# 数值代数—绪论

邓建松

2022年8月30日

# 数据处理问题

数值代数— 绪论
邓建松

收值代数基本问题
研究的必要性

上要技巧

吴差分析

• 现代的科学技术发展十分迅速,它们有一个共同的特点,就是都有大量的数据问题

#### 数据处理问题

**数值代数— 绪论**邓建松
值代数基本问题
究的必要性
要技巧
差分析
法速度

- 现代的科学技术发展十分迅速,它们有一个共 同的特点,就是都有大量的数据问题
  - 发射一颗卫星,从卫星设计开始到发射、 回收为止,科学家和工程技术人员、工人 就要对卫星的总体部件进行全面的设计和 生产,要对选用的火箭进行设计和生产

# 数据处理问题

数值代数— 绪论
邓建松
值代数基本问题
究的必要性
要技巧
差分析
法速度

- 现代的科学技术发展十分迅速,它们有一个共同的特点,就是都有大量的数据问题
  - 发射一颗卫星,从卫星设计开始到发射、 回收为止,科学家和工程技术人员、工人 就要对卫星的总体部件进行全面的设计和 生产,要对选用的火箭进行设计和生产
  - ② 在高能加速器里进行高能物理试验,研究 具有很高能量的基本粒子的性质、它们之 间的相互作用和转化规律,这里面也有大 量的数据计算问题

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性

要技巧

误差分析

算法速度

考核方式

• 1946年第一台电子计算机诞生

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧

异法迷及

● 1946年第一台电子计算机诞生

理论研究、科学试验、科学计算为当今世界科学活动的三种主要方式

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧 误差分析

- 1946年第一台电子计算机诞生
- 理论研究、科学试验、科学计算为当今世界科 学活动的三种主要方式
- 为科学与工程问题提供计算方法,提高计算的 可靠性、有效性和精确性,是科学与工程计算 领域的主要研究内容

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧 误差分析

算法速度 考核方式

- 1946年第一台电子计算机诞生
- 理论研究、科学试验、科学计算为当今世界科学活动的三种主要方式
- 为科学与工程问题提供计算方法,提高计算的 可靠性、有效性和精确性,是科学与工程计算 领域的主要研究内容
- 研究计算问题的解决方法和有关数学理论问题 的一门学科就叫做<mark>计算数学</mark>

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问是 研究的必要性 主要技巧

算法速度

- 1946年第一台电子计算机诞生
- 理论研究、科学试验、科学计算为当今世界科学活动的三种主要方式
- 为科学与工程问题提供计算方法,提高计算的 可靠性、有效性和精确性,是科学与工程计算 领域的主要研究内容
- 研究计算问题的解决方法和有关数学理论问题 的一门学科就叫做计算数学
- 计算数学属于应用数学的范畴

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

工女12~1

误差分析

算法速度

考核方式

• 简称为数值代数,也称为矩阵计算

数值代数— 绪论

数值代数基本问题

TH 202 AA 202 HT

研光的必要性

in William

火生力1

算法建度

考核方式

- 简称为数值代数,也称为矩阵计算
- 它是科学与工程计算的核心

数值代数— 结论
邓建松
《值代数基本问题
F充的必要性
:要技巧

- 简称为数值代数, 也称为矩阵计算
- 它是科学与工程计算的核心
  - 大部分科学与工程计算问题最终都归结为 一个矩阵计算问题,特别是大规模矩阵计 算问题

数值代数— 绪论
邓建松
位代数基本问题
F究的必要性
要技巧

- 简称为数值代数,也称为矩阵计算
- 它是科学与工程计算的核心
  - 大部分科学与工程计算问题最终都归结为 一个矩阵计算问题,特别是大规模矩阵计 算问题
- 数值代数的研究内容就是针对各类科学与工程 问题的特点,设计出相应的快速可靠的算法

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

9176H172 X 1.

做法法的

• 本科阶段

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧 误差分析

算法速度

考核方式

#### • 本科阶段

数值代数、数值分析、偏微分方程数值 解、有限元、计算机图形学

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧

误差分析

起标一个

#### • 本科阶段

- 数值代数、数值分析、偏微分方程数值 解、有限元、计算机图形学
- 研究生阶段

数值代数— 绪论
邓建松

收值代数基本问题
开究的必要性
上要技巧

吴差分析

#### • 本科阶段

- 数值代数、数值分析、偏微分方程数值 解、有限元、计算机图形学
- 研究生阶段
  - 计算流体力学、高级有限元、并行计算及 算法、计算机辅助几何设计、样条函数与 逼近论、多变量函数逼近论、计算代数几 何、小波分析、高级几何建模与图形学

### 基本问题

数值代数— 绪论

数值代数基本问题

算法速度

考核方式

• 求解线性方程组: 给定n阶非奇异矩阵A和n维 向量b, 求解方程Ax = b, 其中x是未知的n维向量

### 基本问题

数值代数— 绪论 邓建松

**数值代数基本问题** 研究的必要性

上文(人)

算法速度

考核方式

- 求解线性方程组: 给定n阶非奇异矩阵A和n维 向量b, 求解方程Ax = b, 其中x是未知的n维向量
- 线性最小二乘问题:给出 $m \times n$ 阶矩阵A和m维向量b,求n维向量x使得

$$||Ax - b||_2 = \min\{||Ay - b||_2 : y \in \mathbb{R}^n\}$$

### 基本问题

数值代数— 绪论

数值代数基本问题

- 求解线性方程组: 给定n阶非奇异矩阵A和n维 向量b. 求解方程Ax = b. 其中x是未知的n维向 量
- 线性最小二乘问题:给出m×n阶矩阵A和m维 向量b, 求n维向量x使得

$$||Ax - b||_2 = \min\{||Ay - b||_2 : y \in \mathbb{R}^n\}$$

● 矩阵特征值问题: 计算给定方阵A的部分或全 部特征值与对应的特征向量

# 基本问题的变体

数值代数— 绪论

**数值代数基本问题** 研究的必要性 主要技巧 误差分析 算法速度

约束最小二乘问题、完全最小二乘问题、矩阵 方程的求解、矩阵函数的计算、广义特征值问 题、非线性特征值问题、特征值反问题、奇异 值分解的计算

# 基本问题的变体

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧 误差分析 算法速度

- 约束最小二乘问题、完全最小二乘问题、矩阵 方程的求解、矩阵函数的计算、广义特征值问 题、非线性特征值问题、特征值反问题、奇异 值分解的计算
- 特别地, 奇异值分解的计算有广泛的应用, 也有人称其为数值代数的第四大问题

数值代数— 绪论
邓建松
数值代数基本问题
研究的必要性
主要技巧

上述问题的数学理论已相当完善,但是理论上漂亮的结果在实际计算时有可能不可行:先以Cramer法则为例

数值代数— 绪论 研究的必要性

上述问题的数学理论已相当完善,但是理论上漂亮 的结果在实际计算时有可能不可行: 先以Cramer法 则为例

- Cramer法则: 把线性方程组的求解归结为计
- Laplace展开定理: 计算行列式的理论公式 n阶行列式的乘法次数>n!

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研**究的必要性** 主要技巧

误差分析

算法速度

考核方式

采用Cramer法则求解线性方程组的乘法运算次数大于(n+1)!. 例如,求解一个25阶线性方程组,采用此方法,需要约13亿年

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧 误差分析

- 采用Cramer法则求解线性方程组的乘法运算次数大于(n+1)!. 例如,求解一个25阶线性方程组,采用此方法,需要约13亿年
- 而采用Gauss消元法,则可以不超过1秒钟完成 求解

#### Jordan分解

数值代数— 绪论
邓建松
数值代数基本问题
研究的必要性
主要技巧
误差分析
篡注速度

基于Jordan标准型与分解定理,可以清楚地知 道矩阵所有的特征值及有关信息:几何重数、 代数重数、对应的特征向量等

#### Jordan分解

数值代数— 绪论
邓建松
数值代数基本问题
研究的必要性
主要技巧
误差分析

- 基于Jordan标准型与分解定理,可以清楚地知 道矩阵所有的特征值及有关信息:几何重数、 代数重数、对应的特征向量等
- 而Jordan分解是非常不稳定的,变换矩阵常常 是非常病态的

#### Jordan分解

数值代数— 绪论
邓建松
数值代数基本问题
研究的必要性
主要技巧
误差分析

- 基于Jordan标准型与分解定理,可以清楚地知 道矩阵所有的特征值及有关信息:几何重数、 代数重数、对应的特征向量等
- 而Jordan分解是非常不稳定的,变换矩阵常常 是非常病态的
- 实际计算采用的通常是具有良好数值性态的Schur分解

# 现状与问题

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

要技巧

20 至八年

800 N + N + 100

考核方式

• 数值代数只有半个多世纪的历史

# 现状与问题

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

要技巧

误差分析

**算法速度** 

考核方式

- 数值代数只有半个多世纪的历史
- 相关的方法和理论已发展得相对成熟

### 现状与问题

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研**究的必要性** 

主要技巧

误差分析

算法速度

考核方:

- 数值代数只有半个多世纪的历史
- 相关的方法和理论已发展得相对成熟
- 大规模矩阵计算问题仍是目前的研究核心问题 之一

# 矩阵分解

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

9176HJZ X L

. .....

坦莱八和

OCCL /V

算法速度

考核方式

如何根据矩阵计算问题的特点,设计出有效的 计算方法,这是我们关注的首要问题

# 矩阵分解

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 **主要技巧** 

算法速度

考核方式

- 如何根据矩阵计算问题的特点,设计出有效的计算方法,这是我们关注的首要问题
- 基本想法就是将一般的问题转化为一个或几个 易于求解的特殊问题

# 矩阵分解

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 **主要技巧** 

算法速度

考核方式

- 如何根据矩阵计算问题的特点,设计出有效的计算方法,这是我们关注的首要问题
- 基本想法就是将一般的问题转化为一个或几个 易于求解的特殊问题
- 完成这一转化的基本技巧就是矩阵分解

• 对于线性方程组求解问题: 当系数矩阵A为下 三角或者上三角时, 方程组的求解变得非常容 易

数值代数基本问题 研究的必要性 **主要技巧** 

算法速度

对于线性方程组求解问题: 当系数矩阵A为下 三角或者上三角时,方程组的求解变得非常容易

• A为一般矩阵时,可以首先将A分解为PA = LU,其中P为排列方阵,U和L分别是上、下三角阵

数值代数基本问题 研究的必要性 **主要技巧** 

算法速度

对于线性方程组求解问题: 当系数矩阵A为下 三角或者上三角时,方程组的求解变得非常容易

- A为一般矩阵时,可以首先将A分解为PA = LU,其中P为排列方阵,U和L分别是上、下三角阵
- 通过求解Ly = Pb, Ux = y就可以得到原方程的解

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

误差分析

Anto A. E. Andre and

考核方式

#### 误差来源于

• 原始数据的误差

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

误差分析

算法速度

考核方式

#### 误差来源于

- 原始数据的误差
- 计算过程产生的误差

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

20 至 八 和

异法迷皮

考核方式

#### 误差来源于

- 原始数据的误差
- 计算过程产生的误差

• 误差是不可避免的

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

.....

VCL)

算法速度

考核方式

#### 误差来源于

- 原始数据的误差
- 计算过程产生的误差

- 误差是不可避免的
- 计算解与真解的差是多少?

# 敏度分解

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题

主要技巧

庆左刀(1

算法速度

考核方式

研究原始数据的微小变化会引起解的多大变化。假设考虑函数f(x)的计算问题

• 中值定理与Taylor展开: 可行性不大

# 敏度分解

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧 **误差分析** 

算法速度

研究原始数据的微小变化会引起解的多大变化。假设考虑函数f(x)的计算问题

- 中值定理与Taylor展开: 可行性不大
- 当 $\delta x/|x|$ 很小时,确定一个尽可能小的正数c(x),满足

$$\frac{|f(x+\delta x)-f(x)|}{|f(x)|}\leqslant c(x)\frac{|\delta x|}{|x|}$$

# 条件数

数值代数— 绪论 邓建松 值代数基本问题 究的必要性 要技巧

c(x)的大小在一定程度上反映了自变量的微小变化 对函数值的影响程度

● c(x)称为f在x点的条件数

## 条件数

数值代数— 结论 邓建松 值代数基本问题 究的必要性

误差分析

算法速度

考核方式

c(x)的大小在一定程度上反映了自变量的微小变化 对函数值的影响程度

- c(x)称为f在x点的条件数
- c(x)很大时,自变量的小变化有可能引起函数 值的大变化,因此称f在x点是病态的; 当c(x)很小时,称f在x点是良态的

## 条件数

数值代数— 绪论 邓建松 值代数基本问题 究的必要性 要技巧

误差分析

c(x)的大小在一定程度上反映了自变量的微小变化 对函数值的影响程度

- c(x)称为f在x点的条件数
- c(x)很大时,自变量的小变化有可能引起函数 值的大变化,因此称f在x点是病态的; 当c(x)很小时,称f在x点是良态的
- 计算问题是否病态是问题自身的固有属性,与 计算方法无关

## 舍入误差

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

19176HJ2

要技巧

误差分析

算法速度

考核方式

● 计算机是有效精度的。这引起的误差称为舍入 误差。

## 舍入误差

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧

算法速度

考核方式

- 计算机是有效精度的。这引起的误差称为舍入 误差。
- 分析舍入误差对算法结果的影响,是衡量算法 优劣的重要标志

## 舍入误差

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧

**误差分析** 算法速度

考核方式

• 计算机是有效精度的。这引起的误差称为舍入误差。

- 分析舍入误差对算法结果的影响,是衡量算法 优劣的重要标志
- 仍以函数求值为例

## 向后误差分析法

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

-)- mi ++-rr

误差分析

算法速度

考核方式

• 设采用某算法后函数f在x点的值为ŷ

#### 向后误差分析法

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧

误差分析

算法速度

考核方式

- 设采用某算法后函数f在x点的值为ŷ
- 通过对每步具体运算的误差分析可以证明:存在 $\delta x$ 满足 $\hat{y} = f(x + \delta x)$ ,  $|\delta x| \leq |x|\varepsilon$ , 其中 $\varepsilon$ 是一个与计算机精度和算法有关的正数

#### 向后误差分析法

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧 误**差分析** 

算法速度

 $\bullet$  设采用某算法后函数f在x点的值为 $\hat{y}$ 

- 通过对每步具体运算的误差分析可以证明:存在 $\delta x$ 满足 $\hat{y} = f(x + \delta x)$ ,  $|\delta x| \leq |x|\varepsilon$ , 其中 $\varepsilon$ 是一个与计算机精度和算法有关的正数
- 这种把计算结果归结为原始数据经扰动后的精确结果的误差分析方法称为向后误差分析法

# 数值稳定性

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧

误差分析

算法速度

考核方式

ε越小,说明舍入误差对算法的影响越小,因此 称算法为数值稳定的,否则称为数值不稳定的

# 数值稳定性

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧 **误差分析** 

算法速度

- ε越小,说明舍入误差对算法的影响越小,因此 称算法为数值稳定的,否则称为数值不稳定的
- 算法的数值稳定性是算法本身的固有属性,与 计算问题是否病态无关

## 精度估计

数值代数— 绪论

数值代数基本问题研究的必要性

土女(以八

误差分析

算法速度

考核方式

综合前述敏度分析和误差分析之后,计算结果 的精度估计如下:

$$\frac{|\hat{y} - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f(x + \delta x) - f(x)|}{|f(x)|} \le c(x)\varepsilon$$

## 精度估计

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧

误差分析

并仏处汉

综合前述敏度分析和误差分析之后,计算结果 的精度估计如下:

$$\frac{|\hat{y} - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f(x + \delta x) - f(x)|}{|f(x)|} \leqslant c(x)\varepsilon$$

● 计算结果是否可靠,依赖于计算问题是否病态 以及所用的算法是否数值稳定

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

N. 田 が. かだい 田

误差分割

算法速度

考核方式

直接法:在没有误差的情况下可在有限步得到 计算问题精确解

数值代数— 绪论
邓建松

位代数基本问题

开究的必要性

上要技巧

吴差分析

算法速度

- 直接法: 在没有误差的情况下可在有限步得到 计算问题精确解
  - 运算量的大小可以作为其速度的一个主要 标志

数值代数— 绪论
邓建松
数值代数基本问题
研究的必要性
主要技巧
误差分析 **算注谏**度

- 直接法: 在没有误差的情况下可在有限步得到 计算问题精确解
  - 运算量的大小可以作为其速度的一个主要标志
- 迭代法:采用逐次逼近的方法逼近问题的精确解,而在任意有限步都不能得到其精确解

数值代数— 绪论
邓建松
数值代数基本问题
研究的必要性
主要技巧
误差分析 **算注谏**度

- 直接法: 在没有误差的情况下可在有限步得到 计算问题精确解
  - 运算量的大小可以作为其速度的一个主要标志
- 迭代法:采用逐次逼近的方法逼近问题的精确解,而在任意有限步都不能得到其精确解
  - 除估计每步运算量的大小,还需要对收敛 性进行分析

## 算法复杂性

数值代数— 绪论

算法速度

计算或者估计算法的运算量

• 上世纪90年代之前:通常只计算乘除运算的次 数

## 算法复杂性

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问研究的必要性

误差分机

算法速度

考核方式

计算或者估计算法的运算量

- 上世纪90年代之前:通常只计算乘除运算的次数
- 进入90年代之后: 算法所有运算次数总和

# 算法复杂性

数值代数— 绪论

数值代数基本的 研究的必要性

误差分析

算法速度

考核方式

#### 计算或者估计算法的运算量

- 上世纪90年代之前:通常只计算乘除运算的次数
- 进入90年代之后: 算法所有运算次数总和
- 如果某一算法的运算量是关于n的多项式,通常就略去低阶项,用最高阶项称为算法的运算量

# 运算量与算法快慢

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

내 해 사 전 행기

明几的少女庄

VIII 26 // 4

灰左刀1

算法速度

考核方式

• 运算量只在一定程度上反映了算法的速度

## 运算量与算法快慢

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧

算法速度

考核方式

- 运算量只在一定程度上反映了算法的速度
- 现代计算机中运算速度远远高于数据的传输速度,因此算法的速度在很大程度上依赖于算法实现后数据传输量的大小

# 收敛速度

数值代数— 绪论

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧

误差分析

算法速度

考核方式

#### 针对迭代法

• 假设某一迭代法产生的序列{xk}满足

$$||x_k - x|| \le c ||x_{k-1} - x||^{\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots$$

# 收敛速度

数值代数— 绪论

算法速度

#### 针对迭代法

● 假设某一迭代法产生的序列{x<sub>k</sub>}满足

$$||x_k - x|| \le c ||x_{k-1} - x||^{\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots$$

•  $\pm 0 < c < 1$ ,  $\alpha = 1$ , 则称算法线性收敛

# 收敛速度

数值代数— 绪论 邓建松

数值代数基本问题 研究的必要性 主要技巧 误差分析

算法速度

#### 针对迭代法

● 假设某一迭代法产生的序列{x<sub>k</sub>}满足

$$||x_k - x|| \leqslant c ||x_{k-1} - x||^{\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- 若0 < c < 1,  $\alpha = 1$ , 则称算法线性收敛
- 若c > 0,  $\alpha = 2$ , 则称算法平方收敛(二次收敛)。此时c越小越好

### 教材与参考书

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问是

研究的必要

. .....

误差分析

算法速度

考核方式

教材:数值线性代数(第二版),徐树方等编 著,北京大学出版社

### 教材与参考书

数值代数— 绪论

小连位

数值代数基本问题

TH 25 44 20 HT 44

91 / GH J 22 32 12

2D 关丛t

occino i

算法速度

考核方式

- 教材:数值线性代数(第二版),徐树方等编 著,北京大学出版社
- 参考书

### 教材与参考书

数值代数— 绪论
邓建松
数值代数基本问题
研究的必要性
主要技巧
误差分析
算法速度

• 教材:数值线性代数(第二版),徐树方等编 著,北京大学出版社

#### ● 参考书

矩阵计算(第四版), G. H. Golub著,人 民邮电出版社影印,2014年;中译本, 2020年

#### 教材与参考书

数值代数— 绪论
邓建松
数值代数基本问题
研究的必要性
主要技巧
误差分析
算法速度

• 教材:数值线性代数(第二版),徐树方等编著,北京大学出版社

#### 参考书

- 矩阵计算(第四版), G. H. Golub著, 人 民邮电出版社影印, 2014年; 中译本, 2020年
- 代数特征值问题, J. H. Wilkinson著, 科学出版社, 2018年再版

**数值代数— 绪论** 邓建松

数值代数基本问题

研究的必要性

坦莱八哥

質注油量

考核方式

• 课后习题: 20% (注意网络上的解答有些是错的)

数值代数— 绪论 邓建松 值代数基本问题 究的必要性 要技巧

庆左汀伽

• 课后习题: 20% (注意网络上的解答有些是错的)

• 编程作业: 30% (课本上机习题+SVD分解)

数值代数— 绪论 邓建松 值代数基本问题 究的必要性 要技巧

- 课后习题: 20% (注意网络上的解答有些是错的)
- 编程作业: 30% (课本上机习题+SVD分解)
- 期终考试: 50% (闭卷,课后习题和书上定理证明占60-70%)

数值代数— 绪论
邓建松
值代数基本问题
究的必要性
要技巧

- 课后习题: 20% (注意网络上的解答有些是错的)
- 编程作业: 30% (课本上机习题+SVD分解)
- 期终考试: 50% (闭卷,课后习题和书上定理证明占60-70%)
- 所有作业在布置后的周二上交。特殊情况提前 向助教说明,一周内补交有效!

数值代数— 绪论
邓建松
值代数基本问题
究的必要性
要技巧
差分析

- 课后习题: 20% (注意网络上的解答有些是错的)
- 编程作业: 30% (课本上机习题+SVD分解)
- 期终考试: 50% (闭卷,课后习题和书上定理证明占60-70%)
- 所有作业在布置后的周二上交。特殊情况提前 向助教说明,一周内补交有效!
- 发现照抄,双方均不得分!

数值代数— 绪论
邓建松
值代数基本问题
究的必要性
要技巧

算法速度

- 课后习题: 20% (注意网络上的解答有些是错的)
- 编程作业: 30% (课本上机习题+SVD分解)
- 期终考试: 50% (闭卷,课后习题和书上定理证明占60-70%)
- 所有作业在布置后的周二上交。特殊情况提前 向助教说明,一周内补交有效!
- 发现照抄,双方均不得分!
- 以上各项可讨论,若无异意,不周二确定!』 ৯৯%

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

N. OH O'S HE

1917 BH J Z 3X [1

VIII 246 AV 44

开口处汉

• C++

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

**電水的な**面

9176H12E 34 [1

VH 36 // 4

灰左刀1

算法速度

- C++
- Python 3.X

数值代数— 绪论

邓建松

数值代数基本问题

研察的改更析

19176HJZ 341.

主要技巧

误差分标

算法速度

- C++
- Python 3.X
- 具体编译平台,请在大群中与助教讨论确认。各语言最好只接受一种平台

数值代数— 绪论

数值代数基本问题

研究的必要性

917611722

22 至八4

質汁油面

- C++
- Python 3.X
- 具体编译平台,请在大群中与助教讨论确认。各语言最好只接受一种平台
- 课堂演示: C++

# 线性方程组的直接解法

邓建松

2022年9月6日

## 线性方程组

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

结构分析、网络分析、大地测量、数据分析、 最优化及非线性方程组和微分方程组数值解等,都常常遇到线性方程的求解问题

## 线性方程组

线性方程组的直接解 法

二角形方稈组

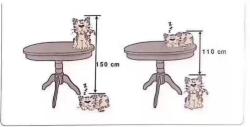
选主元三角分解

- 结构分析、网络分析、大地测量、数据分析、 最优化及非线性方程组和微分方程组数值解等,都常常遇到线性方程的求解问题
- 这也是一个历史悠久的问题:《九章算术》中 就记载有消元法

今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十 九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三 十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,实 二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何?

## 线性方程组的直接解

#### 小学生作业, 我感觉我幼儿园都没毕业



桌子有多高?

A 110 cm B 120 cm C 130 cm D 140 cm E 150 cm

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

求解大型线性方程组是计算机问世后才有可能 的事情

线性方程组的直接解 法

小姓位

三角形方程组

选主元三角分解 平方根法

- 求解大型线性方程组是计算机问世后才有可能 的事情
- 直接法(精确法): 在没有舍入误差的情况下 经过有限次运算可求得方程组的精确解

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

- 求解大型线性方程组是计算机问世后才有可能 的事情
- 直接法(精确法): 在没有舍入误差的情况下 经过有限次运算可求得方程组的精确解
- 迭代法: 采取逐次逼近方法,从一个初始向量 出发,按照一定的计算格式,得到一个向量的 无穷序列,其极限是方程组的精确解。只经过 有限次运算得不到精确解

## Gauss消去法

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选士元三角分解

平方根法

• Gauss消去法是一类最基本的直接求解 方法

## Gauss消去法

线性方程组的直接解

- Gauss消去法是一类最基本的直接求解 方法
- 它是目前求解中小规模(阶数一般不超 过1000)线性方程组的最常用方法

#### Gauss消去法

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组 选主元三角分解

- Gauss消去法是一类最基本的直接求解 方法
- 它是目前求解中小规模(阶数一般不超过1000)线性方程组的最常用方法
- 用于系数矩阵没有任何特殊结构的方程组

#### 下三角形方程组

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

考虑下三角形方程组Ly = b, 其中 $b = (b_1, ..., b_n)^T$ 已 知, $y = (y_1, ..., y_n)^T$ 未知,而系数阵L是已知的非奇 异下三角阵,即

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & & & \\ \ell_{21} & \ell_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix}$$

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

矩阵非奇异,等价于 $\ell_{ii} \neq 0$ , i = 1, ..., n

• 
$$y_1 = b_1/\ell_{11}$$

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

矩阵非奇异,等价于 $\ell_{ii} \neq 0$ , i = 1, ..., n

• 
$$y_1 = b_1/\ell_{11}$$

• 
$$y_2 = (b_2 - \ell_{21}y_1)/\ell_{22}$$

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

矩阵非奇异,等价于 $\ell_{ii} \neq 0$ , i = 1, ..., n

• 
$$y_1 = b_1/\ell_{11}$$

• 
$$y_2 = (b_2 - \ell_{21}y_1)/\ell_{22}$$

• .....

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

矩阵非奇异,等价于 $\ell_{ii} \neq 0$ , i = 1, ..., n

• 
$$y_1 = b_1/\ell_{11}$$

• 
$$y_2 = (b_2 - \ell_{21}y_1)/\ell_{22}$$

$$= \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} y_j}{\ell_{ij}}$$

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 前述方法称为前代法

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

- 前述方法称为前代法
- 实现时为了节省存贮空间,可以把 $y_i$ 放在 $b_i$ 所用的存贮单元中

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

- 前述方法称为前代法
- 实现时为了节省存贮空间,可以把 $y_i$ 放在 $b_i$ 所用的存贮单元中
- 具体实现时可以在算出 $y_i$ 时,马上从后面各项 $b_i$ 中减去相应的量

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

- 前述方法称为前代法
- 实现时为了节省存贮空间,可以把 $y_i$ 放在 $b_i$ 所用的存贮单元中
- 具体实现时可以在算出 $y_i$ 时,马上从后面各项 $b_i$ 中减去相应的量
- 运算量:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

#### 上三角形方程组

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

考虑上三角形方程组Ux = y, 其 中 $y = (y_1, ..., y_n)^T$ 已知, $x = (x_1, ..., x_n)^T$ 未知,而 系数阵U是已知的非奇异上三角阵,即

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

## 解法: 回代法

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解 平方根法 从方程组的最后一个方程出发依次求解

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}, i = n, n-1, \dots, 1$$

• 算法的运算量还是n<sup>2</sup>



## 一般方程组

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解 平方根法 对于一般的线性方程组Ax = b, 如果能 把A分解为A = LU, 那么

用前代法求解Ly = b

## 一般方程组

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解 平方根注 对于一般的线性方程组Ax = b, 如果能 把A分解为A = LU, 那么

- 用前代法求解Ly = b
- 用回代法求解*Ux* = *y*

## 一般方程组

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解 平方根法 对于一般的线性方程组Ax = b, 如果能 把A分解为A = LU, 那么

- 用前代法求解Ly = b
- 用回代法求解*Ux* = y
- 所以关键是如何进行分解

#### 初等变换

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

期望通过一系列初等变换把A约化为上三角 阵,而这些变换的乘积是一个下三角阵,即

• 对于一个任意给定的向量 $x \in \mathbb{R}^n$ , 找一个尽可能简单的下三角阵,使x经这一矩阵作用之后的第k+1至n个分量都是零

#### 初等变换

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

期望通过一系列初等变换把A约化为上三角阵,而这些变换的乘积是一个下三角阵,即

- 对于一个任意给定的向量 $x \in \mathbb{R}^n$ , 找一个尽可能简单的下三角阵,使x经这一矩阵作用之后的第k+1至n个分量都是零
- 下三角阵的乘积仍是下三角阵

## Gauss变换

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

#### Gauss变换矩阵定义为

$$L_k = I - \ell_k e_k^T,$$

其中

$$\ell_k = (0, 0, \dots, 0, \ell_{k+1,k}, \dots, \ell_{nk})^T$$

称为Gauss向量



# Gauss变换

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

#### 消去

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

77 → 40 M

由于

$$L_k x = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1} - x_k \ell_{k+1,k}, \dots, x_n - x_k \ell_{nk})^T$$

所以取

$$\ell_{ik} = \frac{x_i}{x_k}, \quad i = k+1, \ldots, n$$

即有

$$L_k x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T$$

## Gauss变换矩阵的性质

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解 平方根法 • 逆容易计算: 由于 $e_k^T \ell_k = 0$ , 所以

$$(I - \ell_k e_k^T)(I + \ell_k e_k^T) = I,$$

从而

$$L_k^{-1} = I + \ell_k e_k^T$$

## Gauss变换矩阵的性质

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解 平方根法 • 逆容易计算: 由于 $e_k^T \ell_k = 0$ , 所以

$$(I - \ell_k e_k^T)(I + \ell_k e_k^T) = I,$$

从而

$$L_k^{-1} = I + \ell_k e_k^T$$

• Gauss变换作用于矩阵A相当于对矩阵 进行秩1的修正

$$L_k A = A - \ell_k (e_k^T A)$$

线性方程组的直接解 法 <sup>邓建松</sup>

三角形方稈组

选主元三角分解

Mathematica 1.1.3.nb

• 对一般n阶矩阵A, 在一定的条件下,可以得到n-1个Gauss变换 $L_1,\ldots,L_{n-1}$ , 使得 $L_{n-1}\cdots L_1A$ 为上三角矩阵

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方稈组

选主元三角分解

#### Mathematica 1.1.3.nb

- 对一般n阶矩阵A, 在一定的条件下,可以得到n-1个Gauss变换 $L_1,\ldots,L_{n-1}$ , 使得 $L_{n-1}\cdots L_1A$ 为上三角矩阵
- 这里的条件就是第k步中对角元素不能 是零

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

#### Mathematica 1.1.3.nb

- 对一般n阶矩阵A, 在一定的条件下,可以得到n-1个Gauss变换 $L_1,\ldots,L_{n-1}$ , 使得 $L_{n-1}\cdots L_1A$ 为上三角矩阵
- 这里的条件就是第k步中对角元素不能 是零
- $L_{n-1} \cdots L_1$ 是一个对角元全为1的下三角 矩阵



线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解 平方根注

$$L = (L_{n-1} \cdots L_1)^{-1}, U = L_{n-1} \cdots L_1 A$$

则A = LU就是所期望的三角分解(LU分解),因为L也是一个单位下三角阵,而且

$$L = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$$

$$= (I + \ell_1 e_1^T) \cdots (I + \ell_{n-1} e_{n-1}^T)$$

$$= I + \ell_1 e_1^T + \cdots + \ell_{n-1} e_n^T$$

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

77 → 40 M

• 上述方法称为Gauss消去法

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选王兀二用分解 平方根法

- 上述方法称为Gauss消去法
- 具体实现时,可以在原有的矩阵上存贮 中间矩阵和最终的矩阵*U*

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

- 上述方法称为Gauss消去法
- 具体实现时,可以在原有的矩阵上存贮 中间矩阵和最终的矩阵*U*
- 同时,可以利用A的下三角部分存贮L

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解 平方根法

- 上述方法称为Gauss消去法
- 具体实现时,可以在原有的矩阵上存贮 中间矩阵和最终的矩阵*U*
- 同时,可以利用A的下三角部分存贮L
- 运算量:  $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

#### 主元

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 称Gauss消去过程中的对角元 $a_{kk}^{(k-1)}$ 为主

#### 主元

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

• 称Gauss消去过程中的对角元 $a_{kk}^{(k-1)}$ 为主

当且仅当所有的主元均不为零时,上述 算法才能进行到底

#### 主元

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

- 称Gauss消去过程中的对角元 $a_{kk}^{(k-1)}$ 为主
- 当且仅当所有的主元均不为零时,上述 算法才能进行到底

#### 定理

所有主元均不为零当且仅当A的各阶顺序主 子式均不为零

## 三角分解存在定理

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

#### 定理

若A的各阶顺序主子式均不为零,则存在唯一的单位下三角阵L和上三角阵U,使得

$$A = LU$$

## 三角分解存在定理

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

#### 定理

若A的各阶顺序主子式均不为零,则存在唯一的单位下三角阵L和上三角阵U,使得

$$A = LU$$

• 唯一性证明需要注意

## 三角分解存在定理

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

#### 定理

若A的各阶顺序主子式均不为零,则存在唯一的单位下三角阵L和上三角阵U,使得

$$A = LU$$

- 唯一性证明需要注意
- 若A的前n-1个顺序主子式非零,但A奇异,定理仍成立:分块证明



线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

. . . . . . .

• 只要A非奇异,那么方程组Ax = b就有唯一解

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解 平方根法

- 只要A非奇异,那么方程组Ax = b就有唯一解
- *A*非奇异并不能保证其各阶顺序主子式 均不为零

线性方程组的直接解 法

三角形方积组

选主元三角分解 平方根注

- 只要A非奇异,那么方程组Ax = b就有唯一解
- *A*非奇异并不能保证其各阶顺序主子式 均不为零
- 从而*A*非奇异并不能保证Gauss消去过 程的完整进行

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

**选主元三角分解** 平方根法

- 只要A非奇异,那么方程组Ax = b就有唯一解
- *A*非奇异并不能保证其各阶顺序主子式 均不为零
- 从而*A*非奇异并不能保证Gauss消去过 程的完整进行
- 主元非零,但很小,也会导致一些问题。Mathematica1.2.1.nb



线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 
$$\mathfrak{R}A = \begin{pmatrix} 1/1000 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

や姓仏

三角形方程组

选主元三角分解

• 
$$\mathfrak{R}A = \begin{pmatrix} 1/1000 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• 方程Ax = b精确解为

$$x = \begin{pmatrix} \frac{500}{499} \\ \frac{997}{998} \end{pmatrix}$$

选主元三角分解

平方根法

设计算精度只有三位浮点数,即第一个有效数字开始共三位。

• 矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1.00 \times 10^{-3} & 1.00 \\ 1.00 & 2.00 \end{pmatrix}$$
,  $b = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 3.00 \end{pmatrix}$ 

选主元三角分解

设计算精度只有三位浮点数,即第一个有 效数字开始共三位。

• 矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1.00 \times 10^{-3} & 1.00 \\ 1.00 & 2.00 \end{pmatrix}$$
,  $b = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 3.00 \end{pmatrix}$ 

方程Ax = b精确解为

$$x = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

## 实际计算

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

## 实际计算

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

ਹ7 <del>→ 1</del>11 ≥+

• 
$$L = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 1.00 \times 10^3 & 1.00 \end{pmatrix}$$

• 
$$L^{-1}A = \begin{pmatrix} 1.00 \times 10^{-3} & 1.00 \\ 0 & -1.00 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

## 实际计算

线性方程组的直接解 法

— *4*4 π/. → 4π /r

选主元三角分解

ж<u>т.</u> /и .../п /л /н

• 
$$L^{-1}A = \begin{pmatrix} 1.00 \times 10^{-3} & 1.00 \\ 0 & -1.00 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

## 求解

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方規注

• 
$$\text{th} Ly = b \text{ app} y = (1.00, -1.00 \times 10^3)^T$$

## 求解

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程约

选主元三角分解

平方根法

• 由
$$Ly = b$$
得到 $y = (1.00, -1.00 \times 10^3)^T$ 

• 
$$\oplus Ux = y$$
得到 $x = (0.00, 1.00)^T$ 

## 求解

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

- 由Ly = b得到 $y = (1.00, -1.00 \times 10^3)^T$
- $\oplus Ux = y$ 得到 $x = (0.00, 1.00)^T$
- 与精确解的近似值(1.00, 1.00)<sup>T</sup>相差甚 远

#### 解决方法

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

교 수 4月2는

问题主要是由于小主元引起的,使得运 算时发生精度丢失

#### 解决方法

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

- 问题主要是由于小主元引起的,使得运算时发生精度丢失
- 交换矩阵的两行,即交换两个方程的顺序,重复上述过程,得到近似解为(1.00, 1.00)<sup>7</sup>

#### 解决方法

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

- 问题主要是由于小主元引起的,使得运算时发生精度丢失
- 交换矩阵的两行,即交换两个方程的顺序,重复上述过程,得到近似解为(1.00,1.00)<sup>T</sup>
- 交换矩阵的两列,这时相当于交换两个变量的顺序



# 初等置换矩阵

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

定义矩阵

$$I_{pq} = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_q, e_{p+1}, \dots, e_{q-1}, e_p, e_{q+1}, \dots, e_n)$$

用这个矩阵左乘A交换第p行和第q行,右乘A交换第p列和第q列

线性方程组的直接解 法

**小**连忆

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

● 假定消去过程已进行了k-1步,即

$$A^{(k-1)} = L_{k-1}P_{k-1}\cdots L_1P_1AQ_1\cdots Q_{k-1}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{(k-1)} & A_{12}^{(k-1)} \\ 0 & A_{22}^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

其中 $L_i$ 为Gauss变换, $P_i$ , $Q_i$ 为初等置换矩阵, $A_{11}^{(k-1)}$ 为k-1阶上三角阵



线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 那么在第k步我们先在 $A_{22}^{(k-1)}$ 中选择元  $素a_{pq}^{(k-1)}$ ,其模在所有元素中最大

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

-----

- 那么在第k步我们先在 $A_{22}^{(k-1)}$ 中选择元  $素a_{pq}^{(k-1)}$ ,其模在所有元素中最大
  - 如果 $a_{pq}^{(k-1)} = 0$ ,则A为奇异阵

线性方程组的直接解 法

三角形方积组

选主元三角分解

- 那么在第k步我们先在 $A_{22}^{(k-1)}$ 中选择元  $素 a_{pq}^{(k-1)}$ ,其模在所有元素中最大
  - 如果 $a_{pq}^{(k-1)} = 0$ ,则A为奇异阵
- 交换 $A^{(k-1)}$ 的k,p行与k,q列,相当于 左、右乘 $I_{kp}$ 和 $I_{kq}$

线性方程组的直接解 法

— / I/D / / 1主紀

选主元三角分解

- 那么在第k步我们先在 $A_{22}^{(k-1)}$ 中选择元  $素 a_{pq}^{(k-1)}$ ,其模在所有元素中最大
  - 如果 $a_{pq}^{(k-1)} = 0$ ,则A为奇异阵
- 交换 $A^{(k-1)}$ 的k,p行与k,q列,相当于 左、右乘 $I_{kp}$ 和 $I_{kq}$
- 然后进行Gauss变换

## 全主元Gauss消去法

线性方程组的直接解 法

二角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 上述消去过程称为全主元Gauss消去法

#### 全主元Gauss消去法

线性方程组的直接解 法

选主元三角分解

- 上述消去过程称为全主元Gauss消去法
- 得到 $(L_rP_r\cdots L_1P_1)A(Q_1\cdots Q_r)=U$ 为上三角阵

# 全主元Gauss消去法

线性方程组的直接解 法

选主元三角分解

- 上述消去过程称为全主元Gauss消去法
- 得到 $(L_rP_r\cdots L_1P_1)A(Q_1\cdots Q_r)=U$ 为上三角阵
- 记

$$Q = Q_1 \cdots Q_r$$
  
 $P = P_r \cdots P_1$   
 $L = P(L_r P_r \cdots L_1 P_1)^{-1}$ 

则
$$PAQ = LU$$

## L是单位下三角阵

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

• 
$$L = P_r \cdots P_2 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} \cdots P_r L_r^{-1}$$

#### L是单位下三角阵

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

₩ → 4日 〉+

• 
$$L = P_r \cdots P_2 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} \cdots P_r L_r^{-1}$$

• 
$$i \exists L^{(1)} = L_1^{-1}, L^{(k)} = P_k L^{(k-1)} P_k L_k^{-1}$$

## L是单位下三角阵

线性方程组的直接解 法

选主元三角分解

F方根法

• 
$$L = P_r \cdots P_2 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} \cdots P_r L_r^{-1}$$

- $i \exists L^{(1)} = L_1^{-1}, L^{(k)} = P_k L^{(k-1)} P_k L_k^{-1}$
- 归纳证明L(k)具有形式

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} L_{11}^{(k)} & 0 \\ L_{21}^{(k)} & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

其中 $L_{11}^{(k)}$ 是所有元素之模均不大于1的k阶单位下三角阵, $L_{21}^{(k)}$ 是所有元素模均不大于1的(n-k) × k阶矩阵

# 归纳证明之关键

线性方程组的直接解 法

二角形方稈组

选主元三角分解

平方根法

•  $P_k L^{(k-1)} P_k$ 是对 $L^{(k-1)}$ 进行第k, p行和k, p列 $(k \leq p)$ 交换,因此只有 $L_{21}^{(k-1)}$ 交换了两行—类似于魔方中的局部交换技术

## 归纳证明之关键

线性方程组的直接解 法

选主元三角分解

亚士田社

- $P_k L^{(k-1)} P_k$ 是对 $L^{(k-1)}$ 进行第k, p行和k, p列 $(k \leq p)$ 交换,因此只有 $L_{21}^{(k-1)}$ 交换了两行—类似于魔方中的局部交换技术
- 再右乘 $L_k^{-1}$ 则使得 $I_{n-k+1}$ 的第一列发生变化

## 全主元三角分解

线性方程组的直接解 法

**邓**建松

三角形方程组

选主元三角分解

亚方坦辻

• 如前所得的PAQ = LU称为全主元三角 分解

## 全主元三角分解

线性方程组的直接解 法

二用形刀柱组

选主元三角分解

平方根法

• 如前所得的PAQ = LU称为全主元三角 分解

#### 定理

对于n阶方阵,存在排列矩阵P, Q以及单位下三角阵L和上三角阵U使得PAQ = LU, 其中L的所有元素模均不大于I, U的非零对角元的个数恰好等于A的秩

## 选主元的运算量

线性方程组的直接解 法

ル 建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 当*A*非奇异时,选主元需要进行比较的 次数

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1)^2 = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$

## 选主元的运算量

线性方程组的直接解 法

7PXE1A

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 当*A*非奇异时,选主元需要进行比较的 次数

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1)^2 = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$

• 这个计算量几乎是进行Gauss消去的计算量的一半

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

F方根法

• 设经全主元Gauss消去后得 到PAQ = LU, 那么 $PA = LUQ^{-1}$ 

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根注

• 设经全主元Gauss消去后得 到PAQ = LU, 那么 $PA = LUQ^{-1}$ 

• 求解Ly = Pb得到y

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

• 设经全主元Gauss消去后得 到PAQ = LU, 那么 $PA = LUQ^{-1}$ 

- 求解Ly = Pb得到y
- 求解*Uz* = y得到z

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

- 设经全主元Gauss消去后得 到PAQ = LU, 那么 $PA = LUQ^{-1}$
- 求解Ly = Pb得到y
- 求解*Uz* = *y*得到*z*
- 计算x = Qz得到解x,这里即根据记录的交换指标对z进行元素交换即得到x

#### 列主元消去

线性方程组的直接解

选主元三角分解

● 在第k步中只在A<sup>(k-1)</sup>的第k列的元素中寻找模 最大的元素,如此得到PA = LU,称为列主元三 角分解

#### 列主元消去

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

- 在第k步中只在 $A_{22}^{(k-1)}$ 的第k列的元素中寻找模最大的元素,如此得到PA = LU,称为列主元三角分解
- 这里P的元素模不一定全不大于1

#### 列主元消去

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组 **选主元三角分解** 平方根法

- 在第k步中只在 $A_{22}^{(k-1)}$ 的第k列的元素中寻找模最大的元素,如此得到PA = LU,称为列主元三角分解
- 这里P的元素模不一定全不大于1
- 例子: C代码example1\_2\_2()

## 对称正定线性方程组

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组 选主元三角分解 **平方根法**  对一般的方阵,为了消除LU分解的局限性和误差的积累,我们采用选取主元的方法

#### 对称正定线性方程组

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组 选主元三角分解 **平方根法** 

- 对一般的方阵,为了消除LU分解的局限性和误差的积累,我们采用选取主元的方法
- 对于对称正定矩阵而言,不必要选取主元

# Cholesky分解定理

线性方程组的直接解 法 邓母松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

#### 定理

若A为对称正定的,那么存在唯一的对角元均为正数的下三角阵L满足

$$A = LL^T$$

上式称为Cholesky分解, L称为A的Cholesky因子

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选士元三角分配

平方根法

• 对称正定 $\Longrightarrow$ 不需要进行主元选择的Gauss消去法可行 $\Longrightarrow$  存在单位下三角阵 $\widetilde{L}$ 和上三角阵U, 使得 $A=\widetilde{L}U$ 

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

- 对称正定 $\longrightarrow$ 不需要进行主元选择的Gauss消去法可行 $\longrightarrow$  存在单位下三角阵 $\tilde{L}$ 和上三角阵U. 使得 $A=\tilde{L}U$
- 用U的对角元构造矩阵D,  $\tilde{U} = D^{-1}U$ , 则

$$\tilde{U}^T D \tilde{L}^T = A^T = A = \tilde{L} D \tilde{U}$$

线性方程组的直接解

平方根法

- 对称正定⇒不需要讲行主元选择 的Gauss消去法可行⇒⇒存在单位下三 角阵 $\tilde{L}$ 和上三角阵U. 使得 $A = \tilde{L}U$ 
  - 用U的对角元构造矩阵D,  $\tilde{U} = D^{-1}U$ . 则

$$\tilde{U}^T D \tilde{L}^T = A^T = A = \tilde{L} D \tilde{U}$$

我们可有

$$\tilde{L}^T \tilde{U}^{-1} = D^{-1}_{\text{obs}} \tilde{U}^{-T}_{\text{obs}} \tilde{L}_{\text{obs}} \tilde{U}_{\text{obs}} \tilde{$$



线性方程组的直接解 法

一在亚升和加

洗主元三角分解

平方根法

$$\tilde{L}^T \tilde{U}^{-1} = D^{-1} \tilde{U}^{-T} \tilde{L} D$$

•  $\tilde{L}^T \tilde{U}^{-1}$ 是单位上三角阵

线性方程组的直接解 法

一名形士和妲

选主元三角分解

$$\tilde{L}^T \tilde{U}^{-1} = D^{-1} \tilde{U}^{-T} \tilde{L} D$$

- $\tilde{L}^T \tilde{U}^{-1}$ 是单位上三角阵
- $D^{-1}\tilde{U}^{-T}\tilde{L}D$ 是单位下三角阵

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

THE SHARE SEE

$$\tilde{L}^T \tilde{U}^{-1} = D^{-1} \tilde{U}^{-T} \tilde{L} D$$

- $\tilde{L}^T \tilde{U}^{-1}$ 是单位上三角阵
- $D^{-1}\tilde{U}^{-T}\tilde{L}D$ 是单位下三角阵
- 所以两者都是单位阵,即 $\tilde{U} = \tilde{L}^T$

# 分解的构造

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 从而有 $A = \tilde{L}D\tilde{L}^T$ ,而且D的对角元全为正数

## 分解的构造

线性方程组的直接解 法

**小**建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

- 从而有 $A = \tilde{L}D\tilde{L}^T$ ,而且D的对角元全为 正数
- 取 $L = \tilde{L} \operatorname{diag}(\sqrt{u_{11}}, \ldots, \sqrt{u_{nn}})$ ,则有

$$A = LL^T$$



## 分解的构造

#### 线性方程组的直接解 法

**邓**建松

三角形方程组

选士元二角公额

平方根法

- 从而有 $A = \tilde{L}D\tilde{L}^T$ ,而且D的对角元全为 正数
- 取 $L = \tilde{L} \operatorname{diag}(\sqrt{u_{11}}, \ldots, \sqrt{u_{nn}})$ ,则有

$$A = LL^T$$

• 类似可证分解的唯一性



## 方程组的求解

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 计算A的Cholesky分解 $A = LL^T$ 

## 方程组的求解

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

- 计算A的Cholesky分解 $A = LL^T$
- 求解Ly = b得y

## 方程组的求解

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程约

选主元三角分解

平方根法

- 计算A的Cholesky分解 $A = LL^T$
- 求解Ly = b得y
- 求解 $L^T x = y$ 得x

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

在计算分解时,可不必按前方法进行, 而是采用待定系数法

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解 **平方根法** 

- 在计算分解时,可不必按前方法进行, 而是采用待定系数法
- 待定下三角阵 $L = (\ell_{ij})$ , 比较 $A = LL^T$ 两 边对应的元素,可得

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{j} \ell_{ip} \ell_{jp}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$$

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解 **平方根法** 

- 在计算分解时,可不必按前方法进行, 而是采用待定系数法
- 待定下三角阵 $L = (\ell_{ij})$ , 比较 $A = LL^T$ 两 边对应的元素,可得

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{j} \ell_{ip} \ell_{jp}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$$

线性方程组的直接解

- 在计算分解时,可不必按前方法进行, 而是采用待定系数法
- 待定下三角阵 $L = (\ell_{ii})$ , 比较 $A = LL^T$ 两 边对应的元素,可得

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{j} \ell_{ip} \ell_{jp}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$$

- $\text{th} a_{11} = \ell_{11}^2 / 4 \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- 由 $a_{i1} = \ell_{11}\ell_{i1}$ 得 $\ell_{i1} = a_{i1}/\ell_{11}$ , i>1



线性方程组的直接解 法

选主元三角分解

• 设已算出L的前k – 1列元素

线性方程组的直接解 法

**孙**建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

● 设已算出L的前k – 1列元素

• 由
$$a_{kk} = \sum_{p=1}^k \ell_{kp}^2$$
得到

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{kp}^2}$$

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

- 设已算出L的前k-1列元素
- 由 $a_{kk} = \sum_{p=1}^k \ell_{kp}^2$ 得到

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{kp}^2}$$

• 再由 $a_{ik} = \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{ip} \ell_{kp} + \ell_{ik} \ell_{kk}$ 得到

$$\ell_{ij} = \left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{ip} \ell_{kp}\right) / \ell_{kk}$$



线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 也可以按行来进行计算

线性方程组的直接解 法

**进** 十二一 4 八 km

平方根法

- 也可以按行来进行计算
- 可以在A中存贮新计算出来的L

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方規注

- 也可以按行来进行计算
- 可以在A中存贮新计算出来的L
- 上述方法的运算量是 $n^3/3$ ,是Gauss消去 法的一半

## $LDL^{T}$ 分解

线性方程组的直接解 法

邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根注

• 在Cholesky分解中用到了开方运算

## *LDL*<sup>T</sup>分解

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

- 在Cholesky分解中用到了开方运算
- 为了避免开方,可以计算*A*的如下形式 分解

$$A = LDL^T$$

其中L是单位下三角阵,D是对角元均 为正数的对角阵

## *LDL*<sup>T</sup>分解

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

- 在Cholesky分解中用到了开方运算
- 为了避免开方,可以计算*A*的如下形式 分解

$$A = LDL^T$$

其中L是单位下三角阵, D是对角元均为正数的对角阵

• 这是Cholesky分解的变形



## 改进的平方根方法

比较
$$A = LDL^T$$
的对应元素,我们有 $a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} d_k \ell_{jk} + \ell_{ij} d_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$ 则对 $j = 1, \ldots,$ 

$$egin{align} v_k &= d_k \ell_{jk}, \quad d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk} v_k, \ &\ell_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} v_k\right) / d_j, i = j+1, \ldots, n \end{aligned}$$

线性方程组的直接解 法

平方根法

• 实际计算时,可以把L的严格下三角元 素和D的对角元存储在A的对应位置上

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选王兀二用分解

平方根法

- 实际计算时,可以把L的严格下三角元 素和D的对角元存储在A的对应位置上
- 算法运算量也是*n*<sup>3</sup>/3, 而且不需要开方 运算

## 方程组求解

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方規注

• 求得LDL<sup>T</sup>分解后,再只需求解

$$Ly = b, \quad DL^Tx = y$$

就可以得到方程组的解



## 方程组求解

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

• 求得 $LDL^T$ 分解后,再只需求解

$$Ly = b, \quad DL^Tx = y$$

就可以得到方程组的解

如此方法是Gauss消去法的一半,而且 不需要选主元

## 方程组求解

线性方程组的直接解 法 邓建松

三角形方程组

选主元三角分解

• 求得LDL<sup>T</sup>分解后,再只需求解

$$Ly = b, \quad DL^Tx = y$$

就可以得到方程组的解

- 如此方法是Gauss消去法的一半,而且 不需要选主元
- 由构造过程可知 $|\ell_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}}$ ,因此分解中的量受控的,从而计算过程稳定



线性方程组的直接解 法

三角形方稈组

选主元三角分解

平方根法

• C程序example1\_3\_1()

线性方程组的直接解 法

三角形方程组

选主元三角分解

平方根法

- C程序example1\_3\_1()
- C程序example1\_3\_2()

# 线性方程组的敏度分析与消 去法的舍入误差分析

邓建松

2022年9月8日

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 采用某种方法求解了线性方程组后,我们还需要考虑因素

对解的影响

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 采用某种方法求解了线性方程组后,我们还需要考虑因素
  - 数据不准确

对解的影响

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ff

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss消**去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 采用某种方法求解了线性方程组后,我们还需要考虑因素
  - 数据不准确
  - 机器的有限精度

对解的影响

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 采用某种方法求解了线性方程组后,我们还需要考虑因素
  - 数据不准确
  - 机器的有限精度

对解的影响

为此,我们需要用范数来描述向量与矩阵的扰动大小

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 一个从ℝ"到ℝ的非负函数||·||称为ℝ"上的向量范数,是指它满足

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 一个从ℝ"到ℝ的非负函数||·||称为ℝ"上的向量范数,是指它满足
  - 正定性:  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $||x|| \ge 0$ ; 且||x|| = 0当日仅当x = 0

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 一个从ℝ"到ℝ的非负函数||·||称为ℝ"上的向量范数,是指它满足
  - 正定性:  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $||x|| \ge 0$ ;  $\mathbb{E}||x|| = 0$ 当  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]$
  - $\mathring{R}$   $\mathring$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 一个从ℝ"到ℝ的非负函数||·||称为ℝ"上的向量范数,是指它满足

  - 齐次性:  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
  - 三角不等式:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

## 向量范数的性质

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 进程改进 由范数的定义, 易得

•  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|||x|| - ||y||| \le ||x - y|| \le \max_{1 \le i \le n} ||e_i|| \sum_{i=1} |x_i - y_i|$$

## 向量范数的性质

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 由范数的定义,易得

•  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|||x|| - ||y||| \le ||x - y|| \le \max_{1 \le i \le n} ||e_i|| \sum_{i=1}^n |x_i - y_i||$$

● 所以||·||作为ℝ"上的实函数是连续的

# p范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 公标

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 最典型的一类范数是p范数

• 也称为Hölder范数

# p范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 最典型的一类范数是p范数

- 也称为Hölder范数
- $||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, p \ge 1$

# p范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 最典型的一类范数是p范数

- 也称为Hölder范数
- $||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, p \geqslant 1$
- $p = 1, 2, \infty$ 是最常见的,也是最重要的

# 常用的p范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 •  $1\overline{n}$   $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ 

# 常用的p范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 1 $\overline{n}$  $\underline{w}$ :  $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- 2范数:

$$||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \sqrt{x^T x}$$

# 常用的p范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 1 $\overline{n}$  $\underline{w}$ :  $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- 2范数:

$$||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \sqrt{x^T x}$$

•  $\infty$ 范数:  $||x||_{\infty} = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ 

## 范数的等价性

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设 $\|\cdot\|_{\alpha}$ 和 $\|\cdot\|_{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上任意两个范数,则存在正常数 $c_1$ ,  $c_2$ ,使得对一切 $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$c_1||x||_{\alpha} \leqslant ||x||_{\beta} \leqslant c_2||x||_{\alpha}$$

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • (数分练习8.1 第6题)

$$||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \sqrt{n} ||x||_2$$

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • (数分练习8.1 第6题)

$$||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \sqrt{n} ||x||_2$$

• (数分练习8.1 第7题)

$$||x||_{\infty} \leqslant ||x||_2 \leqslant \sqrt{n} ||x||_{\infty}$$

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • (数分练习8.1 第6题)

$$||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \sqrt{n} ||x||_2$$

• (数分练习8.1 第7题)

$$||x||_{\infty} \leqslant ||x||_2 \leqslant \sqrt{n} ||x||_{\infty}$$

显然有

$$||x||_{\infty} \leqslant ||x||_1 \leqslant n||x||_{\infty}$$

# 收敛定理

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设 $x_k \in \mathbb{R}^n$ , 则  $\lim_{k \to \infty} ||x_k - x|| = 0$ 当且仅当

$$\lim_{k\to\infty} \left| x_i^{(k)} - x_i \right| = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

即向量序列的范数收敛等价于其分量收敛

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

7 TV XE-12

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 选供改进 通过把矩阵中的元素"拉直"构成向量, 可以把矩阵的范数定义为拉直后向量的 范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 通过把矩阵中的元素"拉直"构成向量, 可以把矩阵的范数定义为拉直后向量的 范数
- 这种范数称为广义矩阵范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元<mark>Gauss</mark>消去法 的舍入误差分析

- 通过把矩阵中的元素"拉直"构成向量,可以把矩阵的范数定义为拉直后向量的 范数
- 这种范数称为广义矩阵范数
- 矩阵的尺寸是任意的,并不需要是方阵

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元<mark>Gauss消</mark>去法 的舍入误差分析

- 通过把矩阵中的元素"拉直"构成向量,可以把矩阵的范数定义为拉直后向量的 范数
- 这种范数称为广义矩阵范数
- 矩阵的尺寸是任意的,并不需要是方阵
- 如此定义没有考虑矩阵的乘法运算



线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

t性方程组的敏度分 f

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 进程改进

- 一个从 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的非负函数 $\|\cdot\|$ 称为 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的矩阵范数,是指
  - 正定性:  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $||A|| \ge 0$ ; 且||A|| = 0当且仅当A = 0

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 折

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 一个从 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的非负函数 $\|\cdot\|$ 称为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的矩阵范数,是指

- 正定性:  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $||A|| \ge 0$ ;  $\mathbb{L}||A|| = 0$ 当且 仅当A = 0
- 齐次性:  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 近

基本运算的舍入误差分析

列主元<mark>Gauss消</mark>去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 一个从 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的非负函数 $\|\cdot\|$ 称为 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的矩阵范数,是指

- 正定性:  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $||A|| \ge 0$ ;  $\mathbb{L}||A|| = 0$ 当且 仅当A = 0
- 齐次性:  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
- 三角不等式:  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*\*\*

基本运算的舍入误差

列主元<mark>Gauss消</mark>去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 一个从 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的非负函数 $\|\cdot\|$ 称为 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的矩阵范数,是指

- 正定性:  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $||A|| \ge 0$ ;  $\mathbb{L}||A|| = 0$ 当且 仅当A = 0
- 齐次性:  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
- 三角不等式:  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- 相容性:  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$

## 矩阵范数的性质

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • ℝ<sup>n×n</sup>上的矩阵范数可以看作ℝ<sup>n²</sup>上的向 量范数

#### 矩阵范数的性质

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- ℝ″×″上的矩阵范数可以看作ℝ″²上的向 量范数
- ℝn×n上的任意两个矩阵范数是等价的

#### 矩阵范数的性质

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss消**去法 的舍入误差分析

- ℝ<sup>n×n</sup>上的矩阵范数可以看作ℝ<sup>n²</sup>上的向 量范数
- ℝn×n上的任意两个矩阵范数是等价的
- 矩阵序列的范数收敛等价于逐元素收敛

## 矩阵范数与向量范数的协调性

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**『建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

计算解的精度估计和 进程改进 矩阵与向量的乘积是矩阵计算中经常用 到的运算

#### 矩阵范数与向量范数的协调性

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 矩阵与向量的乘积是矩阵计算中经常用 到的运算
- 自然期望矩阵范数与向量范数之间具有 某种协调性:把向量看作特殊的矩阵, 那么定义中的相容性就是所期望的性质

#### 相容性

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 若矩阵范数 $\|\cdot\|_{M}$ 和向量范数 $\|\cdot\|_{v}$ 满足  $\|Ax\|_{v} \leq \|A\|_{M}\|x\|_{v}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^{n}$  则称矩阵范数 $\|\cdot\|_{M}$ 与 $\|\cdot\|_{v}$ 是相容的

#### 相容性

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- 若矩阵范数 $\|\cdot\|_{M}$ 和向量范数 $\|\cdot\|_{v}$ 满足  $\|Ax\|_{v} \leq \|A\|_{M}\|x\|_{v}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^{n}$  则称矩阵范数 $\|\cdot\|_{M}$ 与 $\|\cdot\|_{v}$ 是相容的
- 今后凡同时涉及到向量范数与矩阵范数,都假定它们是相容的

## 相容性

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析 邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- 若矩阵范数 $\|\cdot\|_{M}$ 和向量范数 $\|\cdot\|_{v}$ 满足  $\|Ax\|_{v} \leq \|A\|_{M}\|x\|_{v}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^{n}$  则称矩阵范数 $\|\cdot\|_{M}$ 与 $\|\cdot\|_{v}$ 是相容的
- 今后凡同时涉及到向量范数与矩阵范数,都假定它们是相容的
- 对任意给定的向量范数,我们都可以定义一个矩阵范数,使之与向量范数是相容的



## 从属于向量范数的矩阵范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设||·||是ℝ″上的一个向量范数。若定义

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax||, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 最大值可达到: ||x|| = 1是有界闭集,||·||是连续的

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 最大值可达到: ||x|| = 1是有界闭集,||·||是连续的
- 矩阵与向量乘法的相容性:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \leqslant \|A\|$$

$$\Longrightarrow \|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 正定性: 取 $A \neq 0$ , 不妨设A的第i列是非零向量,即 $Ae_i \neq 0$ . 则

$$0<\|\textit{A}\textit{e}_{\textit{i}}\|\leqslant |\!|\!|\textit{A}|\!|\!|\!|\!| |\!|\textit{e}_{\textit{i}}\|\Longrightarrow |\!|\!|\!|\textit{A}|\!|\!|\!|>0$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**『建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 正定性: 取 $A \neq 0$ , 不妨设A的第i列是非零向量,即 $Ae_i \neq 0$ . 则

$$0 < ||Ae_i|| \leqslant |||A||| ||e_i|| \Longrightarrow |||A||| > 0$$

• 齐次性: 显然

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元<mark>Gauss</mark>消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 三角不等式: 取x, ||x|| = 1使 得||(A+B)x|| = ||A+B||, 则  $||A+B|| = ||(A+B)x|| \le ||Ax|| + ||Bx||$  $\le ||A|| ||x|| + ||B|| ||x|| = ||A|| + ||B||$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ht

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 三角不等式: 取x, ||x|| = 1使 得||(A+B)x|| = ||A+B||, 则

$$||A + B|| = ||(A + B)x|| \le ||Ax|| + ||Bx||$$
  
  $\le ||A|| ||x|| + ||B|| ||x|| = ||A|| + ||B||$ 

• 相容性: 取x, ||x|| = 1使得||ABx|| = |||AB|||,

$$|||AB||| = ||ABx|| \le |||A||| ||Bx||$$
  
 $\le |||A||| ||B||| ||x|| = |||A||| ||B|||$ 

#### 算子范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 55

基本运算的舍入误差 分析

列主元<mark>Gauss</mark>消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 称由

$$||A|| = \max_{\|x\|=1} ||Ax||, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

所定义的范数‖·‖为从属于向量范数‖·‖的矩阵范数,也称为由向量范数‖·‖诱导出的<mark>算子范数</mark>

# 算子范数

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 <sub>近</sub>

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 称由

$$||A|| = \max_{\|x\|=1} ||Ax||, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

所定义的范数‖·‖为从属于向量范数‖·‖的矩阵范数,也称为由向量范数‖·‖诱导出的算子范数

今后仍把||·||记作||·||

# 单位阵的范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 对广义矩阵范数, ||/|| > 0

# 单位阵的范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法的金入误差分析

- 对广义矩阵范数, ||/|| > 0
- 对矩阵范数, ||/|| ≥ 1

# 单位阵的范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 对广义矩阵范数, ||/|| > 0
- 对矩阵范数, ||/|| ≥ 1
- 对算子范数, ||/|| = 1

# 算子范数||·||<sub>p</sub>

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的金λ误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 前面定义了向量的*p*范数

# 算子范数||·||<sub>p</sub>

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 前面定义了向量的p范数
- 由其诱导出矩阵的*p*范数如下:

$$||A||_p = \max_{||x||_p = 1} ||Ax||_p$$

# 算子范数||·||<sub>p</sub>

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 标

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 前面定义了向量的*p*范数
- 由其诱导出矩阵的p范数如下:

$$||A||_p = \max_{||x||_p = 1} ||Ax||_p$$

•  $p = 1, 2, \infty$ 时对应的算子范数具有简捷的表示

#### "列和"范数

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 对于矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 我们有

$$||A||_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

• 记A的第j列为向量 $a_j$ ,不妨 设 $\delta = \|a_1\| = \max_{1 \le i \le n} \|a_j\|_1$ 

# "列和"范数

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 对于矩阵 $A = (a_{ii}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 我们有

$$||A||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

- 记A的第j列为向量 $a_j$ ,不妨设 $\delta = ||a_1|| = \max_{1 \le i \le n} ||a_j||_1$
- $\mathfrak{P}_{x}$ ,  $||x||_1 = 1$ ,  $\mathfrak{P}_{x}$

$$||Ax||_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j a_j \right\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^n |x_j| ||a_j||_1 \leqslant \delta$$

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的全λ误差分析

计算解的精度估计和

• 注意到 $||e_1||_1 = 1$ 

#### 线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*\*

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的全λ误差分析

- 注意到 $||e_1||_1 = 1$
- $||Ae_1||_1 = ||a_1||_1 = \delta$

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- 注意到 $||e_1||_1 = 1$
- $||Ae_1||_1 = ||a_1||_1 = \delta$
- 所以 $\|A\|_1 = \delta = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

#### "行和"范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 对于矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 我们有

$$||A||_{\infty} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

• 对于任意x,  $||x||_{\infty} = 1$ , 我们有

$$||Ax||_{\infty} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j} \right|$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| |x_{j}| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 不妨设*A*中第1行对应向量的1范数最大,取

$$\bar{x} = (\operatorname{sgn} a_{11}, \dots, \operatorname{sgn} a_{1n})^T$$

#### 向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 不妨设*A*中第1行对应向量的1范数最大,取

$$\bar{x} = (\operatorname{sgn} a_{11}, \dots, \operatorname{sgn} a_{1n})^T$$

•  $A \neq 0 \Longrightarrow \|\bar{x}\|_{\infty} = 1$ ,  $\overline{m} \perp \mathbb{R}$ 

$$||A\bar{x}||_{\infty} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

#### 谱范数

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ht

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 对于矩阵 $A = (a_{ii}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 我们有

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\mathsf{max}}(A^T A)}$$

这里 $\lambda_{\text{max}}$ 表示参数矩阵的最大特征值

• 根据定义

$$||A||_2 = \max_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = \max_{||x||_2=1} \sqrt{x^T A^T A x}$$

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 设对称半正定矩阵A<sup>T</sup>A的特征值为

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \lambda_n \geqslant 0$$

对应规范正交特征向量为 $v_1, \cdots, v_n$ 

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 设对称半正定矩阵A<sup>T</sup>A的特征值为

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$$

对应规范正交特征向量为 $v_1, \cdots, v_n$ 

•  $\Re x$ ,  $||x||_2 = 1$ ,  $\Im$ 

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

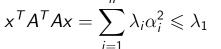
邓建林

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的金λ误差分析



向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 标

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

$$x^T A^T A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leqslant \lambda_1$$

•  $\mathfrak{P}x = \mathsf{v}_1$ ,  $\mathfrak{P}$ 

$$x^T A^T A x = v_1^T A^T A v_1 = v_1^T \lambda_1 v_1 = \lambda_1$$



基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

$$x^T A^T A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leqslant \lambda_1$$

• 取 $x = v_1$ , 则

$$x^T A^T A x = v_1^T A^T A v_1 = v_1^T \lambda_1 v_1 = \lambda_1$$

• 从而

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\mathsf{max}}(A^T A)}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

$$x^T A^T A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leqslant \lambda_1$$

•  $\mathfrak{P} x = v_1$ ,  $\mathfrak{P}$ 

$$x^T A^T A x = v_1^T A^T A v_1 = v_1^T \lambda_1 v_1 = \lambda_1$$

• 从而

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\mathsf{max}}(A^T A)}$$

508 R

•  $A^T A$ 的特征值的开方称为A的<mark>奇异值</mark>

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

40建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 公标

列主元<mark>Gauss</mark>消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 •  $||A||_2 = \max\{|y^T A x| : x, y \in \mathbb{C}^n, ||x||_2 = ||y||_2 = 1\}$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- $||A||_2 = \max\{|y^T A x| : x, y \in \mathbb{C}^n, ||x||_2 = ||y||_2 = 1\}$
- $||A^T||_2 = ||A||_2 = \sqrt{||A^TA||_2}$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- $||A||_2 = \max\{|y^T A x| : x, y \in \mathbb{C}^n, ||x||_2 = ||y||_2 = 1\}$
- $||A^T||_2 = ||A||_2 = \sqrt{||A^T A||_2}$
- 对任意n阶正交阵U, V, 我们有 $\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|A\|_2$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- $||A||_2 = \max\{|y^T A x| : x, y \in \mathbb{C}^n, ||x||_2 = ||y||_2 = 1\}$
- $||A^T||_2 = ||A||_2 = \sqrt{||A^T A||_2}$
- 对任意n阶正交阵U, V, 我们有 $\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|A\|_2$
- $||A||_{\infty} = ||A^T||_1$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓**建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 常用且易于计算的矩阵范数:

$$||A||_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 常用且易于计算的矩阵范数:

$$||A||_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

这是向量2范数的自然推广,也称 为Hilbert-Schmidt范数

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析 邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 常用且易于计算的矩阵范数:

$$||A||_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

- 这是向量2范数的自然推广,也称 为Hilbert-Schmidt范数
- 该范数满足对矩阵乘法的相容性

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析 邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 常用且易于计算的矩阵范数:

$$||A||_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

- 这是向量2范数的自然推广,也称 为Hilbert-Schmidt范数
- 该范数满足对矩阵乘法的相容性
- 该范数与向量的2范数是相容的



线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

• 
$$||AB||_F \leqslant ||A||_2 ||B||_F$$
,  $||AB||_F \leqslant ||A||_F ||B||_2$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

• 
$$||A||_F = \sqrt{\operatorname{trace}(A^T A)}$$

- ||·||<sub>F</sub>是矩阵范数,但它不是算子范数(为什么?)

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

• 
$$||A||_F = \sqrt{\operatorname{trace}(A^T A)}$$

- $||AB||_F \leqslant ||A||_2 ||B||_F$ ,  $||AB||_F \leqslant ||A||_F ||B||_2$
- ||·||<sub>F</sub>是矩阵范数,但它不是算子范数(为什么?)

• 
$$||I||_F = \sqrt{n}$$

# 矩阵范数的性质及等价性

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 公析

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 •  $||A||_2 \le ||A||_F \le \sqrt{n}||A||_2$ 

# 矩阵范数的性质及等价性

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

- $||A||_2 \leqslant ||A||_F \leqslant \sqrt{n}||A||_2$
- $\bullet \max_{i,j} |a_{ij}| \leqslant ||A||_2 \leqslant n \max_{i,j} |a_{ij}|$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

• 
$$||A||_2 \leqslant ||A||_F \leqslant \sqrt{n}||A||_2$$

- $\bullet \max_{i,j} |a_{ij}| \leqslant ||A||_2 \leqslant n \max_{i,j} |a_{ij}|$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

• 
$$||A||_2 \le ||A||_F \le \sqrt{n}||A||_2$$

$$\bullet \max_{i,j} |a_{ij}| \leqslant ||A||_2 \leqslant n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

• 
$$||A||_1/\sqrt{n} \leqslant ||A||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_1$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

• 
$$||A||_2 \leqslant ||A||_F \leqslant \sqrt{n}||A||_2$$

$$\bullet \max_{i,j} |a_{ij}| \leqslant ||A||_2 \leqslant n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

• 
$$||A||_{\infty}/\sqrt{n} \leqslant ||A||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_{\infty}$$

• 
$$||A||_1/\sqrt{n} \leqslant ||A||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_1$$

• 
$$||A||_2 \leqslant \sqrt{||A||_1 ||A||_{\infty}}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 <sup>KE</sup>

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- $||A||_2 \leqslant ||A||_F \leqslant \sqrt{n}||A||_2$
- $\bullet \max_{i,j} |a_{ij}| \leqslant ||A||_2 \leqslant n \max_{i,j} |a_{ij}|$
- $||A||_{\infty}/\sqrt{n} \leqslant ||A||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_{\infty}$
- $||A||_1/\sqrt{n} \leqslant ||A||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_1$
- $||A||_2 \leqslant \sqrt{||A||_1 ||A||_\infty}$
- 利用 $\|A\|_F$ 的trace表达式证明性质1; 利用 $\|A\|_2$ 的 定义,取特殊的x证明2,3,4,5等性质

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- $||A||_2 \leqslant ||A||_F \leqslant \sqrt{n}||A||_2$
- $\bullet \max_{i,j} |a_{ij}| \leqslant ||A||_2 \leqslant n \max_{i,j} |a_{ij}|$
- $||A||_{\infty}/\sqrt{n} \leqslant ||A||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_{\infty}$
- $||A||_1/\sqrt{n} \leqslant ||A||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_1$
- $||A||_2 \leqslant \sqrt{||A||_1 ||A||_\infty}$
- 利用 $\|A\|_F$ 的trace表达式证明性质1; 利用 $\|A\|_2$ 的 定义,取特殊的x证明2,3,4,5等性质
- 各系数是最佳的(为什么?)



# 证明示例: $||A||_2 \leqslant \sqrt{||A||_1 ||A||_\infty}$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

小廷位

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 取 $x \neq 0$ ,使得 $A^T A x = \lambda^2 x$ ,其 中 $\lambda = ||A||_2$ 

# 证明示例: $||A||_2 \leqslant \sqrt{||A||_1 ||A||_\infty}$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- 取 $x \neq 0$ ,使得 $A^T A x = \lambda^2 x$ ,其中 $\lambda = \|A\|_2$
- 那么

$$\lambda^{2} \|x\|_{1} = \|A^{T} A x\|_{1}$$

$$\leq \|A^{T}\|_{1} \|A\|_{1} \|x\|_{1}$$

$$= \|A\|_{\infty} \|A\|_{1} \|x\|_{1}$$

### 谱半径

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*\*

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,则称

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(A)\}$$

为A的<mark>谱半径</mark>,这里 $\lambda(A)$ 表示A的特征 值的全体

## 谱半径与矩阵范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 则

- 对任意矩阵范数||·||, ρ(A) ≤ ||A||;
- 对∀ε > 0, 存在算子范数||·||, 使得

$$||A|| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$$

# $\rho(A) \leqslant ||A||$ 的证明

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 •  $\Re x \neq 0$ ,  $Ax = \lambda x$ ,  $|\lambda| = \rho(A)$ 

# $\rho(A) \leqslant ||A||$ 的证明

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 55

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- $\mathfrak{P} x \neq 0$ ,  $Ax = \lambda x$ ,  $|\lambda| = \rho(A)$
- 则有(xe<sub>1</sub><sup>T</sup>表示以x为第一列的增广矩阵)

$$\rho(A)\|xe_1^T\| = \|\lambda xe_1^T\| = \|Axe_1^T\| \leqslant \|A\|\|xe_1^T\|$$



# $\rho(A) \leqslant ||A||$ 的证明

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

• 
$$\mathfrak{P} x \neq 0$$
,  $Ax = \lambda x$ ,  $|\lambda| = \rho(A)$ 

• 则有(xe<sub>1</sub><sup>T</sup>表示以x为第一列的增广矩阵)

$$\rho(A) \|xe_1^T\| = \|\lambda x e_1^T\| = \|Axe_1^T\| \leqslant \|A\| \|xe_1^T\|$$

• 所以

$$\rho(A) \leqslant ||A||$$

# $||A|| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$ 的证明

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • Jordan分解定理:

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & \\ & \lambda_2 & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & \delta_{n-1} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\delta_i = 1$ 或0

# $||A|| \leq \rho(A) + \varepsilon$ 的证明

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建林

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和

•  $\forall \varepsilon > 0$  $\mathbb{R} D_{\varepsilon} = \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$ 

$$D_{\varepsilon}^{-1}X^{-1}AXD_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_{1} & \varepsilon\delta_{1} & & & & \\ & \lambda_{2} & \varepsilon\delta_{2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & \varepsilon\delta_{n-1} & \\ & & & & \lambda_{n} \end{pmatrix}$$



# $||A|| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$ 的证明

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定义

$$\|G\|_{\varepsilon} = \|(XD_{\varepsilon})^{-1}G(XD_{\varepsilon})\|_{\infty}$$

这是由下述向量范数诱导出的算子范数:

$$||x||_{XD_{\varepsilon}} = ||(XD_{\varepsilon})^{-1}x||_{\infty}$$



线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*\*

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的全λ误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### • 由定义:

$$\|G\|_{XD_{\varepsilon}} = \max_{\|x\|_{XD_{\varepsilon}}=1} \|Gx\|_{XD_{\varepsilon}}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**G**auss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 <sup>失代改讲</sup> • 由定义:

$$\|G\|_{XD_{\varepsilon}} = \max_{\|x\|_{XD_{\varepsilon}}=1} \|Gx\|_{XD_{\varepsilon}}$$

$$\begin{aligned} \|Gx\|_{XD_{\varepsilon}} &= \|(XD_{\varepsilon})^{-1}Gx\|_{\infty} \\ &= \|(XD_{\varepsilon})^{-1}G(XD_{\varepsilon})(XD_{\varepsilon})^{-1}x\|_{\infty} \\ &\leq \|G\|_{\varepsilon}\|x\|_{XD_{\varepsilon}} = \|G\|_{\varepsilon} \end{aligned}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**G**auss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 <sup>失代改讲</sup> • 由定义:

$$\|G\|_{XD_{\varepsilon}} = \max_{\|x\|_{XD_{\varepsilon}}=1} \|Gx\|_{XD_{\varepsilon}}$$

•

$$||Gx||_{XD_{\varepsilon}} = ||(XD_{\varepsilon})^{-1}Gx||_{\infty}$$

$$= ||(XD_{\varepsilon})^{-1}G(XD_{\varepsilon})(XD_{\varepsilon})^{-1}x||_{\infty}$$

$$\leq ||G||_{\varepsilon}||x||_{XD_{\varepsilon}} = ||G||_{\varepsilon}$$

• 所以 $\|G\|_{XD_{\varepsilon}} \leq \|G\|_{\varepsilon}$ .

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

十算解的精度估计和 g代改讲 • 由定义:

$$\|G\|_{XD_{\varepsilon}} = \max_{\|x\|_{XD_{\varepsilon}}=1} \|Gx\|_{XD_{\varepsilon}}$$

•

$$||Gx||_{XD_{\varepsilon}} = ||(XD_{\varepsilon})^{-1}Gx||_{\infty}$$

$$= ||(XD_{\varepsilon})^{-1}G(XD_{\varepsilon})(XD_{\varepsilon})^{-1}x||_{\infty}$$

$$\leq ||G||_{\varepsilon}||x||_{XD_{\varepsilon}} = ||G||_{\varepsilon}$$

- 所以 $\|G\|_{XD_{\varepsilon}} \leq \|G\|_{\varepsilon}$ .
- 由矩阵∞范数的性质, 可知等号成立



# $||A|| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$ 的证明

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*\*

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的全λ误差分析

计算解的精度估计和

#### 从而有

$$||A||_{\varepsilon} = \max_{1 \leq i \leq n} (|\lambda_i| + |\varepsilon \delta_i|) \leq \rho(A) + \varepsilon$$

### 谱半径与收敛

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设
$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$
,

$$\lim_{k\to\infty}A^k=0\Longleftrightarrow\rho(A)<1$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 •  $\mathbb{R}^{\lambda} \in \lambda(A)$ 满足 $|\lambda| = \rho(A)$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

- 取 $\lambda \in \lambda(A)$ 满足 $|\lambda| = \rho(A)$
- $\forall k, \lambda^k \in \lambda(A^k)$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- $\mathbb{R}^{\lambda} \in \lambda(A)$ 满足 $|\lambda| = \rho(A)$
- $\forall k, \lambda^k \in \lambda(A^k)$
- $(\rho(A))^k = |\lambda|^k \leqslant \rho(A^k) \leqslant ||A^k||_2$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- $\mathbb{R}^{\lambda} \in \lambda(A)$ 满足 $|\lambda| = \rho(A)$
- $\forall k, \lambda^k \in \lambda(A^k)$
- $(\rho(A))^k = |\lambda|^k \leqslant \rho(A^k) \leqslant ||A^k||_2$
- 所以有ρ(A) < 1</li>

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的全λ误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 设ρ(A) < 1</li>

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的金λ误差分析

- 设ρ(A) < 1</li>
- 存在算子范数 $\|\cdot\|$ , 使得 $\|A\| < 1$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 设ρ(A) < 1</li>
- 存在算子范数∥⋅∥,使得∥A∥ < 1</li>
- $0 \le ||A^k|| \le ||A||^k \to 0$ ,  $k \to \infty$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 设ρ(A) < 1</li>
- 存在算子范数∥⋅∥,使得∥A∥ < 1</li>
- $0 \leqslant ||A^k|| \leqslant ||A||^k \to 0, \quad k \to \infty$
- 所以  $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ .

# 矩阵级数的收敛性

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

- $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  收敛当且仅当 $\rho(A) < 1$
- 当 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛时我们有 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I A)^{-1}$ 且存在算子范数 $\|\cdot\|$ 使得对 $\forall m \ge 0$

$$\left\| (I - A)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} A^{k} \right\| \leqslant \frac{\|A\|^{m+1}}{1 - \|A\|}$$

### 推论

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 <sup>転</sup>

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数,并假设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\|A\|<1$ ,则I-A可逆

### 推论

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数,并假设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\|A\|<1$ ,则I-A可逆
- ・进一步,若对此范数有∥/∥ = 1, 则

$$||(I-A)^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1-||A||}$$

### 敏度分析的问题描述

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*F

基本运算的舍入误差 公标

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 一个线性方程组Ax = b是由系数矩阵A和右端项b所确定的

## 敏度分析的问题描述

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 一个线性方程组Ax = b是由系数矩阵A和右端项b所确定的
- A或b通常是带有误差的,这些误差相 对于精确值是微小的

## 敏度分析的问题描述

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建**杜

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- 一个线性方程组Ax = b是由系数矩阵A和右端项b所确定的
- A或b通常是带有误差的,这些误差相 对于精确值是微小的
- 这种微小误差对解有何影响?这就是线性方程组的敏感性问题

### 微小扰动

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*5

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 确实有方程组,系数的小扰动使解产生 巨大变化。Mathematica2.2.1.nb

#### 微小扰动

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

**向量与矩阵的范数** 

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss消**去法 的舍入误差分析

- 确实有方程组,系数的小扰动使解产生 巨大变化。Mathematica2.2.1.nb
- 对于Ax = b, 经扰动后变为

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

#### 微小扰动

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析 邓建林

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 确实有方程组,系数的小扰动使解产生 巨大变化。Mathematica2.2.1.nb
- 对于Ax = b, 经扰动后变为

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

• 利用Ax = b简化后

$$(A + \delta A)\delta x = \delta b - (\delta A)x$$

线性方程组的敏度分 \*\*

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • A非奇异,由前述推论,当 $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$ 时, $I + A^{-1}\delta A$ 可逆,而且若 $\|I\| = 1$ 则

$$\|(I+A^{-1}\delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}$$



自量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • A非奇异,由前述推论,当 $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$ 时, $I + A^{-1}\delta A$ 可逆,而且若 $\|I\| = 1$ 则

$$\|(I+A^{-1}\delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}$$

• 从而 $A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$ 非奇异,

$$\delta x = (A + \delta A)^{-1} (\delta b - (\delta A)x)$$
$$= (I + A^{-1} \delta A)^{-1} A^{-1} (\delta b - (\delta A)x)$$

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*\*

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### • 两边取范数

$$\|\delta x\| \leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| (\|\delta b\| + \|\delta A\| \|x\|)$$
$$\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} (\|\delta b\| + \|\delta A\| \|x\|)$$

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 两边取范数

$$\|\delta x\| \leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| (\|\delta b\| + \|\delta A\| \|x\|)$$
$$\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} (\|\delta b\| + \|\delta A\| \|x\|)$$

• 当 $x \neq 0$ , 注意到 $\|b\| \leq \|A\| \|x\|$ , 上式两边同除以 $\|x\|$ 我们有

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \left( \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

邓建村

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

 $\|\cdot\|$ 是一个满足 $\|I\|$  = 1的矩阵范数,A非奇异, $b \neq 0$ , $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$ . 若x和 $x + \delta x$ 分别是Ax = b和 $(A + \delta x)(x + \delta x) = b + \delta b$ 的解,则 $(\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|)$ 

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 当||δA||/||A||较小时,

$$rac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)rac{\|\delta A\|}{\|A\|}}pprox \kappa(A)$$

# $\kappa(A)$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 当||δA||/||A||较小时,

$$rac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)rac{\|\delta A\|}{\|A\|}}pprox \kappa(A)$$

• 从而有

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \lesssim \kappa(A) \left( \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

小姓位

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*5

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • x的相对误差的上界是b和A的相对误差 之和乘以 $\kappa(A)$ 

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

**向量与矩阵的范**数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- x的相对误差的上界是b和A的相对误差 之和乘以 $\kappa(A)$
- 扰动对方程组解的影响大小与κ(A)密切相关

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- x的相对误差的上界是b和A的相对误差 之和乘以 $\kappa(A)$
- 扰动对方程组解的影响大小与κ(A)密切相关
  - 若 $\kappa(A)$ 不大,则扰动对解的影响也不会太大

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

**向量与矩阵的范**数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- x的相对误差的上界是b和A的相对误差 之和乘以 $\kappa(A)$
- 扰动对方程组解的影响大小与κ(A)密切相关
  - 若 $\kappa$ (A)不大,则扰动对解的影响也不会太大

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- x的相对误差的上界是b和A的相对误差 之和乘以 $\kappa(A)$
- 扰动对方程组解的影响大小与κ(A)密切相关
  - 若 $\kappa$ (A)不大,则扰动对解的影响也不会太大
  - 若 $\kappa(A)$ 很大,则扰动对解的影响可能就很大
- $\kappa(A)$ 称为线性方程组Ax = b的条件数



#### 病态与良态方程组

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 公标

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 条件数在一定程度上刻画了扰动对方程 组解的影响程度

### 病态与良态方程组

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析 邓建林

**向量与矩阵的范**数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- 条件数在一定程度上刻画了扰动对方程 组解的影响程度
- 若条件数很大,就称该线性方程组的求解问题是病态的,有时也直接称A是病态的

### 病态与良态方程组

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析 邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 条件数在一定程度上刻画了扰动对方程 组解的影响程度
- 若条件数很大,就称该线性方程组的求解问题是病态的,有时也直接称A是病态的
- 若条件数很小,就称该线性方程组的求解问题是良态的,有时也直接称A是良态的



### 条件数与范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 条件数与所采用的范数有关

### 条件数与范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 条件数与所采用的范数有关
- 可以通过在条件数上加下标表明所采用的范数:  $\kappa_2(A)$

## 条件数与范数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 条件数与所采用的范数有关
- 可以通过在条件数上加下标表明所采用的范数:  $\kappa_2(A)$
- 病态、良态性是否与范数有关呢?

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**『建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*F

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 由矩阵范数的等价性可知任两个范数意义下的条件数也是等价的

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 由矩阵范数的等价性可知任两个范数意义下的条件数也是等价的
- $\frac{1}{n}\kappa_2(A) \leqslant \kappa_1(A) \leqslant n\kappa_2(A)$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

. \_ . . . . . . .

线性方程组的敏度分 \*\*

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 由矩阵范数的等价性可知任两个范数意义下的条件数也是等价的
- $\frac{1}{n}\kappa_2(A) \leqslant \kappa_1(A) \leqslant n\kappa_2(A)$
- $\frac{1}{n}\kappa_{\infty}(A) \leqslant \kappa_2(A) \leqslant n\kappa_{\infty}(A)$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

. \_ . . . . . . . .

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- 由矩阵范数的等价性可知任两个范数意义下的条件数也是等价的
- $\frac{1}{n}\kappa_2(A) \leqslant \kappa_1(A) \leqslant n\kappa_2(A)$
- $\frac{1}{n}\kappa_{\infty}(A) \leqslant \kappa_2(A) \leqslant n\kappa_{\infty}(A)$
- $\frac{1}{n^2}\kappa_1(A) \leqslant \kappa_\infty(A) \leqslant n^2\kappa_1(A)$

### 矩阵求逆

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 设 $\|\cdot\|$ 是满足 $\|I\|$  = 1的矩阵范数,A非奇异,且 $\|A^{-1}\|\|\delta A\|$  < 1, 则A +  $\delta A$ 也是非奇异的,而且有

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

### 矩阵求逆

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 设 $\|\cdot\|$ 是满足 $\|I\|$  = 1的矩阵范数,A非奇异,且 $\|A^{-1}\|\|\delta A\|$  < 1, 则A +  $\delta A$ 也是非奇异的,而且有

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\leqslant \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

• 
$$(A + \delta A)^{-1} - A^{-1} = (A + \delta A)^{-1} (\delta A) A^{-1}$$

## 矩阵求逆

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析 邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 设 $\|\cdot\|$ 是满足 $\|I\|$  = 1的矩阵范数,A非奇异,且 $\|A^{-1}\|\|\delta A\|$  < 1, 则A +  $\delta A$ 也是非奇异的,而且有

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\leqslant \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

• 
$$(A + \delta A)^{-1} - A^{-1} = (A + \delta A)^{-1} (\delta A) A^{-1}$$

 $\bullet$  这表明 $\kappa(A)$ 也可以看作矩阵求逆问题的条件数

### 条件数的几何意义

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设A非奇异,

$$\min\left\{rac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}:A+\delta A$$
奇异 $ight\}=rac{1}{\kappa_2(A)}$ 

• 即在谱范数下,矩阵的条件数的倒数恰好等于 该矩阵与全体奇异矩阵所成集合的相对距离

## 条件数的几何意义

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

**向量与矩阵的范**数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设A非奇异,

$$\min\left\{rac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}:A+\delta A$$
奇异 $ight\}=rac{1}{\kappa_2(A)}$ 

- 即在谱范数下,矩阵的条件数的倒数恰好等于 该矩阵与全体奇异矩阵所成集合的相对距离
- 当A十分病态时,它与一个奇异矩阵十分靠近

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

7 P XETA

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 只需证明:

$$\min \{ \|\delta A\|_2 : A + \delta A$$
奇异 $\} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$ 

• 由推论,当 $\|A^{-1}\|_2\|\delta A\|_2 < 1$ 时, $A + \delta A$ 非奇异,从而有

$$\min\left\{\|\delta A\|_2: A + \delta A \hat{\sigma} \right\} \geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 由于谱范数是向量2范数诱导出的算子范数, 所以存在x,  $||x||_2 = 1$ , 使得 $||A^{-1}x||_2 = ||A^{-1}||_2$ 

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 由于谱范数是向量2范数诱导出的算子范数, 所以存在x,  $||x||_2 = 1$ , 使得 $||A^{-1}x||_2 = ||A^{-1}||_2$ 

$$(A + \delta A)y = Ay + (\delta A)y$$
  
=  $\frac{x}{\|A^{-1}x\|_2} - \frac{x}{\|A^{-1}\|_2}$   
= 0

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 由于谱范数是向量2范数诱导出的算子范数, 所以存在x,  $||x||_2 = 1$ , 使得 $||A^{-1}x||_2 = ||A^{-1}||_2$ 

• 
$$\diamondsuit y = \frac{A^{-1}x}{\|A^{-1}x\|_2}, \ \delta A = -\frac{xy'}{\|A^{-1}\|_2} \ \mathbb{M} \|y\|_2 = 1\overline{\mathbb{M}}$$

$$\mathbb{H}.$$

$$(A + \delta A)y = Ay + (\delta A)y$$
  
=  $\frac{x}{\|A^{-1}x\|_2} - \frac{x}{\|A^{-1}\|_2}$   
= 0

• 这说明A的秩1校正 $A + \delta A$ 奇异

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### • 注意到

$$\begin{split} \|\delta A\|_2 &= \max_{\|z\|_2 = 1} \left\| \frac{xy^T}{\|A^{-1}\|_2} z \right\|_2 \\ &= \frac{\|x\|_2}{\|A^{-1}\|_2} \max_{\|z\|_2 = 1} |y^T z| \\ &= \frac{1}{\|A^{-1}\|_2} \end{split}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*F

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 注意到

$$\begin{split} \|\delta A\|_2 &= \max_{\|z\|_2 = 1} \left\| \frac{xy^T}{\|A^{-1}\|_2} z \right\|_2 \\ &= \frac{\|x\|_2}{\|A^{-1}\|_2} \max_{\|z\|_2 = 1} |y^T z| \\ &= \frac{1}{\|A^{-1}\|_2} \end{split}$$

• 这说明 $\|\delta A\|_2 = \|A^{-1}\|_2^{-1}$ 

#### 浮点数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

自量与矩阵的<u>范</u>数

线性方程组的敏度分 ff

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 计算机中浮点数f可表示为

$$f = \pm w \times \beta^J$$
,  $L \leqslant J \leqslant U$ 

其中 $\beta$ 是机器所用浮点数的基底,

J是阶,w是尾数

#### 浮点数

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

**向量与矩阵的范**数

战性方程组的敏度分 <sub>6</sub>

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 计算机中浮点数f可表示为

$$f = \pm w \times \beta^J, \quad L \leqslant J \leqslant U$$

其中 $\beta$ 是机器所用浮点数的基底,J是阶,w是尾数

• 尾数的一般形式为 $w = 0.d_1d_2\cdots d_t$ , 其中t是尾数位数,称为字长, $0 \le d_i < \beta$ .

# 浮点数

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析
邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 计算机中浮点数f可表示为

$$f = \pm w \times \beta^J$$
,  $L \leqslant J \leqslant U$ 

其中 $\beta$ 是机器所用浮点数的基底,

J是<mark>阶,w是尾数</mark>

- 尾数的一般形式为 $w = 0.d_1d_2\cdots d_t$ , 其中t是尾数位数,称为字长, $0 \le d_i < \beta$ .

#### 浮点数全体

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 计算机系统的浮点数全体是

$$\mathcal{F} = \{0\} \cup \{f : f = \pm 0. d_1 d_2 \cdots d_t \times \beta^J, \\ 0 \leqslant d_i < \beta, \\ d_1 \neq 0, L \leqslant J \leqslant U\}$$

# 浮点数全体

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 计算机系统的浮点数全体是

$$\mathcal{F} = \{0\} \cup \{f : f = \pm 0.d_1 d_2 \cdots d_t \times \beta^J, \\ 0 \leqslant d_i < \beta, \\ d_1 \neq 0, L \leqslant J \leqslant U\}$$

• 可以用四元数组( $\beta$ , t, L, U)描述 $\mathcal{F}$ . 典型取值是(2, 56, -63, 64)

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 •  $\mathcal{F}$ 中元素个数 为2( $\beta-1$ ) $\beta^{t-1}(U-L+1)+1$ ,它们对 称地分布在[m,M]和[-M,-m]中,这 里 $m=\beta^{L-1}$ ,  $M=\beta^U(1-\beta^{-t})$ 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- $\mathcal{F}$ 中元素个数 为2( $\beta-1$ ) $\beta^{t-1}(U-L+1)+1$ ,它们对 称地分布在[m,M]和[-M,-m]中,这 里 $m=\beta^{L-1}$ ,  $M=\beta^U(1-\beta^{-t})$ 
  - 最小正数为 $0.1 \times \beta^{L} = \beta^{L-1}$ , 其中0.1为 $\beta$ 进制数

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- $\mathcal{F}$ 中元素个数 为2( $\beta-1$ ) $\beta^{t-1}(U-L+1)+1$ ,它们对 称地分布在[m,M]和[-M,-m]中,这 里 $m=\beta^{L-1}$ ,  $M=\beta^U(1-\beta^{-t})$ 
  - 最小正数为 $0.1 \times \beta^{L} = \beta^{L-1}$ , 其中0.1为 $\beta$ 进制数
  - 最大正数为0.  $(\beta-1)\cdots(\beta-1)\times\beta^U$  t位

小廷化

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss消**去法 的舍入误差分析

- $\mathcal{F}$ 中元素个数 为2( $\beta-1$ ) $\beta^{t-1}(U-L+1)+1$ ,它们对 称地分布在[m,M]和[-M,-m]中,这 里 $m=\beta^{L-1}$ ,  $M=\beta^U(1-\beta^{-t})$ 
  - 最小正数为 $0.1 \times \beta^{L} = \beta^{L-1}$ , 其中0.1为 $\beta$ 进制数
  - 最大正数为0.  $(\beta-1)\cdots(\beta-1)\times\beta^U$ t位.
- 这些数在区间中非均匀分布

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 6

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • F是有限集,所以不能表示[m, M],[-M, -m]中所有实数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

战性方程组的敏度分 --

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法的金入误差分析

计算解的精度估计和 选供改进

- $\mathcal{F}$ 是有限集,所以不能表示[m, M], [-M, -m]中所有实数
  - 0.584635无法用4位10进制浮点数表示

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

性方程组的敏度分 :

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 选供改进

- $\mathcal{F}$ 是有限集,所以不能表示[m, M], [-M, -m]中所有实数
  - 0.584635无法用4位10进制浮点数表示
  - 两个t位浮点数的乘积一般需要2t位浮点数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- $\mathcal{F}$ 是有限集,所以不能表示[m, M], [-M, -m]中所有实数
  - 0.584635无法用4位10进制浮点数表示
  - 两个t位浮点数的乘积一般需要2t位浮点数
- 因此舍入误差不可避免

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 记实数x的浮点数表示为fl(x)

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 fr

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 记实数x的浮点数表示为fl(x)
- 若x = 0, 则f(x) = 0

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 fr

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

- 记实数x的浮点数表示为fl(x)
- 若x = 0, 则f(x) = 0
- 若 $m \leq |x| \leq M$ ,

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

**向量与矩阵的范**数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 记实数x的浮点数表示为fl(x)
- 若x = 0, 则fl(x) = 0
- 若 $m \leqslant |x| \leqslant M$ ,
  - 舍入法: 取f(x)为F中最接近于x的数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

**向量与矩阵的范**数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 记实数x的浮点数表示为fl(x)
- - 舍入法: 取f(x)为F中最接近于x的数
  - 截断法: 取f(x)为 $\mathcal{F}$ 中满足 $|f| \leq |x|$ 且最接近于x的数

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

与具具短陈的翡彩

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- 记实数x的浮点数表示为fl(x)
- 若x = 0, 则f(x) = 0
- 若 $m \leqslant |x| \leqslant M$ ,
  - 舍入法: 取f(x)为F中最接近于x的数
  - 截断法: 取f(x)为 $\mathcal{F}$ 中满足 $|f| \leq |x|$ 且最接近于x的数
  - 例:  $(\beta, t, L, U) = (10, 3, 0, 2)$ , x = 5.45627, 舍入法时引 $(x) = 0.546 \times 10$ , 截断法时引 $(x) = 0.545 \times 10$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 fr

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### ● 定义机器精度u为

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \beta^{1-t}/2 & \text{舍入法} \\ \beta^{1-t} & \text{截断法} \end{cases}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 5

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 定义机器精度u为

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \beta^{1-t}/2 & \text{舍入法} \\ \beta^{1-t} & \text{截断法} \end{cases}$$

● 由于 $t \ge 1$ , 我们有 $u \in (0,1]$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 5

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 定义机器精度u为

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \beta^{1-t}/2 & \text{舍入法} \\ \beta^{1-t} & \text{截断法} \end{cases}$$

● 由于 $t \ge 1$ , 我们有 $u \in (0,1]$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

ᄽᄮᆛᆉᅼᄓᄱᄼᄼᅜᅡᆄ

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 ● 定义机器精度u为

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \beta^{1-t}/2 & \text{舍入法} \\ \beta^{1-t} & \text{截断法} \end{cases}$$

● 由于 $t \ge 1$ , 我们有 $u \in (0,1]$ 

#### 定理

设 $m \leq |x| \leq M$ ,则

$$fl(x) = x(1+\delta), \quad |\delta| \leq \mathbf{u}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 不妨设x > 0, 取 $\alpha$ 使得

$$\beta^{\alpha-1} \leqslant x < \beta^{\alpha}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 不妨设x > 0, 取 $\alpha$ 使得

$$\beta^{\alpha-1} \leqslant x < \beta^{\alpha}$$

• 在[ $\beta^{\alpha-1}$ ,  $\beta^{\alpha}$ )中浮点数的阶为 $\alpha$ , 所以在这个区间中所有t位的浮点数以间距 $\beta^{\alpha-t}$ 均匀分布

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

十算解的精度估计和 迭代改进 • 对于舍入法,

$$|\operatorname{fl}(x)-x| \leqslant \frac{1}{2}\beta^{\alpha-t} = \frac{1}{2}\beta^{\alpha-1}\beta^{1-t} \leqslant \frac{1}{2}x\beta^{1-t}$$

从而有

$$\frac{|\operatorname{fl}(x) - x|}{x} \leqslant \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

. . \_ . .

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 <sup>胚</sup>

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 对于截断法,

$$|\operatorname{fl}(x) - x| \leqslant \beta^{\alpha - t} = \beta^{\alpha - 1}\beta^{1 - t} \leqslant x\beta^{1 - t}$$

从而有

$$\frac{|\operatorname{fl}(x) - x|}{x} \leqslant \beta^{1-t}$$

# 注解

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 <sup>15</sup>

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 有时为了使用方便,我们也将上述结果 表示为

$$fl(x) = \frac{x}{1+\delta}, \quad |\delta| \leqslant \mathbf{u}$$

# 注解

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

117,000

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 有时为了使用方便,我们也将上述结果 表示为

$$fl(x) = \frac{x}{1+\delta}, \quad |\delta| \leqslant \mathbf{u}$$

• 为此,只需要在证明中考 虑 |f(x) - x| 相对于f(x) 的界即可

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 对于舍入法,

$$\beta^{\alpha-1} \leqslant x < \beta^{\alpha} \Longrightarrow \beta^{\alpha-1} \leqslant \mathrm{fl}(x) \leqslant \beta^{\alpha}$$

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

# • 对于舍入法, $\beta^{\alpha-1} \leqslant x < \beta^{\alpha} \Longrightarrow \beta^{\alpha-1} \leqslant fl(x) \leqslant \beta^{\alpha}$

从而

$$|\operatorname{fl}(x) - x| \le \frac{1}{2}\beta^{\alpha - t} = \frac{1}{2}\beta^{\alpha - 1}\beta^{1 - t} \le \frac{1}{2}\operatorname{fl}(x)\beta^{1 - t}$$

从而有

$$\frac{|\operatorname{fl}(x) - x|}{\operatorname{fl}(x)} \leqslant \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 对于截断法,

$$\beta^{\alpha-1} \leqslant x < \beta^{\alpha} \Longrightarrow \beta^{\alpha-1} \leqslant \mathrm{fl}(x) < \beta^{\alpha}$$

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 对于截断法,

$$\beta^{\alpha-1} \leqslant x < \beta^{\alpha} \Longrightarrow \beta^{\alpha-1} \leqslant \mathrm{fl}(x) < \beta^{\alpha}$$

从而

$$|\operatorname{fl}(x) - x| \leqslant \beta^{\alpha - t} = \beta^{\alpha - 1} \beta^{1 - t} \leqslant \operatorname{fl}(x) \beta^{1 - t}$$

从而有

$$\frac{|\operatorname{fl}(x) - x|}{\operatorname{fl}(x)} \leqslant \beta^{1-t}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的全λ误差分析

计算解的精度估计和

设a, b ∈ F

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 55

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

- 设a, b ∈ F
- 用o表示+, -, ×, ÷中任意一种运算

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

社大程组的敏度分 f

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

- 设a, b ∈ F
- 用o表示+, -, ×, ÷中任意一种运算
- fl(a o b)表示先把a, b看作实数进行运算,然后再按舍入规则把结果转化为浮点数。运算时若|a o b| > M或0 < |a o b| < m,则发生了上溢或下溢</li>

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

小娃』

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 设a, b ∈ F
- 用o表示+, -, ×, ÷中任意一种运算
- fl(a o b)表示先把a, b看作实数进行运算,然后再按舍入规则把结果转化为浮点数。运算时若|a o b| > M或0 < |a o b| < m,则发生了上溢或下溢</li>
- 在不发生溢出时,由前述定理可有

$$f(a \circ b) = (a \circ b)(1 + \delta), \quad |\delta| \leqslant \mathbf{u}$$

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 F

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 设x, y是两个由浮点数构成的n维向量。试估计 $|fl(x^Ty) - x^Ty|$ 的上界

$$\bullet \ \diamondsuit S_k = \mathrm{fl}\left(\sum_{i=1}^k x_i y_i\right)$$

$$S_{1} = x_{1}y_{1}(1 + \gamma_{1}), \quad |\gamma_{1}| \leq \mathbf{u}$$

$$S_{k} = \mathrm{fl}(S_{k-1} + \mathrm{fl}(x_{k}y_{k}))$$

$$= (S_{k-1} + x_{k}y_{k}(1 + \gamma_{k}))(1 + \delta_{k}),$$

$$|\delta_{k}|, |\gamma_{k}| \leq \mathbf{u}$$

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #-

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### • 于是有

$$fl(x^Ty) = S_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i (1 + \gamma_i) \prod_{j=i}^n (1 + \delta_j)$$
$$= \sum_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i) x_i y_i,$$

其中

$$1 + \varepsilon_i = (1 + \gamma_i) \prod_{i=1}^{n} (1 + \delta_i), \delta_1 = 0$$

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 所以我们得到

$$|\operatorname{fl}(x^T y) - x^T y| \leqslant \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| |x_i y_i|$$
  
 $\leqslant 1.01 n \mathbf{u} \sum_{i=1}^n |x_i y_i|$ 

这里我们用到了当给定条件 $nu \leq 0.01$ 时,后面马上要证明的结论

**台景与钻阵的**游》

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 所以我们得到

$$|\operatorname{fl}(x^{T}y) - x^{T}y| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_{i}| |x_{i}y_{i}|$$

$$\leqslant 1.01 \operatorname{nu} \sum_{i=1}^{n} |x_{i}y_{i}|$$

这里我们用到了当给定条件 $nu \leq 0.01$ 时,后面马上要证明的结论

• 上式表明若 $|x^Ty| \ll \sum_{i=1}^n |x_iy_i|$ ,则fl $(x^Ty)$ 的相对误差可能会很大



邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

$$1 - 1.01$$
nu  $\leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + \delta_i) \leqslant 1 + 1.01$ nu

或写成

i=1

$$\prod_{i=1}^{n} (1+\delta_i) = 1+\delta, \quad |\delta| \leqslant 1.01$$
nu

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 <sub>近</sub>

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 由于 $|\delta_i| \leq \mathbf{u}$ , 所以

$$(1-\mathbf{u})^n\leqslant\prod_{i=1}^n(1+\delta_i)\leqslant(1+\mathbf{u})^n$$

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 失代改进 • 由于 $|\delta_i| \leq \mathbf{u}$ , 所以

$$(1-\mathsf{u})^n\leqslant\prod_{i=1}^n(1+\delta_i)\leqslant(1+\mathsf{u})^n$$

• 由于当 $x \in (0,1)$ 时 $1 - nx \leqslant (1-x)^n$ , 所以

$$1-1.01n\mathbf{u}\leqslant 1-n\mathbf{u}\leqslant (1-\mathbf{u})^n$$

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 ● 注意到e<sup>x</sup>的Taylor展开式

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + x + \frac{x}{2} \cdot x \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{2x^{2}}{4!} + \cdots\right)$$

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 ● 注意到e<sup>x</sup>的Taylor展开式

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + x + \frac{x}{2} \cdot x \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{2x^{2}}{4!} + \cdots\right)$$

• 所以当 $x \in [0, 0.01]$ 时,(注:  $e^{0.01} \approx 1.01$ )

$$1 + x \le e^x \le 1 + x + \frac{0.01}{2}xe^x \le 1 + 1.01x$$

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 在左端不等式中取 $x = \mathbf{u}$ ,得到

$$(1+u)^n \leqslant e^{n\mathbf{u}}$$

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 在左端不等式中取 $x = \mathbf{u}$ , 得到

$$(1+u)^n \leqslant e^{n\mathbf{u}}$$

• 在右端不等式中取x = nu,

$$e^{n\mathbf{u}} \leqslant 1 + 1.01n\mathbf{u}$$

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 在左端不等式中取x = u, 得到

$$(1+u)^n \leqslant e^{n\mathbf{u}}$$

• 在右端不等式中取x = nu,

$$e^{n\mathbf{u}} \leqslant 1 + 1.01n\mathbf{u}$$

• 综合得到 $(1 + \mathbf{u})^n \leq 1 + 1.01n\mathbf{u}$ 

### 矩阵计算

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的全λ误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 取n阶方阵E, 定义记号 $|E| = (|e_{ij}|)$ 

#### 矩阵计算

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ss

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 取n阶方阵E, 定义记号 $|E| = (|e_{ii}|)$
- 规定 $|E| \leq |F| \iff |e_{ij}| \leq |f_{ij}|$ ,  $i, j = 1, \ldots, n$

#### 矩阵计算

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏质

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

十算解的精度估计和 迭代改进

- 取n阶方阵E, 定义记号 $|E| = (|e_{ii}|)$
- 规定 $|E| \leqslant |F| \iff |e_{ij}| \leqslant |f_{ij}|,$  $i, j = 1, \dots, n$
- 设 $A, B \in \mathcal{F}^{n \times n}$ ,  $\alpha \in \mathcal{F}$ , 则

$$fl(\alpha A) = \alpha A + E, |E| \le \mathbf{u} |\alpha A|,$$
  
$$fl(A + B) = (A + B) + E, |E| \le \mathbf{u} |A + B|$$

#### 矩阵乘积

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 st

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 基于前面的例子, 我们可有

$$\mathrm{fl}(AB) = AB + E, |E| \leqslant 1.01 n\mathbf{u}|A||B|$$

#### 矩阵乘积

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 <sup>近</sup>

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 基于前面的例子, 我们可有

$$\mathrm{fl}(AB) = AB + E, |E| \leqslant 1.01 n\mathbf{u}|A||B|$$

• 注意|AB|可能比|A||B|小得多

#### 矩阵乘积

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 标

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 基于前面的例子, 我们可有

$$\mathrm{fl}(AB) = AB + E, |E| \leqslant 1.01 n\mathbf{u}|A||B|$$

- 注意|AB|可能比|A||B|小得多
- 计算内积时,我们通常会先用双精度进行计算,然后再舍入到单精度数

#### 向前误差分析

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 f

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的金入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 上述舍入误差界,是通过估计计算解与 精确解之间的误差得到

#### 向前误差分析

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 fr

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 上述舍入误差界,是通过估计计算解与 精确解之间的误差得到
- 界与精确解有关

#### 向前误差分析

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

/1/X±1

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 上述舍入误差界,是通过估计计算解与 精确解之间的误差得到
- 界与精确解有关
- 这种误差分析的方法称为向前误差分析 法

### 再议矩阵乘法

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

与具上短床的共變

线性方程组的敏度分 st

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 ● 假设A, B是两个2×2的上三角阵,则

$$\mathrm{fl}(AB) = \left( \begin{array}{cc} a_{11}b_{11}(1+arepsilon_1) & \tilde{a}_{12} \\ 0 & a_{22}b_{22}(1+arepsilon_5) \end{array} 
ight)$$

其中

$$\tilde{a}_{12} = (a_{11}b_{12}(1+\varepsilon_2) + a_{12}b_{22}(1+\varepsilon_3))(1+\varepsilon_4),$$
  
 $|\varepsilon_i| \leq \mathbf{u}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$ 

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进



$$egin{aligned} ilde{A} &= \left(egin{array}{cc} a_{11} & a_{12}(1+arepsilon_3)(1+arepsilon_4) \ 0 & a_{22}(1+arepsilon_5) \end{array}
ight) \ ilde{B} &= \left(egin{array}{cc} b_{11}(1+arepsilon_1) & b_{12}(1+arepsilon_2)(1+arepsilon_4) \ 0 & b_{22} \end{array}
ight) \end{aligned}$$

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 💠

$$egin{aligned} ilde{A} &= \left(egin{array}{cc} a_{11} & a_{12}(1+arepsilon_3)(1+arepsilon_4) \ 0 & a_{22}(1+arepsilon_5) \end{array}
ight) \ ilde{B} &= \left(egin{array}{cc} b_{11}(1+arepsilon_1) & b_{12}(1+arepsilon_2)(1+arepsilon_4) \ 0 & b_{22} \end{array}
ight) \end{aligned}$$

• 则可证 $f(AB) = \tilde{A}\tilde{B}$ , 其中 $\tilde{A} = A + E$ ,  $|E| \leq 3\mathbf{u}|A|$ :  $\tilde{B} = B + F$ ,  $|F| \leq 3\mathbf{u}|B|$ 

#### 向后误差分析

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

自景与短陈的蓝》

线性方程组的敏度分 5

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • fl(AB)是有了微小扰动的两个矩阵 $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ 的精确乘积

#### 向后误差分析

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

**向量与矩阵的范**数

t性方程组的敏度分 f

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- fl(AB)是有了微小扰动的两个矩阵Ã,
   B的精确乘积
- 这种把计算过程产生的误差归结为具有 误差的原始数据的精确运算的分析方法 称为向后误差分析法

#### 向后误差分析

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析 邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- fl(AB)是有了微小扰动的两个矩阵 $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ 的精确乘积
- 这种把计算过程产生的误差归结为具有 误差的原始数据的精确运算的分析方法 称为向后误差分析法
- 这种方法把浮点数的运算转化为实数的 精确运算,从而可以在分析过程中便利 地应用实数的代数运算法则

# 列主元Gauss消去法的舍入误差 分析

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和

本节我们利用浮点数基本运算的舍入误差理论对求 解线性方程组的列主元Gauss消去法进行向后误差分 析

• 将证明用列主元Gauss消去法求解Ax = b时,它的计算解x满足

$$(A+E)\tilde{x}=b$$



# 列主元Gauss消去法的舍入误差 分析

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 进程改进 本节我们利用浮点数基本运算的舍入误差理论对求 解线性方程组的列主元Gauss消去法进行向后误差分 析

• 将证明用列主元Gauss消去法求解Ax = b时,它的计算解x满足

$$(A+E)\tilde{x}=b$$

• 并且给出误差矩阵E的上界估计

### 三角分解时的舍入误差

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设 $n \times n$ 浮点数矩阵 $A = (a_{ij})$ 有三角分解,且 $1.01nu \leq 0.01$ ,则用Gauss消去法计算得到的单位下三角阵 $\tilde{L}$ 和上三角阵 $\tilde{U}$ 满足

$$\tilde{L}\tilde{U}=A+E$$
,

其中 $|E| \leqslant 2.05 n\mathbf{u}|\tilde{L}||\tilde{U}|$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

• 设
$$ilde{U}=( ilde{u}_{ij})$$
,  $ilde{L}=( ilde{\ell}_{ij})$ , 则 $a_{ij}=\sum_{k=1}^{\min(i,j)}\ell_{ik}u_{kj}$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 f

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

• 设
$$ilde{U}=( ilde{u}_{ij})$$
,  $ilde{L}=( ilde{\ell}_{ij})$ , 则 $a_{ij}=\sum_{k=1}^{\min(i,j)}\ell_{ik}u_{kj}$ 

• 由Gauss消去法可知 $\tilde{u}_{ij}(i \leq j)$ 是从 $a_{ij}$ 中依次减去 $\tilde{\ell}_{ik}\tilde{u}_{ki}$ 而得到的, $k = 1, \ldots, i - 1$ ,即

$$egin{aligned} a_{ij}^{(0)} &= a_{ij}, \ a_{ij}^{(k)} &= \mathrm{fl}(a_{ij}^{(k-1)} - \mathrm{fl}(\tilde{\ell}_{ik}\tilde{u}_{kj})), k = 1, \dots, i-2, \ \tilde{u}_{ij} &= a_{ij}^{(i-1)} &= \mathrm{fl}(a_{ij}^{(i-2)} - \mathrm{fl}(\tilde{\ell}_{i,i-1}\tilde{u}_{i-1,i})) \end{aligned}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ff

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 由基本运算舍入误差分析的结果可知

$$egin{aligned} &a_{ij}^{(k)} = (a_{ij}^{(k-1)} - (\tilde{\ell}_{i,k} \tilde{u}_{k,j})(1+\gamma_k))(1+arepsilon_k) \end{aligned}$$
 其中 $|\gamma_k|, |arepsilon_k| \leqslant \mathbf{u}$ 

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

**南县上镇陈的**蓝》

线性方程组的敏度分 标

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 由基本运算舍入误差分析的结果可知

$$a_{ij}^{(k)} = (a_{ij}^{(k-1)} - (\tilde{\ell}_{i,k}\tilde{u}_{k,j})(1+\gamma_k))(1+\varepsilon_k)$$

其中 $|\gamma_k|, |\varepsilon_k| \leq \mathbf{u}$ 

• 从而仿照计算内积的例题所示,我们有

$$\tilde{u}_{ij} = a_{ij}(1+\delta_i) - \sum_{k=1}^{i-1} (\tilde{\ell}_{ik}\tilde{u}_{kj})(1+\delta_k)$$

其中 $|\delta_k| \leqslant 1.01$ nu,  $k = 1, \ldots, i$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

四里一环巴什田

打木厂管的全 ) 冯学

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 由前式解出aii:

$$egin{aligned} a_{ij} &= rac{ ilde{u}_{ij}}{1+\delta_i} + \sum_{k=1}^{i-1} ( ilde{\ell}_{ik} ilde{u}_{kj}) rac{1+\delta_k}{1+\delta_i} \ &= \sum_{k=1}^{i} ilde{\ell}_{ik} ilde{u}_{kj} - e_{ij} \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\ell}_{ii}=1$ ,

$$e_{ij} = (\tilde{\ell}_{ii}\tilde{u}_{ij}) \frac{\delta_i}{1+\delta_i} + \sum_{i=k=1}^{i-1} (\tilde{\ell}_{ik}\tilde{u}_{kj}) \frac{\delta_i - \delta_k}{1+\delta_i}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 +C

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 注意到 $|\delta_k| \leq 1.01$ *nu* < 0.01, 我们有

$$|e_{ij}| \leqslant rac{2.02n\mathbf{u}}{1 - 0.01} \sum_{k=1}^{i} |\tilde{\ell}_{ik}| |\tilde{u}_{kj}|$$
 $\leqslant 2.05n\mathbf{u} \sum_{k=1}^{i} |\tilde{\ell}_{ik}| |\tilde{u}_{kj}|$ 

# 证明之L的计算

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

十算解的精度估计和 迭代改进 • 由Gauss消去法的具体实现可知,  $\tilde{\ell}_{ii}(i>i)$ 的计算过程为

$$egin{align} a_{ij}^{(0)} &= a_{ij}, \ a_{ij}^{(k)} &= \mathrm{fl}(a_{ij}^{(k-1)} - \mathrm{fl}( ilde{\ell}_{ik} ilde{u}_{kj})), k = 1, \ldots, j-1 \ ilde{\ell}_{ij} &= \mathrm{fl}(a_{ij}^{(j-1)}/ ilde{u}_{jj}) \ \end{aligned}$$

# 证明之 $\tilde{L}$ 的计算

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 由基本运算舍入误差分析的结果可知

$$egin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= (a_{ij}^{(k-1)} - ( ilde{\ell}_{ik} ilde{u}_{kj})(1+\gamma_k))(1+arepsilon_k) \ ilde{\ell}_{ij} &= a_{ij}^{(j-1)}/( ilde{u}_{ij}(1+\delta)) \end{aligned}$$

其中
$$|\delta|, |\gamma_k|, |\varepsilon_k| \leq \mathbf{u}$$

# 证明之L的计算

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 55

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 由此可类似证明

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \tilde{\ell}_{ik} \tilde{u}_{kj} - e_{ij},$$

其中

$$|e_{ij}|\leqslant 2.05$$
nu  $\sum_{i=1}^{j}|\tilde{\ell}_{ik}||\tilde{u}_{kj}|$ 

## 有行列交换时的情形

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设 $n \times n$ 浮点数矩阵 $A = (a_{ij})$ 非奇异,且1.01n**u**  $\leq 0.01$ ,则用列主元Gauss消去法计算得到的单位下三角阵 $\tilde{L}$ ,上三角阵 $\tilde{U}$ 以及排列方阵 $\tilde{P}$ 满足 $\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{P}A + E$ ,其中 $|E| \leq 2.05$ n**u** $|\tilde{L}||\tilde{U}|$ 

注意: 行列交换并不引入舍入误差

## 求解三角形方程组的舍入误差

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 折

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 引理

设 $n \times n$ 浮点数三角阵S非奇异, 且1.01n**u**  $\leq 0.01$ ,则用前一章方法求解Sx = b得到的计算解 $\tilde{x}$ 满足

$$(S+H)\tilde{x}=b$$

其中 $|H| \leq 1.01 nu|S|$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 不妨设5是下三角阵

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

战性方程组的敏度分 ī

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 不妨设5是下三角阵
- 采用归纳法:对n进行归纳

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 55

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 不妨设5是下三角阵
- 采用归纳法:对n进行归纳
- *n* = 1时成立

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

性方程组的敏度分 ·

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 不妨设5是下三角阵
- 采用归纳法: 对n进行归纳
- *n* = 1时成立
- 假设n-1阶时结论成立

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 公标

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 采用前代法求解Lx = b,得到计算解 $\tilde{x}$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

句景与矩阵的范》

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 采用前代法求解Lx = b,得到计算解 $\tilde{x}$
- 对b,  $\tilde{x}$ 进行分块:  $b = (b_1, c^T)^T$ ,  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}^T)^T$ , 其中 $b_1$ ,  $\tilde{x}_1 \in \mathcal{F}$ , c,  $\tilde{y}$ 为列向量:

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 采用前代法求解Lx = b,得到计算解 $\tilde{x}$
- 对b,  $\tilde{x}$ 进行分块:  $b = (b_1, c^T)^T$ ,  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}^T)^T$ , 其中 $b_1$ ,  $\tilde{x}_1 \in \mathcal{F}$ , c,  $\tilde{y}$ 为列向量;
- 对L进行相应分块:

$$L = \left(\begin{array}{cc} \ell_{11} & 0 \\ \ell_1 & L_1 \end{array}\right)$$

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 \*\*

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲

#### 我们有

$$ilde{\mathbf{x}}_1 = \mathrm{fl}(b_1/\ell_{11}) = rac{b_1}{\ell_{11}(1+\delta_1)}, |\delta_1| \leqslant \mathbf{u}$$



向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 我们有

$$ilde{\mathbf{x}}_1 = \mathrm{fl}(b_1/\ell_{11}) = rac{b_1}{\ell_{11}(1+\delta_1)}, |\delta_1| \leqslant \mathbf{u}$$

而ỹ是用前代法求解下述n-1阶线性方程组所得到的计算解

$$L_1y=\mathrm{fl}(c-\tilde{x}_1\ell_1)$$

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 标

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 我们有

$$ilde{\mathbf{x}}_1 = \mathrm{fl}(b_1/\ell_{11}) = rac{b_1}{\ell_{11}(1+\delta_1)}, |\delta_1| \leqslant \mathbf{u}$$

而ỹ是用前代法求解下述n-1阶线性方程组所得到的计算解

$$L_1y=\mathrm{fl}(c-\tilde{x}_1\ell_1)$$

• 由归纳假设, $(L_1 + H_1)\tilde{y} = \mathrm{fl}(c - \tilde{x}_1\ell_1)$ ,这里 $|H_1| \leqslant 1.01(n-1)\mathbf{u}|L_1|$ 

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 根据基本运算的舍入误差结果,我们有

$$egin{aligned} \mathrm{fl}(c- ilde{x}_1\ell_1)&=\mathrm{fl}(c-\mathrm{fl}( ilde{x}_1\ell_1))\ &=(I+D_\gamma)^{-1}(c- ilde{x}_1\ell_1- ilde{x}_1D_\delta\ell_1), \end{aligned}$$

其中

$$D_{\gamma} = \operatorname{diag}(\gamma_2, \dots, \gamma_n),$$
 $D_{\delta} = \operatorname{diag}(\delta_2, \dots, \delta_n),$ 
 $|\gamma_i|, |\delta_i| \leq \mathbf{u}, \quad i = 2, 3, \dots, n$ 

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲

#### • 于是

$$\tilde{x}_1\ell_1+\tilde{x}_1D_{\delta}\ell_1+(I+D_{\gamma})(L_1+H_1)\tilde{y}=c$$

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 于是

$$\tilde{\mathbf{x}}_1\ell_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1D_{\delta}\ell_1 + (I+D_{\gamma})(L_1+H_1)\tilde{\mathbf{y}} = c$$

• 从而有

$$(L+H)\tilde{x}=b$$

其中

$$H=\left(egin{array}{ccc} \delta_1\ell_{11} & 0 \ D_\delta\ell_1 & H_1+D_\gamma(L_1+H_1) \end{array}
ight)$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度<sup>。</sup>

基本运算的舍入误差

分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和

$$\begin{aligned} |H| &\leqslant \left( \begin{array}{cc} |\delta_{1}||\ell_{11}| & 0 \\ |D_{\delta}||\ell_{1}| & |H_{1}| + |D_{\gamma}|(|L_{1}| + |H_{1}|) \end{array} \right) \\ &\leqslant \left( \begin{array}{cc} \mathbf{u}|\ell_{11}| & 0 \\ \mathbf{u}|\ell_{1}| & |H_{1}| + \mathbf{u}(|L_{1}| + |H_{1}|) \end{array} \right) \\ &\leqslant \mathbf{u} \begin{pmatrix} |\ell_{11}| & 0 \\ |\ell_{1}| & (1.01(n-1) + 1 + 1.01(n-1)\mathbf{u})|L_{1}| \end{pmatrix} \\ &\leqslant 1.01n\mathbf{u}|L| \end{aligned}$$

最后一个不等式中用到了条件1.01nu ≤ 0.01

# 完整求解

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析
邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 把上述引理应用于三角形方程组

$$\tilde{L}y = \tilde{P}b, \quad \tilde{U}x = y$$

可知最后得到的计算解彩应满足

$$(\tilde{L}+F)(\tilde{U}+G)\tilde{x}=\tilde{P}b$$

即

$$(\tilde{L}\tilde{U} + F\tilde{U} + \tilde{L}G + FG)\tilde{x} = \tilde{P}b$$

其中 $|F| \leqslant 1.01$ nu $|\tilde{L}|$ ,  $|G| \leqslant 1.01$ nu $|\tilde{U}|$ 

## 舍入误差

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

• 把
$$\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{P}A + E$$
代入得 $(A + \delta A)\tilde{x} = b$ 

其中

$$\delta A = \tilde{P}^{T}(E + F\tilde{U} + \tilde{L}G + FG)$$

## 舍入误差

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

战性方程组的敏度分 元

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

• 把
$$\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{P}A + E$$
代入得

$$(A+\delta A)\tilde{x}=b$$

其中

$$\delta A = \tilde{P}^{T}(E + F\tilde{U} + \tilde{L}G + FG)$$

• 由己有结论,我们有

$$|\delta A| \leqslant 4.09 n \mathbf{u} \tilde{P}^T |\tilde{L}| |\tilde{U}|$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**邓建松** 

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 --

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 条件1.01nu ≤ 0.01

• E来源于 $\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{P}A + E$ ,而且 $|E| \leqslant 2.05 nu|\tilde{L}||\tilde{U}|$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 6

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- E来源于 $\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{P}A + E$ ,而且 $|E| \leqslant 2.05 n$ u $|\tilde{L}||\tilde{U}|$
- $|F| \leqslant 1.01 n\mathbf{u} |\tilde{L}|$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

线性方程组的敏度分

机工

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲

- E来源于 $\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{P}A + E$ , 而且 $|E| \leqslant 2.05 n$ u $|\tilde{L}||\tilde{U}|$
- $|F| \leqslant 1.01 n\mathbf{u} |\tilde{L}|$
- $|G| \leqslant 1.01 n\mathbf{u} |\tilde{U}|$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**ル**建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 --

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- E来源于 $\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{P}A + E$ ,而且 $|E| \leqslant 2.05 nu|\tilde{L}||\tilde{U}|$
- $|F| \leqslant 1.01 n\mathbf{u} |\tilde{L}|$
- $|G| \leqslant 1.01 n\mathbf{u} |\tilde{U}|$
- $|FG| \leqslant 0.01(1.01n\mathbf{u})|\tilde{L}||\tilde{U}| \leqslant 0.02n\mathbf{u}|\tilde{L}||\tilde{U}|$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- E来源于 $\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{P}A + E$ ,而且 $|E| \leqslant 2.05 nu|\tilde{L}||\tilde{U}|$
- $|F| \leqslant 1.01 n\mathbf{u} |\tilde{L}|$
- $\bullet$   $|G| \leqslant 1.01 n \mathbf{u} |\tilde{U}|$
- $|FG| \leqslant 0.01(1.01n\mathbf{u})|\tilde{L}||\tilde{U}| \leqslant 0.02n\mathbf{u}|\tilde{L}||\tilde{U}|$
- 2.05 + 1.01 + 1.01 + 0.02 = 4.09

## 增长因子

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 标

基本运算的舍入误差 公标

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改讲 • 由于 $\tilde{L}$ 的元素的绝对值不超过1,所以 $\|\tilde{L}\|_{\infty} \leq n$ 

### 增长因子

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

自量与矩阵的游器

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计系 迭代改进

- 由于 $\tilde{L}$ 的元素的绝对值不超过1,所以 $\|\tilde{L}\|_{\infty} \leq n$
- 为了估计 $\|\tilde{U}\|_{\infty}$ , 定义

$$\rho = \max_{i,j} |\tilde{\textit{u}}_{\textit{ij}}|/\max_{i,j} |\textit{a}_{\textit{ij}}|$$

称之为列主元Gauss消去法的增长因子

### 增长因子

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 由于 $\tilde{L}$ 的元素的绝对值不超过1,所以 $\|\tilde{L}\|_{\infty} \leq n$
- 为了估计 $\|\tilde{U}\|_{\infty}$ , 定义

$$\rho = \max_{i,j} |\tilde{\textit{u}}_{ij}|/\max_{i,j} |\textit{a}_{ij}|$$

称之为列主元Gauss消去法的增长因子

• 于是我们有

$$\|\tilde{U}\|_{\infty} \leqslant n \max_{i,j} |\tilde{u}_{ij}| = n\rho \max_{i,j} |a_{ij}| \leqslant n\rho \|A\|_{\infty}$$

## Gauss消去法的舍入误差定理

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

设n×n浮点数矩阵A非奇异,

且1.01nu  $\leq 0.01$ ,则用列主元Gauss消去法求解线性方程组Ax = b所得到的计算解 $\tilde{x}$ 满足

$$(A+\delta A)\tilde{x}=b$$

其中

$$\|\delta A\|_{\infty}/\|A\|_{\infty} \leqslant 4.09 n^3 \rho \mathbf{u}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 近

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 求解过程中引入舍入误差产生的计算解相当于系数矩阵作某些扰动而得到的扰动方程组的精确解

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 折

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 求解过程中引入舍入误差产生的计算解相当于系数矩阵作某些扰动而得到的扰动方程组的精确解
- 通常δA的元素比A的元素的初始误差小 得多,从这个意义上说,列主 元Gauss消去法是数值稳定的

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ht

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 理论上可以证明 $\rho \leq 2^{n-1}$ ,而且上界可以达到;实际中常遇到的情形是 $\rho$ 不会超过n

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 理论上可以证明 $\rho \leq 2^{n-1}$ ,而且上界可以达到;实际中常遇到的情形是 $\rho$ 不会超过n
- 定理中的上界比真正的 $\|\delta A\|_{\infty}/\|A\|_{\infty}$ 大 很多,而实际计算中几乎都 有 $\|\delta A\|_{\infty}/\|A\|_{\infty} \approx \mathbf{u}$

### 精度估计

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 设采用某种方法求解Ax = b得到的计算解为 $\tilde{x}$ 

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ff

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 设采用某种方法求解Ax = b得到的计算解为 $\tilde{x}$

$$r = Ax - A\tilde{x} = A(x - \tilde{x})$$

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 设采用某种方法求解Ax = b得到的计算解为 $\tilde{x}$

$$r = Ax - A\tilde{x} = A(x - \tilde{x})$$

从而

$$||x - \tilde{x}|| = ||A^{-1}r|| \le ||A^{-1}|| ||r||$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

. \_ . . . . . . . .

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 注意到 $||b|| \leq ||A|| ||x||$ , 所以我们有

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ff

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 注意到 $||b|| \leq ||A|| ||x||$ , 所以我们有

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

• 在上式中取∞范数,有

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leqslant \kappa_{\infty}(A) \frac{\|r\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$$

### 精度估计公式

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 fr

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的全 λ 误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 通过计算 $\kappa_{\infty}(A) \frac{\|r\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$ 估计计算解的精度

#### 精度估计公式

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 通过计算 $\kappa_{\infty}(A) \frac{\|r\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$ 估计计算解的精度
- 这个公式中除 $\kappa_{\infty}(A)$ 外,其余量都容易 计算

### 精度估计公式

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

小娃===

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 通过计算 $\kappa_{\infty}(A) \frac{\|r\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$ 估计计算解的精度
- 这个公式中除 $\kappa_{\infty}(A)$ 外,其余量都容易 计算
- 而 $\|A\|_{\infty}$ 是容易计算的,问题就余下了如何计算 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ ,或者如何计 第 $\|A^{-T}\|_{1}$

# 多元函数极值问题

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

**向量与矩阵的范**数

线性方程组的敏度分 f

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 为了计算 $\|B\|_1$ , 我们在区域 $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_1 \leq 1\}$ 上考虑多元函数极值问题

$$\max f(x) = \|Bx\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right|$$

# 多元函数极值问题

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析 邓建林

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 f

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 ● 为了计算 $\|B\|_1$ , 我们在区域 $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_1 \leq 1\}$ 上考虑多元函数极值问题

$$\max f(x) = \|Bx\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right|$$

● 易证f是凸函数, D是凸集。 从而最大值一定在 边界上达到,但可能是局部极大值

# 多元函数极值问题

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

**句量与矩阵的范**数

战性方程组的敏度分 行

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 为了计算 $\|B\|_1$ , 我们在区域 $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_1 \leq 1\}$ 上考虑多元函数极值问题

$$\max f(x) = \|Bx\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right|$$

- 易证f是凸函数, D是凸集。 从而最大值一定在 边界上达到,但可能是局部极大值
- 可以应用著名的"盲人爬山法"求解这个优化问题

# 梯度

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ff

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

• 对于
$$x_0=(x_j^{(0)})\in \mathbf{R}^n$$
, $\|x_0\|_1=1$ 满足 $\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j^{(0)}
eq 0,\quad i=1,\ldots,n$ 

则f在 $x = x_0$ 点的梯度 $\nabla f(x_0)$ 存在

# 梯度

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ff

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

• 对于
$$x_0=(x_j^{(0)})\in \mathbf{R}^n$$
, $\|x_0\|_1=1$ 满足 $\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j^{(0)} 
eq 0, \quad i=1,\ldots,n$ 

则f在 $x = x_0$ 点的梯度 $\nabla f(x_0)$ 存在

• 由凸函数的性质,

$$f(y) \geqslant f(x_0) + \nabla f(x_0)(y-x), y \in \mathbf{R}^n$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

• 取
$$\xi_i = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j^{(0)}\right),$$

$$v = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 6

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

• 取
$$\xi_i = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j^{(0)}\right)$$
,
$$v = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$$

• 在
$$x_0$$
附近 $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i b_{ij} x_j$ 

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 st

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

• 取
$$\xi_i = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j^{(0)}\right)$$
,  $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ 

• 在
$$x_0$$
附近 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i b_{ij} x_j$ 

• 
$$\nabla f(x_0) = v^T B = (B^T v)^T$$

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 55

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

• 取
$$\xi_i = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j^{(0)}\right)$$
,  $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ 

• 在
$$x_0$$
附近 $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i b_{ij} x_j$ 

• 
$$\nabla f(x_0) = v^T B = (B^T v)^T$$

• 定义
$$w = Bx_0, z = B^Tv$$

#### 定理

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元**Gauss**消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

#### 定理

B, x<sub>0</sub>, v, w, z如前所述。则有

- 若 $\|z\|_{\infty} \leq z^T x_0$ , 则 $\|w\|_1 = \|Bx_0\|_1$ 是 f(x)在 $\mathcal{D}$ 中的局部极大值
- 若 $\|z\|_{\infty} > z^T x_0$ , 则 $\|Be_j\|_1 > \|Bx_0\|_1$ , 其中j满足 $|z_j| = \|z\|_{\infty}$

# 证明: 当 $\|z\|_{\infty} \leqslant z^T x_0$ 时

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ff

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 由于在x<sub>0</sub>附近f是线性函数,所以

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

# 证明: 当 $\|z\|_{\infty} \leqslant z^T x_0$ 时

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 6

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 由于在x<sub>0</sub>附近f是线性函数,所以

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

● 因此我们只需证在x<sub>0</sub>附近

$$\nabla f(x_0)(x-x_0) = z^T(x-x_0) \leqslant 0$$

# 证明: 当 $\|z\|_{\infty} \leqslant z^T x_0$ 时

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 折

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 ● 由于在x<sub>0</sub>附近f是线性函数,所以

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

● 因此我们只需证在x<sub>0</sub>附近

$$\nabla f(x_0)(x-x_0)=z^T(x-x_0)\leqslant 0$$

实际上对于||x||<sub>1</sub> ≤ 1我们有

$$z^{T}(x - x_{0}) = z^{T}x - z^{T}x_{0} \leqslant ||z||_{\infty} ||x||_{1} - z^{T}x_{0}$$
  
$$\leqslant ||z||_{\infty} - z^{T}x_{0} \leqslant 0$$

# 证明: 当 $\|z\|_{\infty} > z^T x_0$ 时

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

向量与矩阵的范数

t性方程组的敏度分 f

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析



线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 55

基本运算的舍入误差 公标

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 设已有A的列主元三角分解PA = LU

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 fr

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 设已有A的列主元三角分解PA = LU
- 对 $B = A^{-T}$ 应用上述定理,其 中w = Bx和 $z = B^{T}v$ 相当于求解方程 组 $A^{T}w = x$ 和Az = v

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 近

基本运算的舍入误差 分析

列主元<mark>Gauss</mark>消去法 的舍入误差分析

- 设已有A的列主元三角分解PA = LU
- 对 $B = A^{-T}$ 应用上述定理,其 中w = Bx和 $z = B^{T}v$ 相当于求解方程 组 $A^{T}w = x$ 和Az = v
- 如此仅用 O(n²)就可以完成估计

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建村

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元<mark>Gauss消</mark>去法 的舍入误差分析

- 设已有A的列主元三角分解PA = LU
- 对 $B = A^{-T}$ 应用上述定理,其 中w = Bx和 $z = B^{T}v$ 相当于求解方程 组 $A^{T}w = x$ 和Az = v
- 如此仅用 O(n²)就可以完成估计
- 初值x可以任取,如 $x_i = 1/n$

### 精度估算过程

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 #5

基本运算的舍入误差 公标

列主元Gauss消去法 的全λ误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 估计 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的一个近似值 $\tilde{\nu}$ 

# 精度估算过程

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差

列主元Gauss消去法 的会入误差分析

- 估计 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的一个近似值 $\tilde{\nu}$
- 分别计算 $\|r\|_{\infty}$ ,  $\|b\|_{\infty}$ ,  $\|A\|_{\infty}$ 的近似值 $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\mu}$

### 精度估算过程

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 估计 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的一个近似值 $\tilde{\nu}$
- 分别计算 $\|r\|_{\infty}$ ,  $\|b\|_{\infty}$ ,  $\|A\|_{\infty}$ 的近似值 $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\mu}$
- 计算 $\tilde{\rho} = \tilde{\nu}\tilde{\mu}\tilde{\gamma}/\tilde{\beta}$ 得到计算解 $\tilde{x}$ 的相对误差的一个估计

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分

基本运算的舍入误差 公析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 大多数问题中这一方法可以得到相当好的估计

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

小廷位

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元<mark>Gauss</mark>消去法 的舍入误差分析

- 大多数问题中这一方法可以得到相当好的估计
- 有一些特殊问题该方法得到的ρω远小于计算 解的实际相对误差,因为

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

战性方程组的敏度分 行

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 大多数问题中这一方法可以得到相当好的估计
- 有一些特殊问题该方法得到的ρω远小于计算 解的实际相对误差,因为
  - 由于舍入误差的影响使得 $\tilde{\gamma}$ 远远小于 $\|\mathbf{r}\|_{\infty}$ 的真值

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

**向量与矩阵的范**数

战性方程组的敏度分 f

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 大多数问题中这一方法可以得到相当好的估计
- 有一些特殊问题该方法得到的pc远远小于计算解的实际相对误差,因为
  - 由于舍入误差的影响使得 $\tilde{\gamma}$ 远远小于 $\|\mathbf{r}\|_{\infty}$ 的真值
  - 当A十分病态时,三角分解已相当不准确,从而使得应用它估计出的 $\tilde{\nu}$  要比 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的真值小得多

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误 差分析

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 tr

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 大多数问题中这一方法可以得到相当好的估计
- 有一些特殊问题该方法得到的ρω远小于计算 解的实际相对误差,因为
  - 由于舍入误差的影响使得 $\tilde{\gamma}$ 远远小于 $\|\mathbf{r}\|_{\infty}$ 的真值
  - 当A十分病态时,三角分解已相当不准确,从而使得应用它估计出的 $\tilde{\nu}$  要比 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的真值小得多
- 如何估计得更好,仍是一个有待深入研究的问

#### 迭代改进

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析
邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进 • 若 $\tilde{x}$ 的精度太低,可以把 $\tilde{x}$ 作为初值,对函数f(x) = Ax - b应用Newton迭代法改进其精度

#### 迭代改进

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 折

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 若 $\tilde{x}$ 的精度太低,可以把 $\tilde{x}$ 作为初值,对函数f(x) = Ax b应用Newton迭代法改进其精度
- 具体过程如下:

#### 迭代改进

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析 邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 ff

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

- 若 $\tilde{x}$ 的精度太低,可以把 $\tilde{x}$ 作为初值,对函数f(x) = Ax b应用Newton迭代法改进其精度
- 具体过程如下:
  - 应用双精度和原始矩阵计算 $r = b A\tilde{x}$

### 迭代改进

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析
邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 若 $\tilde{x}$ 的精度太低,可以把 $\tilde{x}$ 作为初值,对函数f(x) = Ax b应用Newton迭代法改进其精度
- 具体过程如下:
  - 应用双精度和原始矩阵计算 $r = b A\tilde{x}$
  - 利用A的三角分解求解Az = r

### 迭代改进

线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析 邓建松

句量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分 析

基本运算的舍入误差 分析

列主元Gauss消去法 的舍入误差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 若 $\tilde{x}$ 的精度太低,可以把 $\tilde{x}$ 作为初值, 对函数f(x) = Ax - b应用Newton迭代 法改进其精度
- 具体过程如下:
  - 应用双精度和原始矩阵计算 $r = b A\tilde{x}$
  - 利用A的三角分解求解Az = r
  - 计算 $x = \tilde{x} + z$

### 迭代改进

线性方程组的敏度分 析与消去法的舍入误 差分析

计算解的精度估计和 迭代改进

- 若家的精度太低,可以把家作为初值, 对函数f(x) = Ax - b应用Newton迭代 法改进其精度
- 具体过程如下:
  - 应用双精度和原始矩阵计算r = b − Ax
  - 利用A的三角分解求解Az = r
  - 计算 $x = \tilde{x} + z$
  - $\ddot{\pi} \frac{\|x \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \varepsilon$  则结束;否则令 $\tilde{x} = x$  转



# 最小二乘问题的求解

邓建松

2022年9月20日

# 复习: 数学分析中一个例题

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

E交变换法

• 题目: 给定平面上n个数据点 $(x_i, y_i)$ , i = 1, 2, ..., n, 求一条直线y = ax + b使得偏差

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

最小

# 复习: 数学分析中一个例题

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变技

Givens变换

E交变换法

• 题目: 给定平面上n个数据点 $(x_i, y_i)$ , i = 1, 2, ..., n, 求一条直线y = ax + b使得偏差

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

最小

• 通过对 $\varphi(a,b)$ 关于a,b求偏导,并令其等于0,得到关于a,b的线性方程组

# 复习: 数学分析中一个例题

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

E交变换法

• 题目: 给定平面上n个数据点 $(x_i, y_i)$ , i = 1, 2, ..., n, 求一条直线y = ax + b使得偏差

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

最小

- 通过对 $\varphi(a,b)$ 关于a,b求偏导,并令其等于0,得到关于a,b的线性方程组
- 系数矩阵可证当x;互不相等时是非奇异的



正交变换法

● a, b为下述方程组的解:

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
  
$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

### 答案

#### 最小二乘问题的求解

邓建杉

#### 最小二乘问题

初笔正态变换

Householder变换

正交变换法

• a, b为下述方程组的解:

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

• 所求直线的方程是

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i} & \sum_{i=1}^{n} y_{i} & n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i} & \sum_{i=1}^{n} x_{i} \end{vmatrix} = 0.$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正态恋摘

----

正交变换法

• 最小二乘问题多产生于数据拟合

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

.....

Householder变换

Givens变换

F交变换法

- 最小二乘问题多产生于数据拟合
  - 给定m个点 $t_1, \ldots, t_m$ 和这m个点上的实验或观测数据 $y_1, \ldots, y_m$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正交变描

Givens变换

E交变换法

### • 最小二乘问题多产生于数据拟合

- 给定m个点 $t_1, \ldots, t_m$ 和这m个点上的实验或观测数据 $y_1, \ldots, y_m$
- 给定在t<sub>i</sub>上取值的n个已知函数

$$\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

### • 最小二乘问题多产生于数据拟合

- 给定m个点 $t_1, \ldots, t_m$ 和这m个点上的实验或观测数据 $y_1, \ldots, y_m$
- 给定在t;上取值的n个已知函数

$$\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)$$

• 考虑 $\psi$ <sub>i</sub>的线性组合

$$f(x;t) = x_1\psi_1(t) + \cdots + x_n\psi_n(t)$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

.....

Givens ###

正交变换法

### • 最小二乘问题多产生于数据拟合

- 给定m个点 $t_1, \ldots, t_m$ 和这m个点上的实验或观测数据 $y_1, \ldots, y_m$
- 给定在t;上取值的n个已知函数

$$\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)$$

• 考虑 $\psi$ <sub>i</sub>的线性组合

$$f(x;t) = x_1\psi_1(t) + \cdots + x_n\psi_n(t)$$

・中心には重くを言いて言い 書 あんの

• 我们希望在 $t_1, \ldots, t_m \perp f(x; t)$ 能最佳地逼近 $v_1, \ldots, v_m$ 

# 残量与最佳逼近

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初寺正义文抄

正立变换过

### • 定义残量

$$r_i(x) = y_i - \sum_{i=1}^n x_j \psi_j(t_i), i = 1, \ldots, m$$

其中
$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

# 残量与最佳逼近

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

• 定义残量

$$r_i(x) = y_i - \sum_{j=1}^n x_j \psi_j(t_i), i = 1, \dots, m$$

其中
$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

• 此问题转化为: 估计参数 $x_1, ..., x_n$ , 使 残量 $r_1, ..., r_m$ 尽可能得小

### 矩阵-向量形式

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

en -70°40

• 上式的矩阵-向量形式为r(x) = b - Ax, 其中

$$A = (\psi_j(t_i))_{m \times n}$$

$$b = (y_1, \dots, y_m)^T$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T$$

$$r(x) = (r_1(x), \dots, r_m(x))^T$$

# 求解

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变数

Householder变换

Givens变换

E交变换法

• m = n时,我们可以要求r(x) = 0,从而可以用第一章中的方法处理

# 求解

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder X:

Givens变换

- m = n时,我们可以要求r(x) = 0,从而可以用第一章中的方法处理
- 当*m* > *n*时,一般不可能所有残量都为零,但可以要求*r*(*x*)在某种范数意义下最小

# 求解

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

- m = n时,我们可以要求r(x) = 0,从而可以用第一章中的方法处理
- 当m > n时,一般不可能所有残量都为零,但可以要求r(x)在某种范数意义下最小
- 最小二乘问题就是求x使得r(x)在2范数 意义下最小

# 定义

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Manual alamatis til

Givens变换

正交变换法

• 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 及向量 $b \in \mathbb{R}^m$ , 确 定 $x \in \mathbb{R}^n$ , 使得

$$||b - Ax||_2 = ||r(x)||_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} ||r(y)||_2$$
  
=  $\min_{y \in \mathbb{R}^n} ||Ay - b||_2$ 

这就是最小二乘问题,简记为LS(Least-Squares)问题,其中r(x)称为残向量

# 最小二乘解

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder亚维

Givens变换

正交变换法

• 最小二乘问题的解x又称作线性方程组

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

的最小二乘解



# 最小二乘解

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变于 Givens变换

正交变换剂

• 最小二乘问题的解x又称作线性方程组

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

的最小二乘解

• 当*m* > *n*时,方程组称为<mark>超定方程</mark> 组或矛盾方程组

# 最小二乘解

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变数 Givens变换

正交变换

• 最小二乘问题的解x又称作线性方程组

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

的最小二乘解

- 当*m* > *n*时,方程组称为<mark>超定方程</mark> 组或矛盾方程组
- 当m < n时,方程组称为欠定方程组



#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder部推

-0.740

正交变换法

0 m = n:

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

er 20710

- $\mathbf{0}$  m=n:
  - $\mathbf{0}$  rank A = m = n

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

- $\mathbf{0}$  m=n:
  - $\mathbf{0}$  rank A = m = n
  - 2  $\operatorname{rank} A = k < m = n$

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正交变换

Householder变换

Givens变换

- $\mathbf{0}$  m=n:
  - $\bigcirc$  rank A = m = n
  - 2  $\operatorname{rank} A = k < m = n$
- m > n:

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

Ci.....als till

- $\mathbf{0}$  m=n:
  - $\mathbf{0}$  rank A = m = n
  - 2  $\operatorname{rank} A = k < m = n$
- m > n:

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

11 11 20240

Givens变换

- $\mathbf{0}$  m=n:
  - $\mathbf{0}$  rank A = m = n
- m > n:
  - $\mathbf{0}$  rank A = n < m

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Manual alamatis til

Givens变换

正交变换法

$$\mathbf{0}$$
  $m=n$ :

- rank A = m = n
- m > n:

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

. ..

Givens变换

正交变换法

$$\mathbf{0}$$
  $m=n$ :

- $\mathbf{0}$  rank A = m = n
- 2  $\operatorname{rank} A = k < m = n$
- m > n:

  - 2  $\operatorname{rank} A = k < n < m$
- - $\mathbf{0}$  rank A = m < n

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

$$\mathbf{0}$$
  $m=n$ :

- $\mathbf{0}$  rank A = m = n
- 2  $\operatorname{rank} A = k < m = n$
- m > n:
  - $\mathbf{0} \operatorname{rank} A = n < m$
  - ②  $\operatorname{rank} A = k < n < m$
- - $\mathbf{n}$  rank A = m < n
  - rank A = k < m < n

# 概念与记号

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

\\_ && -- \\_ \\_ \

正立变换过

● 本章主要讨论(2-1)情形

# 概念与记号

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正态恋摘

Givens变换

正交变换法

- 本章主要讨论(2-1)情形
- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , A的<mark>值域</mark>定义为

$$\mathcal{R}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n \}$$

# 概念与记号

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

E交变换法

- 本章主要讨论(2-1)情形
- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , A的<mark>值域</mark>定义为

$$\mathcal{R}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n \}$$

•  $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$ , 其中 $a_i$ 为A的列向量

# 概念与记号

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

E交变换法

- 本章主要讨论(2-1)情形
- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , A的<mark>值域</mark>定义为

$$\mathcal{R}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n \}$$

- $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$ , 其中 $a_i$ 为A的列向量
- A的零空间定义为

$$\mathcal{N}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

其维数记为null(A)

# 解的存在性

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

E交变换法

• 一个子空间S ⊂  $\mathbb{R}$ "的正交补定义为

$$\mathcal{S}^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^n : y^T x = 0, \forall x \in \mathcal{S} \}$$

# 解的存在性

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• 一个子空间S ⊂  $\mathbb{R}$ "的正交补定义为

$$\mathcal{S}^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^n : y^T x = 0, \forall x \in \mathcal{S} \}$$

• 方程组Ax = b的解存在的充分必要条件是

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}([A, b])$$

# 非齐次方程的全部解

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换 Householder变换

Givens变换

• 假设Ax = b的解存在,x是其任一给定的解,则方程组的全部解是 $x + \mathcal{N}(A)$ 

# 非齐次方程的全部解

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

- 假设Ax = b的解存在,x是其任一给定的解,则方程组的全部解是 $x + \mathcal{N}(A)$
- 方程组Ax = b的解唯一的充分必要条件是 $\mathcal{N}(A) = \{0\}$

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正交变换

......

• m = 3, rank A = 2, 则 $\mathcal{R}(A)$ 可以用一张 平面表示

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变物

Householder变换

F交变换法

- m = 3, rank A = 2, 则 $\mathcal{R}(A)$ 可以用一张 平面表示
- 当x取遍 $\mathbb{R}^n$ 时,y = Ax就取遍整个 $\mathcal{R}(A)$

- m = 3, rank A = 2, 则 $\mathcal{R}(A)$ 可以用一张 平面表示
- 当x取遍 $\mathbb{R}^n$ 时,y = Ax就取遍整个 $\mathcal{R}(A)$
- LS问题等价于求 $y_{min} \in \mathcal{R}(A)$ , 使得

$$||b - y_{\min}||_2 = \min\{||b - y||_2, y \in \mathcal{R}(A)\}$$

邓建松

#### 最小二乘问题

初笺正态变换

-27-40

正交变换法

• 注意到b有分解:  $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 

邓建松

### 最小二乘问题

初等正交变数

Householder变换

Givens变换

E交变换法

- 注意到b有分解:  $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- 当b y垂直于 $\mathcal{R}(A)$ 时, $||b y||_2$ 达到极小

正交变换法

- 注意到b有分解:  $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- 当b-y垂直于 $\mathcal{R}(A)$ 时, $||b-y||_2$ 达到极小
- 这时 $y_{\min} = b_1$ ,然后利用 $Ax = y_{\min}$ 解 出x即得到最小二乘解

# 解的存在性定理

最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

初笔正立变换

.........

Givens变换

正交变换法

### 定理

Ax = b对应的线性最小二乘问题的解总是 存在的,而且其解唯一当且仅当

$$\mathcal{N}(A) = \{0\}$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

. . .

er 20140

正交变换法

• 
$$\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

E交变换法

• 
$$\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$$

• 所以b具有唯一分解 $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正态变换

Givens变换

- ullet  $\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- 所以b具有唯一分解 $b = b_1 + b_2$ ,  $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ ,  $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- 从而对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_1 Ax \in \mathcal{R}(A)$ 且与 $b_2$  正交

### 最小二乘问题的求解

邓建村

#### 最小二乘问题

取小一次问定

四寸正人又反

Householder变换

Givens变换

正交变换法

### • 从而有

$$||r(x)||_2^2 = ||b - Ax||_2^2 = ||(b_1 - Ax) + b_2||_2^2$$
  
=  $||b_1 - Ax||_2^2 + ||b_2||^2$ 

### 最小二乘问题的求解

邓建林

### 最小二乘问题

AX 1 - X I I I

初笙正方亦は

Householder变换

Givens变换

正交变换法

### • 从而有

$$||r(x)||_2^2 = ||b - Ax||_2^2 = ||(b_1 - Ax) + b_2||_2^2$$
  
=  $||b_1 - Ax||_2^2 + ||b_2||^2$ 

• 所以 $\|r(x)\|_2^2$ 达到极小当且仅 当 $\|b_1 - Ax\|_2^2$ 达到极小

### 最小二乘问题的求解

邓建

### 最小二乘问题

取小—来问定

初寺正义文铁

Householder变换

Givens变换

### • 从而有

$$||r(x)||_2^2 = ||b - Ax||_2^2 = ||(b_1 - Ax) + b_2||_2^2$$
  
=  $||b_1 - Ax||_2^2 + ||b_2||^2$ 

- 所以 $\|r(x)\|_2^2$ 达到极小当且仅 当 $\|b_1 Ax\|_2^2$ 达到极小
- 由于 $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ , 所以 $\|b_1 Ax\|_2^2$ 达到极小当且仅当 $Ax = b_1$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正态恋的

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{
m LS}$ 

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正态变换

Householder变换

F交变换法

- 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{\rm LS}$
- 根据前面的定理, $\chi_{LS} \neq \emptyset$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问是

初等正交变物

Householder变

E交变换法

- 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{LS}$
- 根据前面的定理, $\chi_{LS} \neq \emptyset$
- $\sharp \chi_{LS} = 1 \iff A$ 的列线性无关

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

Householder变换

正交变换注

- 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{\rm LS}$
- 根据前面的定理,  $\chi_{LS} \neq \emptyset$
- $\sharp \chi_{LS} = 1 \iff A$ 的列线性无关
- $\chi_{LS}$ 中有且仅有一个解其2范数最小(为什么?),这称为最小2 范数解,用 $\chi_{LS}$ 表示

### 最小二乘问题的求解

邓建松

### 最小二乘问题

Householder变换

正交变换法

- 最小二乘问题的解集记为 $\chi_{\rm LS}$
- 根据前面的定理, $\chi_{LS} \neq \emptyset$
- $\sharp \chi_{LS} = 1 \iff A$ 的列线性无关
- $\chi_{LS}$ 中有且仅有一个解其2范数最小(为什么?),这称为最小2 范数解,用 $\chi_{LS}$ 表示
  - 点集的凸性以及范数的严格凸性

# 定理

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

Givens变换

### 定理

 $x \in \chi_{LS}$  当且仅当

$$A^T A x = A^T b$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笙正方恋摘

Householder部揃

正交变换法

• 
$$x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$$
,  $\sharp \vdash b_1 \in \mathcal{R}(A)$ 

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

E交变换法

• 
$$x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$$
,  $\not\exists \vdash b_1 \in \mathcal{R}(A)$ 

• 
$$r(x) = b - Ax = b - b_1 = b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正态变描

Householder变换

Givens变换

正交变换

- $x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$ ,  $\not\exists \vdash b_1 \in \mathcal{R}(A)$
- $r(x) = b Ax = b b_1 = b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 意味着对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_2^T A x = 0$ , 所以 $(b_2^T A)^T = A^T b_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正态变换

Householder变

正态变换》

• 
$$x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$$
,  $\not \perp + b_1 \in \mathcal{R}(A)$ 

- $r(x) = b Ax = b b_1 = b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$
- $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 意味着对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_2^T A x = 0$ , 所以 $(b_2^T A)^T = A^T b_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量
- 从而 $A^T r(x) = A^T b_2 = 0$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变物

Householder变

Givens变换

• 
$$x \in \chi_{LS} \Longrightarrow Ax = b_1$$
,  $\not \exists + b_1 \in \mathcal{R}(A)$ 

• 
$$r(x) = b - Ax = b - b_1 = b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$$

- $b_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ 意味着对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_2^T A x = 0$ , 所以 $(b_2^T A)^T = A^T b_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量
- 从而 $A^T r(x) = A^T b_2 = 0$



# 证明: 充分性

### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正态变数

---

正交变换法

• 设 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $A^T A x = A^T b$ 

# 证明: 充分性

最小二乘问题的求解

邓建林

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

• 设
$$x \in \mathbb{R}^n$$
满足 $A^TAx = A^Tb$ 

• 则对 $\forall y \in \mathbb{R}^n$ ,

 $||b-Ax||_2^2$ 

$$||b - A(x + y)||_{2}^{2}$$

$$= ||b - Ax||_{2}^{2} - 2y^{T}A^{T}(b - Ax) + ||Ay||_{2}^{2}$$

$$= ||b - Ax||_{2}^{2} + ||Ay||_{2}^{2}$$

这就证明了 $x \in \chi_{LS}$ 



## 正则化方程组

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正态变换

Givens变换

正交变换法

•  $A^T A x = A^T b$ 称为LS问题的正则化方程 组或者法方程组

## 正则化方程组

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

か 学 正 方 永 協

初寺正义文铁

Givene亚维

正交变换

- $A^TAx = A^Tb$ 称为LS问题的正则化方程 组或者法方程组
- 它一般是一个含有*n*个变量和*n*个方程 的线性方程组

## 正则化方程组

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初坐正方亦始

Givens变换

正交变换剂

- $A^T A x = A^T b$ 称为LS问题的正则化方程 组或者法方程组
- 它一般是一个含有*n*个变量和*n*个方程 的线性方程组
- 如果A的列向量线性无关,那么A<sup>T</sup>A 对 称正定,从而可以采用平方根法求解方 程组

# 正则化方法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

E交变换法

求解LS问题的最古老的算法:

• 计算 $C = A^T A$ ,  $d = A^T b$ 

# 正则化方法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

......

Givens变换

F交变换法

求解LS问题的最古老的算法:

- 计算 $C = A^T A$ ,  $d = A^T b$
- 用平方根法计算C的Cholesky分解:

$$C = LL^T$$

### 正则化方法

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变

正交变换法

求解LS问题的最古老的算法:

- 计算 $C = A^T A$ ,  $d = A^T b$
- 用平方根法计算C的Cholesky分解:  $C = LL^T$
- 求解三角方程组 $Ly = d \pi L^T x = y$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小一乘问题

.....

nousenoider 🗶 🖰

正交变换法

• 在 $A^TA$ 的计算中,如果不使用足够的精度,A中的一些精度可能会丢失

#### 最小二乘问题的求解

邓建林

最小二乘问题

初等正交变的

Householder变换

Givens变换

正交变换法

- 在 $A^TA$ 的计算中,如果不使用足够的精度,A中的一些精度可能会丢失
- 例:

$$A = \left(egin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \ arepsilon & 0 & 0 \ 0 & arepsilon & 0 \ 0 & 0 & arepsilon \end{array}
ight), A^{T}A = \left(egin{array}{ccc} c & 1 & 1 \ 1 & c & 1 \ 1 & 1 & c \end{array}
ight)$$

其中 $c = 1 + \varepsilon^2$ 

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

10 0 III X X X X

Civone #5#h

E交变换?

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder #5#h

Givens变换

正交变换法

• 定义
$$A^{\dagger} = (A^T A)^{-1} A^T$$

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正态变换

MALLXXIA

Givens变换

正交变换法

- 定义 $A^{\dagger} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$
- 则LS问题的解可以写为 $x = A^{\dagger}b$

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换法

- 定义 $A^{\dagger} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$
- 则LS问题的解可以写为 $x = A^{\dagger}b$
- n×m阶矩阵A<sup>†</sup>就
   是A的Moore-Penrose广义逆

### 回忆: Moore-Penrose广义逆

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Givens要换

正交变换法

• 若 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足

$$AXA = A, XAX = X,$$
  
 $(AX)^T = AX, (XA)^T = XA$ 

则X就是A的Moore-Penrose广义逆



### 回忆: Moore-Penrose广义逆

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正态变换法

• 若 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足

$$AXA = A, XAX = X,$$
  
 $(AX)^T = AX, (XA)^T = XA$ 

则X就是A的Moore-Penrose广义逆

通常记作A<sup>†</sup>

# 扰动对解的影响

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

E交变换法

• 设b有扰动 $\delta b$ , 且x和 $x + \delta x$ 分别是最小 二乘问题

$$\min \|b - Ax\|_2$$
 $\min \|(b + \delta b) - Ax\|_2$ 

的解,即

$$x = A^{\dagger}b,$$
  
 $x + \delta x = A^{\dagger}(b + \delta b) = A^{\dagger}\tilde{b}$ 

其中
$$\tilde{b} = b + \delta b$$



### 定理

最小二乘问题的求解

邓建村

最小二乘问题

Householder变换

Givens变换

E交变换法

### 定理

设 $b_1$ 和 $\tilde{b}_1$ 分别是b和 $\tilde{b}$ 在 $\mathcal{R}(A)$ 上的正交投影。  $\ddot{a}$   $\ddot{b}_1 \neq 0$ , 则

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \kappa_2(A) \frac{\|b_1 - \tilde{b}_1\|_2}{\|b_1\|_2}$$

其中
$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{\dagger}\|_2$$

注: *A*非方阵,其范数与方阵的算子范数定义相同,从而满足对向量乘法的相容性; *A*的2范数等于*A*的最大奇异值

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笙正春本始

MALLAXI

nousenoider x1

正交变换法

• 设b在 $\mathcal{R}^{\perp}$ 上的正交投影为 $b_2$ , 则 $A^Tb_2=0$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正交变换

Givens变换

E交变换法

- 设b在 $\mathcal{R}^{\perp}$ 上的正交投影为 $b_2$ ,则 $A^Tb_2=0$
- 由 $b = b_1 + b_2$ 可有

$$A^{\dagger}b = A^{\dagger}b_1 + A^{\dagger}b_2$$
  
=  $A^{\dagger}b_1 + (A^TA)^{-1}A^Tb_2 = A^{\dagger}b_1$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

E交变换法

- 设b在 $\mathcal{R}^{\perp}$ 上的正交投影为 $b_2$ , 则 $A^Tb_2=0$
- 由 $b = b_1 + b_2$ 可有

$$A^{\dagger}b = A^{\dagger}b_1 + A^{\dagger}b_2$$
  
=  $A^{\dagger}b_1 + (A^TA)^{-1}A^Tb_2 = A^{\dagger}b_1$ 

• 同理 $A^{\dagger} \tilde{b} = A^{\dagger} \tilde{b}_1$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初至正方亦始

MATTAXX

er 20146

正方本協定

### • 所以

$$\|\delta x\|_2 = \|A^{\dagger}b - A^{\dagger}\tilde{b}\|_2 = \|A^{\dagger}(b_1 - \tilde{b}_1)\|_2$$
  
 $\leq \|A^{\dagger}\|_2 \|b_1 - \tilde{b}_1\|_2$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笙正立亦始

Householder变换

### • 所以

$$\|\delta x\|_2 = \|A^{\dagger}b - A^{\dagger}\tilde{b}\|_2 = \|A^{\dagger}(b_1 - \tilde{b}_1)\|_2$$
  
 $\leq \|A^{\dagger}\|_2 \|b_1 - \tilde{b}_1\|_2$ 

•  $\triangle Ax = b_1 + \|b_1\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

初笔正交变描

Householder变换

Givens变换

正交变换法

### • 所以

$$\|\delta x\|_2 = \|A^{\dagger}b - A^{\dagger}\tilde{b}\|_2 = \|A^{\dagger}(b_1 - \tilde{b}_1)\|_2$$
  
 $\leq \|A^{\dagger}\|_2 \|b_1 - \tilde{b}_1\|_2$ 

- $\triangle Ax = b_1 + \|b_1\|_2 \le \|A\|_2 \|x\|_2$
- 根据上述两式立得结论

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

....

.....

Householder变换

正态变换法

• 若b有变化,只有它在 $\mathcal{R}(A)$ 上的投影 对x的相对误差产生影响

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初等正交变换

Householder部 指

Givens变换

正交变换法

- 若b有变化,只有它在 $\mathcal{R}(A)$ 上的投影 对x的相对误差产生影响
- LS问题解的敏感性依赖于 $\kappa_2(A)$  的大小

#### 最小二乘问题的求解

7 PXE 12

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变 Givens变换

E交变换法

- 若*b*有变化,只有它在*R*(*A*)上的投影 对*x*的相对误差产生影响
- LS问题解的敏感性依赖于 $\kappa_2(A)$  的大小
- 我们称 $\kappa_2(A)$ 为LS问题的条件数

#### 最小二乘问题的求解

小斑红

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变 Givens变换

正交变换法

- 若b有变化,只有它在 $\mathcal{R}(A)$ 上的投影 对x的相对误差产生影响
- LS问题解的敏感性依赖于 $\kappa_2(A)$  的大小
- 我们称 $\kappa_2(A)$ 为LS问题的条件数
- 若 $\kappa_2(A)$ 很大,则称LS问题是病态的; 否则称为良态的

最小二乘问题的求解

小廷位

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换 Givens变换

ा केर कोट <del>शि</del>र े

- 若b有变化,只有它在 $\mathcal{R}(A)$ 上的投影 对x的相对误差产生影响
- LS问题解的敏感性依赖于 $\kappa_2(A)$  的大小
- 我们称 $\kappa_2(A)$ 为LS问题的条件数
- 若 $\kappa_2(A)$ 很大,则称LS问题是病态的; 否则称为良态的
- 同时考虑A和b的扰动对解的影响就非常复杂,我们在此不讨论



# 条件数

最小二乘问题的求解

邓建村

最小二乘问题

初等正交变换

Householder 4544

Givens变换

正交变换法

### 定理

设A的列向量线性无关,则

$$\kappa_2(A)^2 = \kappa_2(A^T A)$$

证明:

• 根据定义,我们有

$$||A||_2^2 = ||A^T A||_2,$$
  
 $||A^{\dagger}||_2^2 = ||A^{\dagger} (A^{\dagger})^T ||_2 = ||(A^T A)^{-1}||_2$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

#### 最小二乘问题

-0.10

正交变换法

### • 于是我们得到

$$\kappa_2(A)^2 = ||A||_2^2 ||A^{\dagger}||_2^2$$

$$= ||A^T A||_2 ||(A^T A)^{-1}||_2$$

$$= \kappa_2(A^T A)$$

最小二乘问题的求解

具本一番細胞

初等正交变换

四寸正文文区

Givens变换

正交变换流

最小二乘问题在化为正则化方程组后,条件数是原来的平方

### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

Householder变

Givens变换

- 最小二乘问题在化为正则化方程组后,条件数是原来的平方
- 这就使得求解过程增加了对舍入误差的 敏感性

### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初寺正文文 Householder变换

Givens变换

- 最小二乘问题在化为正则化方程组后,条件数是原来的平方
- 这就使得求解过程增加了对舍入误差的 敏感性
- 在使用正则化方法时,一定要注意这一点

最小二乘问题的求解

**邓建松** 

最小一乘问题

初笺正态变换

Householder

正交变换法

为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder Givens变换

正交变换剂

- 为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换
  - 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变 Givens变换

正交变换剂

- 为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换
  - 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数
- 第一种是Householder变换

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变 Givens变换

正交变换剂

- 为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换
  - 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数
- 第一种是Householder变换
- 第二种是Givens变换

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变挂 Givens变换 为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换

- 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数
- 第一种是Householder变换
- 第二种是Givens变换
- 它们是数值线性代数中许多重要算法的基础

### 最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初等正交变换

Householder变担 Givens变换

Givens变换 下态变换注

- 为了给出求解最小二乘问题的更实用的算法, 我们本节介绍初等正交变换
  - 因为正交变换不改变向量和矩阵的2范数
- 第一种是Householder变换
- 第二种是Givens变换
- 它们是数值线性代数中许多重要算法的基础
  - 例: 在计算矩阵特征值和特征向量的QR 方法中, 就大量应用上述两种变换



### 回忆:初等变换

**最小二乘问题的求解** 邓建松

>-- 606 --- ->- 166

初等正交变排

Givens ###

Givens ₹ 1%

正交变换法

应用Gauss变换可以把一个矩阵约化为 上三角形式

### 回忆:初等变换

# 最小二乘问题的求解邓建松

- 最小二乘问题
- Householder变换
- Givens变换
- 正交变换

- 应用Gauss变换可以把一个矩阵约化为 上三角形式
- 这是基于事实:对任意向量x,可以构造一个初等下三角阵L,使得 $Lx = \alpha e_1$

### 回忆:初等变换

# **最小二乘问题的求解** 邓建松

- 最小二乘问是
- 初等正交变技

Householder变换

Givens变换

正交变换

- 应用Gauss变换可以把一个矩阵约化为 上三角形式
- 这是基于事实:对任意向量x,可以构造一个初等下三角阵L,使得 $Lx = \alpha e_1$
- 本节我们讨论如何求一个初等正交矩阵,使其具有L同样的功能



# 镜像对称向量的计算

**最小二乘问题的求解** 邓建松

. .. . . . . . .

例 寺 止 父 发 也 Householder 变换

Givens等指

在ℝ"中给定一个向量x和一张单位法向 量为w的超平面π,那么x关于π的镜像 对称向量是什么?

# 镜像对称向量的计算

最小二乘问题的求解

...

最小二乘问题

Householder变换

Givens变换

. . . . .

- 在ℝ"中给定一个向量x和一张单位法向 量为w的超平面π,那么x关于π的镜像 对称向量是什么?
- 显然x在单位法向量上的投影向量为 $(x \cdot w)w = ww^T x$

# 镜像对称向量的计算

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初等正交变物

Householder变换

Givens变换

正交变换

- 在ℝ"中给定一个向量x和一张单位法向 量为w的超平面π,那么x关于π的镜像 对称向量是什么?
- 显然x在单位法向量上的投影向量为 $(x \cdot w)w = ww^T x$
- 所以对称向量是

$$x - 2ww^T x = (I - 2ww^T)x$$



# Householder变换

最小二乘问题的求解

Householder变换

 $H = I - 2ww^T$ 

• 设 $w \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|w\|_2 = 1$ . 定义 $n \times n$ 矩阵

其称为Householder变换



# Householder变换

### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

Givens变换

GIVEIIS X IX

• 设 $w \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|w\|_2 = 1$ . 定义 $n \times n$ 矩阵

$$H = I - 2ww^T$$

其称为Householder变换

• 也称为初等反射矩阵或镜像矩阵

# Householder变换

### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

er stelle

Givens变换

• 设 $w \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|w\|_2 = 1$ . 定义 $n \times n$ 矩阵

$$H = I - 2ww^T$$

其称为Householder变换

- 也称为初等反射矩阵或镜像矩阵
- 这一变换最早是由A.C. Aitken在1932年提出, 后由数值分析专家Alston S. Householder在1958年应用到数值线性代数中



最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

Trousenoider 3c1

Givens变排

正交变换法

对称性: H<sup>T</sup> = H

### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 对称性:  $H^T = H$ 

• 正交性:  $H^TH = I$ 

### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Civone 35 In

• 对称性:  $H^T = H$ 

• 正交性:  $H^TH = I$ 

• 对合性:  $H^2 = I$ 

### 最小二乘问题的求解

Householder变换

- 对称性:  $H^T = H$
- 正交性:  $H^TH = I$
- 对合性:  $H^2 = I$
- 反射性: 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Hx是x关于w的垂 直超平面 $span\{w\}^{\perp}$ 的镜像反射

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

1 11 202 403

\_\_\_\_\_

正交变换法

• 第一条显然

### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变物

Householder变换

Givens变换

\_ . . . . . . . .

### • 第一条显然

• 后两条可由第一条导出。事实上,

$$H^{T}H = H^{2} = (I - 2ww^{T})(I - 2ww^{T})$$
  
=  $I - 4ww^{T} + 4ww^{T}ww^{T} = I$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

r rouserrorder x

Givens变法

正交变换法

• 设 $x \in \mathbb{R}^n$ 写为 $x = u + \alpha w$ , 其中 $u \in \text{span}\{w\}^{\perp}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ 

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

T 7's 7's 46.3

- 设 $x \in \mathbb{R}^n$ 写为 $x = u + \alpha w$ , 其中 $u \in \text{span}\{w\}^{\perp}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
- 由 $u^T w = 0$ ,  $w^T w = 1$ 可得

$$Hx = (I - 2ww^{T})(u + \alpha w)$$

$$= u + \alpha w - 2ww^{T}u - 2\alpha ww^{T}w$$

$$= u - \alpha w$$

# 定理

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正态恋摘

Householder变换

Givens变换

E交变换法

### 定理

设 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ , 可以构造单位向量 $w \in \mathbb{R}^n$  使得Householder变换H满足

$$Hx = \alpha e_1$$

其中
$$\alpha = \pm ||x||_2$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

加华正宏亦協

初寺正义文铁

Householder变换

Givens变换

E交变换法

### • 注意到

$$Hx = (I - 2ww^T)x = x - 2(w^Tx)w$$

#### 最小二乘问题的求解

**邓**建松

最小二乘问题

Householder变换

Givene亚维

• 注意到

$$Hx = (I - 2ww^{T})x = x - 2(w^{T}x)w$$

• 为使 $Hx = \alpha e_1$ ,则w应取为

$$w = \frac{x - \alpha e_1}{\|x - \alpha e_1\|_2}$$

### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

下交变换》

### • 注意到

$$Hx = (I - 2ww^{T})x = x - 2(w^{T}x)w$$

• 为使 $Hx = \alpha e_1$ ,则w应取为

$$w = \frac{x - \alpha e_1}{\|x - \alpha e_1\|_2}$$

# 验证

### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

T 7's 7's 16. 3's

# 验证

最小二乘问题的求解

邓建林

最小二乘问题

初等正交变物

Householder变换

---

GIVEII3 X IX

E交变换法

• 
$$\alpha^2 = x^T x$$

• 分母为

$$||x - \alpha e_1||_2^2$$

$$= x^T x - 2\alpha x^T e_1 + \alpha^2$$

$$= 2(x^T x - \alpha x^T e_1)$$

# 验证

最小二乘问题的求解

邓建村

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens華維

正态变换过

• 
$$\alpha^2 = x^T x$$

• 分母为

$$||x - \alpha e_1||_2^2$$

$$= x^T x - 2\alpha x^T e_1 + \alpha^2$$

$$= 2(x^T x - \alpha x^T e_1)$$

• 分母即为 $2(x^T - \alpha e_1^T)x$ , 由此易得

$$2(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\mathbf{w} = \mathbf{x} - \alpha \mathbf{e}_1$$

```
最小二乘问题的求解
邓建松
最小二乘问题
```

初笔正交变描

Householder变换

Givens变换

正交变换着

• 定理告诉我们,对于 $\forall x \in \mathbb{R}^n (x \neq 0)$ ,我们都可以构造出Householder变换H,使得Hx的后n-1个分量为零

最小二乘问题的求解 邓建松 最小二乘问题 初等正交变换 Householder变换

- 定理告诉我们,对于 $\forall x \in \mathbb{R}^n (x \neq 0)$ ,我们都可以构造出Householder变换H,使得Hx的后n-1个分量为零
- 证明步骤同时告诉我们w的构造方法如下:

最小二乘问题的求解 邓建松 最小二乘问题 初等正交变换 Householder变换

- 定理告诉我们,对于 $\forall x \in \mathbb{R}^n \ (x \neq 0)$ ,我们都可以构造出Householder变换H,使得Hx的后n-1个分量为零
- 证明步骤同时告诉我们w的构造方法如下:
  - 计算 $v = x \pm ||x||_2 e_1$

最小二乘问题的求解 邓建松 最小二乘问题 初等正交变换 Householder变换

- 定理告诉我们,对于 $\forall x \in \mathbb{R}^n \ (x \neq 0)$ ,我们都可以构造出Householder变换H,使得Hx的后n-1个分量为零
- 证明步骤同时告诉我们w的构造方法如下:
  - 计算 $v = x \pm ||x||_2 e_1$
  - 计算 $w = v/\|v\|_2$



# 符号的选择

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初坐正方亦坊

......

Householder变换

Givens X 19

正交变换法

• 为了使变换后得到的 $\alpha$ 为正数,我们应 取 $v = x - ||x||_2 e_1$ 

# 符号的选择

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变物

Householder变换

Givens变换

\_\_\_\_\_

- 为了使变换后得到的 $\alpha$ 为正数,我们应 取 $v = x ||x||_2 e_1$
- 问题:如果x是一个很接近于 $e_1$ 的向量,计算 $v_1 = x_1 ||x||_2$ 时会出现两个相近的数相减,从而严重地损失有效数字

# 符号的选择

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初等正交变物

Householder变换

Givens变换

正交变换流

- 为了使变换后得到的 $\alpha$ 为正数,我们应取 $v = x ||x||_2 e_1$
- 问题:如果x是一个很接近于 $e_1$ 的向量,计算 $v_1 = x_1 ||x||_2$ 时会出现两个相近的数相减,从而严重地损失有效数字
- 变形以避免这一问题: (x<sub>1</sub> > 0)

$$v_1 = x_1 - \|x\|_2 = \frac{x_1^2 - \|x\|_2^2}{x_1 + \|x\|_2} = \frac{-(x_2^2 + \dots + x_n^2)}{x_1 + \|x\|_2}$$

## w不需要计算

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

\\_ && -- \\_ \\_ \

Householder变换

由于

$$H = I - 2ww^{T} = I - \frac{2}{v^{T}v}vv^{T} = I - 2\beta vv^{T}$$

其中 $\beta = 2/(v^T v)$ , 因此我们不必求出w,而只需求出 $\beta n v$ , 从而避免了开方运算

## w不需要计算

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

3m 465 T 75 76 165 165

Householder变换

Givens要换

• 由于

$$H = I - 2ww^T = I - \frac{2}{v^T v}vv^T = I - 2\beta vv^T$$
  
其中 $\beta = 2/(v^T v)$ , 因此我们不必求出 $w$ ,而只需求出 $\beta$ 和 $v$ . 从而避免了开方运算

● 在实际计算时,可以把v规范化为第一个分量 为1(第一个分量原值肯定不为零),这样可以 恰好把v的后n-1分量放在x的后n-1个化为零 的分量位置上

## 下溢和上溢

最小二乘问题的求解

ル 建松

最小二乘问题

初等正交变拍

Householder变换

....

F交变换法

 当下溢发生时,计算机有可能把结果置为零, 这可能会出现v<sup>T</sup>v为零的情形

### 下溢和上溢

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变物

Householder变换

Givens变换

- 当下溢发生时,计算机有可能把结果置为零,这可能会出现 $v^Tv$ 为零的情形
- 如果x的分量太大,那么该分量平方时,会出现上溢

### 下溢和上溢

#### 最小二乘问题的求解

**敢小**— 来问是

初等正交变的

Householder变换

Givens变换

正交变换法

- 当下溢发生时,计算机有可能把结果置为零, 这可能会出现*v*<sup>T</sup>*v*为零的情形
- 如果x的分量太大,那么该分量平方时,会出现上溢
- 由于 $\forall \alpha$ ,  $\alpha v$ 和v的单位化向量相同,因此为了避免溢出现象的出现,我们可以用 $x/||x||_{\infty}$ 代替x来构造v, 这相当于在原来的v之前乘了常数 $1/||x||_{\infty}$

# 化其它元素为零

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正立变数

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• Householder变换结果的形式并不需要局限于 $\alpha e_1$ 

# 化其它元素为零

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变物

Householder变换

Givens華維

正交变换法

- Householder变换结果的形式并不需要局限于 $\alpha e_1$
- 它可以把向量中任何若干相邻的元素化为零

# 化其它元素为零

### 最小二乘问题的求解

小姓仏

最小二乘问是

初等正交变数

Householder变换

Givens变换

正交变换法

- Householder变换结果的形式并不需要局限于 $\alpha e_1$
- 它可以把向量中任何若干相邻的元素化为零
- 例如,欲在 $x \in \mathbb{R}^n$ 中从k + 1至j位置引入零元素,只要定义

$$v = (0, ..., 0, x_k - \alpha, x_{k+1}, ..., x_j, 0, ..., 0)$$

即可,其中
$$\alpha^2 = \sum_{i=k}^{j} x_i^2$$

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等止父类孙

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 应用Householder变换,主要的工作量是计算矩阵乘法HA,其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , $H \in \mathbb{R}^m$ .

$$HA = (I - \beta vv^T)A = A - vw^T$$
  
其中 $w = \beta A^T v$ 

## 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变物

Householder变换

Givens变换

正宏弦描》

• 应用Householder变换,主要的工作量是计算矩阵乘法HA,其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , $H \in \mathbb{R}^m$ ,

$$HA = (I - \beta vv^T)A = A - vw^T$$
  
其中 $w = \beta A^T v$ 

• 计算w的一个元素需要n + (n-1) + 1 = 2n 次运算,从而计算w需要2mn次运算

## 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

-12.4 — 21.11.472

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 应用Householder变换,主要的工作量是计算矩阵乘法HA,其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , $H \in \mathbb{R}^m$ .

$$HA = (I - \beta vv^T)A = A - vw^T$$
  
其中 $w = \beta A^T v$ 

- 计算w的一个元素需要n + (n-1) + 1 = 2n 次运算: 从而计算w需要2mn次运算
- 计算 $A vw^T$ 的一个元素需要两次运算

## 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 应用Householder变换,主要的工作量是计算矩阵乘法HA,其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .  $H \in \mathbb{R}^m$ .

$$HA = (I - \beta vv^T)A = A - vw^T$$

其中
$$\mathbf{w} = \beta \mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{v}$$

- 计算w的一个元素需要n + (n-1) + 1 = 2n 次运算; 从而计算w需要2mn次运算
- 计算 $A vw^T$ 的一个元素需要两次运算
- 所以计算HA的总运算量为4mn



# Givens变换

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变

11 11 202-9

Givens变换

正交变换法

• Householder变换把一个向量中许多分量化为零

## Givens变换

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换

- Householder变换把一个向量中许多分量化为零
- Givens变换则只是把向量中一个分量化为零

$$G(i, k, \theta) = I + s(e_i e_k^T - e_k e_i^T) + (c - 1)(e_i e_i^T + e_k e_k^T)$$

其中
$$c = \cos \theta$$
,  $s = \sin \theta$ 

# Givens变换

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Givens变换

正交变换活

- Householder变换把一个向量中许多分量化为零
- Givens变换则只是把向量中一个分量化为零

$$G(i, k, \theta) = I + s(e_i e_k^T - e_k e_i^T) + (c - 1)(e_i e_i^T + e_k e_k^T)$$

其中
$$c = \cos \theta$$
,  $s = \sin \theta$ 

• 这一变换是由Wallace Givens于上世纪五十年代 引入到数值分析领域,也称为Jacobi变 换(C.G.J. Jacobi, 1804–1851)

# $G(i, k, \theta)$ 的结构

## 最小二乘问题的求解

邓建松

- 最小一乖问题

初笔正态变换

.....

Givens变换

正方本格社

## 置零时的取值

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初寺止父受换

Householder变换

Givens变换

• 取 $x \in \mathbb{R}$ ,  $y = G(i, k, \theta)x$ , 则

$$y_i = cx_i + sx_k, y_k = -sx_i + cx_k, y_j = x_j, j \neq i,$$

# 置零时的取值

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

4m Art 11 12 12 10 10 44.

忉寺正文文侠

Givens变换

正态变换法

• 取
$$x \in \mathbb{R}$$
,  $y = G(i, k, \theta)x$ , 则

$$y_i = cx_i + sx_k, y_k = -sx_i + cx_k, y_j = x_j, j \neq i,$$

• 若要 $y_k = 0$ , 只要取

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}, s = \frac{x_k}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}$$

就有
$$y_i = \sqrt{x_i^2 + x_k^2}$$
,  $y_k = 0$ 



# 旋转

最小二乘问题的求解

初等正交变换 Householder变换 **Givens变换** 

正交变换法

• 从几何上看, $G(i,k,\theta)x$ 是在(i,k)坐标 平面内将x按顺时针方向旋转 $\theta$ 角

## 旋转

# 最小二乘问题的求解 邓建松 最小二乘问题 初等正交变换 Householder变物

Givens变换

- 从几何上看, $G(i,k,\theta)$ x是在(i,k)坐标 平面内将x按顺时针方向旋转 $\theta$ 角
- 所以Givens变换也称为平面旋转变换

## 旋转

## 最小二乘问题的求解 邓建松 最小二乘问题 初等正交变换

Givens变换

- 从几何上看, $G(i,k,\theta)x$ 是在(i,k)坐标 平面内将x按顺时针方向旋转 $\theta$ 角
- 所以Givens变换也称为平面旋转变换
- Givens变换左(或右)乘矩阵A,则它只改变A的第i,k行(或列),其余元素保持不变

## 溢出的避免

最小二乘问题的求解

邓建松

最小一乘问题

初华正方亦始

四寸止又又次

Givens变换

正交变换法

• 利用*c*, *s*的定义进行计算,有可能发生 溢出

# 溢出的避免

最小二乘问题的求解

117,0012

最小二乘问是

初等正交变换

Givens变换

正交变换剂

- 利用*c*, *s*的定义进行计算,有可能发生 溢出
- 为了防止溢出,在实现时可以采用一些 小技巧,见书上算法中的描述

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Householder变型

Givens变换 正交变换法 • 本节讨论LS问题求解的新方法

## 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等止交变技

Householder变换

- 本节讨论LS问题求解的新方法
- 由于2范数具有正交不变性,所以对任意正交 矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,

$$||Ax - b||_2 = ||Q^T (Ax - b)||_2$$

## 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

MALLXX

Householder变换

正交变换法

- 本节讨论LS问题求解的新方法
- 由于2范数具有正交不变性,所以对任意正交 矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,

$$||Ax - b||_2 = ||Q^T(Ax - b)||_2$$

• 从而LS问题min  $||Q^TAx - Q^Tb||_2$ 就等价于原问题min  $||Ax - b||_2$ 

## 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

Householder变换

Givens变换

- 本节讨论LS问题求解的新方法
- 由于2范数具有正交不变性,所以对任意正交 矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,

$$||Ax - b||_2 = ||Q^T (Ax - b)||_2$$

- 从而LS问题 $\min \|Q^T Ax Q^T b\|_2$ 就等价于原问题 $\min \|Ax b\|_2$
- 期望通过适当选取正交矩阵Q,使原问题转化为 较容易求解的LS问题。这就是正交变换法的基 本思想



# QR分解定理

最小二乘问题的求解

小娃似

最小二乘问题

初等正交变数

加马亚文文》

Givens等推

正交变换法

## 定理

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ , 则A有QR分解

$$A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是正交矩阵, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是具有非负对角元的上三角阵;而且 3m = n且A非奇异时,上述分解是唯一的

最小二乘问题的求解

邓建松

最小一乘问题

海学 正方が歴

Housenolder变换

GIVEII3,CJX

正交变换法

• 对n进行数学归纳法

## 最小二乘问题的求解

か 建松

最小二乘问是

初等正交变换

Householder §

Givens变换

- 对n进行数学归纳法
- 当*n* = 1时这就是前一节关于Householder 变换的定理

## 最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初等正交变换 Householder变换

- 对n进行数学归纳法
- 当n = 1时这就是前一节关于Householder 变换的定理
- 假设已经证明了定理对所有  $p \times (n-1)$ 矩阵成立, $p \ge n-1$

## 最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初等正交变换 Householder变换

- 对n进行数学归纳法
- 当n = 1时这就是前一节关于Householder 变换的定理
- 假设已经证明了定理对所有  $p \times (n-1)$ 矩阵成立, $p \ge n-1$
- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的第一列是 $a_1$

**最小二乘问题的求解** 邓建松 最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

Givens变换

正交变换法

• 由Householder变换定理,存在正交矩阵 $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得 $Q_1^T a_1 = \|a_1\|_2 e_1$ 

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初笙正方亦物

初守正义文:

Givens变换

- 由Householder变换定理,存在正交矩阵 $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得 $Q_1^T a_1 = \|a_1\|_2 e_1$
- 于是我们有

$$Q_1^T A = \left(\begin{array}{cc} \|a_1\|_2 & v^T \\ 0 & A_1 \end{array}\right)$$

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变数

Givens变换

正交变换法

• 对 $(m-1) \times (n-1)$ 阶矩阵 $A_1$ 应用归纳 假设,有

$$A_1 = Q_2 \left( \begin{array}{c} R_2 \\ 0 \end{array} \right)$$

其中 $Q_2$ 是 $(m-1) \times (m-1)$ 阶正交矩阵, $R_2$ 是具有非负对角元的 $(n-1) \times (n-1)$  上三角阵



最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笙正春本園

MATTAX

Civene ###

正交变换法

• 💠

$$Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 & v^T \\ 0 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则Q和R满足定理的要求。存在性得证

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变挑

Givens变换

正交变换法

● 设*m* = *n*, *A*非奇异

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变的 Householder变换 Givens变换

- 设*m* = *n*, *A*非奇异
- $\partial A = QR = \tilde{Q}\tilde{R}$ ,  $\dot{A} = Q$ ,  $\ddot{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  是 正交矩阵, $R, \tilde{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  是具有非负对 角元的上三角阵

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初等正交变换 Householder变换 Givens变换

- 设*m* = *n*, *A*非奇异
- 设 $A = QR = \tilde{Q}\tilde{R}$ , 其中Q,  $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是 正交矩阵,R,  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  是具有非负对 角元的上三角阵
- A非奇异,所以R,  $\tilde{R}$ 的对角元均为正数, 所以

$$\tilde{Q}^T Q = \tilde{R} R^{-1}$$

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正态变数

Tiousenoluer x;

正交变换法

• 上式左边是正交矩阵

最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正态变换

Givens变换

- 上式左边是正交矩阵
- 上式右边是对角元均为正数的上三角阵

## 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问是

初等正交变物

Givens变换

- 上式左边是正交矩阵
- 上式右边是对角元均为正数的上三角阵
- 所以两边只能是单位阵,从而必有 $Q = \tilde{Q}, R = \tilde{R}$

## LS问题的正交变换法

最小二乘问题的求解

4 建位

最小二乘问是

対がまずがが

er strik

正交变换法

• 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ 有线性无关的列, $b \in \mathbb{R}^m$ 

## LS问题的正交变换法

最小二乘问题的求解

**ル**建松

最小二乘问是

初等止交变 Householder变数 Givens变换

- 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ 有线性无关的列, $b \in \mathbb{R}^m$
- A有QR分解,并且把Q分块 为 $Q = (Q_1, Q_2)$ ,其中 $Q_1$ 有n 列

### LS问题的正交变换法

最小二乘问题的求解

**邓建**松

最小二乘问是

初等正交变 Householder变换 Givens变换 正交变换法 • 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ 有线性无关的列, $b \in \mathbb{R}^m$ 

- A有QR分解,并且把Q分块 为 $Q = (Q_1, Q_2)$ , 其中 $Q_1$ 有n 列
- 令

$$Q^T b = \left(egin{array}{c} Q_1^T \ Q_2^T \end{array}
ight) b = \left(egin{array}{c} c_1 \ c_2 \end{array}
ight)$$

Givens变换

正交变换法

### 那么

$$||Ax - b||_2^2 = ||Q^T Ax - Q^T b||_2^2$$
  
=  $||Rx - c_1||_2^2 + ||c_2||_2^2$ 

正交变换法

那么

$$||Ax - b||_2^2 = ||Q^T Ax - Q^T b||_2^2$$
  
=  $||Rx - c_1||_2^2 + ||c_2||_2^2$ 

Givens变换

正交变换法

那么

$$||Ax - b||_2^2 = ||Q^T Ax - Q^T b||_2^2$$
  
=  $||Rx - c_1||_2^2 + ||c_2||_2^2$ 

- x是原LS问题的解当且仅 当x是 $Rx = c_1$ 的解
- LS问题的求解转化为很容易求解的上 三角方程组求解

### 那么

$$||Ax - b||_2^2 = ||Q^T Ax - Q^T b||_2^2$$
$$= ||Rx - c_1||_2^2 + ||c_2||_2^2$$

- x是原LS问题的解当且仅 当x是 $Rx = c_1$ 的解
- LS问题的求解转化为很容易求解的上 三角方程组求解
- 问题的关键是如何实现QR分解



### QR分解的Householder方法

最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初笔正立变物

Givens变换

正交变换法

● 用Householder方法计算QR分解与不选主元 的Gauss消去法非常类似

### QR分解的Householder方法

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初等正交变换

正交变换法

- 用Householder方法计算QR分解与不选主元的Gauss消去法非常类似
- 对一般矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,假设我们已进行了k-1步,得到了Householder变换 $H_1, \ldots, H_{k-1}$ ,使得

$$A_k = H_{k-1} \cdots H_1 A = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11}^{(k)}$ 是k-1阶上三角阵

### 第k步

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Manual - Man 205 MA

• 设
$$A_{22}^{(k)}=(u_k,\ldots,u_n)$$

## 第k步

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变物

Givens变换

正交变换法

• 在第k步中,先确定Householder变换:

$$\tilde{H}_k = I_{m-k+1} - \beta_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \in \mathbb{R}^{(m-k+1)\times(m-k+1)}$$

使得
$$\tilde{H}_k u_k = r_{kk} e_1$$
, 其中 $r_{kk} \geqslant 0$ 

## 第k步

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变物

Givens登梅

正交变换法

• 设
$$A_{22}^{(k)} = (u_k, \ldots, u_n)$$

• 在第k步中,先确定Householder变换:

$$\tilde{H}_k = I_{m-k+1} - \beta_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \in \mathbb{R}^{(m-k+1)\times(m-k+1)}$$

使得
$$\tilde{H}_k u_k = r_{kk} e_1$$
, 其中 $r_{kk} \geqslant 0$ 

● 然后计算*H̃<sub>k</sub>A*<sup>(k)</sup><sub>22</sub>

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder等類

Givens变换

最小二乘问题

初笙正春恋娇

Householder变担

正交变换法

• 
$$\diamondsuit H_k = \operatorname{diag}(I_{k-1}, \tilde{H}_k)$$

• 则我们有

$$A_{k+1} = H_k A_k = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & \tilde{H}_k A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ 0 & A_{22}^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11}^{(k+1)}$ 是上三角阵

# 最小二乘问题的求解邓建松

最小二乘问是

初等正交变数

Householder变热

正交变换法

• 如此从k = 1出发,对A依次进行n次Householder变换,我们就可以将A约化为上三角阵

- 如此从*k* = 1出发,对*A*依次进 行*n*次Householder变换,我们就可以 将*A*约化为上三角阵
- $idR = A_{11}^{(n)}, \ Q = H_1 \cdots H_n, \ 则有$

$$A = Q \left( \begin{array}{c} R \\ 0 \end{array} \right)$$

### • 如此从k = 1出发,对A依次进 行n次Householder变换,我们就可以 将A约化为上三角阵

$$A = Q \left( \begin{array}{c} R \\ 0 \end{array} \right)$$

• 如此得到的上三角阵*R*的对角元都是非 负的



最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笔正立变数

.....

er 20:40

正交变换法

• 可以在A中存放Q与R

最小二乘问题的求解

か 建松

最小二乘问题

初寺正义文挟

Givens变换

- 可以在A中存放Q与R
- 通常并不是将Q算出,而是只存放构成它的n个Householder变换 $H_k$

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

- 可以在A中存放Q与R
- 通常并不是将Q算出,而是只存放构成它的n个Householder变换 $H_k$
- 对于每个 $H_k$ , 我们只需要保存 $v_k$ 和 $\beta_k$

最小二乘问题的求解

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

- 可以在A中存放Q与R
- 通常并不是将Q算出,而是只存放构成它的n个Householder变换 $H_k$
- 对于每个 $H_k$ ,我们只需要保存 $v_k$ 和 $\beta_k$
- $v_k = (1, *, ..., *)$ ,可把除首位的1外的元素存放在A的对角元以下位置上

最小二乘问题的求解 邓建松

最小二乘问题

初等正交变换

Householder变换

- 可以在A中存放Q与R
- 通常并不是将Q算出,而是只存放构成它的n个Householder变换 $H_k$
- 对于每个 $H_k$ , 我们只需要保存 $v_k$ 和 $\beta_k$
- $v_k = (1, *, ..., *)$ ,可把除首位的1外的元素存放在A的对角元以下位置上
- β<sub>k</sub>存放在单独一个向量中



#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变物

LI ------ - LI --- 205 164

....

正交变换法

● 算法的运算量为2n²(m - n/3)

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变物

- 算法的运算量为2n²(m n/3)
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初等正交变控

Householder变拉

- 算法的运算量为 $2n^2(m-n/3)$ 
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半
- 其数值性态良好

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

Ann Arte Trade also 4

Householder变换

Givens变换

- 算法的运算量为 $2n^2(m-n/3)$ 
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半
- 其数值性态良好
  - 对于正交阵,相互累积相乘时,结果矩阵 的元素仍是有界的

#### 最小二乘问题的求解

邓建松

最小二乘问题

初笙正方本:

Householder变换

Givens变换

- 算法的运算量为2n²(m n/3)
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半
- 其数值性态良好
  - 对于正交阵,相互累积相乘时,结果矩阵 的元素仍是有界的
- 利用这一算法求解LS问题所得到的计算解通常 要比正则化方法精确得多

### 最小二乘问题的求解

**邓建松** 

最小二乘问题

初等正交变技

Householder变换

Givens变换

- 算法的运算量为2n²(m n/3)
  - 当m = n时,LU分解相比于QR分解,运算量约只有一半
- 其数值性态良好
  - 对于正交阵,相互累积相乘时,结果矩阵 的元素仍是有界的
- 利用这一算法求解LS问题所得到的计算解通常 要比正则化方法精确得多
- 当然付出的代价也是不容忽视的: *m ≫ n*时

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问题

>-- 4040 --- --- ---- ---- 1

Givens变换

正交变换法

也可以利用Givens变换或者Gram-Schimidt正交 化实现QR分解

#### 最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初等正交变物

.........

Givens变换

- 也可以利用Givens变换或者Gram-Schimidt正交 化实现QR分解
- 通常Givens变换来实现QR分解的运算量大约 是Householder方法的两倍。但如果A稀疏,则 使用Givens变换可能会比较有效

最小二乘问题的求解

最小二乘问是

初等正交变换

Givens支換

- 也可以利用Givens变换或者Gram-Schimidt正交 化实现QR分解
- 通常Givens变换来实现QR分解的运算量大约 是Householder方法的两倍。但如果A稀疏,则 使用Givens变换可能会比较有效
- 也可以用QR分解进行特征值求解或者解线性方程组,对病态方程组可能有效,但运算量大得多

## 线性方程组的古典迭代解法

邓建松

2022年9月26日

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

仅敛性埋1

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗 近收敛速度 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大

线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

ille Alektrania

ABA ILLEE VE

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的G 敛性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大
- 在实际应用中,特别是偏微分方程的数值求解时,通常遇到的就是大型稀疏线性方程组

线性方程组的古典迭 代解法 邓建松

单步线性定常迭代法
Jacobi迭代法
Gauss-Seidel迭代法

收斂的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi选代法和G-S选代法的 敛性

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的湖

- 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高,直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机上可以求解的线性方程组的规模也越来越大
- 在实际应用中,特别是偏微分方程的数值求解时,通常遇到的就是大型稀疏线性方程组
- 而直接法在对矩阵进行分解的时候,会破坏矩阵的稀疏性

线性方程组的古典迭 代解法 邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件收敛的充分条件及误差估计

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

平均收敛速度和新近收敛速度 模型何题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的新

- 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大
- 在实际应用中,特别是偏微分方程的数值求解时,通常遇到的就是大型稀疏线性方程组
- 而直接法在对矩阵进行分解的时候,会破坏矩 阵的稀疏性
- 寻求能够保持稀疏性的有效算法是数值线性代数中一个重要的研究课题

### 求解稀疏线性方程组的方法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi读代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

収敛性埋化

収敛的充安条件及证

Jacobi迭代法和G-S迭代法的。 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

<sup>换至回题</sup> Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度

### 主要有两类

迭代法:按照某种规则构造一个向量序列,其极限是方程组的精确解

### 求解稀疏线性方程组的方法

线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

女敛速度

平均收斂速度和漸近收斂速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的湖

### 主要有两类

- 迭代法:按照某种规则构造一个向量序列,其极限是方程组的精确解
- 稀疏直接法:是直接法与某些稀疏矩阵 技巧有机结合的结果,利用矩阵的特 点,使得分解结果尽可能保持稀疏性

## 求解稀疏线性方程组的方法

线性方程组的古典迭 代解法

步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推广

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi详代注和G-S进代注的海

## 主要有两类

- 迭代法:按照某种规则构造一个向量序列,其极限是方程组的精确解
- 稀疏直接法:是直接法与某些稀疏矩阵 技巧有机结合的结果,利用矩阵的特 点,使得分解结果尽可能保持稀疏性
- 本课程只讲迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel进代制

形式推

收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 如何构造迭代序列?

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

### 人敛性埋化

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度

- 如何构造迭代序列?
- 构造的序列是否收敛? 在什么情况下收敛?

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

7.0 = 4.107

## 収敛性埋化

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的I 敛性

## 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的部 • 如何构造迭代序列?

- 构造的序列是否收敛? 在什么情况下收敛?
- 如果收敛,收敛速度如何?(收敛速度的定量刻划)

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推广

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 做性

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi选代法和G-S选代法的渐

- 如何构造迭代序列?
- 构造的序列是否收敛? 在什么情况下收敛?
- 如果收敛,收敛速度如何?(收敛速度 的定量刻划)
- 迭代有限步停止。需要对近似解进行误差估计和舍入误差分析

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代流

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

收敛性理

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟

方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何



线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

收敛性理i

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的涉 近收敛速度

- 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何
- 这通常是以运算量和存储量的要求为标准

线性方程组的古典迭 代解法 邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi选代法 Gauss-Seidel选代法 形式推广

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi选代法和G-S选代法的的 敛性

平均收敛速度和漸近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的漸 近收敛速度

- 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何
- 这通常是以运算量和存储量的要求为标准
- 在这个标准下,很多时候直接法要比迭 代法好

线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的电

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

- 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何
- 这通常是以运算量和存储量的要求为标准
- 在这个标准下,很多时候直接法要比迭代法好
- 但对大型稀疏方程组来说,迭代法更实用

## Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Communication (Part

形式排

收敛性理论

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近此负责度 ● 考虑非奇异线性方程组Ax = b

## Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭件

Gauss-Seidel)达

|佐舎||佐神|

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 lacobi洪代注和G-S洪代注印

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 考虑非奇异线性方程组Ax = b
- $\Diamond A = D L U$ , 其中D为A的对角元构成的对角阵,-L为A的下三角阵,
  - -U为A的上三角阵(均不含对角元)

## Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel)迭{

d*Fr Δfr J*el- τπ Δ

NSX III-E K

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的湖 • 考虑非奇异线性方程组Ax = b

- $\Diamond A = D L U$ , 其中D为A的对角元构成的对角阵,-L为A的下三角阵,-U为A的上三角阵(均不含对角元)
- 则Ax = b可写为x = Bx + g, 其中 $B = D^{-1}(L + U)$ ,  $g = D^{-1}b$

# 线性方程组的古典迭

Jacobi洪代法

## • 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代》

形式推

### (敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

• 代入x = Bx + g的右边,得到新向量

$$x_1 = Bx_0 + g$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

iller Afrikkt-1111 i

### 收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

• 代入x = Bx + g的右边,得到新向量

$$x_1 = Bx_0 + g$$

 $\bullet$  再把 $x_1$ 代入右边,又得一个新向量 $x_2$ 

线性方程组的古典迭

• 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

• 代入x = Bx + g的右边,得到新向量

$$x_1 = Bx_0 + g$$

- 再把x1代入右边,又得一个新向量x5
- 依此类推,我们有 $x_k = Bx_{k-1} + g$ . k = 1, 2, ...

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

777 - 15-140

### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 这就是Jacobi迭代法, 由C.G.J. Jacobi提 出

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

### Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

### 네가 스타 네- 100

## 收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 lacobi迭代法和G-S迭代法律

### 平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的約 近收敛速度

- 这就是Jacobi迭代法, 由C.G.J. Jacobi提 出
- 其中B称为Jacobi迭代法的迭代矩阵, 其对角元全是零

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seideli

Gauss-Seidel选

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海

- 这就是Jacobi迭代法, 由C.G.J. Jacobi提 出
- 其中B称为Jacobi迭代法的迭代矩阵, 其对角元全是零
- g称为Jacobi迭代法的常数项

## 线性方程组的古典迭

Jacobi洪代法

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推广

### 收敛性理说

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收分速度

• 
$$\ \stackrel{\text{\tiny LL}}{\boxtimes} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• 则
$$D^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/7\end{pmatrix}$$
,  $L=\begin{pmatrix}0&0\\-5&0\end{pmatrix}$ ,  $U=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$ 

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

### 女敛性理は

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

• 则
$$D^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/7\end{pmatrix}$$
,  $L=\begin{pmatrix}0&0\\-5&0\end{pmatrix}$ ,  $U=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$ 

• 迭代矩阵和常数项分别为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -5/7 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 13/7 \end{pmatrix}$$

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

形式推

### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

## • 迭代得到

$$\begin{aligned} x_1 &= \left( \begin{array}{c} 5 \\ 8/7 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{c} 5 \\ 1.143 \end{array} \right), \\ x_2 &= \left( \begin{array}{c} 69/14 \\ -12/7 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{c} 4.929 \\ -1.714 \end{array} \right) \end{aligned}$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

### If At Islams

iltr-0hr051本軍条4

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度 • 迭代得到

$$x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 1.143 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 69/14 \\ -12/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.929 \\ -1.714 \end{pmatrix}$$

• 25次迭代后,得到 $x \approx \begin{pmatrix} 7.111 \\ -3.222 \end{pmatrix}$ ,这约等于 方程的准确解 $\begin{pmatrix} 64/9 \\ -29/9 \end{pmatrix}$ 

# Jacobi迭代法代码片段

```
线性方程组的古典迭
代解法
```

邓建松

```
单步线性定常迭代法
```

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选

.....

**此**勿的容要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

```
for i=1 to n
  y[i]=0.0
  for j=1 to n
    y[i]=y[i]+B[i][j]*x[j]
  y[i]=y[i]+g[i]
```

## Jacobi迭代法中分量计算顺序

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代》

Jacobi选

Gauss-Seidel迭代法

形式推

收敛性理

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 在Jacobi迭代法中各分量的计算顺序是 没有关系的

## Jacobi迭代法中分量计算顺序

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seiden ATV

### (敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

- 在Jacobi迭代法中各分量的计算顺序是 没有关系的
- 先算哪个分量,结果都不变

## Jacobi迭代法中分量计算顺序

线性方程组的古典迭 代解法

邓建村

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

- 在Jacobi迭代法中各分量的计算顺序是 没有关系的
- 先算哪个分量,结果都不变
- 我们做一下改变: 在计算 $x_k$ 的第一个分量用 $x_{k-1}$ 的各个分量计算,但当计算 $x_k$ 的后面分量时,采用已算出的新分量 $x_1^{(k)}$ 代替 $x_1^{(k-1)}$ ,而其它分量仍用 $x_i^{(k-1)}$

## 新代码片段

```
线性方程组的古典迭
代解法
```

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

女敛性理说

収釵的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流近收敛速度

```
for i=1 to n
  x[i]=0.0
  for j=1 to n
    x[i]=x[i]+B[i][j]*x[j]
  x[i]=x[i]+g[i]
```

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭色

Gauss-Seidel选代法

IIX = 1 + 16:

### 收敛性理证

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和漸近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式推

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

● 这称为Gauss-Seidel迭代法,简称为G-S迭代法

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 仅敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和浙近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

- 这称为Gauss-Seidel迭代法,简称为G-S迭代法
- 如此变化,编程时存储量减少了

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

收敛性理:

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 • 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

- 这称为Gauss-Seidel迭代法,简称为G-S迭代法
- 如此变化,编程时存储量减少了
- 该格式1823年C.F. Gauss在给其学生C.L. Gerling的信中提到, P.L. von Seidel在1874年发表了这一方法

线性方程组的古典党 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式技

仅敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗 近收敛速度 • 如果 $(D-L)^{-1}$ 存在,那么迭代格式为

$$x_k = (D-L)^{-1}Ux_{k-1} + (D-L)^{-1}b$$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

iller Alerbek 100 2

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi选代法和G-S选代法的明

以 或 迷 皮
平均收敛速度和消

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的湖 证收效達度 • 如果 $(D-L)^{-1}$ 存在,那么迭代格式为

$$x_k = (D-L)^{-1}Ux_{k-1} + (D-L)^{-1}b$$

• 我们称 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 为G-S迭代法的<mark>迭代矩阵</mark>, 其第一列全是零,  $(D - L)^{-1}b$ 称为G-S迭代法的常数项

线性方程组的古典迭 代解法

邓建林

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推广

收敛的充要条件 收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

平均收敛速度和漸近收敛速度 模型何題 • 如果 $(D-L)^{-1}$ 存在,那么迭代格式为

$$x_k = (D-L)^{-1}Ux_{k-1} + (D-L)^{-1}b$$

- 我们称 $L_1 = (D L)^{-1}U$ 为G-S迭代法的<mark>迭代矩阵</mark>, 其第一列全是零,  $(D L)^{-1}b$ 称为G-S迭代法的常数项
- 此时分量的计算次序是不能改变的

# 线性方程组的古典迭

Gauss-Seidel选代法

Gauss-Seidel选代法

• 
$$\stackrel{\text{d.}}{\nabla} A = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

• 
$$\mathfrak{V}(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 7/176 & -1/11 \end{pmatrix}$$

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel迭代法

形式推

权敛性埋诉

収敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的形 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的潮 近收敛速度

• 
$$\begin{tabular}{l} \upliese \begin{tabular}{l} \upliese \begin{tabular}{l$$

• 
$$\mathfrak{P}(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 7/176 & -1/11 \end{pmatrix}$$

• 迭代矩阵和常数项分别为

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3/16 \\ 0 & -21/176 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 11/16 \\ -131/176 \end{pmatrix}$$

单步线性定常迭代法

Jacobi选代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

收敛性理说

die Ne Me de de mit Az

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和漸近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏

• 取初值 $x_0 = (1,1)^T$ 

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi选作

Gauss-Seidel选代法

形式排

### 収敛性理明

收敛的充要条件

収斂的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

- 取初值 $x_0 = (1,1)^T$
- 迭代得到各向量依次为

$$\left(\begin{array}{c}0.5\\-0.8636\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8494\\-0.6413\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8077\\-0.6678\end{array}\right)$$

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代

Jacobi迭化

Gauss-Seidel选代法

形式推

### **仪**敛性埋化

収敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和浙近收敛速E 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗 近收敛速度

• 取初值
$$x_0 = (1,1)^T$$

• 迭代得到各向量依次为

$$\left(\begin{array}{c}0.5\\-0.8636\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8494\\-0.6413\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8077\\-0.6678\end{array}\right)$$

• 经六次迭代,得到向量 $\begin{pmatrix} 0.8122 \\ -0.6650 \end{pmatrix}$ 

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭化

Gauss-Seidel迭代法

形式推广

## 敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 lacabi选件注和G\_S选件注的新 • 取初值 $x_0 = (1,1)^T$ 

• 迭代得到各向量依次为

$$\left(\begin{array}{c}0.5\\-0.8636\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8494\\-0.6413\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8077\\-0.6678\end{array}\right)$$

- 经六次迭代,得到向量 $\begin{pmatrix} 0.8122 \\ -0.6650 \end{pmatrix}$
- 方程的准确解为

$$\left(\begin{array}{c} 160/197 \\ -131/197 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{c} 0.812183 \\ -0.664975 \end{array}\right)$$

# 两种方法的共性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选作

形式推广

(敛性理)

收敛的充要条件

双数的光分录针及误左值针 1 1 2 2 4 4 2 4 2 6 2 4 4 2 4 4 4

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 在这两种方法中,新的近似解 $x_k$ 是已知近似解 $x_{k-1}$ 的线性函数,并且只与 $x_{k-1}$ 有关,即它们都可以写为

$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

# 两种方法的共性

线性方程组的古典迭

• 在这两种方法中,新的近似解x<sub>4</sub>是已知 近似解 $x_{\iota-1}$ 的线性函数,并且只 与 $x_{k-1}$ 有关,即它们都可以写为

$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

• Jacobi迭代法:  $M = D^{-1}(L + U)$ .  $g = D^{-1}b$ 

# 两种方法的共性

线性方程组的古典迭

• 在这两种方法中,新的近似解x<sub>k</sub>是已知 近似解 $x_{\iota-1}$ 的线性函数,并且只 与 $x_{k-1}$ 有关,即它们都可以写为

$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

- Jacobi迭代法:  $M = D^{-1}(L + U)$ .  $g = D^{-1}b$
- G-S迭代法: M = (D − L)<sup>-1</sup>U,  $g = (D - L)^{-1}b$



# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代

形式推

### **收敛性理说**

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为<mark>单</mark>步线性定常迭代法

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

W-1010-00

形式推广

### **收敛性理说**

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为<mark>单</mark>步线性定常迭代法
  - $M ∈ \mathbb{R}^{n \times n}$  称为迭代矩阵

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi达代法
Gauss-Seidel迭代法

形式推

### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的潜近收敛速度

- 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为<mark>单</mark>步线性定常迭代法
  - $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  称为<mark>迭代矩阵</mark>
  - $g ∈ \mathbb{R}^n$ 称为常数项

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理i

## 收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流近收敛速度

- 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为<mark>单</mark>步线性定常迭代法
  - $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  称为<mark>迭代矩阵</mark>
  - $g \in \mathbb{R}^n$ 称为常数项
  - $x_0 \in \mathbb{R}^n$  称为初始向量

# 收敛与发散

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

女敛性理证

收敛的充分条件及误

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗近收敛速度

如果迭代格式对任意的初始向量产生的向量序列{x<sub>k</sub>}(称为迭代序列)都有极限,则称该迭代格式是收敛的

# 收敛与发散

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

(敛性理说

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 • 如果迭代格式对任意的初始向量产生的向量序列 $\{x_k\}$ (称为迭代序列)都有极限,则称该迭代格式是收敛的

• 否则称它是不收敛的,或者是发散的

# 收敛与发散

线性方程组的古典迭 代解法

早步线性定常达代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代記

形式推广

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

(人) 以及を (久) 平均收敛速度和新近收敛速度 模型何題 トート: 洗化汁和C S 洗化汁や流

- 如果迭代格式对任意的初始向量产生的向量序列{x<sub>k</sub>}(称为迭代序列)都有极限,则称该迭代格式是收敛的
- 否则称它是不收敛的,或者是发散的
- 若收敛,记迭代序列的极限为 $x_*$ ,则  $fx_* = Mx_* + g$

# 迭代法与方程组的相容性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

auss-Seidel诗代》

形式推广

女敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

T 构状双速反布机处仪双速度 錯刑 計順

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

•  $x_*$ 是方程组(I - M)x = g的解

# 迭代法与方程组的相容性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

(敛性理论

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

收敛速度 平均收敛速度和漸近收敛速度 模型何题 •  $x_*$ 是方程组(I - M)x = g的解

• 如果存在非奇异矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$G(I-M)=A, \quad Gg=b$$

则迭代序列也收敛到Ax = b的解,此时两个方程称为等价方程组,也称迭代格式与方程组Ax = b是相容的

# 迭代法与方程组的相容性

线性方程组的古典迭 代解法

Gauss-Seidel迭代法

形式推广

收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

- $x_*$ 是方程组(I M)x = g的解
- 如果存在非奇异矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$G(I-M)=A, \quad Gg=b$$

则迭代序列也收敛到Ax = b的解,此时两个方程称为等价方程组,也称迭代格式与方程组Ax = b是相容的

• 已有的两种格式是相容的

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel迭代法

形式推

收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

•  $\partial x_* = b \otimes Ax =$ 

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭化

Gauss-Seidel选化

形式推

### 収敛性埋1

#### 收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 •  $\partial x_* = b \cap R$ 

•  $\{x_k\}$ 是由相容格式 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 产生的迭代序列

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代》

Gauss-Seidel族代

Gauss-Seidel选作

形式排

### 1人数 1上生 1

### 収敛的充要条

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

- $\partial x_* = b \cap R$
- $\{x_k\}$ 是由相容格式 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 产生的迭代序列
- 定义 $y_k = x_k x_*$ , 称为 $x_k$ 的误差向量

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seidel)法代

iller Alerbek am i

### - IV SV IT-E N

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi读代法和G-S读代法的述 •  $\partial x_* = b \cap M$ 

- $\{x_k\}$ 是由相容格式 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 产生的迭代序列
- 定义 $y_k = x_k x_*$ , 称为 $x_k$ 的误差向量
- 那么

$$y_{k+1} = x_{k+1} - x_* = Mx_k + g - (Mx_* + g)$$
  
=  $My_k = M^k y_0$ 

# 收敛条件

线性方程组的古典迭

• 对任意 $y_0$ 都有 $y_k \to 0$ (即 $x_k \to x_*$ )当且 仅当 $M^k \rightarrow 0$ 

# 收敛条件

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 人 蚁性埋 i

收敛的充要条

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 对任意 $y_0$ 都有 $y_k \to 0$ (即 $x_k \to x_*$ )当且 仅当 $M^k \to 0$
- 而 $M^k \to 0$ 的充要条件是 $\rho(M) < 1$

# 收敛条件

线性方程组的古典迭

- 对任意 $y_0$ 都有 $y_k \to 0$ (即 $x_k \to x_*$ )当且 仅当 $M^k \rightarrow 0$
- 而 $M^k \to 0$ 的充要条件是 $\rho(M) < 1$

# 定理

解方程组Ax = b的单步线性定常迭代  $\exists x_k = Mx_{k-1} + g$ 收敛的充要条件是迭代矩 阵M的谱半径小干1

# 注解

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代》

Gauss-Seidel迭代

-----

形式推

仅敛性埋1

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》

迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半 径,而与初始向量的选取和常数项无关

# 注解

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi选代法 Gauss-Seidel选代法

形式推广

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的机 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的湖

- 迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半 径,而与初始向量的选取和常数项无关
- 相同的方程组, Jacobi迭代矩阵和G-S迭代矩阵的谱半径不一定相同, 而且无包含关系

# 注解

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

**火**敛性理论

**收敛的充要条件** 收敛的充分条件及误差f

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

又以、压力 平均收敛速度和漸近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S选代法的新 近收敛速度

- 迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半径,而与初始向量的选取和常数项无关
- 相同的方程组, Jacobi迭代矩阵和G-S迭代矩阵的谱半径不一定相同, 而且无包含关系
- 例子: Mathematica sec4.2.1.nb

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

-----

Gauss-Seidel迭代

形式推り

### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Afternoon and

Jacobi迭代法和G-S迭代法的常 近收敛速度 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的:谱半径的计算相当困难

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

**协**幼性理i

#### 收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度

- 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的: 谱半径的计算相当困难
- 需要一些容易计算的充分条件



# 线性方程组的古典迭

- 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便 的: 谱半径的计算相当困难
- 需要一些容易计算的充分条件

# 定理

如果范数||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q^k}{1 - q} ||x_1 - x_0||$$

单步线性定常迭代活

Gauss-Seidel迭代》

形式推广

収敛性埋诉

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度模型问题

模型问题

Jacobi选代法和G-S选代法的渐
近收敛速度

- 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的:谱半径的计算相当困难
- 需要一些容易计算的充分条件

# 定理

如果范数||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q^k}{1 - q} ||x_1 - x_0||$$

• 此定理结论的右边与精确解无关

# 定理证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代》

Communication (Part

II: ±1• HB

### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

•  $E_{y_k} = M^k y_0$ 的两边取范数,则有

$$||y_k|| \leq ||M||^k ||y_0|| = q^k ||y_0||$$

# 定理证明

# 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代注

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

### 女敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度 •  $\Delta t_k = M^k y_0$ 的两边取范数,则有

$$||y_k|| \leq ||M||^k ||y_0|| = q^k ||y_0||$$

根据y₀的定义

$$||y_0|| = ||x_0 - x_*|| \le ||x_0 - x_1|| + ||x_1 - x_*||$$
  
=  $||x_0 - x_1|| + ||My_0|| \le ||x_0 - x_1|| + q||y_0||$ 

所以有
$$||y_0|| \leq \frac{1}{1-a}||x_1-x_0||$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobio I (II)

\_\_\_\_\_,

ltr Atrial-1811

#### 权蚁性理H

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流 近此分禮度 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流 近此分遣度

- 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代
- 这种估计一般是偏高的

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi还代法

Gauss-Deideito (

形式推

#### 収敛性埋電

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

- 平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐近收敛速度

- 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代
- 这种估计一般是偏高的

## 定理

若||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q}{1 - q} ||x_{k-1} - x_k||$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

**ル建松** 

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式排出

### lbr.4br.4H-3H-34

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

- 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代
- 这种估计一般是偏高的

## 定理

若||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \leqslant \frac{q}{1-q} ||x_{k-1} - x_k||$$

此定理结论是用刚得到的两个迭代向量估计最新结果的精度

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Incobi##社

Cause Saidali###

113 = 1\* 18

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

## 因为

$$||x_k - x_*|| = ||M(x_{k-1} - x_*)|| \leqslant q||x_{k-1} - x_*||$$
  
$$\leqslant q||x_{k-1} - x_k|| + q||x_k - x_*||$$

所以

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q}{1 - q} ||x_{k-1} - x_k||$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代)

形式推

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 又敛性埋水

收敛的充要条件

収取的允万余针及庆左伯订

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速度
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度

- 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近
- 实际计算时可以用量 $||x_{k-1} x_k||$ 是否适当小来判别迭代法是否应该终止

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代活

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 【敛性理说

收敛的充分条件及误差估。

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流近收敛速度

- 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

色步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代》

形式推广

收敛性理说

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的流

- 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止
  - 若 $\|M\| = 0.9$ ,  $\|x_{k-1} x_k\| = 10^{-8}$ , 则 $\|x_k x_*\| \le 9 \times 10^{-8}$
- 若||M||很接近1, 则不能断定精度

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代》

Gauss-Seidel达1

7.0 E 41.07

仪数住垤化

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的湖

- 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止
  - 若 $\|M\| = 0.9$ ,  $\|x_{k-1} x_k\| = 10^{-8}$ , 则 $\|x_k x_*\| \le 9 \times 10^{-8}$
- 若||M||很接近1, 则不能断定精度
- 实际一般应用1范数和∞范数: 容易计算

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度 Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意



### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel读件

Gauss-Delucing (

### 収敛性理化

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

- 平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题
- 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要  $求 L_1 = (D L)^{-1}U$ , 不太容易得到

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

\_\_\_\_\_\_

**佐金松田** 

### 12-52 12-22 10

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗 近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要  $求 L_1 = (D L)^{-1} U$ , 不太容易得到
- 因此我们需要给出一些辅助判别

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗 近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要  $求 L_1 = (D L)^{-1} U$ , 不太容易得到
- 因此我们需要给出一些辅助判别
  - 能否从B的性质判断L<sub>1</sub>的性质?

线性方程组的古典迭 代解法

17.2.14

单步线性定常迭代法 Jacobi选代法 Gauss-Seidel选代法

**收敛性理论** 

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

**收敛速度** 平均收敛速度和渐近收敛逐

平均収敛速度和漸加収敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要 求 $L_1 = (D L)^{-1}U$ , 不太容易得到
- 因此我们需要给出一些辅助判别
  - 能否从B的性质判断L<sub>1</sub>的性质?
  - 能否直接利用A的性质进行判断?

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel诗代:

形式推

#### 收敛性理的

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟

## • 回忆

• Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$ 

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel洪代

形式推

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$
- G-S迭代:  $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代)

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

lacobi迭代法和G-S迭代法的潜 近收敛速度

- Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$
- G-S迭代:  $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$
- $D^{-1}L$ 为下三角矩阵,对角元为零;  $D^{-1}U$ 为上三角矩阵,对角元为零

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代》

Gauss-Seidenz

.I.L. AL Ы. ≈m

#### IX-X III-III

収敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流近收敛速度

- Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$
- G-S迭代:  $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$
- $D^{-1}L$ 为下三角矩阵,对角元为零;  $D^{-1}U$ 为上三角矩阵,对角元为零
- 所以我们完全有理由根据B的性质推断 $L_1$ 的性质

# ∞范数

设||B||<sub>∞</sub> < 1</li>

# $\infty$ 范数

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读代法

形式推

#### 收敛性理i

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 收敛速度

平均收敛速度和漸近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

- 设||B||<sub>∞</sub> < 1</li>
- 定义

$$\mu = \max_i rac{\displaystyle\sum_{j=i+1}^{N} |b_{ij}|}{1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{i-1} |b_{ij}|}$$

# ∞范数

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Saidal注件

形式推

#### 收敛性理i

収敛的允要涂

収斂的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和漸近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• 定义

$$\mu = \max_i rac{\displaystyle \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|}{1 - \displaystyle \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|}$$

## 引理

$$\mu \leqslant \|B\|_{\infty} < 1$$

# 证明

线性方程组的古典迭

•  $\diamondsuit \ell_i = \sum |b_{ij}|, \ u_i = \sum |b_{ij}|$ i=i+1

# 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

• 
$$\diamondsuit \ell_i = \sum_{j=1}^{r-1} |b_{ij}|, \ u_i = \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}|$$

•  $\emptyset \ell_i + u_i \le ||B||_{\infty} < 1$ 

# 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭色

Gauss-Seidel进代》

形式推

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

半均收級速度和新近收級速息 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• 
$$\diamondsuit \ell_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \ u_i = \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}|$$

- $\emptyset \ell_i + u_i \le ||B||_{\infty} < 1$
- 注意到 $\forall i, b_{ii} = 0,$ 所以存在 $i, \ell_i + u_i = ||B||_{\infty}$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobil运代法

Gauss-Seidel迭代法

11% = 1° 181:

#### 收敛性理说

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 运收分速度

## • 注意到

$$egin{aligned} \ell_i + u_i - rac{u_i}{1 - \ell_i} &= rac{1}{1 - \ell_i} ((\ell_i + u_i)(1 - \ell_i) - u_i) \ &= rac{\ell_i}{1 - \ell_i} (1 - \ell_i - u_i) \geqslant 0 \end{aligned}$$

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### **收敛性理论**

收敛的充

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟流收价速度

注意到

$$\ell_i + u_i - \frac{u_i}{1 - \ell_i} = \frac{1}{1 - \ell_i} ((\ell_i + u_i)(1 - \ell_i) - u_i)$$

$$= \frac{\ell_i}{1 - \ell_i} (1 - \ell_i - u_i) \geqslant 0$$

• 所以我们有 $\frac{u_i}{1-\ell_i} \leq \ell_i + u_i$ 

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

## • 注意到

$$\ell_i + u_i - \frac{u_i}{1 - \ell_i} = \frac{1}{1 - \ell_i} ((\ell_i + u_i)(1 - \ell_i) - u_i)$$

$$= \frac{\ell_i}{1 - \ell_i} (1 - \ell_i - u_i) \geqslant 0$$

- 所以我们有 $\frac{u_i}{1-\ell_i} \leq \ell_i + u_i$
- 两边对i取最大值,我们得到

$$\mu = \max_{i} \frac{u_i}{1 - \ell_i} \leqslant \max_{i} (\ell_i + u_i) = \|B\|_{\infty} < 1$$

# $||B||_{\infty} = ||L_1||_{\infty}$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Incobi@##Pid

Gauss-Seidel进代》

形式推

#### 女敛性理说

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

## 定理

设 $\|B\|_{\infty} < 1$ ,则 $\|L_1\|_{\infty} \le \|B\|_{\infty} < 1$ ,而且由G-S选代法产生的近似解 $x_k$ 与准确解 $x_*$ 之间满足

$$||x_k - x_*||_{\infty} \leqslant \frac{\mu^k}{1 - \mu} ||x_1 - x_0||_{\infty}$$

线性方程组的古典迭

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使  $|| A_1 ||_{\infty} = || L_1 x ||_{\infty}$ 

# 线性方程组的古典迭

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使  $|| A_1 ||_{\infty} = || L_1 x ||_{\infty}$
- $\Rightarrow y = L_1 x, |y_i| = ||y||_{\infty}$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛性理

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 植型间膜

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗 近收敛速度

- 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\|L_1\|_{\infty} = \|L_1x\|_{\infty}$
- $\bullet \ \diamondsuit y = L_1 x, \ |y_i| = ||y||_{\infty}$
- 根据 $L_1 = (D L)^{-1}U$ 的定义,我们  $f(y) = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$

线性方程组的古典迭

Jacobi 洪代法和G-S 洪代法的收

- 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使  $||A||_{\infty} = ||L_1x||_{\infty}$
- $\diamondsuit y = L_1 x, |y_i| = ||y||_{\infty}$
- 根据 $L_1 = (D L)^{-1}U$ 的定义, 有 $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$
- 由于 $B = D^{-1}L + D^{-1}U$ . 所 以 $D^{-1}I$ 为B的下三角部分,  $D^{-1}U$ 为B的上三角部分

# 线性方程组的古典迭

Jacobi洪代法和G-S洪代法的收

● 比较两边的第*i*个分量,我们有

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 仅敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度 ● 比较两边的第*i*个分量,我们有

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j$$

• 两边取绝对值,可得

$$||y||_{\infty} \leq ||y||_{\infty} \ell_i + u_i$$

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

#### ltr.Atr.Mt.am.;

#### 此效的客型条码

此効的を分条件及辺

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 概刑品顯

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 ● 比较两边的第i个分量, 我们有

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j$$

• 两边取绝对值,可得

$$||y||_{\infty} \leqslant ||y||_{\infty} \ell_i + u_i$$

• 由此可得

$$||L_1||_{\infty} = ||y||_{\infty} \leqslant \frac{u_i}{1 - \ell_i} \leqslant \mu < 1$$

## 估计式的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi洪代

Gauss-Seidel诗代:

形式排

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收分速度 • 根据 $\|L_1\|_{\infty} \leq \mu < 1$ 可得

$$||x_{k} - x_{*}||_{\infty} \leqslant \frac{||L_{1}||_{\infty}^{k}}{1 - ||L_{1}||_{\infty}} ||x_{1} - x_{0}||_{\infty}$$
$$\leqslant \frac{\mu^{k}}{1 - \mu} ||x_{1} - x_{0}||_{\infty}$$

# 1范数

设∥*B*||<sub>1</sub> < 1</li>

## 1范数

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

C----- C-: J-105/P3

III = 1 th th

#### 收敛性理证

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

- 设∥B∥<sub>1</sub> < 1</li>
- 定义

$$ilde{\mu} = \max_j rac{\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|}{1 - \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}|}$$

## 1范数

线性方程组的古典迭

设∥*B*||<sub>1</sub> < 1</li>

• 定义

$$ilde{\mu} = \max_j rac{\displaystyle\sum_{i=1}^{J-1} |b_{ij}|}{1 - \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}|}$$

• 则类似前面对 $\mu$  < 1的证明可 证 $\tilde{\mu} \leq \|B\|_1 < 1$ 

# $||B||_1$ 与 $\rho(L_1)$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

收敛性理证

收敛的充要条件

权规则无力来[T及庆左[[1]

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

## 定理

 $\ddot{a} = \ddot{a} + \ddot{b} = \ddot{a} + \ddot{b} + \ddot{b} = \ddot{b} + \ddot{b} + \ddot{b} = \ddot{b} + \ddot{b} +$ 

$$||x_k - x_*||_1 \leqslant \frac{\tilde{\mu}^k}{(1 - \tilde{\mu})(1 - s)} ||x_1 - x_0||_1$$

其中
$$s = \max_{j} \sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}|$$
,这是 $B$ 的下三角阵 $D^{-1}L$ 的 $I$ 范数

# $\rho(L_1) < 1$ 的证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选作

形式推

(敛性理说

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

## 因为

$$(D-L)^{-1}U = (I-D^{-1}L)^{-1}(D^{-1}U(I-D^{-1}L)^{-1})(I-D^{-1}L)$$

所以
$$L_1$$
与 $\tilde{L}_1 = D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$ 相似,从而 $\rho(L_1) = \rho(\tilde{L}_1)$ 

# $\rho(L_1) < 1$ 的证明

线性方程组的古典迭

Jacobi洪代法和G-S洪代法的收

因为

$$(D-L)^{-1}U = (I-D^{-1}L)^{-1}(D^{-1}U(I-D^{-1}L)^{-1})(I-D^{-1}L)$$

所以 $L_1$ 与 $\tilde{L}_1 = D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$ 相似, 从而 $\rho(L_1) = \rho(\tilde{L}_1)$ 

● 类似∞范数时的情况可 证 $\|\tilde{L}_1^T\|_{\infty} \leq \tilde{\mu} < 1$ ,从而有

$$\rho(L_1) \leqslant \|\tilde{L}_1^T\|_{\infty} \leqslant \tilde{\mu} < 1$$

717.Z±+1/\

公正体标合类24 A23

1.000.000.00

TES -45-446-

1/r Afrik4 1111 (A

Jacobi迭代法和G-S迭代法的明 wtt

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_{\infty} < 1$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel迭代)

Jr. At bl. am

#### 収敛性埋御

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的资

• 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_\infty < 1$ 

• C的下三角部分为 $(D^{-1}U)^T = U^T D^{-1}$ ,上三角部分为 $(D^{-1}L)^T = L^T D^{-1}$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• 实际上,令
$$C = B^T$$
.  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_{\infty} < 1$ 

- C的下三角部分为 $(D^{-1}U)^T = U^T D^{-1}$ ,上三角部分为 $(D^{-1}L)^T = L^T D^{-1}$
- $\tilde{L}_1^T = (D^{-1}U(I D^{-1}L)^{-1})^T = (I L^TD^{-1})^{-1}U^TD^{-1}$

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 女敛性理说

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

## • 实际上, $令 C = B^T$ . $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_\infty < 1$

- C的下三角部分为 $(D^{-1}U)^T = U^T D^{-1}$ ,上三角部分为 $(D^{-1}L)^T = L^T D^{-1}$
- $\tilde{L}_1^T = (D^{-1}U(I D^{-1}L)^{-1})^T = (I L^TD^{-1})^{-1}U^TD^{-1}$
- $\tilde{L}_1^T x = y \Longrightarrow y = L^T D^{-1} y + U^T D^{-1} x$

## 误差估计的证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

形式推

收敛性理に

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的約 近收敛速度 • 由G-S迭代法的格式,可得

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2})$$

# 误差估计的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### (敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗 近收敛速度 • 由G-S迭代法的格式,可得

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2})$$

• 分量表示即为

$$x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})$$
  
  $+ \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} (x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)})$ 

### 线性方程组的古典迭 化解注

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

收敛性理的

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 ▶ 两边取绝对值后对i求和,再交换求和顺序

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_{i}^{(k)} - x_{i}^{(k-1)} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k)} - x_{j}^{(k-1)} \right| \right.$$

$$\left. + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k-1)} - x_{j}^{(k-2)} \right| \right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k)} - x_{j}^{(k-1)} \right| \right.$$

4 마시마 1 레 루 시 설립 1 시설립 2 기를

 $+\sum_{j=1}^{J-1}|b_{ij}|\left|x_{j}^{(k-1)}-x_{j}^{(k-2)}\right|\right)$ 



 $\tilde{u}_j = \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}|, \quad \tilde{\ell}_j = \sum_{j=1}^{j-1} |b_{ij}|$ 

### 单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### **收敛性理**i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度 **•** 

$$\tilde{u}_j = \sum_{i=i+1}^n |b_{ij}|, \quad \tilde{\ell}_j = \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|$$

• 则接前推导我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left( \tilde{u}_j \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| + \tilde{\ell}_j \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right| \right)$$

## 线性方程组的古典迭

Jacobi洪代法和G-S洪代法的收

## 从而有

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - \tilde{u}_j) \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \tilde{\ell}_j \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right|$$

$$\leqslant \widetilde{\mu} \sum_{j=1}^{n} (1-\widetilde{u}_j) \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right|$$

$$\leqslant \tilde{\mu}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} (1 - \tilde{u}_j) \left| x_j^{(1)} - x_j^{(0)} \right|$$



• 根据 $\tilde{\mu}$ 和s的定义, $1-s \leqslant 1-\tilde{u}_j < 1$ 



邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Course Soldable (198

11% = 1° 181:

#### 收敛性理i

收敛的充要:

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的湖 近收敛速度

- 根据 $\tilde{\mu}$ 和s的定义, $1-s \leqslant 1-\tilde{u}_i < 1$
- 所以

$$(1-s)\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(k)}-x_{j}^{(k-1)}\right|\leqslant \tilde{\mu}^{k-1}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(1)}-x_{j}^{(0)}\right|$$

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 收敛性理i

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的潮 近收敛速度

## • 根据 $\tilde{\mu}$ 和s的定义, $1-s \leqslant 1-\tilde{u}_i < 1$

• 所以

$$(1-s)\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(k)}-x_{j}^{(k-1)}\right|\leqslant \tilde{\mu}^{k-1}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(1)}-x_{j}^{(0)}\right|$$

• 这就是 $(1-s)||x_k-x_{k-1}||_1 \leq \tilde{\mu}^{k-1}||x_1-x_0||_1$ 

• 注意到 $x_k - x_* = \sum_i (x_i - x_{i+1})$ 



邓建松

#### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代

--- ---

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

# • 注意到 $x_k - x_* = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$

• 所以

$$||x_{k} - x_{*}||_{1} \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} ||x_{i} - x_{i+1}||_{1}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-s} \sum_{i=k}^{\infty} \tilde{\mu}^{i} ||x_{1} - x_{0}||_{1}$$

$$\leqslant \frac{\tilde{\mu}^{k}}{(1-\tilde{\mu})(1-s)} ||x_{1} - x_{0}||_{1}$$



# 从A直接判断:正定矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

## 定理

如果A是对称的,而且对角元全是正数,则Jacobi迭代法收敛的充要条件是A和2D – A都正定

# 定理证明

## 线性方程组的古典迭

• 迭代矩阵
$$B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$$

## 定理证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代)

形式推

#### 女敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

• 迭代矩阵
$$B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$$

• 由于对角元全是正数,所以

$$B = D^{-1/2} (I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

## 定理证明

## 线性方程组的古典迭

Jacobi 洪代法和G-S 洪代法的收

• 迭代矩阵
$$B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$$

• 由于对角元全是正数, 所以

$$B = D^{-1/2} (I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

• A对称,所以 $I - D^{-1/2}AD^{-1/2}$ 也是对称的,而 目它与B相似,所以B的特征值全为实数

## 线性方程组的古典迭

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于 $I - B \pi I + B$ 的特 征值均为正实数



邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Sauss-Seidel迭代》

收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I B和I + B的特征值均为正实数
- 注意到

$$I - B = D^{-1/2} (D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$
  

$$I + B = D^{-1/2} (2I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

**平均收敛速度和新近收敛速度** 模型问题

- Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I B和I + B的特征值均为正实数
- 注意到

$$I - B = D^{-1/2} (D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$
  

$$I + B = D^{-1/2} (2I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

● 所以ρ(B) < 1等价于A与2D – A均正定

Jacobi洪代法和G-S洪代法的收

• Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而 B 的特征值 全为实数,所以这又等价于 $I - B \pi I + B$ 的特 征值均为正实数

注意到

$$I - B = D^{-1/2} (D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$
  

$$I + B = D^{-1/2} (2I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

- 所以ρ(B) < 1等价于A与2D − A均正定</li>
  - D<sup>-1/2</sup>AD<sup>-1/2</sup>相合于A:  $2I - D^{-1/2}AD^{-1/2}$ 相合于2D - A





• 正定理

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Soideli#4

110 ±0 181

收敛性理i

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

lacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• 正定理

定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel读代

形式推

女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度 • 正定理

定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

• 定理证明见第4节

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

形式推

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • 正定理

## 定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

- 定理证明见第4节
- 逆定理(习题第7题)

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

1026161

**收敛性理**i

收敛的充要条件

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的潮 近收敛速度 • 正定理

## 定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

- 定理证明见第4节
- 逆定理(习题第7题)

## 定理

若系数矩阵A是具有正对角元的对称矩阵,G-S迭代 法对任意初值收敛,则A必是正定的

# 对角占优矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

步线性定常迭代法

Carra Catalita (P

Gauss-Seidel迭代

形式推广

**收敛性理说** 

ille Ale Oh Ac mil 42. IV

收敛的充分条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的涉近收敛速度

• 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 若对所有的 $i = 1, \dots, n$ ,

$$|a_{ii}|\geqslant \sum_{j=1,j
eq i}^{n}|a_{ij}|$$

并且至少有一个对i有严格不等号成立,则称A是<mark>弱严格对角占优</mark>的。如果对所有i都有严格不等号成立,则称A是严格对角占优的



# 可约和不可约矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

步线性定常迭代法

Jacobi达代法 Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidei运代。 形式推广

女敛性理论

收敛的充头条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度 平均收敛速度和新近收敛速

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 • 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 若存在n阶排列 方阵P使得

$$PAP^T = \left(\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right)$$

其中 $A_{11}$ 是r阶方阵, $A_{22}$ 是n-r阶方阵,则称A是可约的或可分的;反之称为不可约的或不可分的

# 可约矩阵的意义

### 线性方程组的古典迭

如果A可约,可以把Ax = b化为

$$PAP^{T}Px = Pb$$

# 可约矩阵的意义

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

形式推广

#### X 敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• 如果A可约,可以把Ax = b化为

$$PAP^TPx = Pb$$

● 记*Px* = *y*, *Pb* = *f*, 则有

$$\left(\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right)$$

# 可约矩阵的意义

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 步线性定常迭代法

Jacobi运代法 Gauss-Seidel选代注

Gauss-Seidel迭代

### **妆**敛性理i

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 • 如果A可约,可以把Ax = b化为

$$PAP^TPx = Pb$$

● 记*Px* = *y*, *Pb* = *f*, 则有

$$\left(\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right)$$

• 如此我们可以先求解r阶方程组 $A_{11}y_1 = f_1$ , 得 到 $y_1$ , 代入 $A_{12}y_1 + A_{22}y_2 = f_2$  后就可以解出 $y_2$ 

# 可约矩阵的等价定义

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

JL- AL bl. em \A

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi跌代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 设A为n ( $n \ge 2$ )阶方阵,  $\mathcal{W} = \{1, ..., n\}$ . 如果存在 $\mathcal{W}$ 的两个非空的子集 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 满足

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \mathcal{W}, \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$$

使得 $a_{ij} = 0$ ,  $(i \in S, j \in T)$ , 则称A为可约的,否则称A是不可约的

## 不可约对角占优

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

\_\_\_\_\_,

形式推广

收敛性理说

收敛的充要条件

収斂的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 如果一个矩阵不可约,并且是弱严格对角占优的的,则称该矩阵为不可约对角占优的

# 不可约对角占优

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代

Gauss-Beiden,610

形式推

#### 収敛性埋诉

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速度
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 如果一个矩阵不可约,并且是弱严格对角占优的的,则称该矩阵为不可约对角占优的
- 下述三对角阵为不可约对角占优矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right)$$

# 不可约对角占优

线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代i

Guas Sciacing (

NSX IL-EN

収敛的允妥涂作

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海

- 如果一个矩阵不可约,并且是弱严格对角占优的的,则称该矩阵为不可约对角占优的
- 下述三对角阵为不可约对角占优矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right)$$

● 弱严格对角占优矩阵,有可能一行全是零;而不可约对角占优,就排除了这种情形,从而任意对角元非零

• 对角占优与非奇异的关系:

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

人敛性埋化

收敛的充要条件

収斂的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 对角占优与非奇异的关系:

### 定理

如果矩阵A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,则A非奇异

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi还代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 对角占优与非奇异的关系:

### 定理

如果矩阵A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,则A非奇异

• 可约对角占优的,矩阵有可能奇异:

$$\left(\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 3
\end{array}\right)$$

## 严格对角占优情形的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel读代

形式推

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 
$$|a_{ii}|=|a_{ii}x_i|=\left|\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{ij}x_j
ight|\leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|$$

# 严格对角占优情形的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel选化

形式推

#### 女敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

**敛性** 

#### 收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的涉 
$$|a_{ii}|=|a_{ii}x_i|=\left|\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{ij}x_j
ight|\leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|$$

• 这与A严格对角占优矛盾

## 不可约对角占优情形的证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

形式推

**收敛性理**i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的常 近收敛速度 • 同样,若A奇异,则存在x满 足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 使得Ax = 0

# 不可约对角占优情形的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel迭代法 形式推广

### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• 同样,若A奇异,则存在x满 足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 使得Ax = 0

• 定义 $S = \{i : |x_i| = 1\},$  $T = \{k : |x_k| < 1\}$ 

# 不可约对角占优情形的证明

线性方程组的古典迭

Jacobi洪代法和G-S洪代法的收

同样, 若A奇异, 则存在x满  $\mathbb{E}||x||_{\infty}=1$ 使得Ax=0

• 定义 $S = \{i : |x_i| = 1\},$  $\mathcal{T} = \{k : |x_k| < 1\}$ 

• 显然 $S \cup T = W$ ,  $S \cap T = \emptyset$ , 而且S非空

# ア为空集

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Incobile##P&

Comme Contactife (Pro-

形式推

收敛性理论

Alle Ale Ale also seet A

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和漸近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海

假设T为空集



# ア为空集

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式排

#### (敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

- 假设T为空集
- 那么x的各分量的绝对值均为1,从而 $\forall i \in S$ ,

$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

# ア为空集

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代

Gauss-Seidenzil

#### 仪蚁注理》

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

- 假设T为空集
- 那么x的各分量的绝对值均为1,从而 $\forall i \in S$ ,

$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

• 这与A弱严格对角占优矛盾

# T非空:利用不可约完成证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代)

形式推

收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的治

• 因为A不可约,所以存在 $i \in S$ ,  $k \in T$ 使得 $a_{ik} \neq 0$ 

# T非空:利用不可约完成证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

収敛性埋1

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 因为A不可约,所以存在 $i \in S$ ,  $k \in T$ 使 得 $a_{ik} \neq 0$
- 于是|*a<sub>ik</sub>x<sub>k</sub>*| < |*a<sub>ik</sub>*|, 并且

$$|a_{ii}| = |a_{ii}x_i| \leqslant \sum_{j \in \mathcal{S}, j \neq i} |a_{ij}||x_j| + \sum_{j \in \mathcal{T}} |a_{ij}||x_j|$$
 $< \sum_{j \in \mathcal{S}, j \neq i} |a_{ij}| + \sum_{j \in \mathcal{T}} |a_{ij}|$ 
 $= \sum_{i \neq i} |a_{ij}|$ 

这也与A为弱严格对角占优矛盾



## 推论

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 女敛性理は

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

### 推论

若A是严格对角占优的或者不可约对角占优的对称矩阵,且A的对角线元素均为正数,则A正定

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Cause Saidalit-(1)

.....

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 A对称,所以特征值均为实数。为证A正定,只需要证明所有特征值均为正数

### 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

#### 《蚁性理化

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- *A*对称,所以特征值均为实数。为证*A*正定,只需要证明所有特征值均为正数
- 若有一个特征值 $\lambda \leq 0$ , 考虑矩阵 $A \lambda I$

### 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidelt&1()

### 敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi选代法和G-S选代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

● *A*对称,所以特征值均为实数。为证*A*正定,只需要证明所有特征值均为正数

- 若有一个特征值 $\lambda \leq 0$ , 考虑矩阵 $A \lambda I$
- 矩阵 $A \lambda I$ 只是在A的对角线元素上增加了一些,所以 $A \lambda I$ 和A一样是严格对角占优或者不可约对角占优的,从而是非奇异的,这与 $\lambda$ 为A的特征值矛盾

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Carra Carration (4)

Gauss-Seidel选作

形式推

#### 女敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

### 定理

若A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,则Jacobi迭代法和G-S迭代法都收敛

•  $\forall i$ ,  $a_{ii} \neq 0$ 

## 线性方程组的古典迭

- $\forall i, a_{ii} \neq 0$
- 所以矩阵D可逆

# 线性方程组的古典迭

Jacobi洪代法和G-S洪代法的收

- $\forall i, a_{ii} \neq 0$
- 所以矩阵D可逆
- 假设Jacobi迭代法的迭代矩阵B的某个 特征值 $\lambda$ 的模长不小于1

### 线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

Gauss-Seidenzeit

**万**幼性理论

### 权蚁性理化

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消

- $\forall i, a_{ii} \neq 0$
- 所以矩阵D可逆
- 假设Jacobi迭代法的迭代矩阵B的某个 特征值λ的模长不小于1
- 考虑矩阵 $\lambda D L U$ , 这也是严格对角 占优的或者不可约对角占优的,从而非 奇异

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

以 以 注 注 化 收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

女敛速度

P均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 acobi类化注和G-S类代注的类 •  $\forall i, a_{ii} \neq 0$ 

- 所以矩阵D可逆
- 假设Jacobi迭代法的迭代矩阵B的某个 特征值λ的模长不小于1
- 考虑矩阵 $\lambda D L U$ , 这也是严格对角 占优的或者不可约对角占优的,从而非 奇异
- 由于 $\lambda I B = D^{-1}(\lambda D L U)$ ,所以 $\det(\lambda I B) \neq 0$ ,矛盾

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

收敛性理证

10,00,007,030,70

权双的允万余针及沃左伯订

效性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海

• G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代活

Jacobi跌f

Gauss-Soideli#49

形式推

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• G-S迭代法的迭代矩阵
$$L_1 = (D - L)^{-1}U$$

• 
$$\lambda I - L_1 = (D - L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U)$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代注

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel读代:

形式推

#### (敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

• G-S迭代法的迭代矩阵
$$L_1 = (D - L)^{-1}U$$

• 
$$\lambda I - L_1 = (D - L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U)$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

W - h Alb side

#### 敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 • G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 

- $\lambda I L_1 = (D L)^{-1}(\lambda D \lambda L U)$
- D − L是可逆的
- 若 $|\lambda| \ge 1$ , 则 $\lambda D \lambda L U$ 也是严格对 角占优的,或者不可约对角占优的,从 而是可逆的

### 证明: G-S迭代

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推广

敛性理论

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度模型问题

• G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 

•  $\lambda I - L_1 = (D - L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U)$ 

D − L是可逆的

- 若 $|\lambda| \ge 1$ , 则 $\lambda D \lambda L U$ 也是严格对 角占优的,或者不可约对角占优的,从 而是可逆的
- 这就证明了G-S迭代法收敛

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel读代验

形式排

#### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

**株型佰鹽** 

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟 近收敛速度 • 单步线性定常迭代法:  $x_k = Mx_{k-1} + g$ 

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 单步线性定常迭代法: 
$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

• 误差向量 $y_k = x_k - x_*$ 满足 $y_k = M^k y_0$ , 从而有

$$||y_k|| \leqslant ||M^k|| ||y_0||$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

#### 《蚁性理》

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi洪代法和G-S洪代法的

敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

- 单步线性定常迭代法:  $x_k = Mx_{k-1} + g$
- 误差向量 $y_k = x_k x_*$ 满足 $y_k = M^k y_0$ ,从而有

$$\|y_k\|\leqslant \|M^k\|\|y_0\|$$

• 初始误差 $\|y_0\|$ 一般不知道,通常用 $\|M^k\|$ 的大小刻画迭代法收敛的速度

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代法

### iller Alerbit-1002

### 收敛的充要条件 收敛的充分条件及误

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海

- 单步线性定常迭代法:  $x_k = Mx_{k-1} + g$
- 误差向量 $y_k = x_k x_*$ 满足 $y_k = M^k y_0$ ,从而有

$$||y_k|| \leqslant ||M^k|| ||y_0||$$

- 初始误差 $\|y_0\|$ 一般不知道,通常用 $\|M^k\|$ 的大小刻画迭代法收敛的速度
- 定义 $R_k(M) = \frac{-\ln \|M^k\|}{k}$ 为k次迭代的平均收敛速度

### 误差缩减的比例因子

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel诗代:

形式推

收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的潜 近收敛速度 • 若迭代法收敛,则当 $k \to \infty$ 时, $\|M^k\| \to 0$ 

### 误差缩减的比例因子

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭化

Gauss-Seidel读代

形式推

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- 若迭代法收敛,则当 $k \to \infty$ 时, $\|M^k\| \to 0$
- 所以当k充分大时,总有 $R_k(M) > 0$ .

# 误差缩减的比例因子

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

Jacobi迭代法
Gauss-Seidel迭代法

形式推广

|佐幼牡押光

**收敛性理论** 

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

- 若迭代法收敛,则当 $k \to \infty$ 时, $\|M^k\| \to 0$
- 所以当k充分大时,总有 $R_k(M) > 0$ .
- 设 $R_k = R_k(M) > 0$ , 数量

$$\sigma = \left(\frac{\|y_k\|}{\|y_0\|}\right)^{1/k} \approx \|M^k\|^{1/k} = e^{-R_k}$$

就表示误差范数在k次迭代中平均每次 迭代所缩减的比例因子

## 对称矩阵情形

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代》

形式推广

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

● 若*M*是对称矩阵,或者Hermite矩阵, 或者正规矩阵,则显然有

$$\|M^k\|_2 = (\rho(M))^k$$

# 对称矩阵情形

线性方程组的古典迭

若M是对称矩阵,或者Hermite矩阵, 或者正规矩阵,则显然有

$$\|M^k\|_2 = (\rho(M))^k$$

• 所以 $R_k(M) = -\ln \rho(M)$ , 这是与k无关 的量

# 对称矩阵情形

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代

形式推广

**收敛性理**说

以蚁性理化

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的潮 若*M*是对称矩阵,或者Hermite矩阵, 或者正规矩阵,则显然有

$$\|M^k\|_2 = (\rho(M))^k$$

- 所以 $R_k(M) = -\ln \rho(M)$ , 这是与k无关的量
- 但在一般情况下, $R_k$ 是依赖于k的,这时计算 $R_k$ 就非常复杂



# 收敛速度比较

线性方程组的古典迭

如果两个迭代矩阵G和H满  $\mathbb{E}R_{k}(H) > R_{k}(M) > 0$ , 我们就说,对  $\pm k$ 次迭代来讲,对应于H的迭代法比 对应于G的迭代法的收敛速度快

# 收敛速度比较

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi选代法 Gauss-Seidel选代法

11 At 14 am 1

収数性理じ

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

• 如果两个迭代矩阵G和H满 足 $R_k(H) > R_k(M) > 0$ ,我们就说,对于k次迭代来讲,对应于H的迭代法比对应于G的迭代法的收敛速度快

• 有可能对某些k,  $R_k(G) < R_k(H)$ , 而对 另一些k,  $R_k(G) > R_k(H)$ 

# 收敛速度比较

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法 Gauss-Saidel\*\*作法

Gauss-Seidel迭代i

收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的新 近收敛速度 • 如果两个迭代矩阵G和H满 足 $R_k(H) > R_k(M) > 0$ ,我们就说,对于k次迭代来讲,对应于H的迭代法比 对应于G的迭代法的收敛速度快

- 有可能对某些k,  $R_k(G) < R_k(H)$ , 而对 另一些k,  $R_k(G) > R_k(H)$
- 所以我们考虑 $k \to \infty$ 时 $R_k(M)$ 的极限



### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel迭代法

形式相

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 为了刻画整个迭代过程的收敛速度, 我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### (敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的F 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 为了刻画整个迭代过程的收敛速度,我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

• 我们有

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel选代

形式推

#### 敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误

#### 收敛速度

半均収敛速度和新近収敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 为了刻画整个迭代过程的收敛速度, 我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

• 我们有

### 定理

$$R_{\infty}(M) = -\ln \rho(M)$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seidel迭代

形式推广

### 收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi选代法和G-S选代法的

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

● 为了刻画整个迭代过程的收敛速度,我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

• 我们有

### 定理

$$R_{\infty}(M) = -\ln \rho(M)$$

• 定理的成立不依赖于范数的选取

### 线性方程组的古典选 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi洪代》

Communication (4) (4)

形式排

#### 收敛性理记

収敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

I POTKERNED THE HUNCH KENNED

lacobi迭代法和G-S迭代法的渐近收敛速度

• 只需证明 $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$ 即可

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推广

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

• 只需证明 
$$\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$$
 即可

• 因为
$$(\rho(M))^k = \rho(M^k) \leq ||M^k||,$$
所以 $\rho(M) \leq ||M^k||^{1/k}$ 

### 线性方程组的古典迭

- 只需证明  $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$  即可
- 因为 $(\rho(M))^k = \rho(M^k) \leq ||M^k||$ ,所 以 $\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k}$
- 另一方面, 对 $\forall \varepsilon > 0$ . 考虑矩阵

$$B_{\varepsilon} = \frac{1}{\rho(M) + \varepsilon} M$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

70 2011

#### 収或性理》

收敛的充要条件

\*X 秋 印 元 刀 米 田 及 庆 左 旧 i

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

- 只需证明 $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$ 即可
- 因为 $(\rho(M))^k = \rho(M^k) \leq ||M^k||,$ 所以 $\rho(M) \leq ||M^k||^{1/k}$
- 另一方面,对 $\forall \varepsilon > 0$ ,考虑矩阵

$$B_{\varepsilon} = \frac{1}{\rho(M) + \varepsilon} M$$

• 显然 $\rho(B_{\varepsilon}) < 1$ 

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推り

123211-11

**协负的客公条件及**设置社计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

平均收敛速度和渐近收敛速度

TWEET PLACE

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 于是 $\lim_{k\to\infty} B_{\varepsilon}^k = 0$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

形式推

#### 收敛性理论

ille Ale Ale Ale ale al

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新沂收敛速度

.....

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 于是 $\lim_{k\to\infty} B_{\varepsilon}^k = 0$
- 所以存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时有 $\|B_{\varepsilon}^k\| \le 1$

邓建松

### 单步线性定常迭代》

lacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 于是 $\lim_{k\to\infty}B^k_{\varepsilon}=0$
- 所以存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时有 $\|B_{\varepsilon}^k\| \le 1$
- 这就是 $||M^k|| \leq (\rho(M) + \varepsilon)^k$

邓建松

### 单步线性定常迭代治

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

### ll-r Abribit-11112)

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

lacobi迭代法和G-S迭代法的潮 近收敛速度

• 于是
$$\lim_{k\to\infty} B_{\varepsilon}^k = 0$$

- 所以存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时有 $\|B_{\varepsilon}^k\| \le 1$
- 这就是 $||M^k|| \leq (\rho(M) + \varepsilon)^k$
- 至此我们证明了:对任意的 $\varepsilon > 0$ ,存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时,

$$\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k} \leqslant \rho(M) + \varepsilon$$

这就完成了证明

# 模型问题

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选作

Gauss-Seidenz-

#### 以致性理H

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 为了具体说明迭代法的收敛速度,我们考虑用 五点差分格式求解[0,1]<sup>2</sup>上的Poisson方程第一 边值问题

边值问题 
$$\begin{cases} \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), (x, y) \in (0, 1)^2 \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

这里「表示正方形定义域的边界

# 离散化

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobio I (II)

auss-Seidei)运作。

形式推

仅敛性埋u

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

莫型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • 把正方形的每边n等分,令h = 1/n,用等分线 把正方形 $[0,1]^2$ 分割成 $n^2$ 个小正方形

# 离散化

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

#### 女敛性理i

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

#### 莫型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- 把正方形的每边n等分,令h = 1/n,用等分线 把正方形 $[0,1]^2$ 分割成 $n^2$ 个小正方形
- 记小正方形的顶点为 $(x_i, y_j)$

# 离散化

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代法

IN at the th

形式推

女敛性理说

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的运

- 把正方形的每边n等分,令h = 1/n,用等分线 把正方形 $[0,1]^2$ 分割成 $n^2$ 个小正方形
- 记小正方形的顶点为 $(x_i, y_j)$
- 用二阶差商

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_i,y_j)} = \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_i,y_j)} = \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\bigg|_{(x_i,y_i)} = \frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) + O(h^2)$$

代替二阶偏微分,这里 $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ 

### 矩阵形式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选作

形式推

#### 攵敛性理说

收敛的充要条

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 如此得到方程组

$$\begin{cases}
4u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 f_{ij} \\
i, j = 1, \dots, n-1 \\
u_{i,0} = u_{i,n} = u_{0,j} = u_{n,j} = 0, \quad i, j = 0, \dots, n
\end{cases}$$

## 矩阵形式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

步线性定常迭代法

C C I LOT IN

Gauss-Seidel选代

形式推广

敛性埋论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 如此得到方程组

$$\begin{cases}
4u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 f_{ij} \\
i, j = 1, \dots, n-1 \\
u_{i,0} = u_{i,n} = u_{0,j} = u_{n,j} = 0, \quad i, j = 0, \dots, n
\end{cases}$$

• 写成矩阵形式:

$$T_{n-1}U+UT_{n-1}=h^2F,$$

其中 $U = (u_{i,j}), F = (f_{ij}), T_{n-1} 为 n - 1$ 阶三对角矩阵矩阵,主对角元素为2, 上下次对角元素为-1

## 矩阵拉直: 自然顺序排列

线性方程组的古典迭

• 为了得到通常的Ax = b形式的线性方程组,我 们对*U*和*F*中的元素进行"拉直": 先按*i*由小到 大排列,i相同的按i由小到大排列

## 矩阵拉直: 自然顺序排列

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

- 单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法
- At At Islams
- 收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差
- 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性
- 收敛速度
  平均收敛速度和渐近收敛速度
- **模型问题** Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 为了得到通常的Ax = b形式的线性方程组,我们对U和F中的元素进行"拉直":先按j由小到大排列,j相同的按i由小到大排列
- 如此我们得到方程组

$$Au = h^2 f$$

其中向量u和f是矩阵U和F拉直的结果

# 系数矩阵A

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代》

形式推

人蚁性埋顶

收敛的充分条件及误差f

Jacobi选代法和G-S选代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

$$A = \begin{pmatrix} T_{n-1} + 2I_{n-1} & -I_{n-1} & & & & \\ -I_{n-1} & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & -I_{n-1} & \\ & & -I_{n-1} & T_{n-1} + 2I_{n-1} \end{pmatrix}$$

● *A*是(*n* − 1)<sup>2</sup>阶块三对角阵,五条对角线上有非零元;它也是不可约对角占优的对称正定阵

# 系数矩阵A

线性方程组的古典迭 代解法

Gauss-Seidel迭代法

形式推广

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi洪代法和G-S洪代法的浙

$$A = \begin{pmatrix} T_{n-1} + 2I_{n-1} & -I_{n-1} & & & & \\ -I_{n-1} & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & -I_{n-1} & \\ & & -I_{n-1} & T_{n-1} + 2I_{n-1} \end{pmatrix}$$

- *A*是(*n* 1)<sup>2</sup>阶块三对角阵,五条对角线上有非零元:它也是不可约对角占优的对称正定阵
- 每个对角元的左、右各有两个非零元素,据离对角元远近,分别对应对角元上下和左右邻居

# A的特征值和特征向量

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 収敛性理り

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的落 近收敛速度 •  $T_{n-1}$ 的特征值为 $\lambda_j = 2 - 2\cos\frac{J\pi}{n}$ , 对应的单位特征向量为

$$z_j = \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{j\pi}{n}, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{2j\pi}{n}, \dots, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{(n-1)j\pi}{n}\right)^T$$

# A的特征值和特征向量

## 线性方程组的古典迭

•  $T_{n-1}$ 的特征值为 $\lambda_j = 2 - 2\cos\frac{j\pi}{2}$ ,对应的单位 特征向量为

$$z_j = \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{j\pi}{n}, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{2j\pi}{n}, \dots, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{(n-1)j\pi}{n}\right)^T$$

● 利用"拉直"操作,可以证明A的特征值 为 $\lambda_{pq} = \lambda_p + \lambda_q$ , 对应特征向量为 $z_p z_q^T$  "拉直"的 结果

## Jacobi迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

形式推

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

収敛的允分涂件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

于对权权还没有的**过**权权还 措刑品期

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 针对上述模型问题,Jacobi迭代法的迭代矩阵 为 $B = D^{-1}(L + U) = I - \frac{1}{4}A$ 

### Jacobi迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代

形式推广

#### (敛性埋化

收敛的充要条件

収取的允万余件及庆左伯口

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 针对上述模型问题,Jacobi迭代法的迭代矩阵 为 $B = D^{-1}(L + U) = I \frac{1}{4}A$
- B的对角元为0,其左右分别有两个非零元素 (值为1/4),对应于对角元的左右和上下邻居

## Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

**邓建松** 

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代法

收敛性理说

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 针对上述模型问题,Jacobi迭代法的迭代矩阵 为 $B = D^{-1}(L+U) = I \frac{1}{4}A$
- B的对角元为0,其左右分别有两个非零元素 (值为1/4),对应于对角元的左右和上下邻居
- 所以迭代格式为

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4} \left( u_{i+1,j}^{(k-1)} + u_{i-1,j}^{(k-1)} + u_{i,j+1}^{(k-1)} + u_{i,j-1}^{(k-1)} \right) + \frac{h^2}{4} f_{ij},$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0, i, j = 1, \dots, n-1$$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代流

Gauss-Seidel选代》

形式推

收敛性理证

收敛的充要穿

収斂的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

半均收敛速度和游近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • B的特征值为 $\mu_{pq} = 1 - \frac{1}{4} \lambda_{pq}$ 

线性方程组的古典迭

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

- B的特征值为 $\mu_{pq} = 1 \frac{1}{4} \lambda_{pq}$ 
  - 从而若 $\mu$ 为B的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特 征值

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Saidali#/

Gauss-Seidel)迭件

形式推广

### 权蚁 庄 垤 N

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- B的特征值为 $\mu_{pq}=1-rac{1}{4}\lambda_{pq}$ 
  - 从而若 $\mu$ 为B的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值
- 所以 $\rho(B) = \cos \frac{\pi}{n} = \cos h\pi$ , 从而可知渐近收敛速度为

$$R_{\infty}(B) = -\ln \rho(B) = -\ln \cos h\pi$$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

0.11175/

Gauss-Seidel迭代

形式推

X蚁性埋H

収斂的允要涂件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

• B的特征值为
$$\mu_{pq} = 1 - \frac{1}{4} \lambda_{pq}$$

- 从而若 $\mu$ 为B的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值
- 所以 $\rho(B) = \cos \frac{\pi}{n} = \cos h\pi$ , 从而可知渐近收敛速度为

$$R_{\infty}(B) = -\ln \rho(B) = -\ln \cos h\pi$$

• 从而当 $h \to 0$ 时,我们有

$$R_{\infty}(B) \sim \frac{1}{2}\pi^2 h^2$$

# B对应的特征值问题

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi还代法

Gauss-Seidenz-T

.. .. . . ...

收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 我们这里要基于B的特征值问题给出 $L_1$ 的特征值

# B对应的特征值问题

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seidel迭代

形式推り

### 又敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 我们这里要基于B的特征值问题给出 $L_1$ 的特征值
- B的特征值问题为 $B\eta = \mu\eta$

# B对应的特征值问题

线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

形式推广

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的I

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 我们这里要基于B的特征值问题给出 $L_1$ 的特征值
- B的特征值问题为 $B\eta = \mu\eta$
- 回忆: *B*的对角元全是零,每个对角元的左、 右各有两个非零元素(值为1/4), 所以采用二 重指标表示*B*对应的特值问题为

$$\begin{cases} \mu \eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \eta_{i+1,j} + \eta_{i-1,j} + \eta_{i,j+1} + \eta_{i,j-1} \right) \\ \eta_{i0} = \eta_{in} = \eta_{0j} = \eta_{nj} = 0 \end{cases}$$

# L<sub>1</sub>对应的特征值问题

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

形式推

收敛性理记

die No No Alerko mit i

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 ● L<sub>1</sub>对应的特征值问题为

$$L_1\xi = \lambda\xi \to \lambda D\xi = \lambda L\xi + U\xi$$

# $L_1$ 对应的特征值问题

### 线性方程组的古典迭

● L<sub>1</sub>对应的特征值问题为

$$L_1\xi = \lambda\xi \to \lambda D\xi = \lambda L\xi + U\xi$$

所以采用二重指标表示Li的特征值问题为

$$\begin{cases} \lambda \xi_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda \xi_{i-1,j} + \lambda \xi_{i,j-1} + \xi_{i,j+1} + \xi_{i+1,j} \right) \\ \xi_{i0} = \xi_{in} = \xi_{0j} = \xi_{nj} = 0 \end{cases}$$

### 单步线性定常迭代法

1 1 100 71500

Gauss-Seidel读代》

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近此分號度 • 设 $\lambda \neq 0$ , 作变换 $\xi_{ij} = \lambda^{(i+j)/2} \eta_{ij}$  得

$$\lambda^{1+\frac{i+j}{2}}\eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i-1,j} + \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i,j-1} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i,j+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \lambda^{\frac{i+j+1}{2}} \left( \eta_{i-1,j} + \eta_{i,j-1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1} \right)$$

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel)迭代法

### 收敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 设 $\lambda \neq 0$ , 作变换 $\xi_{ij} = \lambda^{(i+j)/2} \eta_{ij}$  得

$$\lambda^{1+\frac{i+j}{2}}\eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i-1,j} + \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i,j-1} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i,j+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \lambda^{\frac{i+j+1}{2}} (\eta_{i-1,j} + \eta_{i,j-1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1})$$

• 由边值为零,可知若 $\lambda$ 是 $L_1$ 的非零特征值当且 仅当 $\lambda^{1/2}$ 是B的非零特征值

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

### 此幼的春期条件

收敛的充分条件万

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的; 近收敛速度 • 设 $\lambda \neq 0$ , 作变换 $\xi_{ij} = \lambda^{(i+j)/2} \eta_{ij}$  得

$$\lambda^{1+\frac{i+j}{2}}\eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i-1,j} + \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i,j-1} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i,j+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \lambda^{\frac{i+j+1}{2}} (\eta_{i-1,j} + \eta_{i,j-1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1})$$

- 由边值为零,可知若 $\lambda$ 是 $L_1$ 的非零特征值当且 仅当 $\lambda^{1/2}$ 是B的非零特征值
- 因此L<sub>1</sub>的特征值非负

# G-S迭代法的渐近收敛速度

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式推

#### 女敛性理说

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收分速度

### • 从而我们可知

$$R_{\infty}(L_1) = -\ln \rho(L_1) = -2\ln \rho(B) \sim \pi^2 h^2,$$
  
 $h \to 0$ 

# G-S迭代法的渐近收敛速度

# 线性方程组的古典迭

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

• 从而我们可知

$$R_{\infty}(L_1) = -\ln \rho(L_1) = -2\ln \rho(B) \sim \pi^2 h^2,$$
  
$$h \to 0$$

● 这说明G-S迭代法的渐近收敛速度是Jacobi迭代 法的渐近收敛速度的两倍

# 超松弛迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi选代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

#### 收敛性理

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的运

• 这是一种新的迭代法

## 超松弛迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

- 这是一种新的迭代法
- 它是G-S迭代法的引申和推广

## 超松弛迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

小连位

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

• 这是一种新的迭代法

- 它是G-S迭代法的引申和推广
- 也可以看作是G-S迭代法的加速

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

形式推

收敛性理i

拟双的光安尔

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和漸近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的常

• 在迭代格式中令 $x_{k+1} - x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$ 

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

收敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 在迭代格式中令 $x_{k+1} x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$
- 这可以看作是在向量 $x_k$ 上加上修正 项 $\Delta x$ 得到 $x_{k+1}$

线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

收敛性理证

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海

- 在迭代格式中令 $x_{k+1} x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$
- 这可以看作是在向量 $x_k$ 上加上修正 项 $\Delta x$ 得到 $x_{k+1}$
- 对于已有的迭代格式, $\Delta x$ 是由格式完全确定的

线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel迭代i 形式推广

收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

女 敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的新

- 在迭代格式中令 $x_{k+1} x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$
- 这可以看作是在向量 $x_k$ 上加上修正 项 $\Delta x$ 得到 $x_{k+1}$
- 对于已有的迭代格式, $\Delta x$ 是由格式完全确定的
- 我们可以在修正项的前面加上一个参数ω以得到松弛迭代格式



## G-S迭代法对应的松弛格式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代》

形式推

### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟 近收分速度 • G-S迭代格式:

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

## G-S迭代法对应的松弛格式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 仅蚁性理》

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 G-S迭代格式:

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

$$\Delta x = D^{-1}Lx_{k+1} + (D^{-1}U - I)x_k + D^{-1}b$$

# G-S迭代法对应的松弛格式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi选

Gauss-Seidel迭代

形式推

(敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • G-S迭代格式:

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

- $\Delta x = D^{-1}Lx_{k+1} + (D^{-1}U I)x_k + D^{-1}b$
- 松弛迭代格式

$$x_{k+1} = x_k + \omega \Delta x$$
  
=  $(1 - \omega)x_k + \omega(D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b)$ 

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代法

Gauss-Soidal进代注

形式推

#### 收敛性理说

ille Ale Ob als 3

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi选代法和G-S选代法的

• ω叫做松弛因子

### 线性方程组的古典迭

### ω叫做松弛因子

•  $\pm \omega > 1$ 时,对应的格式叫做<mark>超松弛迭</mark> 代法,简记为SOR迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代

JL AL DI em V

### 1人以 江土化

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

### • ω叫做松弛因子

- 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做<mark>超松弛迭代法</mark>,简记为SOR迭代法
  - SOR Successive Over–Relaxation

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法 形式推广

### 女敛性理说

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi选代法和G-S选代法的

- ω叫做松弛因子
- 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做<mark>超松弛迭代法</mark>,简记为SOR迭代法
  - SOR Successive Over–Relaxation
- 当 $\omega$  < 1时,对应的格式叫做低松弛迭 代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi选供法

Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

敛性

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

- ω叫做松弛因子
- 当ω > 1时,对应的格式叫做超松弛迭 代法,简记为SOR迭代法
  - SOR Successive Over–Relaxation
- 当ω < 1时,对应的格式叫做低松弛迭 代法
- 当 $\omega = 1$ 时,对应的格式就是G-S迭代法

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel族代

Gauss-Seidenzati

形式推

### 权致性理H

收敛的充要条件

lacobi迭代法和G-S迭代法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度 • 如果 $(I - \omega D^{-1}L)^{-1}$ 存在,松弛迭代格式可以写为

$$x_{k+1} = L_{\omega}x_k + \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

其中

$$L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)$$

称为松弛迭代格式的迭代矩阵

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代清

Gauss-Seidenzit.

形式推广

### **女敛性理论**

收敛的充要条件

以級的允分余件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的形

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 • 如果 $(I - \omega D^{-1}L)^{-1}$ 存在,松弛迭代格式可以写为

$$x_{k+1} = L_{\omega}x_k + \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

其中

$$L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)$$

称为松弛迭代格式的迭代矩阵

• 注意:  $(D - \omega L)^{-1}$ 为下三角矩阵,  $((1 - \omega)D + \omega U$ 为上三角矩阵

# 收敛定理

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi医代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

**收敛性理**说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度模型问题

acobi迭代法和G-S迭代法的新 近收敛速度

## 定理

SOR选代法收敛的充分必要条件是

$$\rho(L_{\omega}) < 1$$

## 定理

SOR选代法收敛的必要条件是 $0 < \omega < 2$ 

第一个定理显然。下面证明第二个定理

# $0 < \omega < 2$ 的证明

• 迭代法收敛, 所以 $\rho(L_{\omega}) < 1$ 



# $0 < \omega < 2$ 的证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

形式推

### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

- 迭代法收敛, 所以 $\rho(L_{\omega}) < 1$

$$|\det L_{\omega}| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| < 1$$

# $0 < \omega < 2$ 的证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理i

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

acobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 迭代法收敛, 所以 $\rho(L_{\omega}) < 1$

$$|\det L_{\omega}| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| < 1$$

• 注意到

$$L_{\omega} = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}((1 - \omega)I + \omega D^{-1}U),$$
  

$$\det((1 - \omega)I + \omega D^{-1}U) = (1 - \omega)^{n},$$
  

$$\det(I - \omega D^{-1}L)^{-1} = 1$$

## 从而有

$$|\det L_{\omega}|=|(1-\omega)^n|<1$$



## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

11% = 1° +60:

**游游的家公条件及**提案社计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流

## • 从而有

$$|\det L_{\omega}|=|(1-\omega)^n|<1$$

• 即 $|1 - \omega| < 1$ ,也就是 $0 < \omega < 2$ 

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

## 形式推广

### 收敛性理证

収敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流 近收敛速度

## • 从而有

$$|\det L_{\omega}| = |(1-\omega)^n| < 1$$

- 即 $|1 \omega| < 1$ ,也就是 $0 < \omega < 2$
- 这个结果说明,要使SOR迭代法收敛,必须选取收敛因子 $\omega \in (0,2)$

# 充分条件:对角占优

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 7.敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度

## 定理

若系数矩阵A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,且松弛因子 $\omega \in (0,1]$ ,则SOR迭代法收敛

# 证明关键

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel®

形式推

仅敛性埋化

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 取λ, |λ| ≥ 1,

 $\lambda I - L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} ((\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U)$ 

# 证明关键

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi选作

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度......

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收分遗库

•  $\mathfrak{P}\lambda$ ,  $|\lambda| \geqslant 1$ ,

$$\lambda I - L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} ((\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U)$$

• 根据三角不等式:

$$\begin{aligned} |\lambda + \omega - 1| \geqslant |\lambda| - (1 - \omega) \\ &= |\lambda|\omega + (|\lambda| - 1)(1 - \omega) \geqslant |\lambda|\omega \end{aligned}$$

# 证明关键

线性方程组的古典迭

•  $\mathbb{R}\lambda$ ,  $|\lambda| \geqslant 1$ ,

$$\lambda I - L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} ((\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U)$$

• 根据三角不等式:

$$|\lambda + \omega - 1| \ge |\lambda| - (1 - \omega)$$
$$= |\lambda|\omega + (|\lambda| - 1)(1 - \omega) \ge |\lambda|\omega$$

• 所以 $D - \omega L$ ,  $(\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U$  都是严 格对角占优的,或者不可约对角占优的,从而 是非奇异的

# 充分条件:对称正定

线性方程组的古典迭

## 定理

若系数矩阵A是实对称的正定矩阵,则 当 $0 < \omega < 2$ 时,SOR方法收敛

根据该定理可知,当A对称正定时,G-S迭 代法收敛

# 证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

GBBB Scidence

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 设 $\lambda = L_{\omega}$ 的任一特征值(可以是复数),x为对应的特征向量,则(注意 $L^{T} = U$ )

$$((1 - \omega)D + \omega L^{T})x = \lambda(D - \omega L)x$$

# 证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理论

収敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 植型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗 近收敛速度 • 设 $\lambda$ 是 $L_{\omega}$ 的任一特征值(可以是复数),x为对应的特征向量,则(注意 $L^{T}=U$ )

$$((1 - \omega)D + \omega L^{T})x = \lambda(D - \omega L)x$$

● 左乘x的共轭转置向量x\*:

$$x^*((1-\omega)D + \omega L^T)x = \lambda x^*(D - \omega L)x$$

# 证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 设 $\lambda = L_{\omega}$ 的任一特征值(可以是复数),x为对应的特征向量,则(注意 $L^{T} = U$ )

$$((1 - \omega)D + \omega L^{T})x = \lambda(D - \omega L)x$$

● 左乘x的共轭转置向量x\*:

$$x^*((1-\omega)D + \omega L^T)x = \lambda x^*(D - \omega L)x$$

•  $\diamondsuit x^* Dx = \delta$ ,  $x^* Lx = \alpha + i\beta$ ,  $\emptyset$  $f(x^* L^T x) = \alpha - i\beta$ 

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Communication (Inch.

102 =3° +60:

### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差位

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

R至四處
lacobi洪代注和G-S洪代注的於

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

## • 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$



## 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

两边取模得到

$$|\lambda|^2 = \frac{((1-\omega)\delta + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\delta - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

## 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

## • 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

• 两边取模得到

$$|\lambda|^2 = \frac{((1-\omega)\delta + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\delta - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

• 右侧的分子和分母相减,得 到 $\omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2)$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推广

## 收敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 • 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

• 两边取模得到

$$|\lambda|^2 = \frac{((1-\omega)\delta + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\delta - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

- 右侧的分子和分母相减,得 到 $\omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2)$
- 当A正定时 $\delta > 0$ ,  $\delta 2\alpha = x^*Ax > 0$ , 所以 当 $0 < \omega < 2$ 时 $|\lambda| < 1$ , 即SOR迭代法收敛

\$3 & Ct

线性方程组的古典迭

SOR迭代法的谱半径依赖于ω

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代

形式推

### 收敛性理记

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- SOR迭代法的谱半径依赖于ω
- 如何选取恰当的ω, 从而使得收敛速度最快?

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代

Gauss-BeidenAT

illr Alrahl IIII.

### IX-X III-II R

収敛的允妥涂件

双双的光牙索针及误左值扩

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速! 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- SOR迭代法的谱半径依赖于ω
- 如何选取恰当的ω, 从而使得收敛速度最快?
- 为此我们考虑特征值问题 $L_{\omega}x = \lambda x$ , 即

$$((\lambda - 1 + \omega)D - \lambda \omega L - \omega U)x = 0$$

# 线性方程组的古典迭

SOR迭代法的谱半径依赖干ω

- 如何选取恰当的ω. 从而使得收敛速度最快?
- 为此我们考虑特征值问题 $L_{i}x = \lambda x$ . 即

$$((\lambda - 1 + \omega)D - \lambda \omega L - \omega U)x = 0$$

• 回忆:  $L_{\omega}$ 的所有特征值相乘等于 $(1-\omega)^n$ , 所以 当 $\omega$  ≠ 1时无零特征值

## 线性方程组的古典迭

• 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0i} = u_{ni} = 0,$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel诗代:

形式推

### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟 近此分语度 • 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

• 下面分两步讨论问题:

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

### 女敛性理说

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和漸近收敛速度 植型间源

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

- 下面分两步讨论问题:
  - B与L。的特征值之间的关系

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代清

形式推

### 女敛性理说

收敛的充要条件

以致的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

### 收敛速度

平均收敛速度和漸近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度 • 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

- 下面分两步讨论问题:
  - $B与L_{\omega}$ 的特征值之间的关系
  - $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 变化的情况

# $B与L_{\omega}$ 的特征值之间的关系

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选作

形式推

收敛性理に

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 当 $\lambda \neq 0$ 时,作变换 $u_{ij} = (\pm \lambda^{1/2})^{i+j} v_{ij}$ ,则有 $\mu v_{ij} - \frac{1}{2} (v_{i-1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1}) = 0,$ 其中 $\mu = \pm \frac{\lambda + \omega - 1}{(\lambda^{1/2})^{1/2}}$ 

# $B与L_{\omega}$ 的特征值之间的关系

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选作

形式推

收敛性理i

收敛的充要条件

Jacobi法代法和G-S法代法的

平均收敛速度和浙近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 当 $\lambda \neq 0$ 时,作变换 $u_{ij} = (\pm \lambda^{1/2})^{i+j} v_{ij}$ ,则有

$$\mu v_{ij} - \frac{1}{2} (v_{i-1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1}) = 0,$$

其中
$$\mu = \pm \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega^{\lambda^{1/2}}}$$

• 当 $\omega \neq 1$ 时,若 $\lambda \in L_{\omega}$ 的特征值,则由

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \mu^2 \omega^2 \lambda$$

确定的两个 $\mu$ 都是B的特征值;反之亦然

• 当 $\omega = 1$ 时,前式简化为 $\lambda^2 = \mu^2 \lambda$ 



## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Carra Carra Diff. (B)

TV -0-10

### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的流 近此分遣度

- 当 $\omega = 1$ 时,前式简化为 $\lambda^2 = \mu^2 \lambda$
- 当B的特征值为 $\pm \mu_i$ 时,对应于 $L_1$ 的特征值为0和 $\mu_i^2$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理说

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的;

- 当 $\omega = 1$ 时,前式简化为 $\lambda^2 = \mu^2 \lambda$
- 当B的特征值为 $\pm \mu_i$ 时,对应于 $L_1$ 的特征值为0和 $\mu_i^2$
- 回忆:  $若\mu \in B$ 的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值

# $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 变化的情况

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Cause-Saidali#4

Gauss-Beideit&1)

形式推厂

### (敛性埋论

收敛的充要条件

Jacobi选作注和G-S选作注的

敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的潮 近收敛速度 • 设 $0 \le \mu < 1$ 是B的一个特征值, $0 < \omega < 2$ ,则由方程

$$\lambda + \omega - 1 = \pm \mu \omega \lambda^{1/2}$$

可得 $L_{\omega}$ 的两个特征值分别是

$$\lambda_{+}(\omega,\mu) = \left(\frac{\mu\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mu\omega}{2}\right)^{2} - (\omega - 1)}\right)^{2},$$

$$\lambda_{-}(\omega,\mu) = \left(\frac{\mu\omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{\mu\omega}{2}\right)^2 - (\omega-1)}\right)^2,$$

# 线性方程组的古典迭

• 为了研究 $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 的变化,我们考虑

$$M(\omega, \mu) = \max(|\lambda_{+}(\omega, \mu)|, |\lambda_{-}(\omega, \mu)|)$$

# 线性方程组的古典迭

• 为了研究 $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 的变化,我们考虑

$$M(\omega, \mu) = \max(|\lambda_{+}(\omega, \mu)|, |\lambda_{-}(\omega, \mu)|)$$

• 分析细节忽略



## 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法
Gauss-Seidel迭代法
形式推广

## 收敛性理说

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

半均收級速度和新近收級速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的新 • 为了研究 $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 的变化,我们考虑

$$M(\omega, \mu) = \max(|\lambda_{+}(\omega, \mu)|, |\lambda_{-}(\omega, \mu)|)$$

- 分析细节忽略
- 结论: 随着 $\omega$ 从0开始增加, $\rho(L_{\omega})$ 减少,直至

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}}$$

 $\mathrm{H}\rho(L_{\omega})$ 达到极小,然后开始变大。这个 $\omega$ 称为最佳松弛因子

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel读代法

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渗 近收敛速度

#### • 当ω取上述最佳松弛因子时,我们有

$$egin{aligned} R_{\infty}(L_{\omega}) &= -\ln 
ho(L_{\omega}) \ &= -\ln rac{1-\sqrt{1-
ho(B)^2}}{1+\sqrt{1-
ho(B)^2}} \ &= -\ln rac{1-\sin h\pi}{1+\sin h\pi} \sim 2h\pi, h 
ightarrow 0 \end{aligned}$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代清

\_\_\_\_\_\_

#### 1人3人口と

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

敛性

#### 收敛速度

平均收数速度和潮虹收数速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的游 近收敛速度 • 当ω取上述最佳松弛因子时,我们有

$$egin{aligned} R_{\infty}(L_{\omega}) &= -\ln 
ho(L_{\omega}) \ &= -\ln rac{1-\sqrt{1-
ho(B)^2}}{1+\sqrt{1-
ho(B)^2}} \ &= -\ln rac{1-\sin h\pi}{1+\sin h\pi} \sim 2h\pi, h 
ightarrow 0 \end{aligned}$$

SOR迭代法要比Jacobi迭代法和G-S迭代法快得多!

邓建松

2022年10月24日

# 松弛迭代法的局限性

共轭梯度法

邓建松

基本框列

最速下降沒

共轭梯度法及其基本

性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 此幼性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• SOR迭代法中如能取得最佳松弛因子,算法的 效率会得到数量级上的提高

## 松弛迭代法的局限性

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降流

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- SOR迭代法中如能取得最佳松弛因子,算法的效率会得到数量级上的提高
- 而最佳松弛因子只在系数矩阵具有较好性质时 才有可能找到

## 松弛迭代法的局限性

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度? 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

收敛性分析

SOR迭代法中如能取得最佳松弛因子,算法的效率会得到数量级上的提高

- 而最佳松弛因子只在系数矩阵具有较好性质时 才有可能找到
- 而且上节在计算最佳松弛因子时,还用到了对 应的Jacobi迭代矩阵的谱半径

#### 共轭梯度法

邓建村

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯及法及共基本 性质

LL/X

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

**牢用**非細模度法

-----

这是一种不需要确定任何参数的求解对称正定 线性方程组的方法

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及

AND THE PROPERTY.

收敛性分析

- 这是一种不需要确定任何参数的求解对称正定 线性方程组的方法
- 它是上世纪50年代初期由M.R. Hestenes和E. Stiefel首先提出的

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及其

实用共轭梯度 收敛性分析

- 这是一种不需要确定任何参数的求解对称正定 线性方程组的方法
- 它是上世纪50年代初期由M.R. Hestenes和E. Stiefel首先提出的
- 自后得到了长足的发展,成为求解大型稀疏线 性方程组最受欢迎的一类方法

#### 共轭梯度法

- 这是一种不需要确定任何参数的求解对称正定 线性方程组的方法
- 它是上世纪50年代初期由M.R. Hestenes和E. Stiefel首先提出的
- 自后得到了长足的发展,成为求解大型稀疏线 性方程组最受欢迎的一类方法
- 它也是求解大型非线性优化问题的主要方法之

# 线性方程组与对应的二次泛函

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的確定

最速下降沒

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收益性

o)+ 111 H+ 457 Hb 1042

又釵性分析

• 设A为对称正定矩阵

# 线性方程组与对应的二次泛函

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

**牢用共轭梯度**2

头用头视彻没有

女敛性分析

- 设A为对称正定矩阵
- 考虑线性方程组Ax = b的求解

# 线性方程组与对应的二次泛函

共轭梯度法

基本框架

\_\_\_\_\_

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

• 设A为对称正定矩阵

- 考虑线性方程组Ax = b的求解
- 为此我们定义二次函数

$$\varphi(x) = x^T A x - 2b^T x$$

# 定理

共轭梯度法

基本框架

#### 定理

设A对称正定,求方程组Ax = b的解等价于 求二次函数 $\varphi(x)$ 的极小值点

共轭梯度法

邓建林

基本框架

**坐**41E3

SN INTERNET

**最速卜降**法

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度沒

基本性质

实用共轭梯度法及其

AA- 111 H- 617 MA 102A

收敛性分析

• 直接计算可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) - 2b_i$$

#### 共轭梯度法

邓建松

#### 基本框架

步长的确定

晶读下降注

取迷下降法

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度沿

基本性质

实用共轭梯度法及其 此分姓

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 直接计算可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) - 2b_i$$

所以

$$\nabla \varphi(x) = 2(Ax - b)$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

-10.00

共轭梯度法及共基本 性盾

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 直接计算可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) - 2b_i$$

• 所以

$$\nabla \varphi(x) = 2(Ax - b)$$

• 若 $\varphi(x)$ 在某点 $x_*$ 达到极小,则必有 $\nabla \varphi(x_*) = 0$ ,从而 $Ax_* = b$ 

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 直接计算可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) - 2b_i$$

所以

$$\nabla \varphi(x) = 2(Ax - b)$$

- 若 $\varphi(x)$ 在某点 $x_*$ 达到极小,则必有 $\nabla \varphi(x_*) = 0$ ,从而 $Ax_* = b$

## 求解方法: 盲人下山

共轭梯度法

邓建松

基本框架

取迷下降法

共轭梯度法及其基本 性质

性质

基本性质

实用共轭梯度法及非 医急性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 为了求解线性方程组,我们可以计算二次函数 $\varphi(x)$ 的极小值

#### 求解方法: 盲人下山

共轭梯度法

基本框架

最速下降法

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度? 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 为了求解线性方程组,我们可以计算二次函数 $\varphi(x)$ 的极小值

• 为了求二次函数的极小值,我们可以模拟盲人下山: 先任意给定一个初始点 $x_0$ ,确定一个下山的方向 $p_0$ ,沿着经过点 $x_0$ 而方向为 $p_0$ 的直线 $x=x_0+\alpha p_0$ 上找一点 $x_1$ 使 $\varphi(x)$ 达到极小

共轭梯度法

邓建松

基本框架

**品读下路**注

共轭梯度法及其基本

性质

HE AND EAST REALE.

基本性质

实用共轭梯度法及其

AN-121-10-407-05-00-2-1

**头用头轭梯度法** 

女敛性分析

● 第一步走到x<sub>1</sub>

#### 共轭梯度法

邓建松

#### 基本框架

步长的确定

最速下降法

性质 性质

1200

基本性质

实用共轭梯度法及非 此幼姓

**牢田** 非鉅梯度法

收敛性分析

- 第一步走到x<sub>1</sub>
- 然后在 $x_1$ 点,再找一个下山的方向 $p_1$ ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

**土**辐梯度注及

性质

11:4:14:16

实用共轭梯度法及其 tr 4hth

实用共轭梯度法

● 第一步走到x<sub>1</sub>

• 然后在 $x_1$ 点,再找一个下山的方向 $p_1$ ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步

· .....

#### 共轭梯度法

邓建松

#### 基本框架

步长的确定

最速下降法

...

#### 共轭体及法及共基本 性质

共轭梯度

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度?

- 第一步走到x<sub>1</sub>
- 然后在 $x_1$ 点,再找一个下山的方向 $p_1$ ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步
- .....
- 这样就得到一串参数 $\alpha_i$ 和方向 $p_i$ .

共轭梯度法

邓建林

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及

性质

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度; 收敛性分析

- 第一步走到x<sub>1</sub>
- 然后在 $x_1$ 点,再找一个下山的方向 $p_1$ ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步
- .....
- 这样就得到一串参数 $\alpha_i$ 和方向 $p_i$ .
- $p_i$ 称为搜索方向, $\alpha_k$ 为步长

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基

**土灰** 共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

● 第一步走到x<sub>1</sub>

- 然后在 $x_1$ 点,再找一个下山的方向 $p_1$ ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步
- .....
- 这样就得到一串参数 $\alpha_i$ 和方向 $p_i$ .
- $p_i$ 称为搜索方向, $\alpha_k$ 为步长
- 不同的确定搜索方向和步长的方法,就得出不同的算法

# 步长的确定

共轭梯度法

邓建松

tit -l- lie to

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及其 此幼性

1月共轭梯度法

• 设 $x_k$ 已确定,下山方向 $p_k$ 也确定

# 步长的确定

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

基本性质

实用共轭梯度法及非 此幼性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 设 $x_k$ 已确定,下山方向 $p_k$ 也确定
- 任务: 在直线 $x = x_k + \alpha p_k$ 上确定 $\alpha_k$ 使 得 $\varphi(x)$ 在 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ 处达到极小

# 步长的确定

#### 共轭梯度法

邓建松

#### 基本框架

步长的確定

最速下降法

#### 共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

收敛性分析

- 设x<sub>k</sub>已确定,下山方向p<sub>k</sub>也确定
- 任务: 在直线 $x = x_k + \alpha p_k$ 上确定 $\alpha_k$ 使 得 $\varphi(x)$ 在 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ 处达到极小
- $\diamondsuit f(\alpha) = \varphi(x_k + \alpha p_k)$ ,  $\emptyset$

$$f(\alpha) = (x_k + \alpha p_k)^T A(x_k + \alpha p_k) - 2b^T (x_k + \alpha p_k)$$
  
=  $\alpha^2 p_k^T A p_k - 2\alpha r_k^T p_k + \varphi(x_k)$ 

其中 $r_k = b - Ax_k$ 为 $\varphi(x)$ 在 $x = x_k$ 的负梯度方向

# 求导确定 $\alpha_k$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

IN IS ALVES

最速下降法

ALL for AM 600 NA TO

性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 (tr.4t/dt

实用共轭梯度法

• 计算 $f(\alpha)$ 的导数:

$$f'(\alpha) = 2\alpha p_k^T A p_k - 2r_k^T p_k$$

# 求导确定 $\alpha_k$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降注

取迷下阵法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 计算 $f(\alpha)$ 的导数:

$$f'(\alpha) = 2\alpha p_k^T A p_k - 2r_k^T p_k$$

# 求导确定 $\alpha_k$

共轭梯度法

邓建松

基本框

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 <sup>姓 氐</sup>

共轭梯度

基本性质

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 计算 $f(\alpha)$ 的导数:

$$f'(\alpha) = 2\alpha p_k^T A p_k - 2r_k^T p_k$$

- 令 $f'(\alpha) = 0$ 即得 $\alpha_k = \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$ ,由此算出 $x_{k+1}$
- 验证:

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = \alpha_k^2 p_k^T A p_k - 2\alpha_k r_k^T p_k$$
$$= -\frac{(r_k^T p_k)^2}{p_k^T A p_k}$$

因此只要 $r_k^T p_k \neq 0$ , 我们就有 $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$ 

共轭梯度法

邓建村

基本框

D KINNIE

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

基本性质

实用共轭梯度法及其

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 在第k步确定了搜索方向 $p_k$ 后,按照前述公式确定步长 $\alpha_k$ ,那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ 

共轭梯度法

邓建松

基本框

2 KINNIE

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

实用共轭梯度法

• 在第k步确定了搜索方向 $p_k$ 后,按照前述公式确定步长 $\alpha_k$ ,那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ 

• 显然 $p_k$ 与等值线 $\varphi(x) = \varphi(x_{k+1})$ 相切于 点 $x = x_{k+1}$ 

共轭梯度法

- 在第k步确定了搜索方向pk后,按照前述公式 确定步长 $\alpha_k$ , 那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
- 显然 $p_k$ 与等值线 $\varphi(x) = \varphi(x_{k+1})$ 相切于 点 $x = x_{k+1}$
- $r_{k+1} = b Ax_{k+1}$ 是上述等值线在 $x = x_{k+1}$ 处的 法向量

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度: 收敛性分析

- 在第k步确定了搜索方向 $p_k$ 后,按照前述公式确定步长 $\alpha_k$ ,那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
- 显然 $p_k$ 与等值线 $\varphi(x) = \varphi(x_{k+1})$ 相切于 点 $x = x_{k+1}$
- $r_{k+1} = b Ax_{k+1}$ 是上述等值线在 $x = x_{k+1}$ 处的 法向量
- 所以 $r_{k+1}^T p_k = 0$

# 新到达点原搜索方向与新梯度方向垂直

#### 共轭梯度法

邓建村

基本框列

-----

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度活

实用共轭梯度法及非 医分性

实用共轭梯度法

女敛性分析

- 在第k步确定了搜索方向 $p_k$ 后,按照前述公式确定步长 $\alpha_k$ ,那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
- 显然 $p_k$ 与等值线 $\varphi(x) = \varphi(x_{k+1})$ 相切于 点 $x = x_{k+1}$
- $r_{k+1} = b Ax_{k+1}$ 是上述等值线在 $x = x_{k+1}$ 处的 法向量
- 所以 $r_{k+1}^T p_k = 0$
- 后面我们用代数方法证明更一般性的结论



#### 下山方向的确定: 最速下降法

#### 共轭梯度法

最速下降法

•  $\varphi(x)$ 增加最快的方向是梯度方向

### 下山方向的确定: 最速下降法

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框势

步长的确定

最速下降法

4X AL 1 PP 12

共轭梯及法及共<del>基</del>本 性质

基本性质

实用共轭梯度法及! 此始性

AN 112 44-407-416 002

收敛性分析

- $\varphi(x)$ 增加最快的方向是梯度方向
- 因此负梯度方向应该是 $\varphi(x)$ 减小最快的方向

### 下山方向的确定: 最速下降法

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框势

B 4 ~ # \* \*

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度: 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度沿

收敛性分析

- $\varphi(x)$ 增加最快的方向是梯度方向
- 因此负梯度方向应该是 $\varphi(x)$ 减小最快的方向
- 所以我们取pk为负梯度方向

$$r_k = b - Ax_k$$

### 收敛定理的准备:一个引理

共轭梯度法

邓建松

基本框势

the Let Albane of

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度?

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

收敛性分析

#### 引理

设A的特征值为 $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ , P(t)是一个关于t的多项式. 则对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 

$$||P(A)x||_A \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |P(\lambda_i)|||x||_A$$

其中
$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$$

### 引理的证明

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

4X.XE | 19912

共轭梯度法及共基本 性 所

性质

基本性质

实用共轭梯度法

头用突视物及体

7幼性分析

• 取由A对应于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的特征向量 $y_1, \ldots, y_n$ , 其构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基

### 引理的证明

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

- 取由A对应于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的特征向量 $y_1, \ldots, y_n$ , 其构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基
- 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i$ , 从而有

$$x^{T}P(A)AP(A)x = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{i}P(\lambda_{i})y_{i}\right)^{T}A\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{i}P(\lambda_{i})y_{i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i}\beta_{i}^{2}P^{2}(\lambda_{i}) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} P^{2}(\lambda_{i})\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i}\beta_{i}^{2}$$
$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} P^{2}(\lambda_{i})x^{T}Ax$$

# 收敛定理

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

**東**速 ト 降 2

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度流

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

#### 定理

设A的特征值为 $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ,则由最速下降法产生的序列 $\{x_k\}$ 满足

$$\|x_k - x_*\|_A \leqslant \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^k \|x_0 - x_*\|_A$$

其中
$$x_* = A^{-1}b$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

,....,

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

牢用非細梯度法

头用火视彻及花

文敛性分析

• 展开 $(x - x_*)^T A(x - x_*)$ ,并利用 $Ax_* = b$ 可得 $\varphi(x) + x_*^T A x_* = (x - x_*)^T A(x - x_*)$ 

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

取迷下降沒

共轭梯度法及具基本 性质

**北**轭梯度注

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度沿

收敛性分析

- 展开 $(x x_*)^T A(x x_*)$ ,并利用 $Ax_* = b$ 可得  $\varphi(x) + x_*^T Ax_* = (x x_*)^T A(x x_*)$
- 根据x<sub>k</sub>的构造方法,我们有

$$\varphi(x_k) \leqslant \varphi(x_{k-1} + \alpha r_{k-1}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

#### 共轭梯度法

最速下降法

• 展开
$$(x - x_*)^T A(x - x_*)$$
,并利用 $Ax_* = b$ 可得 
$$\varphi(x) + x_*^T Ax_* = (x - x_*)^T A(x - x_*)$$

根据x<sub>k</sub>的构造方法,我们有

$$\varphi(x_k) \leqslant \varphi(x_{k-1} + \alpha r_{k-1}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

所以

$$(x_k - x_*)^T A(x_k - x_*)$$
  
 $\leq (x_{k-1} + \alpha r_{k-1} - x_*)^T A(x_{k-1} + \alpha r_{k-1} - x_*)$ 

#### 共轭梯度法

最速下降法

• 根据构造方法,

$$r_{k-1} = b - Ax_{k-1} = A(x_* - x_{k-1})$$

#### 共轭梯度法

邓建松

#### 基本框架

步长的确定

#### 最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

**收敛性分析** 

• 根据构造方法,

$$r_{k-1} = b - Ax_{k-1} = A(x_* - x_{k-1})$$

• 所以我们有

$$(x_{k} - x_{*})^{T} A(x_{k} - x_{*})$$

$$\leq (x_{k-1} + \alpha r_{k-1} - x_{*})^{T} A(x_{k-1} + \alpha r_{k-1} - x_{*})$$

$$= ((I - \alpha A)(x_{k-1} - x_{*}))^{T} A((I - \alpha A)(x_{k-1} - x_{*}))$$

LL/93

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 取 $P_{\alpha}(t) = 1 - \alpha t$ , 则由引理对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 有

$$||x_{k} - x_{*}||_{A} \leq ||P_{\alpha}(A)(x_{k-1} - x_{*})||_{A}$$
$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} |P_{\alpha}(\lambda_{i})|||x_{k-1} - x_{*}||_{A}$$

邓建村

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 取 $P_{\alpha}(t) = 1 - \alpha t$ , 则由引理对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 有

$$||x_{k} - x_{*}||_{A} \leq ||P_{\alpha}(A)(x_{k-1} - x_{*})||_{A}$$
$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} |P_{\alpha}(\lambda_{i})|||x_{k-1} - x_{*}||_{A}$$

• 根据Chebyshev多项式的性质,

$$\min_{\alpha} \max_{\lambda_1 \leq t \leq \lambda_n} |1 - \alpha t|$$

应在
$$1 - \alpha \lambda_1 = 1 - \alpha \lambda_n$$
 互为相反数时达到,此时 $\alpha = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ ,极值为 $\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$ 

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其

性质

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

● 上述定理表明,从任一初始向量x<sub>0</sub>出发,由最 速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

土轭梯度注

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 上述定理表明,从任一初始向量x<sub>0</sub>出发,由最 速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解
- 收敛速度由 $(\lambda_n \lambda_1)/(\lambda_n + \lambda_1)$ 的大小决定的

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度? 基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

收敛性分析

- 上述定理表明,从任一初始向量x<sub>0</sub>出发,由最 速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解
- 收敛速度由 $(\lambda_n \lambda_1)/(\lambda_n + \lambda_1)$ 的大小决定的
- 最速下降法简单易实现,而且可以充分利用A的稀疏性,但在 $\lambda_1 \ll \lambda_n$ 时速度变得非常之慢

#### 共轭梯度法

最速下降法

- 上述定理表明,从任一初始向量xx出发,由最 速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解
- 收敛速度由 $(\lambda_n \lambda_1)/(\lambda_n + \lambda_1)$ 的大小决定的
- 最速下降法简单易实现,而且可以充分利 用A的稀疏性,但在 $\lambda_1 \ll \lambda_n$ 时速度变得非常之 慢
- 在求解线性方程组时很少用它,但它的想法很 重要,并且在非线性优化求解中有大量的应用 和拓展

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

- 上述定理表明,从任一初始向量x<sub>0</sub>出发,由最 速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解
- 收敛速度由 $(\lambda_n \lambda_1)/(\lambda_n + \lambda_1)$ 的大小决定的
- 最速下降法简单易实现,而且可以充分利用A的稀疏性,但在 $\lambda_1 \ll \lambda_n$ 时速度变得非常之慢
- 在求解线性方程组时很少用它,但它的想法很 重要,并且在非线性优化求解中有大量的应用 和拓展

### 共轭梯度法的动机

共轭梯度法

邓珪松

基本框架

步长的确定

最速下降流

共视梯度法及共基本 姓 岳

11.194

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

从局部来看,负梯度方向确实是最佳的下山方向

### 共轭梯度法的动机

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及身 收敛性

实用 共轭 梯度

- 从局部来看,负梯度方向确实是最佳的下山方向
- 但从整体看看,它并非最佳:迭代得到的各点 连线具有明显的锯齿形状

### 共轭梯度法的动机

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降沒

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

收敛性分析

- 从局部来看,负梯度方向确实是最佳的下山方向
- 但从整体看看,它并非最佳: 迭代得到的各点 连线具有明显的锯齿形状
- 我们要寻找更好的下山方向,而且在方向寻找 上付出的代价不要太大

# 共轭梯度法的计算过程

共轭梯度法

邓建村

基本框架

步长的确定

最速下降法

双炬 1 四位

共轭梯度法及具基本 性质

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

**空用非矩梯度法** 

收敛性分析

• 给定初始点 $x_0$ ,第一步仍然选负梯度方向为下山方向,即 $p_0 = r_0$ ,于是有

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0}, x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0, r_1 = b - A x_1$$

### 共轭梯度法的计算过程

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 给定初始点 $x_0$ ,第一步仍然选负梯度方向为下山方向,即 $p_0 = r_0$ ,于是有

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0}, x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0, r_1 = b - A x_1$$

• 在第 $k+1(k \ge 1)$ 步,下山方向不再简单地取 $r_k$ ,而是在过点 $x_k$ 由向量 $r_k$ , $p_{k-1}$ 所张成的二维平面 $\pi_2$ 内找出使函数 $\varphi$ 下降最快的方向作为 $p_k$ 

# 共轭梯度法的计算过程

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

4XXE | P412

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性原

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 给定初始点 $x_0$ ,第一步仍然选负梯度方向为下山方向,即 $p_0 = r_0$ ,于是有

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0}, x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0, r_1 = b - A x_1$$

- 在第 $k+1(k \ge 1)$ 步,下山方向不再简单地取 $r_k$ ,而是在过点 $x_k$ 由向量 $r_k$ , $p_{k-1}$ 所张成的二维平面 $\pi_2$ 内找出使函数 $\varphi$ 下降最快的方向作为 $p_k$ 
  - 注意:  $r_k \perp p_{k-1}$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降注

最速卜降法

共轭梯度法及其基本

性灰

><40W/X

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

• 考虑 $\varphi$ 在 $\pi_2$ 上的限制:

$$\psi(\xi, \eta) = \varphi(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$$
  
=  $(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})^T A(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$   
-  $2b^T (x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$ 

共轭梯度法

邓建松

基本框架

昌油下陈辻

**最速卜降**//

共轭梯度法及其基本 性质

性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度

• 考虑 $\varphi$ 在 $\pi_2$ 上的限制:

$$\psi(\xi, \eta) = \varphi(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$$
  
=  $(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})^T A(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$   
 $-2b^T (x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$ 

• 分别对 $\xi$ ,  $\eta$ 求偏导,得到局部下降最快的方向

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 考虑 $\varphi$ 在 $\pi_2$ 上的限制:

$$\psi(\xi, \eta) = \varphi(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$$
  
=  $(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})^T A(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$   
-  $2b^T (x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$ 

- 分别对 $\xi$ , $\eta$ 求偏导,得到局部下降最快的方向
  - 实际上直接求出的是在π2中达到最小值的点

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

#### • 求偏导:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 2r_k^T A(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1}) - 2b^T r_k 
= 2(\xi r_k^T A r_k + \eta r_k^T A p_{k-1} - r_k^T r_k) 
\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 2p_{k-1}^T A(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1}) - 2b^T p_{k-1} 
= 2(\xi r_k^T A p_{k-1} + \eta p_{k-1}^T A p_{k-1})$$

这里利用了
$$r_k^T p_{k-1} = 0$$

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其

实用共轭梯度法

• 由此得唯一极值点 $\tilde{x} = x_k + \xi_0 r_k + \eta_0 p_{k-1}$ , 其中 $\xi_0 \eta_0$ 满足

$$\begin{cases} \xi_0 r_k^T A r_k + \eta_0 r_k^T A p_{k-1} = r_k^T r_k \\ \xi_0 r_k^T A p_{k-1} + \eta_0 p_{k-1}^T A p_{k-1} = 0 \end{cases}$$

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

收敛性分析

• 由此得唯一极值点 $\tilde{x} = x_k + \xi_0 r_k + \eta_0 p_{k-1}$ , 其中 $\xi_0 n_{\eta_0}$ 满足

$$\begin{cases} \xi_0 r_k^T A r_k + \eta_0 r_k^T A p_{k-1} = r_k^T r_k \\ \xi_0 r_k^T A p_{k-1} + \eta_0 p_{k-1}^T A p_{k-1} = 0 \end{cases}$$

• 由上式可知若 $r_k \neq 0$ ,则必有 $\xi_0 \neq 0$  (为什么?)因此可取新的下山方向为

$$p_k = \frac{1}{\xi_0}(\tilde{x} - x_k) = r_k + \frac{\eta_0}{\xi_0}p_{k-1}$$

收敛性分析

• 由此得唯一极值点 $\tilde{x} = x_k + \xi_0 r_k + \eta_0 p_{k-1}$ , 其中 $\xi_0 \eta_m$  和 $\eta_0$  满足

$$\begin{cases} \xi_0 r_k^T A r_k + \eta_0 r_k^T A p_{k-1} = r_k^T r_k \\ \xi_0 r_k^T A p_{k-1} + \eta_0 p_{k-1}^T A p_{k-1} = 0 \end{cases}$$

• 由上式可知若 $r_k \neq 0$ , 则必有 $\xi_0 \neq 0$  (为什么?) 因此可取新的下山方向为

$$p_k = \frac{1}{\xi_0}(\tilde{x} - x_k) = r_k + \frac{\eta_0}{\xi_0}p_{k-1}$$

● *n*<sub>0</sub>是否可以等于0呢?

基本性质

实用共轭梯度法及其 此命性

实用共轭梯度法

•  $\phi \beta_{k-1} = \eta_0/\xi_0$ , 则由 $\xi_0$ 和 $\eta_0$ 满足的第二个方程可知

$$\beta_{k-1} = -\frac{r_k^T A p_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}}$$

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 令 $\beta_{k-1} = \eta_0/\xi_0$ ,则由 $\xi_0$ 和 $\eta_0$ 满足的第二个方程可知

$$\beta_{k-1} = -\frac{r_k^T A p_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}}$$

● 如此确定的p<sub>k</sub>满足

$$p_{k}^{T}Ap_{k-1} = \left(r_{k} - \frac{r_{k}^{T}Ap_{k-1}}{p_{k-1}^{T}Ap_{k-1}}p_{k-1}\right)^{T}Ap_{k-1} = 0$$

即 $p_k$ 与 $p_{k-1}$ 是关于A相互共轭的

### 公式初步梳理

共轭梯度法

邓建松

基本框势

步长的确定

最速下降法

性质

40 de 16 m

实用共轭梯度法及身 (tr.dt.dt

2:田共福梯府注

大州火祀和汉広

又釵性分析

•  $p_k$ 确定以后,可以采用前面的方法确定 $\alpha_k$ 

#### 公式初步梳理

共轭梯度法

邓建松

基本框架

具油工放汗

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- $p_k$ 确定以后,可以采用前面的方法确定 $\alpha_k$
- 总结公式为

$$\alpha_k = \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$
$$r_{k+1} = b - A x_{k+1}$$
$$\beta_k = -\frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}, \quad p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$$

### $r_{k+1}$ 的简化

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

具油工政计

最速卜降法

共轭梯度法及其基本

++- 4xx 416 x3x2+

基本性质

实用共轭梯度法及其 此幼性

;用共轭梯度法

女敛性分析

● 根据*r*<sub>k+1</sub>的定义,

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \alpha_k p_k)$$
$$= r_k - \alpha_k A p_k$$

### $r_{k+1}$ 的简化

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度活

● 根据*r*<sub>k+1</sub>的定义,

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \alpha_k p_k)$$
$$= r_k - \alpha_k A p_k$$

•  $Ap_k$ 在计算 $\alpha_k$ 时已求出,所以计算 $r_{k+1}$ 时就可以用上述递推公式得到

### $r_{k+1}$ 的简化

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最读下降注

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

文/// 文// 收敛性分析

• 根据 $r_{k+1}$ 的定义,

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \alpha_k p_k)$$
$$= r_k - \alpha_k A p_k$$

- $Ap_k$ 在计算 $\alpha_k$ 时已求出,所以计算 $r_{k+1}$ 时就可以用上述递推公式得到
- 由上式可得

$$Ap_k = \frac{1}{\alpha_k}(r_k - r_{k+1})$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

日本了數片

取迷「降法

共轭梯度法及其基本

性质

实用共轭梯度法及非

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 注意等式(证明后面给出)

$$r_k^T r_{k+1} = r_k^T p_{k-1} = r_{k+1}^T p_k = 0, k = 1, 2, \dots$$

共轭梯度法

邓建林

**垫-4**-性条 步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质 ########

实用共轭梯度法及非

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 注意等式(证明后面给出)

$$r_k^T r_{k+1} = r_k^T p_{k-1} = r_{k+1}^T p_k = 0, k = 1, 2, \dots$$

• 从而我们有

$$r_{k+1}^{T} A p_{k} = \frac{1}{\alpha_{k}} r_{k+1}^{T} (r_{k} - r_{k+1}) = -\frac{1}{\alpha_{k}} r_{k+1}^{T} r_{k+1}$$

$$p_{k}^{T} A p_{k} = \frac{1}{\alpha_{k}} p_{k}^{T} (r_{k} - r_{k+1}) = \frac{1}{\alpha_{k}} p_{k}^{T} r_{k}$$

$$= \frac{1}{\alpha_{k}} r_{k}^{T} (r_{k} + \beta_{k-1} p_{k-1}) = \frac{1}{\alpha_{k}} r_{k}^{T} r_{k}$$

共轭梯度法

邓建松

基本框势

步长的确定

最速下降沒

**秋**座 | 四石

共轭梯度法及其基本

共轭梯度法

实用共轭梯度法及非

**全田北福縣府**注

收敛性分析

• 回忆:

$$\alpha_k = \frac{r_k^T \rho_k}{\rho_k^T A \rho_k} \quad \beta_k = -\frac{r_{k+1}^T A \rho_k}{\rho_k^T A \rho_k}$$

共轭梯度法

回忆:

$$\alpha_k = \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k} \quad \beta_k = -\frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}$$

• 对αι的分式进行简化; 并且把前页两 式相除,可对 $\beta_{\iota}$ 进行简化:

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k} \quad \beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$$

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

**最速下降**法

**最速卜降**况

共轭梯度法及其基本 性质

AL 457 AM 19

实用共轭梯度法

女敛性分析

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

-10.00

共祝你及伝及共<del></del>基4

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

共轭梯度法

- **1**  $p_i^T r_i = 0, \ 0 \le i < j \le k$
- $r_i^T r_i = 0, i \neq j, 0 \leq i, j \leq k$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度沿

基本性质

实用共轭梯度法及基 收敛性

收敛性分析

- ② 定义 $\mathcal{K}(A, r_0, k+1) = \operatorname{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0\},$ 称为 $\mathsf{Krylov}$ 子空间,则 $\operatorname{span}\{r_0, \dots, r_k\} = \operatorname{span}\{p_0, \dots, p_k\} = \mathcal{K}(A, r_0, k+1)$

#### k = 1时性质的证明

#### 共轭梯度法

邓建松

# + HE bu

B ++ -- 100 14

秋/本 1. be 1. ∨

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度》

基本性质

实用共轭梯度法及其 .....

收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 对k进行归纳证明

#### k = 1时性质的证明

共轭梯度法

邓建村

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 对k进行归纳证明

● 当k = 1时, 因为

$$p_{0} = r_{0}, r_{1} = r_{0} - \alpha_{0}Ap_{0}, p_{1} = r_{1} + \beta_{0}p_{0},$$

$$p_{0}^{T}r_{1} = r_{0}^{T}r_{1} = r_{0}^{T}(r_{0} - \alpha_{0}Ar_{0})$$

$$= r_{0}^{T}r_{0} - \alpha_{0}r_{0}^{T}Ar_{0} = 0,$$

$$p_{1}^{T}Ap_{0} = (r_{1} + \beta_{0}r_{0})^{T}Ar_{0}$$

$$= r_{1}^{T}Ar_{0} - \frac{r_{1}^{T}Ar_{0}}{r_{0}^{T}Ar_{0}}r_{0}^{T}Ar_{0} = 0$$

所以性质成立



# 性质(1)

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框 第

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

假设性质在k时成立,我们证明在k+1时也成立

① 由于 $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$ 以及归纳假设,我们有

$$p_i^T r_{k+1} = p_i^T r_k - \alpha_k p_i^T A p_k = 0, 0 \leqslant i \leqslant k-1$$

又由于

$$p_k^T r_{k+1} = p_k^T r_k - \frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k} p_k^T A p_k = 0$$

所以性质(1)在k+1时成立

# 性质(2)

共轭梯度法

邓建松

基本框為

步长的确定

最速下降法

AX AT 1 P4-12

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度流

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

② 由归纳假设

$$\mathrm{span}\{r_0,\ldots,r_k\}=\mathrm{span}\{p_0,\ldots,p_k\}$$

则由性质(1)可知 $r_{k+1}$ 与上述空间正交,从而性质(2)在k+1时成立

# 性质(3)

共轭梯度法

邓建松

基本框架

**最速卜降法** 

共轭梯度法及其基本

性质

\*\* - 1-14-05

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

**③** 根据归纳假设,当i = 0, 1, ..., k − 1时

$$p_{i}^{T}Ap_{k+1} = p_{i}^{T}A(r_{k+1} + \beta_{k}p_{k}) = r_{k+1}^{T}Ap_{i}$$

$$= \frac{1}{\alpha_{i}}r_{k+1}^{T}(r_{i} - r_{i+1}) = 0$$

$$p_{k+1}^{T}Ap_{k} = (r_{k+1} + \beta_{k}p_{k})^{T}Ap_{k}$$

$$= r_{k+1}^{T}Ap_{k} - \frac{r_{k+1}^{T}Ap_{k}}{p_{k}^{T}Ap_{k}}p_{k}^{T}Ap_{k} = 0$$

所以性质(3)成立

# 性质(4)

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降注

取迷下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度流

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

#### 4 由归纳假设可知

 $r_k, p_k \in \mathcal{K}(A, r_0, k+1) = \operatorname{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0\}$ 于是

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k \in \mathcal{K}(A, r_0, k+2),$$
  
$$p_{k+1} = r_k + \beta_k A p_k \in \mathcal{K}(A, r_0, k+2),$$

而根据性质(2),(3),  $r_0, \ldots, r_{k+1}$ 和 $p_0, \ldots, p_{k+1}$ 都是线性无关的,所以性质(4)成立

### Krylov子空间

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 前述性质表明,向量组 $r_0, \ldots, r_k$ 和 $p_0, \ldots, p_k$ 分别是Krylov子空间 $\mathcal{K}(A, r_0, k+1)$ 的正交基和共轭正交基

### Krylov子空间

共轭梯度法

**邓建松** 

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度流

基本性质

实用共轭梯度法及基 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 前述性质表明,向量组 $r_0, \ldots, r_k$ 和 $p_0, \ldots, p_k$ 分别是Krylov子空间 $\mathcal{K}(A, r_0, k+1)$ 的正交基和共轭正交基
- 所以采用共轭梯度法至多n步就得到方程组的解 $x_*$

### Krylov子空间

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度活

实用共轭梯度法及! 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 前述性质表明,向量组 $r_0, \ldots, r_k$ 和 $p_0, \ldots, p_k$ 分别是Krylov子空间 $\mathcal{K}(A, r_0, k+1)$ 的正交基和共轭正交基

- 所以采用共轭梯度法至多*n*步就得到方程组的解*x*\*
- 理论上讲, 共轭梯度法是直接法

### 精度估计

共轭梯度法

邓建林

基本框

步长的确定

最速下降)

4X AT | P4-12

共轭梯度法及其基2

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

**协**分析 分析

#### 定理

用共轭梯度法计算得到的近似解Xk满足

$$\varphi(x_k) = \min\{\varphi(x) : x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)\}$$

或者等价地表示为

$$||x_k-x_*||_A = \min\{||x-x_*||_A : x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)\}$$

#### 定理证明

#### 共轭梯度法

邓建村

基本框势

\_\_\_\_\_

取迷下降沒

共轭梯度法及其基本

性质

实用共轭梯度法及

收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 由 $\varphi(x) + x_*^T A x_* = (x - x_*)^T A (x - x_*)$ 可知要证的两式是等价的。下面只证第二式成立

#### 定理证明

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框势

沙农的帽定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

**北**福梯府注

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 由 $\varphi(x) + x_*^T A x_* = (x x_*)^T A (x x_*)$ 可知要证的两式是等价的。下面只证第二式成立
- 假设共轭梯度法计算到 $\ell$ 步出现 $r_{\ell}=0$ ,那么有

$$x_* = x_{\ell} = x_{\ell-1} + \alpha_{\ell-1}p_{\ell-1}$$

$$= x_{\ell-2} + \alpha_{\ell-2}p_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1}p_{\ell-1}$$

$$= \cdots$$

$$= x_0 + \alpha_0p_0 + \alpha_1p_1 + \cdots + \alpha_{\ell-1}p_{\ell-1}$$

共轭体及伝及共率4 性质

非细梯度法

基本性品

实用共轭梯度法及其 收敛性

);用共轭梯度法

收敛性分析

● 而对计算过程中任一步k < ℓ, 我们有

$$x_k = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j p_j \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$$

\*\*\*\*\*\*\*\*\*

实用共轭梯度法及非 此幼性

实用共轭梯度法

• 而对计算过程中任一步 $k < \ell$ , 我们有

$$x_k = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j p_j \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$$

• 设 $x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$ 为任一向量,则x有表示

$$x = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j p_j$$

收敛性分析

• 而对计算过程中任一步 $k < \ell$ . 我们有

$$x_k = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j p_j \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$$

• 设 $x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$ 为任一向量,则x有表示

$$x = x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_j p_j$$

● 于是

$$x_* - x = \sum_{j=0}^{k-1} (\alpha_j - \gamma_j) p_j + \sum_{j=k}^{\ell-1} \alpha_j p_j$$

HE AND EAST REPORT.

基本性质

实用共轭梯度法及其 此幼性

**始田共福梯府**建

收敛性分析

• 而 $x_* - x_k = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j p_j$ ,根据共轭梯度法的性质(3)可得

$$||x_{*} - x||_{A}^{2} = \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (\alpha_{j} - \gamma_{j}) p_{j} \right\|_{A}^{2} + \left\| \sum_{j=k}^{\ell-1} \alpha_{j} p_{j} \right\|_{A}^{2}$$

$$\geqslant \left\| \sum_{j=k}^{\ell-1} \alpha_{j} p_{j} \right\|_{A}^{2} = ||x_{*} - x_{k}||_{A}^{2}$$

共轭梯度法

● 共轭梯度法在理论上确保至多n步得到方程组 的精确解

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框列

= \\_- = ## \ \

最速 卜降污

共轭梯度法及其基本 性质

土*川*, 共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 共轭梯度法在理论上确保至多n步得到方程组的精确解
- 在实际使用时由于误差的存在,使得r<sub>k</sub>之间的 正交性很快损失,所以有限步终止性不再成立

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及基 收敛性

**女用夹机物** 收敛性分析

- 共轭梯度法在理论上确保至多n步得到方程组的精确解
- 在实际使用时由于误差的存在,使得r<sub>k</sub>之间的 正交性很快损失,所以有限步终止性不再成立
- 而且在实际应用中,由于*n*一般很大,迭代*n*次 迭代所耗费的计算时间令人无法接受

#### 共轭梯度法

- 共轭梯度法在理论上确保至多n步得到方程组 的精确解
- 在实际使用时由于误差的存在, 使得r<sub>k</sub>之间的 正交性很快损失, 所以有限步终止性不再成立
- 而且在实际应用中,由于*n*一般很大,迭代*n*次 迭代所耗费的计算时间令人无法接受
- 所以通常仍把共轭梯度法作为一种迭代法使 用,当 $\|r_k\|$ 足够小或者达到指定迭代次数时终 11:



#### 共轭梯度法的优点

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

-1...

共轭梯度法及具基<sup>2</sup> 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其

实用共轭梯度法

收敛性分析

在算法中,系数矩阵A仅仅用来由已知向量p产生向量Ap,因此可以充分利用A的稀疏性,而且对某些提供矩阵A困难,而可以方便由p产生向量Ap的应用问题,这种方法十分有用

#### 共轭梯度法的优点

共轭梯度法

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 在算法中,系数矩阵A仅仅用来由已知向量p产生向量Ap,因此可以充分利用A的稀疏性,而且对某些提供矩阵A困难,而可以方便由p产生向量Ap的应用问题,这种方法十分有用
- 不需要预先估计任何参数就可以计算

#### 共轭梯度法的优点

共轭梯度法

步长的确定 最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 在算法中,系数矩阵A仅仅用来由已知向量p产生向量Ap,因此可以充分利用A的稀疏性,而且对某些提供矩阵A困难,而可以方便由p产生向量Ap的应用问题,这种方法十分有用
- 不需要预先估计任何参数就可以计算
- 每次迭代的主要计算就是向量之间的运算,因 此便于并行化

#### 作为迭代法的收敛性估计

共轭梯度法

若系数矩阵与单位矩阵的差是一个秩为r的 矩阵,而且r又很小的话,那么共轭梯度法 收敛得很快

#### 定理

如果A = I + B, rank B = r, 那么共轭梯度 法至多迭代r+1步即可得到方程

组Ax = b的精确解

### 定理证明

共轭梯度法

注意到rank B = r蕴涵着

$$\mathrm{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0\} = \mathrm{span}\{r_0, Br_0, \dots, B^k r_0\}$$

的维数不会超过r+1. 因此定理成立。

4日1日日間ははまりは動き 重 物なの

### 误差估计

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本性质

性质

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

### 定理

用共轭梯度法求得的水有如下的误差估计:

$$||x_k - x_*||_A \le 2\left(\frac{\sqrt{\kappa_2} - 1}{\sqrt{\kappa_2} + 1}\right)^k ||x_0 - x_*||_A$$

其中
$$\kappa_2 = \kappa_2(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2$$

### 定理证明

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共振投除法 7

性质

><=01403£1

大小人。 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 由共轭梯度法的性质可知,对任意的 $x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$ 有

$$x_* - x = x_* - x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j+1} A^j r_0$$

$$= \left(I + \sum_{j=1}^k a_{kj} A^j\right) A^{-1} r_0 = P_k(A) A^{-1} r_0$$

其中
$$P_k(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^k a_{kj} \lambda^i$$

邓建松

最速下降法

4+ ### 4W phr 24- 77

性质

共轭梯度

基本性质

实用共轭梯度法及其 此命性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 令 $\mathcal{P}_k$ 为所有满足 $P_k(0) = 1$ ,且次数不超过k的实系数多项式全体,则(第一个不等号应用了"最速下降法"一节中已证的引理)

$$||x_{*} - x_{k}||_{A} = \min\{||x - x_{*}||_{A} : x \in x_{0} + \mathcal{K}(A, r_{0}, k)\}$$

$$= \min_{P_{k} \in \mathcal{P}_{k}} ||P_{k}(A)A^{-1}r_{0}||_{A}$$

$$\leq \min_{P_{k} \in \mathcal{P}_{k}} \max_{1 \leq i \leq n} |P_{k}(\lambda_{i})|||A^{-1}r_{0}||_{A}$$

$$\leq \min_{P_{k} \in \mathcal{P}_{k}} \max_{a \leq \lambda \leq b} |P_{k}(\lambda)|||x_{*} - x_{0}||_{A}$$

其中 $0 < a = \lambda_0 \le \cdots \le \lambda_n = b$ 是A的特征值

其末桂原

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 根据Chebyshev多项式的性质,最优化问题  $\min_{P_k \in \mathcal{P}_k} \max_{a \leqslant \lambda \leqslant b} |P_k(\lambda)|$ 有唯一解

$$ilde{P}_k(\lambda) = rac{T_k\left(rac{b+a-2\lambda}{b-a}
ight)}{T_k\left(rac{b+a}{b-a}
ight)}$$

其中 $T_k(x)$ 是k次Chebyshev多项式

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

基本性质

实用共轭梯度法及非 此敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• Chebyshev多项式:  $T_n(x) = cos(n \arccos x)$ , 它是定义在[-1,1]上,在所有同首项系数的n次多项式中,它在[-1,1]上的绝对最大值最小

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

取迷下降法

共轭梯度法及其基本 性质

土*I*灰 共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度沿

收敛性分析

- Chebyshev多项式:  $T_n(x) = cos(n \arccos x)$ , 它是定义在[-1,1]上,在所有同首项系数的n次多项式中,它在[-1,1]上的绝对最大值最小
- 在[-1,1]外用多项式形式直接延拓

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及其

实用共轭梯度法

• Chebyshev多项式:  $T_n(x) = cos(n \arccos x)$ , 它是定义在[-1,1]上,在所有同首项系数的n次多项式中,它在[-1,1]上的绝对最大值最小

- 在[-1,1]外用多项式形式直接延拓
- 递推公式:  $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) T_{n-2}(x)$ ,  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$

共轭梯度法

邓建杉

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• Chebyshev多项式:  $T_n(x) = cos(n \arccos x)$ , 它是定义在[-1,1]上,在所有同首项系数的n次多项式中,它在[-1,1]上的绝对最大值最小

- 在[-1,1]外用多项式形式直接延拓
- 递推公式:  $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) T_{n-2}(x)$ ,  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$
- 基于上述公式,可以证明当 $|x| \ge 1$ 时有  $T_n(x) = \frac{1}{2} \left( \left( x \sqrt{x^2 1} \right)^n + \left( x + \sqrt{x^2 1} \right)^n \right)$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速卜降法

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 //c/k/k/k

收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 当
$$\gamma > 1$$
,  $x = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ 时 
$$x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{\gamma} \pm 1)^2}{\gamma - 1},$$

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 当
$$\gamma > 1$$
,  $x = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ 时

$$x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{\gamma} \pm 1)^2}{\gamma - 1},$$

从而有

$$T_n\left(rac{\gamma+1}{\gamma-1}
ight)=rac{(\sqrt{\gamma}+1)^{2n}+(\sqrt{\gamma}-1)^{2n}}{2(\gamma-1)^n}\ \geqslantrac{(\sqrt{\gamma}+1)^{2n}}{2(\gamma-1)^n}$$

### 重回证明

### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

大学和1701支

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

**定田共福総府**は

收敛性分析

• 根据Chebyshev多项式的性质,我们有

$$egin{aligned} \max_{a\leqslant x\leqslant b} | ilde{P}_k(\lambda)| &= rac{1}{T_kigg(rac{b+a}{b-a}igg)} \ &\leqslant rac{2(b-a)^k}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})^{2k}} \ &= 2\left(rac{\sqrt{\kappa_2}-1}{\sqrt{\kappa_2}+1}
ight)^k \end{aligned}$$

这就完成了证明( $\kappa_2 = b/a$ )

### 共轭梯度法

邓建松

**基**4性第

最速下降法

共轭梯度法及其基本

生质

1.7

基本性质

实用共轭梯度法及其

收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 上述估计是十分粗糙的

### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其

性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

- 上述估计是十分粗糙的
- 实际收敛速度往往比这个估计快得多

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度》 基本性质

实用共轭梯度法及身 收敛性

实用共轭梯度法

• 上述估计是十分粗糙的

- 实际收敛速度往往比这个估计快得多
- 但这个结果告诉我们,只要系数矩阵是十分良态的(即 $\kappa_2 \approx 1$ ),那么共轭梯度法就会收敛得很快

#### 共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度? 基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

收敛性分析

- 上述估计是十分粗糙的
- 实际收敛速度往往比这个估计快得多
- 但这个结果告诉我们,只要系数矩阵是十分良态的(即 $\kappa_2 \approx 1$ ),那么共轭梯度法就会收敛得很快
- 对比于最速下降法收敛估计中的因子,我们有

$$\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \geqslant \frac{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_1}}$$

邓建松

2018年11月28日

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

LHessenberg

THE PROPERTY LESS TO THE SHEET WAS

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多项式的根的问题

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万没

基本迭代和收敛

实Schur标准)

带原点位移的QR迭

- 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多项式的根的问题
- 五阶及五阶以上的多项式的根一般不能用有限 次代数运算求得

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

仅 希 沿

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准为

带原点位移的QR迭

带原点位移的QR迭4

- 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多项式的根的问题
- 五阶及五阶以上的多项式的根一般不能用有限 次代数运算求得
- 所以矩阵特征值的计算方法本质上都是迭代的

### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多项式的根的问题

- 五阶及五阶以上的多项式的根一般不能用有限 次代数运算求得
- 所以矩阵特征值的计算方法本质上都是迭代的
- 已有不少非常成熟的数值方法计算矩阵的全部 或部分特征值和特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 求一个矩阵的特征值的问题实质上是求一个多项式的根的问题
- 五阶及五阶以上的多项式的根一般不能用有限 次代数运算求得
- 所以矩阵特征值的计算方法本质上都是迭代的
- 已有不少非常成熟的数值方法计算矩阵的全部 或部分特征值和特征向量
- 本节只是介绍几种最常用的基本方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

氯洪

反幂法

ODEN

基本迭代和收敛

实Schur标准并

\_\_Hessenberg16

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

• 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 复数 $\lambda$ 称为A的一个<mark>特征值</mark>是指存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Ax = \lambda x$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

实Schur标准用

带原点位移的QR

双重步位移的QR迭

- 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 复数 $\lambda$ 称为A的一个<mark>特征值</mark>是指存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Ax = \lambda x$
- 此时x称做A的属于λ的一个特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

00-

基本法代和政绩

带原点位移的QRi

双重步位移的QR选

- 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 复数 $\lambda$ 称为A的一个<mark>特征值</mark>是指存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Ax = \lambda x$
- 此时x称做A的属于λ的一个特征向量
- $\lambda$ 是A的一个特征向量当且仅当 $det(\lambda I A) = 0$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

S. J. CHUTTON

带原点位移的QR迭f

双重步位移的QR迭f

隐式QR算法

• 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 复数 $\lambda$ 称为A的一个<mark>特征值</mark>是指存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Ax = \lambda x$ 

- 此时x称做A的属于λ的一个特征向量
- $\lambda$ 是A的一个特征向量当且仅当 $det(\lambda I A) = 0$
- 多项式 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I A)$ 称为A的特征多项式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准用

l-Hessenherg (k

带原点位移的QR选

双重步位移的QR选行

隐式QR算法

•  $p_A(\lambda)$ 是一个首一的n次多项式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

\_\_Hessenberg16

双重步位移的OR法

- $p_A(\lambda)$ 是一个首一的n次多项式
- 由代数基本定理知 $p_A(\lambda)$ 有n个根,即A有n个特征值

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

.....

QR方法

基本迭代和收敛

今らCHUF科化力

带原占位移的OR选

IN NY WEST AND MARKET

- $p_A(\lambda)$ 是一个首一的n次多项式
- 由代数基本定理知 $p_A(\lambda)$ 有n个根,即A有n个特征值
- 记A的特征值全体为λ(A), 称之为A的谱集

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- $p_A(\lambda)$ 是一个首一的n次多项式
- 由代数基本定理知 $p_A(\lambda)$ 有n个根,即A有n个特征值
- 记A的特征值全体为λ(A), 称之为A的谱集
- 假设 $p_A(\lambda) = \prod_{j=1}^r (\lambda \lambda_j)^{n_j}$ , 其 中 $n_1 + \dots + n_r = n$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$   $(i \neq j)$ , 则 称 $n_i$ 为 $\lambda_i$ 的代数重数, 而 称 $m_i = n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$ 为 $\lambda_i$ 的几何重数

邓建松

### 基本概念与性质

夏沣

反幂法

### QR方法

基本迭代和收敛性

3,44,111,121,127,0

\_\_Hessenberg16

**市**原点包抄的**QK**迈中

双里步位移的QK迭代

意式QR算法

• 显然 $m_i \leq n_i$ 

邓建松

### 基本概念与性质

氯決

反幂法

基本迭代和收敛付

实Schur标准用

- Hossenherm (1)

带原点位移的QR选值

双重步位移的QR迭值

- 显然 $m_i \leq n_i$
- 如果 $n_i = 1$ ,则称 $\lambda_i$ 为A的一个<mark>单特征值</mark>;否则称 $\lambda_i$ 是A的一个重特征值

邓建松

### 基本概念与性质

泵注

反幂法

OR方法

基本性积和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

.....

双里步包移的QK达

- 显然 $m_i \leq n_i$
- 如果 $n_i = 1$ ,则称 $\lambda_i$ 为A的一个<mark>单特征值</mark>;否则称 $\lambda_i$ 是A的一个**重特征值**
- 如果 $n_i = m_i$ ,则称 $\lambda_i$ 为A的一个<mark>半单特征值</mark>

邓建松

### 基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

双重步位移的QR迭值

- 显然 $m_i \leq n_i$
- 如果 $n_i = 1$ ,则称 $\lambda_i$ 为A的一个<mark>单特征值</mark>;否则称 $\lambda_i$ 是A的一个<mark>重特征值</mark>
- 如果 $n_i = m_i$ ,则称 $\lambda_i$ 为A的一个<mark>半单特征值</mark>
- 如果A的所有特征值都是半单的,则称A是<mark>非亏</mark> 损的

基本概念与性质

**奉**法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 显然 $m_i \leq n_i$
- 如果 $n_i = 1$ ,则称 $\lambda_i$ 为A的一个<mark>单特征值</mark>;否则称 $\lambda_i$ 是A的一个**重特征值**
- 如果 $n_i = m_i$ ,则称 $\lambda_i$ 为A的一个半单特征值
- 如果*A*的所有特征值都是半单的,则称*A*是<mark>非亏损的</mark>
- *A*是非亏损的当且仅当*A*有*n*个线性无关的特征 向量,即*A*是可对角化的

### 相似变换

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头 SCHUTTOTE //

\_\_Hessenberg16

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

• 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 若存在非奇异阵 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使 得 $B = XAX^{-1}$ , 则称A = B是相似的,而上述变换称为相似变换

#### 相似变换

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

l-Hessenhere

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭化

- 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 若存在非奇异阵 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使 得 $B = XAX^{-1}$ , 则称A = B是相似的,而上述变换称为相似变换
- 若A与B相似,则它们有相同的特征值,而且x是A的一个特征向量当且仅当y = Xx是B的一个特征向量

### 相似变换

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 若存在非奇异阵 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使 得 $B = XAX^{-1}$ , 则称A = B是相似的,而上述变换称为相似变换
- 若A与B相似,则它们有相同的特征值,而且x是A的一个特征向量当且仅当y = Xx是B的一个特征向量
- 矩阵特征值问题的基本思想:把给定矩阵相似 变换为易于计算特征值和特征向量的矩阵



#### Jordan分解定理

非对称特征值问题计 實方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希拉

QR方法

基本迭代和收敛

\_\_\_\_\_

TORRESTOR

.....

隐式QR算法

• 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 有r个互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ , 其(代数)重数分别为 $n(\lambda_1), \ldots, n(\lambda_r)$ ,则存在 非奇异矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_r))$$

其中

$$J(\lambda_i) = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_i), \dots, J_{k_i}(\lambda_i)) \in \mathbb{C}^{n(\lambda_i) \times n(\lambda_i)}$$

# Jordan块

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准形

带原点位移的

双重步位移的QR迭代

ACHE DE LE PRINCIPALITA

隐式QR算法

其中

$$n_1(\lambda_i) + \cdots + n_{k_i}(\lambda_i) = n(\lambda_i)$$

#### Schur分解定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本达代和収益

l: Horronborg

带原点位移的QR选

双重步位移的QR选件

隐式QR算法

• 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,则存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得

$$U^*AU=T$$

其中T是上三角阵。适当选取U可使T的对角元按任意指定的顺序排列

#### Schur分解定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

0D+>

基本迭代和收

实Schur标准形

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,则存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得

$$U^*AU = T$$

其中T是上三角阵。适当选取U可使T的对角元按任意指定的顺序排列

● 特征值问题求解的QR方法就是基于这一定理而设计的

# Gerschgorin圆盘定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准用

# IN A Pass Work

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 设
$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$
, 令

$$G_i(A) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$$

则有

$$\lambda(A) = \bigcup_{j=1}^n G_j(A)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

TO:H

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准剂

l-Hessenherg (

带原占位移的QR洪

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

● 设 $\lambda$ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

反幂法

基本迭代和收益

实Schur标准剂

上Hessenberg化

型形址/hakihopit/

- 设 $\lambda$ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值
- 则关于 $x \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $Ax = \lambda x$ 有解,关于 $y \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $y^T A = \lambda y^T$ 也有解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

**汉**希沿

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原点位移的QR选

- 设 $\lambda$ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值
- 则关于 $x \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $Ax = \lambda x$ 有解,关于 $y \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $y^T A = \lambda y^T$ 也有解
- 显然x是前面所定义的相应于λ的特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 设 $\lambda$ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值
- 则关于 $x \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $Ax = \lambda x$ 有解,关于 $y \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $y^T A = \lambda y^T$ 也有解
- 显然x是前面所定义的相应于λ的特征向量
- 我们称x是相应于 $\lambda$ 的<mark>右特征向量</mark>;而y是相应于 $\lambda$ 的左特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

暴決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 设 $\lambda$ 是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值
- 则关于 $x \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $Ax = \lambda x$ 有解,关于 $y \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $y^T A = \lambda y^T$ 也有解
- 显然x是前面所定义的相应于λ的特征向量
- 我们称x是相应于 $\lambda$ 的<mark>右特征向量</mark>;而y是相应于 $\lambda$ 的左特征向量
- y是矩阵 $A^T$ 相应于 $\lambda$ 的右特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准用

上Hessenberg化

双里步位移的QR选作

隐式QR算法

• 设 $x_i$ 是A对应于特征值 $\lambda_i$ 的右特征向量, $y_i$ 是A对应于特征值 $\lambda_i$ 的左特征向量

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本读代和此

实Schur标准)

上Hessenberg

带原点位移的QR迭

双重步位移的QR选

- 设 $x_i$ 是A对应于特征值 $\lambda_i$ 的右特征向量, $y_i$ 是A对应于特征值 $\lambda_i$ 的左特征向量
- 若 $\lambda_i \neq \lambda_j$ ,则必有 $y_j^T x_i = 0$ . 注意:即使是在复数域上进行运算,这里也只是进行矩阵转置,没有共轭(对于非零复向量x,可能有 $x^T x = 0$ )

非对称特征值问题计

基本概念与性质

- $\forall x_i \neq A$ 对应于特征值 $\lambda_i$ 的右特征向量,  $y_i$ 是A对应于特征值 $\lambda_i$ 的左特征向量
- 若 $\lambda_i \neq \lambda_i$ ,则必有 $y_i^T x_i = 0$ . 注意: 即使是在复 数域上讲行运算,这里也只是进行矩阵转置, 没有共轭(对于非零复向量x, 可能有 $x^Tx=0$ )
- 实际上,在 $Ax_i = \lambda_i x_i$ 上左乘 $y_i^T$ ; 即得

$$(\lambda_i - \lambda_j) y_j^T x_i = 0$$

非对称特征值问题计

基本概念与性质

- $\forall x_i \neq A$ 对应于特征值 $\lambda_i$ 的右特征向量,  $y_i$ 是A对应于特征值 $\lambda_i$ 的左特征向量
- 若 $\lambda_i \neq \lambda_i$ ,则必有 $y_i^T x_i = 0$ . 注意: 即使是在复 数域上讲行运算,这里也只是进行矩阵转置, 没有共轭(对于非零复向量x, 可能有 $x^Tx=0$ )
- 实际上,在 $Ax_i = \lambda_i x_i$ 上左乘 $y_i^T$ ; 即得  $(\lambda_i - \lambda_i) y_i^T x_i = 0$



# 多项式的友阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反幂**犯

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

T.nessemberg 16

WHEN INTO UNIO

隐式QR算法

• 给定首一n次多项式

$$p(x) = x^{n} + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_{1}x + p_{0}$$

# 多项式的友阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**以**布拉

QR万法

基本迭代和收敛

3,44,000

Triessemberg 16

双重步位移的QR迭位

隐式QR算法

• 给定首一n次多项式

$$p(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1x + p_0$$

• 容易验证矩阵

$$C = \left(\begin{array}{ccccc} -p_{n-1} & -p_{n-2} & \cdots & -p_1 & -p_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

的特征多项式就是p(x)

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反幂**没

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

● *C*称为*p*(*x*)的友阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反幂**犯

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

\_\_\_Hessenberg1C

THE REPORT AND DE

双里步位移的QR达1

- *C*称为*p*(*x*)的<mark>友阵</mark>
- 那么C的Jordan标准型是什么?

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

. . . .

非未供和的协

实Schur标准是

上Hessenberg化

市原思世杪的QK达1

- *C*称为*p*(*x*)的友阵
- 那么C的Jordan标准型是什么?
- 或者问: 当矩阵A的特征多项式是p(x)时,何时A与C是相似的?

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反**幂法

OP #

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 隐式QR算法

- *C*称为*p*(*x*)的友阵
- 那么C的Jordan标准型是什么?
- 或者问: 当矩阵A的特征多项式是p(x)时,何时A与C是相似的?
- 结论:若对应于不同特征值只有一个Jordan块,或者说只有一个特征向量时,矩阵A相似于C
   (参考: J.H. Wilkinson的著作【代数特征值问题】)

# 特征值和特值向量敏感性分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

\_\_ .

基本迭代和收益

实Schur标准法

上Hessenberg化 泰原占位移的OR

THE IL PRIVATION AT A

隐式QR算法

从数值计算的角度来看,我们应首先弄清要计算的特征值和特征向量是否是病态的,即矩阵元素的小变化,是否会引起所关心的特征值和特征向量的巨大变化

# 特征值和特值向量敏感性分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD-Ì:

基本迭代和收敛作

.h:Hessenberg

带原点位移的QR选值

隐式QR算法

从数值计算的角度来看,我们应首先弄清要计算的特征值和特征向量是否是病态的,即矩阵元素的小变化,是否会引起所关心的特征值和特征向量的巨大变化

• 对一般矩阵而言,这一问题非常复杂

# 特征值和特值向量敏感性分析

非对称特征值问题计 算方法

小连14

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD÷

及K力 法 基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭价 双重生位移的QR迭价

- 从数值计算的角度来看,我们应首先弄清要计算的特征值和特征向量是否是病态的,即矩阵元素的小变化,是否会引起所关心的特征值和特征向量的巨大变化
- 对一般矩阵而言,这一问题非常复杂
- 我们这里只介绍一个简单而又非常重要的结果

邓建松

#### 基本概念与性质

幂決

反幂法

#### OD士社

基本迭代和收敛付

实Schur标准用

带原点位移的QR迭位

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

• 假设 $\lambda$ 是A的一个单特征值,x是相应的特征向量,而且 $\|x\|_2 = 1$ 

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

\_\_Hessenberg16

and the second second

- 假设 $\lambda$ 是A的一个单特征值,x是相应的特征向量,而且 $\|x\|_2 = 1$
- $\diamondsuit U = (x, U_2) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是酉阵,则我们有

$$U^*AU = \left(\begin{array}{cc} \lambda & x^*AU_2 \\ 0 & A_2 \end{array}\right)$$

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头3CHUF标准)

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

- 假设 $\lambda$ 是A的一个单特征值,x是相应的特征向量,而且 $\|x\|_2 = 1$
- $\diamondsuit U = (x, U_2) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是酉阵,则我们有

$$U^*AU = \left(\begin{array}{cc} \lambda & x^*AU_2 \\ 0 & A_2 \end{array}\right)$$

• 由于 $\lambda$ 是A的单特征值,所以

$$\delta = \min_{\mu \in \lambda(A_2)} |\lambda - \mu| > 0$$

邓建松

#### 基本概念与性质

幂法

反幂法

#### QR方法

基本迭代和收敛性

头Schur标准形

- Hossenhere (F

帝原点位移的QR迭位

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I - A_2)^{-1}U_2^*$ 



邓建松

#### 基本概念与性质

幂決

反幂法

#### QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

市原思证检的QK达1

双重步位移的QR选作

- 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I A_2)^{-1}U_2^*$
- 取y为A的属于 $\lambda$ 的左特征向量(即 $y^TA = \lambda y^T$ )

邓建松

基本概念与性质

氯洪

反幂法

QR万法

**基本运**代和权助

实Schur标准用

Tricocuper

makiti Pezkilonde

- 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I A_2)^{-1}U_2^*$
- 取y为A的属于 $\lambda$ 的左特征向量(即 $y^TA = \lambda y^T$ )
- 由于 $\lambda$ 是单特征值,所以 $y^Tx \neq 0$ . (为什么?) 从而可以取y使得 $y^Tx = 1$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg代 恭順占位務的ORi

双重非位数的OP性A

- 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I A_2)^{-1}U_2^*$
- 取y为A的属于 $\lambda$ 的左特征向量(即 $y^TA = \lambda y^T$ )
- 由于 $\lambda$ 是单特征值,所以 $y^Tx \neq 0$ . (为什么?) 从而可以取y使得 $y^Tx = 1$ 
  - 利用Jordan标准形考虑特征向量的形式

邓建松

基本概念与性质

反幂法

QR方法

实Schur标准形

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 • 定义 $\Sigma^{\perp} = U_2(\lambda I - A_2)^{-1}U_2^*$ 

- 取y为A的属于 $\lambda$ 的左特征向量(即 $y^TA = \lambda y^T$ )
- 由于 $\lambda$ 是单特征值,所以 $y^Tx \neq 0$ . (为什么?) 从而可以取y使得 $y^Tx = 1$ 
  - 利用Jordan标准形考虑特征向量的形式
- 给矩阵A以微小的扰动使其变为 $\tilde{A}$ , 记 $\varepsilon = \|\tilde{A} A\|_2$ , 则存在 $\tilde{A}$ 的一个特征值 $\tilde{\lambda}$ 和对应的特征向量 $\tilde{x}$ , 使得(证明略)

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| \leq ||y||_2 \varepsilon + O(\varepsilon^2), ||\tilde{x} - x||_2 \leq ||\Sigma^{\perp}||_2 \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

### 条件数

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

htt----/b

带原点位移的QR

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

• 上式表明 $\lambda$ 和x的敏感性分别与 $\|y\|_2$ 和 $\|\Sigma^{\perp}\|_2$ 的 大小有关

### 条件数

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 跨式QR算法 • 上式表明 $\lambda$ 和x的敏感性分别与 $||y||_2$ 和 $||Σ^{\perp}||_2$ 的大小有关

• 我们分别称 $\|y\|_2$ 和 $\|\Sigma^{\perp}\|_2$ 为特征值 $\lambda$ 和特征向量x的条件数. 记做

$$\operatorname{cond}(\lambda) = \|y\|_2, \quad \operatorname{cond}(x) = \|\Sigma^{\perp}\|_2$$

### 幂法:初步假设

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反幂**%

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg

双重步位移的QR迭位

隐式QR算法

幂法是计算矩阵模最大特征值和对应特征向量的一种迭代方法

#### 幂法:初步假设

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛的

实Schur标准并

带原点位移的QR选

IN ARTHUR MARKET

- 幂法是计算矩阵模最大特征值和对应特征向量 的一种迭代方法
- 为了说明基本想法,我们先假定 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 可对角化,即A有如下分解

$$A = X\Lambda X^{-1}$$

其中
$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

$$X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$
 非奇异

## 幂法:初步假设

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原点位移的QR选

双垂集位数的OD注册

隐式QR算法

● 幂法是计算矩阵模最大特征值和对应特征向量 的一种迭代方法

• 为了说明基本想法,我们先假定 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 可对 角化,即A有如下分解

$$A = X\Lambda X^{-1}$$

• 再假定 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$ 

#### 开始迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反幂**犯

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准用

上Hessenberg(

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

• 任取一向量 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 

#### 开始迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准为

Triessement 10

双重步位移的QR迭

- 任取一向量 $u_0 \in \mathbb{C}^n$
- 由于X的列向量构成C"的一组基,所以有

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

#### 开始迭代

非对称特征值问题计

- 任取一向量 $u_0 \in \mathbb{C}^n$
- 由于X的列向量构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基,所以有

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

• 从而我们有

$$A^{k}u_{0} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j}A^{k}x_{j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j}\lambda_{j}^{k}x_{j}$$
$$= \lambda_{1}^{k} \left(\alpha_{1}x_{1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{j} \left(\frac{\lambda_{j}}{\lambda_{1}}\right)^{k}x_{j}\right)$$

\_\_:Hessenberg{

帝原点位移的QR选位

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

#### • 由此即知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^ku_0}{\lambda_1^k}=\alpha_1x_1$$

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

3,3,3,0,0,0

\_±Hessenberg

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 由此即知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^ku_0}{\lambda_1^k}=\alpha_1x_1$$

• 这表明当 $\alpha_1 \neq 0$ 且k充分大时,向 量 $u_k = A^k u_0/\lambda_1^k$ 就是A的一个很好的近似特征向 量

## 实际应用的难处

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复社

反幂法

00-2-1

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双里步位移的QR达作

隐式QR算法

• 我们事先并不知道A的特征值 $\lambda_1$ 

#### 实际应用的难处

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准剂

\_\_\_\_\_

带尿点位移的QR迭件

- 我们事先并不知道A的特征值 $\lambda_1$
- 对充分大的k,  $A^k$ 的计算工作量太大

## 实际应用的难处

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛付

上Hessenberg

带原点位移的QR选值

隐式QR算法

• 我们事先并不知道A的特征值 $\lambda_1$ 

- 对充分大的k,  $A^k$ 的计算工作量太大
- 因此直接应用上式计算*A*的近似特征值 有困难

#### 变通

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双里步位移的QR达

隐式QR算法

• 在上式中 $\lambda_1^k$ 只是改变向量的长度,但不改方向,因此我们不必用 $\lambda_1^k$ 约化 $A^k u_0$ 

#### 变通

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

0D+0

基本迭代和收敛

实Schur标准开

l'Hessenherø

帝原点位移的QRX

双重步位移的QR选

- 在上式中 $\lambda_1^k$ 只是改变向量的长度,但不改方向,因此我们不必用 $\lambda_1^k$ 约化 $A^k u_0$
- 但这种约化也是必要的,以防止溢出

#### 变通

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

反幂法

基本迭代和收敛

基本总代和权权社 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 在上式中 $\lambda_1^k$ 只是改变向量的长度,但不改方向,因此我们不必用 $\lambda_1^k$ 约化 $A^k u_0$
- 但这种约化也是必要的,以防止溢出
- 在计算 $A^k u_0$ 时也不必先算出 $A^k$ ,只需迭代地进行就可以了

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反幂**犯

QR方法

基本迭代和收敛

J. ------

上Hessenberg化

双里步位移的QK达作

隐式QR算法

• 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$ ;  $k \leftarrow 1$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

LHessenberg

双里步包移的QR达

- 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$ ;  $k \leftarrow 1$
- $y_k = Au_{k-1}$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

\_\_\_Hessenberg1

双里步包移的QR达

- 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$ ;  $k \leftarrow 1$
- $y_k = Au_{k-1}$
- $\mu_k = \zeta_j^{(k)}, \zeta_j^{(k)}$ 是 $y_k$ 的模最大分量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛

头Schur你

\_\_\_\_\_

双重步位移的QR迭位

- 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$ ;  $k \leftarrow 1$
- $y_k = Au_{k-1}$
- $\mu_k = \zeta_j^{(k)}, \zeta_j^{(k)}$ 是 $y_k$ 的模最大分量
- $u_k = y_k/\mu_k$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反**掃沿

QR/J/Z

基本迭代和收敛作

\_\_\_Hessenberg1

双重步位移的QR迭值

- 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$ ;  $k \leftarrow 1$
- $y_k = Au_{k-1}$
- $\mu_k = \zeta_j^{(k)}, \zeta_j^{(k)}$ 是 $y_k$ 的模最大分量
- $u_k = y_k/\mu_k$
- $k \leftarrow k + 1$ , 返回第二步

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR力法

基本迭代和收敛性

Septiminari

上Hessenberg

----

双重步位移的QR迭件

- 任意取定 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 为初始向量,通常要求 $\|u_0\|_{\infty} = 1$ ;  $k \leftarrow 1$
- $y_k = Au_{k-1}$
- $\mu_k = \zeta_j^{(k)}$ ,  $\zeta_j^{(k)}$ 是 $y_k$ 的模最大分量
- $u_k = y_k/\mu_k$
- $k \leftarrow k + 1$ , 返回第二步
- 这一迭代方法称做幂法

## 幂法的收敛性定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

夏注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛作

\_\_\_\_\_Hessenberg(

带原点位移的QR迭

双重步位移的QR选

隐式QR算法

#### 定理

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 有r个互不相同的特征值,且满  $\mathbb{Z}|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_r|$ ,而且 $\lambda_1$ 是半单的。如果初始向量 $u_0$ 在 $\lambda_1$ 的特征子空间上的投影不为零,则由 幂法产生的向量序列 $\{u_k\}$ 收敛到 $\lambda_1$ 的一个特征向量 $x_1$ (极限平行于 $x_0$ 在特征子空间上投影向量),而 且 $\{\mu_k\}$ 收敛到 $\lambda_1$ 

#### 收敛定理的证明

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR刀音

基本迭代和收益

头Schur标(框)

带原点位移的QR设

双纸比拉我的OPはJ

隐式QR算法

• 根据假设,A的Jordan分解为

$$A = X \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_r) X^{-1}$$

其中 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 非奇异, $J_i$ 是由属于 $\lambda_i$ 的Jordan块构成的上三角阵, $n_1 + \cdots + n_r = n$ . 由于 $\lambda_1$ 是 半单的,所以 $J_1 = \lambda_1 I_n$ 

# 收敛定理的证明

非对称特征值问题计

● 根据假设,A的Jordan分解为

$$A = X \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_r) X^{-1}$$

其中 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 非奇异, $J_i$ 是由属于 $\lambda_i$ 的Jordan块 构成的上三角阵,  $n_1 + \cdots + n_r = n$ . 由于 $\lambda_1$ 是 半单的,所以 $J_1 = \lambda_1 I_n$ 

•  $\phi_V = X^{-1}u_0$ , 并将V = X分块:

$$y = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_{n_r}^T)^T,$$
  
 $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ 

其中 $y_i^T$ 有 $n_i$ 个元素, $X_i$ 有 $n_i$ 列



上Hessenberg化

双重步位移的QR迭位

隐式QR算法

#### • 从而我们有

$$A^{k}u_{0} = X \operatorname{diag}(J_{1}^{k}, \dots, J_{r}^{k})X^{-1}u_{0}$$

$$= X_{1}J_{1}^{k}y_{1} + X_{2}J_{2}^{k}y_{2} + \dots + X_{r}J_{r}^{k}y_{r}$$

$$= \lambda_{1}^{k}X_{1}y_{1} + X_{2}J_{2}^{k}y_{2} + \dots + X_{r}J_{r}^{k}y_{r}$$

$$= \lambda_{1}^{k}\left(X_{1}y_{1} + \sum_{j=2}^{r}X_{j}\left(\frac{J_{j}}{\lambda_{1}}\right)^{k}y_{j}\right)$$

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准先

上Hessenberg化

THE PROPERTY OF PARTY OF THE PA

双里步位移的QR选作

隐式QR算法

• 注意到 $\lambda_1^{-1}J_i$ 的谱半径为 $\rho(\lambda_1^{-1}J_i)=$   $|\lambda_i|/|\lambda_1|<1,\ i=2,\ldots,r,$  所以我们有  $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^k}A^ku_0=X_1y_1$ 

邓建松

基本概念与性质

官注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准并

L'Hessenberg 12

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 注意到 $\lambda_1^{-1}J_i$ 的谱半径为 $\rho(\lambda_1^{-1}J_i)=$   $|\lambda_i|/|\lambda_1|<1,\ i=2,\ldots,r,$  所以我们有  $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^k}A^ku_0=X_1y_1$ 

• 根据假设( $u_0$ 在 $\lambda_1$ 的特征子空间上的投影不为 零),我们有 $X_1y_1 \neq 0$ 

带原点位移的QR选

隐式QR算法

• 注意到 $\lambda_1^{-1}J_i$ 的谱半径为 $\rho(\lambda_1^{-1}J_i) = |\lambda_i|/|\lambda_1| < 1, i = 2, \dots, r,$  所以我们有 $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\lambda_i^k} A^k u_0 = X_1 y_1$ 

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^k}A\ u_0=\lambda_1y_1$$

- 根据假设( $u_0$ 在 $\lambda_1$ 的特征子空间上的投影不为零),我们有 $X_1y_1 \neq 0$ 
  - $y = X^{-1}u_0 \Rightarrow u_0 = Xy$ , 所以 $y_1$ 即 为 $u_0$ 在 $\lambda_1$ 的特征子空间上的组合系数,基 向量就是 $X_1$ 中各列向量,从而 $X_1y_1$ 就 是 $u_0$ 在这个特征子空间中的投影向量



#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准形

上Hessenberg化

市原点包含的QKIST

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 由幂法产生的 $\{u_k\}$ 满足

$$u_k = \frac{Au_{k-1}}{\mu_k} = \frac{A^k u_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1}$$

实Schur标准用

Tricocupergio

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

● 由幂法产生的{*u<sub>k</sub>*}满足

$$u_k = \frac{Au_{k-1}}{\mu_k} = \frac{A^k u_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1}$$

•  $\|u_k\|_{\infty} = 1$ ,即 $u_k$ 至少有一个分量为1,所以 $\zeta_k = \mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1$ 必为 $A^k u_0$ 的一个模最大分量

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万浪

基本迭代和收敛

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭值

隐式QR算法

● 由幂法产生的{*u<sub>k</sub>*}满足

$$u_k = \frac{Au_{k-1}}{\mu_k} = \frac{A^k u_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1}$$

- $\|u_k\|_{\infty} = 1$ ,即 $u_k$ 至少有一个分量为1,所以 $\zeta_k = \mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1$ 必为 $A^k u_0$ 的一个模最大分量
- 从而 $\zeta_k/\lambda_1^k$ 就是 $A^ku_0/\lambda_1^k$ 的一个模最大分量

● 由幂法产生的{uょ}满足

$$u_k = \frac{Au_{k-1}}{\mu_k} = \frac{A^k u_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1}$$

- $||u_k||_{\infty} = 1$ ,  $||u_k||_{$ 以 $\zeta_k = \mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1$ 必为 $A^k u_0$ 的一个模最大分 量
- 从而 $C_k/\lambda_1^k$ 就是 $A^k u_0/\lambda_1^k$ 的一个模最大分量
- 这样由前述极限等式我们知下述极限存在:

$$\zeta = \lim_{k \to \infty} \frac{\zeta_k}{\lambda_1^k}$$



\_\_\_\_

双重步位移的QR迭化

隐式QR算法

#### • 这样我们就有

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0}{\zeta_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0 / \lambda_1^k}{\zeta_k / \lambda_1^k} = \frac{X_1 y_1}{\zeta} = x_1$$

基本概念与性质

\_\_\_\_\_

人和石

QR力指

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭位

隐式QR算法

• 这样我们就有

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0}{\zeta_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0 / \lambda_1^k}{\zeta_k / \lambda_1^k} = \frac{X_1 y_1}{\zeta} = x_1$$

• 由于 $\tilde{y} = (y_1^T, 0, ..., 0)^T$ 是diag $(J_1, ..., J_r)$ 相应 于 $\lambda_1$ 的特征向量,所以 $X_1y_1 = X\tilde{y}$ 是A相应 于 $\lambda_1$ 的特征向量,这就说明 $x_1$ 是属于 $\lambda_1$ 的一个 特征向量 基本概念与性质

复注

反幂法

OP #W

QR方法
基本迭代和收敛性
实Schur标准形
上Hessenberg化
带原点位移的QR选代
双重步位移的QR选代

• 这样我们就有

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0}{\zeta_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{A^k u_0 / \lambda_1^k}{\zeta_k / \lambda_1^k} = \frac{X_1 y_1}{\zeta} = x_1$$

- 由于 $\tilde{y} = (y_1^T, 0, ..., 0)^T$ 是diag $(J_1, ..., J_r)$ 相应 于 $\lambda_1$ 的特征向量,所以 $X_1y_1 = X\tilde{y}$ 是A相应 于 $\lambda_1$ 的特征向量,这就说明 $x_1$ 是属于 $\lambda_1$ 的一个 特征向量
- 由 $Au_{k-1} = \mu_k u_k, x_1 \neq 0$ 可知 $\mu_k \rightarrow \lambda_1$

# 注解

非对称特征值问题计 算方法

4 建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

Se SCHUTTPS (E.)

上Hessenberg{-

双里步位移的QK达作

隐式QR算法

若定理条件不满足,则由幂法产生的序列的收敛性分析变得非常复杂

#### 注解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准用

T. ICOCIDEIS 10

----

- 若定理条件不满足,则由幂法产生的序列的收 敛性分析变得非常复杂
- 这时{u<sub>k</sub>}可能有若干个收敛于不同向量的子列

#### 注解

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

又举法

QR力法

基本迭代和收敛性

X3011011/11/10/1

带原点位移的QR选

双重步位移的OR供代

- 若定理条件不满足,则由幂法产生的序列的收 敛性分析变得非常复杂
- 这时{*u<sub>k</sub>*}可能有若干个收敛于不同向量的子列
- $\emptyset$ :  $A = XDX^{-1}$ , D = diag(3, 2, 1, -3),

$$X = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

头 SCHUTTOTE //

l-Hessenherg

THE PART OF THE PROPERTY OF THE

双重步位移的QR选行

隐式QR算法

● 幂法的收敛速度主要取决于|λ₂|/|λ₁|的大小

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

头Schur标准》

LHessenberg

市原点包移的QK选

双重步位移的QR选行

- 幂法的收敛速度主要取决于|λ₂|/|λ₁|的大小
- 这个数总是小于1的,它越小收敛也就越快

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

l-Hessenherg (

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭件

- 幂法的收敛速度主要取决于|λ₂|/|λ₁|的大小
- 这个数总是小于1的,它越小收敛也就越快
- 为了加快收敛,我们可以采用位移的方法,即 对 $A \mu I$ 应用幂法,这里选取恰当的 $\mu$ , 使 $A \mu I$ 的模最大特征值与其它特征值之模的 距离更大

非对称特征值问题计

- 幂法的收敛速度主要取决于|λ<sub>2</sub>|/|λ<sub>1</sub>|的大小
- 这个数总是小于1的,它越小收敛也就越快
- 为了加快收敛,我们可以采用位移的方法,即  $\forall A - \mu I$ 应用幂法,这里选取恰当的 $\mu$ ,  $\phi A - \mu I$ 的模最大特征值与其它特征值之模的 距离更大
- 对前例可取 $\mu = 3$ ,从而收敛到-3对应的特征向 量

# 求模第二大的特征值和对应特征向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

头SCHUr标准用

是语言位数的OPi

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

为了求模第二大的特征值和对应的特征向量, 那么直接迭代是不行的

# 求模第二大的特征值和对应特征向量

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

复注

反幂法

OR方》

基本迭代和收敛

letterere been

带原点位移的QR选值

双重步位移的QR迭代

- 为了求模第二大的特征值和对应的特征向量, 那么直接迭代是不行的
- 需要对原矩阵进行降阶:即在知道了 $\lambda_1$ 和 $x_1$ 的前提下,把矩阵降低一阶,使它只包含A的特征值 $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 这一方法通常称为收缩技巧

# 求模第二大的特征值和对应特征向量

非对称特征值问题计算方法

基本概念与性质

反幂法

QK力法

实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代

隐式QR算法

为了求模第二大的特征值和对应的特征向量, 那么直接迭代是不行的

- 需要对原矩阵进行降阶:即在知道了 $\lambda_1$ 和 $x_1$ 的前提下,把矩阵降低一阶,使它只包含A的特征值 $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ,这一方法通常称为<mark>收缩技巧</mark>
- 最简单实用的收缩技巧是利用正交变换

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准用

上Hessenberg化

市原品生物的QNAT

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

头Schur标准?

上Hessenberg

THE IN ACTION OF THE

- 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$
- 取酉矩阵P使得 $Px_1 = \alpha e_1$  (可用Householder变换实现)

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反** 程况

\_\_ ...

and the tip to mostly

实Schur标准

带原点位移的QRJ

双垂非位数的OP性

- 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$
- 取酉矩阵P使得 $Px_1 = \alpha e_1$  (可用Householder变换实现)
- 从而 $PAx_1 = \lambda_1 Px_1 = \lambda_1 \alpha e_1$

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反**幂没

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准是

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭代

- 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$
- 取酉矩阵P使得 $Px_1 = \alpha e_1$  (可用Householder变换实现)
- 从而 $PAx_1 = \lambda_1 Px_1 = \lambda_1 \alpha e_1$
- 而 $x_1 = \alpha P^* e_1$ ,所以 $PAP^* e_1 = \lambda_1 e_1$ ,即

$$PAP^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准用

带原点位移的QR迭f

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 假设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ 

- 取酉矩阵P使得 $Px_1 = \alpha e_1$  (可用Householder变换实现)
- 从而 $PAx_1 = \lambda_1 Px_1 = \lambda_1 \alpha e_1$
- 而 $x_1 = \alpha P^* e_1$ ,所以 $PAP^* e_1 = \lambda_1 e_1$ ,即

$$PAP^* = \left( \begin{array}{cc} \lambda_1 & * \\ 0 & B_1 \end{array} \right)$$

• n-1阶矩阵 $B_1$ 的特征值就是 $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ,对其应用幂法即可

### 注解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

幂法的计算严重依赖于矩阵特征值的分布情况,因此实际用起来很不方便,特别是不适用于自动计算

### 注解

非对称特征值问题计

● 幂法的计算严重依赖于矩阵特征值的分布情 况,因此实际用起来很不方便,特别是不适用 于自动计算

● 当矩阵阶数非常高,无法利用其他更有效的算 法时才用幂法计算少数几个模最大的特征值和 相应的特征向量

# 注解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

夏注

反幂法

QR方法

实Schur标准形

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 幂法的计算严重依赖于矩阵特征值的分布情况,因此实际用起来很不方便,特别是不适用于自动计算
- 当矩阵阶数非常高,无法利用其他更有效的算法时才用幂法计算少数几个模最大的特征值和相应的特征向量
- 基于幂法可以诱导出一些更有效的算法

#### 反幂法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg1と

双重步位移的OR铁

....

● 反幂法也称为反迭代法,它对*A*<sup>-1</sup>应用幂法, 从而求出*A*的模最小特征值和对应的特征向量

#### 反幂法

非对称特征值问题计

- 反幂法也称为反迭代法,它对A<sup>-1</sup>应用幂法, 从而求出A的模最小特征值和对应的特征向量
- 其基本格式为

$$Ay_k = z_{k-1},$$
 $\mu_k = \zeta_i, \ \zeta_i 是 y_k$ 的模最大分量
 $z_k = y_k/\mu_k$ 

#### 迭代结果

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

但:计

反幂法

and the late of the standing

实Schur标准用

bures

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

• 若A的特征值为 $|\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \le \cdots \le |\lambda_1|$ ,则 $\{z_k\}$ 收敛到A的对应于 $\lambda_n$ 的一个特征向量,而 $\{\mu_k\}$ 收敛于 $\lambda_n^{-1}$ 

#### 迭代结果

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

and the second of

实Schur桐

上Hessenberg

電原無包砂的QKC

双重步位移的QR选

- 收敛速度由 $|\lambda_n|/|\lambda_{n-1}|$ 的大小决定

#### 应用场合

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本法代和的公

实Schur标准用

上Hessenberg化

型纸出放致的ODSE

• 实际应用中,反幂法主要是用来求特征向量的, 是在用某种方法求得A的某个特征值 $\lambda_i$ 的近似 值 $\tilde{\lambda}_i$ 之后,应用反幂法于 $A-\tilde{\lambda}_i$ I上

#### 应用场合

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

----

基本性积和协协

实Schur标准形

letterere been

带原点位移的QR迭位

双重步位移的QR迭件

- 实际应用中,反幂法主要是用来求特征向量的,是在用某种方法求得A的某个特征值 $\lambda_i$ 的近似值 $\tilde{\lambda}_i$ 之后,应用反幂法于 $A-\tilde{\lambda}_i$ I上
- 即实际计算中常用的是带位移的反幂法,此时 迭代格式为:

$$(A - \mu I)v_k = z_{k-1},$$
  
$$z_k = v_k / ||v||_2$$

# 格式分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD-EN

基本迭代和收敛

J. ------

上Hessenberg

双里步位移的QK达作

隐式QR算法

反幂法每迭代一次就需要解一个线性方程组, 这要比幂法的运算量大得多

### 格式分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反**奉法

QR方法

when I day

X Dentily (1)

带原点位移的QR选

双重步位移的OR法

- 反幂法每迭代一次就需要解一个线性方程组, 这要比幂法的运算量大得多
- 由于方程组的系数矩阵不随k的变化而变化, 所以可以事先对它进行列主元的LU分解,然后 每次迭代就只需要解两个三角形方程组即可

# 格式分析

非对称特征值问题计 算方法

**邓建松** 

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭f 双重步位移的QR迭f 反幂法每迭代一次就需要解一个线性方程组, 这要比幂法的运算量大得多

- 由于方程组的系数矩阵不随k的变化而变化, 所以可以事先对它进行列主元的LU分解,然后 每次迭代就只需要解两个三角形方程组即可
- 这里采用||·||₂进行规范化,只是为了下面的分析方便。实际应用中完全可以采用||·||∞ 进行规范化

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

. . . . .

实Schur标准剂

l-Hossenherer

带原占位移的OR的

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 迭代收敛速度取决于 $|\lambda_1 - \mu|/|\lambda_2 - \mu|$ 的大小

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

電原点包移的QK5

双重步位移的QR迭值

- 迭代收敛速度取决于 $|\lambda_1 \mu|/|\lambda_2 \mu|$ 的大小
- 从收敛速度的角度来看,μ取得越靠近A的某个 特征值越好

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭f

- 迭代收敛速度取决于 $|\lambda_1 \mu|/|\lambda_2 \mu|$ 的大小
- 从收敛速度的角度来看, $\mu$ 取得越靠近A的某个特征值越好
- 但是当μ与A的某个特征值很靠近时,A μI就 与一个奇异矩阵很靠近,迭代时就需要求解一 个非常病态的方程组

次就可以了

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

反幂法

基本迭代和收敛性实Schur标准形

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

双重步位移的Qi 隐式QR算法

- 迭代收敛速度取决于 $|\lambda_1 \mu|/|\lambda_2 \mu|$ 的大小
- 从收敛速度的角度来看, $\mu$ 取得越靠近A的某个特征值越好
- 但是当μ与A的某个特征值很靠近时,A μI就 与一个奇异矩阵很靠近,迭代时就需要求解一 个非常病态的方程组
- 实际计算的经验和理论分析的结果表明:  $A \mu I$ 的病态性并不影响其收敛速度,而且 当 $\mu$ 与A的某个特征值很靠近时,常常只迭代一

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

. . . . .

基本迭代和收敛

实Schur标准用

.l:Hessenberg {{

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

•  $\partial \lambda = A$ 的一个单特征值,x是属于 $\lambda$ 的单位特征 向量

非对称特征值问题计 算方法

**ル建松** 

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD-EN

基本迭代和收益

实Schur标准用

l'Hessenherø

THE PART AND LESS THE PART OF THE

双重步位移的QR迭位

- 设λ是A的一个单特征值,x是属于λ的单位特征 向量
- 假定带位移的迭代格式中位移 $\mu$ 与 $\lambda$ 十分靠近,且x是良态的,即cond(x)不太大

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

電原点包移的QK5

双重步位移的QR迭

- 设λ是A的一个单特征值,x是属于λ的单位特征 向量
- 假定带位移的迭代格式中位移 $\mu$ 与 $\lambda$ 十分靠近,且x是良态的,即cond(x)不太大
  - 设(x, U<sub>2</sub>)是酉阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

\_\_ ...

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg

帝原点位移的QR迭件

隐式OR算法

- 设 $\lambda$ 是A的一个单特征值,x是属于 $\lambda$ 的单位特征 向量
- 假定带位移的迭代格式中位移 $\mu$ 与 $\lambda$ 十分靠近,且x是良态的,即cond(x)不太大
  - 设(x, U<sub>2</sub>)是酉阵
  - 由条件数的定义知

$$\operatorname{cond}(x) = \|U_2(\lambda I - A_2)^{-1} U_2^*\|_2$$
$$= \|(\lambda I - A_2)^{-1} U_2^*\|_2$$

其中
$$A_2 = U_2^*AU_2$$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

ODEN

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上Hessenberg化

市际思想的QNA1

双里步位移的QR达

隐式QR算法

• 假定给定 $z_0$ 之后,我们用列主元Gauss消去法求解迭代格式中的线性方程组 $(A - \mu I)v_1 = z_0$ ,得到计算解 $\hat{v}_1$ 

基本概念与性质

幂法

反幂法

ore\_L....i=whits

带原点位移的QR选

THE IN WATER COMME

隐式QR算法

• 假定给定 $z_0$ 之后,我们用列主元Gauss消去法求解迭代格式中的线性方程组 $(A - \mu I)v_1 = z_0$ ,得到计算解 $\hat{v}_1$ 

• 由Gauss消去法的误差分析知介满足

$$(A - \mu I - E)\hat{v}_1 = z_0$$

其中E与 $A - \mu I$ 和 $z_0$ 有关,但 $\|E\|_2$ 有一致的上界,通常差不多就是机器精度

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg\*

双里步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 记
$$e = \hat{v}_1 - v_1 = (A - \mu I)^{-1} E \hat{v}_1$$
, 并将 $e$ 分解为

$$e=x_1+x_2$$

其中 $x_1 \in \operatorname{span}\{x\}, x_2 \in \operatorname{span}\{x\}^{\perp}$ ,则存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $y \in \mathbb{C}^{n-1}$ 使得

$$x_1 = \alpha x$$
,  $x_2 = U_2 y$ 

基本迭代和收益

头Schur标准加

\_\_\_Hessenberg16

双里步包移的QK达

隐式QR算法

#### • 另一方面, 我们有

$$A - \mu I = (x, U_2) \begin{pmatrix} \lambda - \mu & x^* A U_2 \\ 0 & A_2 - \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ U_2^* \end{pmatrix}$$

头SCHUr标准形

上Hessenberg化

双里步位移的QR达代

隐式QR算法

#### • 另一方面,我们有

$$A - \mu I = (x, U_2) \begin{pmatrix} \lambda - \mu & x^* A U_2 \\ 0 & A_2 - \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ U_2^* \end{pmatrix}$$

#### ● 因而

$$(A - \mu I)^{-1}$$

$$= (x, U_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - \mu} & \frac{-1}{\lambda - \mu} x^* A U_2 (A_2 - \mu I)^{-1} \\ 0 & (A_2 - \mu I)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ U_2^* \end{pmatrix}$$

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

基本迭代和收敛性

alan i landare

上Hessenberg化

带原点位移的QR选作

双重步位移的QR迭代

意式QR算法

• 注意到 $x^*xx^* = x^*$ ,  $x^*U_2 = 0$ 

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准形

上.Hessenberg(

WHAT THE BUILDING WOLL

- 注意到x\*xx\* = x\*, x\*U₂ = 0
- 这样我们就有

$$(A - \mu I)^{-1} = \frac{xx^*}{\lambda - \mu} (I - AU_2(A_2 - \mu I)^{-1}U_2^*)$$

$$+ U_2(A_2 - \mu I)^{-1}U_2^*$$

$$\alpha = x^*e = x^*(A - \mu I)^{-1}E\hat{v}_1$$

$$= \frac{x^*}{\lambda - \mu} (I - AU_2(A_2 - \mu I)^{-1}U_2^*)E\hat{v}_1$$

$$y = U_2^*e = U_2^*(A - \mu I)^{-1}E\hat{v}_1$$

$$= (A_2 - \mu I)^{-1}U_2^*E\hat{v}_1$$



头Schur标准加

- Hessenhere

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

#### • 注意到

$$(A_2 - \mu I)^{-1} = (I + (\lambda - \mu)(A_2 - \lambda I)^{-1})^{-1}(A_2 - \lambda I)^{-1}$$

实Schur标准先

上Hessenberg化

常原点包移的QK选作

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 注意到

$$(A_2 - \mu I)^{-1} = (I + (\lambda - \mu)(A_2 - \lambda I)^{-1})^{-1}(A_2 - \lambda I)^{-1}$$

所以当λ与μ很近时

$$s = \|(A_2 - \mu I)^{-1} U_2^*\|_2 \approx \|(A_2 - \lambda I)^{-1} U_2^*\|_2 = \operatorname{cond}(x)$$

甘未掘今上州

**基** 本 做 芯 与 性

幂法

反幂法

OPTO

QR方法

实Schur标准形

带原点位移的QR选

隐式QR算法

• 注意到

$$(A_2 - \mu I)^{-1} = (I + (\lambda - \mu)(A_2 - \lambda I)^{-1})^{-1}(A_2 - \lambda I)^{-1}$$

所以当λ与μ很近时

$$s = \|(A_2 - \mu I)^{-1} U_2^*\|_2 \approx \|(A_2 - \lambda I)^{-1} U_2^*\|_2 = \operatorname{cond}(x)$$

● 因此当x良态时, s也不会太大, 于是

$$||x_2||_2 = ||y||_2 \leqslant s||E\hat{v}_1||_2$$

就是一个不太大的量



基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

\_E.Hessenberg16

双里步位移的QK达1

隐式QR算法

• 另一方面,

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - |\mu|} (1 + \|A\|_2 s) \|E\hat{v}_1\|_2$$
却是一个很大的量

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万没

基本迭代和收敛

头 SCHUTTANE //

市原点位移的QR设

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

• 另一方面,

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - |\mu|} (1 + \|A\|_2 s) \|E\hat{v}_1\|_2$$
 却是一个很大的量

• 这就是说求解方程组所引起的误差主要对其解 在特征子空间span{x}上投影的长度有影响 邓建松

基本概念与性质

幂法

反希法

QR方法

实Schur标准形

带原点位移的QR选作

隐式QR算法

• 另一方面,

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - |\mu|} (1 + \|A\|_2 s) \|E\hat{v}_1\|_2$$
 却是一个很大的量

- 这就是说求解方程组所引起的误差主要对其解 在特征子空间span{x}上投影的长度有影响
- 而这对于我们要计算λ的近似特征向量是十分 有利的

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准是

带原点位移的QR迭件

双重步位移的QR选位

隐式QR算法

• 另一方面,

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - |\mu|} (1 + \|A\|_2 s) \|E\hat{v}_1\|_2$$
 却是一个很大的量

- 这就是说求解方程组所引起的误差主要对其解 在特征子空间span{x}上投影的长度有影响
- 而这对于我们要计算λ的近似特征向量是十分 有利的
- 因为我们关心的主要是所得向量的方向而不是 它的长度



#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

氯注

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准剂

上Hessenberg化

軍原思包抄的QK达

隐式QR算法

• 上面的分析实质上也表明,当 $\mu$ 靠 近 $\lambda$ 且x良态时,只需应用一次反幂法 就可得到 $\lambda$ 的较好近似特征向量

邓建松

基本概念与性质

泵注

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准

上Hessenberg

常原点包移的QK达

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 上面的分析实质上也表明,当 $\mu$ 靠 近 $\lambda$ 且x良态时,只需应用一次反幂法 就可得到 $\lambda$ 的较好近似特征向量

• 为此我们引进一些概念

# 达到机器精度

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

.....

反幂法

. . . . .

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

THE PROPERTY HAND TO BE

双里步位移的QR达作

隐式QR算法

• 设机器精度为u

# 达到机器精度

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准为

上Hessenberg

WHEN ELDING

隐式QR算法

- 设机器精度为u
- 对于给定的 $\mu \in \mathbb{C}$ , 如果存在 $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$\det(A+E-\mu I)=0, \|E\|_2=\mathit{O}(\mathbf{u})$$

我们称µ是A的一个达到机器精度的近似特征值

# 达到机器精度

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选作 双重步位移的QR选作 • 设机器精度为u

• 对于给定的 $\mu \in \mathbb{C}$ , 如果存在 $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$\det(A+E-\mu I)=0, \|E\|_2=\mathit{O}(\mathbf{u})$$

我们称μ是A的一个达到机器精度的近似特征值

• 对于一个给定的 $x \in \mathbb{C}^n$ , 如果存在 $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满  $\mathbb{E}\|F\|_2 = O(\mathbf{u})$ , 使得 $x \in \mathbb{E}A + F$ 的特征向量,我们称 $x \in A$ 的一个达到机器精度的近似特征向量

#### 两者的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收益

实Schur标准剂

上Hessenberg化

双纸出放我的ODE

隐式QR算法

•  $\Xi \mu \mathbb{E} A$ 的一个达到机器精度的近似特征值,则存在 $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$  满足 $\|E\|_2 = O(\mathbf{u})$ 使得 $(A + E - \mu I)y = 0$ 有非零解

#### 两者的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万浪

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR选

電原点包移的QK达代

隐式QR算法

- 若 $\mu$ 是A的一个达到机器精度的近似特征值,贝存在 $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$  满足 $\|E\|_2 = O(\mathbf{u})$ 使 得 $(A + E \mu I)y = 0$ 有非零解
- 设 $y \in \mathbb{C}^n$ 满足 $(A + E \mu I)y = 0$ ,  $||y||_2 = 1$ ,  $||E||_2 = O(\mathbf{u})$ , 则我们有

$$(A + E)y = \mu y$$

即y是A的一个达到机器精度的近似特征向量

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

常原点包移的QK达1

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 若我们在迭代格式中取 $z_0 = (A - \mu I)y$ ,那么在精确计算的前提下,只需迭代一次就可得到A的达到机器精度的特征向量

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 若我们在迭代格式中取 $z_0 = (A \mu I)y$ ,那么在精确计算的前提下,只需迭代一次就可得到A的达到机器精度的特征向量
- 在实际计算时我们无法按这种方式取初始向量,但这说明了在恰当选取初始向量之后,反 幂法具有"一次迭代"性

#### $\lambda$ 病态时的情形

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg代

型纸出放致的ODSE

双重步位移的QRi

隐式QR算法

还需要指出的是,当λ比较病态时,利用反幂 法再进行迭代,一般不会得到更好的近似特征 向量

#### $\lambda$ 病态时的情形

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

0 D-----

25/4-16/17/11/12/20

带原点位移的QR迭

双重步位移的QR迭值

隐式QR算法

还需要指出的是,当λ比较病态时,利用反幂 法再进行迭代,一般不会得到更好的近似特征 向量

• 例

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 10^{-10} & 1 \end{array}\right)$$

其特征值 $\lambda_1 = 0.99999$ ,  $\lambda_2 = 1.00001$ , 对应的特征向量 $x_1 = (1, -10^{-5})^T$ ,  $x_2 = (1, 10^{-5})^T$ . 取 $\mu = 1$ ,  $z_0 = (0, 1)^T$ ,两次迭代结果更差

## 初始向量的选取方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

QR万没

基本迭代和收敛

实Schur标准用

T. Lessenberg 10

型重出台教协ABS

隐式QR算法

利用随机数发生子程序随机地选取向量,规范 化后作为初始向量

## 初始向量的选取方法

非对称特征值问题计

- 利用随机数发生子程序随机地选取向量, 规范 化后作为初始向量
- 半次迭代法: 首先对 $A \mu I$ 进行LU分解, 得 到 $A - \mu I = LU$ ,第一次迭代为 $LUv_1 = z_0$ . 选 $z_0 = Le$ , 其中 $e = (1, ..., 1)^T$ , 则为了求 $v_1$ 只 需求解 $Uv_1 = e$

# QR方法简介

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

今らCHUT(外(性)

带原点位移的QR迭

隐式QR算法

QR方法是自计算机问世以来矩阵计算的重大进展之一,也是目前计算一般矩阵的全部特征值和特征向量的最有效方法之一

# QR方法简介

非对称特征值问题计

QR方法

- QR方法是自计算机问世以来矩阵计算的重大进 展之一, 也是目前计算一般矩阵的全部特征值 和特征向量的最有效方法之一
- QR方法是一种迭代方法,它利用正交相似变换 把矩阵逐步约化为上三角阵或者拟上三角阵

# QR方法简介

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 隐式QR算法

- QR方法是自计算机问世以来矩阵计算的重大进展之一,也是目前计算一般矩阵的全部特征值和特征向量的最有效方法之一
- QR方法是一种迭代方法,它利用正交相似变换 把矩阵逐步约化为上三角阵或者拟上三角阵
- 基本收敛速度是二次的。当原矩阵是实对称时, 可达到三次收敛

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准先

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭化

隐式QR算法

Metropolis Algorithm for Monte Carlo

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛的

头SCHUTTATEA

\_\_\_Hessenberg16

双重步位移的OR法

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

.

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭位

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

de Arva I Christ

头SChur标准》

带原点位移的QR

双重步位移的QR法

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收

头Schur标准先

带原点位移的QR设

双重步位移的OR法

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QF

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues
- Quicksort Algorithm for Sorting

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选代 双重步位移的QR选代

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues
- Quicksort Algorithm for Sorting
- Fast Fourier Transform

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选 双重步位移的QR选

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues
- Quicksort Algorithm for Sorting
- Fast Fourier Transform
- Integer Relation Detection



非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- Metropolis Algorithm for Monte Carlo
- Simplex Method for Linear Programming
- Krylov Subspace Iteration Methods
- The Decompositional Approach to Matrix Computations
- The Fortran Optimizing Compiler
- QR Algorithm for Computing Eigenvalues
- Quicksort Algorithm for Sorting
- Fast Fourier Transform
- Integer Relation Detection
- Fast Multipole Method



非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

\_\_Hessenberg16

双重步位移的OR法

隐式QR算法

• J.G.F. Francis与V.N. Kublanovskaya在上世纪50年代独立发展出QR方法:基于QR分解

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准)

带原点位移的QRi

双重出放致的ADSE

隐式QR算法

- J.G.F. Francis与V.N. Kublanovskaya在上世纪50年代独立发展出QR方法:基于QR分解
- 经过几十年的发展,QR方法的现代版本称为隐式QR算法

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

11712

反希法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- J.G.F. Francis与V.N. Kublanovskaya在上世纪50年代独立发展出QR方法:基于QR分解
- 经过几十年的发展,QR方法的现代版本称为隐 式QR算法
- 但在隐式QR算法中没有显式地进行QR分解, 因此有人建议称之为Francis算法

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

反复进

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- J.G.F. Francis与V.N. Kublanovskaya在上世纪50年代独立发展出QR方法:基于QR分解
- 经过几十年的发展,QR方法的现代版本称为隐 式QR算法
- 但在隐式QR算法中没有显式地进行QR分解, 因此有人建议称之为Francis算法
- 在QR算法之前,曾出现过LR算法,它是基于LU分解的。LR算法是由H.
  Rutishauser在1950年代发展的

### QR方法的基本迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希法

QR万法

基本迭代和收敛

LHessenberg

双垂出台级的内部

隐式QR算法

• 对给定的 $A_0 = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,QR方法的基本迭代格式如下:

$$A_{m-1} = Q_m R_m$$
,  $(A_{m-1}$ 的QR分解) $A_m = R_m Q_m$ 

这里 $Q_m$ 为酉阵, $R_m$ 为上三角阵

### QR方法的基本迭代

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR选

常原点包移的QK达1

隐式QR算法

• 对给定的 $A_0 = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,QR方法的基本迭代格式如下:

$$A_{m-1} = Q_m R_m$$
,  $(A_{m-1}$ 的QR分解) $A_m = R_m Q_m$ 

这里 $Q_m$ 为酉阵, $R_m$ 为上三角阵

• 课本例6.4.1和其它两个例子的程序演示

## QR方法的基本迭代

非对称特征值问题计

• 对给定的 $A_0 = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,QR方法的基本迭代 格式如下:

$$A_{m-1} = Q_m R_m$$
,  $(A_{m-1}$ 的QR分解) $A_m = R_m Q_m$ 

这里 $Q_m$ 为酉阵, $R_m$ 为上三角阵

- 课本例6.4.1和其它两个例子的程序演示
- 为了下面理论分析方便, 我们暂且要求Rm的对 角元都是非负的

非对称特征值问题计 算方法

**邓建松** 

基本概念与性质

幂法

**反幂**犯

QR方法

基本迭代和收敛

------

\_\_\_\_.Hessenberg

THE PROPERTY AND ADDRESS OF THE PARTY OF THE

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$ ,所以 矩阵序列 $\{A_m\}$ 中每一个矩阵都与A相似

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

仅 希 沿

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准是

上Hessenberg化

市原思世份的QKE1

隐式QR算法

- 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$ ,所以 矩阵序列 $\{A_m\}$ 中每一个矩阵都与A相似
- 从而有 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$ ,其中 $\tilde{Q}_m = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

风希法

QR方法

基本迭代和收敛付

实Schur标准)

带原点位移的QR选

THE RESERVANCES

隐式QR算法

- 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$ ,所以 矩阵序列 $\{A_m\}$ 中每一个矩阵都与A相似
- 从而有 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$ ,其中 $\tilde{Q}_m = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$
- 即 $A ilde{Q}_m = ilde{Q}_m A_m = ilde{Q}_m Q_{m+1} R_{m+1}$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万省

基本迭代和收敛

), Dellary).

上Hessenberg(

带原点位移的QR迭位

隨式OR算

• 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$ ,所以 矩阵序列 $\{A_m\}$ 中每一个矩阵都与A相似

- 从而有 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$ ,其中 $\tilde{Q}_m = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$
- 即 $ilde{Q}_m = ilde{Q}_m A_m = ilde{Q}_m Q_{m+1} R_{m+1}$
- 定义 $\tilde{R}_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1$ , 我们有

$$\tilde{Q}_{m+1}\tilde{R}_{m+1}=A\tilde{Q}_m\tilde{R}_m$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛付

SCHUIPPI

上Hessenberg

带原点位移的QR选作

隐式QR算法

• 根据迭代格式,我们有 $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$ ,所以 矩阵序列 $\{A_m\}$ 中每一个矩阵都与A相似

- 从而有 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$ ,其中 $\tilde{Q}_m = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$
- $\mathbb{P} A \tilde{Q}_m = \tilde{Q}_m A_m = \tilde{Q}_m Q_{m+1} R_{m+1}$
- 定义 $\tilde{R}_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1$ , 我们有

$$\tilde{Q}_{m+1}\tilde{R}_{m+1}=A\tilde{Q}_m\tilde{R}_m$$

• 由此可归纳证明 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ , 这是 $A^m$ 的QR分解

### QR方法与幂法的关系

邓建松

基本概念与性质

恒壮

反复注

基本迭代和收敛

Se SCHUTTPS (E.)

T. Icascinera 10

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 记 $\tilde{R}_m$ 的元素为 $\gamma_{ij}$ ,  $\tilde{Q}_m$ 的第一列为 $q_1^{(m)}$ , 则 由 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 可得

$$A^m e_1 = \gamma_{11} q_1^{(m)}$$

## QR方法与幂法的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

汉44

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标

\_E.Hessenberg

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

• 记 $\tilde{R}_m$ 的元素为 $\gamma_{ij}$ ,  $\tilde{Q}_m$ 的第一列为 $q_1^{(m)}$ , 则由 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 可得

$$A^m e_1 = \gamma_{11} q_1^{(m)}$$

• 所以 $q_1^{(m)}$ 可以看作是对A用 $e_1$ 作初始向量的幂法 所得到的向量

### QR方法与幂法的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希拉

QR力湿

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QRi • 记 $\tilde{R}_m$ 的元素为 $\gamma_{ij}$ ,  $\tilde{Q}_m$ 的第一列为 $q_1^{(m)}$ , 则由 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 可得

$$A^m e_1 = \gamma_{11} q_1^{(m)}$$

- 所以 $q_1^{(m)}$ 可以看作是对A用 $e_1$ 作初始向量的幂法 所得到的向量
- 若A的模最大特征值 $\lambda_1$ 与其他特征值分离,那么 $q_1^{(m)}$ 将收敛到A的一个属于 $\lambda_1$ 的特征向量

### A<sub>m</sub>下三角元素趋于0

非对称特征值问题计

#### 定理

 $\partial A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的n个特征值满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

并设n阶方阵Y的第i行是A对应于 $\lambda_i$ 的左特 征向量。如果Y有LU分解,则由QR方法产 生的矩阵Am的对角线以下的元素趋向于0. 同时第i个对角元趋向于 $\lambda_i$ ,  $i=1,2,\ldots,n$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

Se SCHUTTPS (E.)

LHessenberg

THE PROPERTY AND ADDRESS OF THE PARTY OF THE

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

● A可对角化,从而A<sup>m</sup>也可对角化

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

反幂法

00-

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

野土の内容は

- A可对角化,从而A<sup>m</sup>也可对角化
- 基于条件,构造 $A^m$ 的QR分解,其中各元素 在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

夏汝

反幂法

QR方剂

基本迭代和收敛性

.l:Hessenberg

带原点位移的QR选f

隐式QR算法

● A可对角化,从而A<sup>m</sup>也可对角化

- 基于条件,构造 $A^m$ 的QR分解,其中各元素 在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知
- 利用 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 和QR分解的唯一性得到 $\tilde{Q}_m$ 和 $\tilde{R}_m$ ,其在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR力法

基本迭代和收敛性

上Hessenberg

带原点位移的QR选作

隐式QR算法

● A可对角化,从而A<sup>m</sup>也可对角化

- 基于条件,构造 $A^m$ 的QR分解,其中各元素 在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知
- 利用 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ 和QR分解的唯一性得到 $\tilde{Q}_m n \tilde{R}_m$ ,其在 $m \to \infty$ 时的极限形状已知
- 利用 $A_m = \tilde{Q}_m^* A \tilde{Q}_m$ 可证 $A_m$ 下三角元素趋向于零

#### 定理证明

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

**反幂**犯

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准并

上Hessenberg1

市原思证参的QKIZ1

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 
$$\diamondsuit X = Y^{-1}$$
,  $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ , 则 有 $A = X \Lambda Y$ 

#### 定理证明

#### 

邓建松

基本概念与性质

anne v. t.

反幂法

OR方法

#### 基本迭代和收敛

实Schur标准)

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭值

隐式QR算法

- $\diamondsuit X = Y^{-1}$ ,  $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ , 则 有 $A = X \Lambda Y$
- 设Y的LU分解为Y = LU, 其中L是单位下三角阵,U是上三角阵

#### 定理证明

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

反幂法

QR方法

#### 基本迭代和收敛

头Schur标准为

上Hessenberg

带原点位移的QR迭位

際式の関節

•  $\diamondsuit X = Y^{-1}$ ,  $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ , 则 有 $A = X \Lambda Y$ 

- 设Y的LU分解为Y = LU, 其中L是单位下三角阵,U是上三角阵
- 从而我们有

$$A^{m} = X\Lambda^{m}Y = X\Lambda^{m}LU = X(\Lambda^{m}L\Lambda^{-m})\Lambda^{m}U$$
$$= X(I + E_{m})\Lambda^{m}U$$

# 构造Am的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

**反幂**犯

QR方法

基本迭代和收敛

J. ------

上Hessenberg化

市库品担控的QNA

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 由于L是单位下三角阵,而 $|\lambda_i| < |\lambda_j|$ (i > j), 所以有 $\lim_{m \to \infty} E_m = 0$ 

## 构造Am的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方剂

基本迭代和收敛作

头3CHUF标(性)

带原点位移的QR选

77.45 (1) (1) 70.61 0.02 (1)

隐式QR算法

- 由于L是单位下三角阵,而 $|\lambda_i| < |\lambda_j|$ (i > j), 所以有 $\lim_{m \to \infty} E_m = 0$
- $\diamond X$ 的QR分解为X = QR. 由于X非奇异,所以可要求R的对角元全是正数。这样我们有

$$A^{m} = QR(I + E_{m})\Lambda^{m}U = Q(I + RE_{m}R^{-1})R\Lambda^{m}U$$

# 构造Am的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QK力沒

基本迭代和收敛

实Schur标准并

带原点位移的QR选作

隐式QR算法

• 由于L是单位下三角阵,而 $|\lambda_i| < |\lambda_j|$ (i > j),所以有 $\lim_{m \to \infty} E_m = 0$ 

•  $\phi X$ 的QR分解为X = QR. 由于X非奇异,所以可要求R的对角元全是正数。这样我们有

$$A^{m} = QR(I + E_{m})\Lambda^{m}U = Q(I + RE_{m}R^{-1})R\Lambda^{m}U$$

• 当m充分大时, $I + RE_m R^{-1}$ 非奇异,故可取它的QR分解 $I + RE_m R^{-1} = \hat{Q}_m \hat{R}_m$ ,其中 $\hat{R}_m$ 的对角元均正数

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

\_\_\_\_\_\_\_

上Hessenberg化

**市原点包参的QK**达

双里步位移的QK迭代

隐式QR算法

• 由 $E_m \to 0 (m \to \infty)$ 可知

$$\lim_{m\to\infty}\hat{Q}_m=\lim_{m\to\infty}\hat{R}_m=I$$

基本概念与性质

er S.L.

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

头Schur标准用

\_\_\_Hessenberg16

THE RESERVE AND ADDRESS OF THE P.

隐式QR算法

• 由 $E_m \to 0 (m \to \infty)$ 可知

$$\lim_{m\to\infty} \hat{Q}_m = \lim_{m\to\infty} \hat{R}_m = I$$

• 至此我们有 $A^m = (Q\hat{Q}_m)(\hat{R}_mR\Lambda^mU)$ 

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反幂**沒

QR万法

基本迭代和收敛

头Schur标准用

T. I Cascillaci & I C

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 由 $E_m \to 0 (m \to \infty)$ 可知

$$\lim_{m\to\infty}\hat{Q}_m=\lim_{m\to\infty}\hat{R}_m=I$$

- 至此我们有 $A^m = (Q\hat{Q}_m)(\hat{R}_mR\Lambda^mU)$ 
  - 这是*A*<sup>m</sup>的一个QR分解,只是对角元可能 不是正数

非对称特征值问题计

• 由 $E_m \to 0 \ (m \to \infty)$ 可知

$$\lim_{m\to\infty} \hat{Q}_m = \lim_{m\to\infty} \hat{R}_m = I$$

- 至此我们有 $A^m = (Q\hat{Q}_m)(\hat{R}_m R \Lambda^m U)$ 
  - 这是A<sup>m</sup>的一个QR分解,只是对角元可能 不是正数
- ▶ 为校正这一点,设u;;是U的对角元,定义

$$D_1 = \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \dots, \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}\right)$$



#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛付

实Schur标准用

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

#### • 这样我们就有

$$A^{m} = (Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2})(D_{2}^{-1}D_{1}^{-m}\hat{R}_{m}R\Lambda^{m}U)$$

邓建松

基本概念与性质

幂法

风裕法

QR万法

基本迭代和收敛1

头Schur标准用

III III L II WALLON

双重步位移的QR法

隐式QR算法

• 这样我们就有

$$A^{m} = (Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2})(D_{2}^{-1}D_{1}^{-m}\hat{R}_{m}R\Lambda^{m}U)$$

• 由于 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ ,所以根据QR分解的唯一性,我们有

$$\tilde{Q}_{m} = Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2}, \tilde{R}_{m} = D_{2}^{-1}D_{1}^{-m}\hat{R}_{m}R\Lambda^{m}U$$

基本概念与性质

幂法

**汉**希拉

QR万法

基本迭代和收敛1

实Schur标准为

上Hessenberg

10 MAN EL 15 H 1 M 1 M 2

m - h o o h m h

隐式QR算法

• 这样我们就有

$$A^{m} = (Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2})(D_{2}^{-1}D_{1}^{-m}\hat{R}_{m}R\Lambda^{m}U)$$

• 由于 $A^m = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m$ ,所以根据QR分解的唯一性, 我们有

$$\tilde{Q}_{m} = Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2}, \tilde{R}_{m} = D_{2}^{-1}D_{1}^{-m}\hat{R}_{m}R\Lambda^{m}U$$

所以有

$$A_{m} = \left(D_{2}^{*}(D_{1}^{*})^{m}\hat{Q}_{m}^{*}Q^{*}\right)A\left(Q\hat{Q}_{m}D_{1}^{m}D_{2}\right)$$

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

#### 基本迭代和收敛性

l- Hossenhere

市原思亚参的QKE(E)

双里步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 而注意到 $A = X\Lambda Y = X\Lambda X^{-1} = QR\Lambda R^{-1}Q^*$ 

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

#### 基本迭代和收敛

头Schur标准用

上Hessenberg化

双里步位移的QK达1

隐式QR算法

- 而注意到 $A = X\Lambda Y = X\Lambda X^{-1} = QR\Lambda R^{-1}Q^*$
- 从而有

$$A_m = D_2^* (D_1^*)^m \hat{Q}_m^* R \Lambda R^{-1} \hat{Q}_m D_1^m D_2$$



邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本选代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选代 双重步位移的QR选代

- 而注意到 $A = X \Lambda Y = X \Lambda X^{-1} = QR \Lambda R^{-1} Q^*$
- 从而有

$$A_m = D_2^* (D_1^*)^m \hat{Q}_m^* R \Lambda R^{-1} \hat{Q}_m D_1^m D_2$$

• 这里除 $\hat{Q}_m$ 外,其它矩阵都是上三角阵,而 $\hat{Q}_m \to I \ (m \to \infty)$ ,所以 $A_m$ 的下三角元趋向于零

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 隐式QR算法

- 而注意到 $A = X \Lambda Y = X \Lambda X^{-1} = QR \Lambda R^{-1} Q^*$
- 从而有

$$A_m = D_2^* (D_1^*)^m \hat{Q}_m^* R \Lambda R^{-1} \hat{Q}_m D_1^m D_2$$

- 这里除 $\hat{Q}_m$ 外,其它矩阵都是上三角阵,而 $\hat{Q}_m \to I \ (m \to \infty)$ ,所以 $A_m$ 的下三角元趋向于零
- 从而对角元趋向于A的第i个特征值

#### 只用到实数运算的QR方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反幂**犯

OR方》

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上Hessenberg化

双纸出放我的ODE

双里亚拉参的QKG

实际应用中所遇到的大量特征值问题都是关于 实矩阵的,因此我们希望设计出只涉及到实数 运算的QR迭代

#### 只用到实数运算的QR方法

非对称特征值问题计 算方法

APXE1A

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

無III 北台教的OPit

带原点位移的QR选件

隐式QR算法

- 实际应用中所遇到的大量特征值问题都是关于 实矩阵的,因此我们希望设计出只涉及到实数 运算的QR迭代
- 如此的迭代格式为

$$A_{m-1} = Q_m R_m$$

$$A_m = R_m Q_m$$

其中 $Q_m$ 是正交矩阵, $R_m$ 是上三角阵

### 只用到实数运算的QR方法

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

实Schur标准形

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭f

双重步位移的QR迭代 隐式QR算法 ● 实际应用中所遇到的大量特征值问题都是关于 实矩阵的,因此我们希望设计出只涉及到实数 运算的QR迭代

• 如此的迭代格式为

$$A_{m-1}=Q_mR_m$$

$$A_m = R_m Q_m$$

其中 $Q_m$ 是正交矩阵, $R_m$ 是上三角阵

● 但由于复共轭特征值的存在,因此我们不能期 望迭代格式产生的Am仍趋向于一个上三角阵

### 实Schur分解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

\_\_\_\_

双重步位移的OR铁在

隐式QR算法

#### 定理

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,则存在正交矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_{mm} \end{pmatrix}$$

其中 $R_{ii}$ 或者是一个实数,或者是一个具有一对复共 轭特征值的2阶方阵

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

#### QR方法

基本迭代和收敛

#### 实Schur标准形

上Hessenberg化

市原思世杪的QK达1

双重步位移的QR迭位

隐式QR算法

• 实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方》

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上Hessenberg代

.....

双里步包移的QR达

- 实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形
- 类似可证明实QR迭代格式产生的A<sub>k</sub>应逼近于A的实Schur标准形

基本概念与性质

幂法

反幂法

QIVIIIA

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR设

双重步位移的OR铁体

- 实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形
- 类似可证明实QR迭代格式产生的*A<sub>k</sub>*应逼近于*A*的实Schur标准形
- 但目前这个版本的QR方法在实用性方面没有竞争力,因为:

基本概念与性质

幂法

反幂法

961970124

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR选

隐式QR算法

• 实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形

- 类似可证明实QR迭代格式产生的*A<sub>k</sub>*应逼近于*A*的实Schur标准形
- 但目前这个版本的QR方法在实用性方面没有竞争力,因为:
  - 每次迭代的运算量太大

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR刀法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR选

双重步位移的QR选作

隐式QR算法

# 实Schur分解定理中右边的拟上三角阵称为A的实Schur标准形

- 类似可证明实QR迭代格式产生的*A<sub>k</sub>*应逼近于*A*的实Schur标准形
- 但目前这个版本的QR方法在实用性方面没有竞争力,因为:
  - 每次迭代的运算量太大
  - 收敛速度太慢



非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD-

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上Hessenberg化

IN MANAGEMENT IN THE COLUMN

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变

非对称特征值问题计 算方法

**邓建松** 

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形

Triessement 10

THE REPORT AND DE

- 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变
  - 上Hessenberg矩阵

非对称特征值问题计 算方法

**邓建松** 

基本概念与性质

泵注

反幂法

QR方法

基本迭代和收益

实Schur标准形

\_\_\_Hessenberg16

双重步位移的OR法

- 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变
  - 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法

非对称特征值问题计 算方法 <sup>邓建松</sup>

基本概念与性质

幂法

反幂法

-----

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR设

双重步位移的QR迭

- 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变
  - 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法
- 只采用实数运算,处理共轭复特征值情况

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR迭

双重步位移的QR迭f

- 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变
  - 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法
- 只采用实数运算,处理共轭复特征值情况
  - 双重步位移

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万没

基本迭代和收敛作

实Schur标准形

带原点位移的QR迭

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变

- 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法
- 只采用实数运算,处理共轭复特征值情况
  - 双重步位移
- 实用算法: 隐式QR算法

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

带原点位移的QR迭化

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

● 把A相似到一种特殊矩阵,其QR分解计算简单, 而且对QR迭代仍保持矩阵的特殊性不变

- 上Hessenberg矩阵
- 引用原点位移方法
- 只采用实数运算,处理共轭复特征值情况
  - 双重步位移
- 实用算法: 隐式QR算法
  - 平均两次QR迭代就可以分离出一个特征值或 $2 \times 2$ 于矩阵,计算量为 $Q(n^3)$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR TO

基本迭代和收敛

头Schur标准

上Hessenberg化

.....

双重步位移的QR选位

隐式QR算法

• 为了减少每次迭代的运算量,我们先把原矩 阵*A*经相似变换约化为一个准上三角阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标

上Hessenberg化

常原点包移的QK达1

THE REPORT WAS NOT BE

- 为了减少每次迭代的运算量,我们先把原矩阵A经相似变换约化为一个准上三角阵
- 为此,我们先看一下基于Householder变换的相似变换可以得到什么

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

- 为了减少每次迭代的运算量,我们先把原矩阵A经相似变换约化为一个准上三角阵
- 为此,我们先看一下基于Householder变换的相似变换可以得到什么
- 第一步我们自然选取Householder变换 $H_1$ ,使得 $H_1A$ 的第一列有尽可能多的零元素

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方剂

基本迭代和收敛 实Schur标准形

上Hessenberg化 带原点位移的QR选作

- 为了减少每次迭代的运算量,我们先把原矩阵A经相似变换约化为一个准上三角阵
- 为此,我们先看一下基于Householder变换的相似变换可以得到什么
- 第一步我们自然选取Householder变换 $H_1$ , 使 得 $H_1A$ 的第一列有尽可能多的零元素
- 最多可以得到n-1个零。这能做到么?

#### 相似变换的妥协

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

市原思型移即QNOOT

双里步位移的QK达作

隐式QR算法

• 在对 $A = (a_{ij})$ 左乘 $H_1$ 进行行变换之后,还需要对A右乘 $H_1$ 进行列变换

#### 相似变换的妥协

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

巨壮

反幂法

0D+

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR选行

隐式QR算法

• 在对 $A = (a_{ij})$ 左乘 $H_1$ 进行行变换之后,还需要对A右乘 $H_1$ 进行列变换

• 为了保证已在 $H_1A$ 中的第一列所出现的零元素 不至于因右乘 $H_1$ 被破坏,我们选取 $H_1$ 具有如下 形式:

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

# $\tilde{H}_1$ 的构造

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

\_\_\_\_

反复注

OR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

\_\_\_\_\_

市界無理物的QNA

隐式QR算法

• 如此我们有

$$H_1AH_1=\left(egin{array}{cc} a_{11} & a_2^T ilde{H}_1\ ilde{H}_1a_1 & ilde{H}_1A_{22} ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

其中
$$a_1^T = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}),$$
  
 $a_2^T = (a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}), A_{22}$ 是A右下角的 $n-1$ 阶  
主子阵

# $\tilde{H}_1$ 的构造

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

复注

反氯法

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 如此我们有

$$H_1AH_1=\left(egin{array}{ccc} a_{11} & a_2^T ilde{H}_1\ ilde{H}_1a_1 & ilde{H}_1A_{22} ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

其中
$$a_1^T = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}),$$
  
 $a_2^T = (a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}), A_{22}$ 是A右下角的 $n-1$ 阶  
主子阵

• 所以Householder变换 $\tilde{H}_1$ 的最佳选择应该使得 $\tilde{H}_1a_1 = pe_1$ 

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准

上Hessenberg化

市原点包含的QKUST

双重步位移的QR选作

隐式QR算法

• 如此 $H_1AH_1$ 的第一列中除开始两个元素外,余下的n-2个元素为零

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD→:

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭f

型纸比价数的QD选择

隐式QR算法

- 如此 $H_1AH_1$ 的第一列中除开始两个元素外,余下的n-2个元素为零
- 类似对后面各列进行处理,我们可以找 到n-2个Householder变换 $H_1, \ldots, H_{n-2}$ 使得

$$H_{n-2}\cdots H_1AH_1\cdots H_{n-2}=H$$

其中 $H = (h_{ij})$ 满足 $h_{ij} = 0$ , i > j + 1, 这样的矩阵 称为上Hessenberg矩阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

00-

基本迭代和收

5¢5chulyyi

上Hessenberg化

双里步位移的QR迭代

隐式QR算法

#### • 现在令

$$Q_0 = H_1 H_2 \cdots H_{n-2}$$

则有

$$Q_0^T A Q_0 = H$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反希沿

QR万没

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

市原点包移的QK达

双重步位移的QR迭值

隐式QR算法

现在令

$$Q_0 = H_1 H_2 \cdots H_{n-2}$$

则有

$$Q_0^T A Q_0 = H$$

• 一般称如此分解式为A的上Hessenberg分解

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 现在令

$$Q_0 = H_1 H_2 \cdots H_{n-2}$$

则有

$$Q_0^T A Q_0 = H$$

- 一般称如此分解式为A的上Hessenberg分解
- 算法运算量为 $10n^3/3$ ; 如果要记录Q, 还需要增加运算量 $4n^3/3$

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

现在令

$$Q_0 = H_1 H_2 \cdots H_{n-2}$$

则有

$$Q_0^T A Q_0 = H$$

- 一般称如此分解式为A的上Hessenberg分解
- 算法运算量为 $10n^3/3$ ; 如果要记录Q, 还需要增加运算量 $4n^3/3$
- 算法6.4.1的程序演示

#### 误差分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂剂

QR万浪

基本达代和収敛1

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

THE PROPERTY CO. LEWIS CO. LANSING S. CO. L.

隐式QR算法

• 可以证明:如此算法得到的上Hessenberg矩阵 $\hat{H}$ 满足

$$\hat{H} = Q^T (A + E) Q$$

其中Q是正交矩阵, $||E||_F \leqslant cn^2 ||A||_F \mathbf{u}$ 

#### 误差分析

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛f 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭f 双重步位移的QR迭f

隐式QR算法

• 可以证明:如此算法得到的上Hessenberg矩阵 $\hat{H}$ 满足

$$\hat{H} = Q^T (A + E) Q$$

其中Q是正交矩阵, $\|E\|_F \leqslant cn^2 \|A\|_F \mathbf{u}$ 

• 我们也可以采用Givens变换(运算量增加)或者列 主元的Gauss消去法将A约化为上Hessenberg矩 阵(运算量少,但稳定性较差)

### 唯一性定理

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭f

隐式QR算法

#### 定理

设A有如下两个上Hessenberg分解:

$$U^TAU = H$$
,  $V^TAV = G$ 

其中 $U = (u_1, \ldots, u_n)$ 和 $V = (v_1, \ldots, v_n)$ 是n阶正交矩阵, $H = (h_{ij})$ 和 $G = (g_{ij})$ 是上Hessenberg矩阵。 若 $u_1 = v_1$ ,而且H的次对角元 $h_{i+1,i}$ 均不为零,则存在对角元均为1或-1的对角阵D,使得U = VD,H = DGD

#### 定理证明

非对称特征值问题计 算方法 <sup>邓建松</sup>

基本概念与性质

复注

反幂法

OR方》

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

要乗出か扱めの間

隐式QR算法

#### 采用归纳法证明

• 假定对某个m已证 $u_j = \varepsilon_j v_j$ , j = 1, ..., m, 其 中 $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_j = 1$ 或-1, j = 2, ..., m. 下面证明 存在 $\varepsilon_{m+1} = 1$ 或-1使得 $u_{m+1} = \varepsilon_{m+1} v_{m+1}$ 

#### 定理证明

#### 非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛付

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

隐式QR算法

采用归纳法证明

- 假定对某个m已证 $u_j = \varepsilon_j v_j$ , j = 1, ..., m, 其 中 $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_j = 1$ 或-1, j = 2, ..., m. 下面证明 存在 $\varepsilon_{m+1} = 1$ 或-1使得 $u_{m+1} = \varepsilon_{m+1} v_{m+1}$
- 根据上Hessenberg分解式,我们有

$$AU = UH$$
,  $AV = VG$ 

## U, V的关系反应到H, G上

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

renote

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

\_\_\_\_

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

● 比例两个矩阵等式的第*m*列,我们有

$$Au_m = h_{1m}u_1 + \cdots + h_{mm}u_m + h_{m+1,m}u_{m+1}$$
  
 $Av_m = g_{1m}v_1 + \cdots + g_{mm}v_m + g_{m+1,m}v_{m+1}$ 

# U,V的关系反应到H,G上

非对称特征值问题计

上Hessenberg化

● 比例两个矩阵等式的第*m*列,我们有

$$Au_m = h_{1m}u_1 + \cdots + h_{mm}u_m + h_{m+1,m}u_{m+1}$$
  
 $Av_m = g_{1m}v_1 + \cdots + g_{mm}v_m + g_{m+1,m}v_{m+1}$ 

● 在上式两边分别左乘*u;* 和*v;* ,可得

$$h_{im} = u_i^T A u_m, \quad g_{im} = v_i^T A v_m, i = 1, \dots, m$$

# U,V的关系反应到H,G上

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

(E)()

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

带原点位移的QR选作

隐式QR算法

● 比例两个矩阵等式的第*m*列,我们有

$$Au_m = h_{1m}u_1 + \cdots + h_{mm}u_m + h_{m+1,m}u_{m+1}$$
  
 $Av_m = g_{1m}v_1 + \cdots + g_{mm}v_m + g_{m+1,m}v_{m+1}$ 

• 在上式两边分别左乘 $u_i^T$ 和 $v_i^T$ ,可得

$$h_{im} = u_i^T A u_m, \quad g_{im} = v_i^T A v_m, i = 1, \dots, m$$

• 根据归纳假设,可得 $h_{im} = \varepsilon_i \varepsilon_m g_{im}, i = 1, ..., m$ 

### 第m+1列的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

·=\*:>4-

巨恒计

00-20

基本迭代和收敛

实Schur标

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

#### • 从而我们有

$$h_{m+1,m}u_{m+1} = \varepsilon_m(Av_m - \varepsilon_1^2 g_{1m}v_1 - \dots - \varepsilon_m^2 g_{mm}v_m)$$
  
=  $\varepsilon_m(Av_m - g_{1m}v_1 - \dots - g_{mm}v_m)$   
=  $\varepsilon_m g_{m+1,m}v_{m+1}$ 

### 第m+1列的关系

非对称特征值问题计

上Hessenberg化

• 从而我们有

$$h_{m+1,m}u_{m+1} = \varepsilon_m(Av_m - \varepsilon_1^2 g_{1m}v_1 - \dots - \varepsilon_m^2 g_{mm}v_m)$$
  
=  $\varepsilon_m(Av_m - g_{1m}v_1 - \dots - g_{mm}v_m)$   
=  $\varepsilon_m g_{m+1,m}v_{m+1}$ 

• 由此即得 $|h_{m+1,m}| = |g_{m+1,m}|$ 

### 第m+1列的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

官社

反复注

OR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形

上Hessenberg化

双重步位移的OR进代

隐式QR算法

• 从而我们有

$$h_{m+1,m}u_{m+1} = \varepsilon_m(Av_m - \varepsilon_1^2 g_{1m}v_1 - \dots - \varepsilon_m^2 g_{mm}v_m)$$
  
=  $\varepsilon_m(Av_m - g_{1m}v_1 - \dots - g_{mm}v_m)$   
=  $\varepsilon_m g_{m+1,m}v_{m+1}$ 

- 由此即得 $|h_{m+1,m}| = |g_{m+1,m}|$
- 而 $h_{m+1,m} \neq 0$ ,所以我们有 $u_{m+1} = \varepsilon_{m+1}v_{m+1}$ ,其中 $\varepsilon_{m+1} = 1$ 或-1

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

\_Hessenberg1

.....

双里步位移的QR达作

隐式QR算法

● 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收:

实Schur标

上Hessenberg化

IN NY WEST AND MARKET OF LA

双里步位移的QR达1

隐式QR算法

● 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

● 所以最终的变换矩阵也具有形式

$$H = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{array}\right)$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

. . . .

基本迭代和收益

实Schur标

上Hessenberg化

.....

隐式QR算法

● 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

● 所以最终的变换矩阵也具有形式

$$H = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{array}\right)$$

● 实际上我们可以把H的第一列取为任意单位向量

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**汉**春春

Q. O. J. IZA

25/44/21/40/00

上Hessenberg化

带原点位移的QR选值

市际無理物的QNGT

隐式QR算法

• 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

● 所以最终的变换矩阵也具有形式

$$H = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{array}\right)$$

- 实际上我们可以把H的第一列取为任意单位向量
  - 根据H的第一列确定一个正交阵Q

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收益

实Schur标

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代

隐式QR算法

● 根据前面给出的分解方法,我们知道

$$H_1=\left(egin{array}{cc} 1 & 0 \ 0 & ilde{H}_1 \end{array}
ight)$$

● 所以最终的变换矩阵也具有形式

$$H = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{array}\right)$$

- 实际上我们可以把H的第一列取为任意单位向量
  - 根据H的第一列确定一个正交阵Q
  - 那么对 $Q^TAQ$ 进行前述上Hessenberg化,设变换矩阵为 $\tilde{H}$ ,  $\tilde{H}$ 具有上述形式,那么 $H=Q\tilde{H}$  的第一列就是所指定的单位向量



非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

上Hessenberg化

\_\_\_\_\_

THE REPORT AND PARTY.

WIED INTO HARMAN

隐式QR算法

一个上Hessenberg矩阵的下次对角元均不为零, 则称为不可约的

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

\_\_ ,,,

基本迭代和收

实Schur标

上Hessenberg化

常原点包移的QK达1

野土の政策社

- 一个上Hessenberg矩阵的下次对角元均不为零, 则称为不可约的
- 之所以如此定义,如果有一个下次对角元为零, 那么可以分别考虑上下子阵的特征值问题

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性品

幂法

反幂法

OD±S

基本迭代和收敛f 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

- 一个上Hessenberg矩阵的下次对角元均不为零, 则称为不可约的
- 之所以如此定义,如果有一个下次对角元为零, 那么可以分别考虑上下子阵的特征值问题
- 唯一性定理表明:如果 $Q^TAQ = H$ 为不可约的上Hessenberg矩阵,则Q和H在相差一个正负号的意义下完全由Q的第一列确定

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方》

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 ● 一个上Hessenberg矩阵的下次对角元均不为零, 则称为不可约的

- 之所以如此定义,如果有一个下次对角元为零, 那么可以分别考虑上下子阵的特征值问题
- 唯一性定理表明:如果 $Q^TAQ = H$ 为不可约的上Hessenberg矩阵,则Q和H在相差一个正负号的意义下完全由Q的第一列确定
- 这是得以建立隐式QR方法的关键所在

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

头SCHUr标准用

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

双重步位移的QR选作

隐式QR算法

• 假设 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是上Hessenberg矩阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OPTO

基本迭代和收

上Hessenberg化

\_ ....

双垂此片我的AD社

隐式QR算法

- 假设 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是上Hessenberg矩阵
- H的QR分解可以通过n-1个平面旋转变换完成

$$P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12}H=R$$

非对称特征值问题计 算方法

小姓仏

基本概念与性质

幂法

**汉**希特

OR方》

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR迭f

隐式QR算法

- 假设 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是上Hessenberg矩阵
- H的QR分解可以通过n-1个平面旋转变换完成

$$P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12}H=R$$

•  $\Diamond Q = (P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12})^T$ ,则H = QR就是H的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭 双重步位移的QR迭

- 假设 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是上Hessenberg矩阵
- $\bullet$  H的QR分解可以通过n-1个平面旋转变换完成

$$P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12}H=R$$

- $\Diamond Q = (P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}\cdots P_{12})^T$ ,则H = QR就是H的QR分解
- 为了完成一次QR迭代,还需要计算 $\tilde{H} = RQ = RP_{12}^T P_{23}^T \cdots P_{n-1}^T$ ,

#### RQ的计算结果

非对称特征值问题计

上Hessenberg化

● 由于*P*<sub>1</sub>,是(1,2)坐标平面内的旋转变换,因 此 $RP_{1}^{T}$ 仅有前两列与R不同,而 $RP_{1}^{T}$ 的前两列 是由R的前两列的线性组合构成,R为上三角 阵,所以RPT的第一个下次对角元非零

#### RQ的计算结果

非对称特征值问题计 算方法

**ル**建松

基本概念与性质

泵注

反幂注

QR方剂

基本迭代和收敛性 实Schur标准形

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

隐式QR算法

• 由于 $P_{12}$ 是(1,2)坐标平面内的旋转变换,因此 $RP_{12}^T$ 仅有前两列与R不同,而 $RP_{12}^T$ 的前两列是由R的前两列的线性组合构成,R为上三角阵,所以 $RP_{12}^T$ 的第一个下次对角元非零

• 因此RQ仍是一个上Hessenberg矩阵

#### RQ的计算结果

非对称特征值问题计 算方法

**沙**建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

\_\_\_\_

基本迭代和收敛性 牢Schur标准形

上Hessenberg化

带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代 • 由于 $P_{12}$ 是(1,2)坐标平面内的旋转变换,因此 $RP_{12}^T$ 仅有前两列与R不同,而 $RP_{12}^T$ 的前两列是由R的前两列的线性组合构成,R为上三角阵,所以 $RP_{12}^T$ 的第一个下次对角元非零

- 因此RQ仍是一个上Hessenberg矩阵
- 上Hessenberg矩阵经一次QR迭代后还是 上Hessenberg矩阵,计算运算量为 $O(n^2)$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方》

基本迭代和收敛

实Schur柯

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭位

隐式QR算法

 从一个不可约上Hessenberg矩阵H<sub>k</sub>出发,经过 一次QR迭代,得到新的上Hessenberg矩阵H<sub>k+1</sub>,

$$H_{k+1} = Q_k^T H_k Q_k$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QK力法

25年A51人作的XX

......

上Hessenberg化

带原点位移的QR选

隐式QR算法

从一个不可约上Hessenberg矩阵H<sub>k</sub>出发,经过 一次QR迭代,得到新的上Hessenberg矩阵H<sub>k+1</sub>,

$$H_{k+1} = Q_k^T H_k Q_k$$

• 这里的QR迭代实际上就是连续n-1次平面旋转操作,不同于标准的QR分解

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QIONIA

基本迭代和収敛的

上Hessenberg化 带原点位移的QRi

带原点位移的QR选作 双重步位移的QR选作

隐式QR算法

• 从一个不可约上Hessenberg矩阵 $H_k$ 出发,经过一次QR迭代,得到新的上Hessenberg矩阵 $H_{k+1}$ ,

$$H_{k+1} = Q_k^T H_k Q_k$$

- 这里的QR迭代实际上就是连续*n* 1次平面旋转操作,不同于标准的QR分解
- 回忆: 上Hessenberg矩阵分解的唯一性

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

基本达代和収敛1 实Schur标准形

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭位

隐式QR算法

• 从一个不可约上Hessenberg矩阵 $H_k$ 出发,经过一次QR迭代,得到新的上Hessenberg矩阵 $H_{k+1}$ ,

$$H_{k+1} = Q_k^T H_k Q_k$$

- 这里的QR迭代实际上就是连续*n* 1次平面旋转操作,不同于标准的QR分解
- 回忆: 上Hessenberg矩阵分解的唯一性
- 知道了 $Q_k$ 的第一列,就几乎完全确定了整个矩阵 $Q_k$



## 加速收敛:原点位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

ere N.L.

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上Hessenberg(

市原点包含的QK达包

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 基本的QR方法是线性收敛的

### 加速收敛:原点位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原点位移的QR迭代

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

- 基本的QR方法是线性收敛的
- 为了加速收敛,我们引进原点位移

### 加速收敛:原点位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

夏注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

X3011414111111

上Hessenberg

th MANY ESTABLISHED

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 基本的QR方法是线性收敛的

- 为了加速收敛,我们引进原点位移
- 带原点位移的QR迭代格式如下:

$$H_m - \mu_m I = Q_m R_m$$

$$H_{m+1} = R_m Q_m + \mu_m I$$

其中 $H_0 = H$ 为给定的上Hessenberg矩阵

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg

\_\_\_\_\_\_

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

•  $H_m$ 为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}$ ,  $h_{nn}^{(m)}$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

90.000

deriva i viintaaa

带原占位移的O

THE RESERVE AND ADDRESS OF THE

隐式QR算法

- $H_m$ 为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}$ ,  $h_{nn}^{(m)}$
- 若QR算法收敛,则当m充分大时 $h_{n,n-1}^{(m)}$ 应很小,因而 $h_{nn}^{(m)}$ 接近于H的一个特征值

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

带原点位移的QR迭

隐式QR算法

- $H_m$ 为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}$ ,  $h_{nn}^{(m)}$
- 若QR算法收敛,则当m充分大时 $h_{n,n-1}^{(m)}$ 应很小,因而 $h_{nn}^{(m)}$ 接近于H的一个特征值
- 因此我们可以取 $\mu_m = h_{nn}^{(m)}$

非对称特征值问题计

- *H*<sub>m</sub>为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两 个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}, h_{nn}^{(m)}$
- 若QR算法收敛,则当m充分大时 $h_{n,n-1}^{(m)}$ 应很小, 因而 $h_{nn}^{(m)}$ 接近于H的一个特征值
- 因此我们可以取 $\mu_m = h_{nn}^{(m)}$
- 可以证明: 若 $h_{n,n-1}^{(m)} = \varepsilon$ 很小,则一次带原点位 移的QR迭代后, $h_{n,n-1}^{(m+1)} = O(\varepsilon^2)$ ,即收敛速度从 线性收敛加速到二次收敛

非对称特征值问题计

- *H*<sub>m</sub>为上Hessenberg矩阵,故其最后一行仅有两 个非零元素 $h_{n,n-1}^{(m)}, h_{nn}^{(m)}$
- 若QR算法收敛,则当m充分大时 $h_{n,n-1}^{(m)}$ 应很小, 因而 $h_{nn}^{(m)}$ 接近于H的一个特征值
- 因此我们可以取 $\mu_m = h_{nn}^{(m)}$
- 可以证明: 若 $h_{n,n-1}^{(m)} = \varepsilon$ 很小,则一次带原点位 移的QR迭代后, $h_{n,n-1}^{(m+1)} = O(\varepsilon^2)$ ,即收敛速度从 线性收敛加速到二次收敛
- 课本例6.4.2的程序演示

#### 双重步位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准是

\_\_Hessenberg16

THE IN PART MADE

双里步位移的QR选

隐式QR算法

单步原点位移的QR迭代具有严重的缺点: 若A具有复共轭特值,则实位移一般并不能起 到加速的作用

### 双重步位移

非对称特征值问题计 算方法

de la lore A. L. Lal er

\_\_\_\_\_

占有社

0D+34

某本这代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR选代 双重步位移的QR选代

- 单步原点位移的QR迭代具有严重的缺点:若A具有复共轭特值,则实位移一般并不能起到加速的作用
- 为此,我们引入<mark>双重步位移的QR迭代</mark>,基本想 法是把两步带原点位移的QR迭代合并为一步, 以避免复数运算

### 迭代格式

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂沒

**以** 称 7

QR万没

基本迭代和收敛

实Schur标准用

带原点位移的QR选

双重步位移的QR设

隐式QR算法

● 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 考察如下的迭代格式:

$$H_1 = Q_0^T A Q_0$$
 上Hessenberg分解  $H_k - \mu_k I = Q_k R_k$  QR分解  $H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I$   $k = 1, 2, ...$ 

### 迭代格式

非对称特征值问题计

● 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 考察如下的迭代格式:

$$H_1 = Q_0^\mathsf{T} A Q_0$$
 上Hessenberg分解  $H_k - \mu_k I = Q_k R_k$  QR分解  $H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I$   $k = 1, 2, \ldots$ 

• 假设迭代格式中出现的上Hessenberg矩阵都是 不可约的。否则,可分别对沿对角线的上下两 个子矩阵进行QR迭代

# 复共轭特征值的处理

非对称特征值问题计 算方法

7PXE14

基本概念与性质

-----

. . . . .

.....

Aug a leasters

letteres been

带原点位移的QF

双重步位移的QR选

隐式QR算法

● 假设Hk的尾部2×2子矩阵

$$S_k = \begin{pmatrix} h_{mm}^{(k)} & h_{mn}^{(k)} \\ h_{nm}^{(k)} & h_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad m = n - 1$$

有一对复共轭特征值 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 。这时我们不能期望 $h_m^{(k)}$ 最终收敛于A的某个特征值,而且此时取 $\mu_k = h_m^{(k)}$ 也完全没有加速效果

# 复共轭特征值的处理

非对称特征值问题计算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

实Schur标准形

带原点位移的QRi

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

● 假设Hk的尾部2×2子矩阵

$$S_k = \begin{pmatrix} h_{mm}^{(k)} & h_{mn}^{(k)} \\ h_{nm}^{(k)} & h_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad m = n - 1$$

有一对复共轭特征值 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 。这时我们不能期望 $h_{nn}^{(k)}$ 最终收敛于A的某个特征值,而且此时取 $\mu_k = h_{nn}^{(k)}$ 也完全没有加速效果

为了加速,我们应当取γ<sub>1</sub>或γ<sub>2</sub>作位移,但这样就会涉及到复数运算

## 连续两次位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

**反**奉沿

QR万省

今らCHUT(外(性)

悪暗まな数約00%

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

 为了避免复数运算,我们计划用<sub>γ1</sub>和<sub>γ2</sub>连续作 两次位移,即进行如下迭代:

$$H_k - \gamma_1 I = U_1 R_1, \qquad G_1 = R_1 U_1 + \gamma_1 I$$
  
 $G_1 - \gamma_2 I = U_2 R_2, \qquad H_{k+1} = R_2 U_2 + \gamma_2 I$ 

## 连续两次位移

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QK力法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 **双重步位移的QR迭代**  • 为了避免复数运算,我们计划用 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 连续作两次位移,即进行如下迭代:

$$H_k - \gamma_1 I = U_1 R_1, \qquad G_1 = R_1 U_1 + \gamma_1 I$$
  
 $G_1 - \gamma_2 I = U_2 R_2, \qquad H_{k+1} = R_2 U_2 + \gamma_2 I$ 

• 由此格式,记 $M = (H_k - \gamma_1 I)(H_k - \gamma_2 I),$   $Q = U_1 U_2, R = R_2 R_1, 则$  $M = QR, H_{k+1} = Q^* H_k Q$ 

# 验算

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂注

0D+

基本法代和的

实Schur标准用

上Hessenberg

----

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

$$QR = U_1 U_2 R_2 R_1 = U_1 (G_1 - \gamma_2 I) R_1$$

$$= U_1 (R_1 U_1 + (\gamma_1 - \gamma_2) I) R_1$$

$$= U_1 R_1 (U_1 R_1 + (\gamma_1 - \gamma_2) I)$$

$$= (H_k - \gamma_1 I) (H_k - \gamma_2 I) = M$$

$$U_1 G_1 = U_1 (R_1 U_1 + \gamma_1 I) = (U_1 R_1 + \gamma_1 I) U_1 = H_k U_1$$

$$U_2 H_{k+1} = G_1 U_2$$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准为

\_\_\_\_\_

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 根据*M*的定义,我们有

$$M=H_k^2-sH_k+tI$$
  
其中 $s=\gamma_1+\gamma_2=h_{mm}^{(k)}+h_{nn}^{(k)}\in\mathbb{R}$ ,  
 $t=\gamma_1\gamma_2=\det S_k\in\mathbb{R}$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

QR力法

基本迭代和收敛

头 SCHUTTOTE //

上Hessenberg/

双里步位移的QK达

隐式QR算法

• 根据*M*的定义,我们有

$$M=H_k^2-sH_k+tI$$
  
其中 $s=\gamma_1+\gamma_2=h_{mm}^{(k)}+h_{nn}^{(k)}\in\mathbb{R},$   
 $t=\gamma_1\gamma_2=\det S_k\in\mathbb{R}$ 

● 所以M是实矩阵

非对称特征值问题计

根据M的定义,我们有

$$M = H_k^2 - sH_k + tI$$
  
其中 $s = \gamma_1 + \gamma_2 = h_{mm}^{(k)} + h_{nn}^{(k)} \in \mathbb{R}$ ,  
 $t = \gamma_1 \gamma_2 = \det S_k \in \mathbb{R}$ 

- 所以M是实矩阵
- 根据QR分解的性质,即使 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 均不是 $H_k$ 的特 征值,并假定在计算过程中R<sub>1</sub>和R<sub>2</sub>的对角元均 取为正数,那么Q也是实矩阵

非对称特征值问题计 算方法 <sup>邓建松</sup>

基本概念与性质

幂法

**反**奉法

QR力法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 帝原点位移的QRi • 根据*M*的定义,我们有

$$M = H_k^2 - sH_k + tI$$
  
其中 $s = \gamma_1 + \gamma_2 = h_{mm}^{(k)} + h_{nn}^{(k)} \in \mathbb{R}$ ,  
 $t = \gamma_1 \gamma_2 = \det S_k \in \mathbb{R}$ 

- 所以M是实矩阵
- 根据QR分解的性质,即使 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 均不是 $H_k$ 的特征值,并假定在计算过程中 $R_1$ 和 $R_2$ 的对角元均取为正数,那么Q也是实矩阵
- 所以 $H_{k+1}$ 也是实矩阵



### 初步结论

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OB÷

基本迭代和收敛

实Schur标准用

L'Hessenberg16

双里步位移的QK以

隐式QR算法

• 在没有误差的情况下,用 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 连续作两次位移进行QR迭代产生的 $H_{k+1}$ 仍是实的上Hessenberg矩阵

### 初步结论

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

夏注

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

Literacinocia

双里步位移的QR以

隐式QR算法

- 在没有误差的情况下,用 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 连续作两次位移进行QR迭代产生的 $H_{k+1}$ 仍是实的上Hessenberg矩阵
- 但是,实际计算时,由于舍入误差的影响,如此得到的 $H_{k+1}$ 一般并不是实矩阵

### 初步结论

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反复注

OR方法

基本迭代和收敛f 实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR选代 双重步位移的QR选代

隐式QR算法

- 在没有误差的情况下,用 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 连续作两次位移进行QR迭代产生的 $H_{k+1}$ 仍是实的上Hessenberg矩阵
- 但是,实际计算时,由于舍入误差的影响,如此得到的 $H_{k+1}$ 一般并不是实矩阵
- 为了确保得到的 $H_{k+1}$ 仍是实矩阵,我们对迭代格式进行修改

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

er S.L.

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上Hessenberg化

....

• 修改后的迭代格式如下:

① 计算 $M = H_k^2 - sH_k + tI$ 

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准用

上Hessenberg化

\_\_\_\_\_

双里步位移的QR达

隐式QR算法

• 修改后的迭代格式如下:

① 计算 $M = H_k^2 - sH_k + tI$ 

② 计算M的QR分解M = QR;

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上Hessenberg化

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

- ① 计算 $M = H_k^2 sH_k + tI$
- ② 计算M的QR分解M = QR;
- 计算 $H_{k+1} = Q^T H_k Q$

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

SCOCIUI (WIE)

\_\_\_\_

THE REPORT OF

野土の内容社

- ① 计算 $M = H_k^2 sH_k + tI$
- ② 计算M的QR分解M = QR;
- 计算 $H_{k+1} = Q^T H_k Q$
- M的下带宽是2,即次对角元和次次对角元非零

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形

上Hessenberg

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

- ① 计算 $M = H_k^2 sH_k + tI$
- ② 计算M的QR分解M = QR;
- M的下带宽是2,即次对角元和次次对角元非零
- 如此计算第一步形成M的运算量就是O(n³)

# 降低运算量的想法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

实Schur标准形

上Hessenberg化

\_\_\_\_\_

从里少世级的QNA

隐式QR算法

• 修改后的迭代格式运算量比较大

### 降低运算量的想法

非对称特征值问题计 算方法

7 PETA

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

bulanan

THE IL PARMAN

双重步位移的QR选

隐式QR算法

- 修改后的迭代格式运算量比较大
- 想法:已有结论告诉我们,无论采用何种方法 求正交矩阵 $\tilde{Q}$ 使得 $\tilde{Q}^T H_k \tilde{Q} = \tilde{H}_{k+1}$ 为 上Hessenberg矩阵,只要保证 $\tilde{Q}$ 的第一列与Q的 第一列相同,则 $\tilde{H}_{k+1}$ 就与 $H_{k+1}$ 本质上是一样的

### 降低运算量的想法

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR力法

基本迭代和收敛

L'Hessenberg

带原点位移的QR选值

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

• 修改后的迭代格式运算量比较大

- 想法:已有结论告诉我们,无论采用何种方法 求正交矩阵 $\tilde{Q}$ 使得 $\tilde{Q}^T H_k \tilde{Q} = \tilde{H}_{k+1}$ 为 上Hessenberg矩阵,只要保证 $\tilde{Q}$ 的第一列与Q的 第一列相同,则 $\tilde{H}_{k+1}$ 就与 $H_{k+1}$ 本质上是一样的
- 而这要求 $H_{k+1}$ 是不可约的

## $H_k$ 与 $H_{k+1}$ 不可约性的关系

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

letterere been

型纸出台数的OPS

隐式QR算法

#### 定理

### 定理证明

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂?

QR方法

基本迭代和收敛

Se SCHUTTPS (E.)

上Hessenberg代

双重步位移的QR迭化

隐式QR算法

### 采用反证法

• 记 $H_{k+1} = (\tilde{h}_{ij})$ ,并假定存在 $r (1 \leq r \leq n-1)$ 使得 $\tilde{h}_{r+1,r} = 0$ ,而 $\tilde{h}_{i+1,i} \neq 0 (i = 1, 2, ..., r-1)$ 

### 定理证明

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

### 采用反证法

- 比较等式 $H_kQ = QH_{k+1}$ 两边矩阵的前r列,我们有

$$H_k q_j = \tilde{h}_{1j} q_1 + \dots + \tilde{h}_{jj} q_j + \tilde{h}_{j+1,j} q_{j+1},$$
  $j = 1, \dots, r-1$   $H_k q_r = \tilde{h}_{1r} q_1 + \tilde{h}_{2r} q_2 + \dots + \tilde{h}_{rr} q_r$ 

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性

实Schur标准形

\_\_Hessenberg16

THE PROPERTY OF THE PROPERTY OF THE

双里步包移的QR达

隐式QR算法

• 由此考虑r+1个向量 $q_1, H_k q_1, \ldots, H'_k q_1$ ,它们均可以表示为 $q_1, \ldots, q_r$ 的线性组合,因此存在不全为零的 $\alpha_i$ ,

$$\left(\sum_{i=0}^r \alpha_i H_k^i\right) q_1 = 0$$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 等Schur标准形

l-Hossenherm(I

带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

• 由此考虑r+1个向量 $q_1, H_k q_1, \ldots, H'_k q_1$ ,它们均可以表示为 $q_1, \ldots, q_r$ 的线性组合,因此存在不全为零的 $\alpha_i$ ,

$$\left(\sum_{i=0}^r \alpha_i H_k^i\right) q_1 = 0$$

• 注意到 $q_r$ 只出现在 $H_k^{r-1}q_1$ 和 $H_k^rq_1$ 中,因此必有 $\alpha_r \neq 0$ : 否则所有系数都是零

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR万法

实Schur标准先

双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

• 由M = QR可得 $q_1 = \frac{1}{r_{11}} Me_1$ . 将其代入到上式,并注意M也是 $H_k$ 的多项式,我们有My = 0, 其中

$$y = \left(\sum_{i=0}^{r} \alpha_i H_k^i\right) e_1$$

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代

隐式QR算法

• 由M = QR可得 $q_1 = \frac{1}{r_{11}} Me_1$ . 将其代入到上式,并注意M也是 $H_k$ 的多项式,我们有My = 0, 其中

$$y = \left(\sum_{i=0}^r \alpha_i H_k^i\right) e_1$$

• 记 $H_k = (h_{ij})$ , 直接计算可知y的第r + 1个分量为

$$\alpha_r h_{21} h_{32} \cdots h_{r+1,r} \neq 0$$

这就是说方程组My = 0有非零解,这与 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 均非 $H_k$ 的特征值,从而M非奇异矛盾



# 实现从 $H_k$ 到 $H_{k+1}$ 的新方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂決

反幂法

OD-HAH

基本迭代和收敛

SCOCIIII (MILE)

上Hessenberg

双重步位移的QR迭件

隐式QR算法

● 由于Q的第一列是M的第一列单位化得到的

# 实现从 $H_k$ 到 $H_{k+1}$ 的新方法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OD-

基本迭代和收

J, Jenuryjnje,

上Hessenberg

双里步位移的QK选作

隐式QR算法

- 由于Q的第一列是M的第一列单位化得到的
- 由 $M = H_k^2 sH_k + tI$ 可知M的第一列为

$$Me_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0, \dots, 0)^T$$

其中

$$\xi_1 = (h_{11}^{(k)})^2 + h_{12}^{(k)} h_{21}^{(k)} - s h_{11}^{(k)} + t$$

$$\xi_2 = h_{21}^{(k)} (h_{11}^{(k)} + h_{22}^{(k)} - s)$$

$$\xi_3 = h_{21}^{(k)} h_{32}^{(k)}$$

#### 非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OP TO

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上Hessenberg化

THE PROPERTY OF PARTY OF THE PA

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 在M的QR分解中,如果Householder变 换 $P_0$ 把 $Me_1$ 变为 $\alpha e_1$ ,那么 $P_0$ 的第一列与 $Me_1$ 共 线 邓建松

基本概念与性

幂法

反幂法

基本进程到版

实Schur标准用

上Hessenberg化

常原点包移的QK达1

双重步位移的QR选

隐式QR算法

- 在M的QR分解中,如果Householder变换 $P_0$ 把 $Me_1$ 变为 $\alpha e_1$ ,那么 $P_0$ 的第一列与 $Me_1$ 共线
  - 利用Householder变换的定义与意义,可直接证明(作为练习)

- 在*M*的QR分解中,如果Householder变 换 $P_0$ 把 $Me_1$ 变为 $\alpha e_1$ ,那么 $P_0$ 的第一列与 $Me_1$ 共 线
  - 利用Householder变换的定义与意义,可直 接证明(作为练习)
- 这就是说Pa的第一列就可以作为Q的第一列

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛 实Schur标准形

带原点位移的QF

双重步位移的QR选

隐式QR算法

• 在M的QR分解中,如果Householder变 换 $P_0$ 把 $Me_1$ 变为 $\alpha e_1$ ,那么 $P_0$ 的第一列与 $Me_1$ 共 线

- 利用Householder变换的定义与意义,可直接证明(作为练习)
- $\bullet$  这就是说 $P_0$ 的第一列就可以作为Q的第一列
- 根据Householder变换的理论,可以确定 $P_0$ 的具体表示



# P<sub>0</sub>的表示

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收

Tri ressembergi

THE RESIDENCE

水垂少压砂的**du**g

隐式QR算法

## ● P₀可以按下述方式确定:

$$P_0=\operatorname{diag}(\tilde{P}_0,I_{n-3})$$

其中

$$\tilde{P}_0 = I_3 - \beta v v^T, \qquad v = (\xi_1 - \alpha, \xi_2, \xi_3)^T,$$

$$\alpha = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \quad \beta = 2/(v^T v)$$

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

0D+>

基本迭代和收敛

实Schur标准开

上Hessenberg化

.....

双里步位移的QK达

隐式QR算法

• 现令 $B = P_0H_kP_0$ ,则我们只要找到第一列为 $e_1$ 的正交矩阵 $\tilde{Q}$ ,使得 $\tilde{Q}^TB\tilde{Q} = \tilde{H}$ 为上Hessenberg矩阵,那么 $\tilde{H}$ 就是所期望的 $H_{k+1}$ 

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛性 实Schur标准形 上Hessenberg化

双重步位移的QRi

隐式QR算法

- 现令 $B = P_0H_kP_0$ ,则我们只要找到第一列为 $e_1$ 的正交矩阵 $\tilde{Q}$ ,使得 $\tilde{Q}^TB\tilde{Q} = \tilde{H}$ 为上Hessenberg矩阵,那么 $\tilde{H}$ 就是所期望的 $H_{k+1}$
- 根据前面给出的约化一个矩阵为 上Hessenberg矩阵的方法以及上Hessenberg矩阵 的唯一性可知,这是很容易做到的

邓建松

基本概念与性质

QR万法

实Schur标准形 上Hessenberg化

带原点位移的QR设

隐式QR算法

- 现令 $B = P_0 H_k P_0$ ,则我们只要找到第一列为 $e_1$ 的正交矩阵 $\tilde{Q}$ ,使得 $\tilde{Q}^T B \tilde{Q} = \tilde{H}$ 为上Hessenberg矩阵,那么 $\tilde{H}$ 就是所期望的 $H_{k+1}$
- 根据前面给出的约化一个矩阵为
   上Hessenberg矩阵的方法以及上Hessenberg矩阵的唯一性可知,这是很容易做到的
- 而且算法的运算量只是O(n²)

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

复注

反幂法

OR方》

基本迭代和收敛

头Schur标准》

T. I COSCIIDEI S 10

THE RESIDENCE OF THE

双里步位移的QR达

隐式QR算法

• 事实上,由于用 $P_0$ 对 $H_k$ 进行相似变换为B,只是改变了H的前三列和前三行,因此B比上Hessenberg矩阵只是多了三个可能的非零元素

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

OR方法

基本迭代和收敛

tore in the

\_

双里步位移的QR以

隐式QR算法

- 事实上,由于用 $P_0$ 对 $H_k$ 进行相似变换为B,只是改变了H的前三列和前三行,因此B比上Hessenberg矩阵只是多了三个可能的非零元素
- 由此我们可以构造Householder变换P<sub>1</sub>把第一列 多余的两个非零元素消去

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

c ex

**反**幂况

QR方法

上Hessenberg化 带原点位移的QR选

双重步位移的QR迭f

隐式QR算法

- 事实上,由于用 $P_0$ 对 $H_k$ 进行相似变换为B,只是改变了H的前三列和前三行,因此B比上Hessenberg矩阵只是多了三个可能的非零元素
- 由此我们可以构造Householder变换*P*<sub>1</sub>把第一列 多余的两个非零元素消去
- 逐步递推下去,就可以把*B*化为上Hessenberg矩阵

非对称特征值问题计

- 事实上,由于用 $P_0$ 对 $H_k$ 进行相似变换为B,只 是改变了H的前三列和前三行,因此B比 上Hessenberg矩阵只是多了三个可能的非零元 素
- 由此我们可以构造Householder变换P₁把第一列 多余的两个非零元素消去
- 逐步递推下去,就可以把B化为上Hessenberg矩 阵
- 由此给出的就是著名的Francis双重步位移



# 实用算法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

00-2-2-

基本迭代和收敛

头Schur标准》

EHessenberg18

双重步位移的QR迭

隐式QR算法

前面的讨论解决了用QR方法求给定实矩阵的 实Schur标准形的几个关键问题

# 实用算法

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

.....

反幂法

and the second

2.1.02.141...

l: Horronborn

带原点位移的QR边

隐式QR算法

- 前面的讨论解决了用QR方法求给定实矩阵的 实Schur标准形的几个关键问题
- 为了得到一个实用的算法,我们还需要给出一个有效的判定准则,确定迭代过程中所产生的上Hessneberg矩阵的次对角元何时可以忽略不计

# 实用算法

非对称特征值问题计 算方法 邓建松

基本概念与性质

反幂法

00414

上Hessenberg化 带原点位移的QR迭代 双重步位移的QR迭代

隐式QR算法

- 前面的讨论解决了用QR方法求给定实矩阵的 实Schur标准形的几个关键问题
- 为了得到一个实用的算法,我们还需要给出一个有效的判定准则,确定迭代过程中所产生的上Hessneberg矩阵的次对角元何时可以忽略不计
- 一种简单而实用的准则是: 当

$$|h_{i+1,i}| \leq (|h_{ii}| + |h_{i+1,i+1}|)\mathbf{u}$$

时,就将h;+1;看做零

# 隐式QR算法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

幂法

反幂法

基本法代和政协

实Schur标准用

上Hessenberg化

THE PROPERTY CO. LEWIS CO. LANSING.

双里步位移的QK达

**范式QR算法** 

● 把前面所有分析综合在一起,就是<mark>隐式QR算法</mark>

# 隐式QR算法

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

泉決

反幂法

基本迭代和收

头Schur标准用

带原点位移的QR选

市原点包移的QR选作 双重步位移的QR选作

隐式QR算法

- 把前面所有分析综合在一起,就是<mark>隐式QR算法</mark>
- 该算法计算给定的n阶实矩阵A的实Schur分解:  $Q^TAQ = T$ , 其中Q是正交矩阵,T为拟上三角阵,即对角块为 $1 \times 1$ 或 $2 \times 2$ 方阵的块上三角阵,而且每个 $2 \times 2$ 的对角块必有一对复共轭特征值

# 算法注解

非对称特征值问题计 算方法

邓建松

基本概念与性质

复注

反幂法

00-20

基本迭代和收敛

实Schur标准用

EHessenberg (C

双重步位移的OR法

隐式QR算法

• 实际计算的统计表明,这一算法每分离出一个1×1或2×2子矩阵平均需要2次QR迭代

# 算法注解

非对称特征值问题计 算方法

基本概念与性质

幂法

反幂法

QR方法

基本迭代和收敛

SCHUI (MIE)

带原点位移的QR选

双重步位移的QR选

隐式QR算法

- 实际计算的统计表明,这一算法每分离出一个1×1或2×2子矩阵平均需要2次QR迭代
- 只计算特征值,运算量平均为 $10n^3$ ,如果还需要Q,总运算量平均约为 $25n^3$

# 算法注解

非对称特征值问题计

- 实际计算的统计表明,这一算法每分离出一 个1×1或2×2子矩阵平均需要2次QR迭代
- 只计算特征值,运算量平均为10n³:如果还需 要Q. 总运算量平均约为 $25n^3$
- 算法是稳定的

# 对称特征值问题的计算方法

邓建松

2018年12月5日

# 对称矩阵的特征值问题

对称特征值问题的计

• 对称矩阵的特征值问题具有许多良好的 性质和十分丰富又完美的数学理论

# 对称矩阵的特征值问题

对称特征值问题的计 算方法 邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭件

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

**本已估八级**的日

二对角化 SVD迭代

奇异值分解的计算

对称矩阵的特征值问题具有许多良好的 性质和十分丰富又完美的数学理论

关于它的计算方法和相应的理论成为矩阵计算中发展得最为完善的一部分

# 对称矩阵的特征值问题

对称特征值问题的计

• 对称矩阵的特征值问题具有许多良好的 性质和十分丰富又完美的数学理论

- 关于它的计算方法和相应的理论成为矩 阵计算中发展得最为完善的一部分
- 本章介绍其中几个最基本的数值方法

# 对称矩阵特征值的性质

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

三对角化

<sup>色式对称OR</sup>选

Jacobi万名

25.曲 L\_\_\_L::50

循环Jacobi方法及其引

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 实对称矩阵的特征值均为实数

# 对称矩阵特征值的性质

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

三对鱼化

隐式对称QR迭f

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其到

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

num drot

- 实对称矩阵的特征值均为实数
- 其特征向量可以构成ℝ"的一组标准正交基

# 对称矩阵特征值的性质

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

## 对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选作

### Jacobi方法

5400517512

循环Jacobi方法及其变

## 二分法

奇异值分解的计算

\_\_对用化 SVD迭代

- 实对称矩阵的特征值均为实数
- 其特征向量可以构成ℝ"的一组标准正交基

## 定理

$$Q^T A Q = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

# 极小极大定理

对称特征值问题的计

### 基本性质

## 定理

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称的,并假定A的特征值 为 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$  则有

$$\lambda_{i} = \max_{\mathcal{X} \in \mathcal{G}_{i}^{n}} \min_{0 \neq u \in \mathcal{X}} \frac{u^{T} A u}{u^{T} u}$$
$$= \min_{\mathcal{X} \in \mathcal{G}_{n-i+1}^{n}} \max_{0 \neq u \in \mathcal{X}} \frac{u^{T} A u}{u^{T} u}$$

其中G<sub>1</sub>表示 $\mathbb{R}$ <sup>n</sup>中所有k维子空间的全体

# 特征值的敏感性: Weyl定理

## 对称特征值问题的计

## 基本性质

## 定理

设n阶对称矩阵A和B的特征值分别为

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \not \sim \mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$$

则有

$$|\lambda_i - \mu_i| \leq ||A - B||_2, \quad i = 1, \dots, n$$

# 特征向量的敏感性

## 对称特征值问题的计

## 基本性质

## 定理

设A n A + E是两个n阶实对称矩阵,并假设 $q_1$ 是A的一个单位特征向量,  $Q = (q_1, Q_2)$ 是n 阶正交矩阵, 矩阵分块如下:

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}, \quad Q^T E Q = \begin{pmatrix} \varepsilon & e^T \\ e & E_{22} \end{pmatrix}$$

量q̃1使得

$$\sin \theta = \sqrt{1 - |q_1^T \tilde{q}_1|^2} \leqslant \frac{4}{d} \|e\|_2 \leqslant \frac{4}{d} \|E\|_2$$

其中 $\theta$ 是向量 $q_1$ 和 $\tilde{q}_1$ 之间所夹的锐角, 即 $\theta$  = arccos  $|q_1^T \tilde{q}_1|$ 

# SVD分解定理

## 对称特征值问题的计

## 基本性质

• 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,则存在正交矩 阵 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$U^{\mathsf{T}}AV = \left(\begin{array}{cc} \Sigma_r & 0\\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r), \ \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 

# SVD分解定理

## 对称特征值问题的计

## 基本性质

• 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 则存在正交矩 降 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$U^{\mathsf{T}}AV = \left(\begin{array}{cc} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r), \ \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 

• 对于上述分解,我们称

$$\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$$

为A的<mark>奇异值: U和V</mark>的列向量分别称 为A的左/右奇异向量

# 奇异值的稳定性

## 对称特征值问题的计

## 基本性质

## 定理

设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 并假定它们的奇异值分别为

$$\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \not \sim \tau_1 \geqslant \cdots \geqslant \tau_n$$

则有

$$|\sigma_i - \tau_i| \leq ||A - B||_2, \quad i = 1, \ldots, n$$

# 对称QR方法

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选

Jacobi市注

....

循环Jacobi方法及其多

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

SVD算法

对称QR方法就是求解对称特征值问题 的QR方法

# 对称QR方法

对称特征值问题的计

对称QR方法

对称QR方法就是求解对称特征值问题 的QR方法

• 它是将QR方法应用于对称矩阵, 充分利用了其对称性

# 对称QR方法

对称特征值问题的计

对称QR方法

对称QR方法就是求解对称特征值问题 的QR方法

- 它是将QR方法应用于对称矩阵, 充分利用了其对称性
- 此时上Hessenberg矩阵就是三对角对称 矩阵

# 三对角化

# 对称特征值问题的计

 若A是n阶实对称矩阵,并假定A的 上Hessenberg分解为

$$Q^TAQ = T$$

其中Q是正交矩阵,T是上Hessenberg矩阵,则 可知 7 是对称三对角阵

# 三对角化

# 对称特征值问题的计

 若A是n阶实对称矩阵,并假定A的 上Hessenberg分解为

$$Q^TAQ = T$$

其中Q是正交矩阵,T是上Hessenberg矩阵,则 可知 7 是对称三对角阵

• 因此当处理的是对称矩阵时,上Hessenberg化 就是三对角化

# 三对角化

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

m-half-onit/

Jacobi方法

## 34005171712

循环Jacobi方法及其变形

-7114

奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代 SVD算法 • 若*A*是*n*阶实对称矩阵,并假定*A*的 上Hessenberg分解为

$$Q^TAQ=T$$

其中Q是正交矩阵,T是上Hessenberg矩阵,则可知T是对称三对角阵

- 因此当处理的是对称矩阵时,上Hessenberg化就是三对角化
- 因此我们约化过程中可以充分利用对称性,使 运算量大减

# 具体分析

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭值

AGET I I I I I I I I I I

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 对A进行分块:

$$A = \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \mathbf{v_0}^T \\ \mathbf{v_0} & A_0 \end{array}\right)$$

其中 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ .

## 具体分析

对称特征值问题的计

• 对A进行分块:

$$A = \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \mathbf{v_0}^T \\ \mathbf{v_0} & A_0 \end{array}\right)$$

其中 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ .

• 利用Householder变换把A约化为上Hessenberg矩 阵的第一步是把 $v_0$ 转化为 $\beta_0e_1$ ,从而 $A_0$ 变为新 的n-1阶矩阵,我们对 $A_0$ 进行类似分块,得 到 $A_1$ . 依次类推......

## 约化的第k步

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

MINDENNIA

隐式对称OR进行

46 TT 1 1 1 -2 - 2 + TL 10

### 二分法

### 奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 计算Householder变换 $\tilde{H}_k \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ , 使得

$$\tilde{H}_k v_{k-1} = \beta_k e_1, \quad \beta_k \in \mathbb{R}$$

## 约化的第k步

### 对称特征值问题的计

• 计算Householder变换 $\tilde{H}_k \in \mathbb{R}^{(n-k)\times (n-k)}$ . 使得

$$\tilde{H}_k v_{k-1} = \beta_k e_1, \quad \beta_k \in \mathbb{R}$$

计算

$$\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \mathbf{v}_k^T \\ \mathbf{v}_k & A_k \end{pmatrix}$$

# 分解结果

### 对称特征值问题的计

### 定义

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$Q = H_1 \cdots H_{n-2}, \quad H_k = \mathrm{diag}(I_k, \tilde{H}_k)$$

## 分解结果

### 对称特征值问题的计

### 定义

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} & \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$Q = H_1 \cdots H_{n-2}, \quad H_k = \operatorname{diag}(I_k, \tilde{H}_k)$$

则我们有 $Q^T A Q = T$ , 这称为A的三对角分解

# 运算量

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭值

Jacobi万况

48 db 12 - 25 22

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选行

SVD算法

• 第k步约化的主要工作是计算 $\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k$ 

## 运算量

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭化

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

—分法

### 奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 第k步约化的主要工作是计算 $\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k$
- 设 $\tilde{H}_k = I \beta v v^T$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ , 由 $A_{k-1}$ 的对称性,我们有

$$\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k = A_{k-1} - v w^T - w v^T$$

其中
$$w = u - \beta(v^T u)v/2$$
,  $u = \beta A_{k-1}v$ 

# 运算量

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法 <sup>三对角化</sup>

隐式对称QR迭代

Jacobi万没

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 第k步约化的主要工作是计算 $\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k$ 

• 设 $\tilde{H}_k = I - \beta v v^T$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ , 由 $A_{k-1}$ 的对称性,我们有

$$\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k = A_{k-1} - v w^T - w v^T$$

其中
$$w = u - \beta(v^T u)v/2$$
,  $u = \beta A_{k-1}v$ 

• 利用这一等式计算,运算量仅为4(n - k)², 从 而总体运算量为4n³/3次乘法运算

# 带原点位移的QR迭代

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR迭值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi万法及共变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

完成了三对角分解后,接下来就是选取适当的 位移进行QR迭代

## 带原点位移的QR迭代

## 对称特征值问题的计

- 完成了三对角分解后,接下来就是选取适当的 位移进行QR迭代
- 由于此时特征值全是实数,因此没有必要进行 双重步位移

# 带原点位移的QR迭代

# 对称特征值问题的计

• 完成了三对角分解后,接下来就是选取适当的 位移进行QR迭代

- 由于此时特征值全是实数,因此没有必要进行 双重步位移
- 带原点位移的QR迭代格式为

$$T_k - \mu_k I = Q_k R_k$$
 (QR分解) 
$$T_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I, \quad k = 0, 1, \dots$$

其中 $T_0 = T$ 是对称三对角阵

## 性质保持

对称特征值问题的计

根据QR迭代保持上Hessenberg形和对称 性的特点可知 $T_k$ 都是对称三对角阵

## 性质保持

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR迭化

尼瓜州**你QR**还T

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计

二对角化

「并但分解的订

• 根据QR迭代保持上Hessenberg形和对称 性的特点可知 T<sub>4</sub>都是对称三对角阵

• 与非对称QR方法一样,我们这里也假定迭代中所出现的 $T_k$ 都是不可约的

## 位移的选取

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称OR迭位

10201119000

Jacobi万法

经典Jacobi方法

循环Jacobi万法及共变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 与非对称QR迭代中一样,最简单的做法是取 $\mu_k$ 为 $T_k$ 右下角元素

## 位移的选取

## 对称特征值问题的计

• 与非对称QR迭代中一样,最简单的做法是 取 $\mu_k$ 为 $T_k$ 右下角元素

● 但此时有一个更好的取法,即Wilkinson位移

## 位移的选取

# 对称特征值问题的计

• 与非对称QR迭代中一样,最简单的做法是 取 $\mu_k$ 为 $T_k$ 右下角元素

- 但此时有一个更好的取法,即Wilkinson位移
- 设 $T_k$ 右下角的 $2 \times 2$ 阶矩阵为 $\begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$ , 我们取 $\mu_k$ 为该矩阵的两个特征值之中靠近 $\alpha_n$ 的 那一个, 即

$$\mu_k = \alpha_n + \delta - \operatorname{sgn}(\delta) \sqrt{\delta^2 + \beta_{n-1}^2}$$

其中
$$\delta = (\alpha_{n-1} - \alpha_n)/2$$

## 两种选取的对比

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

節式対称OR供有

隐式对称QR选行

Jacobi力法

<del>红</del>典JaCODI / I 広

册-平Jacobi// (本汉天天)

### 二分法

奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 两种位移最终都是三次收敛的

### 两种选取的对比

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR迭(

隐式对称QR迭件

Jacobi万没

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计

二对角化 SVD迭代

17开阻77胜的4:

• 两种位移最终都是三次收敛的

Wilkinson论证了为什么后者优于前者的 理由

## 一次对称QR迭代的实现

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选行

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 假设一次对称QR迭代的形式为

$$T - \mu I = QR, \quad \tilde{T} = RQ + \mu I$$

## 一次对称QR迭代的实现

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR迭值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变

### 二分法

### 奇异值分解的计

\_\_对用化 SVD迭代 • 假设一次对称QR迭代的形式为

$$T - \mu I = QR$$
,  $\tilde{T} = RQ + \mu I$ 

• 当然可以利用Givens变换直接实现 $T - \mu I$ 的QR分解,进而完成一步迭代

## 一次对称QR迭代的实现

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选行

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

· ·异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 假设一次对称QR迭代的形式为

$$T - \mu I = QR$$
,  $\tilde{T} = RQ + \mu I$ 

- 当然可以利用Givens变换直接实现 $T \mu I$ 的QR分解,进而完成一步迭代
- 更漂亮的做法是以隐含的方式实现由T到 $\tilde{T}$ 的变换

### 基本想法

对称特征值问题的计

• 根据上Hessenberg约化的唯一性定理,对 于 $\tilde{T} = Q^T T Q$ , $\tilde{T}$ 本质上是由Q的第一列完全 确定的

### 基本想法

### 对称特征值问题的计

• 根据上Hessenberg约化的唯一性定理,对 干 $\tilde{T} = Q^T T Q$ , $\tilde{T}$ 本质上是由Q的第一列完全 确定的

• 利用Givens变换对 $T - \mu I$ 进行QR分解,那  $\triangle Qe_1 = G_1e_1$ . 这里 $G_1 = G(1,2,\theta)$  使得

$$G(1,2,\theta) \begin{pmatrix} \alpha_1 - \mu \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 - \mu \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 后续约化

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR迭化

Jacobi), 12

循环Jacobi方法及其

一分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

WD 衛生

•  $\diamond B = G_1 T G_1^T$ , 则 B的左上3 × 3阶矩阵非零,即仅比对称三对角阵多两个非零元

## 后续约化

# 对称特征值问题的计

•  $\phi B = G_1 T G_1^T$ ,则B的左上3×3阶矩阵非零, 即仅比对称三对角阵多两个非零元

• 将B再用n-1个Givens变换约化为三对角阵 $\tilde{T}$ 

## 后续约化

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及共变形

二对角化 SVD迭代 •  $\phi B = G_1 T G_1^T$ , 则 B的左上3 × 3阶矩阵非零,即仅比对称三对角阵多两个非零元

- 将B再用n-1个Givens变换约化为三对角阵 $\tilde{T}$
- 如此即为带Wilkinson位移的隐式对称QR迭代算法

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

= 9+46-1b

隐式对称QR选

Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

类比于非对称QR算法,综合前面的讨论,我们可以得到隐式对称QR算法

### 对称特征值问题的计

### • 类比于非对称QR算法,综合前面的讨论,我们 可以得到隐式对称QR算法

• 此时算法的输出为对角阵,元素是A的特征值

### 对称特征值问题的计

• 类比于非对称QR算法,综合前面的讨论,我们 可以得到隐式对称QR算法

- 此时算法的输出为对角阵, 元素是A的特征值
- 只计算特征值,算法运算量约为4n³/3

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二利用化

隐式对称QR迭

Jacobi方法

经典Jacobi万法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

**5**异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 类比于非对称QR算法,综合前面的讨论,我们可以得到隐式对称QR算法
- 此时算法的输出为对角阵,元素是A的特征值
- 只计算特征值,算法运算量约为4n³/3
- 这是矩阵计算中最漂亮的算法之一,它是数值 稳定的

对称特征值问题的计

Jacobi方法

• Jacobi方法是求实对称矩阵全部特征值和特征 向量的最古老的方法之一

### 对称特征值问题的计

### Jacobi方法

● Jacobi方法是求实对称矩阵全部特征值和特征 向量的最古老的方法之一

● 它是由C.G.J. Jacobi于1846年首先提出的

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭件

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD等注 Jacobi方法是求实对称矩阵全部特征值和特征 向量的最古老的方法之一

- 它是由C.G.J. Jacobi于1846年首先提出的
- 该方法利用了实对称矩阵可以正交相似变换约 化为对角阵的性质,用一系列适当选取的平面 旋转变换将给定矩阵约化为对角阵

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭件

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形 一 分注

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 Jacobi方法是求实对称矩阵全部特征值和特征 向量的最古老的方法之一

- 它是由C.G.J. Jacobi于1846年首先提出的
- 该方法利用了实对称矩阵可以正交相似变换约 化为对角阵的性质,用一系列适当选取的平面 旋转变换将给定矩阵约化为对角阵
- 它的速度相比对称QR方法要相差很远,但它编程简单,并行效率高

## Jacobi方法的目标

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR供

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其多

二分法

奇异值分解的计算

二对角(

CVID-2F-I

SVD管理

• 设 $A = (\alpha_{ij})$ 是 $n \times n$ 实对称矩阵

### Jacobi方法的目标

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选作

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代

• 设
$$A = (\alpha_{ii}) \mathbb{E}_n \times n$$
实对称矩阵

• Jacobi方法的目标就是将A的非对角"范数" *E*(A)逐步约化为零:

$$E(A) = \left( \|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

## Jacobi方法的目标

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭代

Jacobi方法

**经典Jacobi方法** 循环Jacobi方法及其

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 设 $A = (\alpha_{ii}) \mathbb{E}_n \times n$ 实对称矩阵

• Jacobi方法的目标就是将A的非对角"范数" *E*(A)逐步约化为零:

$$E(A) = \left( \|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

● 所采用的基本工具就是由Givens变换定义的平 面旋转变换

## Jacobi变换

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

Given变换G(p, q, θ)也记作J(p, q, θ)

$$J(p, q, \theta) = I + (\cos \theta - 1)(e_p e_p^T + e_q e_q^T) + \sin \theta (e_p e_q^T - e_q e_p^T)$$

## Jacobi变换

## 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

Given变换G(p, q, θ)也记作J(p, q, θ)

$$J(p, q, \theta) = I + (\cos \theta - 1)(e_p e_p^T + e_q e_q^T) + \sin \theta (e_p e_q^T - e_q e_p^T)$$

此时假定p < q</li>

## Jacobi变换

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选件

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi 万法及共变

二分法

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • Given变换 $G(p,q,\theta)$ 也记作 $J(p,q,\theta)$ 

$$J(p, q, \theta) = I + (\cos \theta - 1)(e_p e_p^T + e_q e_q^T) + \sin \theta (e_p e_q^T - e_q e_p^T)$$

- 此时假定p < q</li>
- 这一变换也称为(p,q)平面的Jacobi变换

## Jacobi方法一次约化的步骤

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选值

Jacobi力》

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角体

SVD迭代

SVD算法

① 选择旋转平面(p,q),  $1 \leq p < q \leq n$ 

## Jacobi方法一次约化的步骤

## 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

- 选择旋转平面(p,q),  $1 \leq p < q \leq n$
- 确定旋转角θ使得

$$\begin{pmatrix} \beta_{pp} & \beta_{pq} \\ \beta_{qp} & \beta_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} \alpha_{pp} & \alpha_{pq} \\ \alpha_{qp} & \alpha_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

为对角阵,其中 $c = \cos \theta$ .  $s = \sin \theta$ 

## Jacobi方法一次约化的步骤

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

. . . .

隐式对称QR选值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

### —分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

'异值分解的计

① 选择旋转平面(p,q),  $1 \le p < q \le n$ 

② 确定旋转角θ使得

$$\left( \begin{array}{cc} \beta_{pp} & \beta_{pq} \\ \beta_{qp} & \beta_{qq} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} c & s \\ -s & c \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{cc} \alpha_{pp} & \alpha_{pq} \\ \alpha_{qp} & \alpha_{qq} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} c & s \\ -s & c \end{array} \right)$$

为对角阵,其中 $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ 

③ 对A进行相似变换:  $B = (\beta_{ij}) = J^T A J$ , 其中 $J = J(p, q, \theta)$ 

## A与B的关系

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

聯式對称OR法代

1970/1990/1021

Jacobi万法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代 SVD算法 • 矩阵A与B只在第p行/列和第q行/列不同,它们之间有关系如下:

$$\beta_{ip} = \beta_{pi} = c\alpha_{ip} - s\alpha_{iq}, i \neq p, q$$

$$\beta_{iq} = \beta_{qi} = s\alpha_{ip} + c\alpha_{iq}, i \neq p, q$$

$$\beta_{pp} = c^{2}\alpha_{pp} - 2sc\alpha_{pq} + s^{2}\alpha_{qq}$$

$$\beta_{qq} = s^{2}\alpha_{pp} + 2sc\alpha_{pq} + c^{2}\alpha_{qq}$$

$$\beta_{pq} = \beta_{qp} = (c^{2} - s^{2})\alpha_{pq} + sc(\alpha_{pp} - \alpha_{qq})$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

.....

漁式対称○R法付

Jacobi方法

**然曲 Landing** 

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角(

SVD读有

SVD算法

● 先假设选定了旋转平面(p,q)

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

. . . .

隐式对称QR选值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其3

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

SVD算法

- 先假设选定了旋转平面(p,q)
- 下面根据 $\beta_{pq} = \beta_{qp} = 0$ 求出c, s

## 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

◆ 先假设选定了旋转平面(p, q)

• 下面根据 $\beta_{nq} = \beta_{qp} = 0$ 求出c, s

• 由 $\beta_{nq}$ 的表达式可知,这等价于计算c,s使得

$$(c^2 - s^2)\alpha_{pq} + sc(\alpha_{pp} - \alpha_{qq}) = 0$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭f

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

奇异值分解的计算

一 対用化 SVD 迭代 SVD 算法

f异值分解的计算

• 先假设选定了旋转平面(p,q)

• 下面根据 $\beta_{pq} = \beta_{qp} = 0$ 求出c, s

• 由 $\beta_{pq}$ 的表达式可知,这等价于计算c,s使得

$$(c^2 - s^2)\alpha_{pq} + sc(\alpha_{pp} - \alpha_{qq}) = 0$$

• 若 $\alpha_{pq} = 0$ ,可取c = 1, s = 0

# $\alpha_{pq} \neq 0$ 的情形

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

. . . .

隐式对称QR选值

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其引

二分法

奇异值分解的计算

二对角件

SVD迭代

SVD算法

• 如果 $\alpha_{pq} \neq 0$ , 令

$$\tau = \frac{\alpha_{qq} - \alpha_{pp}}{2\alpha_{pq}}, t = \tan\theta = \frac{s}{c}$$

# $\alpha_{pq} \neq 0$ 的情形

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 如果 $\alpha_{pq} \neq 0$ , 令

$$\tau = \frac{\alpha_{qq} - \alpha_{pp}}{2\alpha_{pq}}, t = \tan\theta = \frac{s}{c}$$

由此得到方程 $t^2 + 2\tau t - 1 = 0$ 

# $\alpha_{pq} \neq 0$ 的情形

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对鱼化

隐式对称QR迭化

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD等法 • 如果 $\alpha_{pq} \neq 0$ , 令

$$au = rac{lpha_{qq} - lpha_{pp}}{2lpha_{pq}}, t = an heta = rac{ extbf{s}}{ extbf{c}}$$

- 由此得到方程 $t^2 + 2\tau t 1 = 0$
- 如此t有两种选择。选择其绝对值较小的即可, 从而

$$t = \frac{\operatorname{sgn}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1 + \tau^2}}$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选行

Jacobi刀程

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

一分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 如此选择保证了旋转角 $\theta$ 满足 $|\theta| \leq \pi/4$ , 这对Jacobi方法的收敛性是至关重要的

## 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

- 如此选择保证了旋转角 $\theta$ 满足 $|\theta| \leq \pi/4$ , 这 对Jacobi方法的收敛性是至关重要的
- 细节见后面的收敛性分析

经典Jacobi方法

• 如此选择保证了旋转角 $\theta$ 满足 $|\theta| \leq \pi/4$ , 这 对Jacobi方法的收敛性是至关重要的

- 细节见后面的收敛性分析
- 确定了t之后, c, s可由下面的公式确定:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad s = tc$$

## Frobenius范数的变化

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 由于Frobenius范数对正交变换保持不变,从  $m \|B\|_F = \|A\|_F$  即

$$\alpha_{\mathit{pp}}^2 + \alpha_{\mathit{qq}}^2 + 2\alpha_{\mathit{pq}}^2 = \beta_{\mathit{pp}}^2 + \beta_{\mathit{qq}}^2$$

## Frobenius范数的变化

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

由于Frobenius范数对正交变换保持不变,从  $m \|B\|_F = \|A\|_F$  即

$$\alpha_{\mathit{pp}}^2 + \alpha_{\mathit{qq}}^2 + 2\alpha_{\mathit{pq}}^2 = \beta_{\mathit{pp}}^2 + \beta_{\mathit{qq}}^2$$

• 如此我们有

$$E(B)^{2} = \|B\|_{F}^{2} - \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii}^{2}$$

$$= \|A\|_{F}^{2} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}^{2} + (\alpha_{pp}^{2} + \alpha_{qq}^{2} - \beta_{pp}^{2} - \beta_{qq}^{2})$$

$$= E(A)^{2} - 2\alpha_{pq}^{2}$$

# 旋转平面的选取

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR迭化

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

5异值分解的计

二对用化 SVD迭代 • 我们的目标是使E(B)尽可能得小,因此(p,q)的最佳选择应使

$$|\alpha_{pq}| = \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\alpha_{ij}|$$

即应选取非对角元中绝对值最大者所在的行列为旋转平面

## 经典Jacobi方法

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

----

隐式对称OR法

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

一分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 根据上述原则选择旋转平面(p,q), 然后再确定c,s的方法就是<mark>经典Jacobi方法</mark>

## 经典Jacobi方法

## 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 根据上述原则选择旋转平面(p,q), 然后再确 定c.s的方法就是经典Jacobi方法

• 其基本迭代格式如下:

$$A_k = (\alpha_{ij}^{(k)}) = J_k^T A_{k-1} J_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

其中 $A_0 = A$ .  $J_{\iota}$ 是对 $A_{\iota-1}$ 如前所确定的Jacobi变 换

# 收敛定理

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二姓伯孙

隐式对称QR迭代

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变用

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

## 定理

存在A的特征值的一个排列 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ , 使

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$$

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称**OR**选

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

SVD算法

• 我们先证明随着迭代次数k的增加, $A_k$ 的非对角"范数"  $E(A_k) \rightarrow 0$ 

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

-- N 用化 SVD迭代 SVD資注

| 开11年7月1年11月 | 另

• 我们先证明随着迭代次数k的增加, $A_k$ 的非对角"范数"  $E(A_k) \to 0$ 

• 根据前面的讨论,我们有

$$E(A_k)^2 = E(A_{k-1})^2 - 2(\alpha_{pq}^{(k-1)})^2$$

其中 $\alpha_{pq}^{(k-1)}$ 是 $A_{k-1}$ 的非对角元之中绝对值最大者

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

----

隐式对称OR法

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其多

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD读有

SVD算法

注意到

 $E(A_{k-1})^2 \leq (n^2 - n)(\alpha_{pq}^{(k-1)})^2$ 

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

. . . .

隐式对称QR迭值

Jacobi方法

-----

经典Jacobi方法

Mal-Jacobi XI

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

SVD算法

## 注意到

$$E(A_{k-1})^2 \leqslant (n^2 - n)(\alpha_{pq}^{(k-1)})^2$$

• 从而有

$$E(A_k)^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right) E(A_{k-1})^2$$

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

注意到

$$E(A_{k-1})^2 \leqslant (n^2 - n)(\alpha_{pq}^{(k-1)})^2$$

从而有

$$E(A_k)^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right) E(A_{k-1})^2$$

• 系数为与k无关的绝对值小于1的数, 此 $\lim_{k \to \infty} E(A_k) = 0$ 

## 定理的继续证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

......

息式对称QR选作

Jacobi XI 4

经典Jacobi方法

循环Jacobi万法及共变

### 二分法

奇异值分解的计算

二对角(

CVID-2F-I

VD算法

• 下面证明 $\alpha_{ii}^{(k)} \to \lambda_i, k \to \infty$ 

## 定理的继续证明

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

- a) to th

隐式对称OR选

Jacobi方法

Jacobi

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其3

二分法

奇异值分解的计

二对角化

SVD选代

SVD算法

- 下面证明 $\alpha_{ii}^{(k)} \to \lambda_i$ ,  $k \to \infty$
- 假设A的互不相同的特征值之间最小距离为δ

## 定理的继续证明

# 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

- 下面证明 $\alpha_{ii}^{(k)} \to \lambda_i, k \to \infty$
- 假设A的互不相同的特征值之间最小距离为 $\delta$
- 任取 $\varepsilon$ 满足 $0 < \varepsilon < \delta/4$ ,由  $\lim_{k \to \infty} E(A_k) = 0$  知存 在 $k_0$ 使得当 $k \ge k_0$ 时有 $E(A_k) < \varepsilon < \delta/4$

经典Jacobi方法

• 由于 $\lambda(A_{k_0}) = \lambda(A)$ , 对矩阵 $A_{k_0}$ 与其对角元作成 的对角阵

$$D_{k_0} = \operatorname{diag}(\alpha_{11}^{(k_0)}, \alpha_{22}^{(k_0)}, \dots, \alpha_{nn}^{(k_0)})$$

应用本章开始给出的Wevl定理可知,存在A的 特征值的一个排列 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 使得对 $i = 1, \ldots, n$ 

$$\left|\lambda_{i} - \alpha_{ii}^{(k_{0})}\right| \leq \|A_{k_{0}} - D_{k_{0}}\|_{2} \leq E(A_{k_{0}}) < \varepsilon < \delta/4$$

奇异值分解的计算

<sub>一</sub>对用化 SVD迭代 SVD算法 • 由于 $\lambda(A_{k_0}) = \lambda(A)$ , 对矩阵 $A_{k_0}$ 与其对角元作成的对角阵

$$D_{k_0} = \operatorname{diag}(\alpha_{11}^{(k_0)}, \alpha_{22}^{(k_0)}, \dots, \alpha_{nn}^{(k_0)})$$

应用本章开始给出的Weyl定理可知,存在A的特征值的一个排列 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 使得对 $i = 1, \ldots, n$ 

$$\left|\lambda_{i} - \alpha_{ii}^{(k_{0})}\right| \leq \|A_{k_{0}} - D_{k_{0}}\|_{2} \leq E(A_{k_{0}}) < \varepsilon < \delta/4$$

● 目前来说,特征值的排列是与ko有关的



## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基末性质

对称QR方法

-----

循环 lacobi方法及其利

一分注

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选行

SVD算法

• 实际上,可以证明这种排列对任意 $k \ge k_0$ 都是一致的(暂缺)

## 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

实际上,可以证明这种排列对任意k≥k₀都是 一致的(暂缺)

● 也说是说,只要能证明上式蕴涵着

$$\left|\lambda_i - \alpha_{ii}^{(k_0+1)}\right| < \varepsilon, i = 1, \dots, n$$

则由归纳法可知对一切 $k \ge k_0$ 有

$$\left|\lambda_{i}-\alpha_{ii}^{(k)}\right|<\varepsilon, i=1,\ldots,n$$

从而定理得证



### 欠缺的一环

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 由于 $A_{k_0+1}$ 与 $A_{k_0}$ 的对角元只可能有两个不同:  $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 和 $\alpha_{qq}^{(k_0+1)}$ ,所以只需要对i=p,q证明欠 缺的蕴涵关系成立即可

### 欠缺的一环

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 由于 $A_{k_0+1}$ 与 $A_{k_0}$ 的对角元只可能有两个不同:  $\alpha_{nn}^{(k_0+1)}$ 和 $\alpha_{nn}^{(k_0+1)}$ ,所以只需要对i=p. g证明欠 缺的蕴涵关系成立即可

由于t = s/c, 根据c, s计算过程,  $\alpha_{pq}^{(k_0)}(c^2-s^2)+(\alpha_{pp}^{(k_0)}-\alpha_{qq}^{(k_0)})cs=0, \text{ fit}$  $U(1-t^2)\alpha_{pq}^{(k_0)} = t(\alpha_{qq}^{(k_0)} - \alpha_{pp}^{(k_0)})$ 

### 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

### • 根据迭代格式,我们有

$$\begin{split} \alpha_{pp}^{(k_0+1)} &= \alpha_{pp}^{(k_0)} + c^2 \left( -2t\alpha_{pq}^{(k_0)} + t^2 \left( \alpha_{qq}^{(k_0)} - \alpha_{pp}^{(k_0)} \right) \right) \\ &= \alpha_{pp}^{(k_0)} + c^2 \left( -2t\alpha_{pq}^{(k_0)} + t(1 - t^2)\alpha_{pq}^{(k_0)} \right) \\ &= \alpha_{pp}^{(k_0)} - t\alpha_{pq}^{(k_0)} \\ \alpha_{qq}^{(k_0+1)} &= \alpha_{qq}^{(k_0)} + t\alpha_{pq}^{(k_0)} \end{split}$$

### 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

根据迭代格式,我们有

$$\alpha_{pp}^{(k_0+1)} = \alpha_{pp}^{(k_0)} + c^2 \left( -2t\alpha_{pq}^{(k_0)} + t^2 (\alpha_{qq}^{(k_0)} - \alpha_{pp}^{(k_0)}) \right)$$

$$= \alpha_{pp}^{(k_0)} + c^2 \left( -2t\alpha_{pq}^{(k_0)} + t(1 - t^2)\alpha_{pq}^{(k_0)} \right)$$

$$= \alpha_{pp}^{(k_0)} - t\alpha_{pq}^{(k_0)}$$

$$\alpha_{qq}^{(k_0+1)} = \alpha_{qq}^{(k_0)} + t\alpha_{pq}^{(k_0)}$$

• 从而对任何 $\lambda_i \neq \lambda_n$ 有(注意 $|t| \leq 1$ )

$$\begin{aligned} \left| \alpha_{pp}^{(k_0+1)} - \lambda_j \right| &= \left| \alpha_{pp}^{(k_0)} - \lambda_p + \lambda_p - \lambda_j - t \alpha_{pq}^{(k_0)} \right| \\ &\geqslant \left| \lambda_p - \lambda_j \right| - \left| \alpha_{pp}^{(k_0)} - \lambda_p \right| - \left| t \right| E(A_{k_0}) \\ &\geqslant \delta - \varepsilon - \varepsilon \geqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

- a.1.75.76

隐式对称OR法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

SVD算法

• 由于 $\lambda(A_{k_0+1}) = \lambda(A)$ ,  $E(A_{k_0+1}) < \varepsilon$ , 所以根据Weyl定理可知, $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 必与A的某个特征值之间的距离小于 $\varepsilon$ 

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二州布ル

隐式对称QR选值

BRY CALL LA CALCOS I

544051/51/

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其到

二分法

SVD迭代

SVD算法

奇异值分解的计算

• 由于 $\lambda(A_{k_0+1}) = \lambda(A)$ ,  $E(A_{k_0+1}) < \varepsilon$ , 所以根据Weyl定理可知, $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 必与A的某个特征值之间的距离小于 $\varepsilon$ 

• 据前结论, $\left|\lambda_i - \alpha_{ii}^{(k)}\right| < \varepsilon$ 在i = p时成立

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

節式 对称OR法在

......

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

SVD迭代

可开阻刃胜的贝索

• 由于 $\lambda(A_{k_0+1}) = \lambda(A)$ ,  $E(A_{k_0+1}) < \varepsilon$ , 所以根据Weyl定理可知, $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 必与A的某个特征值之间的距离小于 $\varepsilon$ 

- 据前结论, $\left|\lambda_i \alpha_{ii}^{(k)}\right| < \varepsilon$ 在i = p时成立
- 类似可证该不等式*i* = q时成立

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选值

Jacobi万

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 • 由于 $\lambda(A_{k_0+1}) = \lambda(A)$ ,  $E(A_{k_0+1}) < \varepsilon$ , 所以根据Weyl定理可知, $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 必与A的某个特征值之间的距离小于 $\varepsilon$ 

- 据前结论, $\left|\lambda_i \alpha_{ii}^{(k)}\right| < \varepsilon$ 在i = p时成立
- 类似可证该不等式*i* = q时成立
- 定理证明完成

## 注解

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 从定理的证明可见,|t| ≤ 1对经典Jacobi方法的 收敛起了至关重要的作用。它保证了迭代产生 的每一个对角元一致地趋向于A的某一个固定 的特征值

## 注解

## 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

● 从定理的证明可见, $|t| \leq 1$ 对经典Jacobi方法的 收敛起了至关重要的作用。它保证了迭代产生 的每一个对角元一致地趋向于A的某一个固定 的特征值

● 证明也给出了经典Jacobi方法的收敛速度的一 个粗略的估计:

$$E(A_k)^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right)^k E(A_0)^2$$

### 注解

# 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

● 从定理的证明可见, $|t| \leq 1$ 对经典Jacobi方法的 收敛起了至关重要的作用。它保证了迭代产生 的每一个对角元一致地趋向于A的某一个固定 的特征值

● 证明也给出了经典Jacobi方法的收敛速度的一 个粗略的估计:

$$E(A_k)^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right)^k E(A_0)^2$$

• 这表明经典Jacobi方法是线性收敛的

### 扫描

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR法

循环 lacobi方注及其3

一分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选行

SVD算法

通常将N = (n² - n)/2次Jacobi迭代称为一次扫描

### 扫描

#### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

#### 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭

#### Jacobi方沒

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

#### 二分法

奇异值分解的计

二对用化 SVD选代

- 通常将 $N = (n^2 n)/2$ 次Jacobi迭代称为一次扫描
- 可以证明经典Jacobi方法的渐近收敛速度是二次的,即存在常数c > 0,对充分大的k

$$E(A_{k+N}) \leqslant cE(A_k)^2$$

### 扫描

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

#### 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭值

#### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

#### 二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 通常将 $N = (n^2 n)/2$ 次Jacobi迭代称为一次扫描
- 可以证明经典Jacobi方法的渐近收敛速度是二次的,即存在常数c > 0,对充分大的k

$$E(A_{k+N}) \leqslant cE(A_k)^2$$

所以每扫描一次,其非对角"范数"将以平方收 敛的速度接近于零

### 循环Jacobi方法

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

• 经典Jacobi方法中每进行一次相似变换,所需 的运算仅为O(n), 而确定旋转平面却需要进 行 $(n^2 - n)/2$ 个元素比较

### 循环Jacobi方法

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

● 经典Jacobi方法中每进行一次相似变换,所需 的运算仅为O(n), 而确定旋转平面却需要进 行 $(n^2 - n)/2$ 个元素比较

● 所以经典Jacobi方法的大部分时间用在了寻找 最佳的旋转平面上

### 循环Jacobi方法

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选值

Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 经典Jacobi方法中每进行一次相似变换,所需的运算仅为O(n), 而确定旋转平面却需要进行 $(n^2-n)/2$ 个元素比较

- 所以经典Jacobi方法的大部分时间用在了寻找 最佳的旋转平面上
- 一种变通方法:直接按某种预定顺序对每个非对角元消去一次,这就是所谓的循环Jacobi方法

## 自然的遍历顺序

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

#### 基本性质

对称QR方法

7/1 //3/ **Q**1 (7) 12

隐式对称OR迭化

#### Jacobi方法

Jacobi刀程

213434000177124

循环Jacobi方法及其变形

#### 二分法

奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

● 在循环Jacobi方法中,最自然的遍历非对角元 的顺序是

$$(1,2),\ldots,(1,n);(2,3),\ldots,(2,n);\ldots,(n-1,n)$$

## 自然的遍历顺序

# 对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

• 在循环Jacobi方法中,最自然的遍历非对角元 的顺序是

$$(1,2),\ldots,(1,n);(2,3),\ldots,(2,n);\ldots,(n-1,n)$$

• 这种方法也可以证明是渐近平方收敛的,但它 相比于经典Jacobi方法要快很多

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-----

隐式对称QR选

Jacobi万年

经典Jacobi方

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

 在实际计算中用得最多的是循环Jacobi方法的 一种变体,即过关Jacobi方法

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

● 在实际计算中用得最多的是循环Jacobi方法的 一种变体,即过关Jacobi方法

• 在该变体中, 先确定一个正数 (称为关值), 在一次扫描中只对那些绝对值超过关值的非对 角元所在的平面进行Jacobi变换

对称特征值问题的计 算方法 邓建松

基本性质

对称QR方法 <sup>三对角化</sup> 隐式对称QR选代

Jacobi方法 <sup>经典Jacobi方法</sup> 循环Jacobi方法及共变形

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代

- 在实际计算中用得最多的是循环Jacobi方法的 一种变体,即过关Jacobi方法
- 在该变体中,先确定一个正数(称为关值), 在一次扫描中只对那些绝对值超过关值的非对 角元所在的平面进行Jacobi变换
- 如此反复扫描,当所有的非对角元的绝对值都 不超过关值时,减小关值,再进行类似扫描

对称特征值问题的计 算方法 <sup>邓建松</sup>

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭

Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

5异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 在实际计算中用得最多的是循环Jacobi方法的一种变体,即过关Jacobi方法

- 在该变体中,先确定一个正数(称为关值), 在一次扫描中只对那些绝对值超过关值的非对 角元所在的平面进行Jacobi变换
- 如此反复扫描,当所有的非对角元的绝对值都 不超过关值时,减小关值,再进行类似扫描
- 直至关值充分小时结束

## 关值的选取

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

#### 基本性质

#### 对称QR方法

ES I SHEKODSE (

#### Jacobijji

必由 Incobilitie

循环Jacobi方法及其变形

#### 二分法

#### 奇异值分解的计

二对角化

SVD选代

SVD算法

• 常用的关值是按如下方式选取的:

$$\delta_0 = E(A), \delta_k = \frac{\delta_{k-1}}{\sigma}$$

其中 $\sigma$  ≥ n是一个固定的正数

## 关值的选取

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

• 常用的关值是按如下方式选取的:

$$\delta_0 = E(A), \delta_k = \frac{\delta_{k-1}}{\sigma}$$

其中 $\sigma > n$ 是一个固定的正数

• 可以证明: 针对如此选取的关值, 过 关Jacobi方法是收敛的

### Jacobi方法中特征向量的计算

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

11 11 19 19 12 12

隐式对称OR选件

形式对你QK还T

经典Jacobi方

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

二对角体

SVD迭代

CVD管注

• 经过k次变换后迭代停止,则我们有

$$A_k = Q_k^T A Q_k$$

其中
$$Q_k = J_1 J_2 \cdots J_k$$

### Jacobi方法中特征向量的计算

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

● 经过k次变换后迭代停止,则我们有

$$A_k = Q_k^T A Q_k$$

其中
$$Q_k = J_1 J_2 \cdots J_k$$

● 由于A<sub>ℓ</sub>的非对角元已非常小,那么A的对角元 就是特征值的近似, $Q_{k}$ 的列向量就是A的特征 向量近似

## 二分法

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

#### 基本性质

对称QR方法

二州布ル

隐式对称QR选

....

循环Jacobi方法及其到

#### 二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

● 本节介绍求一个实对称三对角阵*T*的任意指定 特征值的二分法

### 二分法

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

#### 基本性质

对称QR方法

二組备化

隐式对称QR迭f

#### Jacobi方法

AND ALL STREET

循环Jacobi方法及其变

#### 二分法

奇异值分解的计:

SVD迭代

- 対毎少

• 本节介绍求一个实对称三对角阵*T*的任意指定 特征值的二分法

• 设T的对角元为 $\alpha_i$ , i = 1, ..., n; 次对角元为 $\beta_i$ , i = 2, ..., n

## 二分法

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

#### 基本性质

对称QR方法

三对用化

隐式对称QR选作

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

#### 二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD等注 ● 本节介绍求一个实对称三对角阵*T*的任意指定 特征值的二分法

• 设T的对角元为 $\alpha_i$ , i = 1, ..., n; 次对角元为 $\beta_i$ , i = 2, ..., n

• 假定次对角元非零

## 顺序主子式

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

....

i式对称OR迭化

Jacobi力役

经典 Jacobi方法

循环Jacobi方法及其到

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选行

SVD算法

• 记 $p_i(\lambda)$ 表示 $T - \lambda I$ 的i阶顺序主子式

### 顺序主子式

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

#### 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选

#### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi万法及共变

#### 二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代

二对角化

• 记 $p_i(\lambda)$ 表示 $T - \lambda I$ 的i阶顺序主子式

• 则 $p_i(\lambda)$ 满足下面的三项递推公式:

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$$
$$p_i(\lambda) = (\alpha_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - \beta_i^2 p_{i-2}(\lambda)$$
$$i = 2, \dots, n$$

### 顺序主子式

### 对称特征值问题的计

• 记 $p_i(\lambda)$ 表示 $T = \lambda I$ 的i阶顺序主子式

则*p<sub>i</sub>*(λ)满足下面的三项递推公式:

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$$
  

$$p_i(\lambda) = (\alpha_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - \beta_i^2 p_{i-2}(\lambda)$$
  

$$i = 2, \dots, n$$

• 由于T实对称,所以 $p_i(\lambda)$ 的根都是实的

### 对称特征值问题的计

• 设
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
, 则

$$egin{aligned} & p_0(\lambda) = 1 \ & p_1(\lambda) = 1 - \lambda \ & p_2(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 1 \ & p_3(\lambda) = (1 - \lambda)^3 - 2(1 - \lambda) \end{aligned}$$

# $p_i(\lambda)$ 的性质

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

#### 对称QR方法

-----

隐式对称QR选作

#### . . . .

AZ dha a sabab

循环Jacobi方法及其变

#### 二分法

#### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD选作

SVD算法

### 定理

① 存在正数M, 使得当 $\lambda > M$ 时, $p_i(-\lambda) > 0$ , 而 $p_i(\lambda)$ 的符号为 $(-1)^i$ 

# $p_i(\lambda)$ 的性质

### 对称特征值问题的计

### 定理

- ① 存在正数M, 使得当 $\lambda > M$ 时,  $p_i(-\lambda) > 0$ , 而 $p_i(\lambda)$ 的符号为 $(-1)^i$
- △ 相邻两个多项式没有公共根

## $p_i(\lambda)$ 的性质

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

隐式对称QR选件

### Jacobi方法

Jacobi/J42

循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

奇异值分解的计算

\_\_对用化 SVD迭代 0

定理

- ① 存在正数M, 使得当 $\lambda > M$ 时, $p_i(-\lambda) > 0$ ,  $\pi p_i(\lambda)$ 的符号为 $(-1)^i$
- ② 相邻两个多项式没有公共根
- ③ 若 $p_i(\mu) = 0$ , 则 $p_{i-1}(\mu)p_{i+1}(\mu) < 0$

## $p_i(\lambda)$ 的性质

## 对称特征值问题的计

## 定理

- ① 存在正数M, 使得当 $\lambda > M$ 时,  $p_i(-\lambda) > 0$ . 而 $p_i(\lambda)$ 的符号为 $(-1)^i$
- △ 相邻两个多项式没有公共根
- ③ 若 $p_i(\mu) = 0$ ,则 $p_{i-1}(\mu)p_{i+1}(\mu) < 0$
- **4**  $p_i(\lambda)$ 的根全是单重的,并且 $p_i(\lambda)$ 的根严格分 离 $p_{i+1}(\lambda)$ 的根

## 性质1,2的证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

急式对称QR选值

Jacobi/J4,

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角体

SVD选代

SVD算法

• 根据 $p_i(\lambda)$ 的定义,其首项为 $(-1)^i \lambda^i$ ,所以性质1成立

## 性质1.2的证明

## 对称特征值问题的计

- 根据 $p_i(\lambda)$ 的定义,其首项为 $(-1)^i \lambda^i$ ,所以性 质1成立
- 性质2的证明:采用反证法。假设存在某个i.  $p_{i-1}(\lambda)$ 与 $p_i(\lambda)$ 有公共根 $\mu$ ,那么由三项递推公式

$$0 = p_i(\mu) = (\alpha_i - \mu)p_{i-1}(\mu) - \beta_i^2 p_{i-2}(\mu)$$

而 $\beta_i \neq 0$ , 所以有 $p_{i-2}(\mu) = 0$ , 以此类推可 得 $p_0(\mu) = 0$ , 矛盾

## 性质3的证明

### 对称特征值问题的计 算方法

亚种松

基本性质

对称QR方法

. . . . . . . . .

隐式对称OR供供

Jacobi方法

Are all a constant

循环Jacobi方法及其到

一分法

奇异值分解的计算

二对角(

SVD铁机

SVD策注

• 设 $p_i(\mu) = 0$ 

## 性质3的证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

11 11 19 19 1 C) 1 1 Z

隐式对称QR迭化

//2 db 1 1 +-2-5

循环Jacobi方法及其到

### 二分法

### 奇异值分解的计算

二对角体

SVD迭代

SVD算法

• 设
$$p_i(\mu) = 0$$

• 代入三项递推关系,可得

$$p_{i+1}(\mu) = -\beta_i^2 p_{i-1}(\mu)$$

## 性质3的证明

## 对称特征值问题的计

• 设
$$p_i(\mu) = 0$$

• 代入三项递推关系,可得

$$p_{i+1}(\mu) = -\beta_i^2 p_{i-1}(\mu)$$

• 由性质2,  $\mu$ 不是 $p_{i+1}(\lambda)$ 和 $p_{i-1}(\lambda)$ 的根,从而可 知 $p_{i-1}(\mu)p_{i+1}(\mu) < 0$ 

## 性质4的证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二州布ル

隐式对称QR选

Jacobi /14

经典Jacobi方

循环Jacobi方法及其3

二分法

奇异值分解的计算

二对角(

SVD迭代

SVD算法

## 采用数学归纳法

•  $\exists i = 1 \exists p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$ ,  $\exists \alpha_1 \neq p_1(\lambda)$  的单根

## 性质4的证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

ES IT ALTO DEL

隐式对称QR迭

### Jacobi万没

**经典Jacobi**力法 循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD等注

## 采用数学归纳法

- $\exists i = 1 \exists p_1(\lambda) = \alpha_1 \lambda$ ,  $\exists \alpha_1 \neq p_1(\lambda)$  的单根
- 当i = 2时,由于 $p_2(\alpha_1) = -\beta_2^2 < 0$ ,而且根据性质1,当 $\lambda$ 充分大时有 $p_2(\pm \lambda) > 0$ ,因此在 $(-\infty, \alpha_1)$ 和 $(\alpha_1, +\infty)$ 之内各有 $p_2(\lambda)$ 的一个根,而且 $\alpha_1$ 严格分隔这两个根

## 性质4的证明

## 对称特征值问题的计

## 采用数学归纳法

- $\exists i = 1$   $\exists$
- $\exists i = 2 \forall j$ ,  $\exists i = 2 \forall j$ ,  $\exists i = -\beta_2^2 < 0$ ,  $\exists i = 2 \forall j = -\beta_2^2 < 0$ ,  $\exists i = 2 \forall j = -\beta_2^2 < 0$ 质1, 当 $\lambda$ 充分大时有 $p_2(\pm\lambda) > 0$ , 因此 根,而且 $\alpha_1$ 严格分隔这两个根
- 假设性质在i = k时成立,即 $p_{k-1}(\lambda)$ 和 $p_k(\lambda)$ 的 根都是单根,并且 $p_{k-1}(\lambda)$ 的根严格分 隔 $p_k(\lambda)$ 的根

## 对称特征值问题的计

## • 设 $p_{k-1}(\lambda)$ 和 $p_k(\lambda)$ 的根分别为

$$\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{k-1}, \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$$

则由归纳假设可知

$$\mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \dots < \nu_{k-1} < \mu_k$$

## 对称特征值问题的计

• 设 $p_{k-1}(\lambda)$ 和 $p_k(\lambda)$ 的根分别为

$$\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{k-1}, \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$$

则由归纳假设可知

$$\mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \dots < \nu_{k-1} < \mu_k$$

• 应用三项递推公式可有

$$p_{k+1}(\mu_j) = -\beta_{k+1}^2 p_{k-1}(\mu_j), j = 1, \dots, k$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

其木姓氏

对称QR方法

min and a state of the state of

Jacobi方法

经典 Jacobi方:

循环Jacobi方法及其到

一分注

奇异值分解的计算

二对角体

SVD读有

SVD算法

• 根据性质1和 $p_{k-1}(\nu_j) = 0 \ (1 \leq j \leq k-1)$ 可知 $(-1)^{j-1}p_{k-1}(\mu_j) > 0, \ j = 1, 2, ..., k$ 



### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

隐式对称OR迭化

循环 Jacobi 方注及其

二分法

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

SVD算法

# • 根据性质1和 $p_{k-1}(\nu_j) = 0 \ (1 \leqslant j \leqslant k-1)$ 可 知 $(-1)^{j-1}p_{k-1}(\mu_j) > 0, \ j = 1, 2, ..., k$

• 于是 $(-1)^{j}p_{k+1}(\mu_{j}) > 0, j = 1, 2, ..., k$ 

二分法

奇异值分解的计2

二对用化 SVD迭代 SVD算法

- 根据性质1和 $p_{k-1}(\nu_j) = 0 \ (1 \leq j \leq k-1)$ 可 知 $(-1)^{j-1}p_{k-1}(\mu_j) > 0, \ j = 1, 2, ..., k$
- 于是 $(-1)^{j}p_{k+1}(\mu_{j}) > 0$ , j = 1, 2, ..., k
- 再注意到对充分大的正数 $\mu$ 有 $p_{k+1}(-\mu) > 0$ ,  $(-1)^{k+1}p_{k+1}(\mu) > 0$ , 所以在区间 $(-\infty, \mu_1)$ ,  $(\mu_1, \mu_2)$ , ...,  $(\mu_{k-1}, \mu_k)$ ,  $(\mu_k, +\infty)$ 内都有 $p_{k+1}(\lambda)$ 的根

奇显值分解的计<sup>\*</sup>

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 根据性质1和 $p_{k-1}(\nu_j) = 0 \ (1 \leq j \leq k-1)$ 可 知 $(-1)^{j-1}p_{k-1}(\mu_j) > 0, \ j = 1, 2, ..., k$
- 于是 $(-1)^{j}p_{k+1}(\mu_{j}) > 0$ , j = 1, 2, ..., k
- 再注意到对充分大的正数 $\mu$ 有 $p_{k+1}(-\mu) > 0$ ,  $(-1)^{k+1}p_{k+1}(\mu) > 0$ , 所以在区间 $(-\infty, \mu_1)$ ,  $(\mu_1, \mu_2)$ , ...,  $(\mu_{k-1}, \mu_k)$ ,  $(\mu_k, +\infty)$ 内都有 $p_{k+1}(\lambda)$ 的根
- 这就完成了证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR法

3440517312

经典Jacobi方法

俯环 Jacobi 万法及共类

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

根据性质可知,不可约三对角对称多项式的特征值都是单重实数

## 对称特征值问题的计

• 根据性质可知,不可约三对角对称多项式的特 征值都是单重实数

• 对任意给定的实数 $\mu$ , 定义 $s_k(\mu)$ 表示数 列 $p_0(\mu), p_1(\mu), \dots, p_k(\mu)$ 的变号数

## 对称特征值问题的计

• 根据性质可知,不可约三对角对称多项式的特 征值都是单重实数

- 对任意给定的实数 $\mu$ , 定义 $s_k(\mu)$ 表示数 列 $p_0(\mu), p_1(\mu), \ldots, p_k(\mu)$ 的变号数
- 规定: 如果 $p_i(\mu) = 0$ , 则 $p_i(\mu)$ 与 $p_{i-1}(\mu)$ 同号 (注意,  $p_{i-1}(\mu)$ 不可能也为零)

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

27 -b - 176 - 0 20 1

隐式对称QR迭位

### Jacobi月法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

根据性质可知,不可约三对角对称多项式的特征值都是单重实数

- 对任意给定的实数 $\mu$ , 定义 $s_k(\mu)$ 表示数 列 $p_0(\mu)$ ,  $p_1(\mu)$ , ...,  $p_k(\mu)$ 的变号数
- 规定: 如果 $p_i(\mu) = 0$ , 则 $p_i(\mu)$ 与 $p_{i-1}(\mu)$ 同号(注意, $p_{i-1}(\mu)$ 不可能也为零)
- 例:对前面的三阶矩阵例, $\mu = 1$ ,则我们有  $p_0(1) = 1$ ,  $p_1(1) = 0$ ,  $p_2(1) = -1$ ,  $p_3(1) = 0$

所以变号数
$$s_3(1) = 1$$

## 变号数与根的个数

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选值

Jacobi方法

.....

循环Jacobi方法及其变形

二分法

5异值分解的计算

二对角化

### 定理

若T为不可约对称三对角矩阵,则 $s_k(\mu)$ 

 $(1 \leq k \leq n)$ 恰好是 $p_k(\lambda)$ 在区间 $(-\infty, \mu)$ 内根的个数

### 推论

若T为不可约对称三对角矩阵,则 $s_n(\mu)$  恰好是T在区间 $(-\infty, \mu)$ 内特征值的个数

## 定理的证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

的式对称QR选

Jacobi刀和

经典Jacobi方

循环Jacobi方法及其到

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选行

SVD算法

## 采用数学归纳法

• 当k = 1时定理显然成立

## 定理的证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选

Jacobi方沒

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

## 采用数学归纳法

- 当k = 1时定理显然成立
- 假设当 $k = \ell$ 时定理成立

## 定理的证明

## 对称特征值问题的计

## 采用数学归纳法

- 当k = 1时定理显然成立
- 假设当 $k = \ell$ 时定理成立

• 设
$$p_{\ell}(\lambda)$$
和 $p_{\ell+1}(\lambda)$ 的根分别为

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\ell, \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{\ell+1}$$

则根据性质4.

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \mu_\ell < \lambda_{\ell+1}$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称OR方法

a 式 对 数 O D 许 伊

Jacobi方法

经典 Jacobi 方法

循环Jacobi方法及其变

一分注

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选行

SVD算法

• 设 $s_{\ell}(\mu) = m$ , 则由归纳假设可知 $\mu_m < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 



### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

\_\_\_\_

隐式对称QR选作

### Jacobi刀程

Az ille i i i i i i i i i

循环Jacobi方法及其变

二分法

### 奇异值分解的计算

\_\_对用化 SVD选代

SVD算法

• 设
$$s_{\ell}(\mu) = m$$
,则由归纳假设可知 $\mu_m < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 

• 注意到 $\mu_m < \lambda_{m+1} < \mu_{m+1}$ ,从而 $\mu$ 所在的位置有两种可能性:

$$\lambda_m < \mu_m < \mu \leqslant \lambda_{m+1} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$$

- 设 $s_{\ell}(\mu) = m$ ,则由归纳假设可知 $\mu_m < \mu \leqslant \mu_{m+1}$
- 注意到 $\mu_m < \lambda_{m+1} < \mu_{m+1}$ , 从而 $\mu$ 所在的位置有 两种可能性:

$$\lambda_m < \mu_m < \mu \leqslant \lambda_{m+1} \stackrel{.}{ ext{id}} \lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$$

注意到

$$p_{\ell}(\mu) = \prod_{i=1}^{\ell} (\mu_i - \mu), p_{\ell+1} = \prod_{i=1}^{\ell+1} (\lambda_i - \mu)$$

## $\lambda_m < \mu_m < \mu \le \lambda_{m+1}$ 时

## 对称特征值问题的计

•  $\exists \lambda_m < \mu_m < \mu \leqslant \lambda_{m+1}$  时,可 知 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 同号,即使 $\mu = \lambda_{m+1}$ 按规定此 两数也是同号的

## $\lambda_m < \mu_m < \mu \leqslant \lambda_{m+1}$

## 对称特征值问题的计

知 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 同号,即使 $\mu = \lambda_{m+1}$ 按规定此 两数也是同号的

• 从而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) = m$ , 这正好是 $p_{\ell+1}(\lambda)$ 在区 间 $(-\infty,\mu)$ 内根的个数

## $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ by

对称特征值问题的计

 $\exists \lambda_{m+1} < \mu \leq \mu_{m+1}$ 时,我们分两种情况证 明 $s_{\ell+1}(\mu) = m+1$ 

 $\overline{\mathbb{m}} s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m+1$ 

## $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 时

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭化

Jacobi方法

短典Jacobi 方法 循环Jacobi 方法及其変形

二分法

奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代 SVD算法 当 $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 时,我们分两种情况证明 $s_{\ell+1}(\mu) = m+1$ 

- 若 $\mu < \mu_{m+1}$ ,则 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 异号,因而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m+1$
- 若 $\mu = \mu_{m+1}$ ,则此时有 $p_{\ell}(\mu) = 0$ ,按约定 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell-1}(\mu)$  同号。由性质3可知, $p_{\ell-1}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 异号,因而 $p_{\ell+1}(\mu)$ 与 $p_{\ell}(\mu)$ 异号,从而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m + 1$

## $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$

对称特征值问题的计

当 $\lambda_{m+1} < \mu \leq \mu_{m+1}$ 时,我们分两种情况证 明 $s_{\ell+1}(\mu) = m+1$ 

- $\overline{\mathbb{m}} s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m+1$
- 定 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell-1}(\mu)$  同号。由性质3可知,  $p_{\ell-1}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 异号,因而 $p_{\ell+1}(\mu)$ 与 $p_{\ell}(\mu)$ 异 号,从而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m+1$
- 根据归纳假设,这就完成了证明

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选

Jacobi/J4,

经典 Jacobi方

循环Jacobi方法及其3

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 利用定理的推论,我们可以用二分法求*T*的任何一个指定的特征值

## 对称特征值问题的计

- 利用定理的推论,我们可以用二分法求*T*的任 何一个指定的特征值
- 设T的特征值为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

□製価ル

隐式对称QR选值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

### 奇异值分解的计

二对用化

可升阻刀胜的时

• 利用定理的推论,我们可以用二分法求*T*的任何一个指定的特征值

- 设T的特征值为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$
- 则必有 $|\lambda_i| \leq \rho(T) \leq ||T||_{\infty}$

## 对称特征值问题的计

• 利用定理的推论,我们可以用二分法求*T*的任 何一个指定的特征值

- 设T的特征值为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$
- 则必有 $|\lambda_i| \leq \rho(T) \leq ||T||_{\infty}$
- 假定我们期望求T的第m个特征值 $\lambda_m$  我们先取

$$\ell_0 = -\|T\|_{\infty}, u_0 = \|T\|_{\infty}$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

....

i式对称QR选f

Jacobi万省

級曲 [\_\_\_\_[17]

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD读代

SVD算法

• 根据设定, $\lambda_m$ 必在区间[ $\ell_0, u_0$ ]内

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

<sup>魚</sup>式对称OR迭(

Jacobi刀石

经典 Jacobi方法

循环Jacobi方法及其引

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

SVD算法

- 根据设定, $\lambda_m$ 必在区间[ $\ell_0, u_0$ ]内
- 取[ $\ell_0$ ,  $u_0$ ]的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$

### 对称特征值问题的计

### 根据设定, λ<sub>m</sub>必在区间[ℓ<sub>0</sub>, u<sub>0</sub>]内

- $\mathfrak{P}[\ell_0, u_0]$ 的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$

### 对称特征值问题的计

- 根据设定, $\lambda_m$ 必在区间[ $\ell_0, u_0$ ]内
- $\mathfrak{P}[\ell_0, u_0]$ 的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$ 

  - 否则 $\lambda \in [r_1, u_0]$ , 于是取 $\ell_1 = r_1, u_1 = u_0$

# 对称特征值问题的计

根据设定, λ<sub>m</sub>必在区间[ℓ<sub>0</sub>, u<sub>0</sub>]内

- $\mathfrak{P}[\ell_0, u_0]$ 的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$ 
  - $\mathfrak{P}\ell_1 = \ell_0, \ \mu_1 = r_1$
  - 否则 $\lambda \in [r_1, u_0]$ , 于是取 $\ell_1 = r_1, u_1 = u_0$
  - 如此我们得到一个长度减少一半的区 间[ $\ell_1, u_1$ ]仍包含特征值 $\lambda_m$

# 对称特征值问题的计

•  $\mathfrak{P}[\ell_0, u_0]$ 的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$ 

 $\mathfrak{P}\ell_1 = \ell_0, \ \mu_1 = r_1$ 

• 根据设定, $\lambda_m$ 必在区间[ $\ell_0, u_0$ ]内

• 否则 $\lambda \in [r_1, u_0]$ , 于是取 $\ell_1 = r_1, u_1 = u_0$ 

• 如此我们得到一个长度减少一半的区 间[ $\ell_1, u_1$ ]仍包含特征值 $\lambda_m$ 

• 继续上述过程直到区间长度足够小,最后取区 间中点作为\\_\_\_的近似值

对称特征值问题的计

• 二分法的主要工作是计算 $s_n(\mu)$ . 这显然不能直 接通过计算 $p_i(\mu)$ 的值来实现,因为高阶多项式 的计算很容易出现不稳定

对称特征值问题的计

• 二分法的主要工作是计算 $s_n(\mu)$ . 这显然不能直 接通过计算 $p_i(\mu)$ 的值来实现,因为高阶多项式 的计算很容易出现不稳定

• 
$$\mathbb{E} \chi q_i(\lambda) = \frac{p_i(\lambda)}{p_{i-1}(\lambda)}, i = 1, 2, \dots, n$$

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

----

隐式对称QR选作

Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

ー 内用化 SVD迭代 SVD資注

「开阻刀胖的月昇

• 二分法的主要工作是计算 $s_n(\mu)$ . 这显然不能直接通过计算 $p_i(\mu)$ 的值来实现,因为高阶多项式的计算很容易出现不稳定

• 
$$\mathbb{E} \mathfrak{Z} q_i(\lambda) = \frac{p_i(\lambda)}{p_{i-1}(\lambda)}, i = 1, 2, \dots, n$$

• 根据定义可知

$$q_1(\lambda) = p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$$
$$q_i(\lambda) = \alpha_i - \lambda - \frac{\beta_i^2}{q_{i-1}(\lambda)}, i = 2, \dots, n$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

\_\_\_\_\_

隐式对称QR迭代

Jacobi方法

循环 lacobi方注及其变

一厶辻

奇异值分解的计算

VD迭代 VD算法

对角化 /D迭代 • 二分法的主要工作是计算 $s_n(\mu)$ . 这显然不能直接通过计算 $p_i(\mu)$ 的值来实现,因为高阶多项式的计算很容易出现不稳定

• 
$$\mathbb{E} \chi q_i(\lambda) = \frac{p_i(\lambda)}{p_{i-1}(\lambda)}, i = 1, 2, \dots, n$$

• 根据定义可知

$$q_1(\lambda) = p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$$
  
 $q_i(\lambda) = \alpha_i - \lambda - \frac{\beta_i^2}{q_{i-1}(\lambda)}, i = 2, \dots, n$ 

•  $s_n(\mu)$ 就是数列 $q_1(\mu),\ldots,q_n(\mu)$ 中负数的个数



# $q_{i-1}(\lambda) = 0$ 的处理

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

----

隐式对称OR法

### Jacobi

循环Jacobi方法及其图

一分注

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD洪相

SVD算法

• 当 $q_{i-1}(\lambda) = 0$ 时,按规定此时 $q_{i-1}$ 应按正数对 待

# $q_{i-1}(\lambda) = 0$ 的处理

### 对称特征值问题的计

- 当 $q_{i-1}(\lambda) = 0$ 时,按规定此时 $q_{i-1}$ 应按正数对 待
- 在算法中可用很小的正数代替 $q_{i-1}(\lambda)$

# 运算量

对称特征值问题的计

可以事先把β²算好并贮存起来,因此上述变号 数计算的算法只需要n-1次除法运算 和2n-1次加减运算

# 运算量

# 对称特征值问题的计

可以事先把β²算好并贮存起来,因此上述变号 数计算的算法只需要n-1次除法运算 和2n-1次加减运算

● 如果计算一个特征值平均需要*m*次二分法,则 用二分法求一个特征值的运算量平均为3nm

## 注解

### 对称特征值问题的计

• 二分法具有较大的灵活性,它既可以求某些指 定的特征值,也可以求某个区间内的特征值, 而且对各个特征值的精度要求也可以不一样

## 注解

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选行

Jacobi /J (Z

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计:

二对角化
SVD迭代

17开阻尔胜的71。

二分法具有较大的灵活性,它既可以求某些指定的特征值,也可以求某个区间内的特征值, 而且对各个特征值的精度要求也可以不一样

二分法是非常稳定的,而且计算精度和所需计算时间与特征值的分离程度无关

## 注解

## 对称特征值问题的计

• 二分法具有较大的灵活性,它既可以求某些指 定的特征值,也可以求某个区间内的特征值, 而且对各个特征值的精度要求也可以不一样

- 二分法是非常稳定的,而且计算精度和所需计 算时间与特征值的分离程度无关
- 在算出某个特征值之后,可以应用反幂法求特 征向量

## 奇异值分解的计算

对称特征值问题的计

奇异值分解的计算

• 对给定的 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ ,如何计算其奇异 值分解,这是一个有重要应用意义的问题

# 奇异值分解的计算

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR法(

隐式对称QR迭值

Jacobi力法

新环 Incohi方注及甘利

- 7C3+

奇异值分解的计算

二对角化

● 对给定的 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ ,如何计算其奇异值分解,这是一个有重要应用意义的问题

奇异值分解与对称矩阵的谱分解密切相关,从 而也相应地有计算奇异值分解的QR方法、 Jacobi方法、二分法等

# 奇异值分解的计算

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称**Q**R方法 <sup>三对角化</sup>

Jacobi方法 经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及共

二分法

奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代 SVD算法 • 对给定的 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ , 如何计算其奇异 值分解, 这是一个有重要应用意义的问题

- 奇异值分解与对称矩阵的谱分解密切相关,从 而也相应地有计算奇异值分解的QR方法、 Jacobi方法、二分法等
- 本节我们只介绍计算奇异值分解的QR方法,基本想法: 隐含地应用对称QR方法于A<sup>T</sup>A上,但 又希望在整个过程中并不直接计算A<sup>T</sup>A

### 二对角化

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

11 17 QIC / J 12

節式對称OR供在

### Jacobi力况

经典 lacobites

循环Jacobi方法及其

二分法

### 奇异值分解的计算

二对角体

SVD迭代

SVD算法

• 对应于将 $A^TA$ 三对角化,这里我们是将A二对角化,即计算两个正交矩阵U, V,使得

$$U^T A V = \left( egin{array}{c} B \ 0 \end{array} 
ight), \quad B = \left( egin{array}{cccc} \delta_1 & \gamma_1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \gamma_{n-1} & & & \\ & & & \delta_n \end{array} 
ight)$$

### 二对角化

### 对称特征值问题的计

● 对应于将A<sup>T</sup>A三对角化,这里我们是将A二对 角化,即计算两个正交矩阵U,V.使得

$$U^{\mathsf{T}}AV = \left( \begin{array}{c} B \\ 0 \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{cccc} \delta_1 & \gamma_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \gamma_{n-1} \\ & & & \delta_n \end{array} \right)$$

• 从而有 $V^T A^T A V = B^T B$ 是一个对称三对角阵, 这就相当于把 $A^TA$ 三对角化

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

- a.t. 25. 11.

原式對称OR供在

Jacobi方法

級曲 [2022年]

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD选代

SVD算法

• 二对角分解可以利用Householder变换实现

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

- a.l. & 1b

隐式对称QR选值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

- 二对角分解可以利用Householder变换实现
- 首先确定一个m阶Householder变换 $P_1$ , 把 $P_1^TA$ 的第一列除首元外化为零

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

**三**対角化

隐式对称QR迭值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代

可开阻勿胜的目

• 二对角分解可以利用Householder变换实现

- 首先确定一个m阶Householder变换 $P_1$ , 把 $P_1^TA$ 的第一列除首元外化为零
- 然后确定*n* 1阶Householder变换*H*<sub>1</sub>使得

$$P_1^T A \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{array} \right)$$

的第一行除前两个元素外其余元素约化为零

对称特征值问题的计

二对角分解可以利用Householder变换实现

- 首先确定一个*m*阶Householder变换*P*<sub>1</sub>, 把PTA的第一列除首元外化为零
- 然后确定 n 1阶Householder变换 H₁ 使得

$$P_1^T A \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{array} \right)$$

的第一行除前两个元素外其余元素约化为零

• 如此继续下去就可以完成二对角分解

### SVD迭代: 位移的选取

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二州布ル

隐式对称QR选

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD管注

• 下面对三对角阵 $T = B^T B$ 进行带位移的隐式QR迭代。同样这里的关键是不明确把T计算出来

# SVD迭代: 位移的选取

对称特征值问题的计

• 下面对三对角阵 $T = B^T B$ 进行带位移的隐 式QR迭代。同样这里的关键是不明确把T计算 出来

● 位移的选取:针对T的右下角2阶矩阵

$$\begin{pmatrix} \delta_{n-1}^2 + \gamma_{n-1}^2 & \delta_{n-1}\gamma_{n-1} \\ \delta_{n-1}\gamma_{n-1} & \delta_n^2 + \gamma_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

我们取位移μ为这个矩阵的两个特征值中距 离 $\delta_n^2 + \gamma_{n-1}^2$ 近的那个(即Wilkinson位移)

# **SVD**迭代: *c*, *s*的确定

对称特征值问题的计

• 接下来,确定Givens变换 $G_1 = G(1, 2, \theta)$ 满足

$$\left(\begin{array}{cc} c_1 & s_1 \\ -s_1 & c_1 \end{array}\right)^T \left(\begin{array}{c} \delta_1^2 - \mu \\ \delta_1 \gamma_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} * \\ 0 \end{array}\right)$$

这里 $T - \mu I$ 的第一列是 $(\delta_1^2 - \mu, \delta_1 \gamma_1, 0, ..., 0)^T$ 

### SVD迭代:正交相似变换

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其多

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 最后一步就是确定正交矩阵Q使 得 $Q^T(G_1^TTG_1)Q$ 是对称三对角阵,且 $Qe_1=e_1$ 

### SVD迭代:正交相似变换

对称特征值问题的计

最后一步就是确定正交矩阵Q使 得 $Q^T(G_1^TTG_1)Q$ 是对称三对角阵,且 $Qe_1 = e_1$ 

• 为了避免T的计算,只需计算正交矩阵P和Q使 得 $P^{T}(BG_{1})Q$ 是二对角阵,且 $Qe_{1}=e_{1}$ 

### SVD迭代:正交相似变换

对称特征值问题的计

最后一步就是确定正交矩阵Q使 得 $Q^T(G_1^TTG_1)Q$ 是对称三对角阵,且 $Qe_1 = e_1$ 

- 为了避免T的计算,只需计算正交矩阵P和Q使 得 $P^{T}(BG_{1})Q$ 是二对角阵,且 $Qe_{1}=e_{1}$
- 可以利用Givens变换实现这一点

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

- a.t. # #.

意式对称QR选(

Jacobi/J4,

经典 Jacobi方

循环Jacobi方法及其到

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 隐式QR迭代的前提是 $T = B^T B$ 是不可约的

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

- 隐式QR迭代的前提是 $T = B^T B$ 是不可约的
- T的次对角元为 $\delta_j\gamma_j$ ,因此T不可约的充要条件 是 $\delta_j\gamma_j \neq 0$

对称特征值问题的计

- 隐式QR迭代的前提是 $T = B^T B$ 是不可约的
- T的次对角元为 $\delta_{i}\gamma_{i}$ ,因此T不可约的充要条件 是 $\delta_i \gamma_i \neq 0$
- 当某 $\gamma_i = 0$ 时,这时可以把问题分解为两个 低阶问题处理

对称特征值问题的计

- 隐式QR迭代的前提是 $T = B^T B$ 是不可约的
- T的次对角元为 $\delta_{i}\gamma_{i}$ ,因此T不可约的充要条件 是 $\delta_i \gamma_i \neq 0$
- 当某 $\gamma_i = 0$ 时,这时可以把问题分解为两个 低阶问题处理
- 当某个 $\delta_i = 0$ ,而 $\gamma_i \neq 0$ 时,我们可以通过适当 的Givens变换把B的第i行元素都变零,而保持 其二对角形式不变: 从而实现降阶

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-- 94-46-1b

隐式对称QR选

Jacobi万况

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 在实际计算时,当 $\delta_j$ 或 $\gamma_j$ 很小时,我们就可以 把B分解为两个低阶的二对角阵

# 对称特征值问题的计

- 在实际计算时,当 $\delta_i$ 或 $\gamma_i$ 很小时,我们就可以 把B分解为两个低阶的二对角阵
- 通常使用的准则是: 如果

$$|\delta_j| \leqslant \varepsilon ||B||_{\infty} \ \vec{\boxtimes} \ |\gamma_j| \leqslant (|\delta_j| + |\delta_{j+1}|)$$

就将 $\delta_i$ 或 $\gamma_i$ 视为零,其中 $\epsilon$ 是一个略大于机器精 度的正数

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

商式 对数OP进

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代 SVD算法 • 在实际计算时,当 $\delta_j$ 或 $\gamma_j$ 很小时,我们就可以把B分解为两个低阶的二对角阵

• 通常使用的准则是: 如果

$$|\delta_j| \leqslant \varepsilon ||B||_{\infty} \ \vec{y} \ |\gamma_j| \leqslant (|\delta_j| + |\delta_{j+1}|)$$

就将 $\delta_j$ 或 $\gamma_j$ 视为零,其中 $\varepsilon$ 是一个略大于机器精度的正数

● 将这一准则与前述算法给合,就得到了SVD算 法

对称特征值问题的计

SVD算法

• 在实际计算时,当 $\delta_i$ 或 $\gamma_i$ 很小时,我们就可以 把B分解为两个低阶的二对角阵

• 通常使用的准则是: 如果

$$|\delta_j| \leqslant \varepsilon ||B||_{\infty}$$
  $||S_j| \leqslant (|\delta_j| + |\delta_{j+1}|)$ 

就将 $\delta_i$ 或 $\gamma_i$ 视为零,其中 $\epsilon$ 是一个略大于机器精 度的正数

- 将这一准则与前述算法给合,就得到了SVD算 決
- 算法的渐近收敛速度是三次的

