作业14. 考查如下三个正则曲面(片)

(i) 正螺面 $r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(u,v) \longmapsto r(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$$

(ii) 旋转面 $r_1: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D = \{(u,v) \mid u \in (-\infty,\infty), v \in (0,2\pi)\}$

$$(u,v) \longmapsto r_1(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$$

(iii) 悬链面 $r_2: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, D 如上

$$(u,v) \longmapsto r_2(u,v) = (\sqrt{1+u^2}\cos v, \sqrt{1+u^2}\sin v, \operatorname{arcsinh} u)$$

证明:(1) $r(D)$ 和 $r_1(D)$ 之间存在一一映射 φ 保持高斯曲率

但 φ 不是等距映射.

(2) $r(D)$ 和 $r_2(D)$ 之间存在一一映射 ψ 保持高斯曲率和平均曲率,但 ψ 不是刚体运动.

作业21 (指标计算)

定义 $R_{\delta\alpha\beta\gamma} := -g_{\delta\xi}\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\Gamma_{\eta\gamma}^{\xi} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}\Gamma_{\eta\beta}^{\xi}\right)$

<1> 证明:

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^{\gamma}\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}\partial u^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^{\beta}\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}\partial u^{\delta}}\right)$$

$$+ \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\Gamma_{\eta\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}\Gamma_{\eta\delta\beta},$$

其中 $\Gamma_{\eta\delta\gamma} = g_{\eta\xi}\Gamma_{\delta\gamma}^{\xi}$ 为第二类 Christoffel 符号

<2>. 计算所有 Christoffel 符号 $\{\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha},\ \alpha,\beta,\gamma=1,2\}$ 用 E, F, G 的表达式。(比如 $\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{EG-F^2}\left(\frac{G}{2}E_u + \frac{F}{2}E_v - FF_u\right)$)

<3> 应用<1>和<2>证明:

$$\begin{aligned} 4(EG-F^2)R_{1212} = {} & E\left(E_v G_v - 2F_u G_v + (G_v)^2\right) \\ & + F\left(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2F_u G_u\right) \\ & + G\left(E_u G_u - 2E_u F_v + (E_v)^2\right) \\ & - 2(EG-F^2)\left(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}\right) \end{aligned}$$

(与高斯绝妙定理比较,回忆 Gauss 方程告诉我们 $R_{1212} = \cancel{\frac{K}{EG-F^2}} K(EG-F^2)$)

<4>. 设 $r: D \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto r(u,v)$ 为一正则曲面片且其参数化满足 $F = M = 0$. 应用<2>证明 Codazzi 方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = \Gamma_{12}^{\xi} b_{\xi 1} - \Gamma_{11}^{\xi} b_{\xi 2} \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = \Gamma_{22}^{\xi} b_{\xi 1} - \Gamma_{21}^{\xi} b_{\xi 2} \end{cases}$$

用记号 E, F, G, L, M, N 可表为 $L_v = HE_v$, $N_u = HG_u$, H 为平均曲率。

作业 18

2022年11月3日 9:41

1. 设 M 为正则曲面片，$p\in M$ 不是脐点。证明存在 P 点的邻域 $U\subset M$，使得 U 上存在正交活动标架 $\{r;e_1,e_2,e_3=n\}$ 满足 e_1，e_2 为主方向。

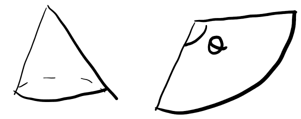
2. 在旋转面 $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,f(u))$，$f>0$ 上建立正交活动标架场并求相交微分形式 ω^1，ω^2，ω_1^3，ω_2^3。

3. 考虑正则参数曲面 $r=r(u,v)$。若 $e_1=r_u$，$e_2=r_v$，$n=e_1\wedge e_2$ 给出一正交活动标架。求高斯曲率。

微分几何(H)作业23

2022年11月24日 11:29

1. 考查圆锥面（展开后张角为θ）上给定两点间测地线条数的最大值和最小值。



2. 考查旋转曲面

$$r = r(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ u),\quad f>0$$

(1) 写出沿纬线圈平行的向量场满足的微分方程

(2) 设旋转曲面的一个切向量沿纬线圈平行移动时，向量在开始和结束（$v=0$ 和 $v=2\pi$）位置之夹角为θ，计算$\cos\theta$.

旋转曲面的全曲率

考查旋转曲面

$$r = r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),\ f>0$$

令 Z_{ab}, $a<b$ 为两个分别对应 $u\equiv a$, $u\equiv b$ 的纬圆所夹区域。

(1) 证明 Z_{ab} 的全曲率 $\iint_{Z_{ab}} K\,dV = 2\pi(\sin\varphi(a) - \sin\varphi(b))$

其中 φ 为 x-z 平面中向量 $\overrightarrow{(0,1)}$ 到母线 $u\mapsto(f(u), g(u))$ 的切向量的~~有向角~~夹角。使得 $v = \cos\varphi\,\overrightarrow{(0,1)} + \sin\varphi\,\overrightarrow{(1,0)}$

其中 v 为母线的单位切向量。

(2) 利用(1)说明若母线为光滑简单闭曲线，则相应旋转曲面的全曲率为零。

(3) 计算旋链面(Catenoid)的全曲率。

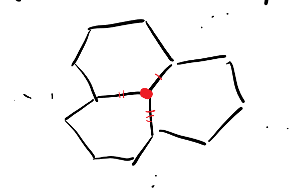
(即以 $x = a\cosh\frac{z}{a}$, $z\in(-\infty,\infty)$ 为母线的旋转面)。

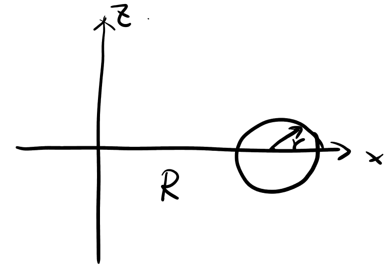
微分几何(H) 作业27

2022年12月8日 17:11

1. 设 M 为 E^3 中的紧致(可定向)光滑曲面，且 M 不同胚于球面。证明总存在一点 $p\in M$ 使得 p 点处高斯曲率 $K(p)<0$.

2. 设 M 为 E^3 中的紧致(可定向)光滑曲面，假设 M 存在一个六边形剖分使得每个顶点与三条边相连。判断 M 可否同胚于球面并说明理由。





1. 设 T 是 x-z 平面上以 $(R,0)$ 为心, $r\ (<R)$ 为半径的圆绕 z 轴旋转所得 E^3 中的环面。

(i) 求 T 在曲面片 $r = r(u,v) = \big((R+r\cos u)\cos v,\ (R+r\cos u)\sin v,\ r\sin u\big)$ $u\in(0,2\pi)$, $v\in(0,2\pi)$ 的单位法向量场。

(ii) 描述 T 在高斯映射下的像, 并计算 $\iint_T K\,dV$.

(不要用 Gauss-Bonnet 定理, 用 T 高斯映射像的定向).

2. 设 V 是上曲面 M 上的光滑切向量场, p 为其孤立奇点,
令 X 为含 p 的曲面片上处处非零光滑切向量场。
令 $\mathfrak{D}$ 为含 p 的且包含在上述曲面片内的同胚于开圆盘的区域
令 $C=\partial\mathfrak{D}$, 参数化为 $\alpha: [a,b]\to C$.
记 $\varphi = \angle(X,V)$ 为 $[a,b]$ 上函数, 即曲线 C 上相应点处切向量 X 到 V 的有向角的一个连续化选取.

(i) 若 $\|X\|=1$. 证明

$$\varphi(b)-\varphi(a) = \int_a^b \frac{fg'-gf'}{f^2+g^2}\,dt$$

其中 $f=\langle V,X\rangle$, $g=\langle V,J(X)\rangle$.

(ii) 对于 E^2 上不过原点的正则平面闭曲线若可保定向地重新参数化为

$$c(t) = \big(\rho(t)\cos\theta(t),\ \rho(t)\sin\theta(t)\big)$$
$$t\in[a,b]$$

其关于原点的 winding number 定义为

其关于原点的 winding number 定义为

$$\mathrm{wind}(c) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

证明 $\mathrm{ind}(V,p)$ 是平面曲线 $(f,g):[a,b]\to E^2$ 的 winding number.

微分几何(H) 作业29

2022年12月15日 11:11

1. 设 M为 E^3中无脐点的光滑曲面，且高斯曲率 >0.

证明：M上不存在使平均曲率达最大值而同时高斯曲率达最小值的点。

微分几何(H) 作业30

2022年12月20日 15:45

设 M 是 E^3 中的一个紧致曲面。φ, H, K 为 M 的支撑函数、平均曲率函数、高斯曲率函数, n 为单位法向量场.

(1) 证明 $\int_M dv = \int_M H\varphi\, dv$. (提示: 考查 (r, n, dr))

(2) 证明 $\int_M n\, dv = 0$. (提示: 对任意常向量 a, 考查 (r, dr, a))

(3) 证明 $\int_M Hn\, dv = 0$. (提示: 考查 (r, n, a))

(4) 证明 $\int_M Kn\, dv = 0$. (提示: 考查 (n, dn, a))

1. 证明课上讲的 Herglotz 对于 Cohn-Vossen 定理证明中的遗留部分：(i) 验证 $(r, n, d(f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2)) = 0$

   (ii) 证明 $\det(f_*) < 0$ 时有

   $$h_{\alpha\beta} = -\overline{h_{\alpha\beta}}\circ f, \quad \alpha,\beta = 1,2.$$

2. 设 $M, \overline{M}$ 为 E^3 中两个卵形面。设 S^2 为 E^3 中一个单位球面映射 $g: M \to S^2$，$\bar{g}: \overline{M} \to S^2$ 为高斯映射。

   若存在 S^2 上正值函数 $\mathcal{K}: S^2 \to \mathbb{R}_{>0}$，使得 $M, \overline{M}$ 的高斯曲率函数分别为 $K = \mathcal{K}\circ g$，$\overline{K} = \mathcal{K}\circ \bar{g}$，

   则 $M, \overline{M}$ 相差一个平移。

提示：

在 M 的一个曲面片上取正交标架 $\{r; e_1, e_2, e_3 = n\}$，易见 $\forall p \in M$，M 在 p 点处、S^2 在 $g(p)$ 点处，$\overline{M}$ 在 $\bar{g}^{-1}(g(p))$ 点处法向量平行（相差一个平移）。

将 e_1, e_2 在 E^3 中平移到 S^2，$\overline{M}$ 的相应点处得 S^2、$\overline{M}$ 上正交活动标架。$M, S^2, \overline{M}$ 上诸微分 1-形式记为

M：$\omega^1, \omega^2, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$

S^2：$\theta^1, \theta^2, \theta_1^2, \theta_1^3, \theta_2^3$

$\overline{M}$：$\overline{\omega}^1, \overline{\omega}^2, \overline{\omega}_1^2, \overline{\omega}_1^3, \overline{\omega}_2^3$.

只需证

$$\omega^\alpha = (\bar{g}^{-1}\circ g)^* \overline{\omega}^\alpha, \quad \alpha = 1,2 \quad \text{作为 } M \text{ 上 1-形式}$$

$$\omega_\alpha^3 = (\bar{g}^{-1}\circ g)^* \overline{\omega}_\alpha^3, \quad \alpha = 1,2.$$

$$\omega_\alpha^3 = (\bar{g}^{-1}\circ g)^* \bar{\omega}_\alpha^3, \quad \alpha=1,2$$

或等价~~地~~，作为 S^2 上 1-形式，去证

$$\begin{cases} (g^{-1})^*\omega^\alpha = (\bar{g}^{-1})^*\omega^\alpha, & \alpha=1,2 \qquad (\mathrm{I}) \\ (g^{-1})^*\omega_\alpha^3 = (\bar{g}^{-1})^*\bar{\omega}_\alpha^3, & \alpha=1,2 \qquad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

实际上(II)比较简单. 要证(I)可用积分公式，模仿今天课上证明的套路.

积分公式提示：考查 S^2 上 1-形式 $\psi = (r\circ g^{-1}, \bar{r}\circ \bar{g}^{-1}, d(\bar{r}\circ \bar{g}^{-1}))$.

微分几何(H) 作业32

2022年12月27日 11:32

1. 设 M 为卵形面，则通过高斯映射 $g: M \longrightarrow S^2$，M 上的位置向量 r，和支撑函数 p 均可看作 S^2 上的 (向量值) 函数。证明：r 可由 p 确定。

2. 设 M 为 E^3 中的 $K \equiv -1$ 的曲面片，$r = r(s,t)$ 为渐近 Chebyshev 网。设 $\alpha \in (0,\pi)$ 为每点处两个渐近方向的夹角。

(i) 证明函数 α 确定了 M 的第一基本形式和第二基本形式。

(ii) 若 α 能在相差一个刚体运动意义下确定 M 需满足什么条件？(提示：曲面论基本定理)

微分几何(H) 作业33

2022年12月29日 9:29

1. (Hazzidakis' formula)

   设 M 为 E^3 中的高斯曲率为 -1 的曲面片

   设 $r = r(s,t)$ 为其渐近 Chebyshev 网.

   证明 由 $r=r(s,t)$ 的参数曲线围成的任意四边形的面积 $< 2\pi$.

2. 设 M 为 E^3 中紧致曲面, 设 $M_+ = \{p \in M : K(p) \geq 0\}$

   证明 $\int_{M_+} K \, dv \geq 4\pi$.

   提示: 考查 M_+ 在高斯映射 g 下的像集 $D = g(M_+)$.

   记 $D_1 = \{e \in D : g^{-1}(e) \cap M_+$ 只有一个点$\}$

   $D_2 = \{e \in D : g^{-1}(e) \cap M_+$ 至少有两个点$\} = D \setminus D_1$

   去证 $-S^2 \setminus D := \{e \mid e \in S^2 \setminus D\} \subseteq D_2$.