Homework 1 答案

1.11 问题: 设 $e_1, \ldots, e_n$ 是 n 维内积空间 V 的一组向量, 证明下面的条件等价：

- $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基.
- 对任意的 $\alpha, \beta \in V$,
$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha, e_i \rangle \langle e_i, \beta \rangle .$$
- 对任意的 $\alpha \in V$,
$$\|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \alpha, e_i \rangle|^2 .$$

解: 1) ⇒ 2)

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\langle \alpha, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_i \right\rangle = \alpha_i, \quad \langle e_i, \beta \rangle = \bar{\beta}_i$$

代入 1 即可。

2) ⇒ 3)

$$\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha, e_i \rangle \langle e_i, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle \alpha, e_i \rangle|^2$$

3) ⇒ 1)

法一：设 V 的一组正交基为 $\{v_n\}$,α 在 $\{v_n\}$ 下的坐标为 $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，$e_1, e_2, \ldots, e_n$ 在 $\{v_n\}$ 下的坐标为 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$。记

$$P = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

则 $||a||^2 = X^T X$，$<\alpha, e_i> = Y_i^T X$，进而有

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle \alpha, e_i \rangle|^2 = \|P^T X\|^2 = X^T P P^T X$$

对任意的 $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ 成立，从而 $PP^T = P^T P = I_n$，即 $<e_i, e_j> = \delta_{ij}$.

法二：令 $\alpha = e_j$，有

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle e_j, e_i \rangle|^2 \geq \|e_j\|^4 \Rightarrow \|e_j\| \leq 1 \tag{2}$$

取 $f_j \in \operatorname{span}\langle e_1, e_2, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n \rangle^{\perp}$ 并且 $||f_j|| = 1$ 则

$$1 = \|f_j\|^2 = |\langle f_j, e_j \rangle|^2 \leq \|f_j\|^2 \|e_j\| \Rightarrow \|e_j\|^2 \geq 1 \tag{3}$$

故由 2, 3可得 $||e_i|| = 1$ 并且根据 2可得 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

1.14 问题: 利用 Gram-Schmidt 正交化方法求由 $\{1, x, x^2\}$ 张成的 $L^2[0,1]$ 的子空间的标准正交基.

解:

$$\begin{aligned}
e_1 &= 1 \\
e_2 &= 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
e_3 &= 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

2.8 问题: 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有界可积, 其傅里叶级数的系数为 a_n, b_n, 则级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

收敛, 且

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \mathrm{d}x$$

解: 设 $s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$，则

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n)^2\,dx \\
=&\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^2-2fs_n+s_n^2\right)dx \\
=&\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx-2\int_{-\pi}^{\pi}fs_ndx+\int_{-\pi}^{\pi}s_n^2dx \\
=&\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx-\left(a_0\int_{-\pi}^{\pi}fdx+2\sum_{k=1}^{n}a_k\int_{-\pi}^{\pi}f\cos kxdx+2\sum_{k=1}^{n}b_k\int_{-\pi}^{\pi}f\sin kxdx\right) \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)^2dx \\
=&\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx-\left(\pi a_0^2+2\pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)+\left(\frac{a_0^2}{2}\pi+\sum_{k=1}^{n}\lambda\left(a_k^2+b_k^2\right)\right) \\
=&\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx-\left(\frac{a_0^2}{2}\pi+\sum_{k=1}^{n}\lambda\left(a_k^2+b_k^2\right)\right) \\
\geq&0.
\end{aligned}
$$

由最后两行有

$$\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx$$

左侧单调增且上有界，因此收敛并满足不等式关系.

2.9 问题: 证明

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\ \mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

并利用它证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

解:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}$$

$$\text{原式}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\cos kt\ dt+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \\
=&\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt + \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt \\
=&I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ 在 $(0,\pi)$ 可积且绝对可积，由 Riemman 引理 $I_2 \to 0\,(n\to\infty)$

$$
\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dt
$$

2.10 问题: 证明

$$
\int_0^\pi \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \mathrm{d}t = n\pi.
$$

解:

$$
\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2
$$

因此有

$$
\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt = n\pi
$$

3.1 问题: 把定义在区间 $[-2,2]$ 上的方波函数

$$
f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}
$$

看成区间 $[-2,2]$ 上的周期为 4 的函数, 试计算其傅里叶级数的系数.

解:

$$
\alpha_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)e^{-ik\pi t/2}dx = \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-ik\pi t/2}dt = \frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{k\pi}
$$

3.2 问题: 试证明如果 $f \in L^1(\mathbf{R})$, 则 $\hat{f}(\lambda)$ 是 λ 的连续函数; 如果 $\hat{f}(\lambda) \in L^1(\mathbf{R})$, 则 $f(x)$ 连续.

解: $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in L^1$

$$\begin{aligned} I = \left|\hat{f}(\lambda+h) - \hat{f}(\lambda)\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(e^{-i(\lambda+h)x} - e^{-i\lambda x}\right)dx\right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\left|\left(e^{-i(\lambda+h)x} - e^{-i\lambda x}\right)\right|dx \end{aligned}$$

由于 $f \in L^1$, 因此存在 $A > 0$, 使得 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>A}|f|\,dx < \frac{\epsilon}{4}$. 记 $M = \frac{||f||_\infty}{\sqrt{2\pi}} > 0$, 由

$$\left|e^{-ihx} - 1\right| = 2\left|\sin\frac{hx}{2}\right|$$

知存在 δ, 当 $h < \delta$ 时, 对 $|x| < A$, 有

$$|e^{-ihx} - 1| < \frac{\epsilon}{4AM}.$$

因此, 对任意的 ϵ, 当 $h < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|<A}|f|\left|e^{-ihx} - 1\right|dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>A}|f|\left|e^{-ihx} - 1\right|dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||f||_\infty\frac{\epsilon}{4AM}2A + 2\frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

反之亦然.

3.4 利用例 3.8 的结果证明:

$$g_\epsilon(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\lambda}\mathrm{e}^{\frac{-\epsilon^2\lambda^2}{4}}\ \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{\epsilon^2}}$$

解: 例 3.8 $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$. 取 $a = \frac{1}{\epsilon^2}$, 则有

$$\mathcal{F}^{-1}(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}e^{\frac{-\epsilon^2\lambda^2}{4}})(u) = \frac{\epsilon}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda}e^{\frac{-\epsilon^2\lambda^2}{4}}d\lambda = e^{-\frac{u^2}{\epsilon^2}}.$$

比较系数即证.

3.5 证明对任意的 $\epsilon > 0, \int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(t)\mathrm{d}t = 1$.

解:

$$\int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\epsilon^2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\frac{t}{\epsilon})^2} d(\frac{t}{\epsilon}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = 1$$

3.6 证明: 如果 $\hat{f}(\lambda)$ 是可导的, 且 $\hat{f}(\lambda) = \hat{f}'(\lambda) = 0$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = 0.$$

解:

$$\hat{f}(0) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$$

$$\mathcal{F}(xf(x))(\lambda) = i\mathcal{F}(f)'(\lambda)$$

$$\hat{f}'(0) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0.$$

Homework 2 答案

3.7 问题: 证明 $f(x)=e^{(-a+ib)x^2}$ 的傅里叶变换为

$$\hat{f}(\lambda)=\sqrt{\frac{1}{2(a-ib)}}e^{-\frac{a+ib}{4(a^2+b^2)}\lambda^2}$$

解: 例 3.8 中取 $\alpha=a-ib$, 则有

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2(a-ib)}}e^{-\frac{a+ib}{a^2+b^2}\lambda^2}$$

3.8 问题: 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\beta^2}}\ \mathrm{d}t=1,\quad \beta>0.$$

解:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\beta^2}}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=1$$

3.9 问题: 计算 $f(t)=\frac{4\sin t-4t\cos t}{t^3}$ 的傅里叶变换.

解: 由例 3.6 知

$$g(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\in[-1,1],\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的傅里叶变换为

$$\hat{g}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4\sin\lambda-4\lambda\cos\lambda}{\lambda^3}$$

同时易知 $\hat{g}(\lambda)\in L^1$, 因此有

$$\hat{f}(\lambda)=g(-\lambda)=\begin{cases}\sqrt{2\pi}(1-\lambda^2), & \lambda\in[-1,1],\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

3.11 问题: 设 $f(t)=\frac{\sin at}{\pi t}, g(t)=\frac{\sin bt}{\pi t}, a,b>0$, 求 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积

解: 记

$$\chi_{(-a,a)}=\begin{cases}1, & -a\leq x\leq a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则有

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{(-a,a)},\quad \hat{g}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{(-b,b)}.$$

令 $c=\min\{a,b\}$, 则

$$\mathscr{F}[f*g]=\sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{(-c,c)}.$$

$$f*g=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{(-c,c)}\right]=\frac{\sin ct}{\pi t}.$$

3.13 问题: 设 $f(x)\in L^1(R)$ 且 $(f*f)(x)=f(x)$, 证明 $f(x)=0$。

解:

$$\mathscr{F}[f(x)](\lambda)=\mathscr{F}[(f*f)(x)](\lambda)=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}[f(x)]^2(\lambda)$$

则有 $\hat{f}(\lambda)\equiv 0$或$\hat{f}(\lambda)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. 而 $f(x)\in L^1(R)$ 可知 $\lim_{\lambda\to+\infty}\hat{f}(\lambda)=0$ 因此 $\hat{f}(x)\equiv 0$, 即 $f(x)\equiv 0$.

3.16 问题: 利用 Parseval 等式证明下面的等式:

(a)

$$\int_R\frac{\sin at\sin bt}{t^2}dt=\pi\min(a,b)$$

(b)

$$\int_R\frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}dt=\frac{\pi}{a+b}$$

解:

(a) 记 $f_a(t)=\frac{\sin at}{t}$, 有 $\hat{f}_a=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{(-a,a)}$, 同理 $\hat{f}_b=\frac{\pi}{2}\chi_{(-b,b)}$. 令 $c=min\{a,b\}$.

$$<f_a,f_b>=<\hat{f}_a,\hat{f}_b>=\int_{-c}^{c}\frac{\pi}{2}d\lambda=\pi c$$

(b) 记 $f_a(t)=\frac{t}{t^2+a^2}$, 有 $\hat{f}_a(\lambda)=-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|\lambda|}\operatorname{sgn}(\lambda)$, 进而

$$<f_a,f_b>=<\hat{f}_a,\hat{f}_b>=\frac{\pi}{2}2\int_0^\infty e^{-(a+b)\lambda}d\lambda=\frac{\pi}{a+b}$$

3.18 问题: 证明函数 $\varphi(x,a,b)=\begin{cases} e^{-\frac{b^2}{a^2-x^2}}, & |x|<a; \\ 0, & |x|\ge a. \end{cases}$ 属于基本函数空间 D

解: 证明 $\varphi(x,a,b)\in C^\infty$

(1) $|x|>a$时, $\varphi^{(n)}\equiv 0.$

(2) $|x|<a$ 时, 由归纳法可知

$$\varphi^{(n)}=\exp\left(-\frac{b^2}{a^2-x^2}\right)\cdot\frac{P_n(x)}{(a^2-x^2)^{2^n}}\in C^\infty(0,a)$$

其中 $P_n(x)$ 是关于 x 的多项式且 $deg(P_n)<2^{n+1}$.

(3)

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=0$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{1}{x-a}\exp\{-\frac{b^2}{a^2-x^2}\}=\lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u}e^{\frac{b}{2au+u^2}}=0$$

$\Rightarrow \varphi^{(1)}(a^+)=\varphi^{(1)}(a^-)$

现假设结论对 $\le n$ 情形成立, 一方面有 $\varphi^{(n+1)}(a^+)=0$, 另一方面

$$\lim_{x\to a^-}\frac{\varphi^{(n)}(x)-\varphi^{(n)}(a)}{x-a}x=\lim_{x\to a^-}\frac{\exp\{-\frac{b^2}{a^2-x^2}\}P_n(x)}{(x-a)\left(a^2-x^2\right)^{2^n}}=\lim_{u\to 0^-}\frac{P_n(a)\exp\{\frac{b^2}{u^2+2au}\}}{(2a)^{2^n}\cdot u^{2^n+1}}=0$$

因此有 $\varphi^{(n+1)}(a^+)=\varphi^{(n+1)}(a^-)$.

Homework 3 答案

3.14 问题: 设 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$ 且 $(f * f)(x) = 0$, 证明 $f(x) = 0$.

解:

$$\mathcal{F}((f * f)(x))(\lambda) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f(x))^2(\lambda) = 0 \Rightarrow \hat{f}(\lambda) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

3.15 问题: 对于 $0 \leqslant n < N$, 假设 $f_n(t)$ 为实函数, 且当 $|\lambda| > \lambda_0$ 时, $\widehat{f}_n(\lambda) = 0$. 假设一个信号的定义如下:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(t) \cos 2n\lambda_0 t,$$

试计算 $g(t)$ 的傅里叶变换, 证明其支集宽度为 $4N\lambda_0$ 并设计算法由 g 恢复 f_n.

解:

$$g(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} f_n(t)(e^{i2n\lambda_0 t} + e^{-i2n\lambda_0 t})$$

$$\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\hat{f}_n(\lambda - 2n\lambda_0) + \hat{f}_n(\lambda + 2n\lambda_0)\Big)$$

由 $\hat{f}_n(\lambda)$ 的支集性质可以知道 $\hat{g}(\lambda)$ 仅在 $[-(2N-1)\lambda_0, (2N-1)\lambda_0]$ 内非零.

同时有 $\hat{f}_n(\lambda - 2n\lambda_0) = \hat{g}\chi_{((2n-1)\lambda_0,(2n+1)\lambda_0)}$, 即 $\hat{f}_n(\lambda) = \hat{g}(\lambda + 2n\lambda_0)\chi_{(-\lambda_0,\lambda_0)}$, 从而有

$$f_n(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}(\lambda + 2n\lambda_0)\chi_{(-\lambda_0,\lambda_0)})(t).$$

3.20 问题: 证明对任意的 $\varphi \in D$, 有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_R \varphi(x+t)\frac{\sin jt}{t}dt = \varphi(x)$$

解：对 $\forall j$, 有$\frac{1}{\pi}\int_R \frac{\sin jt}{t}=1$, 则 $\frac{1}{\pi}\int_R \varphi(x)\frac{\sin jt}{t}dt=\varphi(x)$. 由于 $\varphi\in D$, 对任意的 x, 存在 T 使得 $supp(\varphi(\cdot)), supp(\varphi(\cdot+x))\subset[-T,T]$, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\frac{\sin jt}{t}-\varphi(x)\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\frac{\sin jt}{t}t-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\sin jt}{t}dt\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}sinjtdt\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}\sin jtdt
\end{aligned}$$

根据 $\varphi\in D$，上式中 $\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$ 在 $[-T,T]$ 绝对可积，由 Riemman 引理知 $j\to\infty$ 时上式积分为 0.

3.22 问题: 证明: (a) $e^x\delta=\delta$ (b) $x\delta'=-\delta$; (c) $(\sin ax)\delta'=-a\delta$

解:

(a) $(e^x\delta,\varphi)=(\delta,e^x\varphi)=e^0\varphi(0)=(\delta,\varphi)$

(b) $(x\delta',\varphi)=(\delta',x\varphi)=-(\delta,\varphi+x\varphi')=-\varphi(0)=(-\delta,\varphi)$

(c) $((\sin ax)\delta',\varphi)=(\delta',(\sin ax)\varphi)=-(\delta,a(\cos ax)\varphi+(\sin ax)\varphi')=-a\varphi(0)=(-a\delta,\varphi)$

补充 1:

$$F_n=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&\omega_n&\omega_n^2&\cdots&\omega_n^{n-1}\\1&\omega_n^2&\omega_n^4&\cdots&\omega_n^{2(n-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\omega_n^{n-1}&\omega_n^{2(n-1)}&\cdots&\omega_n^{(n-1)^2}\end{pmatrix}$$

证明 $\frac{1}{n}F_n\bar{F_n}=I_n$.

解:

$$(F_n\bar{F}_n)_{ij}=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{(i-1)k}\bar{\omega}_n^{(j-1)k}=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{(i-j)k}$$

当 $i=j$ 易得 $(F_n\bar{F}_n)_{ii}=\sum_{k=0}^{n-1}w_n^0=n$.

当 $i\neq j$ 有

$$(F_n\bar{F}_n)_{ii}=\frac{1-\omega_n^{(i-j)n}}{1-\omega_n^{(i-j)}}=\frac{1-(\omega_n^n)^{(i-j)}}{1-\omega_n^{(i-j)}}=0.$$

补充 2: 性质 8: 假设 $y=\{y_k\}\in\mathbb{S}_n$, 则

$$n\sum_{k=0}^{n-1}|y_k|^2=\sum_{j=0}^{n-1}|\mathfrak{F}[y]_j|^2$$

解:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}|\mathfrak{F}[y]_j|^2\\
=&\sum_{j=0}^{n-1}(\sum_{s=0}^{n-1}y_s\bar{\omega}_n^{sj}\sum_{t=0}^{n-1}\bar{y}_t\omega_n^{tj})\\
=&\sum_{s,t=0}^{n-1}y_s\bar{y}_t\sum_{j=0}^{n-1}\bar{\omega}_n^{(s-t)j}(t\neq s\text{为 }0)\\
=&n\sum_{t=0}^{n-1}|y_t|^2
\end{aligned}$$

引理 4.1: 略

Homework 4 答案

4.3 计算高斯型函数 $g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ 的中心和半径.

解:

$$t^* = \frac{1}{||g_\alpha||_{L^2}^2}\int_{\mathbb{R}} t|g_\alpha(t)|^2 dx = \sqrt{8\pi\alpha}\int_{\mathbb{R}} t\frac{1}{4\pi\alpha}e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}dx = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta_g &= \frac{1}{||g||_{L^2}}\left(\int_{\mathbb{R}}(t-t^*)^2|g_\alpha(t)|^2 dt\right)^{1/2}\\ &= \sqrt[4]{8\pi\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}} t^2\frac{1}{4\pi\alpha}e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}dt\right)^{1/2}\\ &= \sqrt[4]{8\pi\alpha}\left(-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} t d e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}\right)^{1/2}\\ &= \sqrt[4]{8\pi\alpha}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}dt\right)^{1/2}\\ &= \sqrt[4]{8\pi\alpha}\left(\frac{1}{4\pi}\sqrt{2\alpha}\sqrt{\pi}\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{\alpha}\end{aligned}$$

4.4 证明 Morlet 小波 $\psi(t) = e^{i\lambda_0 t}e^{-\frac{t^2}{2}}$ 不满足基小波条件, 但是改进的 Morlet 小波 $\psi(t) = \left(e^{i\lambda_0 t} - e^{-\frac{\lambda_0^2}{2}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}$ 满足基小波条件。

解: 对于 $\psi(t) = e^{i\lambda_0 t}e^{-\frac{t^2}{2}}$, 知 $\hat{\psi}(\lambda) = e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2}}$, 由于 $\hat{\psi}(0) \neq 0$ 知不满足基小波条件。

对于 $\psi(t) = \left(e^{i\lambda_0 t} - e^{-\frac{\lambda_0^2}{2}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}$, 有 $\hat{\psi}(\lambda) == e^{-\frac{\lambda^2+\lambda_0^2}{2}}\left(e^{\lambda\lambda_0}-1\right)$ 则需要证明:1.$\psi \in L^2$, 2. $C_\psi < \infty$.

1. $||\psi(t)||_{L^2} \le ||e^{i\lambda_0 t}e^{-\frac{t^2}{2}}||_{L^2} + ||e^{-\frac{\lambda_0^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}||_{L^2} = (1+||e^{-\frac{\lambda_0^2}{2}}||)||e^{-\frac{t^2}{2}}||_{L^2}$, 因此 $\psi \in L^2$.

2. 由于 $\lim_{\lambda\to 0}\frac{|e^{\lambda\lambda_0}-1|^2}{|\lambda|}=0$, 即有 $\lim_{\lambda\to 0}\frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|}=0$, 不妨假设 $\lambda_0>0$, 注意到 $\lambda>0$

$$\frac{|e^{-\frac{\lambda^2+\lambda_0^2}{2}}(e^{\lambda\lambda_0}-1)|^2}{|\lambda|}<\frac{|e^{-(\lambda^2+\lambda_0^2)}(e^{2\lambda\lambda_0})|}{|\lambda|}=\frac{1}{|\lambda|e^{(\lambda-\lambda_0)^2}}$$

而 $\lambda<0$ 时则有

$$\frac{|e^{-\frac{\lambda^2+\lambda_0^2}{2}}(e^{\lambda\lambda_0}-1)|^2}{|\lambda|}<\frac{|e^{-(\lambda^2+\lambda_0^2)}|}{|\lambda|}=\frac{1}{|\lambda|e^{\lambda^2+\lambda_0^2}}$$

因此有任取 $M>0$ 有

$$\begin{aligned}C_\psi =&2\pi\int_R\frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|}d\lambda\\ <&2\pi\left(\int_{\lambda<-M}\frac{1}{|\lambda|e^{\lambda^2+\lambda_0^2}}d\lambda+\int_{\lambda>M}\frac{1}{|\lambda|e^{(\lambda-\lambda_0)^2}}d\lambda+\int_{|\lambda|<M}e^{-\lambda^2+\lambda_0^2}\frac{|e^{\lambda\lambda_0}-1|^2}{|\lambda|}d\lambda\right)\\ <&\infty\end{aligned}$$

4.5 证明高斯小波 $\psi(t)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ 满足基小波条件.

解: 易知 $||\psi(t)||_{L^2}<\infty$.

$$\hat{\psi}(\lambda)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}C_\psi =&2\pi\int_R\frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|}d\lambda\\ =&\int_R|\lambda|e^{-\lambda^2}d\lambda<\infty\end{aligned}$$

4.8 证明如果 $K\in Z-\{0\}$, 则 $\left\{\phi_k[n]=e^{\frac{i2\pi kn}{KN}}\right\}_{1\leq k\leq KN}$ 是 C^N 的紧框架, 并计算框架界。

解: 记 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{KN}}, f = (f_1, \ldots, f_N)$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{KN} | < f, \phi_k > |^2 \\
=&\sum_{k=1}^{KN} | \sum_{n=1}^{N} f_n \bar{\omega}^{kn} |^2 \\
=&\sum_{k=1}^{KN} (\sum_{m=1}^{N} f_m \bar{\omega}^{km})(\sum_{n=1}^{N} \bar{f}_n \omega^{kn}) \\
=&\sum_{k=1}^{KN} \sum_{m,n=1}^{N} f_m \bar{f}_n \omega^{k(n-m)} \\
=&\sum_{m,n=1}^{N} f_m \bar{f}_n \sum_{k=1}^{KN} \omega^{k(n-m)} (n \neq m \text{时} \sum_{k=1}^{KN} \omega^{k(n-m)} = 0) \\
=&KN \sum_{n} |f_n|^2 \\
=&KN ||f||^2
\end{aligned}
$$

即框架界为 KN

4.9 证明有限个向量组成的集合一定是这些向量张成的线性空间的一个框架.

解: 记 $V_n = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, 对任意的 $v \in V_n$, $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$, 一方面有

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle v, v_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} ||v||^2 ||v_j||^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} ||v_j||^2 \right) ||v||^2 = B||v||^2.$$

另一方面, 假设不存在 $A > 0$, 使得 $\sum_{j=1}^{n} |\langle v, v_j \rangle|^2 \geq A||v||^2$ 对任意的 $v \in V_n$ 成立. 则对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 存在 $v^k \in V_n$, $||v^k|| = 1$, 有 $\sum_{j=1}^{n} \left|\langle v^k, v_j \rangle\right|^2 < \frac{1}{k}$. 由有限维空间单位球列紧可知存在 $\{k_i\}$ 子列, $\{v^{k_i}\}$ 收敛到 v, 且 $||v|| = 1$.

由

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \left|\langle v, v_j\rangle\right|^2 \\
=&\sum_{j=1}^{n} \left|\left\langle v - v^{k_i}, v_j\right\rangle + \left\langle v^{k_i}, v_j\right\rangle\right|^2 \\
\leq&2\left(\sum_{j=1}^{n} \left|\left\langle v - v^{k_i}, v_j\right\rangle\right|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left|\left\langle v^{k_i}, v_j\right\rangle\right|^2\right) \\
<&2||v - v^{k_i}||(\sum_{j=1}^{n} ||v_j||^2) + \frac{1}{k_i} \to 0 (i \to \infty)
\end{aligned}$$

因此有

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\langle v, v_j\rangle\right|^2 = 0 \Rightarrow v = 0.$$

与 $||v|| = 1$ 矛盾.

另: 定义 $||v|| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|\langle v, v_j\rangle\right|^2}$, 易证 $||\cdot||$ 为一范数, 利用有限维空间范数等价性同样可证结论成立.

4.12 证明: 如果 $f = \sum \langle f, \phi_j\rangle u_j$, 其中 $\{u_j\}$ 不完全等于 $\widetilde{\phi}_j$, 则

$$\sum |\langle f, u_j\rangle|^2 \geqslant \sum \left|\left\langle f, \widetilde{\phi}_j\right\rangle\right|^2.$$

解:$f = \sum\langle f, \phi_j\rangle u_j$, 记 $u_j = \widetilde{\phi_j} + \delta_j$, 则我们有

$$T^{-1}f = \sum_j \langle T^{-1}f, \phi_j\rangle u_j = \sum_j \langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle u_j$$

则有 $\langle f, T^{-1}f\rangle = \sum_j \overline{\langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle}\langle f, u_j\rangle$, 又由定理 4.12

$$T^{-1}f = \sum_j \langle T^{-1}f, \phi_j\rangle \widetilde{\phi}_j = \sum_j \langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle \widetilde{\phi}_j$$

即有 $\langle f, T^{-1}f\rangle = \sum_j \overline{\langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle}\langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle$, 相减得到

$$0 = \sum_j \overline{\langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle}\langle f, \delta_j\rangle$$

因此 $\sum_j |\langle f, u_j\rangle|^2 = \sum_j |\langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle|^2 + \sum_j |\langle f, \delta_j\rangle|^2 \geq \sum_j |\langle f, \widetilde{\phi}_j\rangle|^2$.

Homework 5 答案

5.4. 设 f 是一个连续可微的函数, 对于 $0 \le x < 1$ 有 $|f'(x)| \le M$. 用下面 (1) 中的阶梯函数一致地逼近 f, 误差是 ϵ. 该阶梯函数属于由 $\phi(2^j x - k)$ 张成的空间 V_j, 其中 ϕ 是 Haar 尺度函数.

(a) 对 $0 \le j \le 2^n - 1$, 令 $a_j = f\left(\frac{j}{2^n}\right)$, 则 $f_n(x) = \sum_{k \in Z} a_k \phi(2^n x - k)$

(b) 证明如果 n 远远大于 $\log_2\left(\frac{M}{\epsilon}\right)$, 则 $|f(x) - f_n(x)| \le \epsilon$

解: 对于 $\forall x \in [0,1)$, 存在 $0 \le k \le 2^n - 1$, 使得 $\frac{k}{2^n} \le x < \frac{k+1}{2^n}$, 设 $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$, 则我们有 $f_n(x) = f(\frac{k}{2^n})\phi(2^n x - k) = f(\frac{k}{2^n})$

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(\frac{k}{2^n})| = |\int_{\frac{k}{2^n}}^{x} f'(x)dx| \le M|x - \frac{k}{2^n}| \le \frac{M}{2^n}$$

因此当 n 大于 $\log_2(\frac{M}{\epsilon})$, 对 $\forall x \in [0,1)$, 有 $|f(x) - f_n(x)| \le \epsilon$.

5.5 完成引理 5.4 的证明:

1. $G(\lambda) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}\overline{H(\lambda+\pi)}$;
2. $|G(\lambda)|^2 + |G(\lambda+\pi)|^2 = 1$;
3. $H(\lambda)\overline{G(\lambda)} + H(\lambda+\pi)\overline{G(\lambda+\pi)} = 0$.

解: 1.

$$\begin{aligned}G(\lambda) &= \frac{1}{2}\sum_{k\in Z} g_k e^{-ik\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\in Z}(-1)^k \bar{h}_{1-k} e^{-ik\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\in Z}(-1)^{1-k}\bar{h}_k e^{-i(1-k)\lambda} \\ &= -e^{-i\lambda}\frac{1}{2}\sum_{k\in Z}(-1)^k \bar{h}_k e^{ik\lambda} \\ &= -e^{-i\lambda}\frac{1}{2}\sum_{k\in Z}\bar{h}_k e^{ik\lambda+ik\pi} \\ &= -e^{-i\lambda}\overline{H(\lambda+\pi)}\end{aligned}$$

2. 由 1

$$|G(\lambda)|^2+|G(\lambda+\pi)|^2=|H(\lambda+\pi)|^2+|H(\lambda+2\pi)|^2=1$$

3.

$$\begin{aligned}&H(\lambda)\overline{G(\lambda)}+H(\lambda+\pi)\overline{G(\lambda+\pi)} \\ =&H(\lambda)(-e^{i\lambda})H(\lambda+\pi)+H(\lambda+\pi)e^{i\lambda}H(\lambda+2\pi)=0\end{aligned}$$

5.7 证明例 5.6 中的多项式满足定理 5.6 的所有要求.

解: 定理 5.6 要求多项式 $P(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k z^k$ 满足

1. $P(1)=1$;
2. $|P(z)|^2+|P(-z)|^2=1, |z|=1$;
3. $|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|>0, |t|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

例 5.6:$h_0=\frac{1+\sqrt{3}}{4}, h_1=\frac{3+\sqrt{3}}{4}, h_2=\frac{3-\sqrt{3}}{4}, h_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$, $P(z)=\frac{1}{2}(h_0+h_1z+h_2z^2+h_3z^3)$.

易计算得到 $P(1)=\frac{1}{2}(h_0+h_1+h_2+h_3)=1$. 同时记

$$\begin{aligned}P(z)&=\frac{1}{2}(h_0+h_2z^2)+z(h_1+h_3z^2) \\ P(-z)&=\frac{1}{2}(h_0+h_2z^2)-z(h_1+h_3z^2)\end{aligned}$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
&|P(z)|^2+|P(-z)|^2\\
=&\frac{1}{4}\left[\left(h_0+h_2z^2\right)+z(h_1+h_3z^2)\right)\left(\left(\bar{h}_0+\bar{h}_2\bar{z}^2\right)+\bar{z}(\bar{h}_1+\bar{h}_3\bar{z}^2)\right]\\
+&\frac{1}{4}\left[\left(h_0+h_2z^2\right)-z(h_1+h_3z^2)\right)\left(\left(\bar{h}_0+\bar{h}_2\bar{z}^2\right)-\bar{z}(\bar{h}_1+\bar{h}_3\bar{z}^2)\right]\\
=&\frac{1}{2}|h_0+h_2z^2|^2+\frac{1}{2}|h_1+h_3z^2|^2\\
=&\frac{1}{2}\left(h_0^2+h_2^2+h_0h_2z^2+h_0h_2z^{-2}\right)+\frac{1}{2}\left(h_1^2+h_3^2+h_1h_3z^2+h_1h_3z^{-2}\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(h_0^2+h_1^2+h_2^2+h_3^2\right)+\frac{1}{2}\left(h_0h_2+h_1h_3\right)z^2+\frac{1}{2}\left(h_0h_2+h_1h_3\right)z^{-2}\\
=&1.
\end{aligned}
$$

同时易知

$$
P(z)=\frac{1-\sqrt{3}}{4}(z+1)^2(z-2-\sqrt{3}),
$$

因此 $|P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)|>0,|t|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

5.8 证明: 如果 $\phi(t)$ 是某个多分辨率分析的尺度函数, 则 $\int\phi(t)dt\neq0$.

解: 记 $f\in L^2(R)$ 在 V_j 上的正交投影为

$$
P_{V_j}f=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\langle f,\phi_{j,k}\right\rangle\phi_{j,k}
$$

由稠密性 $\overline{UV_j}=L^2(R)$ 有

$$
\lim_{j\to\infty}\left\|f-P_{\mathbf{V}_j}f\right\|^2=\lim_{j\to\infty}2\pi\left\|\hat{f}-\widehat{P_{\mathbf{V}_j}f}\right\|^2=0.
$$

计算 $P_{V_j}f$ 如下 (记 $\phi_j(t) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(-2^j t)$)

$$
\begin{aligned}
P_{V_j}f &= \sum_k \langle f, \phi_{j,k}\rangle \phi_{j,k} \\
&= \sum_k \int_R f(t)\bar{\phi}_j(2^{-j}k - t)dt\phi_j(2^{-j}k - t) \\
&= \sum_k f * \bar{\phi}_j(2^{-j}k)\phi_j(2^{-j}k - t) \\
&= \phi_j * \left(\sum_k f * \bar{\phi}_j(2^{-j}k)\delta(t - 2^{-j}k)\right)
\end{aligned}
$$

记 $f_d = \sum_k f * \bar{\phi}_j(2^{-j}k)\delta(t - 2^{-j}k)$. 有如下引理 (参考"A Wavelet Tour of Signal Processing" p74)

如果

$$
g_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT)\delta(t - nT).
$$

则

$$
\hat{g}_d(\lambda) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{g}\left(\lambda - \frac{2k\pi}{T}\right)
$$

应用引理有

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_d &= 2^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f * \bar{\phi}_j}\left(\lambda - 2k\pi 2^j\right) \\
&= 2^{\frac{j}{2}}\sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda - 2k\pi 2^j)\hat{\bar{\phi}}(2k\pi - 2^{-j}\lambda)
\end{aligned}
$$

下面计算 $\widehat{P_{V_j}f}$

$$
\begin{aligned}
\widehat{P_{V_j}f} &= \sqrt{2\pi}\hat{\phi}_j \sum_k f * \bar{\phi}_j\widehat{(2^{-j}k)}\delta(t - 2^{-j}k) \\
&= \sqrt{2\pi}2^{-\frac{j}{2}}\hat{\phi}(-2^{-j}\lambda)\hat{f}_d(\lambda) \\
&= 2\pi\hat{\phi}(-2^{-j}\lambda)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda - 2k\pi 2^j)\hat{\bar{\phi}}(2k\pi - 2^{-j}\lambda)
\end{aligned}
$$

取 $\hat{f}=\chi_{[-\pi,\pi]}$, 则对于 $j>0$ 有

$$\widehat{P_{V_j}f}=2\pi|\hat{\phi}(-2^{-j}\lambda)|^2$$

进而有

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to\infty}\left\|f-P_{\mathbf{V}_j}f\right\|^2\\=&\lim_{j\to\infty}2\pi\left\|\hat{f}-\widehat{P_{\mathbf{V}_j}f}\right\|^2\\=&\lim_{j\to\infty}\sqrt{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\hat{f}(\lambda)-2\pi|\hat{\phi}(-2^{-j}\lambda)|^2|^2d\lambda\\=&\sqrt{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-2\pi|\hat{\phi}(0)|^2|^2d\lambda\\=&0.\end{aligned}$$

进而 $\hat{\phi}(0)=\int\phi\neq 0$.

5.9 求证: 如果 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(R)$ 的一组标准正交基, 那么对任意的 $\lambda\neq 0$, 有

$$\sum_{j\in Z}\left|\widehat{\psi}\left(2^j\lambda\right)\right|^2=\frac{1}{2\pi}$$

解: 利用如下的引理 (证明详见"Inequalities of Littlewood-Paley Type For Frames and Wavelets*" Theorem 1 证明)

如果 $\psi_{j,k}(x):=a^{\frac{j}{2}}\psi\left(a^jx-kb\right)(a>1,b>0)$ 满足框架条件

$$A\|f\|^2\leq\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\left|\langle f,\psi_{j,k}\rangle\right|^2\leq B\|f\|^2,\quad f\in L^2$$

其中 $0<A\leq B<\infty$, 则有

$$A\leq\frac{2\pi}{b}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\psi}\left(a^j\omega\right)\right|^2\leq B$$

由于 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(R)$ 的标准正交基，根据定理 4.9 有框架界 $A=B=1$, 结合引理得到

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\psi}\left(2^j\omega\right)\right|^2=\frac{1}{2\pi}.$$

Homework 6 答案

6.1 证明 Daubechies 小波的消失矩定理

解: 由傅里叶变换的性质可知

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R (-it)^n\psi(t)e^{-i\lambda t}dt = (\widehat{\psi})^{(n)}(\lambda)$$

即 $\int_R t^n\psi(t)dt = \sqrt{2\pi}i^n(\widehat{\psi})^{(n)}(0)$

另一方面

$$\widehat{\psi}(\lambda) = G\left(\frac{\lambda}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = -e^{-i\lambda}\overline{H\left(\frac{\lambda+2\pi}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

Daubechies 小波满足

$$H(\lambda) = \left(\frac{1+e^{-i\lambda}}{2}\right)^N Q_N\left(e^{-i\lambda}\right)$$

当 $n < N$ 时，计算易知 $H^{(n)}(\lambda)$ 展开的每一项均含有 $(\frac{1+e^{-i\lambda}}{2})$ 项, 因此满足导数满足 $H^{(n)}(\pi) = 0$.

当 $n = N$ 时,

$$H^{(N)}(\lambda) = (\frac{e^{-i\lambda}}{2})^N N!(-i)^N Q_N(e^{-i\lambda}) + R(\lambda).$$

其中 $R(\lambda)$ 满足 $R(\pi) = 0$(每一项含有 $\frac{1+e^{-i\lambda}}{2}$)，因此有

$$\begin{aligned}
&\hat{\psi}^{(N)}(0)\\
=&-\overline{H^{(N)}(\pi)}\frac{1}{2^N}\hat{\phi}(0)\\
=&-\frac{1}{4^N}N!(-i)^N Q_N(-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

则 $\int_R t^N\psi(t)dt = \sqrt{2\pi}i^n(\widehat{\psi})^{(n)}(0) = -\frac{1}{4^N}N!Q_N(-1)$

6.2. 如果

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & x \in [0, N] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

证明, 如果 $N > 1$, 则 $\{\phi(t-k)\}$ 不是标准正交的。

解: 易知 $\int \phi(x)\phi(x-1)dx \neq 0$

7.1 证明 $M(a)$ 不满足可加性.

解: 设 $a = [1, 1]$, $a^1 = a^2 = [1]$, 易知

$$M(a) = -2 \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \log 2$$

$$M(a^1) = M(a^2) = -1 \cdot \log 1 = 0$$

即 $M(a) \neq M(a^1) + M(a^2)$.

7.2 证明 $\lambda(a)$ 具有可加性.

解: 设 $a = \{a_k\}$, $a^1 = \{a_k^1\}$, $a^2 = \{a_k^2\}$. $\{a_k^1\} \cup \{a_k^2\} = \{a_k\}$, 且 $\{a_k^1\} \cap \{a_k^2\} = \varnothing$.

$$\begin{aligned} \lambda(a^1) + \lambda(a^2) &= -\sum_k |a_k^1|^2 \log |a_k^1|^2 - \sum_k |a_k^2|^2 \log |a_k^2|^2 \\ &= -\sum_k |a_k|^2 \log |a_k|^2 \\ &= \lambda(a) \end{aligned}$$

8.1 如果多相位矩阵是来自多分辨率分析, 则 $P(z)$ 的行列式等于 -2.

解:

$$
\begin{aligned}
det(\mathbf{P}(z)) &= h_e(z)g_o(z) - h_o(z)g_e(z) \\
&= \sum_m h_{2m}z^{-m}\sum_n g_{2n+1}z^{-n} - \sum_m h_{2m+1}z^{-m}\sum_n g_{2n}z^{-n} \\
&= \sum_m\sum_n h_{2m}g_{2n+1}z^{-m-n} - \sum_m\sum_n h_{2m+1}g_{2n}z^{-m-n} \\
&= \sum_m\sum_n h_{2m-2n}g_{2n+1}z^{-m} - \sum_m\sum_n h_{2m-2n+1}g_{2n}z^{-m} \\
&= \sum_m\sum_n h_{2m-2n}(-1)^{2n+1}\bar{h}_{-2n}z^{-m} - \sum_m\sum_n h_{2m-2n+1}(-1)^{2n}\bar{h}_{1-2n}z^{-m} \\
&= -\sum_m\sum_n \left(h_{2m+2n}\bar{h}_{2n} + h_{2m+2n+1}\bar{h}_{2n+1}\right) z^{-m} \\
&= -\sum_m \left(\sum_n h_{2m+n}\bar{h}_n\right) z^{-m} \\
&= -\sum_m 2\delta_{m,0}z^{-m} \\
&= -2
\end{aligned}
$$

补充: 假设双尺度系数 $h_k, k = 0, 1, \cdots, 2N-1$ 非零, 证明 Daubechies 小波函数的支集是 $[1-N, N]$.

解: 由 6.3.1 知尺度函数 ϕ 的支集为 $[0, 2N-1]$, 且

$$\psi(x) = \sum_k (-1)^k \bar{h}_{1-k}\phi(2x-k).$$

因此易计算 $2x-1 \leq 2N-1$ 和 $2x+2N-2 \geq 0$ 得 $1-N \leq x \leq N$.