数值代数习题解答

原生生物

作者 QQ：3257527639

对应教材：数值线性代数 (第二版)

使用资料：个人解题为主，答案来源包括助教的习题课讲义、同学解出的难题或网络上的论文与解答等。

*解答中的伪代码采用严格缩进判断嵌套关系，总体类似 Python

目录

第一章　线性方程组的直接解法

1. 假设输入方阵下标 1 到 n，$A[i]$ 表示 A 的第 i 个行向量，O 代表 n 维零方阵 (采用增广矩阵求逆的思路)：

```
def inverse(A, In):
  In = O;
  for j = 1 to n
    A[j] /= A[j][j]
    In[j][j] = 1/A[j][j]
  for j = 1 to n
    for i = j+1 to n
      In[i] -= A[i][j]In[j];
```

2. 构造辅助 n 维向量 y，初始为零向量，设方阵下标为 1 到 n：令 k 从 n 到 1 循环，每次计算

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{i=k}^{n} s_{ki}y_i}{s_{kk}t_{kk} - \lambda}, y_j = y_j + x_k t_{jk}(j \geq n+1-k)$$

   由定义可发现，每次循环的计算量都是 $O(n)$，因此总计算量为 $O(n^2)$。

   证明思路：将矩阵分块为已算过的部分和将算的部分，已算过的部分通过 y_i 进行“消除偏差”(y_i 在每步后为假设 x 除了已算过的分量外均为 0 后被 T 左乘的结果) 后，即可通过直接的减法、除法得到将算的值。

3. 直接计算可验证其为逆。由定义 l_k 只需满足前 k 个分量为 0，而 $-l_k$ 亦满足此要求，因此成立。

4. 由于 $7 = 3 + 2 \times 2, 8 = 4 + 2 \times 2$，可直接构造 $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

5. 若有 $L_1U_1 = L_2U_2 = A$，由 A 非奇异可知 L_1, L_2, U_1, U_2 非奇异，而 $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$，左侧为单位下三角阵，右侧为上三角阵，因此均只能是 I，从而得证。

6. 令 $L_k = I + t_k e_k^T$，其中 t_k 的前 k 个分量为 0，其余为 1，考虑 $L_n \dots L_1 A = U$ 的结果。由于这相当于分别将 A 的每一行加到其下的所有行上，U 的左上角 $n-1 \times n-1$ 子矩阵为单位阵，最后一列为 $1, 2, \dots, 2^{n-1}$，其余为 0，即为所求。而所求的 L 为 $L_1^{-1} \dots L_n^{-1}$，除了主对角线外下三角部分的元素为 -1，满足要求。

7. 由对称阵定义，设变换后矩阵为 B，只需说明 $b_{ij} = b_{ji}$ $(i, j \geq 2)$，由高斯消去进行的行变换操作可知范围内 $b_{ij} = a_{ij} - a_{1j}\frac{a_{i1}}{a_{11}}$，而 $a_{ij} - a_{1j}\frac{a_{i1}}{a_{11}} = a_{ji} - a_{j1}\frac{a_{1i}}{a_{11}} = b_{ji}$，从而得证。

8. 利用习题 7 结论，同乘 a_{11} 后即需证明 $|a_{11}b_{kk}| = |a_{11}a_{kk} - a_{1k}a_{k1}| > \sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a_{11}a_{kj} - a_{1j}a_{k1}|$。而

$$\sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a_{11}a_{kj} - a_{1j}a_{k1}| \leq \sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a_{11}a_{kj}| + \sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a_{1j}a_{k1}| = \sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a_{11}a_{kj}| + \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}a_{k1}| - |a_{1k}a_{k1}|$$

$$\leq \sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a_{11}a_{kj}| + |a_{11}a_{k1}| - |a_{1k}a_{k1}| < |a_{11}a_{kk}| - |a_{1k}a_{k1}| \leq |a_{11}a_{kk} - a_{1k}a_{k1}|$$

从而得证。又由习题 7 可知对称性保持，从而现在的主对角线对应元素是行列中的最大值，不需要再进行交换，由此即知列主元与直接消去结果相同。

9. 不必储存 L：将 A 与 b 同时左乘高斯变换阵，这样当 A 化为上三角阵时 b 也成为了合适的形式。此时再使用回代法即可。

   运算次数：高斯变换时，第 k 次需要对右下角 $n-k\times n+1-k$ 子方阵的每一个进行操作，每次操作需要减法、乘法、除法各一次，因此总数量为 $\sum_{k=1}^{n}(n-k)(n+1-k)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$。回代法需要的乘法运算数量为 $\frac{(n-1)n}{2}$，因此总数量为 $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$。

10. 由习题 7 可知其对称，下面进一步说明正定。

    设变换后的 $B=LA$，考虑 $C=LAL^T$，由于右乘 L^T 对应的操作为左下角右侧的列减去第一列，而此时第一列只有 b_{11} 不为 0，C 的右下角仍然为 A_2，更进一步，由正定阵性质，相合变换后仍正定，因此 C 为正定阵，由对称性可知 C 必然为 $\operatorname{diag}(a_{11},A_2)$。考虑特征值可知 A_2 必然也为正定阵，由此得证。

11. 设 k 次后对应左乘的 L 为 $\begin{pmatrix} L_k & O \\ M & I_{n-k} \end{pmatrix}$，则由算法有 $\begin{pmatrix} L_k & O \\ M & I_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U_k & N \\ O & S \end{pmatrix}$。考虑下方一列可知 $MA_{11}+A_{21}=O, MA_{12}+A_{22}=S$，左式可解出 $M=-A_{21}A_{11}^{-1}$，代入右式即得结论。

12. 由于全主元第 i 次消去时将 u_{ii} 调整为右下角矩阵中最大元，此时其必然大于等于右侧的任何元素，而此后的操作并不会影响第 i 行及其上方的部分，u_{ii} 大于等于本行右边的性质得以保存，从而得证。

13. 通过列主元高斯消去，可得到 $PA=LU$，利用习题 1 实现的求逆算法 (对上三角阵类似) 可得到 L^{-1} 与 U^{-1}，再计算 $U^{-1}L^{-1}P$ 即为 A 的逆。

14. 记 a_j 为 A^{-1} 的第 j 列，考虑方程 $LUa_j=e_j$ 即可解出 a_j，而其第 i 个分量即为所求 (由于只需要知道一个分量，最后一步解 $Ua_j=L^{-1}e_j$ 的过程进行部分即可)。

15. 由于 A^T 是严格对角占优阵，A 的主对角线元素模长大于本列其他所有元素模长之和。类似习题 8 估算可证明每次高斯消去后的 A_2 仍满足 A_2^T 严格对角占优，从而选出的列主元即为主对角线上元素，因此直接高斯消元与列主元效果相同。由于每次保证了对角元模长是本列最大，当 $i\neq j$ 时有 $|l_{ij}|<1$。

16. (1) 由于 $(I-ye_k^T)(I+ye_k^T)=I-y_kye_k^T$，有 $(I-ye_k^T)(I+ye_k^T-y_kI)=(1-y_k)I$，由此即得非奇异时逆为 $I+\dfrac{ye_k^T}{1-y_k}$，而直接计算行列式可验证 $1-y_k=0$ 时奇异。

    (2) $(I-ye_k^T)x=e_k$，即 $x_ky=I-e_k$，存在解要求 x_k 不能为 0。

    (3) 算法类似高斯消去，每次操作后成为 $\begin{pmatrix} I_k & M \\ O & A_{n-k} \end{pmatrix}$，需要 A_{n-k} 左上角的元素非零才能继续取解。利用分块考虑每次操作使用的方阵的 k 阶顺序主子式部分，其为单位下三角阵，与定理 1.1.1 完全相同可知每次得到的 A_{n-k} 左上角的元素非零等价于 A 的各阶顺序主子式非奇异。

17. 若有 $A=L_1L_1^T=L_2L_2^T$，则有 $L_2^{-1}L_1=L_2^TL_1^{-T}$，由于左侧为下三角，右侧为上三角，最终乘积一定为对角阵。但由于 $L_2^TL_1^{-T}=(L_1^{-1}L_2)^T=(L_2^{-1}L_1)^{-T}$，此对角阵与自己逆转置相同，每个元素只能为正负 1。由于 L_1 与 L_2 对角元为正，计算可知每个元素只能为此对角阵元素必须为正，因此即为单位阵，从而得证。

18. 带宽 $2n+1$，也即 $|i-j|>n$ 的部分均为 0，由平方根法的计算过程对 k 归纳可得 l_{ik} 亦会满足 $|i-k|>n$ 的部分为 0(对 $k+1$ 时的情况，在 $|i-k-1|>n$ 时，$a_{i,k+1}=0$，且 $\sum_{p=1}^{k} l_{ip}l_{kp}$ 的每一个 l_{ip} 均为 0，因此 $l_{i,k+1}=0$)，又因其为三角阵，可知带宽为 $n+1$。

19. 设 $L=\begin{pmatrix} L_k & O \\ M & N_{n-k} \end{pmatrix}$，直接计算可知 $A=\begin{pmatrix} L_kL_k^T & L_kM^T \\ ML_k^T & MM^T+N_{n-k}N_{n-k}^T \end{pmatrix}$，从而有结论 (由 L_k 为对角均正的下三角阵，也可推出 A_k 正定对称)。

20. 类似习题 10 的过程，在每次高斯变换左乘 L_k 时，同时右乘 L_k^T。每次右乘不改变右下角的子矩阵，因此仍可通过定理 1.1.1 推知操作可进行至结束。由于每步保持对称性，在进行 $n-1$ 次消去后即得对角阵，此时 $A=L_1^{-1}\dots L_{n-1}^{-1}DL_{n-1}^{-T}\dots L_1^{-T}$，即可合并为 LDL^T。

21. 利用平方根法计算可知 $L=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，进一步计算得原方程组解为 $x=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

22. 假设输入方阵下标 1 到 n，O 代表 n 维零方阵 (实际计算过程与平方根法完全相同，只是改变计算顺序。实际操作时可直接用 A 的对应部分保存 l，此处为清晰将两矩阵分开)：

```
def Cholesky(A, l):
  l = O
  for i = 1 to n
    for j = 1 to i-1
      l[i][j] = a[i][j]
      for p = 1 to j-1
        l[i][j] -= l[i][p]*l[j][p]
      l[i][j] /= l[j][j];
    l[i][i] = a[i][i]
    for p = 1 to i-1
      l[i][i] -= l[i][p]*l[i][p]
    l[i][i] = sqrt(l[i][i])
```

23. 假设正定对称矩阵 A 可以分解为 LDL^T，则 $A^{-1}=(L^{-1})^TD^{-1}L^{-1}$，利用习题 1 的算法可算出 L^{-1}，再计算转置，D^{-1} 即为每个对角元取倒数，最后计算乘法即可。

24. (1) 由 Hermite 性计算知 A 对称、B 反对称，从而 C 对称。由正定 $(x+y\mathrm{i})^H(A+B\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})>0$，从而 $x^TAx+y^TAy+y^TBx-x^TBy>0$，此即为 $\begin{pmatrix} x^T & y^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}>0$，由于 x,y 可任取，知 C 正定。

(2) 此方程即 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$，利用上题结论可知 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ 为对称正定阵，从而由改进平方根法作出分解 LDL^T 后即可通过 $LDL^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ 解出所求的 x,y。

第二章　线性方程组的敏度分析与消去法的舍入误差分析

1. 正定性：由于 $\alpha_i > 0$ 可知其良定，进一步由定义可知。

   齐次性：直接代入计算可知。

   三角不等式：记 $x' = (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n), y' = (\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_n y_n)$，由于 $\|x'\|_2 + \|y'\|_2 \geq \|x' + y'\|_2$，代入可知此范数具有三角不等式。

2. 利用 $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ 的证明过程可知取等当且仅当 $x^T y = \|x\|\|y\|$，同平方得 $(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$，作差配方有 $\sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2 = 0$，即可知 x, y 各分量成比例。

3. 直接计算 $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^n \|a_j\|_2^2$。

4. 左：由二范数定义有 $\|A\|_2 \geq \frac{\|Ab_i\|_2}{\|b_i\|_2}$，其中 $B = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$，平方得 $\|A\|_2^2 \geq \frac{\|Ab_i\|_2^2}{\|b_i\|_2^2}$，利用习题 3，将右侧进行加权平均有 $\|A\|_2^2 \geq \sum_{i=1}^n \frac{\|b_i\|_2^2}{\|B\|_F^2} \frac{\|Ab_i\|_2^2}{\|b_i\|_2^2}$，即 $\|A\|_2^2 \|B\|_F^2 \geq \sum_{i=1}^n \|Ab_i\|_2^2 = \|AB\|_F^2$，最后一步再次运用了习题 3。

   右：利用左可知 $\|B^T A^T\|_F \leq \|B^T\|_2 \|A^T\|_F$，而二范数与 Frobenius 范数均在转置下不变，因此同作转置即可。

5. 正定、齐次：由定义直接得。

   三角不等式：$\max_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{i,j}(|a_{ij}| + |b_{ij}|) \leq \max_{i,j} |a_{ij}| + \max_{i,j} |b_{ij}|$，两边同乘 n 即可。

   相容性：$\max_{i,j} \left|\sum_k a_{ik} b_{kj}\right| \leq \max_{i,j} \sum_k |a_{ik}||b_{kj}| \leq n \max_{i,j} |a_{ij}| \max_{i,j} |b_{ij}|$，两边同乘 n 即可。

   ν 不满足相容：n 维时两个全 1 矩阵的乘积为全 n 矩阵，当 $n > 1$ 时即可知 ν 不满足相容性。

6. 当：由 A 正定，其可作 Cholesky 分解 LL^T，由定义可发现 $f(x) = \|L^T x\|_2$，由 L^T 可逆可知其正定，直接计算可知齐次，又由 $L^T(x + y) = L^T x + L^T y$ 可知满足三角不等式，故为范数。

   仅当：若 A 不正定，由定义存在非零的 x 使得 $x^T A x \leq 0$，此时不满足正定性或根号内为负数，不为范数。

7. 正定性：由 $\operatorname{rank} A = n$ 可知方程组 $Ax = 0$ 中可以选出 n 个独立方程，从而由 $x \in \mathbb{R}^n$ 可知解只能为 $x = \mathbf{0}$，由此利用 $\|Ax\| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$ 可知正定。

   齐次性：由原范数齐次性，直接计算 $\|\lambda x\|_A = \|A\lambda x\| = \lambda\|Ax\|$，由此得证。

   三角不等式：由 $\|Ax\| + \|Ay\| \geq \|Ax + Ay\| = \|A(x + y)\|$ 可知成立。

8. 先说明 $I - A$ 可逆。由 $\|A\| < 1$ 与 $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ 可知 $\lim_{n\to\infty} A^n = O$，从而 $\rho(A) < 1$。考虑 A 的 Jordan 标准型 J 可发现对角元素模长小于 1，而其右侧的副对角线上元素模长不超过 1，从而估算可知 J^k 中任何元素不超过 $Ck^n \rho(A)^k$，此级数求和收敛，因此 $\sum_{k=0}^\infty A^k$ 收敛。由于 $(I - A)\sum_{k=0}^{n-1} A^k = I - A^n$，取极限可知收敛极限即为 $(I - A)^{-1}$。

   $1 + \|(I - A)^{-1}\|\|A\| \geq 1 + \|(I - A)^{-1} A\| \geq \|(I - A)^{-1}(I - A) + (I - A)^{-1} A\| = \|(I - A)^{-1}\|$，同除以 $1 - \|A\|$ 后移项即得证。

9. 由于 A 可逆，$\{Ax | x \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$，从而 $\|A^{-1}\| = \max_{\|x\|=1} \|A^{-1}x\| = \max_{\|Ax\|=1} \|A^{-1}Ax\| = \max_{\|Ax\|=1} \|x\| = \max_x \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \left(\min_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^{-1} = \left(\min_{\|x\|=1} \|Ax\|\right)^{-1}$，因此得证。

10. 由 L 下三角，U 上三角可知 $a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj}$，但只有当 $k \leq \min i, j$ 时才可能 l_{ik}, u_{kj} 均非 0，从而之后的项可忽略，对第 i 行可写成 $a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik} u_{kj}$，又由 LU 分解性质可知 $l_{ii} = 1$，从而 $a_{ij} - u_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$，由于所有下标 j 对应，写为行向量后即为题中形式。

将此式两边取一范数后，利用三角不等式与 $|l_{ij}| \le 1$ 可知 $\|a_i^T\|_1 + \sum_{j=1}^{i-1}\|u_j^T\|_1 \ge \|u_i^T\|_1$，由此归纳可得 $\|u_i^T\|_1 \le \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-1-j}\|a_j^T\|_1 + \|a_i^T\|_1 \le 2^{i-1}\|A\|_\infty$，右边的不等号是由于 $\|A\|_\infty$ 为所有 $\|a_i^T\|$ 中最大的一个。由此，$\forall i, \|u_i^T\|_1 \le 2^{n-1}\|A\|_\infty$，从而 $\|U\|_\infty \le 2^{n-1}\|A\|_\infty$。

11. (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 375 & -187 \\ -376 & 375/2 \end{pmatrix}, \kappa_\infty(A) = (752+750)(376+\frac{375}{2}) = 846377$

    (2) $b = (1,1)^T$ 时 $x = (188, -188.5)^T$，而 $b = (1, 1.1)^T$ 时 $x = (169.3, -169.75)^T$。

    (3) $x = (1,-1)^T$ 时 $b = (1,2)^T$，而 $x = (1.1, -1)^T$ 时 $b = (38.5, 77.2)^T$。

12. 由于 $\|I\|\|I\| \ge \|I\|$ 且 $\|I\| > 0$，可知 $\|I\| \ge 1$，从而 $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \ge \|AA^{-1}\| \ge 1$。

13. 右侧即为 $\|A^{-1}\|\|(A+E)-A\|\|(A+E)^{-1}\| \ge \|A^{-1}-(A+E)^{-1}\| = \|(A+E)^{-1}-A^{-1}\|$，从而得证。

14. 由于 $\mathrm{fl}(\prod_{i=1}^n x_i) = \prod_{i=1}^n x_i(1+\delta_{i-1})$，$\delta_i$ 代表每次乘法运算的舍入产生的误差，$\delta_0 = 0$。从而可知 ε 的上界为 $(1+\mathbf{u})^{n-1}-1$，由定理 2.3.3，当 $(n-1)\mathbf{u} \le 0.01$ 时即不超过 $1.01(n-1)\mathbf{u}$。

15. 由定义可知 $\mathrm{fl}(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n x_i \prod_{j=i}^n (1+\delta_j)$，其中 δ_i 表示每次加法运算产生的误差，$\delta_1 = 0$。由 $n\mathbf{u} \le 0.01$ 可知 $k\mathbf{u} \le 0.01$ 当 $k \le n$ 时成立，从而由定理 2.3.3 考虑每个 x_i 右边的 $(1+\delta_j)$ 个数可知结论。

16. 设 a_i^T 为 A 的第 i 个行向量，则 $\mathrm{fl}(Ax_i) = \mathrm{fl}(a_i^T x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(1+\lambda_{ij})\prod_{k=j}^n(1+\delta_{ik})$，其中 λ_{ij} 表示乘法运算产生的误差，δ_{ik} 代表加法运算产生的误差，$\delta_{1k} = 0$，由于 a_{ij} 的右侧乘上了 $\begin{cases} n & j = 1 \\ n-j+2 & j \ne 1 \end{cases}$ 个误差项，由定理 2.3.3 可知结论成立。

17. $\mathrm{fl}(x^T x) = \sum_{i=1}^n x_i^2(1+\lambda_i)\prod_{j=i}^n(1+\delta_i)$，其中 δ_i 表示每次加法运算产生的误差，$\delta_1 = 0$。由于每个 x_i^2 右侧最多有 n 个误差项，每个 x_i 的误差必在 $(1-\mathbf{u})^n$ 与 $(1+\mathbf{u})^n$ 之间。由于 x_i^2 均为正，最大误差在同取 $+$ 或 $-$ 时，因此即有 $\frac{\mathrm{fl}(x^T x)}{x^T x} \in [(1-\mathbf{u})^n, (1+\mathbf{u})^n]$，于是 $\alpha \le n\mathbf{u} + O(\mathbf{u}^2)$。

18. 类似第一章习题 18 可说明 L 与 U 均为带宽为 2 的带状矩阵，利用习题 10 等式，当 A 为三对角阵时，由于其他项都为 0，有 $u_i^T = a_i^T - l_{i,i-1}u_{i-1}^T, i \ge 2$，从而由 $|l_{ij}| \le 1$ 可知 $|a_{1j}| \ge |u_{1j}|, |a_{ij}| + |u_{i-1,j}| \ge |u_{ij}|, i \ge 2$。

    由于 U 为带宽 2 的上三角阵，当且仅当 $i = j-1$ 或 j 时 $u_{ij} \ne 0$，从而 $|u_{j-1,j}| \le |a_{j-1,j}| + |u_{j-2,j}| = |a_{j-1,j}|, |u_{ii}| \le |a_{ii}| + |u_{i-1,i}| \le |a_{i-1,i}| + |a_{ii}|$，因此 U 中任何元素不超过 $2\max_{i,j}|a_{ij}|$，从而得证。

19. 利用习题 10 等式可知 $a_{ij} - u_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$，第一章习题 15 已说明每一步分解中 A 的右下角子矩阵为列对角占优，因此 $\sum_{k=1}^{i-1}|l_{ik}| < 1$，于是 $|u_{ij}| \le |a_{ij}| + \max_{k<i}|u_{kj}|$。

    对上式归纳，$|u_{1j}| \le |a_{1j}|$，此后每次最大值最多增加 $|a_{ij}|$，因此 $i \le j$ 时 $|u_{ij}| \le \sum_{k=1}^{i}|a_{kj}| \le \sum_{k=1}^{j}|a_{kj}| \le 2|a_{jj}|$，而由于其为上三角阵，$i < j$ 时恒为 0，从而 $\rho \le 2$。

20. 由算法过程可以发现，由于每个元素所在的行列最多还有 m 个其他元素，计算 L, U 的过程中每个元素至多产生 m 次减法、m 次乘法与 1 次除法的误差，由定理 2.3.3 可知每个元素的误差至多为 $(2m+1)\mathbf{u} + O(\mathbf{u}^2)$，而计算回 A 的部分需要 m 次乘法与 $m-1$ 次加法，类似得最终误差为 $(2m-1)(2m+1)\mathbf{u} + O(\mathbf{u}^2)$，当 $\mathbf{u}$ 较小时以 $4m^2\mathbf{u}$ 为上界，$m = 3$ 时即为 $36\mathbf{u}$。

21. 由算法过程可以发现，计算 L 的过程中每个元素至多产生 n 次减法、n 次乘法与 1 次除法或开方的误差，而计算回 A 得过程中最多需要 n 次乘法与 $n-1$ 次加法，类似习题 20 知最终误差为 $\prod_{i=1}^{4n^2-1}(1+\delta_i)$，类似引理 2.4.1 计算方法可知条件下误差可以用 $4.09n^2\mathbf{u}$ 控制。

第三章　最小二乘问题的解法

1. $C=\begin{pmatrix}35&44\\44&56\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$，解为 $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。

2. $C=\begin{pmatrix}6&3&1&1\\3&9&3&3\\1&3&1&1\\1&3&1&1\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}4\\3\\1\\1\end{pmatrix}$，可发现 C 的零化子空间一组基为 $u=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\3\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$，而一个特解为 $x_0=\begin{pmatrix}3/5\\2/15\\0\\0\end{pmatrix}$，由此通解为 $x_0+au+bv,a,b\in\mathbb{R}$。

3. 由乘正交阵不改变二范数可知变换前后二范数必然相同，从而 $\alpha=5$。由定义设 $H=I-2ww^T$，可知 $2ww^T(1,0,4,6,3,4)^T=(0,-5,0,0,3,4)$，也即 $2w^T(1,0,4,6,3,4)^Tw=(0,-5,0,0,3,4)$，可得 $w=\frac{\sqrt{2}}{10}(0,-5,0,0,3,4)$。

4. 即 $5c+12s=-5s+12c$，有 $17s=7c$，解得 $s=\frac{7\sqrt{2}}{26},c=\frac{17\sqrt{2}}{26}$，此时 $\alpha=\frac{13\sqrt{2}}{2}$。

5. 即 $-sx_1+cx_2=0$，设 $s=a+b\mathrm{i},x_i=a_i+b_i\mathrm{i}$ 可知 $\begin{cases}-a_1a+b_1b+b_2c=0\\-b_1a-a_1b+a_2c=0\end{cases}$。若 $|x_1|=0$，取 $s=1,c=0$ 即可，否则方程组中 a,b 线性无关，可令 $c=1$ 得到此方程的特解，再对模长进行归一化 (三个分量同时除以模长) 即可。

6. 当 $a_j\neq0$ 时，类似习题 5 解方程可构造二阶 Givens 方阵 Q 使得 $Q\begin{pmatrix}a_i\\a_j\end{pmatrix}$ 的第二个分量为 0，记其角度为 θ，则 a_i,a_j 在向量 α 的第 i,j 行时，计算知 $Q(i,j,\theta)\alpha$ 可使 $a_j=0$，且不影响 i,j 外的其他行。

   于是得到算法：对 x 除第一行外的每一行，若为 0 则跳过，否则找到对应将其置为 0 的 $Q(1,j,\theta_j)$。同理，对 y 除第一行外的每一行找到 $P(1,k,\theta_k)$，则 $\prod_{k=n}^{1}P(1,k,-\theta_k)\prod_{j=1}^{n}Q(1,j,\theta_j)$ 即为所求。

   证明：记 $Q=\prod_{j=1}^{n}Q(1,j,\theta_j)$，$P=\prod_{k=1}^{n}P(1,k,\theta_k)$，则根据构造过程可知 $Qx=Py=e_1$，而每个 Givens 方阵的逆为其转置，也即将 θ 变为 $-\theta$，于是 P 的逆为 $\prod_{k=n}^{1}P(1,k,-\theta_k)$，即有 $P^{-1}Qx=y$。

7. 类似习题 3，先计算 $\alpha=\frac{\|x\|_2}{\|y\|_2}$，设 H 为 $I-2ww^T$，可发现 $2(w^Tx)w=x-\alpha y$，从而先令 $w_0=\alpha y-x$，再计算 $w=\frac{w_0}{\|w_0\|_2}$ 即可得到 H。

8. 思路事实上与定理 3.3.1 完全一致，只是改变操作顺序与边的序号。归纳构造：

   H_k 操作前，后 $k-1$ 列已符合要求，而 H_k 将倒数第 k 列 $(0,\dots,0,a_{n-k+1},\dots,a_n,a_{n+1},\dots,a_m)^T$ 变为 $(0,\dots,0,\alpha,a_{n-k+2},\dots,a_n,0,\dots,0)^T$。这样得到的 w_k 只有第 $n-k+1$ 与后 $m-n$ 个分量非零，而后 $k-1$ 列这些分量都是 0，因此利用 x,w 非零分量不重合时 $(I-2ww^T)x=x-2(w^Tx)w=x$ 可知不会破坏已符合要求的部分，从而成立。

9. 由定理 3.1.4 知只需求解 $L^TLz=L^TPb$，由于 L 为单位下三角，其列满秩，于是 $L^TLz=L^TPb$ 有唯一解。将其分解为 $H\begin{pmatrix}L_1\\O\end{pmatrix}$ 后，计算发现即为求解 $L_1^TL_1z=L^TPb$，而这可以直接通过求解 $L_1^Tz_0=L^TPb$ 与 $L_1z=z_0$ 两个方程得到解。

   当 $Ux=z$ 时，由于 z 满足 $L^TLz=L^TPb$，代入知 $L^TLUx=L^TPb$，于是 $U^TL^TLUx=U^TL^TPb$，即 $A^TAx=A^TPb$，由定理 3.1.4 可知结论。

10. 由定理 3.1.4 可知 $A^TAXb=A^Tb$ 对任何 b 成立，取 b 为 e_i 并拼接可知 $A^TAXI=A^TI$，从而 $A^TAX=A^T$，同取转置有 $X^TA^TA=A$。

    在 $A^TAX=A^T$ 两边同时左乘 X^T 可知 $AX=X^TA^TAX=X^TA^T=(AX)^T$，从而得证第二个式子，而 $A=X^TA^TA=(AX)^TA=AXA$，从而得证第一个式子。

11. 定义 Givens 函数 $g(a,b)=\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，用于生成左乘 $(a,b)^T$ 使 b 成为 0 的 θ，下文 I 为单位阵，$G(i,j,\theta)$ 与书上定义相同，乘法为矩阵乘法：

```
def QR(A, Q):
  Q = I
  for i = n downto 3
    if (A[i][1] != 0)
      Q = Q * G(i-1,i,-g(A[i-1][1],A[i][1]))
      A = G(i-1,i,g(A[i-1][1],A[i][1])) * A
  for i = 2 to n
    if (A[i][i-1] != 0)
      Q = Q * G(i-1,i,-g(A[i-1][i-1],A[i][i-1]))
      A = G(i-1,i,g(A[i-1][i-1],A[i][i-1])) * A
```

    算法分为两步，第一步自下而上第一列的每个元素与上面的元素合并 (只要为 0 则跳过)，这样合并后，每次合并过程可能让下三角部分的 $a_{i,i-1}$ 变为非 0，但其他元素不会受影响。于是，完全合并后，矩阵除了上三角部分，至多还有 $a_{i,i-1}$ 一条对角线非零。第二步针对这条对角线再用 Givens 方阵操作，可发现此时不会再影响下三角部分，因此最多通过 $(n-1)+(n-2)=2n-3$ 个 Givens 方阵即可实现上三角化，再对应计算 Q 即可。

12. 等式的证明：直接利用 $\|x\|_2^2=x^Tx$ 展开计算可发现成立。

    当 $\|Ax-b\|_2$ 为最小时，任意 $\|A(x+\alpha w)-b\|_2\geq\|Ax-b\|_2$，于是 $2\alpha w^TA^T(Ax-b)+\alpha^2\|Aw\|^2\geq 0$ 对任何 α,w 成立。由于 α 与 w 同时取相反数不影响结果，可不妨设 $\alpha>0$，此时即需要 $2w^TA^T(Ax-b)+\alpha\|Aw\|^2\geq 0$ 恒成立。

    若 $A^T(Ax-b)\neq\mathbf{0}$，假设其第 i 个分量不为 0，可取合适的 $w\in\{\pm e_i\}$，使 $2w^TA^T(Ax-b)<0$，再令 $\alpha\to 0$ 即有矛盾。于是，必须 $A^T(Ax-b)=\mathbf{0}$，即 $A^TAx=A^Tb$。

第四章　线性方程组的古典迭代解法

1. A_1 在 Jacobi 迭代法迭代矩阵是 $\begin{pmatrix}0&1/2&-1/2\\-1&0&-1\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}$，谱半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，不收敛；而 G-S 迭代法迭代矩阵是 $\begin{pmatrix}0&1/2&-1/2\\0&-1/2&-1/2\\0&0&-1/2\end{pmatrix}$，谱半径为 $\frac{1}{2}$，收敛。

A_2 在 Jacobi 迭代法迭代矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，谱半径为 0，收敛；而 G-S 迭代法迭代矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，谱半径为 2，不收敛。

2. 由谱半径可知 B 特征值全为 0，考虑 Jordan 标准型可发现必有 $B^n = O$，而 $x_n = B^n x_0 + B^{n-1}g + \cdots + Bg + g$，由 $B^n = O$ 知 $x_n = (B^{n-1} + \cdots + I)g$，进一步计算可发现 $Bx_n + g$ 仍为 x_n，也就是此即为精确解且此后不再变化。

3. (1) 也即 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_3 > 0$ 对非零向量恒成立成立，$a \in (-1,1)$ 时配方知满足要求，否则令 $x_1 = x_3 = 1, x_2 = 0$ 得矛盾。于是结论为 $a \in (-1,1)$。

   (2) Jacobi 迭代法迭代矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$,特征值为 $0,-a,a$,收敛需谱半径小于 1,即 $a \in (-1,1)$。

   (3) G-S 迭代法迭代矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$，特征值为 $0,0,a^2$，收敛需谱半径小于 1，即 $a \in (-1,1)$。

4. 先证明：可以找到排列方阵 P 使得 PA 左上角元素非零，右下角 $n-1$ 阶子矩阵非奇异。

   考虑 Laplace 展开 $\det(A) = \sum_i a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A_{i1})$，其中 A_{ij} 为去掉 a_{ij} 所在行列的子矩阵。由于行列式非零，右边至少有一项非零，不妨设为 t，则 a_{t1} 与 $\det(A_{t1})$ 均非零，取 P 为交换 1 与 t 的置换阵即可验证成立。

   于是，通过归纳，一阶时成立，假设 $n-1$ 阶时成立，n 阶时先取出如上的 P_0，再对右下角取出符合要求的 Q，令 $P = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix} P_0$ 即可。

5. 利用定理 4.2.4，只需说明 $\|B\|_\infty < 1$，而 $\sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \sum_{j\neq i} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \frac{\sum_{j\neq i}|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$，于是其对 i 取最大值也小于 1，从而得证。

6. 归纳，一阶时可直接说明成立，若 $n-1$ 阶时成立，下证 n 阶成立。记 $m_i = |a_{ii}| - \sum_{j\neq i} a_{ij}$

   利用第一章习题 8 的证明过程中的小于号步骤，经过一步高斯消去，剩下的 A_2 乘 a_{11} 后的对角元 $|a_{11}a_{kk} - a_{1k}a_{k1}|$ 减去 $\sum_{j=2,j\neq k}^n |a_{11}a_{kj} - a_{1j}a_{k1}|$ 至少为 $|a_{11}a_{kk}| - \sum_{j=1,j\neq k}^n |a_{11}a_{kj}| = m_k|a_{11}|$，于是除以 $|a_{11}|$ 后得其至少为 m_k。

   于是，$|\det(A)| = |a_{11}||\det(A_2)| \geq |a_{11}|\prod_{k=2}^n m_k \geq \prod_{k=1}^n m_k$。

   * 归纳可发现这题的界可以作较大改进

7. 由于 b 不影响收敛性，不妨设其为 0，则有 $x_{n+1} = (D-L)^{-1}L^T x_n$，于是 $(D-L)x_{n+1} = L^T x_n$。两边同左乘 x_n^T 与 x_{n+1}^T，利用 $x^TAx = x^TA^Tx$ 分解为 L, D 计算可发现

$$x_{n+1}^TAx_{n+1} - x_n^TAx_n = -(x_n - x_{n+1})^TD(x_n - x_{n+1}) \leq 0$$

   于是若 A 不正定，存在非零 x 使 $x^TAx \leq 0$。若某次迭代中 x_n 与 x_{n+1} 不同，则由 D 正定知 $x_{n+1}^TAx_{n+1} - x_n^TAx_n < 0$，于是 $x_{n+1}^TAx_{n+1} < 0$，此后不增，不可能收敛到解。否则，x 一直不变，由非零亦不是解，从而矛盾。

8. 若不收敛，则 $\rho(H)\geq 1$，即有 λ 使得 $\lambda H=\alpha\lambda, |\alpha|\geq 1$，则计算知 $\lambda^H B\lambda=(1-|\alpha|^2)\lambda^H P\lambda$。记 $\lambda=a+b\mathrm{i}$ 可发现正定阵对任何复向量 λ 仍有 $\lambda^H P\lambda>0, \lambda^H B\lambda>0$，于是矛盾。

9. $\omega=1$ 时，计算发现即为 Jacobi 迭代矩阵，也即要证，当 $\rho(I-C)<1$ 时，$\rho(I-\omega C)<1, \omega\in(0,1)$。若否，有 $(I-\omega C)\lambda=\alpha\lambda, |\alpha|\geq 1$，于是 $(I-C)\lambda=\big(\frac{\alpha-1}{\omega}+1\big)\lambda$。记 $c=\frac{1}{\omega}$，乘共轭计算此特征值的模长平方为

$$c^2|\alpha|^2+(c-1)^2-2(c-1)c\operatorname{Re}(\alpha)\geq c^2|\alpha|^2+(c-1)^2-2(c-1)c|\alpha|=(c(|\alpha|-1)+1)^2\geq|\alpha|^2\geq 1$$

从而矛盾。

10. 与定理 4.2.6 类似，由于

$$I-B=D^{-1/2}(\omega^{-1}D)^{-1/2}A(\omega^{-1}D)^{-1/2}D^{1/2}$$

$$I+B=D^{-1/2}\big(2I-(\omega^{-1}D)^{-1/2}A(\omega^{-1}D)^{-1/2}\big)D^{1/2}$$

特征值均为正实数，因此 $(\omega^{-1}D)^{-1/2}A(\omega^{-1}D)^{-1/2}, 2I-(\omega^{-1}D)^{-1/2}A(\omega^{-1}D)^{-1/2}$ 正定对称，从而相合得结论。

11. 直接计算可得

$$\lambda I-L_\omega=(D-\omega L)^{-1}((\lambda+\omega-1)D-\lambda\omega L-\omega U)$$

类似定理 4.2.9，只需说明 $|\lambda|\geq 1$ 时 $(\lambda+\omega-1)D-\lambda\omega L-\omega U$ 严格对角占优或不可约对角占优。同除以 ω 得 $(\frac{\lambda-1}{\omega}+1)D-\lambda L-U$，由习题 9 证明过程知 $\frac{\lambda-1}{\omega}+1$ 模长大于等于 λ，从而严格对角占优或不可约对角占优性仍保持，即得证。

12. 非对角线非零元素为 $12, 13, 21, 24, 31, 34, 42, 43$，分为 $\mathcal{S}_1=\{1\}, \mathcal{S}_2=\{2,3\}, \mathcal{S}_3=\{4\}$ 即可。

13. (a) 直接计算 $a_{11}=\sqrt{2}$，而考虑到 -1 可知 $a_{i+1,i}=-\frac{1}{a_{ii}}$，利用第一章习题 18 可知除了 a_{ii} 与 $a_{i+1,i}$ 外的元素均为 0，因此只需要考虑 a_{ii} 的递推。由 T_n 的对角线为 2，有 $a_{i+1,i+1}^2+a_{i+1,i}^2=2$，因此 $a_{i+1,i+1}^2=2-\frac{1}{a_{ii}^2}$，解得 $a_{ii}=\sqrt{\frac{i+1}{i}}$，于是 $a_{i+1,i}=-\sqrt{\frac{i}{i+1}}$。

    (b) 与上方类似，递推可得 L 为 $L_{ii}=1, L_{i+1,i}=-\frac{i}{i+1}$，$U$ 为 $U_{ii}=\frac{i+1}{i}, U_{i,i+1}=-1$。

    (c) 由于 T 的特征值互不相同，其特征向量能张成全空间，即特征向量作为列构成的矩阵 P 可逆。而 $TP=PD$，其中 D 为特征值排列为的对角阵，于是 $T=PDP^{-1}$，由条件，D,P 均已知。原方程化为 $PDP^{-1}U+UPDP^{-1}=h^2F$，记 $U_0=P^{-1}UP$，则 $DU_0+U_0D=h^2P^{-1}FP$。

    按如下步骤求解：先计算 P^{-1}，复杂度 n^3，然后计算 $P^{-1}FP$，矩阵乘法复杂度可不超过 n^3。而注意到 D 为对角阵，DU_0+U_0D 可直接逐元素求解，于是解 $DU_0+U_0D=h^2P^{-1}FP$ 的复杂度为 n^2，最后计算 $U=PU_0P^{-1}$，复杂度 n^3，最终复杂度 $O(n^3)$。

14. 先说明 $s=2$ 时的情况，由于

$$\begin{pmatrix} D_1 & C_2 \\ B_2 & D_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & O \\ B_2D_1^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & O \\ O & D_2-B_2D_1^{-1}C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & D_1^{-1}C_2 \\ O & I \end{pmatrix}$$

对两边取行列式可知 $\det\begin{pmatrix} D_1 & C_2 \\ B_2 & D_2 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} D_1 & O \\ O & D_2-B_2D_1^{-1}C_2 \end{pmatrix}$，当 B_2 和 C_2 同乘的系数为 1 时不影响。

若 $s=k$ 时成立，考虑 $s=k+1$ 时，左乘 $\begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & -\mu B_sD_{s-1}^{-1} & I \end{pmatrix}$，右乘 $\begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & -\frac{1}{\mu}D_{s-1}^{-1}C_s \\ O & O & I \end{pmatrix}$ 可以使右下角元素变为 $D_s-B_sD_{s-1}^{-1}C_s$，C_s, D_s 部分变为 O，而左上部分不变，于是 $\det(A)=\det(A_{s-1})\det(D_s-B_sD_{s-1}^{-1}C_s)$，利用归纳假设知与 μ 无关。

15. $\det(\lambda I - L_\omega) = 0$

$\Leftrightarrow \det(D-\omega C_L)^{-1}\det((\lambda+\omega-1)D - \lambda\omega C_L - \omega C_U) = 0$

$\Leftrightarrow \det((\lambda+\omega-1)D - \lambda\omega C_L - \omega C_U) = 0$

$\Leftrightarrow \det((\lambda+\omega-1)D - \lambda^{1/2}\omega C_L - \lambda^{1/2}\omega C_U) = 0$ (由习题 14)

$\Leftrightarrow \det(\frac{\lambda+\omega-1}{\lambda^{1/2}\omega}D - C_L - C_U) = 0$

$\Leftrightarrow \det(D^{-1}(\frac{\lambda+\omega-1}{\lambda^{1/2}\omega}D - C_L - C_U)) = 0$

$\Leftrightarrow \det(\frac{\lambda+\omega-1}{\lambda^{1/2}\omega}I - B) = 0$

于是 $\mu = \frac{\lambda+\omega-1}{\lambda^{1/2}\omega}$，同平方后求解二次方程即得题中式 (注意到复数中 $a^{1/2}$ 存在两值)。

16. (暂缺)

第五章　共轭梯度法

1. $(x-x_*)^TA(x-x_*) - x_*^TAx_* = x^TAx - (Ax_*)^Tx - x^TAx_* = x^TAx - b^Tx - x^Tb = \varphi(x)$

2. 记 $x = x_{k-1}$，由算法 $\varphi(x) - \varphi(x_k) = \frac{(r^Tr)^2}{r^TAr}$，其中 $r = b - Ax$，题目即化为 $\frac{x^TAx-2b^Tx}{\kappa_2(A)} \le \frac{(r^Tr)^2}{r^TAr}$。

   分析特征值与正交相似对角化可知正定对称阵的逆也正定对称，于是由 $x = A^{-1}(b-r)$ 可进一步化为 $\frac{r^TA^{-1}r-b^TA^{-1}b}{\kappa_2(A)} \le \frac{(r^Tr)^2}{r^TAr}$，即 $\frac{r^TAr}{r^Tr}\frac{r^TA^{-1}r-b^TA^{-1}b}{r^Tr} \le \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$。

   由正定对称 $b^TA^{-1}b \ge 0$，只需说明对正定对称阵 B 与任何非零向量 x，有 $\frac{x^TBx}{x^Tx} \le \|B\|_2$。而正定对称阵的奇异值即为特征值，作奇异值分解可知左侧不超过最大特征值，右侧即为最大特征值，从而得证。

3. 由最后一次迭代可知迭代结果 x_{k+1} 满足 $\phi(x_{k+1}) = -b^TA^{-1}b$，假设前一次为 x，则下降方向 $r = b - Ax$,类似习题 2 代入得 $x^TAx - 2b^Tx + b^TA^{-1}b = \frac{(r^Tr)^2}{r^TAr}$,由 $x = A^{-1}(b-r)$ 化为 $r^TA^{-1}rr^TAr = (r^Tr)^2$。

   考虑 A 的正交相似对角化 P^TDP，记 $s = Pr$，可发现 $s^TD^{-1}ss^TDs = (s^Ts)^2$，利用柯西不等式可知左侧大于等于右侧，等号成立当且仅当 $s^TD^{-1}s$ 的每个分量与 s^TDs 的每个分量对应成比例 (或同为 0)，于是 s 只能在 D 有相同对角元的某些分量非零，从而 s 是 D 的特征向量，即 $DPr = \lambda Pr$，有 $P^TDPr = \lambda r$，得证。

4. 只需说明系数矩阵可逆，即行列式非零。直接计算行列式 $r_k^TAr_kp_{k-1}^TAp_{k-1} - (r_k^TAp_{k-1})^2$。记 $A = LL^T, a = L^Tr_k, b = L^Tp_{k-1}$，则左式化为 $\|a\|^2\|b\|^2 - (a\cdot b)^2$，由于 r_k, p_{k-1} 线性无关，L 可逆，a, b 线性无关，$\|a\|^2\|b\|^2 - (a\cdot b)^2$ 必然大于 0，从而得证。

5. * 条件应增添每个 p_i 非零

   若否，不妨设 $p_1 = \sum_{i=2}^k \lambda_i p_i$，$\lambda_i$ 不全为 0，则 $p_1^TAp_1 = \sum_{i=2}^k \lambda_i p_i^TAp_1 = 0$，与 p_1 非零矛盾。

6. 直接求导 $\varphi'(y_{i-1} + te_i) = 2ta_{ii} + 2y_{i-1}^TAe_i - 2b_i$，于是 $t = \frac{y_{i-1}^TAe_i - 2b_i}{a_{ii}}$。接下来只需要归纳验证，若 y_{i-1} 是由 $(D-L)^{-1}Uy_0$ 的前 $i-1$ 行与 y_0 的后 $n-i+1$ 行组成，y_i 是由 $L_1y_0 + (D-L)^{-1}b$ 的前 i 行与 y_0 的后 $n-i$ 行组成，其中 L_1 为 G-S 的迭代矩阵。

   注意到，y_i 可以写为 $\begin{pmatrix} I_i & O \\ O & O \end{pmatrix}(D-L)^{-1}(Uy_0+b) + \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-i} \end{pmatrix}y_0$，将 y_{i-1} 代入 $y_i = y_{i-1} + te_i$，分别考虑 y_0 部分和 b 部分的变化。将 $(y_{i-1}^TAe_i)e_i$ 写为 E_iAy_{i-1}，其中 E_i 为第 i 列为 1 的方阵，则有 $y_i = (I + \frac{E_iA}{a_{ii}})y_{i-1} - 2\frac{E_i}{a_{ii}}b$，代入计算第 i 个分量可得成立。

7. 利用相似对角化可知，若 A 的不同特征值为 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$，则多项式 $f(x)=\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)$ 满足 $f(A)=O$。

   由于子空间中的任何向量都可以写为 $g(A)r$，$g(A)$ 为某个多项式，而 $g(A)r=q(A)r$，其中 $q(x)$ 为 $g(x)$ 商去 $f(x)$ 的余式，因此任何元素可以通过一个次数不超过 $k-1$ 次的多项式乘 r 表示，即可以被 $r,Ar,\dots,A^{k-1}r$ 线性表出，从而得证。

8. 由习题 7，这时 Krylov 子空间维数最高为 k，于是利用定理 5.2.2，经过 k 步已经找到了使 $\varphi(x)$ 全局最小的 x，即为方程的解。

9. 利用定理 5.3.2，记 $x=x_k-x_*, y=x_0-x_*$ 变形后只需说明 $\frac{x^Tx}{x^TAx}\frac{y^TAy}{y^Ty}\le\kappa_2(A)$。习题 2 已证明 $\frac{y^TAy}{y^Ty}\le\|A\|_2$，下面说明 $\frac{x^Tx}{x^TAx}\le\|A^{-1}\|_2$。

   仍利用正定对称性，对 A 作相似对角化 P^TDP 后，记 $z=Px$，则 $\frac{x^Tx}{x^TAx}=\frac{z^Tz}{z^TDz}\le\frac{1}{\min_i D_{ii}}=\rho(D^{-1})=\|D^{-1}\|_2=\|A^{-1}\|_2$，从而得证。

10. (暂缺)

11. 直接计算可知，若 $x^TAy=0$，有 $\|x\|_A^2+\|y\|_A^2=\|x+y\|_A^2$，于是 $r_k^T\mathcal{X}=0\Leftrightarrow(x_k-A^{-1}b)^TA\mathcal{X}=0\Leftrightarrow\forall x\in\mathcal{X},\|x-A^{-1}b\|_A^2=\|x_k-A^{-1}b\|_A^2+\|x_k-x\|_A^2\ge\|x_k-A^{-1}b\|_A^2$，即得证。

12. 记 L2s 为二范数平方 (自己与自己点乘)，T 为转置，mul 为矩阵与向量乘法 [此处为理想情况，迭代可以自动终止，初值设定为 0。由于只涉及到 A^TA 与向量乘法，可以不用计算矩阵乘法]:

```
p = rm1 = mul(T(A), b)
a = L2s(r) / L2s(mul(A,p))
x = a * p
r = rm1 - a * mul(T(A), mul(A,p))
while r != 0:
  b = L2s(r) / L2s(rm1)
  p = r + b*p
  a = L2s(r) / L2s(mul(A,p))
  x = x + a * p
  rm1 = r
  r = r - a * mul(T(A), mul(A,p))
```

第六章　非对称特征值问题的计算方法

1. $\det(\lambda I-BA)=\det\begin{pmatrix}\lambda I-BA & O\\ B & I\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}I & -B\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ \lambda^{-1}A & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda I & B\\ O & I-\lambda^{-1}AB\end{pmatrix}$

   $=\lambda^m\det(I-\lambda^{-1}AB)=\lambda^{m-n}\det(\lambda I-AB)$，从而得证。

2. 由于 Q_k 每位模不超过 1，根据有界收敛定理可知存在收敛子列。

   由于矩阵运算只涉及光滑函数，$Q^*AQ=\lim_{i\to\infty}Q_{k_i}^*A_{k_i}Q_{k_i}$，由右侧每个为上三角阵知结果为上三角阵。

3. 记 $C = Q^*BQ$，由条件直接计算可知 $CT = TC$，而 T 为对角元互不相同的上三角阵。直接计算可知 $\sum_{k\le j} c_{ik}t_{kj} = \sum_{k\ge i} t_{ik}c_{kj}$，考虑所有 $i > j$ 的部分，按照 $i-j$ 可反向归纳得出必然 c_{ij} 全为 0，从而得证。

4. $\|Ax-\mu x\|_2^2 = (Ax-\mu x)^*(Ax-\mu x) = x^*A^*Ax - x^*(\mu^*A+\mu A^*)x + \mu^*\mu x^*x = x^*A^*Ax + (-\mu^*R(x) - \mu R(x)^* + \mu^*\mu)x^*x = x^*A^*Ax - R(x)^*R(x)x^*x + \|\mu - R(x)\|_2^2 x^*x$，从而得证。

5. 对 α，单位特征向量 $(1,0)^T$，左特征向量 $(1, \frac{\gamma}{\alpha-\beta})^T$，条件数 $\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}}$。

   对 β，单位特征向量 $\left(1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}\right)^{-1/2}(\frac{\gamma}{\beta-\alpha},1)^T$，左特征向量 $(0,\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}})^T$，条件数 $\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}}$。

6. 设 $B = QAQ^*$，若 x 为对特征值 λ 的单位特征向量，则由于 $QAQ^*Qx = \lambda Qx$，Qx 为 b 模为 1 的特征向量，类似知 $\overline{Q}y$ 为对应的左特征向量，而 $\|\overline{Q}y\|_2 = \|y^TQ\|_2 = \|y^T\|_2$。另一方面，由酉相似知 U_2 与 A_2 不变，于是 $\Sigma^\perp$ 不变，对应的特征向量条件数不变。

7. 计算可知 $A^n = \begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$。由归一化过程，$A^n$ 等同于 $\begin{pmatrix}\lambda & n\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$，分第二个分量是否为 0 讨论知一定收敛到 $(1,0)^T$。

   计算可知 $B^{2k} = \lambda^{2k}I$，于是 B 的偶数次方与 I 等同，奇数次方与 B 等同，只要一开始不为特征向量，不能收敛。

8. 计算知 $A^nu_0 = \begin{pmatrix}C_n^2\\ n\\ 1\end{pmatrix}$，于是归一化后为 $\begin{pmatrix}1\\ 2(n-1)^{-1}\\ 2(n^2-n)^{-1}\end{pmatrix}$，精确到 5 位需要 $2(n-1)^{-1} < 10^{-5}$，即 $n > 200001$。

9. 由条件可知模第二大的特征值必然在 λ_2, λ_n 中，由 6.3 节开头知需要 $\frac{|\lambda_1-\mu|}{\max(|\lambda_2-\mu|,|\lambda_n-\mu|)}$ 尽量大。

   由于当 $\lambda_1-\mu > \lambda_2-\mu > 0$ 时有 $\frac{\lambda_1-\mu}{\lambda_2-\mu} > \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$。进一步讨论正负可发现最优时必须 $\lambda_1-\mu > \lambda_2-\mu \ge 0 \ge \lambda_n-\mu$，且后两者模长相等，从而得证。

10. 构造其友方阵 $\begin{pmatrix} & & & -\alpha_n\\ 1 & & & -\alpha_{n-1}\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & -\alpha_1\end{pmatrix}$，其特征多项式即为 $p(\lambda)$，因此模最大的特征值即为 $p(\lambda)$ 的模最大根，在其唯一时用幂法计算即可。

11. Mathematica 计算可得约为 $(1,-0.7321,0.2679)^T$。

12. 只要取 E 使得 $Ev = u$，即有 $(A+E)v = \lambda Iv = \lambda v$，而从 $Ev = u$ 可以得到 $\sum_{i=1}^n e_{ij}v_j = u_j$。利用柯西不等式，$\sum_{i=1}^n v_j^2 \sum_{i=1}^n e_{ij}^2 \ge u_j^2$，且等号可以取到，于是存在 $\sum_{i=1}^n e_{ij}^2 = \frac{u_j}{\sum_{i=1}^n v_j^2}$ 的解，此时对 j 求和即有 $\|E\|_F^2 = \frac{\|u\|_2^2}{\|v\|_2^2}$，从而得证。

13. 取 v 为 $A+E$ 对应 λ 的特征向量，类似习题 12 计算可知 $Ev = u$，从而 $\frac{\|u\|_2}{\|v\|_2} = \frac{\|Ev\|_2}{\|v\|_2} \le \|E\|_2$，即得证。

14. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 与 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 交替出现，不收敛。

15. 若原本 a_{21} 到 a_{n1} 全为 0，则已经结束，否则可左乘 P 将其中非零元素置换到 α_{21}，再左乘 M 进行行变换将整列剩下元素减去 α_{21} 的倍数以消去 (这里 P, M 都是针对后 $n-1$ 行进行了行变换)。这时，右乘 P^{-1} 与 M^{-1} 都是对后 $n-1$ 列进行操作的列变换，不会影响第一列的结果，从而得证。

16. 使用归纳法。$n=1,2$ 时成立，否则可利用 M_1,P_1 将其相似为习题 15 的对应形式，记作 $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & u_1\\ u_2 & A_2\end{pmatrix}$，其中 u_2 只有第一个分量可能非零。再构造 M_2,P_2 使得 $M_2P_2A_2(M_2P_2)^{-1}$ 将 A_2 化为了对应形式。注意到，习题 15 的过程中没有改变第一行第一列，因此 M_2P_2 的第一行第一列只有对角元的 1，从而 $\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & M_2P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & u_1\\ u_2 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & P_2^{-1}M_2^{-1}\end{pmatrix}$ 不会改变 u_2 除第一个分量均为 0 的性质，重复此操作即得证。

17. 注意到 $X^{-1}A^{t-1}x=e_t$，而 AX 的第 i 列为 A^ix，于是 $X^{-1}AX$ 的前 $n-1$ 列为 e_2 到 e_n，从而为上 Hessenberg。

18. * 非亏损即可对角化

    由条件可知对任何 λ，$\lambda I-H$ 的左下角 $n-1$ 阶子矩阵可逆，从而其特征值几何重数必然为 1，由可对角化知代数重数亦为 1，从而没有重特征值。

19. 直接取 $d_{11}=1, d_{i+1,i+1}=\frac{d_{ii}}{h_{i+1,i}}$，计算可知成立。由于 $d_{ii}d_{n-i,n-i}=\prod_{i=1}^{n-1}h_{i+1,i}$，而 $\|D\|_2,\|D^{-1}\|_2$ 分别为特征值与特征值倒数中模最大者，即 $\prod_{i=1}^{k}|h_{k,k+1}|$ 中最大的除以最小的。

20. 由于存在 Householder 变换 H_0 使得 $H_0\alpha=\|\alpha\|e_1$，而又由于 H_0 满足 H_0^2 的第一列是 e_1，H_0 的第一列即为 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$。这时计算可发现 $H_0^TAH_0$ 的第一列为 λe_1，从而再将右下角的部分类似算法 6.4.1 处理得到 H_2，取 $Q=H_0H_2$ 即可。

21. 由于上 Hessenberg 矩阵不可约，可从上往下通过 $n-1$ 个 Givens 方阵实现 QR 分解。而考虑每一次 Givens 变换，当

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & b'\\ 0 & d'\end{pmatrix}$$

    时，计算可知

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & b''\\ 0 & d''\end{pmatrix}$$

    也即 $Q^{-1}HQ$ 在乘左侧的 Q^{-1} 形成有零对角元的上三角矩阵后，乘右侧的 Q 后此对角元仍然为 0，从而得证。

22. 归纳，$U_0R_0=H_0-\mu_0I$ 成立，当小于等于 $j-1$ 均成立时，考虑 j。

    左侧 $=U_0\dots U_{j-1}(H_j-\mu_jI)R_{j-1}\dots R_0=U_0\dots U_{j-1}H_jR_{j-1}\dots R_0-\prod_{i=0}^{j-1}(H-\mu_iI)\mu_jI$，于是由归纳假设只需要证明 $U_0\dots U_{j-1}H_jR_{j-1}\dots R_0=U_0\dots U_{j-1}R_{j-1}\dots R_0H$。直接计算发现 $H_tR_{t-1}=R_{t-1}H_{t-1}$，反复利用可知结论成立。

23. 设第 i 个对角元为 λ_i，考虑 $(A-\lambda_iI)x=0$，假设 $x_i=0$，利用剩下 $i-1$ 个方程独立性可以推出必须全为 0，矛盾，于是可设 $x_i=1$ 求解。下面假设 B,b 分别为 $n-1$ 阶的方阵、向量，UpperSolve 为求解上三角线性方程组，下标从 1 开始：

```
def find_eigen_system(A, result):
  for i = 1 to n:
    for j = 1 to n-1:
      for k = j to n-1:
        B[j][k] = A[j<i?j:j+1][k<i?k:k+1]
```

```
    b[j] = -A[j<i?j:j+1][i]
    b[j][j] -= A[i][i]
  for j = 1 to n:
    result[i][j<i?j:j+1] = UpperSolve(B, b)[i]
  result[i][i] = 1
```

---

24. 将 Householder 定义中的 ww^T 推广为 ww^H，即为酉方阵，于是对复向量仍有定理 3.2.2 结论。将定理 3.3.1 从第一列开始上三角化变为从最后一列开始下三角化，即得到矩阵的 QL 分解。

    此外，将 LU 分解的过程变为对列进行 Gauss 变换可以得到 UL 分解的过程。

    考虑 $A_{n-1}=Q_nL_n, A_n=L_nQ_n$ 的迭代，将定理 6.4.1 的过程中的 LU 分解替换为 UL 分解，QR 分解替换为 QL 分解，即证明了若 Y 有 UL 分解，则对角线以上趋于 0，对角线上趋于特征值。

25. 考虑 P25 底部和 P26 顶部的形式可知 $P^TL=(L_{n-1}P_{n-1}\dots L_1P_1)^{-1}$。由于上 Hessenberg 阵的形式，每一步的 L_i 除对角线上的 1 外至多有一个元素 $l_{i+1,i}$ 非 0，而 P_i 则或为单位阵或为交换 $i,i+1$ 两行的矩阵 (右乘时变为列变换)。利用 P_i,L_i 逆的形式知其逆依然有此性质，因此按照 1 到 $n-1$ 的顺序右乘上三角阵 U 后，L_t 作用完后下三角部分至多 $u_{21},u_{32},\dots,u_{t+1,t}$ 非零，于是全部作用完后仍为上 Hessenberg 阵。

    由 $\tilde{H}=(P^TL)^{-1}HP^TL$ 可知相似。

26. 设 x 是 A 对 α_{11} 的单位左特征向量，$Q=\begin{pmatrix}U & x\end{pmatrix}$ 是正交方阵，计算可发现此即满足要求 (由于 α_{11} 为实特征值，可使 x 是实向量)。

    寻找 x：直接由条件列方程求解，可不妨设 $x_1=1$ 解，因为下方构造正交矩阵的过程包含了单位化。

    构造正交矩阵：类似习题 20 用 Householder 变换构造即可。

27. 对于实特征值可直接利用反幂法，接下来对复特征值推导过程：

    设 2 阶方阵对角块对应的一对复特征值是 $a\pm b\mathrm{i}$，取其中一个，反幂法的迭代步骤是 $(A-aI-b\mathrm{i}I)v_k=z_{k-1}$，拆分为实向量 $vr_k+\mathrm{i}vi_k, zr_k+\mathrm{i}zi_k$ 可知 $\begin{cases}(A-aI)vr_k+bvi_k=zr_{k-1}\\(A-aI)vi_k-bvr_k=zi_{k-1}\end{cases}$，于是 $\begin{cases}((A-aI)^2+b^2)vr_k=(A-aI)zr_{k-1}-bzi_{k-1}\\((A-aI)^2+b^2)vi_k=bzr_{k-1}+(A-aI)zi_{k-1}\end{cases}$，另一个递推可写为 $\begin{cases}l_k=\sqrt{\|vr_k\|^2+\|vi_k\|^2}\\zr_k=\frac{vr_k}{l_k}\\zi_k=\frac{vi_k}{l_k}\end{cases}$。

    计算可发现，将 b 改为 $-b$ 后，递推事实上只是 vi,zi 变为相反数，因此递推结束后只需要取 $zr\pm\mathrm{i}zi$ 即得到特征值。

    于是，取 a 与 b 的近似值进行如上的迭代即可得到复特征值的特征向量，结合实特征值的特征向量计算可得到结论。

28. 幂法中每步 $y_k=A^TAu_{k-1}$ 即可，这样无需显式计算矩阵乘积。最后得到的特征值需要开根号得到最大奇异值。

29. 左奇异向量即为 AA^T 的特征向量，而右奇异向量为 A^TA 的特征向量，从而可得到奇异值后利用反幂法计算。

30. $A^nu=X\Lambda^nX^{-1}u_0$，归一化的结果与 $X\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{in\theta},1,\frac{\lambda_3}{\lambda_2},\dots,\frac{\lambda_n}{\lambda_2})X^{-1}u_0$ 相同，于是可类似定理 6.2.1 计算得充分大时 $u_n\to \mathrm{e}^{in\theta}(y_1^*u_0)x_1+(y_2^*u_0)x_2$，而代入 θ 得表达式即可知有 t 个对应的收敛子序列。

31. 由于 A 乘倍数不影响结果，不妨设 $\lambda_1=1$。

由条件设 $A=PJP^{-1}$，J 对角，计算知 $q_k=\frac{PJ^kP^{-1}u}{\|PJ^kP^{-1}u\|}$，从而 $q_k^*Aq_k=\dfrac{u^*P^{*-1}J^{*k}P^*PJ^{k+1}P^{-1}u}{u^*P^{*-1}J^{*k}P^*PJ^kP^{-1}u}$，于是有 $|q_k^*Aq_k-1|=\left|\frac{u^*P^{*-1}J^{*k}P^*PJ^k(J-I)P^{-1}u}{u^*P^{*-1}J^{*k}P^*PJ^kP^{-1}u}\right|$。

注意到 $J^k(J-I)$ 中模最大的分量不超过 $2|\lambda_2|^k$，而 J^{*k} 模最大分量不超过 1，假设 $u^*P^{*-1}J^{*k}P^*P$ 与 $P^{-1}u$ 的模最大分量的界为 a,b，分母不超过 $2n^2ab|\lambda_2|^k$。另一方面，趋于极限时分子的 J 只有第一个分量为 1，由于分子为 $\|PJ^kP^{-1}u\|^2$，由条件极限时结果 c 非零，从而存在某个 k 之后大于等于 $\frac{c}{2}$，综上可知原式不超过 $\frac{4n^2ab}{c}|\lambda_2|^k$，即得证 $O(|\lambda_2|^k)$。

当 A 为 Hermite 阵时，可设 P 为正交阵，上式变为 $|q_k^*Aq_k-1|=\left|\frac{u^*P^{*-1}|J|^{2k}(J-I)P^{-1}u}{u^*P^{*-1}|J|^{2k}P^{-1}u}\right|$，其中 $|J|$ 为 J^*J 每个元素开平方根，即 J 每个元素取模。与上方类似过程可知此时为 $O(|\lambda_2|^{2k})$。

32. (1) 由于对应分块大小对应，可以直接相乘，从而通过分块矩阵计算知结果。

(2) 计算得 $U_kU_k^*=I-q_kq_k^*$，于是有 $\rho_k^2-\|g_k\|^2=q_k^*A^*Aq_k-\mu_kq_k^*A^*q_k-\mu_k^*q_k^*Aq_k+\mu_k^*\mu_k-q_k^*A^*Aq_k+q_k^*A^*q_kq_k^*Aq_k=-\mu_k\mu_k^*-\mu_k^*\mu_k+\mu_k^*\mu_k+\mu_k^*\mu_k=0$，其中利用了 $q_k^*q_k=1$。

(3) 展开知右 $=\frac{1}{\delta_k}(q_{k-1}+U_{k-1}(\mu_{k-1}I-C_{k-1})^{-1}g_{k-1})$，由于 q_k 与目标式的计算过程都进行了归一化(乘酉阵不影响模)，需说明 $q_{k-1}\parallel(A-\mu_{k-1}I)q_{k-1}+(A-\mu_{k-1}I)U_{k-1}(\mu_{k-1}I-C_{k-1})^{-1}g_{k-1}$，而右式 $=Q_{k-1}\begin{pmatrix}0\\g_{k-1}\end{pmatrix}+Q_{k-1}\begin{pmatrix}h_{k-1}^*\\C_{k-1}-\mu_{k-1}I\end{pmatrix}y_k=Q_{k-1}\begin{pmatrix}0\\g_{k-1}\end{pmatrix}+Q_{k-1}\begin{pmatrix}h_{k-1}^*y_k\\-g_{k-1}\end{pmatrix}=(h_{k-1}^*y_k)q_{k-1}$，从而得证。

(4) 类似幂法收敛性条件可知其收敛到的 μ 必然为单特征值，否则将无法收敛。于是，利用 (2) 可知极限中 C 的特征值是 A 除去 μ 后得到，$(\mu_kI-C_k)^{-1}$ 的极限存在。由此可知 $(\mu_kI-C_k)^{-1}$ 有界，估算知 $y_k=O(\|g_{k-1}\|)$。

由于 $I+y_ky_k^*$ 是 Hermite 阵，可进行正交相似对角化 $I+y_ky_k^*=R^*JR$，由于 J 为 $I+y_ky_k^*$ 的特征值，且 $\det(xI-y_ky_k^*)=x^{n-1}(x-y_k^*y_k)$，可知对应特征值与 1 的差是 $O(\|y_k^*y_k\|)$ 量级，而根据相合对角化的过程可知 $R-I$ 亦为 $O(\|y_k^*y_k\|)$ 量级，从而取 $D=(\sqrt{J}R)^{-1}$ 放缩知 $\|I-D\|=O(\|y_ky_k^*\|)$，从而得结论。

(5) 利用 (3) 计算可知右侧的第一列是 q_k，从而只需说明 $P_k=\begin{pmatrix}1&-y_k^*\\y_k&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_k^{-1}&0\\0&D\end{pmatrix}$ 是酉方阵，而直接计算 $P_k^*P_k=I$，因此得证。

(6) 利用 (5) 计算，g_k 为 $P_k^*Q_{k-1}^*AQ_{k-1}P_k$ 的对应部分，于是计算知 $g_k=\frac{1}{\delta_k}(-\mu_{k-1}D^*y_k+D^*g_{k-1}-(h_{k-1}^*y_k)D^*y_k+D^*C_{k-1}y_k)$。

(4) 已经说明 y_k 是 $O(\|g_{k-1}\|)$，而 C_{k-1},δ_k,μ_k 是 $O(1)$，再利用 (4) 对 D 的估算可得 $g_k=\frac{1}{\delta_k}(-\mu_{k-1}y_k+g_{k-1}-(h_{k-1}^*y_k)y_k+C_{k-1}y_k)+O(\|g_{k-1}\|^3)$。注意到 $-\mu_{k-1}y_k+g_{k-1}+C_{k-1}y_k=0$ 即得结论。

(7) 由于 $y_k=O(\|g_{k-1}\|)$，代入 (6)，再利用 (2) 可直接得结论。当 A 为 Hermite 阵时，由于 $h_{k-1}=g_{k-1}$，代入 (6) 后左右均为 $O(\|g_{k-1}\|^3)$，从而有结论。

第七章　对称特征值问题的计算方法

1. 设其对应的单位特征向量为 α，有 $A\alpha=\lambda\alpha$，由对称可知 $\alpha^TA=\lambda\alpha^T$，从而其亦为左特征向量，且 $\alpha^T\alpha=1$，由条件数定义知为 1。

2. 利用定理 7.1.3，计算知将 A 的第 i 行、列除对角元外变为 0 的对称矩阵 B 有特征值 a_{ii}，而 $A-B$ 只有第 i 行/列非零，记其第 i 列为 α，可知 $A-B=e_i\alpha^T+\alpha e_i^T$(由于 $\alpha_i=0$)，从而 $\|(A-B)x\|=\sqrt{(\alpha^Tx)^2+(\|\alpha\|x_i)^2}$。

利用柯西不等式，当 $x^Tx=1$ 时，利用 $\alpha_i=0$ 有 $(\alpha^Tx)^2+(\|\alpha\|x_i)^2\le\alpha^T\alpha(1-x_i^2)+\alpha^T\alpha x_i^2=\alpha^T\alpha$，从而 $\|(A-B)x\|$ 最大为 $\sqrt{\alpha^T\alpha}$，而此即为二范数，因此 A 必然有一特征值在 B 的特征值 a_{ii} 的周围 $\sqrt{\alpha^T\alpha}$ 范围内，从而得证。

3. 由于同时正交相似对角化不改变结果，可不妨设 A 为对角阵。此时记 $t^{-1}=\|A^{-1}\|_2$ 为最小对角元的倒数，t 即代表 A 的最小对角元。

   而对非零的 x，由二范数定义 $x^TAx+x^TEx\ge tx^Tx-\|x\|\|Ex\|>tx^Tx-\|x\|(t\|x\|)=0$，从而得证。

4. 由奇异值分解 $A=P\Sigma Q$ 可知 $A^TA=Q^T\Sigma^T\Sigma Q$，由相似不影响特征值与 Q 正交可知 A^TA 的特征值即为 $\Sigma^T\Sigma$ 对角元，而由于 Σ 对角元非负，$\Sigma^T\Sigma$ 对角位置恰好为 Σ 对应对角元的平方，从而得证。AA^T 同理。

5. 由习题 4，利用对称阵条件有 $A^TA=A^2$，正交相似对角化可知 A^2 特征值为 A 对应特征值的平方，从而奇异值平方与对应特征值平方相同，又由奇异值非负可知结论。

6. 设奇异值分解 $A=P\Sigma Q$，则由 P,Q 正交 $\|A\|_2=\max_x\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{y=Qx}\frac{\|P\Sigma y\|}{\|Q^Ty\|}=\max_y\frac{\|\Sigma y\|}{\|y\|}$。利用 Σ 为对角阵可直接算出 $\|A\|_2=\sigma_1$，同理可算出 $\|A^{-1}\|_2=\frac{1}{\sigma_n}$，因此得证。

7. 引理：对于任何 n 的 $k-1$ 元子集 I，任何 $U\in\mathcal{G}_k^n$ 中存在向量 $x\ne0$ 使得 $x_i=0,i\in I$。

   证明：不妨设 I 为前 $k-1$ 个分量，其余同理。考虑 U 的一组基 $\{x_i\}$ 排成 $n\times k$ 矩阵，对其上面的 $k-1\times k$ 矩阵可右乘列变换阵 P 成为上三角阵 (多出的一列全为 0)，而由基线性无关，P 可逆，右乘 P 后仍然满秩，因此前 $k-1$ 个分量全为 0 的列其余分量不全为 0，从而得证。

   类似习题 6 可知不妨设 A 已经是 Σ 形式，非负对角元从大到小排列的对角阵。由引理可知 $\mathcal{G}_i^n$ 中一定存在非零向量使得前 $i-1$ 个分量全为 0，此时 $\frac{\|\Sigma u\|}{\|u\|}\le\sigma_i$，因此对所有子空间取最大值不超过 σ_i，而取前 i 个单位向量生成的子空间可以取到 σ_i，从而第一个等号得证。

   对右侧，由于 $\mathcal{G}_{n-i+1}^n$ 中一定存在非零向量使得后 $n-i$ 个分量为 0，此时 $\frac{\|\Sigma u\|}{\|u\|}\ge\sigma_i$，因此对所有子空间取最小值不低于 σ_i，而取后 $n-i+1$ 个单位向量生成的子空间可以取到 σ_i，从而第二个等号得证。

8. $O\big(\frac{(x+t)^TA(x+t)}{(x+t)^T(x+t)}-\lambda\big)=O((x+t)^TA(x+t)x^Tx-x^TAx(x+t)^T(x+t))=O(t^TAtx^Tx)=O(t^TAt)$，第二步利用了 $(x^TA)^T=Ax=\lambda x$，而一三两步利用同乘非小量的量不会改变量级。由于 $t=O(\varepsilon)$，计算分量可得 $O(t^TAt)=O(\varepsilon^2)$，从而得证。

9. 设 T 的对角元 α_1 到 α_n，次对角元 β_1 到 β_n，可知 $Aq_i=\beta_{i-1}q_{i-1}+\alpha_iq_i+\beta_iq_{i+1}$，范围外的下标对应数均为 0。

   先任取单位向量 q_1，由于 $Aq_1-\alpha_1q_1=\beta_1q_2$，$q_2^Tq_1=0$，$\alpha_1$ 必然为 Aq_1 在 q_1 上的投影长度，即 $\alpha_1=\frac{q_1^TAq_1}{q_1^Tq_1}$，类似地，每一步都可以变为确定新的 q_m 与 s,t 使得 $x-sq_{m-1}=tq_m$，且 x 已没有在 q_1 到 q_{m-2} 的分量，因此取 s 为投影长度 $\frac{x^Tq_{m-1}}{q_{m-1}^Tq_{m-1}}$ 即可得到 t 与 q_m。重复此操作得到结果。

10. 在算法 7.6.1 的过程中，将每次循环中第一个 v 与 beta 累计左乘到左侧的 U 上，第二个累计右乘到右侧的 V 上，即得到 $UAV=B$ 的形式，再分别取转置即可。

11. 直接计算可知 α_2 为位移时结果为 $-\frac{\varepsilon^3}{(\alpha_1-\alpha_2)^2+\varepsilon^2}=O(\varepsilon^3)$。

    由 Wilkson 位移性质可知 $T-\mu I$ 不可逆，因此分解出的 QR 中 R 第二行为 0，从而 RQ 第二行为 0，可得 $\widetilde{T}(2,1)$ 一定为 0。

12. 由 7.3.4 相加可知 $\beta_{pp}+\beta_{qq}=(c^2+s^2)(\alpha_{pp}+\alpha_{qq})=\alpha_{pp}+\alpha_{qq}$，再由 7.3.15 即得证。

13. 即 $c\alpha_{12}+s\alpha_{22}=-s\alpha_{11}+c\alpha_{21}$，于是记 $m=\sqrt{(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2+(\alpha_{12}-\alpha_{21})^2}$，有 $c=\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}}{m}, s=\frac{\alpha_{21}-\alpha_{12}}{m}$。
   利用此算法，对此阵先化为对称，再用 Jacobi 方法对角化，对角元取模即为奇异值 (可由对角元为 1 与 -1 的对角阵调整符号)。

14. 先由习题 13 得到 θ_0，再根据书上对称阵算法得到 θ_2 使得 $J(p,q,-\theta_2)AJ(p,q,\theta_2)$ 为对角阵，取 $\theta_1=\theta_0-\theta_2$ 即可。
   由正交阵性质 $\sum_i \beta_{ii}^2=\sum_{ij}\alpha_{ij}^2$，于是直接计算 $E(B),E(A)$ 得证。

15. 先用 Householder 变换使其只剩下 $\min(m,n)\times\min(m,n)$ 的方阵，再利用习题 14 的操作不断进行两边旋转，极限为对角阵，再由对角元为 1 与 -1 的对角阵调整符号得结果。

16. 计算知即 $cs(x^Tx-y^Ty)+(c^2-s^2)x^Ty=0$，此即 $(x^Tx-y^Ty)\sin 2\theta+2x^Ty\cos 2\theta=0$，可得到 $\varphi=2\theta$ 后 $c=\cos\frac{\varphi}{2}, s=\sin\frac{\varphi}{2}$(或用二次方程规避三角函数运算)。

17. * 此题题干应为 $\mathbb{R}^{m\times n}$
   考虑 $\sum_{i<j}(a_i^Ta_j)^2$，其中 a_i 代表 A 的第 i 列。直接计算可发现如习题 16 操作 p,q 对其他列的影响在平方和中抵消，因此每次操作 p,q 使此和减小了 $(a_p^Ta_q)^2$，而极限必然为 0，因此不断选取两列如此操作可最终收敛至相互正交。

18. 由条件可知需要 d_i 满足 $\frac{\gamma_i d_i}{d_{i+1}}=\frac{\beta_i d_{i+1}}{d_i}$，由于 $\gamma_i\beta_i>0$，可取 $d_{i+1}=\sqrt{\frac{\gamma_i d_i^2}{\beta_i}}$，不妨设 $d_1=1$，即可归纳构造出 d_i。

19. (1) 若 $\xi_1=0$，利用 $\alpha_1\xi_1+\beta_2\xi_2=\lambda\xi_1$，由不可约知 $\beta_2\neq 0$，从而 $\xi_2=0$，重复此过程可推出 $\xi=0$，矛盾。若 $\xi_n=0$ 同理得矛盾，从而得证。
   (2) 设左侧为 t_i，在 $i=1$ 时记为 1，$i=2$ 时计算可知为 $\lambda-\alpha_1$，此时只需要满足相同的递推。在已知 ξ_{i-1} 与 ξ_i 时，有 $\beta_i\xi_{i-1}+\alpha_i\xi_i+\beta_{i+1}\xi_{i+1}=\lambda\xi_i$，于是 $\beta_i^2\beta_{i+1}t_{i-1}+\alpha_i\beta_{i+1}t_i+\beta_{i+1}t_{i+1}=\lambda\beta_{i+1}t_i$，由不可约消去 β_{i+1} 即可发现递推与 $(-1)^{i-1}p_{i-1}(\lambda)$ 相同，得证。

20. 利用定理 7.4.1，不可约对称三对角阵只有单特征值，因此产生 k 重特征值至少需要分为 k 块，即 $k-1$ 个为零的次对角元。

21. (a) 由推论 7.4.1 知负定即首个顺序主子式为负且每次顺序主子式都变号，计算验证知负定成立。
   (b) 由负定，考虑 $s_n(-2)$ 可知有两个落在指定范围内。

22. 每次计算 $(T-\tilde{\lambda}I)y_k=z_{k-1}$，并令 z_k 为 y_k 模最大分量的归一化。
   由于 T 为对称三对角阵，$T-\tilde{\lambda}I$ 利用高斯消元可做到 $O(n)$ 复杂度的 LU 分解，进一步可得到计算 y_k 的复杂度为 $O(n)$，每次迭代只需要 $O(n)$ 复杂度。

23. 即用二分法求 B^TB 的特征值，这个矩阵乘法的计算复杂度 $O(n)$，可直接显示计算。

24. (暂缺)

25. (暂缺)

26. (暂缺)

27. $C^*=C\Leftrightarrow A^T-\mathrm{i}B^T=A+\mathrm{i}B\Leftrightarrow M^T=M$，于是充要条件得证。
   而 $M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}A\alpha-B\beta=\lambda\alpha\\ B\alpha+A\beta=\lambda\beta\end{cases}\Leftrightarrow C(\alpha+\beta\mathrm{i})=\lambda(\alpha+\beta\mathrm{i})$，计算发现 $\begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}$ 亦为 λ 对应的特征向量。于是 M 对应特征值重数是 C 的两倍，特征向量关系为 $\alpha+\beta\mathrm{i}$ 对应 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}$。