E_1 + E_2 + F_1 + F_2}{4}.$$



## 3. 新顶点:

每一个原来的顶点会改变它的几何位置。假设这个点 $V$ ，和它相连的边有 $n$ 条，通过这 $n$ 条边和 $V$ 相邻的点分别是 $V_i, i = 0, \dots, n-1$ ，假设它相邻的 $n$ 个面的新面点分别是 $F_i, i = 0, \dots, n-1$ ，并记 $M_i = \frac{V_i + V}{2}$ ，则新顶点

$$V_V = \frac{n-3}{n}V + \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(2M_i + F_i)}{n^2}.$$

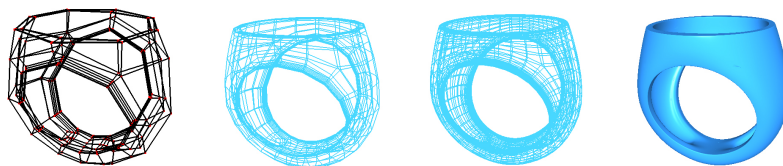


图 3.18 一个Catmull-Clark细分曲面的例子

由于经过一次细分后，所有的面都是四边形。所以，我们不妨假设给定的初始网格的面都是四边形。那么，在一个度为 $n$ 的顶点 $V$ 周围，记和它直接相邻的顶点是 $E_j, j = 0, \dots, n-1$ ，每一个相邻面中和它相对的顶点是 $F_j, j = 0, \dots, n-1$ 。经过一次细分后得到新的顶点序列为 $\bar{V}, \bar{E}_j, \bar{F}_j, j = 0, \dots, n-1$ ，那么上述几何规则可以写成一个矩阵形式 $M$ ，使得 $\bar{P} = MP$ ，这里

$$P = [V, E_0, \dots, E_{n-1}, F_0, \dots, F_{n-1}]^T$$

$$\bar{P} = [\bar{V}, \bar{E}_0, \dots, \bar{E}_{n-1}, \bar{F}_0, \dots, \bar{F}_{n-1}]^T$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4n-7}{4n} & \frac{3}{2n^2} & \cdots & \frac{3}{2n^2} & \frac{1}{4n^2} & \cdots & \frac{1}{4n^2} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \cdots & \frac{1}{16} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \cdots & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & \frac{1}{4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

可以看出，为了分析细分曲面在奇异点的附近的性质，一个重要的步骤是计算 $M^n, n \rightarrow \infty$ 。在线性代数中，我们知道为了计算 $M^n$ ，我们需要知道 $M$ 的Jordan分解。在这里，我们将给出如何利用离散傅里叶变换去计算 $M$ 的特征值。

假设 $\{e_k\}$ 和 $\{f_k\}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ 分别是 $\{E_j\}$ 和 $\{F_j\}$ 的离散傅里叶变换,  $\{\bar{e}_k\}$ 和 $\{\bar{f}_k\}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ 分别是 $\{\bar{E}_j\}$ 和 $\{\bar{F}_j\}$ 的离散傅里叶变换, 即

$$e_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} E_j \bar{\omega}^{j\lambda}, \quad \bar{e}_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{E}_j \bar{\omega}^{j\lambda} \quad (3.28)$$

$$E_k = \sum_{\lambda=0}^{n-1} e_\lambda \omega^{k\lambda}, \quad \bar{E}_k = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \bar{e}_\lambda \omega^{k\lambda} \quad (3.29)$$

$$f_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F_j \bar{\omega}^{j\lambda}, \quad \bar{f}_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{F}_j \bar{\omega}^{j\lambda} \quad (3.30)$$

$$F_k = \sum_{\lambda=0}^{n-1} f_\lambda \omega^{k\lambda}, \quad \bar{F}_k = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \bar{f}_\lambda \omega^{k\lambda} \quad (3.31)$$

$$v_0 = V, \quad v_\lambda = 0, \lambda \neq 0 \quad (3.32)$$

$$\bar{v}_0 = \bar{V}, \quad \bar{v}_\lambda = 0, \lambda \neq 0 \quad (3.33)$$

其中 $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}}$  and  $\bar{\omega} = e^{-\frac{2\pi}{n}}$ 。

这样, 上述细分关系, 当 $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} \bar{e}_\lambda &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{E}_j \bar{\omega}^{j\lambda} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{3}{8}V + \frac{3}{8}E_j + \frac{1}{16}(E_{j-1} + E_{j+1}) + \frac{1}{16}(F_{j-1} + F_j) \right) \bar{\omega}^{j\lambda} \\ &= \frac{3}{8}e_\lambda + \frac{1}{16}(\omega^\lambda + \omega^{-\lambda})e_\lambda + \frac{1}{16}(1 + \omega^{-k})f_\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_\lambda &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{F}_j \bar{\omega}^{j\lambda} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{1}{4}V + \frac{1}{4}(E_j + E_{j+1}) + \frac{1}{4}F_j \right) \bar{\omega}^{j\lambda} \\ &= \frac{1}{4}f_\lambda + \frac{1}{4}(1 + \omega^\lambda)e_\lambda \end{aligned}$$

当 $\lambda = 0$ , 注意到:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{4n-7}{4n}V + \frac{3}{2n^2} \sum_{i=0}^{n-1} E_i + \frac{1}{4n^2} \sum_{i=0}^{n-1} F_i \\ &= \frac{(n-2)V + \sum_{i=0}^{n-1} E_i + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{F}_i}{n} \end{aligned}$$

代入即可得:

$$\begin{aligned}\bar{v}_0 &= \frac{1}{4n}f_0 + \frac{3}{2n}e_0 + \frac{4n-7}{4n}v_0 \\ \bar{e}_0 &= \frac{1}{8}f_0 + \frac{1}{2}e_0 + \frac{3}{8}v_0 \\ \bar{f}_0 &= \frac{1}{4}f_0 + \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{4}v_0\end{aligned}$$

所以, 如果记

$$\begin{aligned}p &= [v_0, e_0, f_0, \dots, e_{n-1}, f_{n-1}]^T \\ \bar{p} &= [\bar{v}_0, \bar{e}_0, \bar{f}_0, \dots, \bar{e}_{n-1}, \bar{f}_{n-1}]^T\end{aligned}$$

则  $\bar{p} = mp$ , 这里

$$m = \begin{pmatrix} T_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

其中:

$$\begin{aligned}T_0 &= \begin{pmatrix} \frac{4n-7}{4n} & \frac{3}{2n} & \frac{1}{4n} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ T_k &= \begin{pmatrix} \frac{3}{8} + \frac{1}{16}(\omega^k + \omega^{-k}) & \frac{1}{16}(1 + \omega^{-k}) \\ \frac{1}{4}(1 + \omega^k) & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

可以求出  $T_0$  的三个特征值是  $1, \frac{3n-7+\sqrt{5n^2-30n+49}}{8n}, \frac{3n-7-\sqrt{5n^2-30n+49}}{8n}$ 。而对于  $k \neq 0$ ,  $T_k$  的两个特征值是

$$\lambda_{1,2}^k = \frac{\omega^k + 5 \pm \sqrt{(\omega^k + 9)(\omega^k + 1)}}{16}$$

**说明 3.4** 可以看出, 离散傅里叶变换是求解循环矩阵或者分块循环矩阵特征值的一个利器, 在实际的计算中具有非常重要的地位。

### §3.8.3 快速傅里叶变换

有限长序列可以通过离散傅里叶变换(DFT) 将其频域也离散化成有限长序列。但其计算量太大, 很难实时地处理问题, 因此引出了快速傅里叶变换(FFT)。1965年, Cooley和Tukey提出了计算离散傅里叶变换(DFT)的快速算法, 将DFT的运算量减少了几个数量级。从此, 对快速傅里叶变换(FFT)算法的研究便不断深

入, 数字信号处理这门新兴学科也随FFT的出现和发展而迅速发展。FFT在离散傅里叶反变换、线性卷积和线性相关等方面也有重要应用。

快速傅氏变换是根据离散傅氏变换的奇、偶、虚、实等特性, 对离散傅立叶变换的算法进行改进获得的。它对傅氏变换的理论并没有新的发现, 但是对于在计算机系统或者说数字系统中应用离散傅立叶变换, 可以说是进了一大步。FFT的基本思想是把原始的 $N$ 点序列, 依次分解成一系列的短序列。充分利用DFT计算式中指数因子所具有的对称性质和周期性质, 进而求出这些短序列相应的DFT并进行适当组合, 达到删除重复计算, 减少乘法运算和简化结构的目的。

为了理解快速傅里叶变换, 我们重新来审视一下离散傅里叶变换。对于给定的 $y = \{y_k\}, k = 0, \dots, n-1$ , 如果我们记一个 $n-1$ 次多项式 $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j x^j$ , 即 $\{y_k\}$ 对应到一个 $n-1$ 次多项式的系数, 那么它的离散傅里叶变换则是 $\hat{y}_k = f(\bar{\omega}_n^k)$ , 即离散傅里叶变换则是这个多项式在 $n$ 个不同点的值。因此, 离散傅里叶变换和逆变换可以认为是: 给定一个 $n-1$ 次多项式, 求他在 $n$ 个不同点的值(离散傅里叶变换), 那么这些值也可以完全确定原来的多项式(离散傅里叶逆变换)。所以, 一般来说, 这个过程的复杂度是 $O(n^2)$ 的, 因为对于每一个点都需要一个 $n-1$ 次多项式的求值。但是, 这里我们求值的点是非常特殊的, 它们是 $x^n = 1$ 的 $n$ 个根。这个特殊性就带来了下面特殊的算法, 就是FFT。

首先, 我们假设 $n = 2m$ , 那么我们可以将多项式 $f(x)$ 按照奇数项和偶数项分成两个部分, 如果记

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} x^j$$

$$f_2(x) = \sum_{j=0}^{m-1} y_{2j+1} x^j$$

则

$$f(x) = f_1(x^2) + x f_2(x^2).$$

从而, 对于 $0 \leq k \leq m-1$

$$f(\bar{\omega}_n^k) = f_1(\bar{\omega}_n^{2k}) + \bar{\omega}_n^k f_2((\bar{\omega}_n^{2k}))$$

$$= f_1(\bar{\omega}_{\frac{n}{2}}^k) + \bar{\omega}_n^k f_2((\bar{\omega}_{\frac{n}{2}}^k))$$

而对于 $m \leq k \leq n-1$

$$f(\bar{\omega}_n^{k+m}) = f_1(\bar{\omega}_n^{2k}) + \bar{\omega}_n^k f_2((\bar{\omega}_n^{2k}))$$

$$= f_1(\bar{\omega}_{\frac{n}{2}}^k) - \bar{\omega}_n^k f_2((\bar{\omega}_{\frac{n}{2}}^k))$$

经过这样的变换，我们发现 $2m$ 个点的傅里叶变换可以分成两个 $m$ 个点的傅里叶变换和 $O(n)$ 次新的运算。换而言之，假设一次傅里叶变换的复杂度为 $T(n)$ ，则

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n).$$

从而 $T(n) = O(n \log(n))$ 。事实上，我们可以证明 $T(n) = \frac{n}{2} \log(n) - n + 1$ 。

上面给出了FFT算法的技术基础，下面对算法的细节做进一步的阐述。快速FFT在实现上还具有下面几个特征。

### 1. 蝶形运算：

从上面的计算可以看出，快速傅里叶变换可以简化成给定 $a$ 、 $b$ 和 $w$ ，计算 $a + bw$ 和 $a - bw$ 。图3.19(a)为实现这一运算的一般方法，它需要两次乘法、两次加减法。考虑到 $-bw$ 和 $bw$ 两个乘法仅相差一负号，可将图3.19(a)简化成图3.19(b)，此时仅需一次乘法、两次加减法。上述运算结构像一蝴蝶通常称作蝶形运算结构，采用这种表示法，就可以将以上所讨论的分解过程用下图表示。图3.20给出了八个点的快速傅里叶变换的示意图。

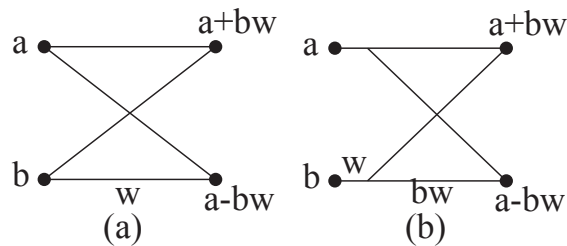


图 3.19 蝶形运算

### 2. 原位计算：

当数据输入到存储器中以后，每一级运算的结果仍然储存在同一组存储器中，直到最后输出，中间无需其它存储器，这叫原位计算。每一级运算均可在原位进行，这种原位运算结构可节省存储单元，降低设备成本，还可节省寻址的时间。

### 3. 序数重排：

对按时间抽取FFT的原位运算结构，当运算完毕时，正好顺序存放着 $0, 1, \dots, 2^p - 1$ ，因此可直接按顺序输出，但这种原位运算的输入的系数却不能按这种自然顺序存入存储单元中，而是按 $0, 2^{p-1}, 2, \dots$ 的顺序存入存储单元，这种顺序看起来

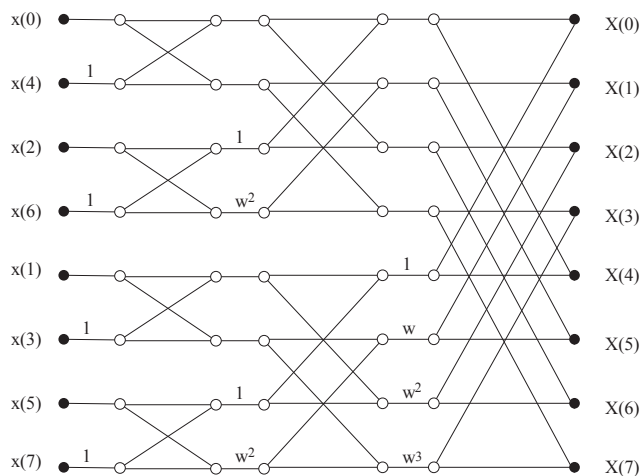


图 3.20 八个点的快速傅里叶变换示意图

相当杂乱，然而它也是有规律的。当用二进制表示这个顺序时，它正好是“码位倒置”的顺序。例如，原来的自然顺序应是1的地方，现在放着 $2^{p-1}$ ，用二进制码表示这一规律时，则是在二进制对应位置 $(i_0, \dots, i_{p-1})$ 的点存储 $(i_{p-1}, \dots, i_0)$ 的信息。

**例 3.31** 利用快速傅里叶变换计算离散卷积。

首先我们考虑周期卷积。给定 $y, z \in \mathbb{S}_n$ ，我们需要计算

$$y * z = \sum_{j=0}^{n-1} y_j z_{k-j}$$

需要 $n^2$ 次乘法。但是利用快速傅里叶变换可以加速卷积的计算。事实上，由卷积定理

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_n[y * z] &= \mathfrak{F}_n[y] \mathfrak{F}_n[z] \\ \mathfrak{F}_n[y \times z] &= \frac{1}{n} \mathfrak{F}_n[y] * \mathfrak{F}_n[z] \end{aligned}$$

如果 $n = 2^L$ ，我们有下面的快速算法：

1. 利用快速傅里叶变换计算 $\mathfrak{F}_n[y]$ 和 $\mathfrak{F}_n[z]$ ；

2. 计算  $\mathfrak{F}_n[y]\mathfrak{F}_n[z]$

3. 利用快速傅里叶变换计算  $\mathfrak{F}_n^{-1}[\mathfrak{F}_n[y]\mathfrak{F}_n[z]]$

可以看出这个时候的复杂度是

$$2O(n \log(n)) + n + O(n \log(n)).$$

虽然整个计算过程不是很直接,但是最终的计算在复杂度上是  $\frac{3n}{2} \log(n) - 2n + 3$ , 所以对于比较大的  $n$ , 新的方法计算会快很多。

如果  $y, z$  是非周期序列, 上面的算法需要稍微修改一下。假设  $k < 0$  or  $k \geq M$ ,  $y_k = 0$ , 而  $k < 0$  or  $k \geq Q$  时,  $z_k = 0$ , 其中  $Q \leq M$ 。此时, 卷积就是

$$(y * z)_k = \sum_{j=0}^{Q-1} y_{k-j} z_j, k = 0, 1, \dots, M + Q - 2.$$

这个时候的计算复杂度是  $MQ$  次乘法。令  $n$  是满足  $n \geq M + Q - 2$  的最小的 2 的整数次幂, 并将  $y, z$  看出周期序列就可以利用周期的离散卷积的计算, 复杂度是  $\frac{3n}{2} \log(n) - 2n + 3$ 。

但是如果  $M$  和  $Q$  相差很大, 那么上述方法可能会失效。比如  $Q = 5$ ,  $M = 1000$ , 直接计算需要 4000 次乘法, 但是用新的方法需要大约  $10^4$  次乘法。

**例 3.32** 利用多项式的切比雪夫表示形式。

我们知道切比雪夫多项式在应用数学中有着非常重要的地位。切比雪夫多项式定义是  $T_n(\cos x) = \cos nx, x \in [0, \pi]$ 。注意到切比雪夫多项式  $T_k(x), k = 0, \dots, n$  也是不超过  $n$  次多项式空间  $P_n$  的一组基函数。从而对任意的  $f(x) \in P_n$ , 存在唯一的  $a_j$ , 使得

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j T_j(x).$$

下面我们希望解决的问题是快速计算  $a_j$ 。

令  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, k = 0, \dots, n$ , 则对  $0 \leq k \leq n$ ,

$$\begin{aligned} y_k = f(x_k) &= \sum_{j=0}^n a_j T_j(x_k) = \sum_{j=0}^n a_j \cos \frac{jk\pi}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n a_j \cos \frac{jk\pi}{n} + \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^0 a_{-j} \cos \frac{jk\pi}{n} \\ &\doteq \sum_{j=-n}^n c_j \omega^{jk} \end{aligned}$$

其中:

$$\omega = e^{\frac{j\pi}{n}},$$

$$c_j = \begin{cases} \frac{a_j}{2}, & 0 < j \leq n; \\ a_0, & j = 0; \\ -\frac{a_{-j}}{2}, & -n \leq j < 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

如果把  $\{y_k\}_0^n$  延拓成周期为  $2n$  的序列, 则对任意的  $0 \leq p \leq n$ ,

$$\begin{aligned} r_p &= \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \bar{\omega}^{pk} = \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{j=-n}^n c_j \omega^{(j-p)k} \\ &= \sum_{j=-n}^n c_j \left( \sum_{k=0}^{2n-1} \omega^{(j-p)k} \right) \end{aligned}$$

可得:

$$\begin{aligned} r_p &= 2nc_p, p = 0, \dots, n-1 \\ r_n &= 4nc_n \end{aligned}$$

所以

$$a_j = \begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \bar{\omega}^{jk}, & j = 0, n; \\ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \bar{\omega}^{jk}, & j = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (3.36)$$

至此, 我们得到从  $y_k, k = 0, 1, \dots, n$  出发得到  $a_k$  的算法:

1. 计算  $y_{2n-k} = y_k, k = 1, \dots, n-1$ ;
2. 利用离散傅里叶变换计算

$$\{y_0, y_1, \dots, y_{2n-1}\} \rightarrow \{Y_0, Y_1, \dots, Y_{2n-1}\}$$

3. 计算  $a_k = \frac{Y_k}{n}, a_0 = \frac{Y_0}{2n}, a_n = \frac{Y_n}{2n}$ 。

### §3.8.4 离散滤波器

连续傅里叶变换中的线性时不变滤波器的相关结果可以推广到离散的情形。模拟信号经过采样后得到离散的数字序列  $x = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ , 其中指标  $k$  相当于时间。离散信号也称为时间序列。

一个序列的时不变算子  $T_p$ :

$$[T_p(x)]_k = x_{k-p}.$$

即算子  $T_p$  将序列  $x$  向右平移了  $p$  个单位。



**定义 3.13** 把一个序列 $x$ 变成 $y$ 的算子 $F: x \rightarrow y$ 是时不变的是指 $F(T_p(x)) = T_p(F(x))$ 。

可以看出这个定义就是联系时不变滤波器的离散版本。和连续时不变滤波器类似，离散也有相似的结论。

**定理 3.10** 如果 $F$ 是离散信号空间上的线性时不变算子，则存在序列 $f$ ，使得

$$F(x) = f * x,$$

反之结论也成立。

**证明** 令 $e^n$ 表示单位脉冲序列，即

$$e_k^n = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对任意序列 $x$ ，有

$$x = \sum_{n \in Z} e^n x_n,$$

所以

$$F(x) = \sum_{n \in Z} F(e^n x_n) = \sum_{n \in Z} F(e^n) x_n.$$

令 $f^n = F(e^n)$ 。由于 $F$ 是时不变的，因此对任意的 $p \in Z$ ，有

$$\begin{aligned} T_p(f^n) &= T_p(F(e^n)) \\ &= F(T_p(e^n)) \\ &= F(e^{n+p}) = f^{n+p} \end{aligned}$$

另一方面，有 $T_p$ 的定义，可得

$$(T_p(f^n))_k = f_{k-p}^n$$

所以：

$$f_k^{n+p} = f_{k-p}^n$$

令 $n = 0$ ，则对任意的 $p \in Z$ ，有

$$f_k^p = f_{k-p}^0$$

所以，有：

$$\begin{aligned} (F(x))_k &= \sum_{n \in Z} x_n (F(e^n))_k \\ &= \sum_{n \in Z} x_n f_k^n \\ &= \sum_{n \in Z} x_n f_{k-n}^0 \end{aligned}$$

上式表明

$$F(x) = f * x,$$

其中  $f = f^0$ 。反之, 如果  $F(x) = f * x$ , 则首先  $F$  是线性的, 同时

$$\begin{aligned} (F(T_p(x)))_k &= (f * T_p(x))_k \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (T_p(x))_n f_{k-n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n-p} f_{k-n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n f_{k-p-n} \\ &= (f * x)_{k-p} \\ &= (T_p(F(x)))_k \end{aligned}$$

即算子  $F$  是线性时不变的。

#

### §3.9 稀疏傅里叶变换\*

钢琴的每个琴键都对应一个特定频率的声音。例如, 国际标准音A对应440赫兹, 因此当有琴键按下A时, 你听到的声音就是一个完美的正弦波, 振荡在440赫兹。同样, 中央C对应的频率约为261赫兹声波。如果几个音符同时演奏, 那么这几个各不相关的声音结合起来, 就创造一个全新的独特声音。它不再只是单一的频率, 而是几个频率的结合。傅立叶变换可以让我们将这个新的声音解构为原始的频率, 从本质上得到这个和弦是由哪些琴键组成的。总体来说, 一个信号的傅里叶变换就是将每个“纯”频率相加得到最终的输出结果, 如图3.21所示。

近些年人们将目光集中于信号自身的特征, 开发出了具有划时代意义的稀疏傅里叶变换 (SFFT) [3]。随着数据采集能力的不断提高, 采用传统的采样频率会获得海量的数据, 这给数据的压缩和传输提出极大挑战。但单纯更宽的频域并不意味着频谱更宽。实验证明, 视频信号中有89%的频率是不必存在的。实际上, 很多应用中, 信号大部分的傅里叶系数都很小, 只有少部分的系数是不可忽略的, 也是信号传递中必不可少的频率值。这也被称为信号的稀疏性。如果一个信号只有  $K$  个频率值非零, 我们称之为  $K$ -稀疏。注意: 这一节以下所有的下标均在模  $n$  的意义下。

#### §3.9.1 SFFT的理论框架

对一个长度为  $n$  的序列  $x$  对应DFT为

$$\hat{x}_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \bar{\omega}^{jk}, k = 0, \dots, n-1, \quad (3.37)$$

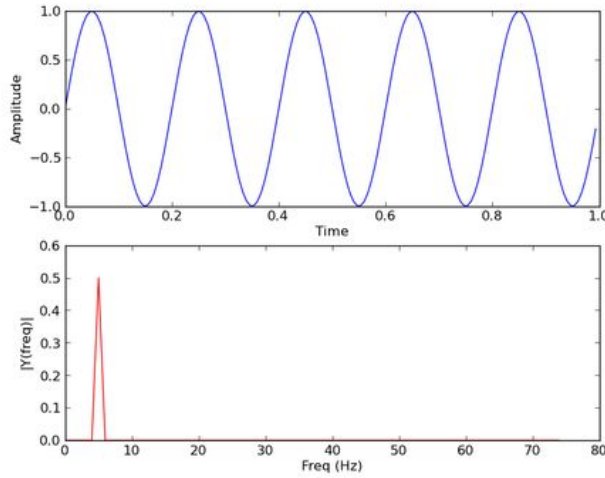


图 3.21 傅里叶变换就是输出信号的“纯”频率

其中,  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 。

假设 $x$ 是稀疏的,我们期望寻找到一种“输出感知”算法,可以确定 $K$ 个大值点的坐标,得到一个 $K$ -稀疏的频域近似值 $\hat{x}'$ 。一般有两种准则用来衡量近似效果:

$$\|\hat{x} - \hat{x}'\|_2 \leq C\|\hat{x} - y\|_2 \tag{3.38}$$

$$\|\hat{x} - \hat{x}'\|_\infty^2 \leq \epsilon\|\hat{x} - y\|_2^2 + \delta\|x\|_1^2 \tag{3.39}$$

这里的 $y$ 是使得 $\|\hat{x} - y\|_2$ 最小的 $K$ -稀疏序列。式3.38被称为 $l_2/l_2$ 准则,它约束了估计谱 $\hat{x}'$ 与实际谱 $\hat{x}$ 之间的整体误差。式3.39被称为 $l_\infty/l_2$ 准则,精度参数 $\epsilon > 0, \delta = 1/n^{o(1)}$ ,它约束了 $\hat{x}'$ 对 $\hat{x}$ 的每个系数都得到良好近似。

为了简化说明,设正整数 $B$ 整除 $n$ 。SFFT的核心思想是按照给定规则将 $n$ 个频域点投入到 $B$ 个“筐”中,因为频域是稀疏的,各个大值点将会以很高的概率孤立存在于一些“筐”中,为了避免大值点出现于同一个“筐”中,首先对信号频谱进行随机重排,使大值点分散开,再通过滤波器实现分筐;原长为 $n$ 的序列被 $B$ 个“筐”分为 $B$ 个短序列后,将各“筐”中频点叠加,即对 $B$ 个短序列做FFT运算,再对频域以间隔 $n/B$ 进行降采样,这样可以以极高的概率保证取样到所有大值点;根据降采样FFT的结果,确定大值点的值和所在的“筐”;最后在被保留的“筐”种使用单频点重构算法,恢复出各大值点在原频谱中的坐标,继而获得精确的原始信号频谱的近似。常见的SFFT的因分筐和重构规则不同而被区分为:哈希映射法、混叠同余法、相位解码法等,但大体的流程都形如图3.22。

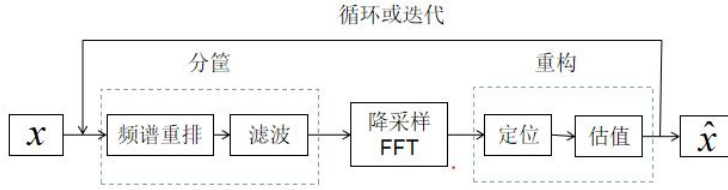


图 3.22 SFFT框架流程

### §3.9.1.1 频谱随机重排

DFT有两个重要性质：假设  $y = \{y_k\} \in \mathbb{S}n, z = \{z_k\} \in \mathbb{S}n$ ,

1. 若  $z_k = \omega^{-pk} y_k$ , 则  $\hat{z}_j = \hat{y}_{j+p}$ 。
2. 若  $z_k = y_{\sigma k}$ , 则  $\hat{z}_j = \hat{y}_{\sigma^{-1}j}$ 。

其中  $\sigma \in \mathbb{N}$  且与  $n$  互质,  $\sigma^{-1}$  是  $\sigma$  的数论倒数, 即满足  $\sigma\sigma^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$ 。

假设  $n$  是 2 的整数次幂 (否则可以通过补零实现), 取  $\sigma$  是任意奇数, 正整数  $\tau < n$ , 定义传递函数  $(P_{\sigma, \tau} x)_j = x_{\sigma j + \tau}$ , 那么

$$(\widehat{P_{\sigma, \tau} x})_j = \hat{x}_{\sigma^{-1}j} \omega^{-\sigma^{-1}\tau j}.$$

或者说

$$(\widehat{P_{\sigma, \tau} x})_{\sigma j} = \hat{x}_j \omega^{-\tau j}.$$

根据数论中的完全剩余系理论,  $\{\sigma j + \tau\}$  是完备的, 而  $\omega^{-\sigma^{-1}\tau j}$  仅影响相位, 因此可以通过时域的变换实现对频谱重排。理论表明, 经过重排后大值点落在同一个“筐”中的概率满足

$$P\{\sigma j \in [-C, C]\} \leq \frac{4C}{n}.$$

### §3.9.1.2 平滑窗函数滤波器

SFFT需要寻找一个时域和频域能量都很集中的滤波器, 来将信号进行分筐。满足要求的首推理想低通滤波, 即时域为矩形窗, 频域为Dirac核, 但在实际中无法实现, 因此通常通过截断并叠加其他窗函数实现。我们知道 *sinc* 函数在频域是矩形窗, 因此一种良好的选择是截断的 *sinc* 函数与 *Gauss* 窗函数相乘。这样构造的平滑窗函数滤波器  $G$ , 其时域有效长度为  $\mathcal{O}(\frac{B}{\alpha} \log \frac{n}{\delta})$ , 参数  $\delta > 0, \alpha > 0$ , 且在频域上满足

1.  $\hat{G}_j = 1, |j| \leq (1 - \alpha) \frac{n}{2B}$ ;

2.  $\hat{G}_j < \delta, |j| \geq \frac{n}{2B}$ ;
3.  $\hat{G}_j \in (\delta, 1), \frac{n}{2B} < |j| < (1 - \alpha) \frac{n}{2B}$ 。

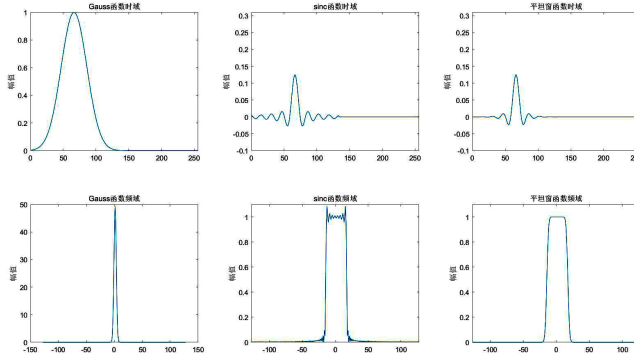


图 3.23 平滑窗函数滤波器的构造

取  $\alpha = 2/B, \delta = 2 * 10^{-9}$ , 标准差为  $\Theta(\sqrt{\log 1/\delta/\alpha})$  的 Gauss 窗函数, 图3.23显示了在  $n = 256, B = 16$  情况下平滑窗函数滤波器的构造过程。值得注意的是, 只要确定原信号的长度  $n$  和稀疏度  $K$ , 就可以构造出平滑滤波器, 这与信号的具体内容无关。所以滤波器的设计可以放置在算法执行前的预处理阶段, 这样可以降低算法的运算量, 同时不必将滤波器数据传输到接收端, 提高传输效率。

### §3.9.1.3 降采样FFT

降采样的目的是通过对频域以等间隔  $n/B$  采样来获得所有大值点

$$\hat{z}_j = \hat{y}_{jn/B}, j = 0, \dots, B - 1. \quad (3.40)$$

然而不能直接对信号频谱进行操作, 而是通过时域的混叠来达到目的

$$z_j = \sum_{k=0}^{n/B-1} y_{j+Bk}, j = 0, \dots, B - 1. \quad (3.41)$$

上式成立是因为

$$\begin{aligned} \hat{y}_{jn/B} &= \sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega^{jkn/B} = \sum_{a=0}^{B-1} \sum_{k=0}^{n/B-1} y_{a+Bk} \omega^{j(a+Bk)n/B} \\ &= \sum_{a=0}^{B-1} \sum_{k=0}^{n/B-1} y_{a+Bk} \omega^{ajn/B} = \sum_{a=0}^{B-1} y_a \omega^{ajn/B} = \hat{z}_j \end{aligned}$$

图3.24显示了对重排后的信号经过窗函数滤波, 再进行降采样的结果。

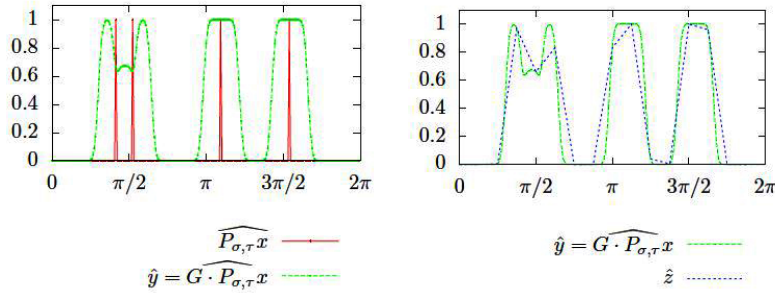


图 3.24 加窗与降采样

#### §3.9.1.4 重构与整体流程

下面以哈希映射法为例介绍重构过程, 主要分为三步: 哈希映射, 定位循环和估值循环。为了避免混淆, 我们将整个算法流程展示出来, 并将之分为内外两个循环。为了平衡分筐和FFT计算量, 可以取  $B \approx \sqrt{nK}$  且整除  $n$ 。

内循环:

1. 频谱重排: 选择参数  $\sigma, \tau$  ( $\sigma$  为奇数), 对原始信号  $x$  进行重排, 得到  $p = P_{\sigma, \tau} x$ ;
2. 窗函数滤波: 将  $p$  通过预设的平滑窗函数滤波器  $G$ , 得到  $y = G \cdot p$ ;
3. 降采样FFT: 利用式3.41获得长度为  $B$  的序列  $z$ ;
4. 哈希映射: 定义哈希映射函数

$$h_{\sigma} : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, B-1\}, h_{\sigma}(i) = \text{round}(\sigma i B / n),$$

这里  $\text{round}$  表示四舍五入。设偏移量向量

$$o_{\sigma} : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{-n/(2B), \dots, n/(2B)\}, o_{\sigma}(i) = \sigma i - h_{\sigma}(i) n / B;$$

5. 定位循环: 设集合  $J$  包含  $z$  中  $dK$  个最大值的坐标, 通过哈希映射得到  $J$  的原像  $I_r = \{k \in [0, n-1] | h_{\sigma}(k) \in J\}$ ,  $I_r$  的大小为  $dKn/B$ ;
6. 估值循环: 对每个  $I_r$  中的  $k$ , 计算对应的频率值

$$\hat{x}'_k = \hat{z}_{h_{\sigma}(k)} \omega^{\tau k} / \hat{G}_{o_{\sigma}(i)}$$

。

经过一次内循环就获得了对原始信号的一次定位和重构, 为了获得更好的效果, 需要进行外循环, 也是整个算法的流程:

1. 选择合适的外循环次数  $L = \mathcal{O}(\log n)$ , 筐数  $B = \mathcal{O}(\sqrt{nK})$ , 定位密度参数  $d$ ;
2. 对  $r = \{1, \dots, L\}$ , 进行定位循环, 得到定位估计  $I_r$ ;
3. 令  $I = \cup_{r=1}^L I_r$ , 对每个  $I$  中的  $k$ , 计算  $s_k = |\{r | k \in I_r\}|$  即每个估计出现的次数;
4. 令  $I' = \{k \in I | s_k \geq L/2\}$ , 包含所有目标频点;
5. 对  $r = \{1, \dots, L\}$ , 对  $I'$  进行估值循环, 得到  $\hat{x}_r$ ;
6. 对  $k \in I'$ , 取最终估计  $\hat{x}'_k = \text{median}(\{\hat{x}_k^r | k \in I'\})$ , 这里 *median* 表示取实部和虚部分别取中值。

理论表明, SFFT 在满足  $l_\infty/l_2$  准则的同时, 可以以概率  $1 - \frac{1}{n}$  重构出原信号的频谱, 且平均时间复杂度为  $\mathcal{O}(K \log n \log \frac{n}{K})$ , 在确定信号为  $K$ -稀疏的情况下可以达到  $\mathcal{O}(K \log n)$ , 因此只要信号的稀疏度满足  $K = o(n)$ , SFFT 就是 FFT 的良好替代。这样的稀疏度要求是很容易满足的。迄今为止, SFFT 已经在医学成像、频谱感知、GPS 同步、无线通信、光场摄影、雷达等领域中被广泛应用, 且在核磁共振、DNA 测序、地震数据分析、无线天文学等方面显示出巨大应用潜力。

### §3.9.2 稀疏傅里叶变换在实际中的应用

那么, 稀疏傅里叶变换在实际生产应用中又能发挥出什么作用呢? 下面简单介绍稀疏傅里叶变换在频谱共享、医学成像、光场摄影等领域中的应用。

- 频谱共享:

美国联邦通讯委员会 FCC 曾预言在 2013 年世界会迎来一次频谱危机。联邦通讯委员会主席朱利叶斯·格纳考斯基阐述称: “移动通信的爆炸性增长已经超越了我们的步伐。如果我们不采取行动以更新我们的 21 世纪频谱政策, 就将碰撞——频谱危机——这将扼杀美国的创新和经济增长, 并且浪费我们在移动通信领导全球的机会。” 一般来说, 绝大多数的频谱并没有被利用, 而有限的一些频谱利用率确高达 100%。因此频谱危机的解决方案就呼之欲出了, 那就是频带共享: 需要寻找没有使用过的频段。但这就带来了新的问题: 注意到我们已经利用的频带都处在低频段, 我们想要充分利用高频段, 但是如何捕获对应的信号呢? 这里就可以利用稀疏傅里叶变换。频谱占用率满足稀疏的性质, 如果采用稀疏傅里叶变换的原理, 可以用降低传送准确率的代价换取低成本。

- 医学成像:

磁共振波谱 (MRS) 是一种新的脑功能检查技术和唯一无创性检测活体组织器

官能量代谢、生化改变和特定化合物定量分析的技术。MRS的原理在某些方面与MRI相同,要求短的射频脉冲以激励原子核,采集到的信号称为自由感应衰减信号,将这种信号通过傅立叶变换变成波谱。MRS成像的基本原理是依据化学位移和J-耦合两种物理现象。由于化学位移不同,不同化合物可以根据其在MRS上共振峰的位置不同加以区别。峰值在横轴上的位置代表物质的种类,波峰的高度或波峰下的面积代表物质的数量,化合物的含量亦可用图谱色阶表示。MRS有两大问题,阻碍了在实际中的应用。一是采集时间过长,病人需要在机器中待40分钟-1小时才能完成采集。二是人工采集窗口容易造成波谱混叠,造成不同化合物之间难以区分。但这带来一个问题就是对单位冲击响应函数的要求非常高。在没有延时的时候对卷积结果离散化采样时没有问题;但只要有时延,对卷积结果采样,就不再是一个冲击响应函数了,而是一个有一定带宽的频谱。这个频谱函数的尾巴会在采样后造成频谱混叠,使信号失真。而稀疏重构则能够解决这些问题。

- 光场摄影:

光场摄影的原理是通过在普通相机镜头(主镜头)焦距处加微透镜阵列实现记录光线,再通过后期算法(傅里叶切片定理,光场成像算法)数字变焦。这样,光线通过主镜头后,打到微透镜阵列上,并再次成像。那么,放在微透镜阵列后的像素,尽管仍然只记录了光线的强度信息,但却因其相对于某个微透镜的位置而记录了光线的方向信息。即,如微透镜阵列是 $10 \times 10$ ,像素阵列是 $50 \times 50$ ,则每个微透镜分到 $5 \times 5$ 个像素,这25个像素分别记录了通过主透镜的25个不同位置并到达此微透镜的25根光线的强度信息。这样,单纯用微透镜阵列和光电传感器,就相当于记录了通过主透镜的所有光线。在后期处理时,只需要对光线重新追迹即可完成重聚焦,因为光线在自由空间中的传播是可以由两个平面、四个坐标(四维量,学术上称为光场)来唯一表示的,而成像过程只不过是把这个四维光场进行了一个二维积分,从而得到了二维图像。光场相机相当于直接记录了四维光场,不同焦深的图像只不过是在做不同情况下的二维积分罢了。简言之,光场摄影使用来自2D相机阵列的图像生成深度和透视。由于图像之间是相关的,这就导致4D图像频率是稀疏的。这就让通过稀疏傅里叶变换用更少的图像达到同样的效果成为了一个可实现的目标。从下图可以看出,用原始光场数据重构获得的图像和只用11%的原始光场数据重构获得的图像在视觉上几乎看不出差别,但在数据存储量上却节省了近9倍。

**作业 3.1** 1. 试证明如果 $f \in L^1(\mathbb{R})$ , 则 $\hat{f}(\lambda)$ 是 $\lambda$ 的连续函数; 如果 $\hat{f}(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$ , 则 $f(x)$ 连续。

2. 如果 $f \in L^1(\mathbb{R})$ , 那么 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$ 。



3. 利用例子3.7的结果证明:

$$g_\epsilon(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\lambda} e^{-\frac{\epsilon^2 \lambda^2}{4}} d\lambda = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\epsilon^2}}.$$

4. 证明式子3.14中的 $g_\epsilon(u)$ 满足

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int g_\epsilon(x-t) |f(x) - f(t)| dx dt = 0.$$

5. 把定义在区间 $[-2, 2]$ 上的方波函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

看出区间 $[-2, 2]$ 上的周期为4的函数, 试计算其傅里叶级数的系数。

6. 证明: 如果 $\hat{f}(\lambda)$ 是可导的, 且 $\hat{f}(\lambda) = \hat{f}'(\lambda) = 0$ , 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0$$

7. 给出三角波的傅里叶变换的详细计算过程。

8. 试计算例子3.26中的傅里叶变换过程;

9. 证明 $f(x) = e^{-(a+ib)x^2}$ 的傅里叶变换为

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2(a-ib)}} e^{-\frac{a+ib}{4(a^2+b^2)} \lambda^2}$$

10. 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\beta^2}} dt = 1, \beta > 0.$$

11. 计算 $f(t) = \frac{4\sin t - 4t \cos t}{t^3}$ 的傅里叶变换。

12. 设 $f(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$ ,  $g(t) = \frac{\sin bt}{\pi t}$ ,  $a, b > 0$ , 求 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

13. 设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 且 $(f * f)(x) = f(x)$ , 证明 $f(x) = 0$ 。

14. 设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 且 $(f * f)(x) = 0$ , 证明 $f(x) = 0$ 。

15. 通过计算函数  $f(x) = x, -\pi \leq x < \pi$  的傅里叶变换证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

16. 通过计算锯齿波的傅里叶变换证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

17. 利用 Parseval 等式证明下面的等式:

(a)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin at \sin bt}{t^2} dt = \pi \min(a, b).$$

(b)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt = \frac{\pi}{a + b}.$$

18. 计算

(a)

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 \cos xt dt$$

(b)

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^4 dt$$

19. 证明函数  $\varphi(x, a, b) = \begin{cases} e^{-\frac{b^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a; \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$  属于基本函数空间  $D$ 。

20. 证明引理 3.1 ;

21. 证明  $\delta$  函数不是正则的;

22. 证明对任意的  $\varphi \in D$ , 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t) \frac{\sin jt}{t} dt = \varphi(x).$$

23. 证明例子 3.17 中  $\delta$  函数剩余的性质;

24. 证明:

(a)  $e^x \delta = \delta$ ;

(b)  $x \delta' = -\delta$ ;

(c)  $(\sin ax) \delta' = -a \delta$ .

25. 证明:  $\mathfrak{F}_n$  是从  $\mathbb{S}_n$  到  $\mathbb{S}_n$  的线性算子。

26. 证明FFT的复杂度是  $T(n) = O(n \log(n))$ 。

27. 实现切比雪夫插值, 并验证切比雪夫插值多项式可以任意逼近给定的连续函数。



## 第四章 小波变换

傅里叶变换现在已经成为信号处理的最基本最成熟的处理方法之一。究其原因主要有二：其一就是快速傅里叶变换算法的提出，将傅里叶变换的时间减少了一个数量级，二是计算机性能的迅速提高。

两百年来，傅里叶变换在时频分析中发挥了重要的作用，时至今日，仍然有许多学者和工程师在利用傅里叶变换解决数学，物理和工程上的问题。但是从傅里叶变换的式子

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt$$

可以看出，要考察信号 $f$ 频率为 $\lambda$ 的频谱 $|\hat{f}(\lambda)|$ ， $f$ 在整个时间域上的值都要参与运算，而 $f$ 在某个特定时间 $t_0$ 的频率和频谱不能从函数 $\hat{f}(\lambda)$ 给出。这个导致傅里叶变换具有下面明显的缺陷：

1. 只能适用于分析平稳信号，对非平稳信号无能为力。
2. 为了得到信号的频域特征，需要用到信号在时域中的所有信息，甚至是将来信息。
3. 没有局部性，即如果一个信号在某个时间段的一个小的领域中发生了变化，那么信号的整个频域都会受到影响。而且对于频域的变化没有办法定位在哪个时间段发生，也没办法给出改变的大小。
4. 在实际的工程应用中，信号通常既包含高频信息，也包含低频信息。这就要求对高频信息，时间间隔要小，以给出精确的高频信息；而对于低频信息，时间间隔要变宽，以给出一个周期里的完整信息。对此，傅里叶变换无能为力。

为了更加清楚的描述上面所说的问题，这里给一个简单的具体的例子。

例 4.1 给定两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，他们的定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} \cos(3\pi x), & 0 \leq x < 0.5; \\ \cos(15\pi x), & 0.5 \leq x < 1; \\ \cos(25\pi x), & 1 \leq x < 1.5; \\ \cos(55\pi x), & 1.5 \leq x < 2; \\ 0, & \text{else.} \end{cases},$$
$$g(x) = \begin{cases} \cos(55\pi x), & 0 \leq x < 0.5; \\ \cos(25\pi x), & 0.5 \leq x < 1; \\ \cos(15\pi x), & 1 \leq x < 1.5; \\ \cos(3\pi x), & 1.5 \leq x < 2; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}.$$

注意到 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中出现的频率成分是一样的，只是每一个频率成分出现的时间不一样。因此，这是两个完全不同的函数，如图4.1所示。由于傅里叶变换会提取一个信号所有的频率成分，而不管他们出现的时刻，所以，如果我们对这两个函数做傅里叶变换，就会发现他们的傅里叶变换几乎一样，如图4.2和图4.3所示。

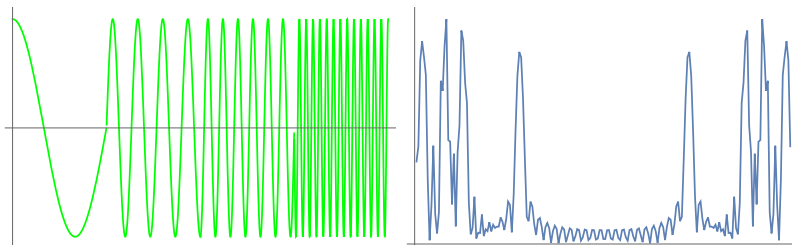


图 4.1 函数 $f(x)$ 和它的傅里叶变换的图像。

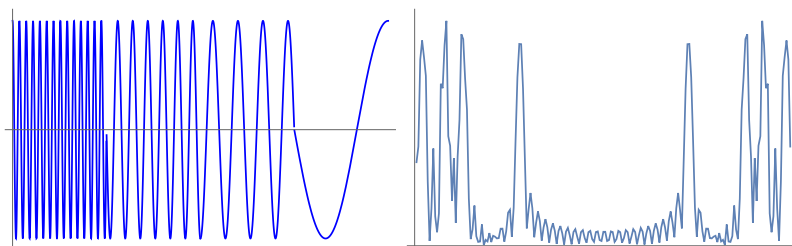


图 4.2 函数 $g(x)$ 和它的傅里叶变换的图像。

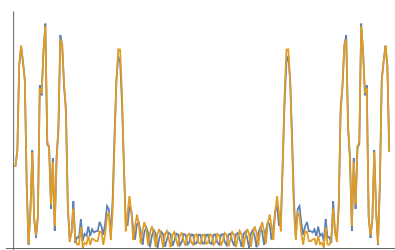


图 4.3  $f(x)$ 和 $g(x)$ 的傅里叶变换的图像的差异。

## §4.1 窗口傅里叶变换

为了克服傅里叶变换的这个缺点, Gabor于60年前引入了窗口傅里叶变换。为此, 我们先引入下面的概念。

**定义 4.1** 一个非平凡的函数  $g \in L^2(\mathbb{R})$  称为窗函数如果  $tg(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 。

**定义 4.2** 对任意的窗函数  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , 其中心  $t^*$  和半径  $\Delta_g$  分别定义为:

$$t^* = \frac{1}{\|g\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}} t|g(t)|^2 dt$$

$$\Delta_g = \frac{1}{\|g\|_{L^2}} \left( \int_{\mathbb{R}} (t - t^*)^2 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

**例 4.2** 高斯型函数  $g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$  的中心和半径分别是  $t^* = 0$  和  $\Delta_{g_\alpha} = \sqrt{\alpha}$ 。

**引理 4.1** 假设  $g(x)$  是一个窗函数, 并且其中心和半径分别是  $t^*$  和  $\Delta_g$ , 则:

1.  $g(ax)$  的中心和半径分别是  $\frac{t^*}{a}$  和  $\frac{\Delta_g}{|a|}$ ;
2.  $ag(x)$  的中心和半径分别是  $t^*$  和  $\Delta_g$ ;
3.  $g(x + x_0)$  的中心和半径分别是  $t^* + x_0$  和  $\Delta_g$ ;
4.  $g(x)e^{i\lambda t}$  的中心和半径分别是  $t^*$  和  $\Delta_g$ ;

例子4.2的计算和引理4.1的证明都不难, 我们将它们留作作为作业。

**定义 4.3** 设  $g$  和  $\hat{g}$  都是窗函数, 且  $\|g\| = 1$ , 则  $f \in L^2(\mathbb{R})$  的窗口傅里叶变换定义为

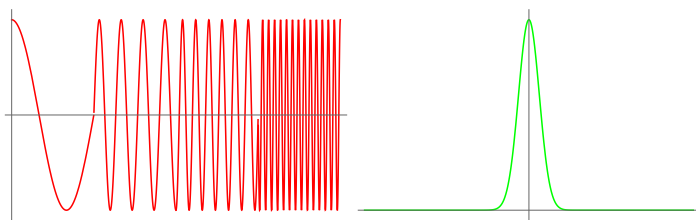
$$\mathcal{S}[f](\lambda, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-b)} e^{-i\lambda t} dt$$

特别的, 如果窗函数取做高斯型函数

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

时, 相应的窗口傅里叶变换称作 Gabor 变换。

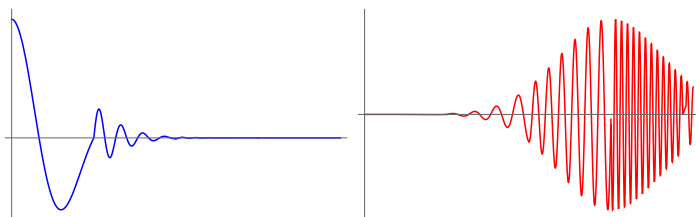
注意到, 窗口傅里叶变换不是直接对原函数  $f(t)$  做傅里叶变换, 而是可以看出对一个新的函数  $f(t)\overline{g(t-b)}$  做傅里叶变换。由于, 窗函数  $g(t-b)$  的主要成分集中在  $[t^* + b - \Delta_g, t^* + b + \Delta_g]$  中, 从而, 随着时间  $b$  的移动, 窗口傅里叶变换可以给出所有时间域中的信息。在窗口傅里叶变换下, 我们重新看一下例子4.1中的函数。

图 4.4 函数 $f(x)$ 和窗函数的图像。

例 4.3 给定一个函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(3\pi x), & 0 \leq x < 0.5; \\ \cos(15\pi x), & 0.5 \leq x < 1; \\ \cos(25\pi x), & 1 \leq x < 1.5; \\ \cos(55\pi x), & 1.5 \leq x < 2; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

取 $g_{0.05}(x)$ 作为窗函数, 其中他们的图像如下图 $a$ 和 $b$ 所示。注意到通过移动 $b$ 我们可得到不同的函数。比如函数 $f(x) \times g_{0.05}(x)$ 和 $f(x) \times g_{0.05}(x - 1.5)$ 就是两个不同的函数(图4.5), 因此他们的傅里叶变换就会随着 $b$ 的变化而变化, 如图4.6所示。

图 4.5 函数 $f(x) \times g_{0.05}(x)$ 和 $f(x) \times g_{0.05}(x - 1.5)$ 的图像。

#### §4.1.1 窗口傅里叶变换的时频窗

由于 $g$ 和 $\hat{g}$ 都是窗函数, 假设它们的中心和半径分别是 $t^*$ ,  $\Delta_g$ 和 $\lambda^*$ ,  $\Delta_{\hat{g}}$ , 记 $W_{\lambda, b}(t) = g(t - b)e^{i\lambda t}$ , 则由窗口傅里叶变换的定义可得

$$\mathcal{S}[f](\lambda, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{W_{\lambda, b}(t)} dt$$



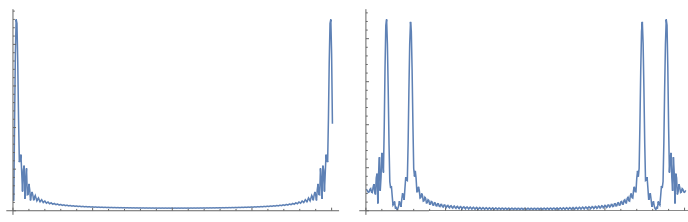


图 4.6 函数  $f(x) \times g_{0.05}(x)$  和  $f(x) \times g_{0.05}(x - 1.5)$  的窗口傅里叶变换的图像。

由于  $W_{\lambda,b}(t)$  也是一个窗函数，并且其中心和半径分别是  $t^* + b$ ,  $\Delta_g$ ，从而窗口傅里叶变换给出了  $f$  在时间窗

$$[t^* + b - \Delta_g, t^* + b + \Delta_g]$$

里面的局部化的信息。

另一方面，令

$$V_{\lambda,b}(\omega) = \mathfrak{F}[W_{\lambda,b}](\omega) = e^{i\lambda b} e^{-i\omega b} \widehat{g}(\omega - \lambda)$$

则  $V_{\lambda,b}(\omega)$  是一个具有中心和半径分别是  $\lambda^* + \lambda$ ,  $\Delta_{\widehat{g}}$  的窗函数。由于

$$\mathcal{S}[f](\lambda, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, W_{\lambda,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \widehat{f}, V_{\lambda,b}(\omega) \rangle$$

于是  $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$  还给出了频率窗

$$[\lambda^* + \lambda - \Delta_{\widehat{g}}, \lambda^* + \lambda + \Delta_{\widehat{g}}]$$

里面的局部化的信息。

综上所述，窗口傅里叶变换  $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$  给出了时频窗

$$[t^* + b - \Delta_g, t^* + b + \Delta_g] \times [\lambda^* + \lambda - \Delta_{\widehat{g}}, \lambda^* + \lambda + \Delta_{\widehat{g}}]$$

里面的局部化的信息。随着分析时间和频率  $(b, \lambda)$  的平移，得到一系列时频窗口。这些窗口的边长只和窗函数相关，和  $(b, \lambda)$  无关，并且具有固定的面积。

当视频指标  $(b, \lambda)$  在  $R^2$  中变化时，窗函数的时频窗覆盖了整个时频平面。可以预见， $f$  可以由它的窗口傅里叶变换  $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$  来恢复。下面的定理给出这个结果并证明能量是守恒的。

**定理 4.1** 如果  $f \in L^2(R)$ ，则

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}[f](\lambda, b) g(t - b) e^{i\lambda t} d\lambda db$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{S}[f](\lambda, b)|^2 d\lambda db$$

**证明** 我们首先证明重构公式, 基本的想法是对它的积分公式中的积分变量  $b$  应用 Parseval 等式。首先, 对于窗口傅里叶变换, 记

$$\begin{aligned} g_\lambda(t) &= g(t)e^{-i\lambda t}, \\ f_\lambda(b) &= \mathcal{S}[f](\lambda, b). \end{aligned}$$

由于  $g(t) = g(-t)$ , 所以

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[f](\lambda, b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda b} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t-b)e^{i\lambda(t-b)}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda b} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g_\lambda(b-t)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda b} f * \overline{g_\lambda(b)}. \end{aligned}$$

因此,  $f_\lambda(b)$  关于  $b$  的傅里叶变换是

$$\widehat{f}_\lambda(\omega) = \widehat{f}(\omega + \lambda) \overline{\widehat{g}_\lambda(\omega + \lambda)} = \widehat{f}(\omega + \lambda) \overline{\widehat{g}(\omega)}$$

又  $g(t-b)$  关于  $b$  的傅里叶变换是  $\widehat{g}(\omega)e^{-it\omega}$ , 因此,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}[f](\lambda, b) \overline{g(t-b)e^{i\lambda t}} d\lambda db = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + \lambda) \overline{\widehat{g}(\omega)}^2 e^{it(\lambda + \omega)} d\omega \right) d\lambda \quad (4.1)$$

如果  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , 我们可以利用 Fubini 定理改变积分顺序, 并利用逆傅里叶变换

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + \lambda) e^{it(\lambda + \omega)} d\lambda = f(t)$$

可得上式等于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + \lambda) e^{it(\lambda + \omega)} d\lambda \right) |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

再利用

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega = 1,$$

就可以得到重构公式。如果  $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ , 可以利用稠密性来证明。

现在我们证明能量守恒公式。因为 $\mathcal{S}[f](\lambda, b)$ 关于 $b$ 的傅里叶变换是 $\widehat{f}(\omega + \lambda)\overline{\widehat{g}(\omega)}$ ，将Plancherel公式应用到能量守恒公式的右边，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{S}[f](\lambda, b)|^2 d\lambda db = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega + \lambda)\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega d\lambda$$

另一方面，利用Fubini定理可证

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega + \lambda)|^2 d\lambda = \|f\|^2$$

从而能量守恒定理得证。 #

窗口傅里叶变换的时频分辨率依赖窗函数的时频跨度，也就是和时频窗口的面积来度量。那么一个自然的问题就是，能不能选择窗函数 $g$ ，使得窗口傅里叶变换的时频窗口都可以得到很好的精度呢，或者说，是否存在窗函数 $g$ ，使得 $\Delta_g$ 和 $\Delta_{\widehat{g}}$ 都很小呢？这个答案是否定的，它就是下面著名的测不准原理。

### §4.2 测不准原理

测不准原理表明一个函数不可能同时在时间域和频率域都具有任意小的分辨率。为了说明这个概念，和窗函数的半径定义类似，我们先给出下面的定义用来刻画一个函数的分辨率。

**定义 4.4** 假设 $f \in L^2(\mathbb{R})$ ，则 $f$ 在点 $a \in \mathbb{R}$ 处的分辨率定义为

$$\Delta_a(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (t - a)^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$$

$f$ 在 $a$ 点的分辨率度量了它的图形在 $t = a$ 处的偏差或者扩展。如果 $f$ 的图形集中在 $t = a$ 点，则 $f$ 的分辨率很小。相反，如果 $f$ 的图形在 $t = a$ 处展开的比较宽，则 $f$ 的分辨率就大。如果我们取 $t$ 是窗函数的中心，那么这个函数的分辨率就是半径的平方。

同理，我们可以定义 $f$ 对应的傅里叶变换得到的分辨率的定义：

$$\Delta_\alpha(\widehat{f}) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (\lambda - \alpha)^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\lambda}{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\lambda} \quad (4.2)$$

下面给出测不准原理。

**定理 4.2** 假设 $f \in L^2(\mathbb{R})$ ，它在无穷处收敛到0，则对任意的 $a, \alpha \in \mathbb{R}$ ，有

$$\Delta_a(f)\Delta_\alpha(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4} \quad (4.3)$$

**证明** 首先我们证明下面的等式:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \frac{d}{dt} - i\alpha \right) (t-a) \right\} f - \left\{ (t-a) \left( \frac{d}{dt} - i\alpha \right) \right\} f \\ &= f + (t-a)f' - i\alpha(t-a)f - (t-a)(f' - i\alpha f) \\ &= f \end{aligned}$$

上式两边同时取内积

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \left\langle \left\{ \left( \frac{d}{dt} - i\alpha \right) (t-a) \right\} f(t), f(t) \right\rangle - \left\langle \left\{ (t-a) \left( \frac{d}{dt} - i\alpha \right) \right\} f(t), f(t) \right\rangle \\ &= \left\langle (t-a)f(t), \left( -\frac{d}{dt} + i\alpha \right) f(t) \right\rangle - \left\langle \left( \frac{d}{dt} - i\alpha \right) f(t), (t-a)f(t) \right\rangle \\ &= -2\text{Re} \left\langle (t-a)f(t), \left( \frac{d}{dt} - i\alpha \right) f(t) \right\rangle \end{aligned}$$

由Schwarz不等式, 可得

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 2 \left\| \left( \frac{d}{dt} - i\alpha \right) f(t) \right\|_{L^2} \| (t-a)f(t) \|_{L^2}$$

利用Parseval等式和傅里叶变换

$$\mathfrak{F} \left[ \left( \frac{d}{dt} - i\alpha \right) f(t) \right] (\lambda) = i(\lambda - \alpha) \hat{f}(\lambda)$$

可得

$$\left\| \left( \frac{d}{dt} - i\alpha \right) f(t) \right\|_{L^2} = \|(\lambda - \alpha) \hat{f}(\lambda)\|_{L^2}$$

所以, 我们有

$$\|(\lambda - \alpha) \hat{f}(\lambda)\|_{L^2} \| (t-a)f(t) \|_{L^2} \geq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2$$

即

$$\Delta_a(f) \Delta_\alpha(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}$$

#

窗函数的时频窗口大小可以用伸缩变换来调节, 当时其面积是不会改变的。从而, 一般需要在时域分辨率和频域分辨率中做一个折衷。在窗函数的选取上, 一般需要考虑下面几个因素。在数值计算中,  $g$  必须有紧支集, 所以它的傅里叶变换  $\hat{g}$  一定有无穷支集。它是一个主瓣位于  $\lambda = 0$  处的对称函数, 不断振荡并衰减到零。为了使变换的频率分辨率最大化, 必须将  $\hat{g}$  的能量集中在  $\lambda = 0$  附近。下面给出的三个重要的参数来估计  $\hat{g}$  的跨度。

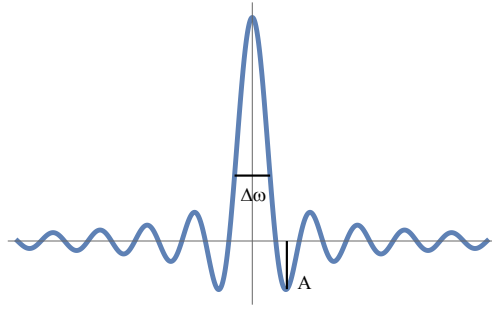


图 4.7  $\hat{g}$  的能量跨度由它的频宽以及第一个旁瓣的最大幅度来度量。

1. 均方频宽  $\Delta$ , 其定义为

$$\frac{|\hat{g}(\Delta/2)|^2}{|\hat{g}(0)|^2} = \frac{1}{2}$$

2. 位于  $\lambda = \pm\lambda_0$  处的第一个旁瓣的最大幅度  $A$ ,

$$A = 10 \log_{10} \frac{|\hat{g}(\lambda_0)|^0}{|\hat{g}(0)|^0}$$

3. 多项式指数  $p$ , 当频率较大时, 它给出了  $\hat{g}$  的渐进衰减性

$$|\hat{g}(\lambda)| = O(\lambda^{-p-1})$$

下面的表格给出的常见的五个窗函数以及它们对应的参数值。

函数名称	函数表达式	$\Delta$	A	p
Rectangle	1	0.89	-13db	0
Hamming	$0.54 + 0.46 \cos 2\pi t$	1.36	-43db	0
Gaussian	$e^{-18t^2}$	1.55	-55db	0
Hanning	$\cos^2 \pi t$	1.44	-32db	2
Blackman	$0.42 + 0.5 \cos 2\pi t + 0.08 \cos 4\pi t$	1.68	-58db	2

窗函数时, 应使窗函数频谱的主瓣宽度应尽量窄, 以获得高的频率分辨能力; 旁瓣衰减应尽量大, 以减少频谱拖尾, 但通常都不能同时满足这两个要求。各种窗的差别主要在于集中于主瓣的能量和分散在所有旁瓣的能量之比。

### §4.3 连续小波变换

窗口傅里叶变换一定程度上克服了傅里叶有变换的缺点,但是仍然有变换结果时间窗宽度不随频率变化的问题。因为在实际的应用中,对高频信息,时间间隔要小,以给出精确的高频信息;而对于低频信息,时间间隔要变宽,以给出一个周期里的完整信息。然而,窗口傅里叶变换的窗函数的时频窗口是固定的。那么你可能会想到,让窗口大小变起来,多做几次窗口傅里叶变换不就可以了吗?事实上,小波变换是这样的思路,不过不是用这个方法。至于为什么不采用可变窗的窗口傅里叶变换呢,我认为是因为这样做冗余会太严重。最关键的,窗口傅里叶变换做不到正交化,这也是它的一大缺陷。小波变换的想法是直接把傅里叶变换的基给换了:将无限长的三角函数基换成了有限长的会衰减的小波基。这样不仅能够获取频率,还可以定位到时间。下面介绍的小波变换可以在波的高频阶段时间分辨率自动提高,在波的低频阶段时间分辨率自动降低,具有自动变焦性质,显示出方便考察信号的细节特征到概貌各种情况的优越性 [4, 5, 6, 7, 8]。

小波分析(wavelet Analysis)是20世纪80年代中期发展起来的一门数学理论和方法,由法国科学家Grossman和Morlet在进行地震信号分析时提出的,随后迅速发展。1985年Meyer在一维情形下证明了小波函数的存在性,并在理论上作了深入研究。Mallat基于多分辨分析思想,提出了对小波应用起重要作用的Mallat算法,它在小波分析中的地位相当于FFT在经典傅里叶变换中的地位。小波分析理论的重要性及应用的广泛性引起了科技界的高度重视。小波分析的出现被认为是傅立叶分析的突破性进展,在逼近论、微分方程、模式识别、计算机视觉、图像处理、非线性科学等方面使用小波分析取得于许多突破性进展。

小波变换的基本思想类似于傅里叶变换,就是用信号在一簇基函数形成空间上的投影表征该信号。经典的傅里叶变换把信号按三角正、余弦基展开,将任意函数表示为具有不同频率的谐波函数的线性迭加,能较好地描述信号的频率特性,但它在空域(时域)上无任何分辨,不能作局部分析。这在理论和应用上都带来了许多不足。为了克服这一缺陷,窗口傅里叶变换得以提出。通过引入一个时间局部化“窗函数”改进了傅里叶变换的不足。但是窗口傅里叶变换的窗口大小是固定的,没有从根本上弥补傅里叶变换的缺陷。而小波变换在时域和频域同时具有良好的局部化性能,有一个满足实际需求的时间频率窗口。与傅里叶变换、窗口傅里叶变换相比,小波变换可以更有效的从信号中提取信息,通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多分辨率分析,解决了傅里叶变换不能解决的许多困难问题,从而小波变化被誉为“数学显微镜”,它是调和分析发展史上里程碑式的进展。

对于平稳信号,处理的理想工具仍然是傅立叶分析。但是在实际应用中的绝大多数信号是非稳定的,而特别适用于非稳定信号的工具就是小波分析。小波分析的应用是与小波分析的理论研究紧密地结合在一起的。它已经在科技信息产业领域取得了令人瞩目的成就。在数学方面,小波变换已用于数值分析、构造快速数值方

法、曲线曲面构造、微分方程求解、控制论等。在信号分析方面,小波变换在滤波、去噪、压缩、传输等方面得到广泛的应用。它可以用于边界的处理与滤波、时频分析、信噪分离与提取弱信号、求分形指数、信号的识别与诊断以及多尺度边缘检测等 [9, 10]。在图象处理方面,图象压缩、分类、识别与诊断等应用也都需要小波变换。它的特点是压缩比高,压缩速度快,压缩后能保持信号与图象的特征不变,且在传递中可以抗干扰。在工程技术上,小波变换还应用于计算机视觉、计算机图形学、曲线设计、湍流、远程宇宙的研究与生物医学方面 [14, 15]。基于小波分析的压缩方法很多,比较成功的有小波包方法,小波域纹理模型方法,小波变换零树压缩,小波变换向量压缩等 [11, 12, 13]。

**定义 4.5** 如果一个函数  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  满足容许性条件

$$C_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda < \infty,$$

则称  $\psi$  为基小波。

如果  $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R})$ , 则  $\widehat{\psi}$  是一个连续有界函数, 所以由容许性条件可得  $\widehat{\psi}(0) = 0$ , 即  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ 。由此可见  $\psi$  具有波动性。又因为  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , 一般来说具有衰减性。因此, 基小波一定是振荡型的, 并且在有限区间外等于零或者很快趋向零, 这就是小波这一名词的由来。

**例 4.4** 下面给出几个常见的基小波的例子:

- Haar小波:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (4.4)$$

则

$$\widehat{\psi}(\lambda) = \frac{4i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i\lambda}{2}} \frac{\sin^2(\frac{\lambda}{4})}{\lambda}$$

- 墨西哥帽子小波:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (4.5)$$

则

$$\widehat{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

• 线性样条小波:

$$\psi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ 1-t, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2}; \\ t-2, & \frac{3}{2} \leq t < 2; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (4.6)$$

那么什么样的函数可以作为一个基小波呢? 这个问题非常复杂, 这里给出一个充分条件. 这个定理的证明可以参考[16].

**定理 4.3** 假设  $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , 且满足下面的条件

1.  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$
2.  $|\psi(t)| \leq \frac{C}{(1+|t|)^{1+\epsilon}}$ ,  $C > 0, \epsilon > 0$ .

则  $\psi$  满足容许性条件, 进而  $\psi$  是一个基小波。

**定义 4.6** 假设  $\psi$  是一个基小波, 将基小波的伸缩和平移得到的小波序列

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

其中  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . 对于  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 其连续小波变换定义为

$$(W_{\psi}f)(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (4.7)$$

**定理 4.4** 假设  $\psi, \phi$  是基小波,  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , 则

- $(W_{\psi}(\alpha f + \beta g))(a,b) = \alpha(W_{\psi}(f))(a,b) + \beta(W_{\psi}(g))(a,b)$
- $(W_{\psi}(T_c f))(a,b) = (W_{\psi}(f))(a,b-c)$ , 其中  $T_c(f) = f(t-c)$ ;
- $(W_{\psi}(D_c f))(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c}}(W_{\psi}(f(t)))(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ , 其中  $D_c f(t) = \frac{1}{c}f(\frac{t}{c})$ ,  $c > 0$ .
- $(W_{\alpha\phi + \beta\psi}(f))(a,b) = \bar{\alpha}(W_{\phi}(f))(a,b) + \bar{\beta}(W_{\psi}(f))(a,b)$
- $(W_{T_c\psi}(f))(a,b) = (W_{\psi}(f))(a,b+ca)$
- $(W_{D_c\psi}(f))(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c}}(W_{\psi}(f))(ac,b)$

这些性质的证明很简单, 作为作业题。



**定理 4.5** 假设  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi$  是一基小波, 则

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi(f))(a, b) \overline{(W_\psi(g))(a, b)} \frac{1}{a^2} da db = \langle f, g \rangle \quad (4.8)$$

特别的,

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(W_\psi(f))(a, b)|^2 \frac{1}{a^2} da db = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (4.9)$$

**证明** 由傅里叶变换

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{a,b}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-it\lambda} dt \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} e^{-ib\lambda} \widehat{\psi}(a\lambda) \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle \\ &= \langle \widehat{f}, \widehat{\psi}_{a,b} \rangle \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{\psi}(a\lambda)} e^{ib\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

设  $F_a(\lambda) = \overline{\widehat{f}(\lambda)} \widehat{\psi}(a\lambda)$ ,  $G_a(\lambda) = \overline{\widehat{g}(\lambda)} \widehat{\psi}(a\lambda)$ , 于是

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(a, b) &= |a|^{\frac{1}{2}} \overline{\widehat{F}_a(b)} \\ (W_\psi g)(a, b) &= |a|^{\frac{1}{2}} \overline{\widehat{G}_a(b)} \end{aligned}$$

由上式可得

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} (W_\psi f)(a, b) \overline{(W_\psi g)(a, b)} db \right) \frac{1}{a^2} da \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{F}_a(b)} \widehat{G}_a(b) db \right) \frac{1}{|a|} da \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{F}_a(\lambda)} \widehat{G}_a(\lambda) d\lambda \right) \frac{1}{|a|} da \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{g}(\lambda)} |\widehat{\psi}(a\lambda)| d\lambda \right) \frac{1}{|a|} da \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{g}(\lambda)} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{|a|} da \right) d\lambda \\ &= C_\psi \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

#

**定理 4.6** 假设 $\psi$ 是基小波,  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 则 $f$ 在连续点有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) (W_\psi(f))(a, b) \frac{1}{a^2} da db \quad (4.10)$$

**证明** 记 $\psi_a(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi(-\frac{t}{a})$ , 并记上式的右端为 $p(t)$ . 代入有

$$(W_\psi(f))(a, b) = f * \bar{\psi}_a(b) \quad (4.11)$$

从而,

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi(f))(a, \cdot) * \psi_a(t) \frac{1}{a^2} da \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} f * \bar{\psi}_a(-\cdot) * \psi_a(t) \frac{1}{a^2} da \end{aligned}$$

这里的黑点表示卷积的积分变量。我们需要证明 $p(t) = f(t)$ , 这等价于证明它们的傅里叶变换相等。事实上,  $p(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \hat{p}(\lambda) &= \frac{2\pi}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) \sqrt{a} \widehat{\psi^*}(a\lambda) \sqrt{a} \widehat{\psi}(a\lambda) \frac{1}{a^2} da \\ &= \frac{2\pi \hat{f}(\lambda)}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(a\lambda)|^2 \frac{1}{a} da \\ &= \frac{2\pi \hat{f}(\lambda)}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\lambda)|^2 \frac{1}{\lambda} d\lambda \\ &= \hat{f}(\lambda) \end{aligned}$$

#

下面我们看看小波的时频窗口。假设 $\psi$ 是一个基小波, 并且 $\psi$ 和它的傅里叶变换 $\widehat{\psi}$ 都是窗函数, 其中心和半径分别是 $t^*$ ,  $\Delta_\psi$ 和 $\lambda^*$ ,  $\Delta_{\widehat{\psi}}$ 。假设我们选择的基小波使得 $\lambda^*$ 是正数, 且在小波的参数序列中 $a > 0$ 。

由于 $\psi$ 是一个窗函数, 所以 $\psi_{a,b}(t)$ 也是一个窗函数, 其中心和半径分别是 $at^* + b$ ,  $a\Delta_\psi$ 。由连续小波变换的定义可知

$$(W_\psi f)(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt$$

可知, 小波变换给出信号在时间窗口

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi]$$

中的局部化信息。

另一方面,  $\widehat{\psi}_{a,b}(\lambda) = |a|^{\frac{1}{2}} e^{-i\lambda b} \widehat{\psi}(a\lambda)$  可知  $\widehat{\psi}_{a,b}(\lambda)$  也是一个窗函数, 其中心和半径分别是  $\frac{\lambda^*}{a}$  和  $\frac{\Delta_{\widehat{\psi}}}{a}$ 。于是由小波变换的频域表示

$$(W_{\psi}f)(a, b) = \langle \widehat{f}, \widehat{\psi}_{a,b} \rangle$$

可知, 小波变换也具有表征信号频域上的局部性质的能力, 它给出了信号在频率窗

$$\left[ \frac{\lambda^*}{a} - \frac{\Delta_{\widehat{\psi}}}{a}, \frac{\lambda^*}{a} + \frac{\Delta_{\widehat{\psi}}}{a} \right]$$

中的局部信息。

综上所述, 连续小波变换具有时频局部化特征, 它给出了时频窗口是

$$[b + at^* - a\Delta_{\psi}, b + at^* + a\Delta_{\psi}] \times \left[ \frac{\lambda^*}{a} - \frac{\Delta_{\widehat{\psi}}}{a}, \frac{\lambda^*}{a} + \frac{\Delta_{\widehat{\psi}}}{a} \right]$$

中的局部信息。和窗口傅里叶变换不同, 当检测高频信息时 (对于小的  $a > 0$ ), 时间窗口自动变窄, 而当检测低频信息时 (对于大的  $a > 0$ ), 时间窗口自动变宽。

## §4.4 二进小波变换

在连续小波变换  $(W_{\psi}f)(a, b)$  的频率窗

$$\left[ \frac{\lambda^*}{a} - \frac{\Delta_{\widehat{\psi}}}{a}, \frac{\lambda^*}{a} + \frac{\Delta_{\widehat{\psi}}}{a} \right]$$

中, 取  $a_j = \frac{1}{2^j}$ , 并且假设  $\lambda^* = 3\Delta_{\widehat{\psi}}$ , 则频率窗变成

$$\left[ 2^{j+1}\Delta_{\widehat{\psi}}, 2^{j+2}\Delta_{\widehat{\psi}} \right]$$

于是, 小波变换  $(W_{\psi}f)(\frac{1}{2^j}, b)$  给出了信号在频率带

$$\left[ 2^{j+1}\Delta_{\widehat{\psi}}, 2^{j+2}\Delta_{\widehat{\psi}} \right]$$

中的局部信息, 同时这些频率带给出了所有的正频率域的一个二进剖分。因此, 由小波变换  $(W_{\psi}f)(\frac{1}{2^j}, b)$  可以得到信号在所有频率域上的信息。

**说明 4.1** 注意条件  $\lambda^* = 3\Delta_{\widehat{\psi}}$  是很容易满足的。事实上, 假设  $\psi$  是一个基小波, 令  $\widetilde{\psi} = e^{i\alpha t}\psi(t)$ , 则  $\widetilde{\psi}$  的傅里叶变换  $\widetilde{\widehat{\psi}} = \widehat{\psi}(\lambda - \alpha)$ 。于是,  $\widetilde{\widehat{\psi}}$  的中心和半径分别是  $\widetilde{\lambda}^* = \lambda^* - \alpha$ ,  $\Delta_{\widetilde{\widehat{\psi}}} = \Delta_{\widehat{\psi}}$ 。从而, 这要我们选择  $\alpha = 3\Delta_{\widehat{\psi}} - \lambda^*$ , 即可使得

$$\widetilde{\lambda}^* = 3\Delta_{\widetilde{\widehat{\psi}}}.$$

**定义 4.7** 一个函数  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  称为二进小波, 如果存在两个正常数  $A$  和  $B$ , 满足  $0 < A \leq B < \infty$ , 使得稳定性条件

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^{-j}\lambda)|^2 \leq B$$

成立. 对于  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 其二进小波变换定义为

$$(W_{\psi}^j f)(b) = 2^{\frac{j}{2}} (W_{\psi} f)(2^{-j}, b), b \in \mathbb{R}$$

**说明 4.2** 这里的稳定性条件等价于对任意的  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$A \|f\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|W_{\psi}^j f\|_{L^2}^2 \leq B \|f\|_{L^2}^2.$$

**定理 4.7** 如果  $\psi$  是二进小波, 则它是满足

$$A \ln(2) \leq \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda \leq B \ln(2)$$

$$A \ln(2) \leq \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(-\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda \leq B \ln(2)$$

的基小波. 特别的, 如果  $A = B$ , 则有

$$C_{\psi} = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda = 4\pi A \ln(2).$$

**证明** 由变量代换可得

$$\int_1^2 \frac{|\widehat{\psi}(2^{-j}\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda,$$

所以由稳定性条件得

$$\int_1^2 \frac{A}{\lambda} d\lambda \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda \leq \int_1^2 \frac{B}{\lambda} d\lambda$$

从而有

$$A \ln 2 \leq \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda \leq B \ln 2$$

同理, 利用

$$\int_{-2}^{-1} \frac{|\widehat{\psi}(2^{-j}\lambda)|^2}{-\lambda} d\lambda = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(-\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda,$$

结合稳定性条件得

$$\int_{-2}^{-1} \frac{A}{-\lambda} d\lambda \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(-\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda \leq \int_{-2}^{-1} \frac{B}{-\lambda} d\lambda$$

从而有

$$A \ln 2 \leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda \leq B \ln 2.$$

#

**定义 4.8** 假设  $\psi$  是一个二进小波, 称

$$\widehat{\psi^*}(\lambda) = \frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^{-k}\lambda)|^2}$$

的傅里叶逆变换  $\psi^* \in L^2(\mathbb{R})$  为  $\psi$  的二进对偶。

**定理 4.8** 假设  $\psi$  是一个二进小波, 则其二进对偶  $\psi^*$  也是一个二进小波, 并且满足

$$\frac{1}{B} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi^*}(2^{-k}\lambda)|^2 \leq \frac{1}{A}$$

此外, 对任意的  $f \in L^2(\mathbb{R})$  有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_{\psi}^j f)(b) 2^j \psi^*(2^j(t-b)) db$$

**证明** 由  $\psi^*$  的傅里叶变换可得

$$\widehat{\psi^*}(2^{-j}\lambda) = \frac{\widehat{\psi}(2^{-j}\lambda)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\lambda)|^2},$$

从而有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi^*}(2^{-j}\lambda)|^2 &= \frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-j}\lambda)|^2}{(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\lambda)|^2)^2} \\ &= \frac{1}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\lambda)|^2} \end{aligned}$$

因此,  $\psi^*$  也是一个二进小波, 并且满足

$$\frac{1}{B} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi^*}(2^{-k}\lambda)|^2 \leq \frac{1}{A}$$

令  $g_j(t) = 2^j \overline{\psi(-2^{-j}t)}$ , 则有

$$\begin{aligned} (W_\psi^j f)(b) &= 2^{\frac{j}{2}} (W_\psi f)\left(\frac{1}{2^j}, b\right) \\ &= 2^j \int_R f(t) \overline{\psi(2^j(t-b))} dt \\ &= (f * g_j)(b). \end{aligned}$$

由  $\widehat{g_j}(\lambda) = -\widehat{\psi}(2^{-j}\lambda)$  可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_R (W_\psi^j f)(b) 2^j \psi^*(2^j(t-b)) db \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \int_R \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\lambda)} \widehat{\psi}^*(2^{-j}\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \widehat{f}(\lambda) e^{it\lambda} d\lambda \\ &= f(t) \end{aligned}$$

#

### §4.5 小波框架和正交小波

为了计算的有效性, 将时间  $b$  离散化

$$b_{j,k} = \frac{k}{2^j} b_0,$$

其中  $j, k$  是整数,  $b_0 > 0$  是一个固定的常数。进一步的, 引入

$$\psi_{b_0;j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k b_0)$$

我们希望考虑的问题是, 对任意的  $f \in L^2(R)$ , 利用连续小波变换的离散形式

$$(W_\psi f)\left(\frac{1}{2^j}, b_{j,k}\right) = \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle$$

来重构  $f$ 。下面从一个统一的框架理论来学习离散的小波变换。

#### §4.5.1 框架理论

框架理论最早是由Duffin和Schaffer在1952年为了解决从非正则样本值  $f(t_n)$  重构带限信号是提出来的, 从采样定理我们知道, 当信号的傅里叶变换是位于某个区间时,  $f$  可以从一些采样点的值完全重构。而Duffin和Schaffer则希望在更加一般的条件下, 对于Hilbert空间中的向量可以通过与至多可数的向量的内积来重构的条件和基本框架。

**定义 4.9** 假设  $\phi_j$  是 Hilbert 空间  $H$  中的序列, 如果存在常数  $A, B$ , 满足  $0 < A \leq B < \infty$ , 使得对任意的  $f \in H$ , 有

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2,$$

则称  $\{\phi_j\}$  是  $H$  中的一个框架.  $A, B$  称为框架的上下界. 如果  $A = B$ , 则称  $\{\phi_j\}$  是  $H$  中的紧框架.

**例 4.5** 设  $H = R^2$ ,  $e_1 = (0, 1)$ ,  $e_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $e_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ . 对任意的  $x = (x_1, x_2) \in R^2$ , 有

$$\sum_{j=1}^3 |\langle x, e_j \rangle|^2 = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{3}{2}\|x\|^2$$

于是,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  是  $H$  中的紧框架, 其中  $A = B = \frac{3}{2}$ . 显然,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  是线性相关, 从而不构成基函数.

**定理 4.9** Hilbert 空间  $H$  中的序列  $\{\phi_j\}$  是标准正交基的充要条件是  $\{\phi_j\}$  构成  $H$  的紧框架, 且  $A = B = 1$ ,  $\|\phi_j\| = 1$ .

**证明** 必要性是显然的, 这里只证明充分性. 由  $\{\phi_j\}$  构成  $H$  的紧框架可知, 对任意的  $f \in H$ , 有

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 = \|f\|^2$$

特别的取  $f = \phi_k$ , 则有

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\langle \phi_k, \phi_j \rangle|^2 = \|\phi_k\|^2 = 1$$

从而,  $\langle \phi_k, \phi_j \rangle = \delta_{j,k}$ . 即序列  $\{\phi_j\}$  是标准正交基. #

**定义 4.10** 设序列  $\{\phi_j\}$  是 Hilbert 空间  $H$  的一个框架, 称线性算子

$$F : H \rightarrow l^2, F(f) = \{\langle f, \phi_j \rangle\}, \forall f \in H,$$

为框架  $\{\phi_j\}$  的分析算子. 称  $F$  的伴随算子

$$F^* : l^2 \rightarrow H, F^*(c) = \sum c_j \phi_j, \forall c = \{c_j\} \in l^2,$$

为框架  $\{\phi_j\}$  的综合算子. 令  $T = F^*F$ , 则

$$T : H \rightarrow H, T(f) = \sum \langle f, \phi_j \rangle \phi_j, \forall f \in H,$$

称  $T$  为框架  $\{\phi_j\}$  的框架算子.

说明 4.3 根据框架算子 $T$ 的定义, 易知

$$\langle T(f), f \rangle = \sum |\langle f, \phi_j \rangle|^2$$

因此, 框架条件等价于, 对任意的 $f \in H$ ,

$$A\langle f, f \rangle \leq \langle T(f), f \rangle \leq B\langle f, f \rangle$$

即

$$AI \leq T \leq BI$$

其中 $I$ 是恒等算子。

定理 4.10 设 $T$ 是Hilbert空间 $H$ 上的一个正有界线性算子, 且 $T$ 的下界是 $a$ , 则 $T$ 是可逆的, 且其逆算子 $T^{-1}$ 以 $a^{-1}$ 为上界。

证明 首先, 证明 $T$ 的像集 $Im(T) = \{Tf \in H, \forall f \in H\}$ 是 $H$ 的一个闭子空间, 这等价于证明 $Im(T)$ 中的任一Cauchy点列 $\{g_n\}$ 在 $Im(T)$ 中极限存在且极限属于 $T$ 的像集 $Im(T)$ 。为此, 设 $f_n \in H$ , 使得 $Tf_n = g_n$ , 由于

$$\begin{aligned} a\|f_n - f_m\|^2 &\leq \langle T(f_n - f_m), (f_n - f_m) \rangle \\ &\leq \|T(f_n - f_m)\| \|f_n - f_m\|, \end{aligned}$$

所以,

$$\|f_n - f_m\| \leq a^{-1} \|g_n - g_m\| \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty.$$

从而,  $\{f_n\}$ 也是 $H$ 中的一个Cauchy列。由 $H$ 的完备性知,  $\{f_n\}$ 在 $H$ 中存在极限 $f$ 。利用算子 $T$ 的连续性, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tf_n = Tf \in Im(T)$$

所以,  $Im(T)$ 为 $H$ 的闭子空间。

其次, 如果 $\langle g, Tf \rangle = 0$ 对一切的 $f$ 成立, 则 $a\|g\|^2 \leq \langle g, Tg \rangle = 0$ , 从而 $g = 0$ , 因此 $Im(T)^\perp = \{0\}$ , 说明 $Im(T) = H$ , 且 $T$ 是可逆的。

此外, 由于 $\forall f \in H$ , 有

$$\begin{aligned} a\|T^{-1}f\|^2 &\leq \langle TT^{-1}f, T^{-1}f \rangle = \langle f, T^{-1}f \rangle \\ &\leq \|f\| \|T^{-1}f\|, \end{aligned}$$

即 $\|T^{-1}f\| \leq a^{-1}\|f\|$ , 所以 $\|T^{-1}\| \leq a^{-1}$ 。 #

引理 4.2 设序列 $\{\phi_j\}$ 是Hilbert空间 $H$ 的一个框架, 其上下界是 $A, B$ ,  $T$ 是相应的框架算子, 则



1.  $T^* = T$ , 且

$$A\|f\| \leq \|T(f)\| \leq B\|f\|$$

2.  $T$ 可逆, 且 $T^{-1}$ 满足

$$\begin{aligned} (T^{-1})^* &= T^{-1} \\ \frac{1}{B}\|f\| &\leq \|T^{-1}(f)\| \leq \frac{1}{A}\|f\| \\ \frac{1}{B}I &\leq T^{-1} \leq \frac{1}{A}I \end{aligned}$$

这个引理的证明作为作业题。

**定理 4.11** 设序列 $\{\phi_j\}$ 是Hilbert空间 $H$ 的一个框架, 其上下界是 $A, B$ ,  $T$ 是相应的框架算子, 令

$$\tilde{\phi}_j = T^{-1}\phi_j$$

则 $\{\tilde{\phi}_j\}$ 是 $H$ 的以 $B^{-1}, A^{-1}$ 为框架界的框架。并称 $\{\tilde{\phi}_j\}$ 为 $\{\phi_j\}$ 的对偶框架。

**证明** 对任意的 $f \in H$ , 有

$$\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle = \langle f, T^{-1}\phi_j \rangle = \langle T^{-1}f, \phi_j \rangle.$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{j \in Z} |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2 &= \sum_{j \in Z} |\langle T^{-1}f, \phi_j \rangle|^2 \\ &= \|F(T^{-1}f)\|^2 \\ &= \langle T^{-1}f, f \rangle. \end{aligned}$$

再由

$$\frac{1}{B}I \leq T^{-1} \leq \frac{1}{A}I$$

可得

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_{j \in Z} |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2$$

#

**定理 4.12** 设 $\{\phi_j\}$ 是Hilbert空间 $H$ 的一个框架,  $\{\tilde{\phi}_j\}$ 为 $\{\phi_j\}$ 的对偶框架, 则对任意的 $f \in H$ ,

$$f = \sum \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j$$

或者

$$f = \sum \langle f, \tilde{\phi}_j \rangle \phi_j$$

证明 对任意的  $f \in H$ , 有

$$\begin{aligned} f &= T^{-1}T(f) \\ &= T^{-1}\left(\sum\langle f, \phi_j\rangle\phi_j\right) \\ &= \sum\langle f, \phi_j\rangle(T^{-1}(\phi_j)) \\ &= \sum\langle f, \phi_j\rangle\tilde{\phi}_j \end{aligned}$$

对于第二个式子, 我们有

$$\begin{aligned} \sum\langle f, \tilde{\phi}_j\rangle\phi_j &= \sum\langle f, T^{-1}(\phi_j)\rangle\phi_j \\ &= \sum\langle T^{-1}(f), \phi_j\rangle\phi_j \\ &= T(T^{-1}(f)) = f \end{aligned}$$

#

说明 4.4 注意到由于  $\{\phi_j\}$  不一定线性无关, 所以上述的展开是不唯一的。那么基于框架的展开有什么样的特殊性呢? 这里我们可以从两个方面来看这个问题。首先我们给出一些记号:

$$\tilde{F}: H \rightarrow l^2, \tilde{F}(f) = \{\langle f, \tilde{\phi}_j\rangle\}, \forall f \in H,$$

$$Im(F) = \{Ff \in H, \forall f \in H\} = Im(\tilde{F}) = \{\tilde{F}f \in H, \forall f \in H\}$$

1. 如果  $f = \sum c_j\phi_j$ , 其中  $\{c_j\}$  不完全等于  $\langle f, \tilde{\phi}_j\rangle$ , 则

$$\sum|c_j|^2 > \sum|\langle f, \tilde{\phi}_j\rangle|^2$$

这说明利用框架  $\{\phi_j\}$  展开是最节省的展开方式。

事实上, 由于  $f = \sum c_j\phi_j$ , 所以  $f = F^*c$ , 其中  $c = \{c_j\}_{j \in Z}$ 。设  $c = a + b$ , 其中  $a \in Im(F) = Im(\tilde{F})$ ,  $b \perp Im(F)$ 。由于  $a \perp b$ , 所以

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

另外, 由于  $a \in Im(F) = Im(\tilde{F})$ , 所以存在  $g \in H$ , 使得  $a = \tilde{F}g$ , 即  $c = \tilde{F}g + b$ , 注意到对任意的  $f \in H$ , 有

$$0 = \langle b, Ff \rangle = \langle F^*b, f \rangle$$

所以  $F^*b = 0$ 。因此

$$f = F^*c = F^*\tilde{F}g + F^*b = g$$

所以  $c = \tilde{F}f + b$ , 且

$$\|c\|^2 = \|\tilde{F}f\|^2 + \|b\|^2 = \sum |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2 + \|b\|^2$$

2. 如果  $f = \sum \langle f, \phi_j \rangle u_j$ , 其中  $\{u_j\}$  不完全等于  $\tilde{\phi}_j$ , 则

$$\sum |\langle f, u_j \rangle|^2 \geq \sum |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2$$

这说明在相同的系数下, 利用框架  $\{\phi_j\}$  展开是最节省的展开方式 (这个证明见作业)。

**例 4.6** 比如在前面的框架的例子中, 我们已经得到

$$v = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \langle v, e_j \rangle e_j, \forall v \in C^2.$$

注意到, 在这个例子中,  $\sum_{j=1}^3 e_j = 0$ , 所以对任意的  $\alpha \in C$ , 下式也是成立的,

$$v = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 (\langle v, e_j \rangle + \alpha) e_j, \quad (4.12)$$

我们知道当  $\alpha = 0$  的时候,

$$\sum_{j=1}^3 |\langle v, e_j \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|v\|^2,$$

但是当  $\alpha \neq 0$  的时候,

$$\sum_{j=1}^3 |\langle v, e_j \rangle + \alpha|^2 = \frac{3}{2} \|v\|^2 + 3|\alpha|^2 > \frac{3}{2} \|v\|^2$$

所以, 虽然都可以表示, 但是框架算子提供了一种最省的表示方式。

### §4.5.2 小波框架与正交小波

**定义 4.11** 对于函数  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , 如果序列

$$\psi_{b_0; j, k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - kb_0), j, k \in \mathbb{Z}$$

构成  $L^2(\mathbb{R})$  的一个框架, 则称  $\psi$  生成  $L^2(\mathbb{R})$  的一个具有抽样速率  $b_0$  的小波框架。

**定理 4.13** 假设  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  生成  $L^2(\mathbb{R})$  的一个具有抽样速率  $b_0$  的小波框架  $\psi_{b_0; j, k}(t)$ , 且框架界为  $A, B$ , 则  $\psi$  是一个二进小波, 且

$$b_0 A \leq 2\pi \sum |\hat{\psi}(2^{-j}\lambda)|^2 \leq b_0 B$$

**证明** 该证明留作作业。

#

**定义 4.12** 对于函数  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , 如果

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z}$$

构成  $L^2(\mathbb{R})$  的标准正交基, 则  $\psi$  称为正交小波, 称  $\psi_{j,k}(t)$  是  $L^2(\mathbb{R})$  的一组标准正交基。

**说明 4.5** 在小波变换中, 一个关键的问题是寻找  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , 使得  $\psi_{j,k}(t)$  构成  $L^2(\mathbb{R})$  的标准正交基。由于  $\psi_{j,k}(t)$  的特殊的构造方法可以保证它满足小波时频窗口的要求。因此, 这里的难题是如何满足标准正交性要求。这一个问题将在接下来的两章给出答案。

**作业 4.1** 1. 证明引理 4.1。

2. 计算高斯型函数  $g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$  的中心和半径。

3. 证明 Haar 小波函数, 墨西哥小帽函数满足基小波条件。

4. 证明定理 4.4 中小波变换的性质。

5. 证明引理 4.2。

6. 证明定理 4.13。

7. 证明: 如果  $f = \sum \langle f, \phi_j \rangle u_j$ , 其中  $\{u_j\}$  不完全等于  $\{\tilde{\phi}_j\}$ , 则

$$\sum |\langle f, u_j \rangle|^2 \geq \sum |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2$$

## 第五章 多分辨率分析

1986年, Meyer创造性地构造出具有一定衰减性的光滑函数, 其二进伸缩和平移构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基, 才使得小波得到真正的发展 [17]。1988年, Mallat在构造正交小波基时提出了多分辨率分析的概念 [18], 从空间的概念上形象的说明了小波的多分辨率特性, 将之前所有的正交小波基函数的构造方法统一起来, 并给出了正交小波的构造方法以及正交小波变换的快速算法, Mallat算法。这一章重点阐述多分辨率思想, 方法以及对应的正交小波基函数的构造和分解重构算法。

### §5.1 一个简单的例子

在傅里叶变换和小波变换中, 一个最核心的任务就是从信号中提取信息。由于傅里叶变换或者小波变换事实上都不会增加能量, 也不会改变信号自身的特征。但是, 经过变换之后的信号可能反应更多的信息。下面就一个很简单的例子来说明这个特征。

**例 5.1** 假设给定一个八维的向量 $[3, 1, 2, 4, 8, 6, 9, 9]$ , 下面我们对这个向量做下面的操作: 从中间取出两个相邻的元素, 计算它们的平均值和第一个数减去平均值的差值。比如, 如果我们取出 $[3, 1]$ , 那么我们计算得到的新数是 $[2, 1]$ 。对每一组数我们都做同样的事情, 并将平均值放在前面, 差值放在后面。比如, 对于给定的向量, 我们可以得到

$$[2, 3, 7, 9, 1, -1, 1, 0].$$

可以看出, 新的向量包含了和初始向量完全一样的信息, 因为它们之间可以任意转换。现在我们对平均值得到的四维向量做同样的事情, 就可以得到 $[2.5, 8, -0.5, -1]$ , 并将它取代刚刚得到的平均值向量。最后, 我们对得到的二维的平均值向量做同样的事情就可以得到 $[5.25, -2.75]$ 。现在, 我们得到一个新的八维向量

$$[5.25, -2.75, -0.5, -1, 1, -1, 1, 0].$$

对于这个新的八维向量，很显然它包含了完全一样的信息，这个过程叫变换。事实上，如果记

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

则

$$[5.25, -2.75, -0.5, -1, 1, -1, 1, 0]^T = M[3, 1, 2, 4, 8, 6, 9, 9]^T.$$

经过这个变换后，我们会发现这个新的八维向量可以告诉我们更多的信息。比如，第一个数5是所有的数的平均值。另外，如果我们想用更少的数来逼近这个八维向量，对于原始的向量不是很容易做到。但是，对于新的八维向量可以很容易做到。事实上，如果我们想用一个六维的向量来表示，我们发现我们可以直接用 $[5.25, -2.75, 0, -1, 1, -1, 1, 0]$ 来表示，

$$M^{-1}[5.25, -2.75, 0, -1, 1, -1, 1, 0]^T = [3.5, 1.5, 1.5, 3.5, 8, 6, 9, 9].$$

这里

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

如果我们想用两维向量来表示，那么可以用 $[5.25, -2.75, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ ，这样可以得到原始的向量

$$M^{-1}[5.25, -2.75, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T = [2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 8, 8, 8, 8].$$

下图 5.1给出了这三组向量的图，其中蓝色的是给定的数据，红色的是只用六维数据表示的图片，绿色的是只用两维数据表示的图片。我们可以看出，虽然我们只用了很少的数据，但是数据还是反应了给定数据的基本特征。这个如果直接从原始数据处理是很难做到的。

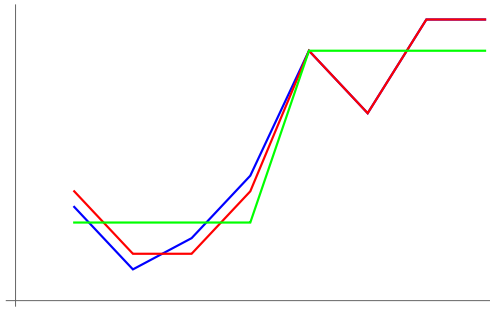


图 5.1 一个简单的例子。

## §5.2 多分辨率框架

上一节的思想可以推广到下面的多分辨率分析框架。1988年, Mallat创造性的将多分辨率分析的概念和构造正交小波基结合起来, 从空间的概念上形象的给出了一个构造正交小波基函数的通用框架, 并说明了这样构造的小波的多分辨率特性。

**定义 5.1** 设 $\{V_j\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个闭子空间系列,  $\{V_j\}$ 称为 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨率分析, 如果满足:

1. 嵌套性:  $V_j \subset V_{j+1}$ ;
2. 稠密性:  $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ;
3. 可分性:  $\bigcap V_j = \{0\}$ ;
4. 伸缩性:  $f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1}$ ;
5. 平移不变性:  $f(t) \in V_0 \implies f(t-k) \in V_0$ ;
6. 正交基的存在性: 存在 $\phi \in V_0$ , 使得 $\{\phi(t-k)\}$ 构成 $V_0$ 的标准正交基。

其中,  $\phi$ 称为尺度函数,  $V_j$ 称为尺度空间。满足上面条件的多分辨率分析 $\{V_j\}$ 也称为由尺度函数 $\phi$ 生成的多分辨率分析。

**定理 5.1** 设 $\{V_j\}$ 是由尺度函数 $\phi$ 生成的 $L^2(\mathbb{R})$ 的多分辨率分析, 则对任意的 $j$ ,

$$\left\{ \phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) \right\}$$

是 $V_j$ 的标准正交基。

**证明** 首先, 由  $\phi(t-k) \in V_0$  以及伸缩性可知  $\phi_{j,k} \in V_j$ 。其次, 标准正交性可以由下面的式子得到:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} 2^j \phi_{2^j t-k} \overline{\phi(2^j t-l)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi_{t-k} \overline{\phi(t-l)} dt \\ &= \langle \phi_{0,k}, \phi_{0,l} \rangle \\ &= \delta_{k,l}. \end{aligned}$$

最后, 说明  $V_j$  中的函数可以由  $\phi_{j,k}$  线性表示。假设  $f \in V_j$ , 由伸缩性可知,  $f(2^{-j}t) \in V_0$ 。由于  $\{\phi(t-k)\}$  是  $V_0$  的标准正交基, 所以

$$\begin{aligned} f(2^{-j}t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(2^{-j}x), \phi(x-k) \rangle \phi(t-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j}x) \overline{\phi(x-k)} dx \right) \phi(t-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\phi(2^j y-k)} dy \right) 2^{\frac{j}{2}} \phi(t-k) \end{aligned}$$

所以:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x)$$

#

### §5.3 双尺度方程

双尺度方程在小波正交基函数的构造中具有非常重要的作用, 它主要有时间域和频域两种不同的描述方法。

#### §5.3.1 双尺度方程的时域描述

根据多分辨率分析的嵌套性条件, 我们知道尺度函数  $\phi(t) \in V_1$ 。另一方面, 线性空间  $V_1$  是由函数列  $\{\phi(2t-k)\}, k \in \mathbb{Z}$  张成的空间。从而, 存在一系列系数  $h_k$  使得

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t-k), \quad (5.3)$$

其中, 双尺度系数  $h_k$  可以通过下式计算

$$h_k = 2 \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\phi(2t-k)} dt$$



我们先给出下面这些关于双尺度系数的引理。

**引理 5.1** 双尺度系数满足下面等式:

1.  $\sum_{k \in Z} h_{k-2n} \bar{h}_{k-2m} = 2\delta_{m,n}$ ;
2.  $\sum_{k \in Z} |h_k|^2 = 2$ ;
3.  $\sum_{k \in Z} h_k = 2$ ;
4.  $\sum_{k \in Z} h_{2k} = \sum_{k \in Z} h_{2k+1} = 1$ 。

**证明** 1. 由双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_{k \in Z} h_k \phi(2t - k),$$

可得

$$\begin{aligned} \phi(t-n) &= \sum_{k \in Z} h_k \phi(2t-2n-k), \\ &= \sum_{k \in Z} h_{k-2n} \phi(2t-k), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in Z} h_{k-2n} \phi_{1,k}, \end{aligned}$$

同理

$$\phi(t-n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in Z} h_{k-2m} \phi_{1,k}.$$

于是由  $\{\phi(t-k)\}$  是  $V_1$  的标准正交基, 可得

$$\begin{aligned} \delta_{n,m} &= \langle \phi(t-n), \phi(t-m) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_{k \in Z} h_{k-2n} \phi_{1,k}, \sum_{k \in Z} h_{k-2m} \phi_{1,k} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} \sum_{l \in Z} h_{k-2n} \bar{h}_{l-2m} \langle \phi_{1,k}, \phi_{1,l} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} h_{k-2n} \bar{h}_{k-2m} \end{aligned}$$

即

$$\sum_{k \in Z} h_{k-2n} \bar{h}_{k-2m} = 2\delta_{m,n}.$$

2. 在(1)中, 令 $n = m = 0$ , 可得

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 2.$$

3. 在双尺度方程两边同时取积分

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \phi(2t - k) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \end{aligned}$$

由于 $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt \neq 0$  (见作业), 所以

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = 2.$$

4. 由

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} \right|^2 + \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} \right|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{2k}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{2l} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{2k+1}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{2l+1} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{2k+2l} \overline{h_{2k}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{2k+2l+1} \right) \overline{h_{2k+1}} \right) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+2l} \overline{h_{2k}} + h_{2k+2l+1} \overline{h_{2k+1}} \right) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k+2l} \overline{h_k} \right) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2\delta_{l,0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

再结合(3), 可得

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} = 1.$$

#

## §5.3.2 双尺度方程的频域描述

对双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_{k \in Z} h_k \phi(2t - k)$$

两边做傅里叶变换可得

$$\widehat{\phi}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} h_k e^{-\frac{ik\lambda}{2}} \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

令

$$H(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} h_k e^{-ik\lambda}$$

则有双尺度方程的频域表示

$$\widehat{\phi}(\lambda) = H\left(\frac{\lambda}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

**引理 5.2** 假设  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ , 则  $\{\phi(t-k) | k \in Z\}$  是标准正交集的充要条件是

$$\sum_{k \in Z} |\widehat{\phi}(\lambda + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

**证明**  $\{\phi(t-k) | k \in Z\}$  是标准正交集当且仅当对任意的  $k \in Z$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\phi(t-k)} dt = \delta_{0,k}$$

有Parseval等式,

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\phi(t-k)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\lambda) \overline{\widehat{\phi}(\lambda)} e^{ik\lambda} d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}(\lambda)|^2 e^{ik\lambda} d\lambda \\ &= \sum_{j \in Z} \int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi} |\widehat{\phi}(\lambda)|^2 e^{ik\lambda} d\lambda \\ &= \sum_{j \in Z} \int_0^{2\pi} |\widehat{\phi}(\lambda + 2j\pi)|^2 e^{ik\lambda} d\lambda \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{j \in Z} |\widehat{\phi}(\lambda + 2j\pi)|^2 e^{ik\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

令

$$F(\lambda) = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\lambda + 2j\pi)|^2$$

则  $\{\phi(t - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$  是标准正交集当且仅当

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda = \delta_{0,k}.$$

注意到  $F(\lambda)$  周期是  $2\pi$ , 事实上

$$\begin{aligned} F(\lambda + 2\pi) &= 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\lambda + 2(j+1)\pi) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\lambda + 2j\pi) \right|^2 = F(\lambda) \end{aligned}$$

所以  $\{\phi(t - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$  是标准正交集当且仅当  $F(\lambda)$  的傅里叶系数满足  $\alpha_{-k} = \delta_{0,k}$ , 即  $F(\lambda) = 1$ . #

**定理 5.2**  $H(\lambda)$  是周期为  $2\pi$  的函数, 并且满足

$$|H(\lambda)|^2 + |H(\lambda + \pi)|^2 = 1, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

**证明** 根据双尺度方程  $\widehat{\phi}(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})\widehat{\phi}(\frac{\lambda}{2})$ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\lambda + 2k\pi) \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\lambda}{2} + k\pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2} + k\pi\right) \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\lambda}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\lambda}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \\ &= \left| H\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\lambda}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \left| H\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\lambda}{2} + \pi\right) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

#

## §5.3.3 小波滤波器

引入  $g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$ , 并记

$$G(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-ik\lambda},$$

引理 5.3  $g_k$  满足下面的性质:

1.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \bar{g}_{k-2m} = 2\delta_{m,n}$ ;
2.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \bar{g}_{k-2m} = 0$ ;
3.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + g_{n-2k} \bar{g}_{m-2k}) = 0$ ;

证明 1.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \bar{g}_{k-2m} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-2n} \bar{h}_{1-k+2n} (-1)^{k-2n} h_{1-k+2m} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{1-k+2m} \bar{h}_{1-k+2n} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \bar{h}_{k-2m} \\ &= 2\delta_{m,n} \end{aligned}$$

上式的第二个等号是令  $l = 1 - k + 2m + 2n$ , 则  $1 - k + 2n = l - 2m$ , 从而  $h_{1-k+2m} \bar{h}_{1-k+2n} = h_{l-2n} \bar{h}_{l-2m}$ .

2.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \bar{g}_{k-2m} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} (-1)^{k-2n} h_{1-k+2m} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k-2n} (-1)^{2k-2n} h_{1-2k+2m} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1-2n} (-1)^{2k+1-2n} h_{-2k+2m} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k-2n} h_{1-2k+2m} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{1-2l+2m} h_{2l-2n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

上式的第三个等号是令  $l = m + n - k$ , 则  $2m - 2k = 2l - 2n$ , 从而  $h_{2k+1-2n} h_{-2k+2m} = h_{1-2l+2m} h_{2l-2n}$ .

3.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + g_{n-2k} \bar{g}_{m-2k}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+m} \bar{h}_{1-n+2k} h_{1-m+2k}$$

如果  $n+m=2p+1$ , 令  $l=p-k$ , 则  $1-m+2k=n-2l$ ,  $1-n+2k=m-2l$ , 从而上式等于

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{n-2l} \bar{h}_{m-2l} \\ &= 0 \end{aligned}$$

如果  $n+m=2p$ , 令  $l=p-k$ , 则  $1-m+2k=1+n-2l$ ,  $1-n+2k=m-2l$ , 从而上式等于

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{n-2l+1} \bar{h}_{m-2l+1} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-k} \bar{h}_{m-k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-m} \bar{h}_{k-n} \end{aligned}$$

如果  $n=2q$ , 则  $m=2p-2q$ , 上式等于  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-(2p-2q)} \bar{h}_{k-2q} = 2\delta_{p,q} = 2\delta_{m,n}$ .  
如果  $n=2q-1$ , 则  $m=2p-2q-1$ , 上式等于

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k+1-2q} \bar{h}_{k+1-2(p-q)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2q} \bar{h}_{k-2(p-q)} \\ &= 2\delta_{p,q} = 2\delta_{m,n}. \end{aligned}$$

#

**引理 5.4**  $G(\lambda)$  满足下面的性质:

1.  $G(\lambda) = -e^{-i\lambda} \overline{H(\lambda + \pi)}$ ;
2.  $|G(\lambda)|^2 + |G(\lambda + \pi)|^2 = 1$ ;
3.  $H(\lambda) \overline{G(\lambda)} + H(\lambda + \pi) \overline{G(\lambda + \pi)} = 0$ .

这个引理的证明比较直观, 可以自己完成 (作业)。

§5.4 小波子空间和 $L^2$ 空间的正交分解

注意到,  $V_j$ 是 $V_{j+1}$ 的真子空间, 从而 $V_{j+1}$ 可以表示成 $V_j$ 和它的正交补空间 $W_j$ 的直和。另外, 根据 $V_j$ 的定义,  $W_j$ 也可以通过一个函数 $\psi$ 的放缩和平移得到。下面的定义告诉我们, 这个函数 $\psi$ 可以通过系数 $g_k$ 得到。

**定理 5.3** 设 $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是一个多分辨率分析, 相应的尺度函数为

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k),$$

令

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k),$$

其中 $g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}}$ , 记 $W_j$ 是函数系列 $\{\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)\}$ 张成的空间, 则 $W_j$ 是 $V_{j+1}$ 中 $V_j$ 的正交补空间, 并且,  $\psi_{j,k}(x)$ 是 $W_j$ 的一个标准正交基。

**证明** 这个证明包含三步:

1.  $\{\psi(x - k)\}, k \in \mathbb{Z}$ 是标准正交的。

由 $\psi(x)$ 的定义, 可知

$$\begin{aligned} \langle \psi(x - m), \psi(x - n) \rangle &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-k}} \phi(2x - 2m - k), \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \overline{h_{1-l}} \phi(2x - 2n - l) \right\rangle \\ &= \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+l} \overline{h_{1-k}} \overline{h_{1-l}} \langle \phi(2x - 2m - k), \phi(2x - 2n - l) \rangle \\ &= \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+l-2m-2n} \overline{h_{2m+1-k}} \overline{h_{2n+1-l}} \langle \phi(2x - k), \phi(2x - l) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+l-2m-2n} \overline{h_{2m+1-k}} \overline{h_{2n+1-l}} \delta_{k,l} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{2m+1-k}} \overline{h_{2n+1-k}} \\ &= \delta_{m,n} \end{aligned}$$

所以,  $\{\psi(x - k)\}, k \in \mathbb{Z}$ 是标准正交的。

2.  $\forall k \in \mathbb{Z}, \psi(x - k) \in W_0$ 。

根据 $\psi(x)$ 的定义,  $\psi(x - k) \in V_1$ , 因此只需要证明:

$$\langle \phi(x - n), \psi(x - m) \rangle = 0.$$

事实上:

$$\begin{aligned}
 \langle \phi(x-n), \psi(x-m) \rangle &= \left\langle \sum_{k \in Z} h_k \phi(2x-2n-k), \sum_{l \in Z} (-1)^l \bar{h}_{1-l} \phi(2x-2m-l) \right\rangle \\
 &= \sum_{k, l \in Z} (-1)^l h_k \bar{h}_{1-l} \langle \phi(2x-2n-k), \phi(2x-2m-l) \rangle \\
 &= \sum_{k, l \in Z} (-1)^{l-2m} h_{k-2n} h_{2m+1-l} \langle \phi(2x-k), \phi(2x-l) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k, l \in Z} (-1)^l h_{k-2n} h_{2m+1-l} \delta_{k, l} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} (-1)^k h_{k-2n} h_{2m+1-k} \doteq S
 \end{aligned}$$

在上面的 $S$ 的求和中, 令 $l = 2m+2n+1-k$ , 则 $k-2n = 2m+1-l$ ,  $2m+1-k = l-2n$ , 从而

$$S = \frac{1}{2} \sum_{l \in Z} (-1)^{2m+2n+1-l} h_{l-2n} h_{2m+1-l} = -1 * S$$

所以 $S = 0$ , 即

$$\langle \phi(x-n), \psi(x-m) \rangle = 0.$$

3.  $W_0$ 中的任意一个函数可以写成 $\{\psi(x-k)\}$ ,  $k \in Z$ 的线性组合。

首先, 我们证明对任意的 $j \in Z$ , 有

$$\phi(2x-j) = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} (\bar{h}_{j-2k} \phi(x-k) + (-1)^j h_{1-j+2k} \psi(x-k)).$$

由双尺度关系和小波函数的定义, 上式等价于证明

$$\begin{aligned}
 \phi(2x-j) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} (\bar{h}_{j-2k} \sum_{l \in Z} h_l \phi(2x-2k-l) + (-1)^j h_{1-j+2k} \sum_{l \in Z} (-1)^l \bar{h}_{1-l} \phi(2x-2k-l)) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k, l \in Z} (h_l \bar{h}_{j-2k} + (-1)^{j+l} h_{1-j+2k} \bar{h}_{1-l}) \phi(2x-2k-l)
 \end{aligned}$$

所以, 上式又等价于证明, 当 $2k+l=j$ 时,

$$\sum_{k, l \in Z} (h_l \bar{h}_{j-2k} + (-1)^{j+l} h_{1-j+2k} \bar{h}_{1-l}) = 2.$$

即

$$\sum_{k \in Z} (h_{j-2k} \bar{h}_{j-2k} + h_{1-j+2k} \bar{h}_{1-j+2k}) = 2, \quad (5.4)$$



而当 $2k + l = j + n, n \neq 0$ 时,

$$\sum_{k, l \in \mathbb{Z}} (h_l \bar{h}_{j-2k} + (-1)^{j+l} h_{1-j+2k} \bar{h}_{1-l}) = 0.$$

即

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_{j-2k+n} \bar{h}_{j-2k} + (-1)^n h_{1-j+2k} \bar{h}_{1-j+2k-n}) = 0. \quad (5.5)$$

可以看出, 式子5.4等价于证明

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \bar{h}_k = 2.$$

对于式子5.5, 我们按照 $n$ 的奇偶分别讨论。

如果 $n = 2m + 1$ 为奇数, 令 $l = j + m - k$ ,

$$\begin{aligned} left &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{j-2k+n} \bar{h}_{j-2k} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{1-j+2k} \bar{h}_{1-j+2k-n} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{1-j+2l} \bar{h}_{1-j+2l-n} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{1-j+2k} \bar{h}_{1-j+2k-n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

如果 $n = 2m$ 为偶数, 令 $l = j + m - k$ ,

$$\begin{aligned} left &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{j-2k+n} \bar{h}_{j-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{1-j+2k} \bar{h}_{1-j+2k-n} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{-j+2l} \bar{h}_{-j+2l-n} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{1-j+2k} \bar{h}_{1-j+2k-n} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \bar{h}_{k-2m} \\ &= 2\delta(m, 0) = 0 \end{aligned}$$

下面, 我们来证明对任意的 $f \in W_0 \subseteq V_1$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \phi(2x - j) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \bar{h}_{j-2k} \right) \phi(x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j c_j h_{1-j+2k} \right) \psi(x - k) \end{aligned}$$

由于  $f \perp V_0$ , 所以对任意的  $k \in Z$ ,

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in Z} c_j \bar{h}_{j-2k} = 0,$$

从而,

$$f(x) = \sum_{k \in Z} \left( \frac{1}{2} \sum_{j \in Z} (-1)^j c_j h_{1-j+2k} \right) \psi(x-k).$$

这样, 我们就证明了该定理。 #

### §5.4.1 构造小波的通用步骤

现在我们可以给出在多分辨率框架下如何构造正交小波基函数的方法。

1. 构造满足多分辨率分析的嵌套函数子空间序列  $\{V_j, j \in Z\}$ ;
2. 选择尺度函数  $\phi(x)$  使得  $\{\phi(x-k), k \in Z\}$  构成  $V_0$  的一组标准正交基;
3. 求出相应的双尺度系数  $\{h_k, k \in Z\}$ :
  - 利用双尺度方程;
  - 利用  $H(\lambda) = \frac{\widehat{\phi}(2\lambda)}{\widehat{\phi}(\lambda)}$ , 可以求出  $H(\lambda)$ 。再利用傅里叶级数展开得到  $\{h_k\}$ 。
4. 由  $h_k$  和  $\phi(x)$  可以得到正交小波基函数

$$\psi(x) = \sum_{k \in Z} (-1)^k \overline{h_{1-k}} \phi(2x-k)$$

## §5.5 常见小波

例 5.2 Haar小波:

设  $V_j$  是区间  $[\frac{n}{2^j}, \frac{n+1}{2^j})$  上等于常数并且平方可积的函数组成的空间, 即

$$V_j = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \mid f(x) = c_k, x \in \left[ \frac{n}{2^j}, \frac{n+1}{2^j} \right) \right\}$$

如果记

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1); \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

则可以证明  $\{V_j\}$  是由尺度函数  $\phi$  生成的多分辨率分析 (见作业)。我们可以有两种不同的办法来求解小波函数。

例 5.3 Shannon小波:

令

$$V_j = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \mid \text{supp}(\widehat{f}(\lambda)) \in [-2^j\pi, 2^j\pi] \right\},$$

和

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & \text{else.} \end{cases}$$

则可以证明 $\{V_j\}$ 是由尺度函数 $\phi$ 生成的多分辨率分析。事实上,很容易证明 $\phi$ 和 $V_j$ 满足性质(1-5),这个的证明见作业。下面,我们证明 $\{\phi(x-k)\}$ 张成 $V_0$ 的一组标准正交基。

事实上, $\phi(x)$ 的傅里叶变换是

$$\widehat{\phi}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & |\lambda| \leq \pi; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

由Parseval等式可得

$$\begin{aligned} \langle \phi(x-k), \phi(x-l) \rangle &= \langle \widehat{\phi(x-k)}, \widehat{\phi(x-l)} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(l-k)\lambda} d\lambda = \delta_{k,l} \end{aligned}$$

所以, $\{\phi(x-k)\}$ 是 $V_0$ 的一组标准正交集。

另外,由香农采样定理( $\Omega = \pi$ )可得,对任意的 $f(x) \in V_0$ ,有

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{R}} f(k) \frac{\sin(\pi x - k\pi)}{\pi x - k\pi} = \sum_{k \in \mathbb{R}} f(k) \phi(x-k)$$

因此, $\{\phi(x-k)\}$ 张成 $V_0$ 的一组标准正交基。

下面我们来计算双尺度系数并构造香农小波。由香农采样定理( $\Omega = 2\pi$ )可得,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{k}{2}\right) \frac{\sin(2\pi x - k\pi)}{2\pi x - k\pi} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\pi}{2}} \phi(2x - k) \\ &= \phi(2x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \phi(2x - 2k - 1) \end{aligned}$$

因此, 得到双尺度系数为

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_{2k} &= 0 \\ h_{2k+1} &= \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \end{aligned}$$

相应的香农小波为

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-k}} \phi(2x - k) \\ &= -\phi(2x - 1) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \phi(2x + 2k) \\ &= \frac{\sin(\pi(x - \frac{1}{2})) - \sin(2\pi(x - \frac{1}{2}))}{\pi(x - \frac{1}{2})} \end{aligned}$$

**说明 5.1** 香农小波是无限次可微的, 因此他的光滑性是最优的。但是香农小波没有局部支集, 并且, 当  $x$  趋于零的时候,  $\psi(x)$  趋于零的速度是  $O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ 。因此, 利用香农小波做应用时, 局部性非常不好, 计算效率不高。

**例 5.4** 线性样条小波 (Battle-Lemarie 小波):

设  $V_j$  是连续平方可积的函数而且在每个区间  $[\frac{n}{2^j}, \frac{n+1}{2^j}]$  上是线性的函数组成的空间, 即

$$V_j = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}) \mid f(x) = c_k x + d_k, x \in \left[ \frac{n}{2^j}, \frac{n+1}{2^j} \right) \right\}$$

如果记

$$\phi(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 0]; \\ 1-x, & x \in (0, 1]. \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

则可以证明对于空间  $\{V_j\}$  而言, 尺度函数  $\phi$  满足条件 (1-5) (见作业)。但是, 很可惜, 该尺度函数不满足正交的条件。

由习题 (4) 的结论, 我们有

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2\left(\frac{\lambda}{2} + k\pi\right)}{\left(\frac{\lambda}{2} + k\pi\right)^2} = 1$$

从而,

$$\csc^2\left(\frac{\lambda}{2} + k\pi\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(\lambda + 2k\pi)^2}$$

求导两次, 就可以得到

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\lambda + 2k\pi)^4} = \frac{3 - 2 \sin^2(\frac{\lambda}{2})}{48 \sin^2(\frac{\lambda}{2})}$$

另一方面, 计算 $\phi(x)$ 的傅里叶变换可得

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-ix\lambda} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^1 (1-x) e^{-ix\lambda} dx + \int_{-1}^0 (1+x) e^{-ix\lambda} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin(\frac{\lambda}{2})}{\frac{\lambda}{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

利用上述等式, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\lambda + 2k\pi)|^2 &= \frac{8}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^4(\frac{\lambda}{2})}{(\lambda + 2k\pi)^4} \\ &= \frac{1}{6\pi} \left( 3 - 2 \sin^2 \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right) \neq \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

所以,  $\{\phi(x-k)\}$ 不是 $V_0$ 的标准正交基。虽然他们不是正交的, 但是我们仍然可以计算他们的双尺度系数。由

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \frac{\widehat{\phi}(2\lambda)}{\widehat{\phi}(\lambda)} \\ &= \cos^2 \left( \frac{\lambda}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{-i\lambda} + 2 + e^{i\lambda}) \end{aligned}$$

所以:

$$h_{-1} = \frac{1}{2}, h_0 = 1, h_1 = \frac{1}{2}.$$

一般来说, 对于尺度函数不是正交的, 我们有一个通用的方法将它变成正交的。

**定义 5.2** 设 $\phi^*(x)$ 的傅里叶变换 $\widehat{\phi}^*(\lambda)$ 满足

$$\widehat{\phi}^*(\lambda) = \frac{\widehat{\phi}(\lambda)}{\left( 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\lambda + 2k\pi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

则 $\{\phi^*(x-k)\}$ 是标准正交的。

对于线性样条小波，我们可以用这个办法得到一组标准正交基。但是，在这个时候，它的双尺度系数不再是前面求出的 $h_{-1} = \frac{1}{2}, h_0 = 1, h_1 = \frac{1}{2}$ ，而是对所有的 $k, h_k \neq 0$ 。不过，当 $k$ 趋于零， $h_k$ 趋于0，而且趋于零的速度很快。线性样条小波的尺度函数和小波函数如图5.2

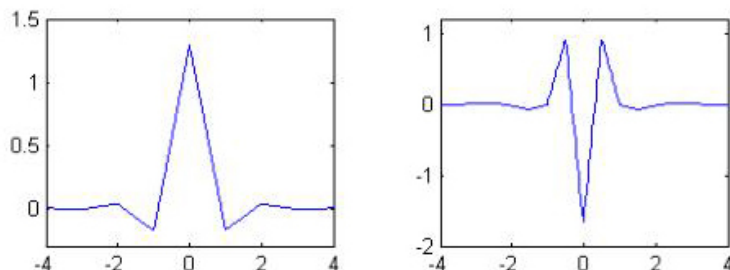


图 5.2 线性样条小波 (Battle-Lemarie小波) 的尺度函数和小波函数

## §5.6 分解重构算法

本节介绍基于多分辨率分析下的小波的分解和重构算法，就是对于给定的信号，如何在小波空间中表示以及基于小波空间表示的信号，如何计算最终的信号。

### §5.6.1 分解算法

为了对信号做处理，比如滤波，数据压缩等，需要一个有效的算法将信号分解成不同的频率成分。在多分辨率分析中，这个过程就对应于将信号分解成小波空间 $W_j$ 中各个分量的表示。分解一个信号主要有三步：初始化，迭代和终止。

#### 1. 初始化：

这一步主要包含两个部分：一是确定近似空间 $V_j$ ，二是计算 $f_j \in V_j$ 以便最佳的逼近给定的信号 $f$ 。 $V_j$ 中对信号 $f$ 的最佳逼近应该是 $f$ 在 $V_j$ 上的正交投影 $P_j[f]$ 。由于 $\{\phi_{j,k}(x)\}$ 是标准正交的，从而它的投影可以很容易计算，如下：

$$P_j[f] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(x), c_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi_{j,k}(t)} dt.$$

但是一般在应用中，给定的信号 $f(t)$ 通常是它的一个离散采样，下面的引理告诉我们如何在这种情况下求解系数 $c_{j,k}$ 。

**引理 5.5** 设 $V_j$ 是一个依紧支集的尺度函数 $\phi$ 的多分辨率分析。如果 $f(t)$ 是连续的, 则对足够大的 $j$ , 有

$$c_{j,k} = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi(2^j t - k)} dt \approx 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)} dx f\left(\frac{k}{2^j}\right).$$

**证明** 因为 $\phi$ 是紧支集的, 所以 $\phi$ 的非零集是被限定在一个闭包 $\{|t| < M\}$ 中(实际应用中的 $M$ 都不是很大)。因此, 当 $j$ 足够大的时候, 对于 $t \in [-M, M]$ ,  $2^{-j}t + 2^{-j}k \approx 2^{-j}k$

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi(2^j t - k)} dt \\ &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-M}^M f(2^{-j}t + 2^{-j}k) \overline{\phi(t)} dt \\ &\approx f(2^{-j}k) \int_{-M}^M 2^{-\frac{j}{2}} \overline{\phi(t)} dt = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)} dx f\left(\frac{k}{2^j}\right) \end{aligned}$$

#

这个近似的精度随着 $j$ 的增加而提高, 我们可以根据给定的误差来估计需要多大的 $j$  (见作业)。因为在实际的应用中,  $j$ 的选择非常重要, 因为我们既要注意精度也要注意效率, 两者之间需要达到一个好的平衡。而且, 这个证明不仅仅对连续信号成立, 对于分段连续信号也是成立的(见作业题)。

## 2. 迭代:

这一步是多分辨率分析的核心, 它充分利用了空间 $V_j$ ,  $V_{j-1}$ 和 $W_{j-1}$ 的关系。初始化后, 我们得到 $f_j(x) \approx f(x)$ 。此时, 我们可以由 $f_j(x)$ 开始, 一步一步的将它们分解成近似部分 $f_{j-1}(x) \in V_{j-1}$ 和小波部分 $w_{j-1}(x) \in W_{j-1}$ , 即 $f_j(x) = f_{j-1}(x) + w_{j-1}(x)$ 。这个过程可以一直进行下去直到 $j_0$ 层, 如图 5.3所示。

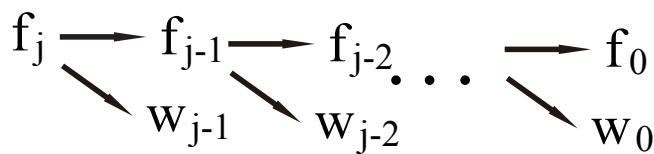


图 5.3 小波分解算法

假设

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k \in Z} c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \\ f_{j-1}(x) &= \sum_{k \in Z} c_{j,k} \phi_{j-1,k}(x) \\ w_{j-1}(x) &= \sum_{k \in Z} d_{j,k} \psi_{j-1,k}(x) \end{aligned}$$

所谓分解算法就是已知  $c_{j,k}$ , 计算  $c_{j-1,k}$  和  $d_{j-1,k}$  使得  $f_j(x) = f_{j-1}(x) + w_{j-1}(x)$ 。事实上, 因为

$$\sum_{k \in Z} c_{j,k} \phi_{j,k}(x) = \sum_{k \in Z} c_{j,k} \phi_{j-1,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j,k} \psi_{j-1,k}(x),$$

而且  $V_{j-1} \perp W_{j-1}$ , 从而

$$c_{j-1,l} = \sum_{k \in Z} c_{j,k} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,l} \rangle.$$

由双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_{k \in Z} h_k \phi(2t - k)$$

可得

$$\begin{aligned} \phi_{j-1,l}(t) &= 2^{\frac{j-1}{2}} \phi(2^{j-1}t - l) \\ &= 2^{\frac{j-1}{2}} \sum_{k \in Z} h_k \phi(2^j t - 2l - k) \\ &= 2^{\frac{j-1}{2}} \sum_{k \in Z} h_{k-2l} \phi(2^j t - k) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} h_{k-2l} \phi_{j,k}(t) \end{aligned}$$

于是

$$c_{j-1,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} c_{j,k} \overline{h_{k-2l}}.$$

同理, 有小波方程

$$\psi(t) = \sum_{k \in Z} g_k \phi(2t - k)$$



可得

$$\begin{aligned} \psi_{j-1,l}(t) &= 2^{\frac{j-1}{2}} \psi(2^{j-1}t - l) \\ &= 2^{\frac{j-1}{2}} \sum_{k \in Z} g_k \phi(2^j t - 2l - k) \\ &= 2^{\frac{j-1}{2}} \sum_{k \in Z} g_{k-2l} \phi(2^j t - k) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} g_{k-2l} \phi_{j,k}(t) \end{aligned}$$

于是

$$d_{j-1,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} c_{j,k} \overline{g_{k-2l}}.$$

3. 终止:

终止分解运算的准则有好几个。最简单的就是一直分解下去直到耗尽所有的样本点。但是这样一般不是必要的，终止的准则一般是和问题相关的。比如，在奇异性检测中，一般只需要分解一到二层就可以了。这个分解过程结束后会生成一个系数集，它包含了近似系数和细节系数。

§5.6.2 重构算法

一旦信号被分解完毕，就可以修改某些小波空间 $W_{j'}$ 的系数。比如，如果处理信号的目的是滤波，那么 $W_{j'}$ 中不需要的频率部分就可以舍弃。如果目的是压缩数据，那么 $W_{j'}$ 中幅值较小的系数就可以舍弃。不管怎样， $W_{j'}$ 的系数被修改过了，所以我们需要确定算法从这些修改后的系数中重新计算在最高层次的系数。重构一个信号主要也是三步：初始化，迭代和终止，如图 5.4所示。

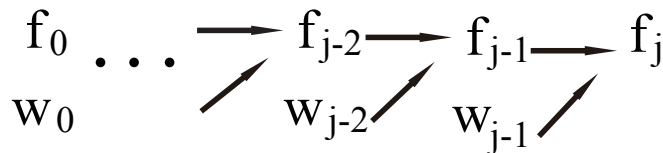


图 5.4 小波重构算法

1. 初始化:

这一步的信息主要包含两个部分：一是就是空间 $V_{j_0}$ 的系数 $c_{j_0,k}$ ，二是小波空间 $W_{j_0}, \dots, W_{j-1}$ 的系数 $d_{j_0,k}, \dots, d_{j,k}$ 。

## 2. 迭代:

这一步也充分利用了空间 $V_j$ ,  $V_{j-1}$ 和 $W_{j-1}$ 的关系。假设

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k \in Z} c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \\ f_{j-1}(x) &= \sum_{k \in Z} c_{j-1,k} \phi_{j-1,k}(x) \\ w_{j-1}(x) &= \sum_{k \in Z} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x) \end{aligned}$$

所谓重构算法就是已知 $c_{j-1,k}$ 和 $d_{j-1,k}$ , 计算 $c_{j,k}$ 使得 $f_j(x) = f_{j-1}(x) + w_{j-1}(x)$ 。由于

$$\begin{aligned} \phi_{j-1,l}(t) &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} h_{k-2l} \phi_{j,k}(t), \\ \psi_{j-1,l}(t) &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} g_{k-2l} \phi_{j,k}(t), \end{aligned}$$

可得

$$c_{j,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} c_{j-1,k} h_{l-2k} + 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} d_{j-1,k} g_{l-2k}.$$

## 3. 终止:

分解和重构算法都使用了双尺度系数 $h_k$ , 而不是实际的尺度函数 $\phi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 。为了得到重构信号 $f(x) = \sum_{k \in Z} c_{j,k} \phi_{j,k}(x)$ , 因此可以用 $c_{j,k}$ 来近似 $f(x)$ 在 $\frac{k}{2^j}$ 的值。这一点非常重要, 因为在大多数的小波, 这些函数的计算非常复杂。比如, 我们下一章介绍的Daubechies小波, 计算非常复杂。然而, 我们实际的计算中并不需要这些函数的具体计算, 而是他们对应的系数。这些函数在幕后扮演了很重要的角色。

虽然我们给出了分解重构算法, 但是在实际的计算中, 一般只有有限个 $h_k$ 非零。所以, 计算时上述公式可以进一步简化。不妨设 $h_0, h_1, \dots, h_{M-1}$ 非零, 那么对于小波系数 $g_k$ , 则 $g_{2-M}, g_{3-M}, \dots, g_0, g_1$ 非零。于是上面的分解重构算法可以写成下面的形式

## • 分解算法:

$$\begin{cases} c_{j-1,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=2l}^{2l+M-1} c_{j,k} \overline{h_{k-2l}}, \\ d_{j-1,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=2l+2-M}^{2l+1} c_{j,k} \overline{g_{k-2l}}, \end{cases} \quad (5.6)$$

- 重构算法:

$$c_{j,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=\lceil \frac{l-M+1}{2} \rceil}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} c_{j-1,k} h_{l-2k} + 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=\lceil \frac{l-1}{2} \rceil}^{\lfloor \frac{M+l-2}{2} \rfloor} d_{j-1,k} g_{l-2k}$$

§5.6.3 小波滤波器

多分辨率分析的小波分解和重构算法也可以通过离散滤波器来实现, 如下图 5.5所示。引入下采样算子: 如果一个序列  $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ , 则

$$Dx = (\dots, x_{-2}, x_0, x_2, \dots)$$

即

$$(Dx)_k = x_{2k}, k \in Z.$$

所以, 分解算法可以写成下面的形式

$$\begin{cases} c^{j-1} = D(c^j * \bar{h}^*), \\ d^{j-1} = D(c^j * \bar{g}^*), \end{cases} \quad (5.7)$$

其中,

$$c^{j-1} = \{c_{j-1,k}\}_{k \in Z}, d^{j-1} = \{d_{j-1,k}\}_{k \in Z}, c^j = \{c_{j,k}\}_{k \in Z},$$

$$\bar{h}^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{h}_{-k} \right\}_{k \in Z}, \bar{g}^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{g}_{-k} \right\}_{k \in Z},$$

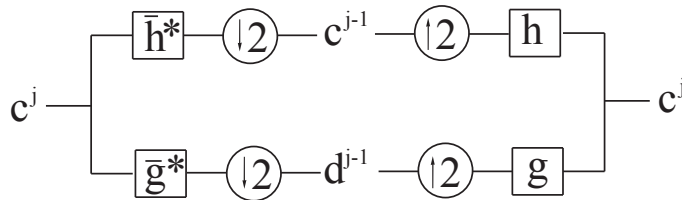


图 5.5 小波分解重构离散滤波器。

重构算法也是类似的。引入上采样算子: 如果一个序列  $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ , 则

$$Ux = (\dots, x_{-1}, 0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$$

即

$$(Ux)_k = \begin{cases} 0, & k \text{ 是奇数;} \\ x_{\frac{k}{2}}, & k \text{ 是偶数.} \end{cases} \quad x_{2k}, k \in Z.$$

从而, 重构算法可以写成下面的形式

$$c^j = U c^{j-1} * h + U d^{j-1} * g, \quad (5.8)$$

其中,

$$h = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} h_k \right\}_{k \in Z}, g = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} g_k \right\}_{k \in Z}.$$

#### §5.6.4 应用的例子

小波在实际中的应用通常处理的步骤如下:

1. 采样:

这是一个预处理的步骤。如果信号连续, 我们需要以能够捕获原始信号必要细节的速率采样, 一般采样率是Nyquist频率的两倍。

2. 分解:

信号采样后, 利用分解算法, 得到各个层次的小波系数和最低层次的近似系数, 该系数是下一步处理的对象。

3. 信号处理:

通过舍弃非显著系数来压缩信号, 或者是某种方式使得信号滤波或者去噪。输出的是修改后的系数集合。

4. 重构:

把上一步得到的新的修改后的信号系数应用重构算法得到最高层次的近似系数。

相较于傅里叶变换, 小波变换作为一种时频局部化方法, 其窗口是可变的, 即在低频部分具有较低的时间分辨率和较高的频率分辨率, 具有对信号的自适应性, 因此被广泛应用于信号分析。由于小波分析具有局部分析和细化的功能, 所以小波分析可以揭示信号的间断点、趋势和自相似性等性质。并且与传统的信号分析技术相比, 小波分析还能在没有明显损失的情况下, 对信号进行降噪和压缩。

**例 5.5** 信号快速变化的核心性质包括间断、一阶或二阶导数的不连续等。利用小波分解可以找到信号的高频部分, 因此可以寻找高频系数幅值很大的区间检测出信号的间断点。对于间断类问题, 可以有以下的小波选择经验:

1. 处理信号本身的间断, 使用Haar小波

2. 处理信号第*i*阶导数的间断,使用至少具有*i*阶消失矩的小波

对图5.6所示的 *scddvbrk* 信号,虽然看不出任何间断,但实际上这个信号在时间点500处分界,信号值和一阶导数不变,而二阶导数突变.利用  $D_4$  小波进行分解,可以看到小波变换在  $t = 500$  附近的系数比较大,这意味着该信号附近存在突变或不连续.

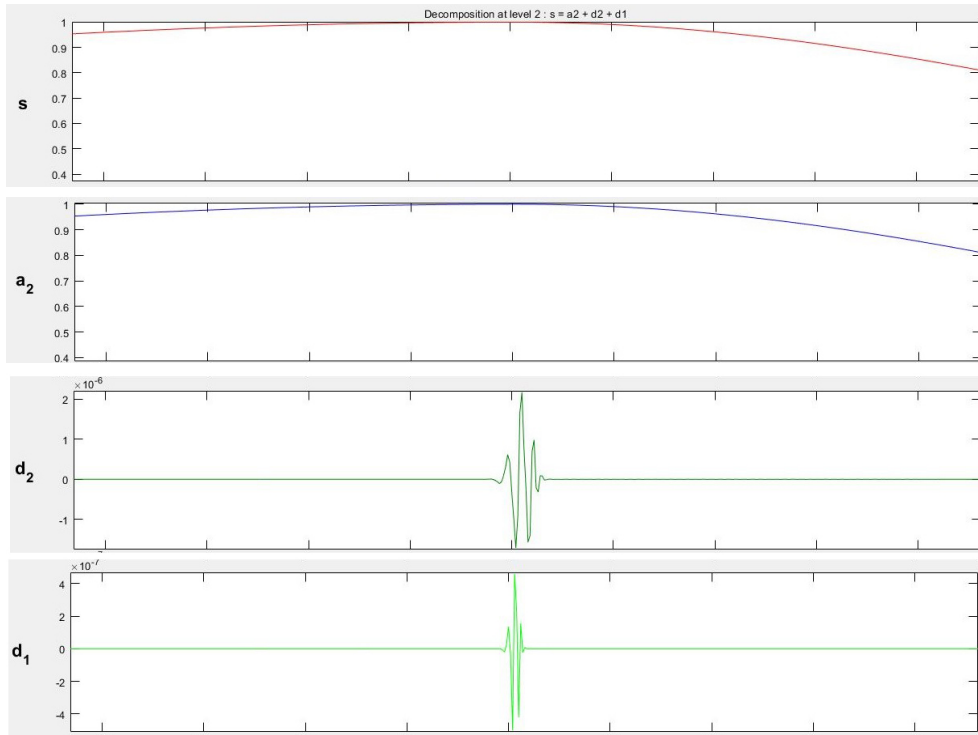


图 5.6 *scddvbrk* 信号及分解

### §5.7 尺度函数的迭代构造

到目前为止,我们给出了多分辨率分析框架下正交小波的构造方法.在这个框架下,只要给出嵌套空间  $\{V_j\}$  和尺度函数  $\phi(x)$ ,只要他们满足条件 (1.6),则我们可以得到小波基函数  $\psi(x)$ .如果我们令  $V_j = span\{\phi(2^j x - k)\}, j, k \in Z$ .

**定理 5.4** 假设  $\phi(x)$  是一个具有紧支集连续函数,并且满足标准正交性条件:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t - k) \overline{\phi(t - l)} dt = \delta_{k,l}, k, l \in Z.$$

则有  $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}$ 。

**证明** 由条件可知,  $\{\phi(t-k), k \in Z\}$  是  $V_0$  的标准正交基。如果  $f \in V_0$ , 则有

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k \in Z} \langle f(x), \phi(x-k) \rangle \phi(t-k) \\ &= \sum_{k \in Z} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi(x-k)} dx \right) \phi(t-k) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k \in Z} \phi(t-k) \overline{\phi(x-k)} \right) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} k(t, x) f(x) dx, \end{aligned}$$

其中

$$k(t, x) = \sum_{k \in Z} \phi(t-k) \overline{\phi(x-k)}.$$

利用Cauchy-Schwartz不等式可得

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |k(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} |k(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

又由标准正交性条件得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} |k(t, x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k \in Z} \phi(t-k) \overline{\phi(x-k)} \right) \left( \sum_{l \in Z} \phi(t-l) \overline{\phi(x-l)} \right) dx \\ &= \sum_{k, l \in Z} \phi(t-k) \overline{\phi(t-l)} \left( \int_{\mathbb{R}} \phi(x-k) \overline{\phi(x-l)} dx \right) \\ &= \sum_{k \in Z} |\phi(t-k)|^2 \end{aligned}$$

于是有

$$|f(t)| \leq \left( \sum_{k \in Z} |\phi(t-k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2}$$

由于  $\phi$  是一个具有紧支集的连续函数, 所以上式求和只有有限项, 进而存在常数  $C$  使得

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \leq C \|f\|_{L^2}$$

假设  $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ , 则对任意的正整数  $j$ , 有  $f \in V_{-j}$ , 因而  $f(2^j t) \in V_0$ , 并且

$$\begin{aligned} |f(2^j t)| &\leq C \left( \int_{\mathbb{R}} |f(2^j x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C 2^{-\frac{j}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

从而有

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \leq C 2^{-\frac{j}{2}} \|f\|_{L^2}$$

由于上式对所有的正整数  $j$  都成立, 令  $j$  趋向无穷, 可得  $f = 0$ . 因此,

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

#

**定理 5.5** 假设  $\phi$  是一个具有紧支集连续函数, 并且满足如下条件:

1. 标准正交性条件:  $\int_{\mathbb{R}} \phi(t-k) \overline{\phi(t-l)} dt = \delta_{k,l}, k, l \in \mathbb{Z}$ ;
2. 标准化条件:  $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1$ ;
3. 双尺度方程:  $\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t-k)$ , 只有有限个  $h_k$  非零。

则  $V_j$  构成一个多分辨率分析。

**证明** 我们只用证明稠密性就行, 即

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}).$$

令  $P_j$  是  $L^2(\mathbb{R})$  到  $V_j$  的正交投影算子。证明稠密性等价于证明对任意的  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f \rightarrow f,$$

又因为

$$\|f\|_{L^2}^2 = \|f - P_j f\|_{L^2}^2 + \|P_j f\|_{L^2}^2,$$

所以正需要证明对任意的  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f\|_{L^2} \rightarrow \|f\|_{L^2}.$$

这个证明包含三步:

1. 上述结论对

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b]; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

成立, 其中  $a < b$  是任意给定的常数。事实上

$$\begin{aligned} (P_j u)(t) &= \sum_{k \in Z} \langle u, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(t) \\ &= \sum_{k \in Z} \left( \int_a^b \overline{\phi_{j,k}(x)} dx \right) \phi_{j,k}(t) \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \|P_j u\|_{L^2}^2 &= \sum_{k \in Z} \left| \int_a^b \overline{\phi_{j,k}(x)} dx \right|^2 \\ &= 2^{-j} \sum_{k \in Z} \left| \int_{2^j a}^{2^j b} \phi(t-k) dt \right|^2 \end{aligned}$$

当  $j$  足够大的时候, 上式右端的积分区间  $[2^j a, 2^j b]$  非常大, 相对而言,  $\phi$  的支集很小, 所以求和中的积分可以分成三类:

- (a)  $\phi(t-k)$  的支集位于积分区间的外面, 因而积分为零;
- (b)  $\phi(t-k)$  的支集和积分区间相交但是不全在积分区间的内部。这一部分的个数很少, 它们的积分值乘以  $2^{-j}$  会趋向零。
- (c)  $\phi(t-k)$  的支集位于积分区间内部, 每一个积分由标准化条件知其积分为 1。另外, 这一部分的  $k$  的个数大概是  $2^j(b-a)$  个,

故有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j u\|_{L^2} = \lim_{j \rightarrow \infty} 2^{-j} 2^j (b-a) = \|u\|_{L^2}$$

2. 对阶梯函数证明该定理。

假设

$$s(t) = \sum_k a_k u_k(t),$$

其中只有有限个  $a_k$  非零, 由于有

$$\begin{aligned} \|P_j s - s\|_{L^2} &= \left\| \sum_k a_k (P_j u_k - u_k) \right\|_{L^2} \\ &\leq \sum_k |a_k| \|P_j u_k - u_k\|_{L^2} \end{aligned}$$



对每一个 $k$ ,  $\|P_j u_k - u_k\|_{L^2}$ 趋向零, 从而

$$\|P_j s - s\|_{L^2} \rightarrow 0$$

3. 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 进行证明。

首先我们需要引用泛函分析中的一个结论, 就是阶梯函数空间在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密, 即对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 对任意的 $\epsilon > 0$ , 存在阶梯函数 $s$ , 使得

$$\|f - s\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

另外, 当 $j$ 充分大的时候, 我们有

$$\|P_j s - s\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

从而有

$$\begin{aligned} \|f - P_j f\| &= \|f - s + s - P_j s + P_j s - P_j f\| \\ &\leq \|f - s\| + \|s - P_j s\| + \|P_j s - P_j f\| \\ &\leq \|f - s\| + \|s - P_j s\| + \|s - f\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

这样就证明了该定理。

#

**定理 5.6** 假设 $P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^k$ 是一个多项式, 满足下面条件:

1.  $P(1) = 1$ ;
2.  $|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, |z| = 1$ ;
3.  $|P(e^{it})| > 0, |t| \leq \frac{\pi}{2}$ 。

令 $\phi_0(x)$ 是Haar尺度函数, 且对任意的 $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\phi_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{n-1}(2x - k),$$

则函数列 $\phi_n(x)$ 在 $L^2$ 中依范数收敛到函数 $\phi(x)$ , 并且 $\phi(x)$ 满足

1. 标准正交性条件:  $\int_{\mathbb{R}} \phi(t - k) \overline{\phi(t - l)} dt = \delta_{k,l}, k, l \in \mathbb{Z}$ ;
2. 标准化条件:  $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1$ ;
3. 双尺度方程:  $\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k)$ , 只有有限个 $h_k$ 非零。

**证明** 首先证明函数列  $\phi_n(x)$  在  $L^2$  中逐点收敛到函数  $\phi(x)$ 。在迭代式子中做傅里叶变换得

$$\widehat{\phi}_n(\lambda) = P\left(e^{-\frac{i\lambda}{2}}\right) \widehat{\phi}_{n-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

迭代后可得,

$$\widehat{\phi}_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n-1} P\left(e^{-\frac{i\lambda}{2^j}}\right) \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)$$

我们分两步来证明  $\phi_n(x)$  在  $L^2$  中依范数收敛到函数  $\phi(x)$ 。首先证明  $\widehat{\phi}_n$  在  $\mathbb{R}$  的一个紧支集上一致收敛, 然后证明  $\phi_n(x)$  在  $L^2$  中依范数收敛。

对于第一步, 我们首先证明下面的引理。如果  $e_j$  是一个函数列, 且  $\sum_j |e_j|$  在集  $K$  上一致收敛, 那么  $\prod_j (1 + e_j)$  也在  $K$  上一致收敛。事实上,

$$\prod_j (1 + e_j) = e^{\ln \prod_j (1 + e_j)} = e^{\sum_j \ln(1 + e_j)}$$

如果  $\sum_j |e_j|$  在集  $K$  上一致收敛, 则  $e_j$  一定收敛到 0。当  $|x|$  很小的时候,  $\ln(1 + x) \approx |x|$ , 所以  $\sum_j |e_j|$  在集  $K$  上一致收敛等价于  $\sum_j \ln(1 + e_j)$  的一致收敛, 因此, 也就说明了  $\prod_j (1 + e_j)$  是一致收敛的。

令  $e_j = P\left(\frac{\lambda}{2^j}\right) - 1$ , 很显然  $\sum_j |e_j|$  在集  $K$  上一致收敛 (因为  $P(z)$  是一个多项式, 且  $P(0) = 1$ , 所以存在  $C$ , 使得  $|e_j| \leq C\left|\frac{\lambda}{2^j}\right|$ )。所以,  $\widehat{\phi}_n(\lambda)$  在每一个紧支集上一致收敛到函数

$$\widehat{g}(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} P\left(e^{-\frac{i\lambda}{2^j}}\right) \widehat{\phi}_0(0)$$

现在, 我们证明  $g \in L^2$ 。我们可以将  $\widehat{\phi}_n(\lambda)$  写成如下乘积的形式,

$$\widehat{\phi}_n(\lambda) = h_n(\lambda) \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2^n}\right), h_n(\lambda) = \prod_{j=1}^n P\left(\frac{\lambda}{2^j}\right)$$

注意到  $h_n$  是周期的, 周期是  $2^{n+1}\pi$ , 因为  $P$  是以  $2\pi$  为周期的。此外,  $\widehat{\phi}_0(\lambda)$  的支集位于  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , 表明当  $|\lambda| \geq 2^{n-1}\pi$  时,  $\widehat{\phi}_n(\lambda) = 0$ , 从而

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}_n(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-2^{n-1}\pi}^{2^{n-1}\pi} |\widehat{\phi}_n(\lambda)|^2 d\lambda \leq C \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} |h_n(\lambda)|^2 d\lambda$$

其中  $C$  是  $\widehat{\phi}_0(\lambda)$  的上界。

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} |h_n(\lambda)|^2 d\lambda &= \int_0^{2^n\pi} (|h_n(\lambda)|^2 + |h_n(\lambda - 2^n\pi)|^2) d\lambda \\ &= \int_0^{2^n\pi} |h_{n-1}(\lambda)|^2 \left( \left| P\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) \right|^2 + \left| P\left(\frac{\lambda}{2^n} - \pi\right) \right|^2 \right) d\lambda \\ &= \int_0^{2^n\pi} |h_{n-1}(\lambda)|^2 d\lambda \\ &= \int_{-2^{n-1}\pi}^{2^{n-1}\pi} |h_{n-1}(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \end{aligned}$$

其中倒数第二个等式利用了  $h_{n-1}(\lambda)$  的周期性。所以  $\widehat{\phi}_n(\lambda)$  的  $L^2$  范数对所有的  $n$  是一致有界的。从而我们就证明了  $g \in L^2$ , 故存在  $\phi$ , 使得在  $L^2$  意义下,  $g = \widehat{\phi}$ 。下面我们证明  $\phi_n(x)$  在  $L^2$  中依范数收敛到函数  $\phi(x)$ 。

首先  $\widehat{\phi}(\lambda)$  是连续的, 并且满足  $\widehat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , 从而存在  $a > 0$ , 当  $|\lambda| \leq a$  时, 有  $\widehat{\phi}(\lambda) \neq 0$ 。如果存在  $a < \lambda_0 \leq \frac{\pi}{2}$  使得  $\widehat{\phi}(\lambda_0) = 0$ , 则由  $\widehat{\phi}(\lambda_0) = h_n(\lambda_0) \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_0}{2^n}\right)$  可得, 对任意的  $n$ ,  $\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_0}{2^n}\right) = 0$ , 这显然矛盾。从而存在  $c > 0$ , 在区间  $|\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$  上,  $\widehat{\phi}(\lambda) \geq c$ , 进一步可得,  $|\lambda| \leq 2^{n-1}\pi$  上,  $\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) \geq c$ 。

由

$$\widehat{\phi}_n(\lambda) = \frac{\widehat{\phi}(\lambda) \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)}{\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)}$$

可得

$$|\widehat{\phi}_n(\lambda)| \leq \frac{1}{c} |\widehat{\phi}(\lambda)| \left| \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) \right| \leq \frac{C}{c} |\widehat{\phi}(\lambda)|, |\lambda| \leq 2^{n-1}\pi$$

注意到  $\widehat{\phi}_n(\lambda)$  的支集也是  $|\lambda| \leq 2^{n-1}\pi$ , 从而上式对于任意的  $\lambda \in R$  都成立, 即  $|\widehat{\phi}(\lambda) - \widehat{\phi}_n(\lambda)|^2 \leq C' |\widehat{\phi}(\lambda)|^2$ 。由于  $\widehat{\phi}(\lambda) \in L^2(R)$ , 所以  $|\widehat{\phi}_n(\lambda)|^2 \in L^1(R)$ , 而  $\widehat{\phi}_n(\lambda)$  逐点收敛到  $\widehat{\phi}(\lambda)$ , 应用控制收敛定理,  $\phi_n(x)$  依范数收敛到  $\phi(x)$ 。

在迭代式

$$\phi_n(t) = \sum_k h_k \phi_{n-1}(2t - k)$$

中令  $n$  趋向无穷, 可得

$$\phi(t) = \sum_k h_k \phi(2t - k)$$

即  $\phi$  满足双尺度方程。

下面我们证明  $\phi_1(t)$  也满足标准化条件和正交性条件。由于

$$\phi_1(t) = \sum_k h_k \phi_0(2t - k)$$

在上式两端去傅里叶变换, 得

$$\widehat{\phi}_1(\lambda) = P\left(e^{-\frac{i\lambda}{2}}\right) \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

由于  $\widehat{\phi}_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , 且  $P(1) = 1$ , 所以  $\widehat{\phi}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , 即  $\phi_1$  满足标准化条件。

另一方面,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}_1(\lambda + 2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |P(e^{-\frac{i\lambda}{2} + ik\pi})|^2 \left| \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2} + k\pi\right) \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| P\left(e^{-\frac{i\lambda}{2} + i2k\pi}\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| P\left(e^{-\frac{i\lambda}{2} + i(2k+1)\pi}\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \\ &= |P(e^{-\frac{i\lambda}{2}})|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + |P(-e^{-\frac{i\lambda}{2}})|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}_0\left(\frac{\lambda}{2} + \pi + 2k\pi\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( |P(e^{-\frac{i\lambda}{2}})|^2 + |P(-e^{-\frac{i\lambda}{2}})|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

即  $\phi_1$  满足标准正交条件。由递推关系知, 所有的  $\phi_n$  都满足标准正交性条件和标准化条件, 从而  $\phi$  也满足这两个条件。 #

**例 5.6** 对于 Haar 小波,  $h_0 = h_1 = 1$ , 对其他的  $k$ ,  $h_k = 0$ 。此时,  $P(z) = \frac{1+z}{2}$ 。可以验证,  $P(1) = 1$ , 当  $z = e^{i\theta}$ ,

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2}\right)^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{2} = 1.$$

而且, 当  $|\theta| < \pi$ ,  $|P(e^{i\theta})| = \left|\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right| > 0$ 。于是, 这个系数满足上面定理的条件, 根据迭代算法, 由 Haar 小波尺度函数出发, 我们发现所有的  $\phi_n = \phi_0$ , 即我们得到的就是 Haar 小波的尺度函数。

**例 5.7** 下面我们看一个不一样的例子。记  $h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ,  $h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ,  $h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ ,  $h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$ , 对其他的  $k$ ,  $h_k = 0$ 。可以验证,  $P(z)$  也满足上面定理的条件 (见作业)。这个系数首先由 Daubechies 得到。根据迭代算法, 由 Haar 小波尺度函数出发, 得到的  $\phi_n$  图像如下图所示。

**作业 5.1** 1. 证明 Haar 小波中的尺度函数满足多分辨率的条件;

2. 证明香农小波的尺度函数满足条件 (1-5);

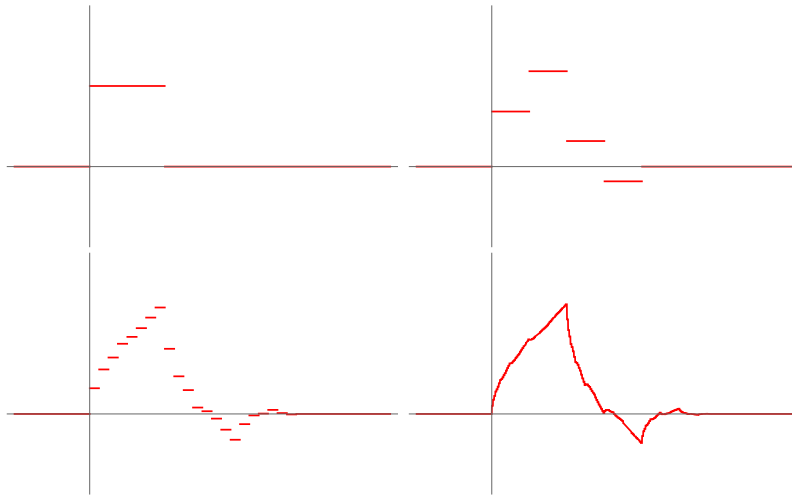


图 5.7 D4尺度函数迭代过程中的函数图像 (1,2,4,6层)

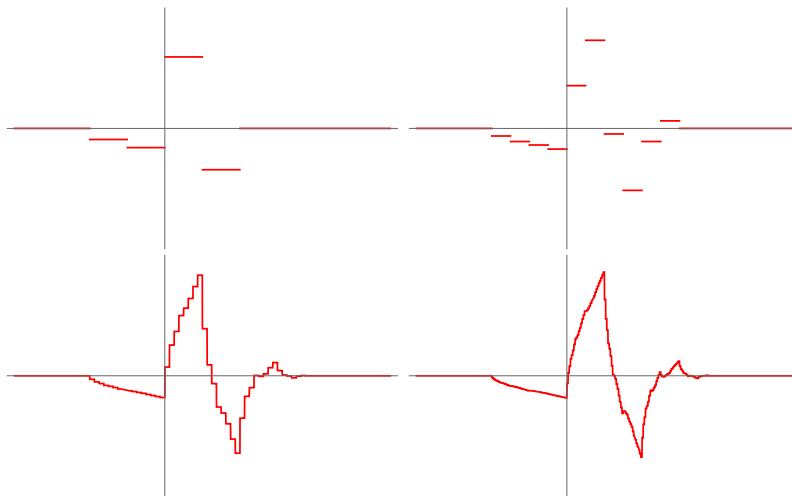


图 5.8 D4小波函数迭代过程中的函数图像 (1,2,4,6层)

3. 证明线性样条小波的尺度函数满足条件 (1-5);
4. 利用 Haar 尺度函数  $\phi(x-k)$  的正交性证明

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2\left(\frac{\lambda}{2} + k\pi\right)}{\left(\frac{\lambda}{2} + k\pi\right)^2} = 1$$

5. 设  $f$  是一个连续可微的函数, 对于  $0 \leq x < 1$  有  $|f'(x)| \leq M$ 。用下面 (1) 中的阶梯函数一致地逼近  $f$ , 误差是  $\epsilon$ 。该阶梯函数属于由  $\phi(2^j x - k)$  张成的空间  $V_j$ , 其中  $\phi$  是 Haar 尺度函数。

(a) 对  $1 \leq j \leq 2^n$ , 令  $a_j = f\left(\frac{j}{2^n}\right)$ , 则  $f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2^n x - k)$

(b) 证明如果  $n$  远远大于  $\log_2\left(\frac{M}{\epsilon}\right)$ , 则  $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$

6. 当  $f(x)$  是分段连续函数, 证明引理 5.5。
7. 证明例子 5.7 中的多项式满足上面定理的所有要求。
8. 完成引理 5.4 的证明。

## 第六章 Daubechies小波

到目前为止我们提到的小波（Haar、shannon和线性样条小波）都有不少缺陷。Haar小波具有紧支撑的但是不连续，Shannon小波很光滑但是没有紧支撑，而且趋向无穷时衰减很慢。线性样条小波是连续的，但是正交尺度函数的支集也是无穷的，不过它趋向无穷的时候衰减很快。在Daubechies发明以她的名字命名的小波系之前 [19]，人们也只有这样一些选择。这一章我们将介绍如何构造任意光滑的正交小波基函数。

### §6.1 小波的正则性和消失矩

在复变函数理论中，正则函数也称为全纯函数，是指无穷次可导的函数。在小波分析中，我们面对的是实变函数或者实变复值函数，没有正则函数的概念。这里，所谓函数的正则性，是指函数的光滑性。正则性越高的函数越光滑。

常见的刻划正则性的方法有：

1. 直接用函数的可导次数作为正则性的度量；
2. 对函数 $f$ ，如果 $|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$ ， $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ，其中 $C, \alpha > 0$ 是常数，则称函数 $f$ 在 $x_0$ 具有局部Lipschitz指数 $\alpha$ 。局部Lipschitz指数就可以作为局部正则性的度量；
3. 对于函数 $f$ ，如果 $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ ，对任意的定义域中的 $x, y$ 都成立，则称 $f$ 具有Lipschitz指数 $\alpha$ 。Lipschitz指数就可以作为全局正则性的度量；
4. 上述Lipschitz指数可以在频率域中刻划。对于函数 $f$ ，如果 $\int_R \frac{|\hat{f}(\lambda)|}{1+|\lambda|^\alpha} < \infty$ ，则称 $f$ 的正则性是 $\alpha$ 。

当然，其他还有连续模，平滑模等工具来刻划正则性。在小波分析中，我们立足于函数在一组正交基中的展开。而在实际应用中，我们需要对上述级数进行近似计算。如果小波函数的正则性高，则近似计算的稳定性好。否则，会出现大量近似计算不稳定的情况。

**定义 6.1** 如果

$$\int_R x^n \psi(x) dx = 0, n = 0, 1, \dots, m-1, \int_R x^m \psi(x) dx \neq 0,$$

则称 $\psi$ 具有 $m$ 阶消失矩。

从消失矩的定义可以看出, 如果一个信号是一个不超过 $m-1$ 次的多项式, 那么它的小波变换恒为零。如果该信号可展成一个高阶的多项式(如Taylor级数), 那么其中阶次小于 $m$ 次的多项式部分(对应低频) 在小波变换中的贡献恒为零, 反映在小波变换中的只是阶次大于 $m-1$ 的多项式部分, 它们对应高频端, 这就有利于突出信号中的高频成分及信号中的突变点。从这个角度讲, 我们希望一个小波函数能具有尽量高的消失矩。消失矩越高, 在 $\lambda=0$ 处越平滑地为零, 越具有好的带通性质。当我们将小波变换用于实际的信号分析和处理时, 不论是从数据压缩的角度, 还是从去除噪声的角度以及从突出信号中的奇异点的角度, 我们都希望小波变换后的能量集中在少数的系数。也就是说, 我们希望信号在小波变换后的系数绝大部分能为零, 或尽量地小。这一方面取决于信号本身的特点, 另一方面取决于小波函数的支集的大小, 再一方面即是取决于小波基函数是否具有高的消失矩。

**定理 6.1** 设 $\psi$ 为一小波, 如果 $H(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} h_k e^{-i\lambda k}$  在 $\lambda=0$ 具有 $m-1$ 阶连续导数, 则下面的结论等价:

1.  $|\psi|$ 具有 $m$ 阶消失矩
2.  $(\hat{\psi})^{(n)}(0) = 0$
3.  $H^{(n)}(\pi) = 0$
4.  $\sum_{k \in Z} (-1)^k k^n h_k = 0$

其中,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ 。

**证明** 由

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-i\lambda t} dt \\ (\hat{\psi})^{(n)}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-it)^n \psi(t) e^{-i\lambda t} dt \\ (\hat{\psi})^{(n)}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-it)^n \psi(t) dt \\ &= (-i)^n \int_{\mathbb{R}} t^n \psi(t) dt\end{aligned}$$

知(1)和(2)等价。

另一方面, 由

$$\hat{\psi}(\lambda) = G\left(\frac{\lambda}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = -e^{-i\lambda} \overline{H\left(\frac{\lambda+2\pi}{2}\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$



知  $\widehat{\psi}(0) = -\overline{H(\pi)}\widehat{\phi}(0)$ , 从而

$$\widehat{\psi}(0) = 0 \Leftrightarrow H(\pi) = 0.$$

对上式求导得

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}'(\lambda) &= ie^{-i\lambda} \overline{H\left(\frac{\lambda+2\pi}{2}\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-i\lambda} \overline{H'\left(\frac{\lambda+2\pi}{2}\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-i\lambda} \overline{H\left(\frac{\lambda+2\pi}{2}\right)} \widehat{\phi}'\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\ &= -i\widehat{\psi}(\lambda) - \frac{1}{2} e^{-i\lambda} \overline{H'\left(\frac{\lambda+2\pi}{2}\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-i\lambda} \overline{H\left(\frac{\lambda+2\pi}{2}\right)} (\widehat{\phi}')\left(\frac{\lambda}{2}\right) \end{aligned}$$

即

$$(\widehat{\psi})'(0) = -i\widehat{\psi}(0) - \frac{1}{2} \overline{H'(\pi)} \widehat{\phi}(0) - \frac{1}{2} \overline{H(\pi)} (\widehat{\phi})'(0)$$

所以

$$\widehat{\psi}(0) = 0, \widehat{\psi}'(0) = 0 \Leftrightarrow H(\pi) = 0, H'(\pi) = 0.$$

同理可证:

$$\widehat{\psi}^{(n)}(0) = 0, n = 0, \dots, m-1 \Leftrightarrow H^{(n)}(\pi) = 0.$$

从而, (2) 和 (3) 等价。

由

$$H(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} h_k e^{-i\lambda k}$$

可得

$$\begin{aligned} H^{(n)}(\lambda) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} h_k (-ik)^n e^{-i\lambda k} \\ H^{(n)}(\pi) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} h_k (-ik)^n (-1)^k = \frac{(-i)^n}{2} \sum_{k \in Z} (-1)^k k^n h_k \end{aligned}$$

即 (4) 和 (3) 等价。 #

当小波  $\psi$  具有较高的消失矩时, 用小波函数生成的级数逼近光滑函数, 能够取得良好的效果。这个结论是由下面的定理给出。

**定理 6.2** 设小波具有  $m$  阶消失矩, 其相应的尺度函数为  $\phi$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R})$  具有任意阶导数, 则对任意的正整数  $j$ , 有

$$\left\| f - \sum_{k \in Z} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \right\| \leq 2^{-jm} \|f^{(m)}\|.$$

对于小波基 $\psi$ ,  $\psi$ 正则性与 $\widehat{\psi}$ 在 $\lambda = 0$ 处的零点的阶数之间存在着一种内在联系, 便是下面的定理。

**定理 6.3** 如果 $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的标准正交集, 且 $|\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}$ ,  $\alpha > m + 1$ ,  $\psi \in C^m$ , 且当 $l \leq m$ ,  $\psi^l$ 有界。则:

$$\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0, l = 0, 1, \dots, m.$$

**证明** 对 $l$ 进行数学归纳法。当 $l = 0$ 结论显然, 假设结论对 $l < n$ 成立, 现在我们考察 $l = n$ 。给定 $x$ , 对任意的 $\epsilon > 0$ , 存在 $\delta > 0$ , 使得存在 $x_0$ ,  $|x - x_0| < \delta$ , 且

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} \right| < \epsilon |x - x_0|^n$$

从而, 对足够大的 $j$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int dx f(x) \overline{\psi(2^j(x - x_0))} \\ &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \int \frac{(x - x_0)^k}{k!} \overline{\psi(2^j(x - x_0))} dx \\ &\quad + \int \left[ f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} \right] \overline{\psi(2^j(x - x_0))} dx \end{aligned}$$

注意由归纳假设, 第一项等于

$$\frac{f^{(n)}(x_0) 2^{-(n+1)j} \int_{\mathbb{R}} x^n \overline{\psi(x)} dx}{n!}.$$

对于第二项, 我们需要下面的估计

$$\begin{aligned} &\epsilon \int_{|y| < \delta} |y|^n |\psi(2^j y)| dy + C_1 \int_{|y| \geq \delta} (1 + |y|^n) |\psi(2^j y)| dy \\ &\leq 2\epsilon C 2^{-j(n+1)} \int_0^{2^j \delta} t^n (1+t)^{-\alpha} dt + 2CC_1 \int_{\delta}^{\infty} (1+|t|)^n (1+2^j t)^{-\alpha} dt \\ &\leq C_2 \epsilon 2^{-j(n+1)} + C_3 2^{-j\alpha} \delta^{-\alpha} (1+\delta)^{n+1} \end{aligned}$$

这里, 第二项的估计用到了

$$(1 + 2^j t)^{-1} \leq \frac{1 + \delta}{1 + 2^j \delta} (1 + t)^{-1} \leq 2^{-j} \frac{1 + \delta}{\delta} (1 + t)^{-1}.$$

将这些式子代入就可以证明, 如果 $n \leq m$ , 有

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = 0.$$

#

## §6.2 Daubechies小波的构造

上一章告诉我们, 一个正交小波可以直接从双尺度系数 $\{h_k\}$ 中通过迭代求解。但是,  $\{h_k\}$ 生成的多项式 $P(z)$ 需要满足三个条件:

1.  $P(1) = 1$ ;
2.  $|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, |z| = 1$ ;
3.  $|P(e^{it})| > 0, |t| \leq \frac{\pi}{2}$ 。

在这三个条件中, 最难处理的是第二个条件。而事实上, 我们注意到第二个条件刻划的就是 $\{\phi(x - k)\}$ 的正交性。而我们知道, 正交性的一个充分条件是

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k+2n}} = 2\delta_{0,n}.$$

首先, 我们注意到假设如果 $k = 0, \dots, N, h_k \neq 0$ , 那么 $N$ 一定是奇数。这是因为如果 $N$ 是偶数, 上述条件的最后一个方程是

$$h_0 h_N = 0,$$

会导致 $h_N = 0$ , 就矛盾了。另一方面, 这里会引入一个自然的问题: 这个条件是必要条件吗? 如果是, 那么这个问题就容易很多, 我们只要求解条件1和这个新的条件, 他们都是直接和双尺度系数相关, 因此是可以求解的。然后验证是否满足条件3即可。很不幸的是, 这个答案是否定的。

**例 6.1** 假设一个给定的双尺度系数只有 $h_0, \dots, h_3$ 非零, 则上面两个条件就是

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 2, \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0, \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = 2, \end{cases} \quad (6.1)$$

求解这个方程可得:

$$\begin{cases} h_1 = 1 - h_3, \\ h_2 = \frac{1 \pm \sqrt{2 - 4(h_3 - \frac{1}{2})^2}}{2}, \\ h_0 = 1 - h_3, \end{cases} \quad (6.2)$$

这个方程的两个特解分别为

$$\left\{ \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \right\}$$

和

$$\{1, 0, 0, 1\}$$

对于第一个解, 我们已经知道它对应于一个正交的小波。但是对于第二个解, 下面我们可以证明它对应的尺度函数不是正交的。

所以, 我们需要增加什么样的条件才能保证上面的方程可以求解。Daubechies的目标是构造具有高阶消失矩的紧支集的正交小波, 因此她引入了消失矩的条件, 构造了一大类具有不同消失矩和紧支集的正交小波。

**例 6.2** 假设一个给定的双尺度系数只有  $h_0, \dots, h_3$  非零, 加入消失矩的条件后,

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 2, \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = 2 \quad (6.4)$$

$$\begin{cases} h_0 - h_1 + h_2 - h_3 = 0, \\ h_1 - 2h_2 + 3h_3 = 0, \\ h_1 - 4h_2 + 9h_3 \neq 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

求解这个方程可得它的两组实数解:

$$\left\{ \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \right\}$$

和

$$\left\{ \frac{1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \right\}$$

第一个就是  $D_4$  小波滤波器, 第二个是 *Symmlets* 滤波器。

下面给出 Daubechies 小波的构造方法。

**定理 6.4** 设有限实系数  $h = \{h_0, h_1, \dots, h_L\}$  满足

1.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2n} = 2\delta_{0,n}$

2.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = 2$

3. 存在正整数  $N$ , 使得

$$H(\lambda) = \left( \frac{1 + e^{-i\lambda}}{2} \right)^N Q_N(e^{-i\lambda}),$$

其中  $Q_N(z)$  是  $L - N$  次实系数多项式, 且满足

$$Q_N(-1) \neq 0, \sup_{|z| \leq 1} |Q_N(z)| < 2^{N-1}.$$

则双尺度方程迭代可接。在条件 $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 下, 其解连续唯一且是具有紧支集的正交尺度函数。

首先我们介绍一下Riesz引理, 该证明可以参考相关书籍。

**引理 6.1** (Riesz引理) 设 $A$ 是一个实系数余弦多项式

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^N a_k \cos k\lambda,$$

其中,  $a_N \neq 0$ , 满足对任意的 $\lambda \in R$ 有,  $A(\lambda) \geq 0$ 。则存在 $N$ 次实系数代数多项式

$$B(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^k$$

满足 $|B(e^{i\lambda})|^2 = A(\lambda)$ , 且 $B(1) > 0$ 。

**引理 6.2** 形如 $H(\lambda) = \left(\frac{1+e^{-i\lambda}}{2}\right)^N Q_N(e^{-i\lambda})$ 的实系数三角多项式满足

$$|H(\lambda)|^2 + |H(\lambda + \pi)|^2 = 1$$

的充要条件是

$$|Q_N(e^{i\lambda})|^2 = P\left(\sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)$$

其中多项式 $P$ 满足:

$$P(y) = P_N(y) + y^N R\left(\frac{1}{2} - y\right),$$

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N+k-1)!}{(N-1)!k!} y^k$$

$R(y)$ 是一个可选择的奇多项式, 使得 $P(y) \geq 0, \forall y \in [0, 1]$ 。

**证明** 首先注意到,  $|Q_N(e^{i\lambda})|^2$ 可以表示成 $\cos \lambda$ 的函数, 从而可以表示成 $\sin^2 \frac{\lambda}{2}$ 的函数, 即存在多项式 $P(x)$ , 使得

$$|Q_N(e^{i\lambda})|^2 = P\left(\sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)$$

将 $H(\lambda) = \left(\frac{1+e^{-i\lambda}}{2}\right)^N Q_N(e^{-i\lambda})$ 代入到

$$H(\lambda) = \left(\frac{1+e^{-i\lambda}}{2}\right)^N Q_N(e^{-i\lambda}),$$

得

$$\left(\cos^2 \frac{\lambda}{2}\right)^N P\left(\sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) + \left(\sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)^N P\left(\cos^2 \frac{\lambda}{2}\right) = 1$$

令  $y = \sin^2 \frac{\lambda}{2}$ , 则上式变成

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1$$

由于  $(1-y)^N$  和  $y^N$  没有公共根, 由Bezout定理知, 存在不超过  $N-1$  次多项式  $q_1(y)$  和  $q_2(y)$  使得

$$(1-y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1.$$

在上式中, 将  $y$  换成  $1-y$ , 得到

$$y^N q_1(1-y) + (1-y)^N q_2(1-y) = 1.$$

由  $q_1$  和  $q_2$  的唯一性, 有  $q_2(y) = q_1(1-y)$ 。从而存在唯一的  $q_1(y)$  使得

$$(1-y)^N q_1(y) + y^N q_1(1-y) = 1.$$

为了求出  $q_1(y)$ , 我们将上式稍微变一下形式,

$$q_1(y) = (1-y)^{-N} (1-y^N q_1(1-y))$$

由于  $q_1(y)$  的次数不超过  $N-1$ , 所以

$$q_1(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N+k-1)!}{(N-1)!k!} y^k$$

假设  $P(y)$  满足条件, 在存在  $U(y)$ , 使得  $P(y) - q_1(y) = y^N U(y)$ , 且

$$(1-y)^N (P(y) - q_1(y)) + y^N (P(1-y) - q_1(1-y)) = 0,$$

即

$$U(y) + U(1-y) = 0.$$

如果令  $U(y) = R(\frac{1}{2} - y)$ , 则  $R(-y) = -R(y)$ , 即  $R(y)$  是奇多项式。 #

**引理 6.3** 对任意的自然数  $N \geq 2$  和任意的  $\lambda \in R$  有

$$P_N\left(\sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) < 2^{2N-2}$$

**证明** 由 $P_N(y)$ 的定义可知

$$P_N\left(\sin^2\frac{\lambda}{2}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N+k-1)!}{(N-1)!k!} \left(\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N+k-1)!}{(N-1)!k!} = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N+k-1}^k,$$

注意到:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

可得:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} C_{N+k-1}^k &= C_{2N-1}^{N-1} \\ &= \frac{1}{2}(C_{2N-1}^{N-1} + C_{2N-1}^N) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} C_{2N-1}^k = 2^{2N-2}. \end{aligned}$$

#

至此我们可以给出Daubechies小波的主要步骤:

1. 选取正整数 $N \geq 2$ , 确定多项式 $P_N(y)$ :

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N+k-1)!}{(N-1)!k!} y^k$$

2. 利用

$$|Q_N(e^{i\lambda})|^2 = P\left(\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)$$

解出 $Q_N(z)$ 的系数 $q_0, q_1, \dots, q_{N-1}$ , 进而求出多项式 $Q_N(z)$ , 使得 $Q_N(1) = 1$ 。

3. 利用

$$H(\lambda) = \left(\frac{1+e^{-i\lambda}}{2}\right)^N Q_N(e^{-i\lambda})$$

求出 $\{h_k\}_{k=0}^{2N-1}$ 。

4. 求出双尺度方程的迭代解 $\phi$ 。
5. 利用双尺度系数和 $\phi$ 求出正交小波 $\psi$ 。

例 6.3  $D_4$ 小波: 取 $N = 2$ , 则

$$P_2(y) = \sum_{k=0}^1 (k+1)y^k = 1 + 2y.$$

假设

$$Q_2(e^{i\lambda}) = q_0 + q_1 e^{i\lambda},$$

则

$$\begin{aligned} |Q_2(e^{i\lambda})|^2 &= (q_0 + q_1 e^{i\lambda})(q_0 + q_1 e^{-i\lambda}) \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_0 q_1 (e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}) \\ &= (q_0 + q_1)^2 - 4q_0 q_1 \sin^2 \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

代入到条件

$$|Q_N(e^{i\lambda})|^2 = P\left(\sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)$$

可得:

$$(q_0 + q_1)^2 = 1, q_0 q_1 = -\frac{1}{2}$$

由此可得两组解满足 $Q(1) = 1$ :

$$q_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, q_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

和

$$q_0 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, q_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

对于 $q_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, q_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ , 则

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \left(\frac{1 + e^{-i\lambda}}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-i\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2e^{-i\lambda} + e^{-2i\lambda}) \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-i\lambda}\right) \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{8} + \frac{3 + \sqrt{3}}{8} e^{-i\lambda} + \frac{3 - \sqrt{3}}{8} e^{-2i\lambda} + \frac{1 - \sqrt{3}}{8} e^{-3i\lambda} \end{aligned}$$

从而:

$$\{h_0, h_1, h_2, h_3\} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \right\}$$



如果我们取另外一组 $q_0$ 和 $q_1$ , 就可以得到另外一组解:

$$\{h_0, h_1, h_2, h_3\} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \right\}$$

例 6.4  $D_6$ 小波: 取 $N = 3$ , 则

$$P_3(y) = \sum_{k=0}^1 \frac{(k+2)(k+1)}{2} y^k = 1 + 3y + 6y^2.$$

假设

$$Q_2(e^{i\lambda}) = q_0 + q_1 e^{i\lambda} + q_2 e^{2i\lambda},$$

则

$$\begin{aligned} |Q_2(e^{i\lambda})|^2 &= (q_0 + q_1 e^{i\lambda} + q_2 e^{2i\lambda})(q_0 + q_1 e^{-i\lambda} + q_2 e^{-2i\lambda}) \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + (q_0 q_1 + q_1 q_2)(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}) + q_0 q_2 (e^{2i\lambda} + e^{-2i\lambda}) \\ &= (q_0 + q_1 + q_2)^2 - 4(q_0 q_1 + 4q_0 q_2 + q_1 q_2) \sin^2 \frac{\lambda}{2} + 16q_0 q_2 \sin^4 \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

代入到条件

$$|Q_N(e^{i\lambda})|^2 = P \left( \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right)$$

可得:

$$(q_0 + q_1 + q_2)^2 = 1, -4(q_0 q_1 + 4q_0 q_2 + q_1 q_2) = 3, 8q_0 q_2 = 3$$

由此可得两组解满足 $Q(1) = 1$ :

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right), \\ q_1 &= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{10}), \\ q_2 &= \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right), \\ q_1 &= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{10}), \\ q_2 &= \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right) \end{aligned}$$

对于第一组解, 有

$$\begin{aligned}
 H(\lambda) &= \left(\frac{1+e^{-i\lambda}}{2}\right)^3 (q_0 + q_1 e^{-i\lambda} + q_1 e^{-2i\lambda}) \\
 &= \frac{1}{4} (1 + 2e^{-i\lambda} + e^{-2i\lambda}) \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} e^{-i\lambda}\right) \\
 &= \frac{1}{8} (q_0 + (3q_0 + q_1)e^{-i\lambda} + (3q_0 + 3q_1 + q_2)e^{-2i\lambda} + (q_0 + 3q_1 + 3q_2)e^{-3i\lambda} \\
 &\quad + (q_1 + 3q_2)e^{-4i\lambda} + q_2 e^{-5i\lambda})
 \end{aligned}$$

从而:

$$\begin{cases}
 h_0 = \frac{1}{16}(1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}), \\
 h_1 = \frac{1}{16}(5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}), \\
 h_2 = \frac{1}{16}(10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}), \\
 h_3 = \frac{1}{16}(10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}), \\
 h_4 = \frac{1}{16}(5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}), \\
 h_5 = \frac{1}{16}(1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}),
 \end{cases} \quad (6.6)$$

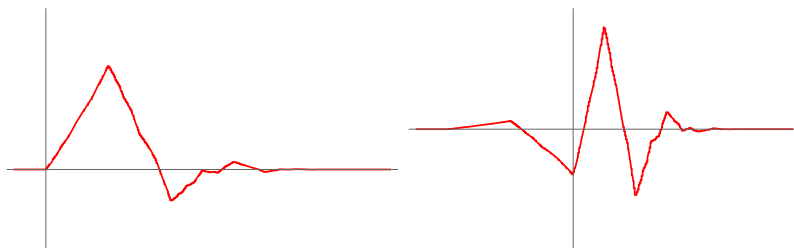


图 6.1 D6尺度函数和小波函数图像

### §6.3 Daubechies小波的性质

Daubechies小波满足一系列好的性质, 下面给出它的相关性质。

#### Daubechies小波的支集

我们首先回顾一下尺度函数的迭代构造, 给定一组合适的  $h_k, k = 0, 1, \dots, 2N - 1$ , 给定一个满足条件的尺度函数  $\phi_0(x)$ , 对任意的  $n$ , 令

$$\phi_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{n-1}(2x - k),$$

则函数列 $\phi_n(x)$ 在 $L^2$ 中逐点收敛到满足条件的尺度函数 $\phi(x)$ 。

假设 $\phi_n(x)$ 的支集是 $[a_n, b_n]$ , 则

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + N - \frac{1}{2}.$$

从而求得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2N - 1$$

即Daubechies小波的尺度函数的支集是 $[0, 2N - 1]$ 。同理可以求出Daubechies小波函数的支集是 $[1 - N, N]$ 。

### Daubechies小波的消失矩

对于Daubechies小波 $\psi_N(x)$ , 我们有下的定理

**定理 6.5**

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \psi_N dx = \begin{cases} 0, & k = 0, \dots, N-1; \\ -\frac{2^{-N} N!}{\sqrt{2\pi}} P_N(-1), & k = N. \end{cases} \quad (6.7)$$

这个定理的证明作为作业。

### Daubechies小波的正则性

我们用Lipschitz指数在频率域中的度量来刻画小波函数的正则性, 即如果 $\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{f}(\lambda)|}{1+|\lambda|^\alpha} < \infty$ , 则称 $f$ 的正则性是 $\alpha$ 。Daubechies小波的正则性如下表所示。

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha$	0.5	0.915	1.275	1.596	1.888	2.158	2.415	2.611	2.902

### Daubechies小波的对称性

**定义 6.2** 函数 $f$ 称为对称的如果存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得对任意的 $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(a+t) = f(a-t)$ 。如果存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得对任意的 $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(a+t) = -f(a-t)$ , 则称该函数 $f$ 是反对称的。

**定理 6.6** 假设与某个多分辨分析联系的尺度函数 $\phi$ 和 $\psi$ 都是实的且具有紧支集, 如果 $\psi$ 是对称的或者反对称的, 则 $\psi$ 是Haar小波。

**证明** 首先不妨设 $h_k \neq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , 而对于其他的 $k$ ,  $h_k = 0$ , 则 $N$ 一定是奇数。由于 $\psi$ 的支集是 $[0, N]$ , 所以小波函数 $\psi$ 的支集是 $-n_0, n_0 + 1$ , 其中 $n_0 = \frac{N-1}{2}$ 。因此, 小波函数的对称轴只可能是 $\frac{1}{2}$ , 故要么 $\psi(1-x) = \psi(x)$ , 要么 $\psi(1-x) = -\psi(x)$ 。又

$$\psi_{j,k}(-x) = \pm 2^j \psi(2^j x + k + 1) = \pm \psi_{j, -(k+1)}(x)$$

所以, 小波空间在变换 $x \rightarrow -x$ 下不变, 同理这个对空间 $V_j$ 也成立。

设 $\tilde{\phi}(x) = \phi(N-x)$ , 则 $\tilde{\phi}(x)$ 也生成 $V_0$ 的一组标准正交基 (因为 $V_0$ 在变换 $x \rightarrow -x$ 下不变)。可以证明 $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$  (见作业), 即 $\phi(N-x) = \phi(x)$ 。从而

$$\begin{aligned} h_n &= 2 \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\phi(2t-k)} dt \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \phi(N-t) \overline{\phi(N-2t+k)} dt \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \overline{\phi(2x-N+n)} dx \\ &= h_{N-n} \end{aligned}$$

再由

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \bar{h}_{k+2m} = 2\delta_{m,0}$$

和

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = 2$$

可得存在 $n_0$ , 使得

$$h_{2m} = \delta_{m,0}, h_{2m+1} = \delta_{m,n_0}$$

从而

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & x \in [0, N]; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

如果 $N = 1$ , 则它对应到Haar小波, 如果 $N > 1$ , 则它不是标准正交的 (作业)。 #

## §6.4 Daubechies小波的计算

虽然在小波函数 $\psi_N$ 的分解和重构中, 我们不需要小波函数的具体求值。但是, 在分析和理解 $\psi_N$ 的基本性质以及绘制时, 我们还是需要知道如何求解小波函数在每一个点的值。很不幸, 除了Haar小波, 其他的Daubechies小波函数不能写出他们的初等函数的表示形式, 下面给出一个方法可以求出该小波函数和尺度函数在每一个有理点的值。该算法主要包含三步。

1. 计算尺度函数和小波函数在整数节点的值:

注意到只有  $\phi(k) = 0, k \leq 0, k \geq 2N - 1$ 。所以, 我们只需要计算  $\phi(j), j = 1, \dots, 2N - 2$ 。令  $j = 1, \dots, 2N - 2$ , 则

$$\psi(j) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \psi(2j - k) = \sum_{k=2j-2N+1}^{2j} h_{2j-k} \psi(k)$$

上述关系可以得到一个线性方程组  $\vec{m} = M\vec{m}$ , 其中

$$\vec{m} = [\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(2N - 2)]^T$$

$$M = [h_{2j-k}]_{j,k=1}^{2N-2}.$$

可以看出上述方程是奇异的, 所以我们需要更多的条件。首先, 我们注意到:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n}{2^j}\right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi\left(\frac{n}{2^{j-1}} - k\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n}{2^{j-1}} - k\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n - 2^{j-1}k}{2^{j-1}}\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n}{2^{j-1}}\right) \\ &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n}{2^{j-1}}\right) \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} \int_{x \in \mathbb{R}} \phi(x) dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n}{2^j}\right) \frac{1}{2^j} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n}{2^j}\right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(j) \end{aligned}$$

从而, 尺度函数的标准化条件可以写成:

$$\sum_{k=1}^{2N-2} h_k = 1$$

联立上面的方程, 可以求出  $\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(2N - 2)$ 。

2. 计算尺度函数 $\phi\left(\frac{n}{2^j}\right)$ 的值:  
 接下来的计算就比较直观,

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{n}{2}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi(n-k), \\ \phi\left(\frac{n}{4}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi\left(\frac{n-2k}{2}\right), \\ \dots\dots, \\ \phi\left(\frac{n}{2^j}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi\left(\frac{n-2^{j-1}k}{2^{j-1}}\right), \\ \dots\dots, \end{cases} \quad (6.8)$$

3. 计算小波函数 $\psi\left(\frac{n}{2^j}\right)$ 的值:  
 小波函数的计算也是一样的,

$$\begin{cases} \psi\left(\frac{n}{2}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^{k-1} h_k \phi(n-k), \\ \psi\left(\frac{n}{4}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^{k-1} h_k \phi\left(\frac{n-2k}{2}\right), \\ \dots\dots, \\ \psi\left(\frac{n}{2^j}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^{k-1} h_k \phi\left(\frac{n-2^{j-1}k}{2^{j-1}}\right), \\ \dots\dots, \end{cases} \quad (6.9)$$

**例 6.5** 我们考虑 $D_4$ 小波。

首先, 我们需要计算 $\phi(1)$ 和 $\phi(2)$ , 由双尺度关系:

$$\begin{aligned} \phi(1) &= h_1 \phi(1) + h_0 \phi(2) \\ \phi(2) &= h_3 \phi(1) + h_2 \phi(2) \end{aligned}$$

其中,

$$\{h_0, h_1, h_2, h_3\} = \left\{ \frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4} \right\}$$

代入我们发现这两个方程完全等价。所以, 加上

$$\phi(1) + \phi(2) = 1$$

的条件, 可以求得

$$\begin{cases} \phi(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ \phi(2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad (6.10)$$

进一步的, 我们可以求出 $\phi(\frac{1}{2})$ ,  $\phi(\frac{3}{2})$ ,  $\phi(\frac{5}{2})$ 。

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{1}{2}\right) &= h_0\phi(1) = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{8} \\ \phi\left(\frac{3}{2}\right) &= h_1\phi(2) + h_2\phi(1) = 0 \\ \phi\left(\frac{5}{2}\right) &= h_3\phi(2) = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{8}\end{aligned}$$

同理可以求出尺度函数和小波函数在所有二等分点的值。

**例 6.6** 高阶的Daubechies小波由于具有更好的正则性, 在处理光滑信号的去噪和压缩中都会显示优势。首先给出一个去噪的例子, 在这个例子中, 给定的信号和噪声信号如图6.2所示, 我们分别利用Haar小波,  $D_4$ 小波和 $D_6$ 小波对给信号去噪, 然后利用NMSE(标准化均方误差)来刻划去噪的效果。可以看出, 在这个例子中,  $D_6$ 小波具有更好的去噪效果。在压缩中, 我们也可以得出同样的结论, 如图6.3所示。

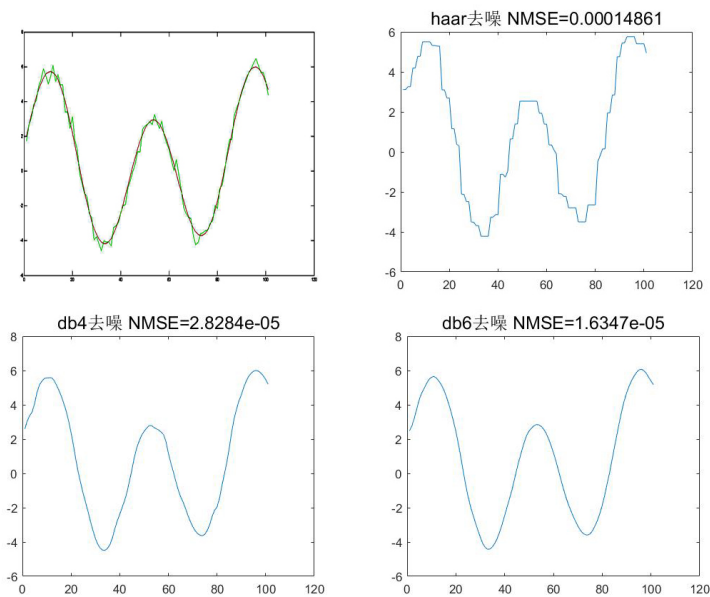


图 6.2 利用Haar小波,  $D_4$ 小波和 $D_6$ 小波去噪。

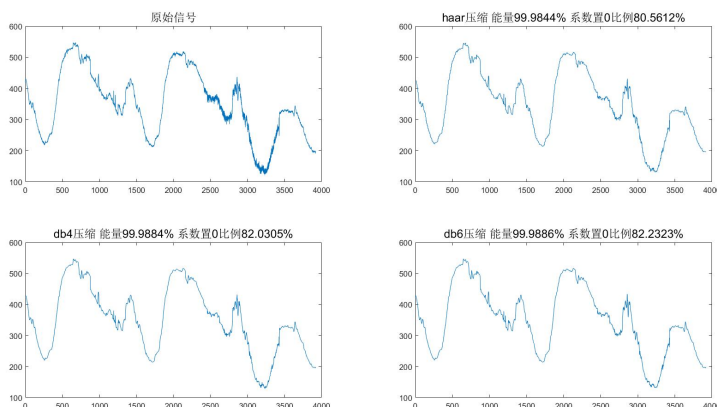


图 6.3 利用Haar小波, D4小波和D6小波压缩。

作业 6.1 1. 证明Daubechies小波的消失矩定理。

2. 如果

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & x \in [0, N]; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

证明, 如果 $N > 1$ , 则 $\{\phi(t - k)\}$ 不是标准正交的。

3. 如果 $f, g$ 都有紧支集, 且 $f(t - k)$ 和 $g(t - k)$ 是同一个空间的标准正交基, 则存在 $\alpha \in C, |\alpha| = 1$ , 和 $n \in Z$ , 使得 $g(t) = \alpha f(t - n)$ 。

4. 求证: 如果 $\phi$ 是正交的尺度函数, 则 $\sum_{n \in Z} \phi(t - n) = 1$

5. 设 $f(t)$ 是一个支集为 $[0, 1]$ 的函数, 它在区间 $[\tau_k, \tau_{k+1}]_{0 \leq k < K}$ 上是不同的 $q$ 次多项式, 其中 $\tau_0 = 0, \tau_K = 1$ 。令 $\psi(t)$ 是有 $p$ 阶消失距的Daubechies小波。

(a) 如果 $q < p$ , 在固定的尺度 $2^j$ 上计算非零小波系数 $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$ 的个数, 为了使得这个个数最小, 如何选择 $p$ ?

(b) 如果 $q > p$ , 在固定尺度 $2^j$ 上非零的小波系数 $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$ 的最大个数是多少?

6. 求证: 如果 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(R)$ 的一组标准正交基, 那么对任意的 $\lambda \neq 0$ , 有

$$\sum_{j \in Z} |\hat{\psi}(2^j \lambda)|^2 = \frac{1}{2\pi}$$



7. 我们定义下面两个尺度函数

$$\phi_1(t) = \phi_1(2t) + \phi_1(2t - 1) \quad (6.11)$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2}(\phi_2(2t) + \phi_2(2t - 1) - \phi_1(2t) - \phi_1(2t - 1)) \quad (6.12)$$

计算函数 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 并证明 $\{\phi_1(t-k), \phi_2(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是它生成空间的一组标准正交基。



## 第七章 小波包

在多分辨率分析的分解过程中,对任意的 $j$ ,有分解

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

上面的分解就是将 $V_{j+1}$ 中的元素 $f_{j+1}$ 分解成 $V_j$ 中的元素 $f_j$ 和 $W_j$ 中的元素 $w_j$ 的和。其中, $f_j$ 是 $f_{j+1}$ 的系数和双尺度系数的乘积,对应到低频函数; $w_j$ 是 $f_{j+1}$ 的系数和小波系数的乘积,对应到高频函数。如果上面的分解没有达到给定的要求,那么会继续对 $V_j$ 做分解

$$V_{j+1} = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \oplus W_j$$

也就是说,小波变换每一次分解都是对 $V_j$ 进行,而不再对 $W_j$ 进行分解。

小波分解的目的是将信号分解成低频(轮廓)和低频(细节)两个部分,然而小波系数叠加的结果可能是高频函数也可能是低频函数。从而,上述的小波分解并不能完全达到这个目的,因为 $f_j$ 不能充分表示轮廓,有一些也会在 $w_j$ 中。所以,传统的小波变换高频部分分辨率不高,没能获得最好的结果。

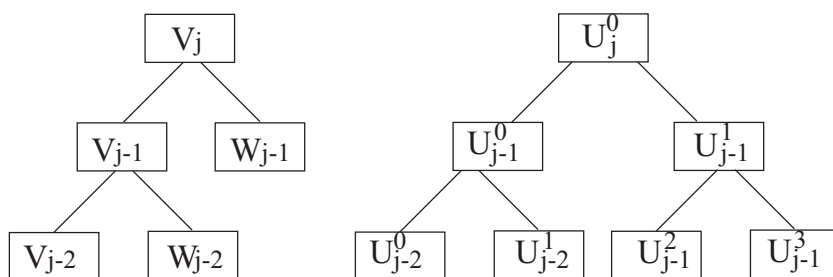


图 7.1 小波分解和小波包分解

对给定的信号,如何得到一个更加合理的分解呢?这里基本的想法是,我们不仅仅对 $V_j$ 做分解,我们也会对小波空间 $W_j$ 做分解。这一想法带来的就是小波包分解。虽然小波包分解也不能说可以将轮廓和细节完全分开,但是,通过小波包的分解,我们可以选择最优的小波包分解。小波包分析是一种更加精细的分解方法,它将信号进行多层次分解,对多分辨率分析中没有分解的小波空间做进一步的分解。然后根据信号自身的特点,自适应的选择适合的分解,使得和信号匹配。如图7.1所示,左边就是通常的多分辨率分析的分解模式,而右边是小波包的分解模式。

## §7.1 小波包

第五章建立了多分辨率分析的框架。该框架将 $L^2(\mathbb{R})$ 空间分解成一些直和:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_{j_0} \bigcup_{k=j_0}^{\infty} W_k.$$

小波变换每一次分解都是对 $V_j$ 进行, 而不再对 $W_j$ 进行分解。小波包的基本思想就是进一步的对 $W_k$ 做分解。为此, 我们引入下面的记号。

令 $\phi_0(x) = \phi(x)$ ,  $\phi_1(x) = \psi(x)$ , 则双尺度和小波关系如下:

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_0(2x - k); \\ \phi_1(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_0(2x - k);\end{aligned}$$

其中,  $g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}}$ 。定义

$$\phi_{2l}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_l(2x - k); \quad (7.1)$$

$$\phi_{2l+1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_l(2x - k); \quad (7.2)$$

**定义 7.1** 由上式7.1确定的函数集 $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 由正交尺度函数 $\phi(x)$ 确定的正交小波包。

**定理 7.1** 设非负整数 $n$ 的二进制表示为

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j 2^{j-1},$$

则小波包 $\phi_n(t)$ 的傅里叶变换为

$$\widehat{\phi}_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} P_{\epsilon_j} \left( \frac{\lambda}{2^j} \right)$$

其中,

$$P_0(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\lambda}, P_1(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-ik\lambda}.$$

**证明** 一方面, 当 $n = 0$ 或者 $1$ 时, 由正交小波函数的多分辨率分析的构造方法, 即可以证明上式。假设上式对于 $0 \leq n < 2^m$ 都成立, 设 $2^m \leq n < 2^{m+1}$ , 则有

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1, & j = m + 1; \\ 0, & j > m + 1. \end{cases}$$

$$n = \sum_{j=1}^{m+1} \epsilon_j 2^{j-1} = \sum_{j=2}^{m+1} \epsilon_j 2^{j-1} + \epsilon_1$$

所以,

$$\frac{n}{2} = \sum_{j=1}^m \epsilon_{j+1} 2^{j-1} + \frac{\epsilon_1}{2}$$

记  $n_1 = [\frac{n}{2}]$ , 由7.1可知

$$\widehat{\phi}_n(\lambda) = P_{\epsilon_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right) \widehat{\phi}_{n_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right)$$

由假设可得

$$\widehat{\phi}_{n_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} P_{\epsilon_{j+1}} \left( \frac{\lambda}{2^j} \right)$$

代入即得

$$\widehat{\phi}_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} P_{\epsilon_j} \left( \frac{\lambda}{2^j} \right)$$

故原命题成立。

#

**定理 7.2**  $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  由正交尺度函数  $\phi(x)$  确定的正交小波包, 则对任意固定的  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是标准正交的。

**证明** 这个定理是用数学归纳法证明。显然定理对于  $n = 0, 1$  成立。假设定理对于  $0 \leq n < 2^m$  成立, 对于  $2^m \leq n < 2^{m+1}$ , 令  $n_1 = [\frac{n}{2}]$ , 则

$$\begin{aligned} \langle \phi_n(\bullet - j), \phi_n(\bullet - k) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}_n(\lambda)|^2 e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| P_{\epsilon_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}_{n_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{4\pi l}^{4\pi(l+1)} \left| P_{\epsilon_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}_{n_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \\ &= \int_0^{4\pi} \left| P_{\epsilon_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 e^{i(k-j)\lambda} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}_{n_1} \left( \frac{\lambda}{2} + 2\pi l \right) \right|^2 d\lambda \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}_{n_1} \left( \frac{\lambda}{2} + 2\pi l \right) \right|^2 &= 1, \\ |P_0(\lambda)|^2 + |P_0(\lambda + \pi)|^2 &= \frac{1}{2\pi}, \end{aligned}$$

$$|P_1(\lambda)|^2 + |P_1(\lambda + \pi)|^2 = \frac{1}{2\pi},$$

从而,

$$\begin{aligned} \langle \phi_n(\bullet - j), \phi_n(\bullet - k) \rangle &= \int_0^{4\pi} \left| P_{\epsilon_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \left| P_{\epsilon_1} \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 + \left| P_{\epsilon_1} \left( \frac{\lambda}{2} + \pi \right) \right|^2 \right) e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \\ &= \delta_{j,k} \end{aligned}$$

所以, 原命题成立。

#

**定理 7.3**  $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  由正交尺度函数  $\phi(x)$  确定的正交小波包, 则对任意固定的  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\{\phi_{2n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  和  $\{\phi_{2n+1}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是正交的。

**证明** 由Parseval恒等式以及小波包函数的性质, 有

$$\begin{aligned} \langle \phi_{2n}(\bullet - j), \phi_{2n+1}(\bullet - k) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}_n(\lambda)|^2 P_0 \left( \frac{\lambda}{2} \right) P_1 \left( \frac{\lambda}{2} \right) e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{4\pi l}^{4\pi(l+1)} P_0 \left( \frac{\lambda}{2} \right) P_1 \left( \frac{\lambda}{2} \right) \left| \widehat{\phi}_n \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|^2 e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{4\pi} P_0 \left( \frac{\lambda}{2} \right) P_1 \left( \frac{\lambda}{2} \right) \left| \widehat{\phi}_n \left( \frac{\lambda}{2} + 2\pi l \right) \right|^2 e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \\ &= \int_0^{4\pi} P_0 \left( \frac{\lambda}{2} \right) P_1 \left( \frac{\lambda}{2} \right) e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \\ &= \int_0^{2\pi} \left( P_0 \left( \frac{\lambda}{2} \right) P_1 \left( \frac{\lambda}{2} \right) + P_0 \left( \frac{\lambda}{2} + \pi \right) P_1 \left( \frac{\lambda}{2} + \pi \right) \right) e^{i(k-j)\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

注意到

$$P_0 \left( \frac{\lambda}{2} \right) P_1 \left( \frac{\lambda}{2} \right) + P_0 \left( \frac{\lambda}{2} + \pi \right) P_1 \left( \frac{\lambda}{2} + \pi \right) = 0$$

所以

$$\langle \phi_{2n}(\bullet - j), \phi_{2n+1}(\bullet - k) \rangle = 0$$

#

§7.2 小波包正交分解

令

$$U_j^n = \overline{\text{span}\{\phi_n(2^j x - k)\}}, k \in Z$$

定理 7.4 对任意的非负整数  $n$ , 有

$$U_{j+1}^n = U_j^{2n} \oplus U_j^{2n+1}.$$

证明 很显然  $U_j^{2n}$  和  $U_j^{2n+1}$  是  $U_{j+1}^n$  的子空间, 而且  $U_j^{2n}$  和  $U_j^{2n+1}$  是彼此正交的。所以, 只要证明  $U_{j+1}^n$  的基函数可以由  $U_j^{2n}$  和  $U_j^{2n+1}$  的基函数线性表示即可。

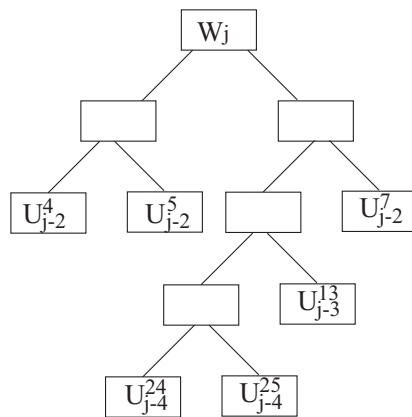


图 7.2 小波分解和小波包分解

事实上, 由于

$$\sum_{k \in Z} (h_{l-2k} h_{m-2k} + g_{l-2k} g_{m-2k}) = 2\delta_{l,m},$$

可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} [h_{m-2k} \phi_{2n}(2^j t - k) + g_{m-2k} \phi_{2n+1}(2^j t - k)] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} \sum_{l \in Z} [h_{m-2k} h_l + g_{m-2k} g_l] \phi_n(2^{j+1} t - 2k - l) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} \sum_{p \in Z} [h_{m-2k} h_{p-2k} + g_{m-2k} g_{p-2k}] \phi_n(2^{j+1} t - p) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l \in Z} \left[ \sum_{k \in Z} (h_{m-2k} h_{l-2k} + g_{m-2k} g_{l-2k}) \right] \phi_n(2^{j+1} t - l) \\
 &= \sum_{l \in Z} \delta_{l,m} \phi_n(2^{j+1} t - l) \\
 &= \phi_n(2^{j+1} t - m)
 \end{aligned}$$

所以,  $U_{j+1}^n$  的基函数可以由  $U_j^{2n}$  和  $U_j^{2n+1}$  的基函数线性表示, 即原命题成立。 #

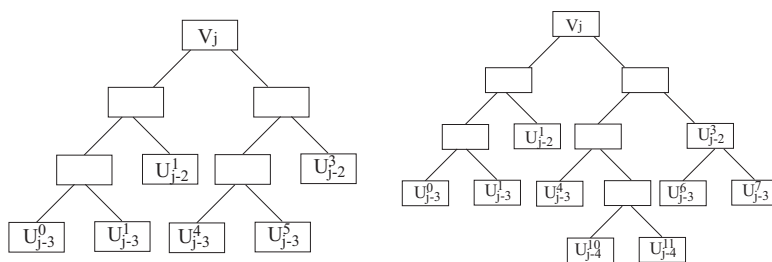


图 7.3 小波分解和小波包分解

类似的, 我们可以很容易得到小波子空间的进一步的正交分解, 比如:

**定理 7.5** 对任意的正整数  $j$ , 有

$$\begin{cases}
 W_j = U_{j-1}^2 \oplus U_{j-1}^3, \\
 \dots, \\
 W_j = U_{j-k}^{2^k} \oplus U_{j-k}^{2^k+1} \oplus \dots \oplus U_{j-k}^{2^{k+1}-1}, \\
 \dots, \\
 W_j = U_0^{2^j} \oplus U_0^{2^j+1} \oplus \dots \oplus U_0^{2^{j+1}-1},
 \end{cases} \quad (7.3)$$

进一步的,  $\{2^{\frac{j-k}{2}} \phi_{2^k+m}(2^{j-k} x - l)\}_{l \in Z}$  构成  $U_{j-k}^{2^k+m}$  的一组标准正交基。



**定理 7.6** 对任意的正整数 $j$ , 有

$$\begin{cases} V_j = U_{j-1}^0 \oplus U_{j-1}^1, \\ \cdots, \\ V_j = U_{j-k}^0 \oplus U_{j-k}^1 \oplus \cdots \oplus U_{j-k}^{2^k-1}, \\ \cdots, \\ V_j = U_0^0 \oplus U_0^1 \oplus \cdots \oplus U_0^{2^j-1}, \end{cases} \quad (7.4)$$

进一步的,  $\{2^{\frac{j-k}{2}} \phi_m(2^{j-k}x - l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$  构成  $U_{j-k}^m$  的一组标准正交基。

### §7.3 最优小波包分解算法

这一节给出小波包的分解方法, 并给出度量刻划最优的小波包分解树, 在此基础上, 我们给出最优小波包的分解重构算法。

#### §7.3.1 小波库

上面一节的定理告诉我们对于空间  $V_j$  或者  $W_j$  的分解书, 这些信息可以给出小波分解的仓库。事实上, 假设分解树对应的序列  $T = \{T_j\}$ , 设  $T_j = \{U_l^k\}$ , 由于

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

所以

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{U_l^k \in T_j} U_l^k$$

这个就是空间对应  $T$  的小波包分解。随着  $T$  的不同, 得到  $L^2(\mathbb{R})$  的不同分解。比如, 对于定理 7.5 的分解, 我们可以得到

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{i=0}^{2^k-1} U_{j-k}^{2^k+i}$$

上式表明, 对于任意的  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 存在系数  $c_{i,j,k,l}$ , 在范数意义下, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{2^k-1} c_{i,j,k,l} u_{j-k, 2^k+i, l}(x) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{2^k-1} c_{i,j,k,l} 2^{\frac{j-k}{2}} \phi_{2^k+i}(2^{j-k}x - l) \end{aligned}$$

同样, 对于 $W_j$ 的其他分解, 也可以得到 $L^2(R)$ 的一组标准正交基, 这些基作为集合, 构成了小波包分解的仓库。但是, 对于一个给定的问题, 这个仓库中的分解不是都很好, 所以我们需要从中选择我们所需要的分解树, 在此基础上得到小波包的分解重构算法。

### §7.3.2 代价函数

寻找一组小波基使其对于某个特定的代缴函数提供最优的数据表示形式, 这个代价函数可以根据特定的应用来选择。代价函数必须是实数值, 给定两个有限长度的向量 $a$ 和 $b$ , 假设他们连接在一起的向量为 $[a, b]$ , 则代价函数必须满足下面两个性质:

1. 代价函数 $M(x)$ 对长度有限的向量具有可加性: 即 $M([a, b]) = M(a) + M(b)$ ;
2.  $M(0) = 0$ , 其中 $0$ 是指零向量。

代价函数有多种定义, 这里给出的是基于信息论中的熵所给出的一个定义。以下先介绍熵的概念。

设一个系统发出信息, 信息在一个符号集合 $\{a_k\}$ 中, 系统发出符号 $a_k$ 的概率为 $p_k, 0 \leq p_k \leq 1$ 。这个过程可以看做一个随机变量 $X$ 在集合 $\{a_k\}$ 中的取值过程。那么发出符号 $a_k$ 这一事件的自信息量定义为

$$I(a_k) = -\log p_k.$$

单位为比特(*bit*)。自信息的加权平均是

$$H(X) = \sum_{k=1}^K p_k I(a_k) = -\sum_{k=1}^K p_k \log p_k$$

称为系统或者随机变量 $X$ 的熵。显然熵是一个非负数。

自信息反映符号所带信息量的多少。由于信息量对应一个信息的未知程度, 即信息的不确定性的反映, 是信息出现概率的减函数, 信息出现的概率越大, 不确定性越小, 所含信息量月小; 概率越小, 所含信息量越大。一个注定发生的事情是没有信息价值的, 反之一个几乎不可能发生的事件发生了, 会给人们带来无限的震动。熵作为平均的自信息, 反映了系统包含的信息量, 即输出信息整体不确定性的多少。比如, 一个系统 $X$ 的符号集合是 $\{a, b, c\}$ , 发出这些符号的概率分别是 $p(a) = 0.98, p(b) = 0.01, p(c) = 0.01$ 。另外一个系统 $Y$ 发出的符号集合是 $\{d, e, f\}$ , 发出这些符号的概率分别是 $p(d) = p(e) = p(f) = \frac{1}{3}$ 。那么对第一个系统, 发出符号 $a$ 的可能性最大, 因此这个系统的不确定要小。而第二个系统发出 $d, e, f$ 的可能性

都一样，从而不确定性要大。而

$$H(X) = -0.98 \log 0.98 - 0.01 \log 0.01 - 0.01 \log 0.01 = 0.161441$$

$$H(Y) = -\log \frac{1}{3} = 0.1585$$

可以看出，熵的大小反映的情况和直观结果是一致的。

我们可以从另外一个角度来看熵：熵反映了信息分布其中或者发散的情况。比如，在上面的例子中， $a$ 发生的概率最大，即这个信息主要集中在 $a$ 中，而在第二个系统中，每一个信息出现的概率相同，可以说信息的分别发散。分布集中的熵小，而分布分散的熵大。

参考熵的定义，对于一个可数序列 $a = \{a_k\}$ ，定义其代价函数 $M$ 为

$$M(a) = -\sum_n p_n \log p_n$$

其中

$$p_n = \frac{|a_n|^2}{\sum_k |a_k|^2}$$

这里取 $p_n = \frac{|a_n|^2}{\sum_k |a_k|^2}$ 的原因是这样定义的 $p_n$ 满足概率的性质 $0 \leq p_n \leq 1$ 和 $\sum_{k \in Z} p_k = 1$ 。另外一个原因是在小波的应用领域， $a$ 一般是在空间 $l^2$ 中，所以我们不取 $p_n = \frac{|a_n|}{\sum_k |a_k|}$ ，虽然这个定义也满足概率的性质。另一方面，代价函数的定义也反映了 $a_k$ 的分布情况，如果只有几个 $a_k$ 较大，其余都很小，那么 $M(a)$ 较小；反之如果非常多的 $|a_k|$ 差别不大，则 $M(a)$ 较大。

但是，上面给出的代价函数没有可加性，就是说如果我们将一个系列 $\{a_k\}$ 分成两部分， $\{a_k^1\}$ 和 $\{a_k^2\}$ ，则 $M(a) \neq M(a^1) + M(a^2)$ 。所以，我们需要对上述函数做进一步的改进。事实上，对于 $\{a_k\}$ ，我们定义代价函数 $\lambda(a)$ 为

$$\lambda(a) = -\sum_k |a_k|^2 \log |a_k|^2.$$

事实上，

$$\begin{aligned} M(a) &= -\sum_n p_n \log p_n = -\sum_n \frac{|a_n|^2}{\sum_k |a_k|^2} \log \frac{|a_n|^2}{\sum_k |a_k|^2} \\ &= -\frac{1}{\sum_k |a_k|^2} \sum_n |a_n|^2 \left( \log |a_n|^2 - \log \left( \sum_k |a_k|^2 \right) \right) \\ &= -\frac{\sum_n |a_n|^2 \log |a_n|^2}{\sum_k |a_k|^2} + \frac{\sum_n |a_n|^2 \log \sum_k |a_k|^2}{\sum_k |a_k|^2} \\ &= \frac{\lambda(a)}{\sum_k |a_k|^2} + \log \left( \sum_k |a_k|^2 \right) \end{aligned}$$

也就是说,在 $a$ 的 $l^2$ 范数固定的情况下, $M(a)$ 和 $\lambda(a)$ 是正的线性关系,从而同时增加和减少。既然 $M(a)$ 可以反映 $a$ 的分布的集中和分散程度, $\lambda(a)$ 也可以反映 $a$ 的分布的集中和分散程度。但是 $\lambda(a)$ 具有可加性(见作业)。

### §7.3.3 最优小波包基函数的选取

设函数 $0 \neq f(x) \in L^2(R)$ ,  $\{f_n\}$ 为 $L^2(R)$ 的一组标准正交基,则在范数意义下

$$f(x) = \sum_n a_n f_n(x)$$

对于系数 $a = \{a_n\}$ 我们可以定义代价函数

$$\lambda(a) = - \sum_n |a_n|^2 \log |a_n|^2$$

如上所述,如果 $\lambda(a)$ 较小,则只有少数的 $|a_n|$ 大,其余的都小,从而只需要少数的项就可以确定 $f(x)$ 。反之,如果 $\lambda(a)$ 较大,则 $f(x)$ 的能量分布在许多项上。

现在,设 $0 \neq f(x) \in L^2(R)$ ,  $\{f_n\}$ 为 $L^2(R)$ 的一组标准正交基,而 $f$ 可以分解为彼此正交的两个函数 $f^1$ 和 $f^2$ 之和,即有

$$f(x) = f^1(x) + f^2(x), \langle f^1, f^2 \rangle = 0.$$

假设 $\{f_n^i\}$ 是 $f^i$ 的标准正交基, $a_n^i$ 是 $f^i$ 展开的系数,则我们可以计算 $\{a_n^i\}$ 对应的代价函数, $\lambda(a^1) + \lambda(a^2)$ ,如果 $\lambda(a) < \lambda(a^1) + \lambda(a^2)$ ,则称 $\{f_n\}$ 优于 $\{f_n^1, f_n^2\}$ ,否则后者优于前者。

据此,我们可以给出最优小波包基函数的选取方法。记

$$u_{j,k,l}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi_k(2^j x - l).$$

设函数给定,我们的目的是在指定分解层数 $J$ 的条件下,求出 $f$ 的最优小波包基。为清晰起见,我们利用树结构来进行表述,并称之为分解树。首先是确定分解层数 $J$ ,这一步和多分辨率分析的方法一样,一般没有严格的标准。如果 $f$ 变化平缓, $J$ 可以取得越小,否则, $J$ 可以取得越大。进行如下的步骤:

1. 初始化: 求出分解层数 $J$ , 计算 $f$ 在当前层分解的系数:

$$f = f_{0,J} \in V_J = U_J^0 = \sum_{l \in Z} c_{J,0,l} u_{J-1,0,l}(x)$$

2. 迭代构建小波包树:

(a) 根据  $U_J^0 = U_{J-1}^0 \oplus U_{J-1}^1$ , 有

$$f_{0,J} = f_{0,J-1} + f_{1,J-1} \doteq \sum_{l \in Z} c_{J-1,0,l} u_{J-1,0,l}(x) + \sum_{l \in Z} c_{J-1,1,l} u_{J-1,1,l}(x),$$

如果  $\lambda([c_{J,0,l}]) < \lambda([c_{J-1,0,l}]) + \lambda([c_{J-1,1,l}])$ , 那么不需要对  $U_J^0$  做分解, 否则, 对  $U_J^0$  分解。

(b) 对空间  $U_{J-k}^m$ , 由于

$$U_{J-k}^m = U_{J-k-1}^{2m} \oplus U_{J-k-1}^{2m+1}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{l \in Z} c_{J-k,m,l} u_{J-k,m,l}(x) &= \sum_{l \in Z} c_{J-k-1,2m,l} u_{J-k-1,2m,l}(x) \\ &\quad + \sum_{l \in Z} c_{J-k-1,2m+1,l} u_{J-k-1,2m+1,l}(x), \end{aligned}$$

如果  $\lambda([c_{J-k,m,l}]) < \lambda([c_{J-k-1,2m,l}]) + \lambda([c_{J-k-1,2m+1,l}])$ , 那么不需要对  $U_{J-k}^m$  做分解, 否则, 对  $U_{J-k}^m$  分解。

**例 7.1** 以图 7.4 为例来说明上面构建小波包树的算法。假设某个信号分解的根节点的代价函数的值为 55.96, 我们首先对它做分解, 分解的两个节点对应的信号的代价函数的值分别是 24.51 和 29.32。由于  $55.96 > 24.51 + 29.32$ , 从而在小波包分解中我们需要对根节点分解。对于第二层的两个节点, 同样计算分解后的代价函数的值, 假设这些值如图 7.4 黑色数字所示, 那么该代价函数对于这个信号的小波包分解树就是图 7.4 中的黑色粗线所示。

**例 7.2** 对于给定的信号,

$$a_0^0 = [32, 10, 20, 38, 37, 28, 38, 34, 18, 24, 18, 9, 23, 24, 28, 34].$$

用 Haar 小波变换对上述信号做小波变换可以得到变换后的信号为

$$[25.93, 3.68, -4.6, -5.0, -4, -1.75, 3.75, -3.75, 11, -9, 4.5, 2, -3, 4.5, -0.5, -3].$$

但是如果我们采用小波包分解, 则可以进一步改进上述分解。这里我们使用另外一个简单的代价函数

$$M(a) = \sum_{k \in Z} (a[k] > \delta) ? 1 : 0$$

即该信号中的元素大于  $\delta$  的个数, 在这个例子中我们令  $\delta = 1$ 。

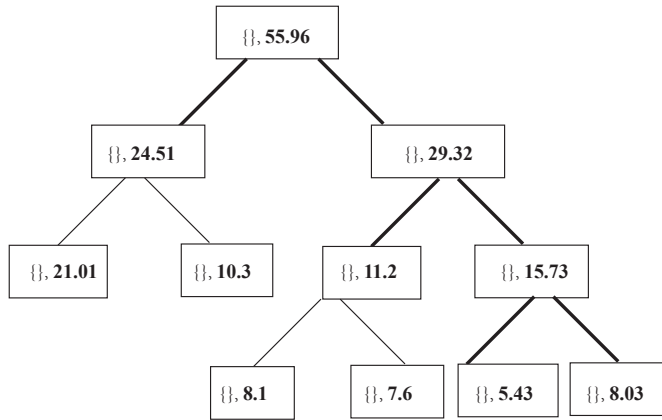


图 7.4 例子7.1对应的小波包分解树。

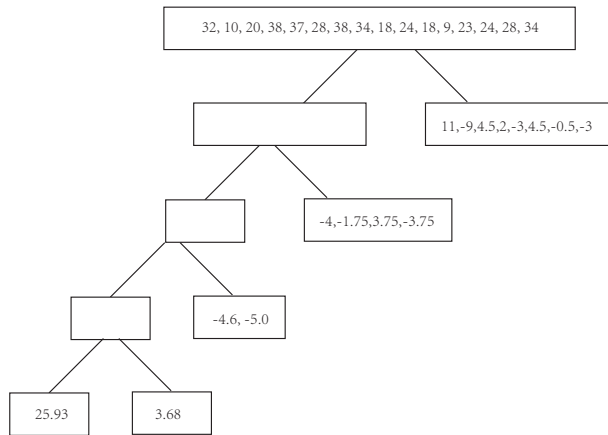


图 7.5 例子7.2对应的Haar小波分解

首先我们对 $a_0^0$ 应用Haar小波分解算法,可以得到该信号对应的平均和细节部分,分别为

$$\begin{aligned} a_1^0 &= [21, 29, 32.5, 36, 21, 13.5, 23.5, 31], \\ a_1^1 &= [11, -9, 4.5, 2, -3, 4.5, -0.5, -3], \end{aligned}$$

注意到 $M(a^0) = 16 > M(a^1) = 15$ , 所以最优小波包需要对 $a_0^0$ 做分解。

接着我们分别对 $a_1^0$ 和 $a_1^1$ 做Haar小波分解, 得到

$$\begin{aligned} a_2^0 &= [25, 34.25, 17.25, 27.25], & a_2^1 &= [-4, -1.75, 3.75, -3.75], \\ a_2^2 &= [1, 3.25, 0.75, -1.75], & a_2^3 &= [10, 1.25, -3.75, 1.25]. \end{aligned}$$

可以验证

$$\begin{aligned} M(a_1^0) &= 8 = M([a_2^0, a_2^1]) = 8, \\ M(a_1^1) &= 7 > M([a_2^2, a_2^3]) = 6, \end{aligned}$$

所以, 最优小波包需要同时对 $a_1^0$ 和 $a_1^1$ 做分解。

现在我们分别对 $a_2^0, a_2^1, a_2^2, a_2^3$ 做Haar小波分解, 得到

$$\begin{aligned} a_3^0 &= [29.6, 22.2], & a_3^1 &= [-4.6, -5.0], & a_3^2 &= [-2.8, 0.0], & a_3^3 &= [-1.12, 3.75], \\ a_3^4 &= [2.12, -0.5], & a_3^5 &= [-1.12, 1.2], & a_3^6 &= [5.6, -1.2], & a_3^7 &= [4.3, -2.5]. \end{aligned}$$

可以验证

$$\begin{aligned} M(a_2^0) &= 4 = M([a_3^0, a_3^1]) = 4 \\ M(a_2^1) &= 4 > M([a_3^2, a_3^3]) = 3 \\ M(a_2^2) &= 2 < M([a_3^4, a_3^5]) = 3 \\ M(a_2^3) &= 4 = M([a_3^6, a_3^7]) = 4 \end{aligned}$$

所以, 最优小波包需要对 $a_2^0, a_2^1$ 和 $a_2^3$ 做分解, 而不需要对 $a_2^2$ 做进一步的分解。

最终的分解树如图7.6所示。

#### §7.3.4 小波包的分解重构算法

小波包的分解重构算法和基于多分辨率分析的小波的分解和重构算法非常类似。注意到

$$U_{j+1}^n = U_j^{2n} \oplus U_j^{2n+1},$$

假设

$$u_{j,k,l}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi_k(2^j x - l).$$

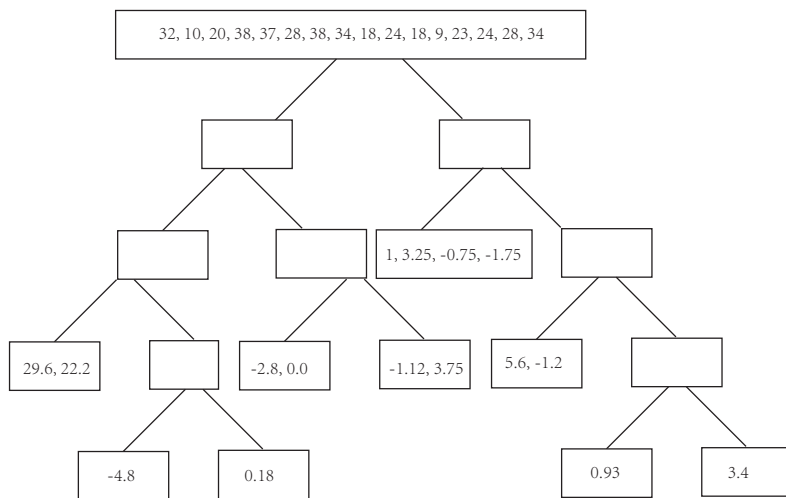


图 7.6 例子7.2对应的最优小波包分解树

是空间  $U_j^k$  的一组标准正交基, 信号  $f_{j,n}(x)$  可以投影到空间  $U_{j+1}^n$  上, 则

$$f_{j+1,n}(x) = f_{j,2n}(x) + f_{j,2n+1}(x).$$

不妨设

$$\begin{aligned} f_{j+1,n}(x) &= \sum_{l \in Z} c_{j+1,n,l} u_{j+1,n,l}(x) \\ f_{j,2n}(x) &= \sum_{l \in Z} c_{j,2n,l} u_{j,2n,l}(x) \\ f_{j,2n+1}(x) &= \sum_{l \in Z} c_{j,2n+1,l} u_{j,2n+1,l}(x) \end{aligned}$$

所谓分解算法就是已知  $c_{j+1,n,l}$ , 计算  $c_{j,2n,l}$  和  $c_{j,2n+1,l}$  使得  $f_{j+1,n}(x) = f_{j,2n}(x) + f_{j,2n+1}(x)$ 。事实上, 因为

$$\sum_{l \in Z} c_{j+1,n,l} u_{j+1,n,l}(x) = \sum_{l \in Z} c_{j,2n,l} u_{j,2n,l}(x) + \sum_{l \in Z} c_{j,2n+1,l} u_{j,2n+1,l}(x),$$

而且  $U_j^{2n} \perp U_j^{2n+1}$ , 从而

$$c_{j,2n,l} = \sum_{k \in Z} c_{j+1,n,k} \langle u_{j+1,n,k}(x), u_{j,2n,l}(x) \rangle.$$



注意到

$$\phi_{2l}(x) = \sum_{k \in Z} h_k \phi_l(2x - k)$$

可得

$$\begin{aligned} u_{j,2n,l}(x) &= 2^{\frac{j}{2}} \phi_{2n}(2^j x - l) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k \in Z} h_k \phi_n(2^j x - 2l - k) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k \in Z} h_{k-2l} \phi_n(2^j x - k) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} h_{k-2l} u_{j,2n,k}(x) \end{aligned}$$

于是

$$c_{j,2n,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} c_{j+1,n,k} \overline{h_{k-2l}}.$$

同理, 有小波方程

$$\phi_{2l+1}(x) = \sum_{k \in Z} g_k \phi_l(2x - k)$$

可得

$$\begin{aligned} u_{j,2n+1,l}(x) &= 2^{\frac{j}{2}} \psi_{2n+1}(2^j x - l) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k \in Z} g_k \phi_n(2^j x - 2l - k) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k \in Z} g_{k-2l} \phi_n(2^j x - k) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} g_{k-2l} u_{j,n,k}(x) \end{aligned}$$

于是

$$c_{j,2n+1,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} c_{j+1,n,k} \overline{g_{k-2l}}.$$

假设

$$\begin{aligned} f_{j+1,n}(x) &= \sum_{l \in Z} c_{j+1,n,l} u_{j+1,n,l}(x) \\ f_{j,2n}(x) &= \sum_{l \in Z} c_{j,2n,l} u_{j,2n,l}(x) \\ f_{j,2n+1}(x) &= \sum_{l \in Z} c_{j,2n+1,l} u_{j,2n+1,l}(x) \end{aligned}$$

所谓重构算法就是已知 $c_{j,2n,l}$ 和 $c_{j,2n+1,l}$ , 计算 $c_{j+1,n,l}$ 使得 $f_{j+1,n}(x) = f_{j,2n}(x) + f_{j,2n+1}(x)$ 。由于

$$\phi_{j-1,l}(t) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} \phi_{j,k}(t),$$

$$\psi_{j-1,l}(t) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} \phi_{j,k}(t),$$

可得

$$c_{j+1,n,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,2n,k} h_{l-2k} + 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,2n+1,k} g_{l-2k}.$$

**作业 7.1** 1. 证明 $\lambda(a)$ 具有可加性;

2. 证明定理7.5和定理7.6;

3. 比较例子7.2中Haar小波和Haar小波包的压缩效果。

## 第八章 提升小波

经典小波分析是从傅里叶分析的基础上发展起来的，因此它在一定程度上受到傅里叶分析的限制。小波分析的两个核心概念：小波变换和多分辨率分析都是建立在小波的二进伸缩平移的基础上，我们称之为第一代小波。1996年，Sweldens提出了不依赖傅里叶变换的小波的提升方法 [20, 21]。提升小波主要具有下面的优势：

1. 能够用于构造第一代小波：对于第一代小波，提升技术可以用来提高小波的消失矩，构造具有插值的小波等。虽然不能发现新的小波，但是可以加深对第一代小波的理解。
2. 能够改进第一代小波的算法性能：提升小波提供了一种比Mallat算法更快的实现方法，而且完全是原位计算，并且更加容易推广到边界情况。
3. 可用于构造第二代小波：由于提升小波摆脱了傅里叶变换的面试，同时满足小波变换的好的性质，该思想可以用来构造复杂区域上的小波变换。

### §8.1 多分辨率分析

这一节利用Z变换重新认识多分辨率分析的分解和重构算法。

**定义 8.1** 序列  $\{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\} \in l^2$  的Z变换定义为函数  $x : C \rightarrow C$ ：

$$x(z) = \sum_{j \in Z} x_j z^{-j},$$

其中  $z = e^{i\phi}$ 。

假设  $\{x_i\}$  对应的Z变换是  $x(z)$ ，那么它的奇序列对应的Z变换  $x_e(z)$

$$x_e(z^2) = \frac{x(z) + x(-z)}{2}.$$

同理，它的偶序列对应的Z变换  $x_o(z)$

$$x_o(z^2) = \frac{z(x(z) - x(-z))}{2}.$$

即

$$\begin{pmatrix} x_e(z^2) \\ x_o(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{z}{2} & -\frac{z}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(z) \\ x(-z) \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

假设一个多分辨率分析的双尺度系数是  $h_k$ ，则分解重构算法如下：

- 分解算法:

$$\begin{cases} c_{j-1,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} c_{j,k} \overline{h_{k-2l}}, \\ d_{j-1,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} c_{j,k} \overline{g_{k-2l}}, \end{cases} \quad (8.2)$$

- 重构算法:

$$c_{j,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} c_{j-1,k} h_{l-2k} + 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} d_{j-1,k} g_{l-2k}$$

下面利用Z变换重新理解分解重构算法。记 $h(z)$ ,  $g(z)$ 是序列 $\{h_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 对应的Z变换, 即

$$h(z) = \sum_{k \in Z} h_k z^{-k}, \quad g(z) = \sum_{k \in Z} g_k z^{-k}.$$

则由双尺度系数和小波系数的性质可知,

$$g(z) = z^{-1} \bar{h}(-z^{-1}), \quad \bar{g}(z) = z^{-1} h(-z^{-1}). \quad (8.3)$$

$h_e(z)$ ,  $h_o(z)$ ,  $g_e(z)$ ,  $g_o(z)$ 是序列 $\{h_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 的偶数项和奇数项对应的Z变换

$$\begin{aligned} h_e(z) &= \sum_{k \in Z} h_{2k} z^{-k}, & g_e(z) &= \sum_{k \in Z} g_{2k} z^{-k}, \\ h_o(z) &= \sum_{k \in Z} h_{2k+1} z^{-k}, & g_o(z) &= \sum_{k \in Z} g_{2k+1} z^{-k}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} h_e(z^2) &= \frac{h(z) + h(-z)}{2}, & h_o(z^2) &= \frac{h(z) - h(-z)}{2z^{-1}}, \\ g_e(z^2) &= \frac{g(z) + g(-z)}{2}, & g_o(z^2) &= \frac{g(z) - g(-z)}{2z^{-1}}. \end{aligned}$$

对于分解算法,

$$\begin{aligned} c^{j-1}(z^2) &= 2^{-\frac{1}{2}} \frac{c^j(z) \bar{h}(z^{-1}) + c^j(-z) \bar{h}(-z^{-1})}{2}, \\ d^{j-1}(z^2) &= 2^{-\frac{1}{2}} \frac{c^j(z) \bar{g}(z^{-1}) + c^j(-z) \bar{g}(-z^{-1})}{2}. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c^{j-1}(z^2) \\ d^{j-1}(z^2) \end{pmatrix} &= 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\bar{h}(z^{-1})}{2} & \frac{\bar{h}(-z^{-1})}{2} \\ \frac{\bar{g}(z^{-1})}{2} & \frac{\bar{g}(-z^{-1})}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^j(z) \\ c^j(-z) \end{pmatrix} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\bar{h}(z^{-1})}{2} & \frac{\bar{h}(-z^{-1})}{2} \\ \frac{\bar{g}(z^{-1})}{2} & \frac{\bar{g}(-z^{-1})}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ 1 & -z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{z}{2} & -\frac{z}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^j(z) \\ c^j(-z) \end{pmatrix} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\bar{h}(z^{-1})}{2} & \frac{\bar{h}(-z^{-1})}{2} \\ \frac{\bar{g}(z^{-1})}{2} & \frac{\bar{g}(-z^{-1})}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ 1 & -z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e^j(z^2) \\ c_o^j(z^2) \end{pmatrix} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\bar{h}(z^{-1})+\bar{h}(-z^{-1})}{2} & \frac{\bar{h}(z^{-1})-\bar{h}(-z^{-1})}{2z} \\ \frac{\bar{g}(z^{-1})+\bar{g}(-z^{-1})}{2} & \frac{\bar{g}(z^{-1})-\bar{g}(-z^{-1})}{2z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e^j(z^2) \\ c_o^j(z^2) \end{pmatrix} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \bar{h}_e(z^{-2}) & \bar{h}_o(z^{-2}) \\ \bar{g}_e(z^{-2}) & \bar{g}_o(z^{-2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e^j(z^2) \\ c_o^j(z^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

如果定义 $h$ 和 $g$ 的多相位矩阵为

$$\mathbf{P}(z) = \begin{pmatrix} h_e(z) & h_o(z) \\ g_e(z) & g_o(z) \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

则小波的分解算法可以记作:

$$\begin{pmatrix} c^{j-1}(z^2) \\ d^{j-1}(z^2) \end{pmatrix} = 2^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{P}}(z^{-2})^T \begin{pmatrix} c_e^j(z^2) \\ c_o^j(z^2) \end{pmatrix}$$

现在我们看一下重构算法。首先重构算法对应的Z变换的形式为

$$\begin{aligned}
c^j(z) &= 2^{-\frac{1}{2}} (c^{j-1}(z^2)h(z) + c^{j-1}(z^2)g(z)), \\
c^j(-z) &= 2^{-\frac{1}{2}} (c^{j-1}(z^2)h(-z) + c^{j-1}(z^2)g(-z)).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_e^j(z^2) \\ c_o^j(z^2) \end{pmatrix} &= 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{z}{2} & -\frac{z}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^j(z) \\ c^j(-z) \end{pmatrix} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{z}{2} & -\frac{z}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(z) & g(z) \\ h(-z) & g(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{j-1}(z^2) \\ d^{j-1}(z^2) \end{pmatrix} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} h_e(z^2) & g_e(z^2) \\ h_o(z^2) & g_o(z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{j-1}(z^2) \\ d^{j-1}(z^2) \end{pmatrix} = 2^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}(z^2) \begin{pmatrix} c^{j-1}(z^2) \\ d^{j-1}(z^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

所以, 在 $Z$ 变换下, 分解重构算法可以写成下面的形式。

$$\begin{pmatrix} c^{j-1}(z) \\ d^{j-1}(z) \end{pmatrix} = 2^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{P}}(z^{-1})^T \begin{pmatrix} c_e^j(z) \\ c_o^j(z) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} c_e^j(z) \\ c_o^j(z) \end{pmatrix} = 2^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}(z) \begin{pmatrix} c^{j-1}(z) \\ d^{j-1}(z) \end{pmatrix}$$

小波完全重构的条件可以写成

$$\mathbf{P}(z) \bar{\mathbf{P}}(z^{-1})^T = 2I.$$

## §8.2 提升小波的构造

从上一节的分析可以看出, 多分辨率分析的分解重构算法只和多相位矩阵 $\mathbf{P}(z)$ 确定。所以, 为了简化分析重构算法, 一个自然的想法是对多相位矩阵 $\mathbf{P}(z)$ 做分解成简单的形式的乘积。Daubechies和Sweldens研究了多相位矩阵因子分解, 给出了小波变换提升实现的理论基础。

**定理 8.1** 如果 $\mathbf{P}(z)$ 的行列式等于2, 则总存在Laurent多项式 $u_i(z)$ ,  $p_i(z)$ ,  $1 \leq i \leq m$ 和非零的常数 $K$ , 使得

$$\mathbf{P}(z) = \prod_{i=1}^m \begin{pmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{2}{K} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

其中 $p_m(z) = 0$ 。

我们略去这个定理的证明, 只给出 $u_i(z)$ 和 $p_i(z)$ 的计算方法。

### §8.2.1 多相位矩阵的因子分解

首先我们需要给出Laurent多项式的欧几里得算法。给定 $\{h_k, k \in Z\}$ , 其中在 $k_a \leq k \leq k_b$ 之外的 $k$ ,  $h_k = 0$ , 那么 $\{h_k\}$ 对应的 $Z$ 变换就是一个Laurent多项式 $h(z)$ ,

$$h(z) = \sum_{k=k_a}^{k_b} h_k z^{-k}$$

其中 $h(z)$ 的次数是

$$|h(z)| = k_b - k_a.$$

两个Laurent多项式的带余除法可以表述为: 给定两个Laurent多项式 $a(z)$ 和 $b(z)$ , 其中 $b(z) \neq 0$ ,  $|a(z)| \geq |b(z)|$ , 则一定存在Laurent多项式 $q(z)$ 和 $r(z)$ , 使得 $a(z) =$

$b(z)q(z) + r(z)$ , 其中  $|q(z)| = |a(z)| - |b(z)|$ ,  $|r(z)| < |b(z)|$  或者  $r(z) = 0$ 。和多项式的带余除法不同, Laurent 多项式的带余除法的商和余数不是唯一的。例如, 对于  $a(z) = z^{-1} + 4 + z$ ,  $b(z) = 1 + z$ , 则  $q(z) = z^{-1} + 1$ ,  $r(z) = 3$  和  $q(z) = 3z^{-1} + 1$ ,  $r(z) = -2z^{-1}$  都是满足条件的带余除法。下面给出 Laurent 多项式的带余除法的欧几里得算法。

算法: Laurent 多项式的带余除法的欧几里得算法

设  $a_0(z) = a(z)$ ,  $b_0(z) = b(z)$ , 从  $i = 0$  开始进行下面的递归运算:

$$\begin{aligned} a_{i+1}(z) &= b_i(z) \\ b_{i+1}(z) &= a_i(z) \% b_i(z) \end{aligned}$$

其中 % 表示余数运算。在上述的算法中, 我们总可以控制运算, 使得满足  $b_n(z) = 0$  的  $n$  是偶数并且使得  $n$  尽可能小, 则

$$\begin{pmatrix} a_n(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=n}^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

这等价于

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix} &= \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(z) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & q_1(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_2(z) & 1 \end{pmatrix} \prod_{i=3}^n \begin{pmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(z) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

最后一个等式是因为

$$\begin{pmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_i(z) & 1 \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

现在可以给出上述矩阵分解的方法。首先对  $h_e(z)$  和  $h_o(z)$  应用欧几里得算法, 可得到

$$\begin{pmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

记  $q_e(z)$ ,  $p_o(z)$  满足下式:

$$\begin{pmatrix} h_e(z) & p_e(z) \\ h_o(z) & p_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{2}{K} \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

下面我们希望可以计算  $u_m(z)$ , 使得式子 8.5 成立。事实上,

$$\mathbf{P}(z) = \prod_{i=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{2}{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2u_m(z)}{K^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

从而

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2u_m(z)}{K^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_e(z) & p_e(z) \\ h_o(z) & p_o(z) \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{P}(z) \quad (8.11)$$

解得

$$u_m(z) = K^2(p_o(z)g_e(z) - p_e(z)g_o(z)) \quad (8.12)$$

完整的多相位矩阵分解算法如下。

- 使用欧几里得算法得到  $u_i(z)$ ,  $p_i(z)$ ,  $i = 1, \dots, m-1$  和  $K$ ,

$$\begin{pmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 计算  $p_e(z)$  和  $p_o(z)$ , 使得

$$\begin{pmatrix} h_e(z) & p_e(z) \\ h_o(z) & p_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{2}{K} \end{pmatrix}$$

- 计算  $u_m(z)$ ,

$$u_m(z) = K^2(p_o(z)g_e(z) - p_e(z)g_o(z))$$

- 得到  $\mathbf{P}(z)$  的分解, 其中  $p_m(z) = 0$ 。

$$\mathbf{P}(z) = \prod_{i=1}^m \begin{pmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{2}{K} \end{pmatrix}$$

**例 8.1** 我们看一下 Haar 小波的多相位矩阵的分解。其中  $h_0 = h_1 = 1$ , 从而

$$\mathbf{P}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

设  $a_0(z) = h_e(z) = 1$ ,  $b_0(z) = h_o(z) = 1$ , 利用欧几里得算法, 第一步令  $a_1(z) = b_0(z) = 1$ , 那么

$$a_0(z) = -1 \times b_0(z) + 2, b_1(z) = a_0(z) \% b_0(z) = 2$$

得  $q_1(z) = -1$ ,  $a_2(z) = b_1(z) = 2$ , 所以,

$$a_1(z) = \frac{1}{2} \times b_1(z) + 0, b_2(z) = a_1(z) \% b_1(z) = 0$$



即  $q_2(z) = \frac{1}{2}$ ,  $K = a_2(z) = 2$  所以

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这样可以计算得到

$$\begin{pmatrix} p_e(z) \\ p_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$u_2(z) = 4(p_o(z)g_e(z) - p_e(z)g_o(z)) = 0$$

从而

$$P(z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**例 8.2** 我们看一下  $D_4$  小波的多相位矩阵的分解。其中  $h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ,  $h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ,  $h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ ,  $h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$ , 从而

$$P(z) = \begin{pmatrix} h_0 + h_2 z^{-1} & -h_3 z - h_1 \\ h_1 + h_3 z^{-1} & h_2 z + h_0 \end{pmatrix}$$

设  $a_0(z) = h_e(z) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{3-\sqrt{3}}{4}z^{-1}$ ,  $b_0(z) = h_o(z) = \frac{3+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}z^{-1}$ , 利用欧几里得算法, 第一步令  $a_1(z) = b_0(z) = \frac{3+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}z^{-1}$ , 那么

$$a_0(z) = \frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \times b_0(z) + 1 + \sqrt{3}, b_1(z) = a_0(z) \% b_0(z) = 1 + \sqrt{3}$$

得  $q_1(z) = \frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ ,  $a_2(z) = b_1(z) = 1 + \sqrt{3}$ , 所以,

$$a_1(z) = \left(-\frac{2-\sqrt{3}}{4}z^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times b_1(z) + 0, b_2(z) = a_1(z) \% b_1(z) = 0$$

即  $q_2(z) = -\frac{2-\sqrt{3}}{4}z^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,  $K = a_2(z) = 1 + \sqrt{3}$  所以

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2-\sqrt{3}}{4}z^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这样可以计算得到

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_e(z) \\ p_o(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2-\sqrt{3}}{4}z^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$u_2(z) = K^2(p_o(z)g_e(z) - p_e(z)g_o(z)) = z$$

从而

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2-\sqrt{3}}{4}z^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4} & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### §8.2.2 提升算法

基于上面的矩阵分解, 我们给出提升算法。由于

$$\mathbf{P}(z) = \prod_{i=1}^m \begin{pmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{2}{K} \end{pmatrix}$$

从而,

$$\mathbf{P}^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{K}{2} \end{pmatrix} \prod_{i=m}^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c^{j-1}(z) \\ d^{j-1}(z) \end{pmatrix} &= \sqrt{2}\mathbf{P}^{-1}(z) \begin{pmatrix} c_e^j(z) \\ c_o^j(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{K} & 0 \\ 0 & \frac{K}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \prod_{i=m}^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e^j(z) \\ c_o^j(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

不难看出, 上式可以简化小波的分解和重构算法。事实上,  $c_e^j(z)$ 和 $c_o^j(z)$ 相当于对 $c^j(z)$ 做一次懒小波变换: 即提取偶序列和奇序列。然后, 重复利用 $u_1(z)$ 由奇序列 $c_o^j(z)$ 预测偶序列; 再通过 $p_1(z)$ 由偶序列 $c_e^j(z)$ 更新奇序列, 这个过程正好是式子

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_1(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u_1(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e^j(z) \\ c_o^j(z) \end{pmatrix}$$

从而, 我们得到一个小波变换可以通过由懒小波变换后经过若干次的预测和更新操作得到。下面给出提升算法的具体步骤, 分两种情况处理。为了简化记号, 下面用  $e_i(z)$  和  $o_i(z)$  代替  $c_e^j(z)$  和  $c_o^j(z)$ 。

- $u_1(z) \neq 0$

设

$$\begin{aligned} u_i(z) &= \sum_k u_k^i z^{-k}, \\ p_i(z) &= \sum_k p_k^i z^{-k}, \end{aligned}$$

$e_i(z)$  和  $o_i(z)$  表示序列  $\{e_k^i\}$  和  $\{o_k^i\}$   $i = 1, \dots, m$  的  $z$  变换, 且

$$\begin{pmatrix} e_i(z) \\ o_i(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{i-1}(z) \\ o_{i-1}(z) \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

则

$$e_i(z) = e_{i-1}(z) - u_i(z)o_{i-1}(z) \quad (8.14)$$

$$o_i(z) = o_{i-1}(z) - p_i(z)e_i(z) \quad (8.15)$$

用序列表示就是

$$e_k^i = e_k^{i-1} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_l^i o_{k-l}^{i-1} \quad (8.16)$$

$$o_k^i = o_k^{i-1} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_l^i e_{k-l}^{i-1} \quad (8.17)$$

从而, 正向的提升算法为:

步骤1: 懒小波变换:

$$\begin{aligned} e_k^0 &= x_{2k}; \\ o_k^0 &= x_{2k+1}; \end{aligned}$$

步骤2: 提升和对偶提升, 对  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\begin{aligned} e_k^i &= e_k^{i-1} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_l^i o_{k-l}^{i-1} \\ o_k^i &= o_k^{i-1} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_l^i e_{k-l}^{i-1} \end{aligned}$$

步骤3: 比例变换:

$$\begin{aligned} e_k^m &= e_k^m \frac{\sqrt{2}}{K} \\ o_k^m &= o_k^m \frac{K}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

重构算法和分解算法非常类似, 就是将上述步骤反而为之, 即

步骤1: 比例变换:

$$\begin{aligned} e_k^m &= e_k^m \frac{K}{\sqrt{2}} \\ o_k^m &= o_k^m \frac{\sqrt{2}}{K} \end{aligned}$$

步骤2: 提升和对偶提升, 对  $i = m, \dots, 1$ ,

$$\begin{aligned} o_k^{i-1} &= o_k^i - \sum_{l \in Z} p_l^i e_{k-l}^i \\ e_k^{i-1} &= e_k^i - \sum_{l \in Z} u_l^i o_{k-l}^{i-1} \end{aligned}$$

步骤3: 懒小波提取:

$$\begin{aligned} x_{2k} &= e_k^0; \\ x_{2k+1} &= o_k^0; \end{aligned}$$

- $u_1(z) = 0$

此时, 整个提升算法非常类似, 注意到,

$$\mathbf{P}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1(z) & 1 \end{pmatrix} \prod_{i=2}^m \begin{pmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{2}{K} \end{pmatrix}$$

令  $v_i(z) = u_{i+1}(z)$ , 则

$$\mathbf{P}(z) = \prod_{i=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{2}{K} \end{pmatrix}$$

所以, 当  $u_1(z) = 0$ , 在懒小波变换后, 第一个预测的是通过  $p_1(z)$  用偶序列预测奇序列, 然后通过  $u_2(z)$  通过奇序列来更新偶序列, 反复利用这个过程得到小波变换。

### §8.3 提升小波举例

基于上一节给出的分解重构算法，我们来看一下两个常见小波的提升实现。

**例 8.3** 我们看一下Haar小波的提升实现。基于上一节的结果，我们有

$$P(z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以，提升实现如下：

$$\begin{aligned} e_k^0 &= x_{2k}, o_k^0 = x_{2k+1}, \\ o_k^1 &= o_k^0 - e_k^0, \\ e_k^1 &= e_k^0 + \frac{1}{2}o_k^1, \\ e_k^1 &= \frac{e_k^1}{\sqrt{2}}, o_k^1 = \sqrt{2}o_k^1. \end{aligned}$$

**例 8.4** 我们看一下D4小波的提升实现。由于

$$P(z) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2-\sqrt{3}}{4}z^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

所以：

$$\begin{aligned} e_k^0 &= x_{2k}, o_k^0 = x_{2k+1}, \\ e_k^1 &= e_k^0 + \sqrt{3}o_k^0, \\ o_k^1 &= o_k^0 - \frac{\sqrt{3}}{4}e_k^1 + \frac{2-\sqrt{3}}{4}e_{k-1}^1, \\ e_k^2 &= e_k^1 - o_{k+1}^1, \\ e_k^2 &= \frac{\sqrt{2}e_k^2}{\sqrt{3}+1}, o_k^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}o_k^2. \end{aligned}$$

### §8.4 提升小波与信号处理

由上面的描述可知：一个提升算法由3个步骤组成：分裂、预测、更新。假设 $x[n]$ 是原始信号， $n$ 为偶数。信号的正交换过程如图8.1所示，其中 $s[n]$ 为 $x[n]$ 的低频分量， $d[n]$ 为 $x[n]$ 的高频分量。

## 1. 分裂:

小波变换的基本思想是挖掘信号的相关性,用更紧凑的形式来逼近原始信号。将信号 $x[n]$ 分割成相互关联的两个部分: $a[n]$ 和 $b[n]$ ,且 $a[n]$ 和 $b[n]$ 的相关性越大,分割效果越好。按照数据的奇偶序号对信号进行间隔采样,即

$$a[i] = x[2i], b[i] = x[2i + 1], i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \text{ 这一步通常被称为懒小波变换;}$$

## 2. 预测:

由于数据之间存在相关性,可以用 $a[n]$ 来预测 $b[n]$ ,采用一个与数据结构无关、由小波决定的预测算子 $P(\cdot)$ ,令 $d[n] = b[n] - P(a[n])$ ;

## 3. 更新:

经过上述两步已经在空域上将相邻信号数据分开,为了挖掘频域的相关性,同时维持某些全局特性(例如均值、消失矩不变),采用算子 $U(\cdot)$ ,利用已经计算出来的 $d[n]$ 来修正 $x[n]$ ,使得新的 $x[n]$ (记为 $s[n]$ )只包含信号 $x[n]$ 的低频部分,即 $s[n] = a[n] + U(d[n])$ 。

上述3个步骤完成了一次对偶提升, $s[n]$ 可以作为下一次提升的输入,以获得不同阶的提升格式。虽然这里用了不同的符号来区别分裂和输出的结果,实际上提升算法可以进行原位计算,即该算法不需要除了前级提升步骤的输出之外的数据和存储空间,这样在每个点都可以用新的数据流替换旧的数据流。这也是该算法可以固化为硬件上的滤波器的原因之一。

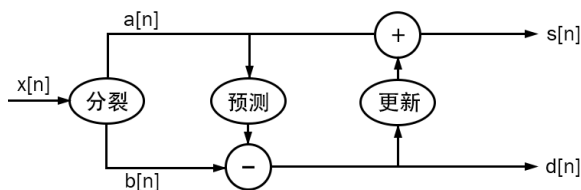


图 8.1 提升小波的正交换过程

**例 8.5** 用提升小波对信号进行分解与重构。用 Daubechies2 小波的提升格式对信号分解 2 层,再用提升小波重构信号,结果与原始信号的误差为  $4.6 \times 10^{-15}$

**例 8.6** 用提升小波对信号降噪,其基本原理与小波变换相同。首先用 Haar 小波的提升格式对信号分解 2 层;阈值取为 Birge-Massart 的处罚算法,经验系数  $M$  为第 1 层噪声标准偏差,  $\alpha = 3$ ;降噪时使用 Daubechies6 小波,结果如下图:

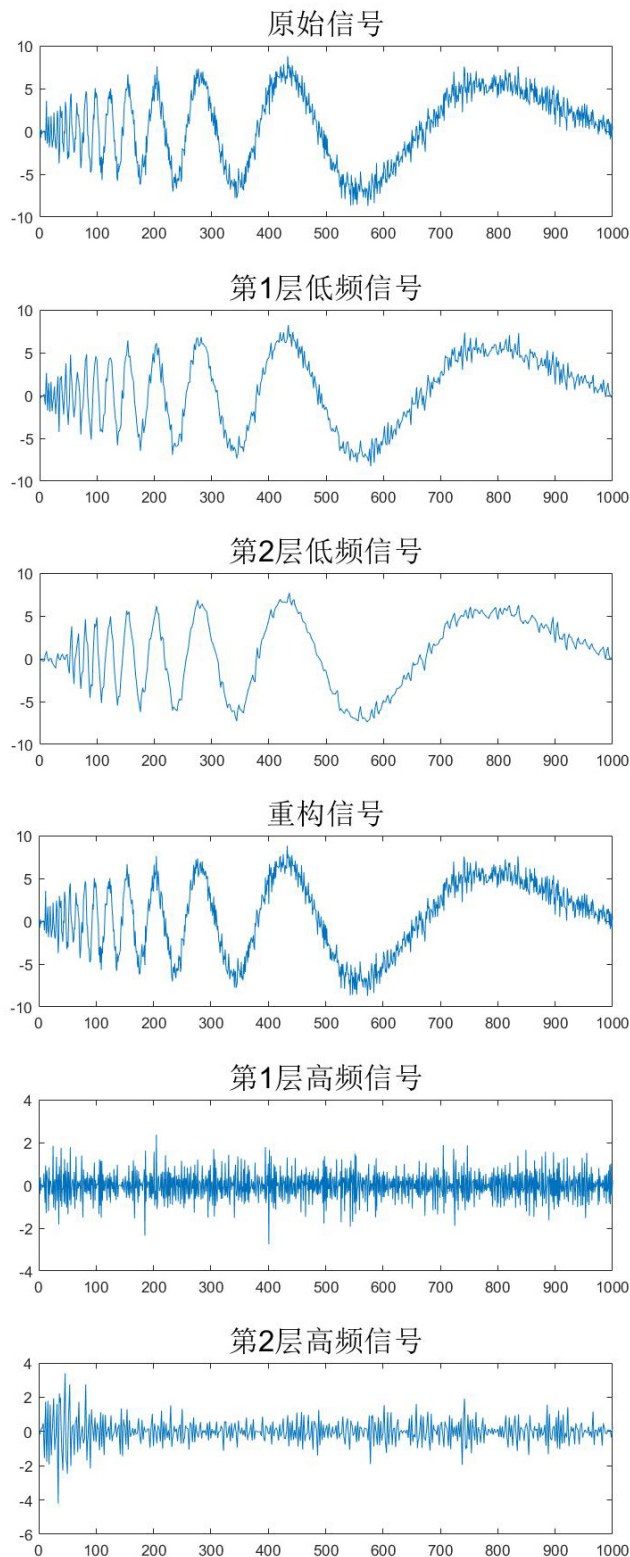


图 8.2 提升小波用于信号的分解与重构

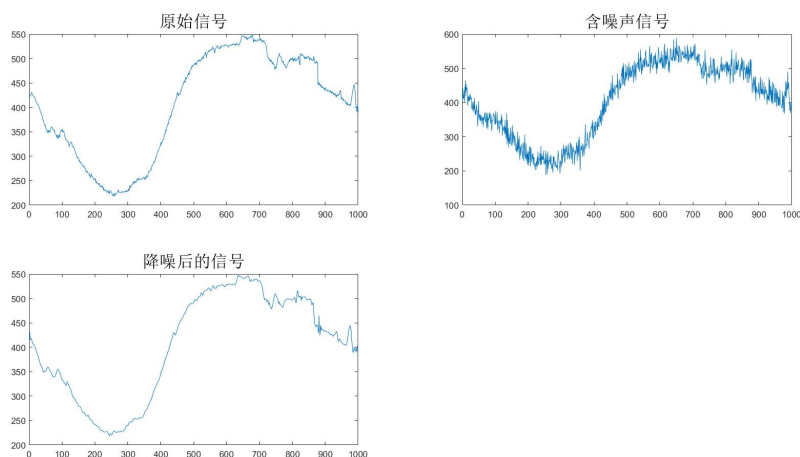


图 8.3 提升小波用于信号降噪

### §8.5 基于细分曲面的提升小波构造

本节介绍细分曲面的多分辨分析的基本理论，并建立它对应的提升实现。细分曲面表示形式来自于计算机图形学领域。在曲面造型中，由于单一的参数曲面只能表示拓扑上同剖于一张纸的曲面（就是亏格是1的曲面），难以表示复杂拓扑的自由曲面。一个自然的思路就是利用多片参数曲面拼接的方法来构造复杂拓扑的曲面，然而边界上的光滑拼接是一个非常困难的问题。细分表示形式就是在这样的背景下产生的。它是计算机辅助设计领域中继样条参数曲面表示方法后发展起来的一种新的曲面造型技术，为解决任意拓扑自由曲面表示问题提供了一种有效的解决方案。

细分就是将一定的拓扑规则和几何规则作用到一个给定的初始网格上产生新的网格，重复这个过程就可以得到一个极限曲面。对于一些特定的规则，生成的极限曲面是一个光滑的曲面，如图8.4所示。

#### §8.5.1 细分曲面的多分辨分析

细分表示形式提供了一个自然的多分辨分析框架。给定一个初始网格 $M^0$ ，利用细分规则细分 $M^0$ 得到新的网格 $M^1, M^2, M^3, \dots$ ，最终得到一个极限曲面。每一个细分后的网格 $M^{j+1}$ 的每一个顶点都可以写成 $M^j$ 的顶点的线性组合，即存在矩阵 $P^j$ ，使得 $V^{j+1} = P^j V^j$ ，其中 $V^j$ 是网格 $M^j$ 的顶点的集合。如果我们选择初始的网格作为定义域，那么极限曲面可以看成定义在这个定义域上的函数。那么如何建



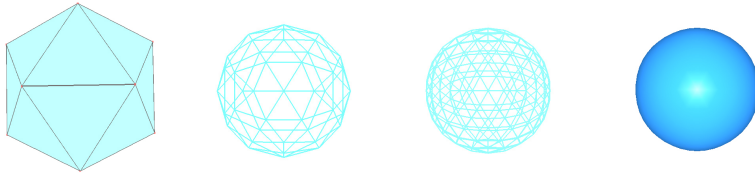


图 8.4 细分曲面表示形式

立这个函数的多分辨表示呢?

对于网格 $M^0$ , 假设它的顶点是 $V_i^0$ , 则极限曲面 $S(x)$ 可以看作定义在 $M^0$ 上的参数方程, 从而存在 $\phi_i^0(x)$ , 使得

$$S(x) = \sum \phi_i^0(x) V_i^0,$$

其中,  $\phi_i^0(x)$ 就是在 $M^0$ 中的第 $k$ 个顶点赋值1, 而对其他的点赋值0, 利用细分规则定义的标量函数。

对任意的 $j$ , 类似的我们可以定义网格 $M^j$ 每一个顶点所对应的基函数 $\phi_i^j(x)$ , 而极限曲面 $S(x)$ 也可以看成定义在网格 $M^j$ 上的参数曲面, 即

$$S(x) = \sum \phi_i^j(x) V_i^j,$$

这里 $V_i^j$ 是 $M^j$ 的顶点。不同网格上的基函数如图8.5所示。

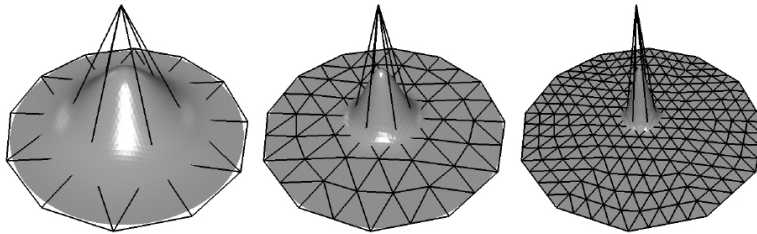


图 8.5 不同层次网格上的基函数

上面定义的细分基函数具有一个非常重要的性质, 就是可细分性。如果记

$$\Phi^j(x) = (\phi_0^j(x), \phi_1^j(x), \dots),$$

$$V^j = (V_0^j, V_1^j, \dots),$$

$$T^j(M^0) = \text{span}\{\phi_0^j(x), \phi_1^j(x), \dots, \}$$

则对任意的 $i$ , 如果 $j < k$ , 有

$$\phi_i^j(x) \in T^k(M^0).$$

所以上述细分规则定义了一个嵌套空间序列:

$$T^0(M^0) \subseteq T^1(M^0) \subseteq T^2(M^0) \subseteq \dots$$

另外, 根据细分规则, 我们有

$$\Phi^j(x) = \Phi^{j+1}(x)P^j.$$

并且记

$$S^j(x) = \sum_k \phi_k^j(x)V_k^j = \Phi^j(x)V^j,$$

上述定义的细分基函数空间是一个线性空间, 为了建立多尺度分析, 需要引入内积。对任意的 $f, g \in T^j(M^0)$ , 定义内积为

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\tau \in F(M^0)} \frac{1}{\text{area}(\tau)} \int_{x \in \tau} f(x)g(x)dx$$

其中 $F(M^0)$ 是 $F(M^0)$ 中所有面的集合。设

$$f(x) = \sum_k \phi_k^j(x)f_k^j,$$

$$g(x) = \sum_k \phi_k^j(x)g_k^j,$$

则

$$\langle f(x), g(x) \rangle = g^T I^j f,$$

其中 $g = (\dots, g_k, \dots)$ ,  $f = (\dots, f_k, \dots)$ ,  $I_{i,k}^j = \langle \phi_i^j(x), \phi_k^j(x) \rangle$ 。矩阵 $I^j$ 可以通过任何一个数值积分来计算, 也可以严格计算。

利用细分规则, 我们有

$$\begin{aligned} I^j &= \int_{x \in M^0} (\Phi^j(x))^T \Phi^j(x) dx \\ &= \int_{x \in M^0} (P^j)^T (\Phi^{j+1}(x))^T \Phi^{j+1}(x) P^j dx \\ &= (P^j)^T I^{j+1} P^j \end{aligned}$$

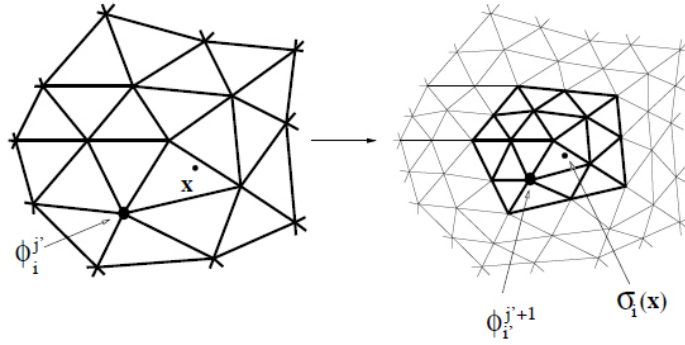


图 8.6 计算基函数的内积

一般来说, 对一个细分格式而言, 它的组合规则是局部的, 所以当细分次数足够多时, 一个点的基函数周围至多包含一个奇异点, 而且,  $T^{j+1}$  中的某个元素一定是  $T^j$  中的某个对应的元素的  $\frac{1}{4}$ , 如图 8.6 所示。从而, 上述等式对应一个齐次线性方程组, 得以求解  $I^j$ 。最后通过递推式可以求出所有的  $I^{j-1}, I^{j-2}, \dots, I^0$ 。

定义  $W^j(M^0)$  是  $V^j(M^0)$  在  $V^{j+1}(M^0)$  中的补空间, 称之为小波空间。记小波空间的基函数序列为

$$\Psi^j(x) = \{\psi_0^j(x), \psi_1^j(x), \psi_2^j(x), \dots, \}$$

则存在矩阵  $Q^j$  使得

$$\Psi^j(x) = \Phi^{j+1}(x)Q^j.$$

$Q^j$  可以通过下面的方式计算。对任意的  $\phi_i^1 \in T^1(M^0) \setminus T^0(M^0)$ , 可以定义

$$\psi_i^0 = \phi_i^1 - \widehat{\phi}_i^1,$$

其中  $\widehat{\phi}_i^1$  是  $\phi_i^1$  在空间  $T^0(M^0)$  上的正交投影。由于  $V^{j+1}(M^0) = V^j(M^0) + W^j(M^0)$ , 所以对任意的  $S^{j+1}(x) \in T^{j+1}(M^0)$ , 有

$$S^{j+1}(x) = \sum_k \phi_k^{j+1}(x)V_k^{j+1} = \sum_k \phi_k^j(x)V_k^j + \sum_k \psi_k^j(x)W_k^j$$

即

$$\Phi^{j+1}(x)V^{j+1} = [\Phi^j(x), \Psi^j(x)] \begin{pmatrix} V^j \\ W^j \end{pmatrix} = \Phi^{j+1}(x)[P^j, Q^j] \begin{pmatrix} V^j \\ W^j \end{pmatrix}$$

这样就得到细分小波的重构公式:

$$V^{j+1} = [P^j, Q^j] \begin{pmatrix} V^j \\ W^j \end{pmatrix}$$

定义

$$\begin{pmatrix} A^j \\ B^j \end{pmatrix} = [P^j, Q^j]^{-1}$$

则细分小波的分解公式为

$$\begin{aligned} V^j &= A^j V^{j+1}, \\ W^j &= B^j V^{j+1}, \end{aligned}$$

可以看出上述计算都是全局运算，不能保证算法的复杂度，在大规模网格上的应用受限。图8.7给出了一个基于细分曲面的多尺度分析应用的例子。在左边的图中，第一个是原始的模型，另外三个都是对多尺度分解后的鼻子部分初始网格进行旋转，放缩和平移编辑后的结果。右边图是选择原始模型的一个特定的区域，对特定区域做相应的编辑的结果。



图 8.7 基于细分的多尺度分析：多尺度编辑和局部编辑

### §8.6 基于Loop细分的提升小波构造

为了进一步提高细分小波变换的效率，使得细分小波可以应用到大规模数据的多分辨率分析，[22]提出了基于Catmull-Clark细分曲面格式的提升小波变换。[23]给出了基于Loop细分曲面格式的提升小波变换。这一节，我们以Loop细分格式为例，介绍基于细分格式构造提升小波的方法。

§8.6.1 Loop细分格式

Loop细分的基网格为三角网格，其拓扑规则如下图 8.8所示，每次细分，对应每一条边产生一个新的顶点，称为边点，然后连接每一个三角形的三个边点，把一个三角形一分为四。Loop细分的几何规则如下图 8.9所示，对于新的边点

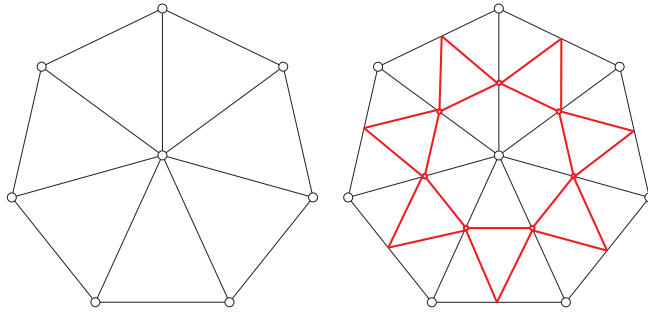


图 8.8 Loop细分的拓扑规则

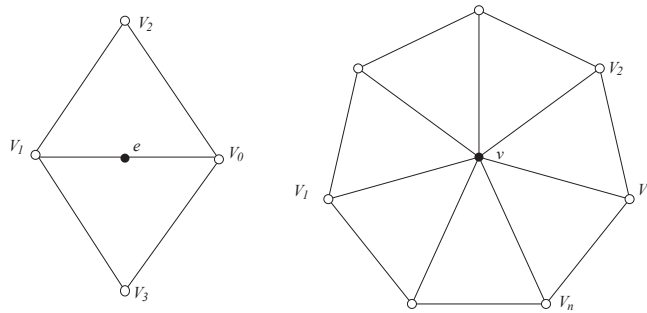


图 8.9 Loop细分的几何规则

$$e = \frac{3}{8}(V_0 + V_1) + \frac{1}{8}(V_2 + V_3)$$

对于原来的顶点，更新它的位置为：

$$v = \alpha_n V + \sum_{i=1}^n \beta_n V_i$$

其中  $\alpha_n = \frac{3}{8} + (\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n})^2$ ,  $\beta_n = \frac{1-\alpha_n}{n}$ 。

## §8.6.2 Loop提升小波

由Loop细分规则可知,  $M^{j-1}$ 的顶点一定对应 $M^j$ 中的一些顶点, 另外 $M^{j-1}$ 中每一条边对应 $M^j$ 的其他的顶点。所以网格 $M^j$ 中的顶点可以分成两类:  $M^{j-1}$ 顶点对应的顶点和 $M^{j-1}$ 中每一条边所增加的顶点。相应的,  $\Phi^j(x)$ 也可以分成两个部分, 分别对应 $M^{j-1}$ 中顶点的基函数序列 $\Phi^v(x) = \{\phi_{v_k}^j(x)\}$ 和对应 $M^{j-1}$ 中边的基函数序列 $\Phi^m(x) = \{\phi_{v_k}^j(x)\}$ , 即

$$\Phi^j(x) = [\Phi_v^j(x), \Phi_m^j(x)]$$

按照这样的方法, 我们有则

$$[\Phi^{j-1}(x), \Psi^{j-1}(x)] = [\Phi_v^j(x), \Phi_m^j(x)] \begin{pmatrix} P_v^{j-1} & 0 \\ P_m^{j-1} & I \end{pmatrix}$$

其中 $P_v^{j-1}$ 和 $P_m^{j-1}$ 可以由细分规则确定。

上述方法虽然可以用来构造细分小波, 但是由于涉及到矩阵的求逆运算, 在实际的应用非常受限。但是, 如果我们利用提升算法则可以在原位计算中实现小波算法。事实上, 我们知道提升算法包括分裂、预测、更新三个步骤。由上可知, 边点对应的是小波函数, 从而可以直接利用细分规则作为预测算子来计算边点的小波函数, 但是我们需要利用边点来更新顶点的方法。这个也可以从细分规则中计算得到。由于

$$e_i = \frac{3}{8}(V + V_i) + \frac{1}{8}(V_{i-1} + V_{i+1})$$

所以

$$\sum_i e_i = \frac{2n}{8}V + \frac{5}{8} \sum_i V_i$$

即

$$v = \gamma_n V + \delta_n \sum_i e_i$$

这里

$$\gamma_n = \frac{8}{5}\alpha_n - \frac{3}{5}.$$

利用细分格式作为预测方法, 可以得到Loop细分的提升实现。其中Loop细分的提升小波的重构算法就是:

$$\begin{cases} e \leftarrow e + \frac{3}{8}(v_0 + v_1) + \frac{1}{8}(v_2 + v_3), & \forall e; \\ v \leftarrow \gamma_n v, & \forall v; \\ v_i \leftarrow v_i + \delta_n e, & \forall e, i = 0, 1, 2, 3; \end{cases} \quad (8.18)$$

将重构算法逆序就可以得到Loop细分的提升小波的分解算法:

$$\begin{cases} v_i \leftarrow v_i - \delta_i e, & \forall e, i = 0, 1, 2, 3; \\ v \leftarrow \frac{1}{\gamma_n} v, & \forall v; \\ e \leftarrow e - \frac{3}{8}(v_0 + v_1) - \frac{1}{8}(v_2 + v_3), & \forall e; \end{cases} \quad (8.19)$$

但是这样得到的小波的尺度函数的正交性不佳,从而不能得到多分辨率函数的好的逼近。为此,我们这里介绍如何根据细分规则得到双正交的细分小波的提升构造方法。基本想法如下:如图8.10所示,对于定义在边点上的小波新的基函数 $\psi(x)$ 更新成它本身和周围的顶点的基函数的线性组合使得它和尺度函数正交。为了简单起见,我们这里选择的是所对应的基函数 $\psi_k(x)$ 和周围四个点对应的基函数的线性组合,即

$$\psi(x) = \psi_k(x) + \sum_{i=0}^3 \omega_i \phi_i(x)$$

其中 $\omega_i$ 是待定系数。根据正交性条件,我们有

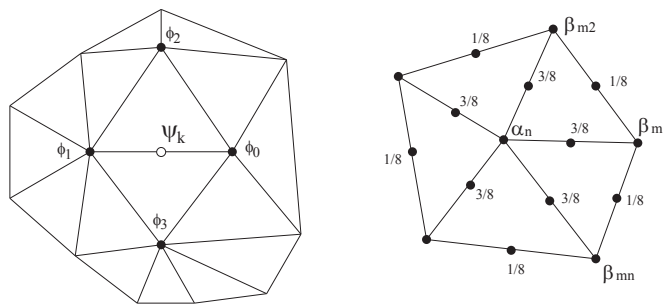


图 8.10 Loop细分的提升法则

$$\langle \psi(x), \phi_i(x) \rangle = 0, i = 0, 1, 2, 3.$$

这个系统对应到一个 $4 \times 4$ 的线性方程组 $A\omega = b$ ,其中 $A = (a_{i,j})$ ,  $a_{i,j} = \langle \phi_i(x), \phi_j(x) \rangle$ ,  $b_i = -\langle \psi(x), \phi_i \rangle$ 。

一般来说,连续的内积不是很方便计算,所以,在实际应用中,上述内积使用的是离散的内积,详细计算公式如下所示。设 $\phi_i$ 对应的顶点的度是 $n_i$ ,则它们对应

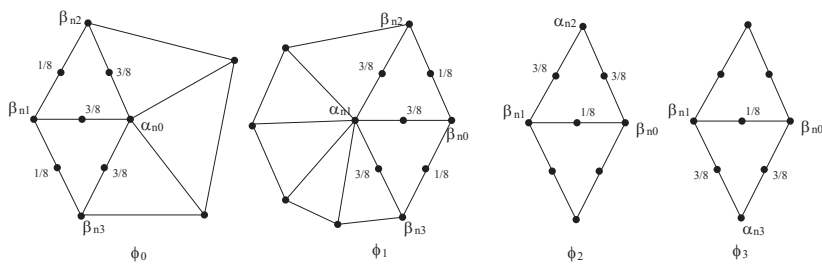


图 8.11 计算Loop细分的提升矩阵的系数

的基函数对中间九个点的贡献如下图8.11所示。则可以得到 $a_{i,j}$ 如下所示：

$$a_{0,1} = a_{1,0} = \alpha_{n_0}\beta_{n_0} + \alpha_{n_1}\beta_{n_1} + \beta_{n_2}^2 + \beta_{n_3}^2 + \frac{3}{16} + \frac{9}{64},$$

$$a_{0,2} = a_{2,0} = \alpha_{n_0}\beta_{n_0} + \alpha_{n_2}\beta_{n_2} + \beta_{n_1}^2 + \frac{3}{32} + \frac{9}{64},$$

$$a_{0,3} = a_{3,0} = \alpha_{n_0}\beta_{n_0} + \alpha_{n_3}\beta_{n_3} + \beta_{n_1}^2 + \frac{3}{32} + \frac{9}{64},$$

$$a_{1,2} = a_{2,1} = \alpha_{n_1}\beta_{n_1} + \alpha_{n_2}\beta_{n_2} + \beta_{n_0}^2 + \frac{3}{32} + \frac{9}{64},$$

$$a_{1,3} = a_{3,1} = \alpha_{n_1}\beta_{n_1} + \alpha_{n_3}\beta_{n_3} + \beta_{n_0}^2 + \frac{3}{32} + \frac{9}{64},$$

$$a_{2,3} = a_{3,2} = \beta_{n_0}^2 + \beta_{n_1}^2 + \frac{1}{64},$$

$$a_{0,0} = \alpha_{n_0}^2 + \beta_{n_1}^2 + \beta_{n_2}^2 + \beta_{n_3}^2 + \frac{27}{64} + \frac{1}{32}$$

$$a_{1,1} = \beta_{n_0}^2 + \alpha_{n_1}^2 + \beta_{n_2}^2 + \beta_{n_3}^2 + \frac{27}{64} + \frac{1}{32}$$

$$a_{2,2} = \alpha_{n_2}^2 + \beta_{n_1}^2 + \beta_{n_0}^2 + \frac{9}{32} + \frac{1}{64}$$

$$a_{3,3} = \alpha_{n_3}^2 + \beta_{n_1}^2 + \beta_{n_0}^2 + \frac{9}{32} + \frac{1}{64}$$

$$b_0 = \alpha_{n_0}\delta_{n_0} + \beta_{n_1}\delta_{n_1} + \frac{3}{8},$$

$$b_1 = \alpha_{n_1}\delta_{n_1} + \beta_{n_0}\delta_{n_0} + \frac{3}{8},$$

$$b_2 = \beta_{n_0}\delta_{n_0} + \beta_{n_1}\delta_{n_1} + \frac{3}{8},$$

$$b_3 = \beta_{n_0}\delta_{n_0} + \beta_{n_1}\delta_{n_1} + \frac{3}{8},$$



这里,  $\delta_n = \frac{8}{5}\beta_n$ 。

注意到, 在上述的计算中, 上述系数之和顶点的度有关。而经过一次细分后, 所有的奇异点都会分离开。从而, 上述系数可以分成两类: 一个是顶点 $v_0$ 是奇异点(即 $n_0 \neq 6$ ), 其他顶点的度都是6; 另外一类就是顶点 $v_2$ 是奇异点(即 $n_2 \neq 6$ ), 其他顶点的度都是6, 而 $v_1$ 或者 $v_3$ 是奇异点的情况是对称的。所以上述系数可以预先计算出来, 具体的值如下图8.12所示。

$n_0$	$w_0$	$w_1$	$w_2 = w_3$	$n_2$	$w_0 = w_1$	$w_2$	$w_3$
3	-0.943533	-0.192905	0.229306	3	-0.320177	0.227782	0.090494
4	-0.540222	-0.248487	0.134022	4	-0.300018	0.135809	0.079737
5	-0.371945	-0.272331	0.093146	5	-0.290306	0.093943	0.074512
6	-0.284905	-0.284905	0.071591	6	-0.284905	0.071591	0.071591
7	-0.232761	-0.292500	0.058571	7	-0.281566	0.058082	0.069779
8	-0.198097	-0.297558	0.049901	8	-0.279321	0.049109	0.068559
9	-0.173274	-0.301174	0.043701	9	-0.277711	0.042714	0.067683
10	-0.154510	-0.303900	0.039029	10	-0.276497	0.037910	0.067023
20	-0.077147	-0.314981	0.020032	20	-0.271609	0.018528	0.064364
100	-0.016045	-0.323481	0.005461	100	-0.267949	0.003793	0.062377

图 8.12 计算Loop细分的提升矩阵的系数

求出 $\omega_i$ 后, Loop细分的提升小波的重构算法就是:

$$\begin{cases} v_i \leftarrow v_i + \omega_i e, & \forall e, i = 0, 1, 2, 3; \\ e \leftarrow e + \frac{3}{8}(v_0 + v_1) + \frac{1}{8}(v_2 + v_3), & \forall e; \\ v \leftarrow \gamma_n v, & \forall v; \\ v_i \leftarrow v_i + \delta_n e, & \forall e, i = 0, 1, 2, 3; \end{cases} \quad (8.20)$$

将重构算法逆序就可以得到Loop细分的提升小波的分解算法:

$$\begin{cases} v_i \leftarrow v_i - \delta_i e, & \forall e, i = 0, 1, 2, 3; \\ v \leftarrow \frac{1}{\gamma_n} v, & \forall v; \\ e \leftarrow e - \frac{3}{8}(v_0 + v_1) - \frac{1}{8}(v_2 + v_3), & \forall e; \\ v_i \leftarrow v_i - \omega_i e, & \forall e, i = 0, 1, 2, 3; \end{cases} \quad (8.21)$$

Loop细分的提升小波可以用来做图形的去噪。比如下图8.13所示, 给定一个几何模型, 通过五层的Loop细分得到一个网格, 然后在该网格的顶点上加入白噪声, 就是图8.13中的第一个模型。然后, 我们就可以利用Loop提升小波对该模型做小波分解算法, 并删除模较小的顶点后利用小波重构算法得到去噪后的模型。图8.13中分别是去掉不同层的小的小波系数后去噪的模型。

Loop细分的提升小波可以用来做图形的特征传递。比如下图8.14所示, 给定一个几何模型, 利用Loop提升小波对该模型做小波分解算法, 图8.14中显示的是将不同层的小波系数加入后的模型。

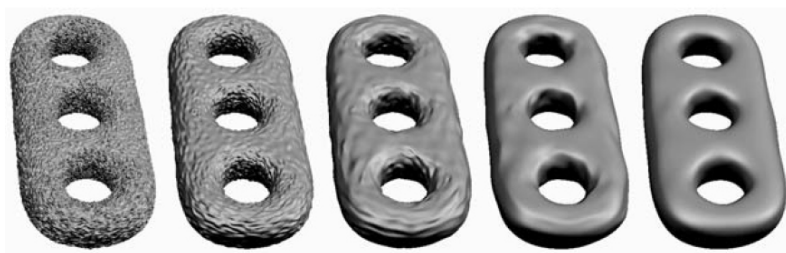


图 8.13 Loop提升小波的去噪

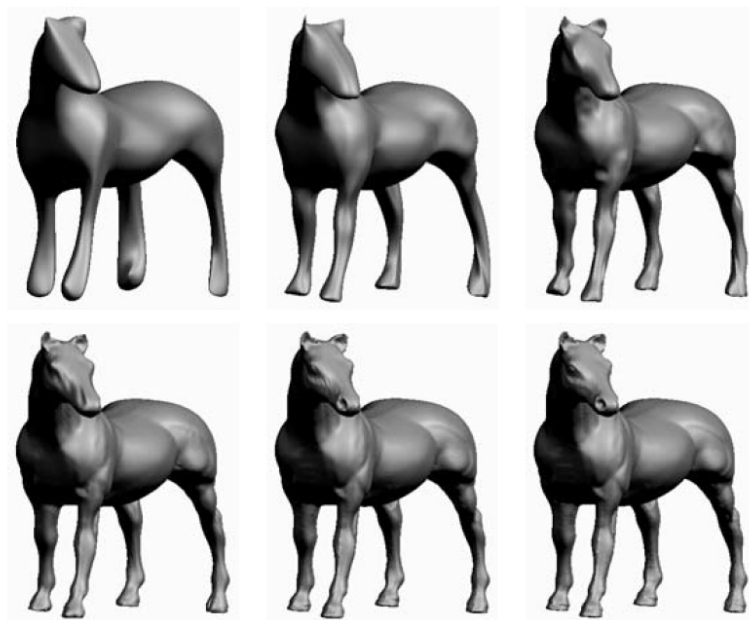


图 8.14 Loop提升小波的特征传递

**作业 8.1** 1. 以Haar小波为例, 给出Haar小波的提升实现;

2. 实现Loop细分提升算法;

3. 实现Catmull-Clark细分提升算法;



## 第九章 傅里叶和小波变换的应用\*

随着信息技术的一步步发展,现代的小波技术可谓五花八门,百花齐放。这一章讨论小波的进一步发展,主要内容包括傅里叶与小波分析,小波包,提升小波,样条小波在信号处理、图像处理、几何处理、偏微分方程求解领域的应用 [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]。

### §9.1 信号处理

#### §9.1.1 小波变换与信号处理

信号降噪是小波变换的一个重要的应用。对信号降噪实质上是抑制信号中的无用部分,增强信号中有效部分的过程。因此降噪通常也和压缩联系在一起,以获得比较好的压缩效果。一般的,一维信号降噪的过程可以分为3个步骤:

1. **步骤1: 分解。**

选择一个小波并确定分解的层次,然后进行分解计算。

2. **步骤2: 阈值量化**

对各个分解尺度下的高频系数选择一个阈值 $\epsilon$ 进行阈值处理。

3. **步骤3: 重构**

根据小波分解的最底层低频系数和各层高频系数进行一维小波重构。

降噪的核心步骤在于阈值的选择,它直接影响降噪的质量,所以人们提出了各种理论和经验的模型。但是没有一种模型是通用的,它们都有自己的适用范围。在此介绍几种常见的阈值选择方法:

1. 默认阈值:  $\epsilon = \sigma\sqrt{2\log(n)}$ ,  $n$ 为信号长度,  $\sigma$ 为噪声强度。在最简单的情况下可以假设噪声为高斯白噪声,取 $\sigma = 1$ 。

2. 极大极小阈值:

$$\epsilon = \begin{cases} 0.3936 + 0.1829 \left( \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \right), & n > 32 \\ 0, & n \leq 32. \end{cases}$$

3. 方差阈值:  $\epsilon = \text{median}_{1 \leq i \leq n}(|x(i)|)/0.6745$ ,即信号 $x$ 绝对值的中值除以0.6745。这种方法非常适合均值为零的高斯白噪声降噪的信号模型。

4. Stein无偏风险估计阈值:

- (a) 将每个小波系数平方后, 从小到大排列为  $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ ;
- (b) 计算风险向量  $R = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ ,  $r_k = \frac{n-2k+\sum_{i=1}^k p_i+(n-i)p_{n-i}}{n}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ;
- (c) 设  $R$  中最小值对应序号为  $\hat{k}$ , 则阈值  $\epsilon = \sqrt{p_{\hat{k}}}$ 。

5. Birge-Massart策略:

- (a) 给定分解层数  $j$ , 对  $j+1$  以及更高层, 所有系数保留;
- (b) 对第  $i$  层 ( $1 \leq i \leq j$ ), 保留绝对值最大的  $n_i$  个系数, 其中  $n_i = M(j+2-i)^\alpha$ ,  $M$  和  $\alpha$  为经验系数。在压缩情况下可以取  $\alpha = 1.5$ , 降噪情况下取  $\alpha = 3$ 。

选择阈值之后, 通常有两种阈值处理的方式, 其中  $x$  为输入,  $s$  为输出:

- 硬阈值:

$$s = \begin{cases} x, & |x| > \epsilon \\ 0, & |x| \leq \epsilon. \end{cases}$$

- 软阈值:

$$s = \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - \epsilon), & |x| > \epsilon \\ 0, & |x| \leq \epsilon. \end{cases}$$

这两种阈值处理各有优劣: 硬阈值在均方误差意义上更优, 但信号会产生附加震荡, 产生跳跃点, 损失原信号的光滑性; 软阈值得到的小波系数连续性较好, 但会产生偏差, 直接影响到重构信号与真实信号的逼近程度。

**例 9.1** 小波变换与信号降噪。对某地的用电情况进行考察, 对其电网电压值进行监测。在采样过程中, 监测设备出现故障, 致使采集到的信号收到噪声的污染。利用 *Daubechies2* 小波进行 3 次分解, 对污染信号降噪, 效果如图 9.1 所示。其中, *Matlab* 源码如下所示。

```

1  clc;clear;close all;
2  load leleccum;
3  wave='db2';
4  s=leleccum(1:3920);
5  subplot(3,2,1);
6  plot(s);title("Origin signal",'FontSize',20);
7  [c,l]=wavedec(s,3,wave);
8  a3=appcoef(c,l,wave,3);d3=detcoef(c,l,3);
9  d2=detcoef(c,l,2);d1=detcoef(c,l,1);
10 dd3=zeros(1,length(d3));dd2=zeros(1,length(d2));

```

```

11 dd1=zeros(1,length(d1));c1=[a3 dd3 dd2 dd1];
12 s1=waverec(c1,1,wave);
13 subplot(323); plot(s1);
14 title("Denoise by setting zeros",'FontSize',20);
15 [thr,sorh,keepapp]=ddencmp('den','wv',s);
16 s2=wdencmp('gbl',s,wave,3,thr ,sorh ,keepapp);
17 subplot(324)
18 plot(s2); title("fix elpsilon denoise",'FontSize',20)
19 cd1hard=wthresh(d1,'s',1.465);
20 cd2hard=wthresh(d2,'s',1.823);
21 cd3hard=wthresh(d3,'s',2.768);
22 c2=[a3 cd1hard cd2hard cd3hard];
23 s3=waverec(c2,1,wave);
24 subplot(325);
25 plot(s3); title('soft elpsilon denoise','FontSize',20)
26 cd1hard=wthresh(d1,'h',1.465);
27 cd2hard=wthresh(d2,'h',1.823);
28 cd3hard=wthresh(d3,'h',2.768);
29 c3=[a3 cd1hard cd2hard cd3hard];
30 s4=waverec(c3,1,wave);
31 subplot(326);
32 plot(s4);title('solid elpsilon denoise','FontSize',20)

```

**例 9.2** 相比于小波分解，小波包可以将高低频部分都进行分解，这意味着更高的时频分辨率，尤其是相比于在低频段的分辨率。图9.2a显示了一个被噪声污染的多普勒效应信号，尝试使用 $haar$ 小波包进行3层分解，生成的 $Haar$ 小波包分解树是右图。在第3层分解中共有8个节点，图9.3显示了这些节点对应的8组信号，可以看到 $(3,0)$ 对应的信号是原始信号的一个光滑逼近。如果将第3层除了最左边两个节点以外的6个节点对应的高频系数分3次置为0，三次降噪结果如图9.4所示。其中，*Matlab*源码如下所示。

```

1 clc;clear;close all;
2 load noisdopp;x=noisdopp; wpt2=wpdec(x,3,'haar');
3 plot(wpt2); wptviewcf(wpt2,1);
4 cfs7=wpcoef(wpt2,7);cfs8=wpcoef(wpt2,8);
5 cfs9=wpcoef(wpt2,9);cfs10=wpcoef(wpt2,10);
6 cfs11=wpcoef(wpt2,11);cfs12=wpcoef(wpt2,12);
7 cfs13=wpcoef(wpt2,13);cfs14=wpcoef(wpt2,14);
8 figure;
9 subplot(4,2,1);plot(cfs7);title('node(3,0)','FontSize',20)
10 subplot(4,2,2);plot(cfs8);title('node(3,1)','FontSize',20)
11 subplot(4,2,3);plot(cfs9);title('node(3,2)','FontSize',20)
12 subplot(4,2,4);plot(cfs10);title('node(3,3)','FontSize',20)
13 subplot(4,2,5);plot(cfs11);title('node(3,4)','FontSize',20)

```

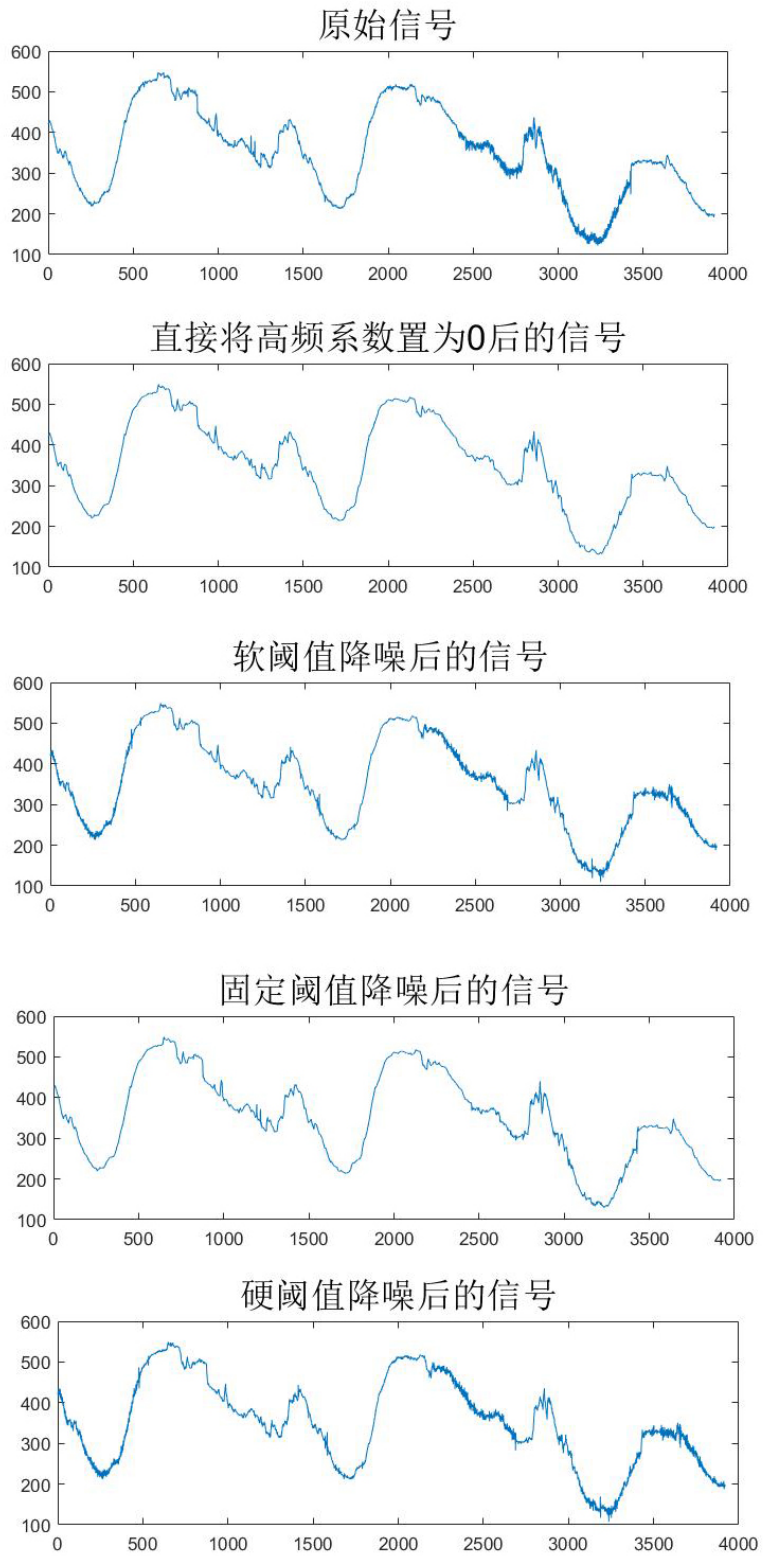


图 9.1 小波变换用于信号降噪



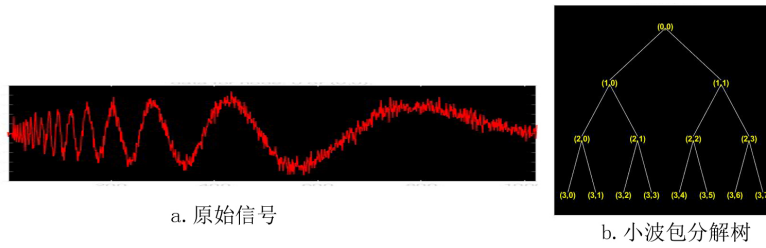


图 9.2 原信号和Haar小波包分解树

```

14 subplot(4,2,6);plot(cfs12);title('node(3,5)', 'FontSize', 20)
15 subplot(4,2,7);plot(cfs13);title('node(3,6)', 'FontSize', 20)
16 subplot(4,2,8);plot(cfs14);title('node(3,7)', 'FontSize', 20)
17 size2=read(wpt2, 'sizes', 7:14);
18 cfs_z7=zeros(size2(1,:));cfs_z8=zeros(size2(2,:));
19 cfs_z9=zeros(size2(3,:));cfs_z10=zeros(size2(4,:));
20 cfs_z11=zeros(size2(5,:));cfs_z12=zeros(size2(6,:));
21 cfs_z13=zeros(size2(7,:));cfs_z14=zeros(size2(8,:));
22 tre2_1=write(wpt2, 'cfs', 11, cfs_z11, 'cfs', 12, cfs_z12);
23 tre2_2=write(wpt2, 'cfs', 11, cfs_z11, ...
24     'cfs', 12, cfs_z12, 'cfs', 13, cfs_z13, 'cfs', 14, cfs_z14);
25 tre2_3=write(wpt2, 'cfs', 9, cfs_z9, 'cfs', 10, cfs_z10, 'cfs', 11, cfs_z11, ...
26     'cfs', 12, cfs_z12, 'cfs', 13, cfs_z13, 'cfs', 14, cfs_z14);
27 y1=wprec(tre2_1);y2=wprec(tre2_2);y3=wprec(tre2_3);
28 figure;subplot(4,1,1);plot(x);
29 title('origin signal', 'FontSize', 20);
30 subplot(4,1,2);plot(y1);
31 title('level one denoise', 'FontSize', 20);
32 subplot(4,1,3);plot(y2);
33 title('level two denoise', 'FontSize', 20);
34 subplot(4,1,4);plot(y3);
35 title('level three denoise', 'FontSize', 20);

```

## §9.2 图像处理

图像处理领域是小波分析应用最广泛和最成熟的领域。实践证明小波是图像处理的最强有力的工具之一。小波分析在图像分析、降噪、压缩、融合、增强以及边缘检测等方面都有广泛的应用。

与一维信号不同的是，图像是二维信号。对一张像素为 $m \times n$ 的图像上每个点 $(x, y)$ 有唯一的灰度值 $f(x, y)$ ,  $x = 0, 1, \dots, m, y = 0, 1, \dots, n$  对应。对图像的分解一般使用张量积小波，可以看做是一元小波分别对图像的行和列进行分解。见图9.5，

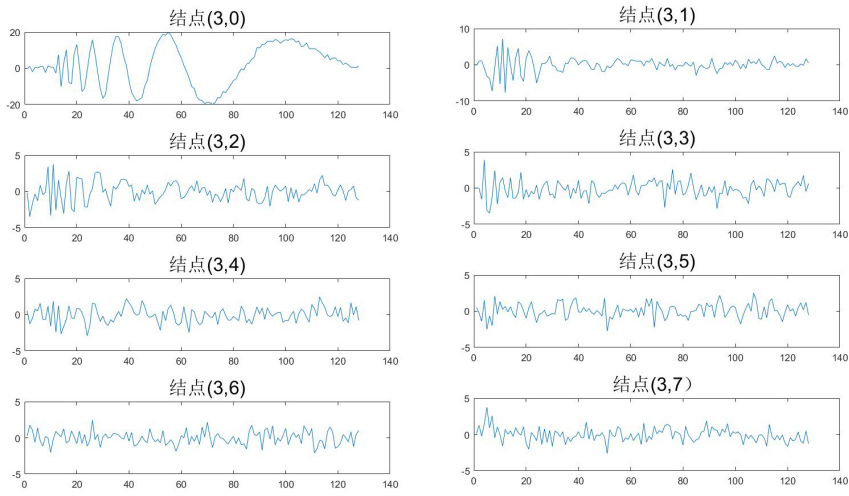


图 9.3 8个节点对应的信号

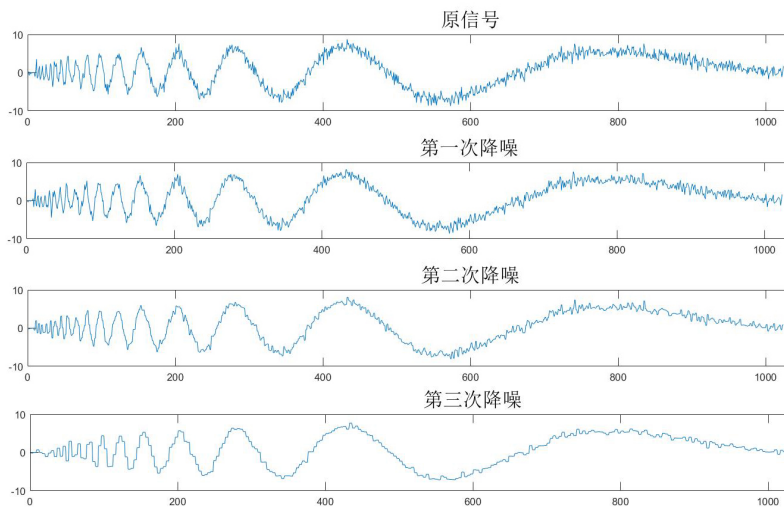


图 9.4 小波包树和信号降噪

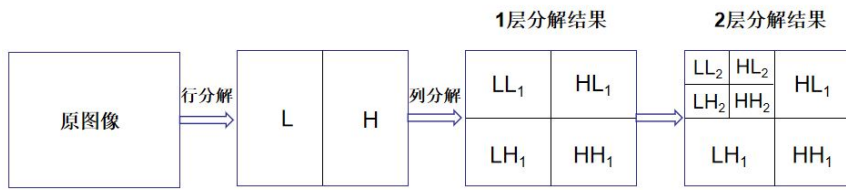


图 9.5 二维小波分解示意图

首先将原图像的每一行分解为低频部分 $L$ 和高频部分 $H$ ，再对每一列进行分解，得到的1层分解将图像分成4个部分： $LL_1$ 是平滑逼近， $LH_1$ 是垂直分量， $HL_1$ 是水平分量， $HH_1$ 是对角分量；2层分解是作用在 $LL_1$ 上，又得到4个分量；多层分解以此类推。对彩色（RGB）图像，只要对三个色彩通道分别进行分解。

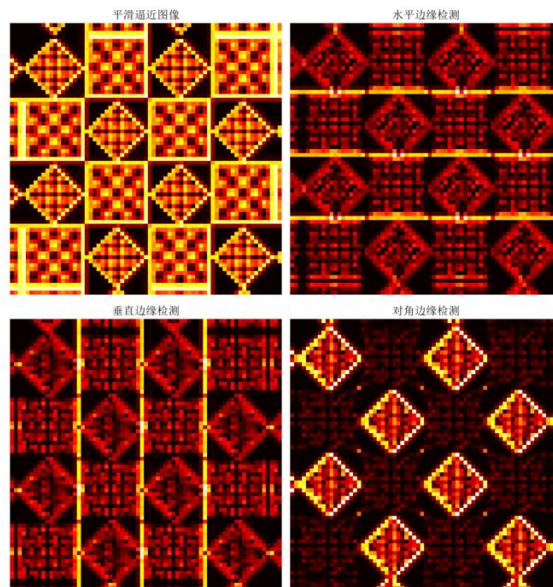


图 9.6 小波分解与边缘检测

**例 9.3** 第一个例子是小波应用在图像的边缘检测上。使用 *Coiflets2* 小波构成张量积，对图像进行1层分解。可以注意到小波分解的结果很好的展现了图9.6的边缘结构，因此小波分解的各个分量可以作为边缘检测的参考。其中，*Matlab*源码如下所示。

```

1  clc;clear;close all;
2  load tartan;level = 1;[c,s] = wavedec2(X,level,'coif2');
3  [chd1,cvdl,cddl] = detcoef2('all',c,s,level);a=appcoef2(c,s,'coif2',level);
4  figure('Color','white'), image(wcodemat(X,64)), colormap(map),axis square,
    axis off
5  figure('Color','white'), image(wcodemat(a,64)), colormap(map),axis square,
    axis off
6  title('approximate the image','FontSize',20)
7  figure('Color','white'),image(wcodemat(chd1,64)),colormap(map),axis square,
    axis off
8  title('horzional sharp edge','FontSize',20)
9  figure('Color','white'), image(wcodemat(cvdl,64)), colormap(map),axis square,
    axis off
10 title('vertical sharp edge','FontSize',20)
11 figure('Color','white'), image(wcodemat(cddl,64)),colormap(map),axis square,
    axis off
12 title('diagonal sharp edge','FontSize',20)

```

### §9.2.1 图像降噪

图像的降噪过程与一位信号的降噪过程相同，区别在于阈值的选择上可以选择统一的全局阈值，也可以分别选择垂直方向、水平方向、对角方向的阈值，这样做的好处是可以把所有方向的噪声都降低。

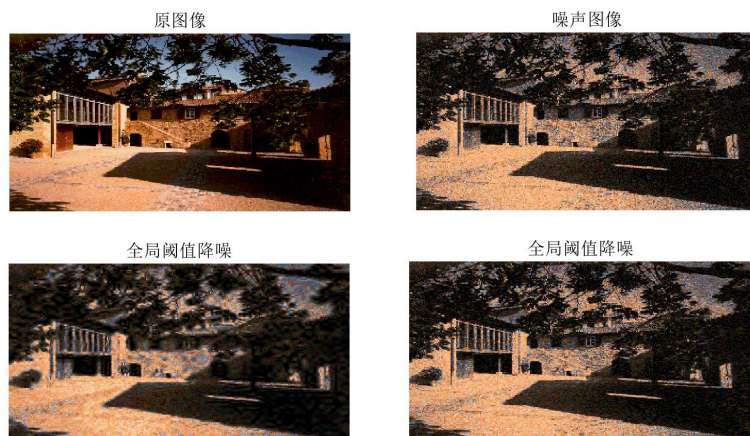


图 9.7 二维小波用于图像降噪

**例 9.4** 图§9.2.1展示了使用Daubechies8小波对图像进行2层分解，进行硬阈值降噪的结果。左下图为使用默认阈值进行全局降噪，右下图为在垂直、水平、对角方向

取阈值5, 5, 20, 20, 40, 40的独立阈值降噪。可以明显的看到, 选择适合的方向阈值对降噪结果有决定性的影响。其中, *Matlab*源码如下所示。

```

1  clc;clear;close all;
2  load belmont2;
3  init = 2055615866;
4  rng('default');
5  x = X + 18*randn(size(X));figure
6  subplot(221),image(X),colormap(map)axis off;
7  title('origal image','FontSize',20);
8  subplot(222),image(x),colormap(map)axis off;
9  title('noise image','FontSize',20);
10 w='db8';[c,l]=wavedec2(x,2,w);
11 [thr,sorh,keepapp] = ddencmp('den','wv',x);
12 xd=wdencmp('gbl',c,l,w,2,thr,'h',1);
13 subplot(223),image(xd),colormap(map)axis off;
14 title('denoise image','FontSize',20);
15 thr=[5 5;20 20;40 40];
16 xdd=wdencmp('lvd',x,w,2,thr,'h');
17 subplot(224),image(xdd),colormap(map)axis off;
18 title('denoise image','FontSize',20);

```

### §9.2.2 图像压缩

文字、图形、视频都可以存储为图像信息,但计算机处理这些多媒体信息需要大量的存储空间,在网络多媒体技术的应用中,为了兼顾图像质量和处理速度,高保真、大压缩比的图像压缩技术是必要的。目前,基于小波变换的图像压缩方法已经逐步取代基于离散余弦变换(DCT)或者其他子带编码技术,而成为新的图像压缩国际标准的首选方法,这得益于小波变换出色的时频局部化特性。同降噪过程一维到二维的推广类似,图像的压缩也可以理解为对三组细节系数的阈值处理。一般来讲,为了提高压缩性能,需要在三个方向做阈值处理。这种思想类似于将图像的多余细节视为噪声,因此其本质就是图像的降噪,但在实际应用中又是简单有效的。对一张原始图像 $X$ ,假设其压缩图像为 $\tilde{X}$ ,通常可以用分解系数中置为0的系数百分比来模拟压缩比,用保留能量百分比(即 $\|X\|_{L_2}/\|\tilde{X}\|_{L_2}$ )来模拟保真性能。

**例 9.5** 图9.8给出的是利用Haar小波对图像压缩的例子。其中, *Matlab*源码如下所示。

```

1  load wbarb;whos;
2  [C S] = wavedec2(X,2,'dbl');
3  [thr,sorh,keepapp] = ddencmp('cmp','wv',X);
4  [Xcomp,CXC,LXC,PERF0,PERFL2] = wdencmp('gbl',C,S,'dbl',2,thr,sorh,keepapp);
5  colormap(map);
6  subplot(121);image(X);title('origin image','FontSize',20);

```

```

7 axis square
8 axis off
9 subplot(122);image(Xcomp);
10 title('compress image','FontSize',20)
11 axis square
12 axis off

```



图 9.8 小波变换用于图像压缩

在大规模图像处理中，全局阈值处理是一个通常的选择，但这种方式不够精细。对单一图像，分层、分方向阈值处理更能体现图像固有的时频局部特性，但需要对图像先进行分析以获得足够的关联信息。即便如此，小波分解仍然不够灵活，分解出来的小波树只有一种模式，不能完全地体现时频局部化信息。因此，实际的压缩算法多采用小波包算法，而小波树的确定则是根据不同的信息论准则，以达到分解系数表达的信息密度最高。需要说明的一点，对高频成分很多的图像（如指纹图像），小波包的分解细节信息的特点尤其能发挥出优势。正因为这点，FBI（美国联邦调查局）的指纹库就是采用基于小波包的压缩算法WSQ。实际应用中，为了提高机器实现效率，一般采用特定的双正交小波，利用其滤波器分布规则的特点，用移位操作实现滤波操作。图9.9给出使用Daubechies4小波2层分解，全局默认硬阈值处理压缩图像，右图为压缩过程中使用的最优小波树，使得零系数百分比最高。其中，Matlab源码如下所示。

```

1 clc;clear;close all;
2 load julia;whos;
3 [thr,sorh,keepapp,crit] = ddencmp('cmp','wp',X);
4 [Xcomp,treed,PERF0,PERFL2] = wpdencmp(X,sorh,2,'db4',crit,thr*2,keepapp);
5 n=size(map,1);
6 colormap(pink(n));

```

```

7 subplot(121);image(wcodemat(X,n));title('origin image','FontSize',20);
8 axis off
9 subplot(122);
10 image(wcodemat(Xcomp,n));title('compress image','FontSize',20)
11 axis off
12 plot(treed)

```

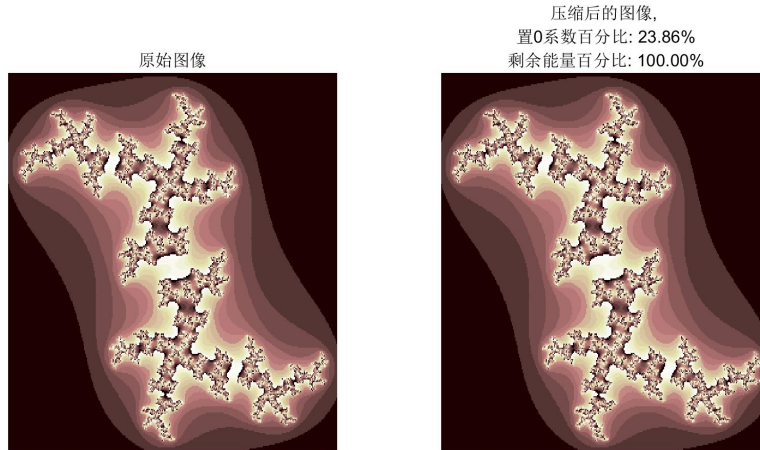


图 9.9 小波包用于图像压缩

上述的仅考虑图像本身像素点之间的相关性的算法称为第一代图像数据压缩算法。在多媒体系统的应用领域中，人眼作为图像信息的接收端，其视觉对于边缘急剧变化不敏感（视觉掩盖效应），以及人眼对于图像的亮度信息敏感，而对颜色分辨弱等因素，使得高压缩比的情况下，解压缩的图像依然有着满意的主观质量。由Kunt等人提出的第二代图像数据压缩算法，就充分考虑了人类视觉生理心理特征，侧重于将原始图像在频域内做多层分解，然后对这些信息表示灵活地有选择地编码，可得到较高的压缩比和很小的失真度。基于图像渐进式编码（嵌入式零树小波编法EZW、多级树集合分裂算法SPIHT、集合分裂嵌入块编码器SPECK）、基于行的熵编码、嵌入式块最优截断（EBCOT）编码是目前国际上最为流行的3中基于小波变换的图像编码方法。我们前面学习的消失矩，和信号压缩有着密切关系。一方面，一个小波的消失矩阶数越高，压缩性能越好；另一方面，消失矩阶数的增长会导致滤波器系数的个数成倍增加，从而影响压缩图像的能量集中性质变差。大量的图像压缩试验证实，Cohen与Daubechies等人于1992年发现的消失矩为4的双正交9-7小波（又称CDF 9-7小波）具有最好的信息压缩性质，并在JPEG2000国际静态图像压缩标准中被推荐使用。图9.10展示了同样压缩12次情况下，采用不同编码

方式和小波变换得到的压缩效果。其中, Matlab源码如下所示。

```

1  clc;clear;close all;load porche
2  colormap(pink(255))
3  subplot(2,2,1); image(X);
4  axis square,axis off;title('origin image','FontSize',20)
5  [CR,BPP] = wcompress('c',X,'mask.wtc','ezw','maxloop',12,'wname','haar');
6  Xc = wcompress('u','mask.wtc');
7  subplot(2,2,2);image(Xc);axis square,axis off;
8  title(['EZW - haar'], ['ratio: ' num2str(CR,'%1.2f %%'),'BPP: ' num2str(BPP,
   '%3.2f')]),'FontSize',20)
9
10 [CR,BPP] = wcompress('c',X,'mask.wtc','ezw','maxloop',12,'wname','bior4.4');
11 Xc = wcompress('u','mask.wtc');
12 colormap(pink(255))
13 subplot(223); image(Xc);axis square,axis off;
14 title(['EZW - Bio4.4'], ['ratio: ' num2str(CR,'%1.2f %%'),'BPP: ' num2str(
   BPP,'%3.2f')]),'FontSize',20)
15
16 [CR,BPP] = wcompress('c',X,'mask.wtc','spiht','maxloop',12,'wname','bior4.4')
   ;
17 Xc = wcompress('u','mask.wtc');
18 colormap(pink(255))
19 subplot(224); image(Xc);axis square,axis off;
20 title(['SPINT - Bio4.4'], ['ratio: ' num2str(CR,'%1.2f %%'),'BPP: ' num2str(
   BPP,'%3.2f')]),'FontSize',20)

```

### §9.2.3 图像增强

前面介绍了一些基于阈值化的图像处理技术,下面介绍一种基于抑制系数的处理技术:图像增强。

图像增强问题的基本目的是对图像进行适当处理,以适合特定的应用领域,因此与实际问题的背景密切相关。图像增强主要通过时域和频域处理两种方法:时域方法通过直接在像素点上做算子运算,方便快捷,但会丢失很多相关点之间信息;频域方法会修改傅里叶变换系数,可以详细地分离出点之间的相关性,但计算量大得多。小波方法权衡了以上两种方法,这是因为傅里叶分析在所有点的分辨率都是原图像的尺度,实际问题有时不需要这么大的分辨率,而单纯的时域分析又太过粗糙。又一次,小波分析的多尺度特性显示了其灵活性。

本节讨论两种主要的图像增强问题:钝化和锐化。钝化的目的是增强图像的低频成分,抑制尖锐的突变效果;锐化与之相反,着重于提取尖锐部分,用于检测和识别等领域。

首先介绍一种基于傅里叶变换的频域处理方法。低通滤波器对高频系数进行抑制来达到处理目的,但在频率截断处会因为粗暴的处理而出现类似于信号处理



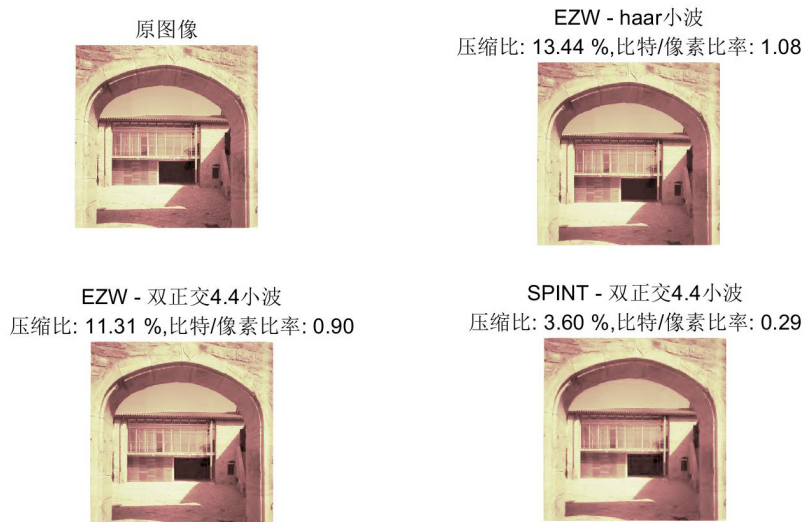


图 9.10 第二代图像压缩算法

中Gibbs振荡的振铃效应，所以一般情况下可以采用下列公式来得到一个更平滑的低通滤波器，也被称为Butterworth低通滤波器：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [d(u, v)/d_0]^{2n}}$$

式中 $d_0$ 为选定的滤波器带宽， $d(u, v)$ 为点 $(u, v)$ 到原点的距离， $n$ 为滤波器阶数。与之相对的是Butterworth高通滤波器：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [d_0/d(u, v)]^{2n}}$$

**例 9.6** 图9.11显示了以chess信号在两种钝化方法下的效果。中间图为对原图像做二维离散余弦变换(DCT)，再对变换结果做Butterworth低通滤波后重构的结果；右图为使用Daubechies3小波2层分解后，加倍低频系数，减半高频系数后重构的结果。其中，Matlab源码如下所示。

```

1 clc;clear;close all;
2 load chess;
3
4 blur1=X;blur2=X;
5
6 ffl=dct2(X);
7 for i=1:256

```

```

8     for j=1:256
9         ff1(i,j)=ff1(i,j)/(1+((i*i+j*j)/8192)^2);
10    end
11 end
12 blur1=idct2(ff1);
13 [c l] = wavedec2(X,2,'db3');
14 csize=size(c);
15 for i=1:csize(2);
16     if(c(i)>300)
17         c(i)=c(i)*2;
18     else;
19         c(i)=c(i)/2;
20     end
21 end
22 blur2=waverec2(c,l,'db3');
23
24 subplot(131);
25 image(wcodemat(X,192));colormap(gray(256));
26 title('origin image','FontSize',20);
27 axis square
28 axis off
29 subplot(132);
30 image(wcodemat(blur1,192));colormap(gray(256));
31 title('DCT passivation iamge','FontSize',20);
32 axis square
33 axis off
34 subplot(133);
35 image(wcodemat(blur2,192));colormap(gray(256));
36 title('Wavelet passivation iamge','FontSize',20);
37 axis square
38 axis off

```



图 9.11 傅里叶分析与小波分析用于图像钝化

从结果可以看到,  $DCT$ 在频域做滤波的方法得到的钝化图像更为平滑,这是因为 $DCT$ (或者说 $DFT$ )的分辨率最高;小波方法的结果有很多不连续的地方,这是因为处理系数时使用了分段线性操作。读者可以尝试在小波系数的处理中加入位置信息,或者增加分解层数以获得更有趣的结果。

**例 9.7** 图9.12显示了以chess信号在两种锐化方法下的效果。左图为对原图像做二维离散余弦变换( $DCT$ ),再对变换结果做Butterworth高通滤波后重构的结果;右图为使用Daubechies3小波2层分解后,减半低频系数,加倍高频系数后重构的结果。其中,Matlab源码如下所示。

```

1  clc;clear;close all;
2  load chess;
3  blur1=X;blur2=X;
4  ff1=dct2(X);
5  for i=1:256
6      for j=1:256
7          ff1(i,j)=ff1(i,j)/(1+(32768/(i*i+j*j))^2);
8      end
9  end
10 blur1=idct2(ff1);
11
12 [c l] = wavedec2(X,2,'db3');
13 csize=size(c);
14 for i=1:csize(2);
15     if(abs(c(i))<300)
16         c(i)=c(i)*2;
17     else;
18         c(i)=c(i)/2;
19     end
20 end
21 blur2=waverec2(c,l,'db3');
22 subplot(121);
23 image(wcodemat(blur1,192));colormap(gray(256));
24 title('DCT sharp image','FontSize',20);
25 axis off
26 subplot(122);
27 image(wcodemat(blur2,192));colormap(gray(256));
28 title('wavelet sharp image','FontSize',20);
29 axis off

```

从结果来看,  $DCT$ 的结果更加纯粹,完全是原图像的边缘信息,而小波方法的结果中包含变化缓慢的低频成分,对局部物体的细节表现的更好。

最后来比较以上两个例子的时间复杂度。对 $DCT$ 方法,需要做一正一逆两次复杂度为 $\mathcal{O}(n \log n)$ 的 $DCT$ 变换和复杂度为 $\mathcal{O}(n)$ 的系数处理,而对小波变换,无论

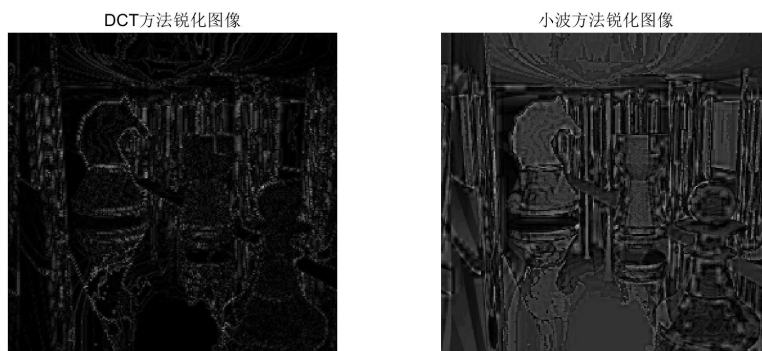


图 9.12 傅里叶分析与小波分析用于图像锐化

是分解、重建还是系数处理都是 $\mathcal{O}(n)$ 的，所以时间复杂度的优势十分明显。

#### §9.2.4 图像融合

图像融合是将同一对象的两个或更多图像合成到一幅图像中，以便比原来的单一图像更容易理解的技术，被广泛应用于多频谱图像理解和医学图像处理等领域，在这些场合，同一物体部件的图像往往是采用不同的成像机理得到的。

基于小波分析的图像融合分为4个步骤：

1. 预处理：将需要被处理的图像重采样以保证拥有相同的尺寸，有时还需要进行配准以保证不同图像上的特征点的位置尽量接近；
2. 小波多层分解：对待处理的图像进行相同层次的小波分解
3. 系数融合：对低、高频系数选择合适的方式分别进行融合。假设将图像 $\{X_i\}_{i=1}^m$ 融合为 $Y$ ,  $C_X$ 表示图像 $X$ 的低或高频系数分量，常用的融合方法有
  - (a) 线性融合： $C_Y = \sum_{i=1}^m \omega_i C_{X_i}$ , 其中加权系数 $\omega_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ , 比较特别的均值融合取相等的加权系数
  - (b) 最大融合： $C_Y(a, b) = \max\{C_{X_i}(a, b)\}$ ,  $(a, b)$ 是系数的任一元素，类似的有最小融合；
4. 重构：利用融合后的小波系数重构出最终图像。

**例 9.8** 图9.13显示了融合**bust**和**mask**两幅图像的结果。第一列为原图像，左下图为在低高频都采用均值融合的结果，右下图为低频系数采用最大值融合，高频系数采用最小值融合的结果。



图 9.13 小波分析用于图像融合

### §9.3 样条小波

在第3章曾经介绍过离散傅里叶变换在细分曲面的分析中的作用, 作为傅里叶分析与计算机图形学的交叉应用的例子。实际的几何处理中, 也会需要更加复杂、更加灵活的小波技术。目前, 除了haar小波之外, 无论是否具有紧支集, 所有的正交小波都没有显示表示, 这对小波的应用带来不利影响。研究表明, 可以通过样条函数得到尺度函数和小波的显示表示。通过样条函数得到的小波称为样条小波。鉴于构造对称或反对称小波的需要, 着重介绍一类特殊的B样条小波。

#### §9.3.0.1 B样条

**定义 9.1** 设 $m$ 为自然数, 递归定义 $m$ 阶B样条 $N_m(x)$ 为:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1); \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (9.1)$$

$$N_m(x) = (N_{m-1} * N_1)(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt, m \geq 2 \quad (9.2)$$

B样条有很多种定义,这里介绍的是等距B样条。B样条有很多美妙的性质,这里列举出一些,证明留作作业:

**定理 9.1** 等距B样条具有下面一系列好的性质:

1.  $\text{supp}(N_m(x)) = (0, m)$ , 这里 $\text{supp}(N_m(x))$ 是指B样条基函数的支集。

2.  $N_m(x)$ 关于 $x = \frac{m}{2}$ 对称, 即

$$N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right)$$

3. 递推性质:

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1}N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}N_{m-1}(x-1)$$

4.  $N_m(x)$ 的傅里叶变换:

$$\hat{N}_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m$$

5. 存在常数 $A, B$ 使得

$$0 < B \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_m(\omega + 2k\pi)|^2 \leq A = \frac{1}{2\pi}$$

6.  $N_m(x)$ 满足双尺度方程

$$N_m(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^m 2^{\frac{1}{2}-m} \binom{m}{k} N_m(2x - k) \quad (9.3)$$

### §9.3.1 样条小波的构造

如果令 $\phi_m(x) = N_m(x)$ ,

$$V_0^m = \overline{\text{span}\{\phi_m(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}},$$

$$V_j^m = \overline{\text{span}\{\phi_{j,k}^m : k \in \mathbb{Z}\}},$$

容易验证 $\{V_j^m\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 构成一个多分辨分析, 因此可以计算正交小波基函数, 但是通常计算出的双尺度系数甚至不是实数。

因此, 修改 $\phi_m(x)$ 的定义, 令

$$\phi_m(x) = N_m\left(x + \frac{m}{2}\right)$$

$\{V_j^m\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 的定义不变, 可以验证 $\{V_j^m\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 依然是一个多分辨分析, 可以计算小波基函数, 这样的小波拥有容易计算的双尺度系数, 被称为 $m$ 阶B样条小波。事实上, 之前介绍的线性样条小波就是2阶B样条小波, 我们甚至可以给出这种小波的显示表达。

定理 9.2 令  $m \geq 2$

$$q_k = \frac{(-1)^k}{2^{m-\frac{1}{2}}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k+1-l), k = 0, 1, \dots, 3m-2 \quad (9.4)$$

则  $m$  阶 B 样条

$$\psi_m(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{3m-2} q_k N_m(2x-k) \quad (9.5)$$

且满足

1. 紧支性:  $\text{supp}\psi = [0, 2m-1]$
2. 对称性:  $\psi$  当  $m$  是偶数时是对称的,  $m$  是奇数时是反对称的, 对称轴为  $x = m - \frac{1}{2}$
3. 半正定性: 对  $l \neq j, \{\psi_{l,k}^m\}_{k \in \mathbb{Z}}$  与  $\{\psi_{j,k}^m\}_{k \in \mathbb{Z}}$  正交
4. 有  $m$  阶消失矩
5. 指数衰减特性: 存在  $C > 0, M > 0$ , 使  $|\psi_m(x)| \leq Me^{-C|x|}$

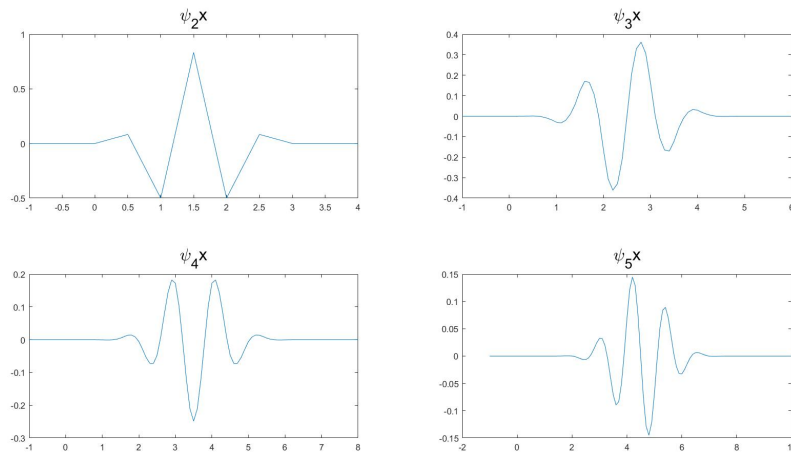


图 9.14  $m=2,3,4,5$  时的 B 样条小波

## §9.4 偏微分方程求解

第2章介绍过,傅里叶分析起源于使用三角级数解偏微分方程。更一般的,使用傅里叶变换解偏微分方程的方法称为傅里叶方法,又称分离变量法,在讨论波动方程时也叫驻波法。这种方法的思想来源于物理学的认识:机械振动或电磁振动总可以分解为具有各种频率和振幅的简谐振动的叠加,每个简谐振动具有形式 $e^{i\omega(t+cx)} = e^{i\omega t} e^{ikx}$ ,  $k = \omega c$ ,这就是物理上所谓的驻波。从数学角度看,驻波就是只含变量 $x$ 的函数和只含变量 $t$ 的函数的乘积,即可以变量分离。由此启发我们在解线性定解问题时,可以尝试先求处满足齐次方程和齐次边界条件的具有变量分离形式的解

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t), n = 1, 2, \dots$$

再将其叠加得到

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)T_n(t)$$

利用初始条件确定各项中的任意常数,使其成为方程的解。

下面以两段固定的弦的自由振动为例介绍分离变量法。此定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (9.6)$$

其中 $f, g$ 满足相容性条件:

$$f(0) = f(l) = 0, g(0) = g(l) = 0 \quad (9.7)$$

分离变量法的步骤如下:

1. 分离变量:先求方程仅满足齐次边界条件的形如

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$$

的解。代入方程并整理得到

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

因为左右两端是只关于一个变量的函数,因此,当且仅当它是常数时恒等式成立,记此常数为 $-\lambda$ ,得

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, & t > 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \end{cases}$$

为满足边界条件,只需求 $X(0) = X(l) = 0$ 即可。



2. 解特征值问题。求使两点边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (9.8)$$

有非零解的实数 $\lambda$ 的值及其解, 称这些 $\lambda$ 值为方程9.8的特征值。

(a) 当 $\lambda < 0$ 时, 方程通解为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

代入边界值得 $A = B = 0$ , 因此方程9.8只有零解,  $\lambda < 0$ 不是特征值。

(b) 当 $\lambda = 0$ 时, 方程为 $X''(x) = 0$ , 代入边界值得 $X(x) = 0$ ,  $\lambda = 0$ 也不是特征值。

(c) 当 $\lambda > 0$ 时, 记 $\lambda = k^2$ , 方程通解为

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx,$$

代入边界值得 $A = 0, B = \sin kl = 0$ , 为求非零解, 应有

$$k = \frac{n\pi}{l} \text{ 或 } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots \quad (9.9)$$

此即方程9.8的特征值, 相应非零解为

$$X_n(x) = B \sin \frac{n\pi}{l}x, n = 1, 2, \dots \quad (9.10)$$

其中 $B$ 是任意常数。将9.9代入方程9.8的第一个方程可得

$$T_n(t) = C'_n \sin \frac{an\pi}{l}t + D'_n \cos \frac{an\pi}{l}t, n = 1, 2, \dots$$

其中 $C'_n, D'_n$ 是任意常数。于是, 函数

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= (C_n \sin \frac{an\pi}{l}t + D_n \cos \frac{an\pi}{l}t) \sin \frac{n\pi}{l}x, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

满足问题9.6的方程和边界条件, 其中 $C_n, D_n$ 是任意常数, 留待确定。

3. 叠加所有 $u_n(x, t)$ 。为了获得满足问题9.6初始条件的解, 通过叠加原理, 令

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin \frac{an\pi}{l}t + D_n \cos \frac{an\pi}{l}t) \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (9.11)$$

如果级数9.11一致收敛且关于 $t$ 逐项积分后仍一致收敛,则由初始条件得

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x) \end{aligned}$$

由傅里叶级数理论可知,如果 $f, g$ 一阶连续且满足相容性条件9.7,则 $C_n, D_n$ 分别是 $f, g$ 在区间 $[0, l]$ 上的正弦级数的系数,即

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ D_n &= \frac{2}{an\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

至此,就获得了问题9.6的解。

通过以上分析得到的解叫做形式解,这是因为我们无法确定级数9.11的一致收敛性和逐项可微性。对实际的齐次问题, $f, g$ 需要满足一定的相容性条件以保证问题解的存在性和级数表示的正确性。除了齐次边界条件、任意初始条件的齐次问题,傅里叶方法还可以作用在有齐次边界条件、齐次初始条件的非齐次问题上,这个情况下傅里叶方法也叫特征函数法。对一般的初边值问题,可以设法将问题转化为拥有齐次边界条件的问题。具体的细节可以翻看傅里叶分析章节和相关偏微分方程教程。

## §9.5 小波与指纹识别

目前的人体特征中,指纹以其唯一、稳定、易采集等特性,使得指纹识别成为世界上使用最早、范围最广的生物鉴别技术。完整的自动指纹识别涉及传感器技术、数据库、数字图像处理、模式识别等多个领域,下面我们着重于小波对图像的处理过程,介绍小波的时频多分辨特性在指纹识别中的应用。

图9.15为自动指纹识别的原理框图,主要过程为采集图像,对图像进行预处理,再增强并提取有效特征,最终以大量特征建立数据库并用于实际的特征匹配。小波技术在预处理和图像特征提取过程均有应用。

### §9.5.1 指纹图像预处理

指纹图像在采集的时候通常会伴随不同的噪声,除了采集传感器的固有噪声,指纹过干、过湿、污渍等随机噪声也会造成低质量的指纹图像,因此需要对其进行预处理以放大纹理结构,突出并保留指纹特征。

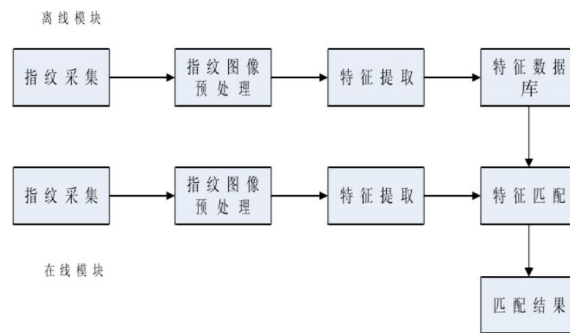


图 9.15 指纹识别原理

指纹图像预处理主要包括规格化、均衡化、图像增强、二值化、细化等常见过程。

1. 规格化的目的是将图像的对比度和灰度值校准到一个适宜的级别，常见的规格化处理是先计算整个图像的均值和方差，再依据期望的水平，压缩超过均值的点的灰度，放大低于均值的点的灰度。
2. 均衡化的目的是使图像的灰度均匀分布，因为指纹识别依靠的是指纹的结构特征，我们希望拉伸图像中灰度密集的程度来增强指纹纹理。最常用的均衡化方法是直方图均衡化，
3. 图像增强：指纹图像增强包括基于小波的图像去噪、基于小波的图像增强、自适应的空洞与毛刺处理等多个方面。

指纹去噪使用的小波分解层数为3 ~ 4层，避免图像失真的同时能保留约96%的能量，图像去噪部分提到多种阈值选择策略都可以被应用于实际的指纹图像去噪中，而阈值处理通常选择软阈值，以减少间断处的附加振荡；这里选择小波图像锐化来突出指纹的细节，通常可以对指纹图像进行分割以获得更局部的特征信息。

有些指纹识别算法还会在增强之前进行小波压缩，我们在小波在图像压缩中的应用章节里提到过，小波包的分解细节信息特性可以发挥巨大优势。

4. 二值化的目的是将灰度图的指纹图像变为只有黑白色的图像，在计算机中可以从256种灰度降为黑白两色，并将8bit图像转化成1bit图像。二值化过程通常与增强交替反复调用，其结果直接影响指纹识别的后续工作。
5. 细化的目的是将二值图像中粗细不均匀的纹线转为单像素线宽的条纹中心点线。细化后的指纹图像纹线连续，骨架简明突出。

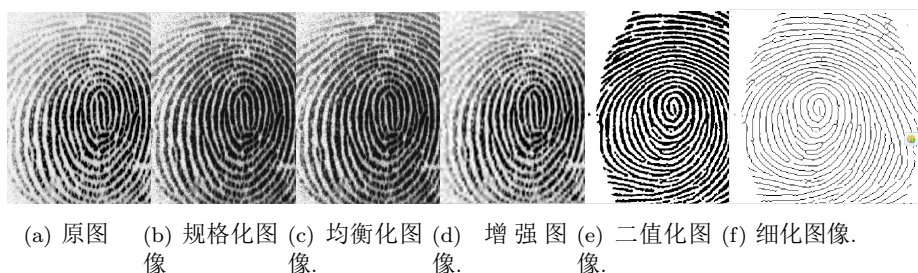


图 9.16 指纹图像的预处理

图9.16显示了一个完整的指纹图像预处理流程。小波在图像增强中扮演了举足轻重的角色，使得纹线中不必要的信息被极大删减。图9.17显示了对过湿、过干的低质量图像，使用不同小波增强中心区域的效果。

### §9.5.2 指纹图像的特征提取

指纹的特征是区别不同人指纹相似度的关键。一张指纹图像同时保留总体特征和局部特征。能够使用肉眼直接观察到的特征称为总体特征，例如纹型、核心点、三角点、纹数。图像上节点的特征被称为局部特征，又被称为特征点，主要是纹线方向、曲率剧烈变化的位置，包括脊端点、分叉点、分歧点、孤立点、环点、短纹。

使用小波进行特征提取的过程需要先对指纹进行分割，因为指纹的中心区域比边缘的质量要好得多。确定了中心的正方形区域后，通常有两种提取的策略：

#### 1. 离散小波变换提取特征值：

对需要处理的图像在两个方向分别进行离散小波变换 (DWT)，将最终的结果视为该指纹的特征值。例如一张 $256 \times 256$ 的指纹图像，先对行向量作DWT，得到 $256 \times 1$ 的向量，再对列向量作DWT得到 $4 \times 1$ 的向量，这最终的4个值就可以视为该指纹的特征。

这种做法的好处是算法简单，可以根据需要调整分辨率（调整小波系数所经过低通滤波器的参数），最终的结果数据量小，且适合通过编码存储模板存储于各类传感器中，实际应用中这类模板的大小甚至不到1K字节。

#### 2. 离散小波变换提取特征向量：

我们知道对图像进行二维的小波分解会得到低频与高频分离的子图像，高频子图就蕴含了分辨所需的细节信息。对一张指纹图像进行二维分解后，将任一张高频子图的标准差视为这张子图的特征值，再把所有子图的特征值依序组成一个向量，称为该指纹的特征向量，也可以叫做特征码。有些应用中还会



图 9.17 低质量指纹图像中心区域的增强效果

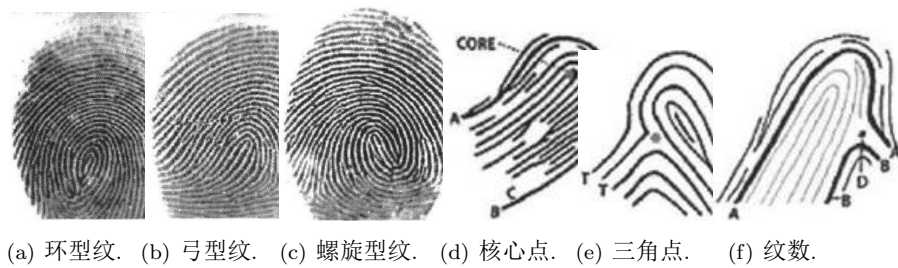


图 9.18 指纹的总体特征



图 9.19 指纹的局部特征

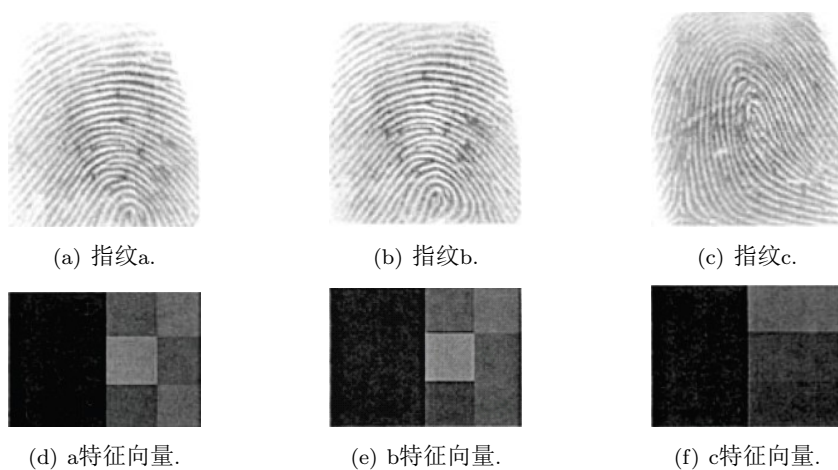


图 9.20 指纹的总体特征

处理低频子图的信息来加快识别效率。图9.20显示了对指纹图像进行4层小波变换得到的12个高频子图组成的特征向量。

这种做法的好处是结果对指纹图像很敏感，即便是同类指纹图像也有很高的辨识度，不同类指纹间的差异巨大，适合精细的指纹识别。

经过特征提取后的指纹图像，将以其特征进入数据库，或是进行实际的特征匹配。目前有大量不同的特征匹配算法，例如传统的基于范数距离的比较，还有近年来基于神经网络的灵敏度动态选择。

**作业 9.1** 1. 实现文中给出的算法；

2. 证明样条小波定理9.1中的性质；

3. 证明样条小波定理9.2中的性质；

## 参考文献

- [1] 吴军, 数学之美, 北京: 人民邮电出版社, 2012.
- [2] 潘文杰, 傅里叶分析及其应用, 北京大学出版社, 2000.
- [3] H. Hassanieh, P. Indyk, D. Katabi, et al., Simple and practical algorithm for sparse fourier transform, Proceedings of the Twenty-Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (2012) 1183–1194.
- [4] G. Strang, Wavelet transforms versus fourier transforms, Bull. Amer. Math. Soc. 28(2) (1993) 288–305.
- [5] Y. T. Chan, Wavelet Basics, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [6] G. Strang, Wavelets, American Scientist 82 (1994) 250–255.
- [7] 刘明才, 小波分析及其应用, 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [8] 邸继征, 小波分析原理, 北京: 科学出版社, 2010.
- [9] L. G. Weiss, Wavelets and wideband correlation processing, IEEE Transactions on Signal Processing 42 (1994) 13–32.
- [10] M. Vetterli, C. Herley, Wavelets and filter banks: Theory and design, IEEE Transactions on Signal Processing 40 (1992) 2207–2232.
- [11] M. Vetterli, J. Kovacevic, Wavelets and Subband Coding, Prentice-Hall, New Jersey, 1995.
- [12] D. Newland, An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis, New York, John Wiley, 1993.
- [13] O. Rioul, M. Vetterli, Wavelets and signal processing, IEEE Signal Processing Magazine (1991) 14–38.
- [14] Farge, Marie, Wavelet transforms and their application to turbulence, Ann. Rev. Fluid Mech. 24 (1989) 395–457.
- [15] F. e. a. Argoul, Wavelet analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the richardson cascade, Nature 338 (1989) 51–53.
- [16] . Daubechies, 小波十讲, 国防工业出版社, 2011.
- [17] Y. Meyer, Wavelets: Algorithms and Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.

- [18] S. G. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 2(7) (1989) 674–693.
- [19] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* 41 (1988) 906–966.
- [20] S. W., The lifting scheme: A custom-design construction of bi-orthogonal wavelets, *Appl. Comput. Harmon. Anal* 3(2) (1996) 186–200.
- [21] S. W., The lifting scheme: A custom-design construction of second generation wavelets, *SIAM J. Math. Anal.* 29(2) (1997) 511–546.
- [22] M. Bertram, M. A. Duchaineau, B. Hamann, K. I. Joy, Generalized b-spline subdivision-surface wavelets for geometry compression, *IEEE transactions on Visualization and Computer Graphics* 10(3) (2004) 326–338.
- [23] M. Bertram, Biorthogonal loop subdivision wavelets, *Computing* 72(1,2) (2004) 29–39.
- [24] W. Victor, *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*, AK Peters, Boston, 1994.
- [25] G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhauser, Boston, 1994.
- [26] Y. R. K. Young, *Wavelet Theory and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [27] 周伟, 基于MATLAB的小波分析应用, 西安: 西安电子科技大学出版社, 2010.
- [28] 飞思科技产品研发中心, *MATLAB 6.5辅助小波分析与应用*, 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [29] 高成, *Matlab小波分析与应用*, 北京: 国防工业出版社, 2007.
- [30] 方清城, *MATLAB R2016a小波分析22个算法实现*, 北京: 电子工业出版社, 2018.
- [31] 黄勇兴, *基于小波变换的指纹识别算法研究*, 江西:南昌航空大学, 2012.