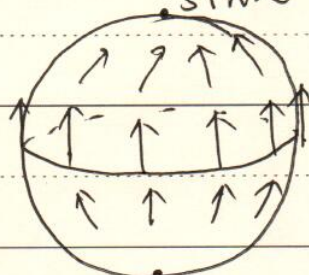


Poincaré - Hopf index formula ([O'Neill §7.7])

上面看到 Euler 示性数为零的性质联系着处处非零切向量场的存在性。下面我们来讨论这一性质的一个推广情形。

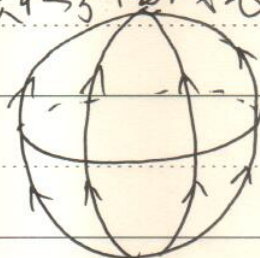
在一个一般的紧致无边可定向曲面上, 虽然并不总是存在处处非零向量场, 但是总可找到除有限点外非零光滑的向量场。例如



source

(取“北向”的切向量场)

其部分的处处用积分曲线表示如下



定义: 一点 p 称为切向量场 V 的一个孤点奇点, 如果 V 在 p 的一个小邻域 N (除 p 外) 内非零、光滑。

在球面的例子中, 南、北极即为两个孤点奇点。

对于一个切向量场 V 的孤点奇点 p , 我们寻求一个量来度量它有多“坏”。

取 p 点周围一个足够小邻域 D , 使其落入包含 p 的一个坐标邻域内, 且 D 中不包含除 p 外的其他奇点。设 D 有一个定向, 该定向诱导一个有向的边界, 记为 $C := \partial D$ 。

注意, 在 D 上, 我们总可取到一个无奇点的光滑切向量场 X 。(如, 我们可取 r_u, p 处 $r = r(u, v)$ 为 D 的一个正则参数化)。我们的想法是去比较向量场 V 与 X 。

令 $\alpha: [a, b] \rightarrow C = \partial D$ 为有向边界 C 的一个参数化。我们取沿曲线 C 的角度函数 $\angle_\alpha(X, V)$ (从 X 到 V 的有向角)。

记 $\varphi := \angle_\alpha(X, V)$.

注意 V 限制到 C 上, 即 V 沿 C 移动一圈后会回到原位置。
故可知 $\varphi(b) - \varphi(a)$ 是 2π 的整数倍。

定义 (指标) 一个切向量场 V 在 p 点的指标 (index) 是如下整数

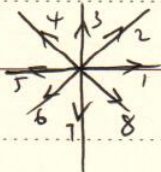
$$\text{ind}(V, p) := \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}.$$

注记: 直接从定义来看, $\text{ind}(V, p)$ 应依赖于 X 的选取. 实际上, 我们将看到, 这个依赖性是不存在的. $\text{ind}(V, p)$ 也不依赖于 ∂ 的选取.

指标 (index) 是个很直观的概念, 它实际上是向量场 V 在 p 点周围 (相对于 X) 的总转数.

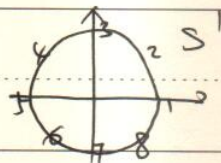
例子: 非奇点 p : index 0.

source:

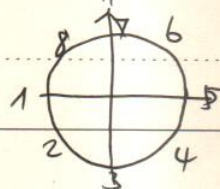
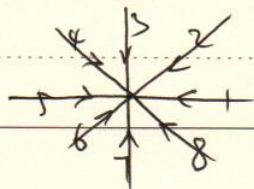


index +1

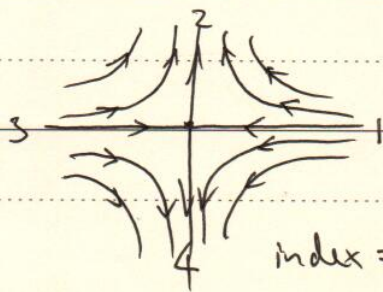
取 X 为处处 $\rightarrow$ 方向



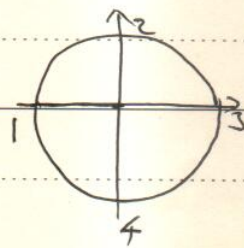
sink

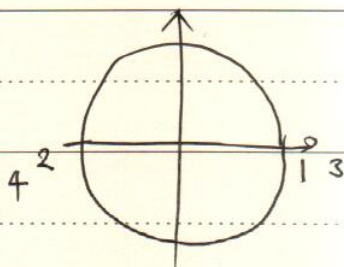
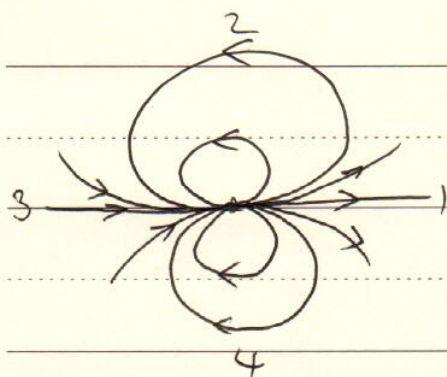


index: +1 again!!



index = -1.





index = +2

定理: (Poincaré-Hopf) 设 M 为一紧致无边^{可定向}曲面. 设 V 为
其上光滑且在除有限奇点 $p_1, \dots, p_k$ 外非零的一个向量场.
则 M 的 Euler 示性数等于 V 的指标的积, 即

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_M K dV = \sum_{i=1}^k \text{ind}(V, p_i)$$

拓扑量 几何量 微分拓扑量

证明: 首先看到, 我们可选定定向的小区域 $\mathcal{D}_i$, 使 $\mathcal{D}_i$ 不包含除 p_i 外
的其他奇点, 且 $\mathcal{D}_i$ 落入含 p_i 的一个坐标邻域内. 则 $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \mathcal{D}_i$

的内部, 记为 M . 则我们有:

(i) 在 M 上, V 非零, 则可取

$$\bar{e}_1 = \frac{V}{|V|}, \quad \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \wedge \bar{e}_1 = n \wedge \bar{e}_1$$

在此正交标架下, 记其联络形式为 $\bar{\omega}_1^2$.

(ii) 在每一个 $\mathcal{D}_i$ 上, 可选一处处非零、光滑的向量场 X_i , 则可取

$$e_1 = \frac{X_i}{|X_i|}, \quad e_2 = e_3 \wedge e_1 = n \wedge e_1$$

在此正交标架下, 记其联络形式为 ω_1^2 .

回忆对高斯曲率 K , 有

$$\iint_M K dV = \iint_M K dV + \sum_{i=1}^k \iint_{\mathcal{D}_i} K dV$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \iint_M k dv &= \iint_M k \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^2 = - \iint_M d\bar{\omega}^2 \stackrel{\text{Stokes'}}{=} - \int_{\partial M} \bar{\omega}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \bar{\omega}^2 \end{aligned}$$

这里 C_i 是 ∂D_i 带有 $\oplus_i$ 诱导的定向. 这个定向与由 M 诱导定向相反. 回忆我们关于平行移动向量场角度的计算, 我们有如下事实:

沿简单闭曲线

设 P_i 是沿 C_i 平行移动 ω 的向量场, 我们记 $d\bar{\varphi}_i = -\bar{\omega}^2$
 $\bar{\varphi}_i := \angle(V, P_i)$ (从 V 到 P_i 有向角)

记 C_i 的弧长参数化 $C_i: r_i = r_i(s), s \in [0, L(C_i)]$, 且

$$\bar{\varphi}_i(L(C_i)) - \bar{\varphi}_i(0) = - \int_{C_i} \bar{\omega}^2 \quad \text{定向变化} = \sum_{i=1}^n (\bar{\varphi}_i(L(C_i)) - \bar{\varphi}_i(0)) = \iint_M k dv$$

同样地, 记 $\varphi_i := \angle(X_i, P_i)$, 且有

$$\begin{aligned} \varphi_i(L(C_i)) - \varphi_i(0) &= - \int_{C_i} \omega^1 = \iint_{\oplus_i} k \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= \iint_{\oplus_i} k dv. \end{aligned}$$

$$\text{于是, 有 } \iint_M k dv = \sum_{i=1}^n \left((\bar{\varphi}_i + \varphi_i)(L(C_i)) - (\bar{\varphi}_i + \varphi_i)(0) \right)$$

◦ 重要观察: 有向角的选取不唯一, 可相差 2π 的整数倍. 在 C_i 的起始点 $r_i(0)$ 处, 我们总可取 $\angle(X_i, P_i), \angle(P_i, V) = -\angle(V, P_i)$ 使得

$$\angle(X_i, P_i) + \angle(P_i, V) = \angle(X_i, V) \quad (*)$$

$$\text{亦即 } \varphi_i(0) - \bar{\varphi}_i(0) = \angle(X_i, V)(0).$$

(256') ⑤

然后, 由 $\varphi_i, \bar{\varphi}_i$ 的连续性, 知 $(*)$ 这个关系式在整条 C_i 上成立。

因此, $\varphi_i - \bar{\varphi}_i = \angle(X_i, V)$.

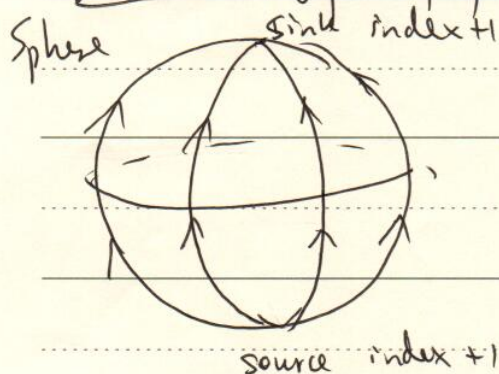
注意到 $\text{ind}(V, p_i) = \frac{\angle(X_i, V)(L(C_i)) - \angle(X_i, V)(0)}{2\pi}$

故而有: $\iint_M k dV = \sum_{i=1}^k 2\pi \text{ind}(V, p_i)$.

即 $\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_M k dV = \sum_{i=1}^k \text{ind}(V, p_i)$ $\square$

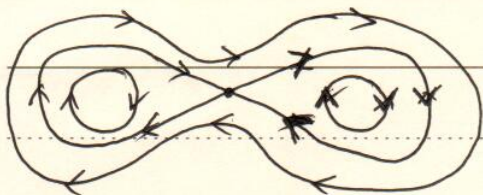
注意: 特别地, 上述证明告诉我们, index 的定义, 不依赖于 D_i 的选取, 不依赖于 X_i 的选取. 因为如果我们改变某 p_i 处, X_i, D_i 的选取, 其值并不变 ($\therefore \chi(M)$ 不变). $\square$

注意: 一个新计算 Euler 示性数的方法:



$$\chi(S^2) = (+1) + (+1) = 2$$

double Torus



$$\text{index} = -1$$

$$\chi(T^2) = (-1) + (-1) = -2$$

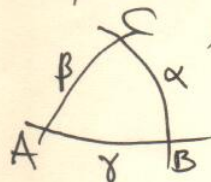
"meeting of two streams type"

Jacobi's (remarkable) curve theorem.

(257) ①

Refs. J. McCleary, On Jacobi's remarkable curve theorem,
Historia Mathematica 21 (1994), 377-385.

回忆 Gauss 在 1827 年文章中证明了曲面片上 - 测地三角形 $\triangle ABC$
满足 $\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \iint_{\triangle ABC} K dV$.

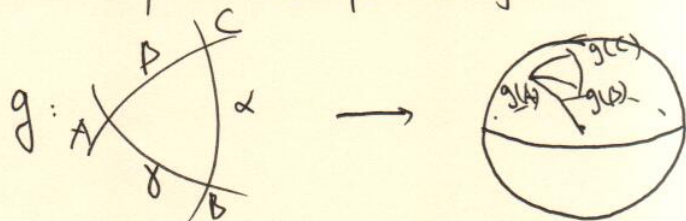


在 1848 年, Bonnet 做了重要推广, 三角形 $\triangle ABC$ 三边可视为曲面片上任意曲线,

$$\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \iint_{\triangle ABC} K dV + \oint_{\partial \triangle ABC} k_g ds$$

其中 k_g 为 Bonnet 引入的曲面上曲线的 测地曲率.

实际上, Gauss 的工作发表后, 引起了一大批几何学家的兴趣。在 Gauss 和 Bonnet 的工作之间, 还有另外的推广。德国数学家 Carl Gustav Jacob. Jacobi (1804-1851) 在 1836 年的文章中做了另一种 Gauss 定理的推广: Jacobi ~~还~~ 试图理解 Gauss 繁杂计算背后的几何原理, 他这样来看 Gauss 的结果: 回忆高斯映射



将曲面片上每一点映为球面上相应点, 曲面上点处单位法向量对应的单位球面上的点。而 $K = \frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v}$ 为 单位球面上面积元 (有向) 和曲面片上 (有向) 面积元之比, 故

(2571) ②

$\iint_{\Delta ABC} k dv$ 为 单位球面上相应情形 $\Delta g(A)g(B)g(C)$

的(有向)面积. 因此情形 ΔABC 三边均为测地线意味着其上点处的曲面单位法向量与曲线的主法向量 ($\frac{dr}{ds}$ 的单位化) 共线. 在 Jacobi 对 Gauss 定理的此种理解下, 他给出了如下引理.

定理 (Jacobi) 考虑由 ^{两条} 空间曲线给出的三角形 ΔABC . 考虑沿曲线的主法向量. 若主法向量处处非零, 且在相交点处主法向量 ~~互相~~ 吻合. 则由主法向量确定单位球面上三角形 ΔXYZ . 则有

$$\text{area}(\Delta XYZ) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$

实际上 Jacobi 在 1836 年文章中给出了两种证明. 第一个证明是用 Gauss 的定理. Jacobi 称对 ~~两条~~ 空间曲线 (两两相交) 可以看作某曲面上的测地线, 从而可应用 Gauss 关于测地三角形的结果直接得到. 第二个证明, Jacobi 试图解释 Gauss 计算之余几何原理, 他用了球面几何的技巧证明这个定理.

1842 年, Thomas Clausen (1801-1885) 发表文章指出 Jacobi 的第一种证法有错误. 实际上, 即使对两条相交的空间曲线, 在交点处有相同的主法向量, 有可能它们不能看成任何曲面上的测地线. Clausen 的文章投到 "Astronomische Nachrichten" 给 H.C. Schumacher. Schumacher 就写信给 Gauss 审稿. 1842 年 9 月 3 日, Gauss 回信说 Clausen 的质疑是 ~~com~~ 完全可靠和合适的. 1842 年 9 月-10 月间, Jacobi 迅速写了回应文章, 也同样发表在 Astronomische Nachrichten 上.

Jacobi 不仅想说明他结果的正确性, 还想说明他看待 Gauss 定理的方法的正确性。为此目的, 他在 1842 年 (1842) 叙述了如下

推论 (Jacobi 1842). 设 C 为空间中的光滑闭曲线, 正则参数化 $r=r(s)$ ^{s 弧长, $K(s) > 0$} . 若其主法向量的终点, 在 (起点均置于原点) 在单位球面上画出的曲线 (称为主法标线 principle normal indicatrix) 是一条简单闭曲线, 则它将单位球面分成 面积相等 的两部分.

注记: 若 ^将 Jacobi 定理应用于 C , 则有主法标线在单位球面上围成区域面积为 $3\pi - \pi = 2\pi = \frac{1}{2} \times 4\pi$. 球面面积的一半! 我们下面给这个推论的一个应用 Gauss-Bonnet 定理的证明, 也即一个分析 (analytic) 的证明.

证明: 考虑 C 的 Frenet 标架 $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$.

回忆运动方程为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{ds} = K(s)e_2(s) \\ \frac{de_2}{ds} = -K(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s) \\ \frac{de_3}{ds} = -\tau(s)e_2(s) \end{cases}$$

则其主法标线为 $s \mapsto e_2(s)$. 注意此时 s 不一定是弧长参数. 设 P 为主法标线的弧长, 由

$$P(s) = \int_0^s \left| \frac{de_2}{ds} \right| ds = \int_0^s \sqrt{K^2 + \tau^2} ds$$

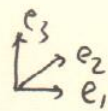
$$\text{知 } \frac{dP}{ds} = \sqrt{K^2 + \tau^2}$$

主法标线在球面上的测地曲率为:

$$k_g = \left\langle \underbrace{\frac{d^2 e_2}{dp^2}}_{\text{曲率向量}}, \underbrace{e_2 \wedge \frac{de_2}{dp}}_{\substack{\text{球面上位置向量} = \text{法向量}}} \right\rangle \leftarrow \text{单位切向量}$$

(257) (4)

计算 $\frac{de_2}{dp} = \frac{de_2}{ds} \frac{ds}{dp} = (-ke_1 + \tau e_3) \frac{ds}{dp}$



故 $e_2 \wedge \frac{de_2}{dp} = (ke_3 + \tau e_1) \frac{ds}{dp}$

$$\frac{d^2 e_2}{dp^2} = \frac{d}{ds} \left[(-ke_1 + \tau e_3) \frac{ds}{dp} \right] \left(\frac{ds}{dp} \right)$$

$$= \frac{d}{ds} (-ke_1 + \tau e_3) \left(\frac{ds}{dp} \right)^2 + (-ke_1 + \tau e_3) \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{dp} \right) \frac{ds}{dp}$$

$$= (-k'e_1 - k(ke_2) + \tau'e_3 + \tau(-\tau e_2)) \left(\frac{ds}{dp} \right)^2$$

$$+ (-ke_1 + \tau e_3) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \right) \frac{ds}{dp}$$

$$= (-k'e_1 - (k^2 + \tau^2)e_2 + \tau'e_3) \left(\frac{ds}{dp} \right)^2$$

$$+ (-ke_1 + \tau e_3) \frac{-2k\tau' + 2\tau\tau'}{(k^2 + \tau^2)^{3/2}} \frac{ds}{dp}$$

$$= (-k'e_1 - (k^2 + \tau^2)e_2 + \tau'e_3) \left(\frac{ds}{dp} \right)^2$$

$$- (-ke_1 + \tau e_3)(k\tau' + \tau\tau') \left(\frac{ds}{dp} \right)^4$$

从而有 $k_g = \left\langle \frac{d^2 e_2}{dp^2}, (ke_3 + \tau e_1) \frac{ds}{dp} \right\rangle$

$$= (-k'\tau + \tau'k) \left(\frac{ds}{dp} \right)^3 + 0$$

$$= \frac{k\tau' - k'\tau}{k^2 + \tau^2} \frac{ds}{dp}$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\arctan \frac{\tau}{k} \right) \frac{ds}{dp} \quad (\text{因为 } \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2})$$

令 D 为去掉好线在单位球面上所围区域之一。在 D 上用 Gauss-Bonnet, (257') (5)

$$\text{有: } \iint_D K dV + \oint_{\partial D} k_g ds = 2\pi.$$

$$\text{其中 } K \equiv 1, \quad \oint_{\partial D} k_g ds = \oint_{\partial D} \frac{d}{ds} \left(\arctan \frac{z}{K} \right) \frac{ds}{ds} ds = 0.$$

$$\text{故 } \text{Area}(D) = \iint_D K dV = 2\pi \text{ 为 } \overset{\text{单位}}{\text{球面面积}} \text{ 之一半. } \square.$$

令 D 为赤道线在单位球面上所围区域之一。在 D 上用 Gauss-Bonnet, (257) (5)

$$\text{有: } \iint_D K dV + \oint_{\partial D} k_g ds = 2\pi.$$

$$\text{其中 } K \equiv 1, \quad \oint_{\partial D} k_g ds = \oint_{\partial D} \frac{d}{ds} \left(\arctan \frac{r}{K} \right) \frac{ds}{dp} ds = 0.$$

$$\text{故 } \text{Area}(D) = \iint_D K dV = 2\pi \text{ 为球面面积之半. } \square.$$

球面的刚性: Liebmann 定理.

前面我们讨论曲面整体性质的基本工具是 Stokes 定理。接下来我们讨论另外一种基本工具:

• E^3 中紧致曲面上的连续函数必在曲面上一点取到最大值。

比如开圆盘 $\{(x,y) \in E^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ 上的连续函数

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$$

达不到最大值, 故开圆盘不是紧致曲面。

若函数 f 光滑, 我们进一步有: 对任何过最大值点 p 的光滑曲线 $r=r(s)$ with $r(0)=p$, 有

$$\left. \frac{d}{ds} f(r(s)) \right|_{s=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2}{ds^2} f(r(s)) \right|_{s=0} \leq 0.$$

我们来讨论这一基本工具的应用。

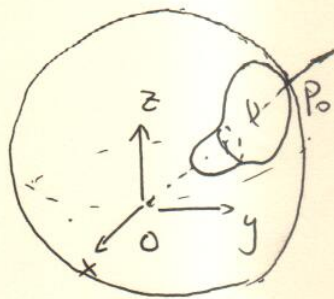
定理 (Liebmann 1899) 设 M 是 E^3 中一个紧致、连通、具有常 Gauss 曲率的曲面。则 M 是一个球面。

注意到, 我们只假定 Gauss 曲率 $K = \text{const}$, 结论已经可以说 $K > 0$ 。

我们先来证明如下事实。

引理1. 设 M 为 E^3 中的紧致曲面。则存在一点 $P_0 \in M$ 它的 Gauss 曲率 $K(P_0) > 0$.

注记: 直观上, 因为 M 为一有界闭集, 必有一以 O 为心的球面把 M 包在内部且



切于一点 P_0 . 在该点 P_0 处 M 的弯曲超过球面, 因此 $K(P_0) > 0$.

证明: 设 $r(p) = (x(p), y(p), z(p))$, $p \in M$ 为 M 的位置向量.

考查 M 上的函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$p \mapsto \langle r(p), r(p) \rangle = x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2.$$

易见 f 光滑. M 的紧性意味着必存在一点 $P_0 \in M$ 使得 f 在 P_0 点处达到极大值.

考虑任意过 P_0 点的 M 上弧长参数曲线 $r(s)$, $r(0) = P_0$.

我们有 $\left. \frac{d}{ds} f(r(s)) \right|_{s=0} = 0$.

即 $0 = \langle \dot{r}(0), r(0) \rangle$. 由 $r(s)$ 选取的任意性知 P_0 点位置向量 $r(0) = r(P_0)$ 与 P_0 处切平面垂直.

记 P_0 点处单位法向量为 $n(P_0)$. 则有 $r(P_0) = \lambda n(P_0)$, $\lambda \neq 0$.

又由 P_0 为 f 极大值点知

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left. \frac{d^2}{ds^2} f(r(s)) \right|_{s=0} = 2 \left. \frac{d}{ds} \langle \dot{r}(s), r(s) \rangle \right|_{s=0} = 2 (\langle \ddot{r}(0), r(0) \rangle + \langle \dot{r}(0), \dot{r}(0) \rangle) \\ &= 2 (\lambda \langle \ddot{r}(0), n(P_0) \rangle + 1) \end{aligned}$$

注意 $\langle \dot{r}(t), n(P_0) \rangle = k_n(\dot{r}(t))$ 为 P_0 点处

沿切向 $\dot{r}(t)$ 的法曲率.

故 $\lambda k_n(\dot{r}(t)) \leq -1$, 即 $k_n(\dot{r}(t)) \begin{cases} \leq -\frac{1}{\lambda} & \text{if } \lambda > 0 \\ \geq -\frac{1}{\lambda} & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$

切方向
由 $\dot{r}(t)$ 选取的任意性知 P_0 点处 Gauss 曲率

$$K(P_0) = \underbrace{k_1(P_0) k_2(P_0)}_{\text{两个主曲率}} \geq \frac{1}{\lambda^2} > 0.$$

□

这个引理说明一个 E^3 中紧致曲面若具有常 Gauss 曲率, 则必有常正高斯曲率。也即

推论: E^3 中不存在零 Gauss 曲率或常负高斯曲率的紧致曲面。

引理 1: 观察到如下事实: 回忆两个主曲率 k_1, k_2 是 Weingarten 变换的两个特征值, 由光滑性知 k_1, k_2 是 M 上的两个连续函数。

若 $K = k_1 k_2 = \text{const}$, 若在 P_0 点主曲率函数 k_1 达最大值, 则另一个主曲率函数 k_2 必达最小值。关于这类点 P_0 , 我们有如下观察:

引理 2:

(Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 3rd ed. Leipzig 1909. Appendix 5)

设 P_0 是空间 E^3 中光滑曲面 M 上的一点, k_1, k_2 为主曲率函数,

满足 (i) k_1 在 P_0 点达局部极大值

(ii) k_2 在 P_0 点达局部极小值

(iii) $k_1(P_0) > k_2(P_0)$

则 Gauss 曲率 $K(P_0) \leq 0$.

(257) ⑧

证明: 由 (ii) 知 P_0 不是脐点.

即 k_1, k_2 在 P_0 处做为 Weingarten 变换的特征值都是单的.

故其相应特征向量在 P_0 附近光滑变化.

在 P_0 附近存在曲面片 ~~$r=r(u,v)$~~ , 在其上 k_1, k_2 光滑, 且存在参数化 $r=r(u,v)$ 使得 r_u, r_v 均为主曲方向, 这称为曲率线参数. 在此参数化下, 曲面的第一基本形式为

$$I = E du \otimes du + G dv \otimes dv$$

考虑正交活动标架 $e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}, e_3 = e_1 \wedge e_2$.

则 $\omega^1 = \sqrt{E} du, \omega^2 = \sqrt{G} dv$.

回忆运动方程 $de_i = \omega_i^j e_j, \omega_i^j = -\omega_j^i$

及结构方程:
$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 \end{cases} \quad (*)$$

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 \quad (\text{Gauss 方程})$$

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \end{cases} \quad (\text{Codazzi 方程}).$$

由于 Weingarten 变换 W 满足

$$W \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

(总可经过^{适当}参数化
使 $\frac{r_u}{\sqrt{E}} = e_1$ 对应 k_1)

我们有
$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

即 $\omega_1^3 = k_1 \omega^1, \omega_2^3 = k_2 \omega^2 \quad (*)$

对 (*) 取外微分得
$$\begin{cases} d\omega_1^3 = dk_1 \wedge \omega^1 + k_1 d\omega^1 \\ d\omega_2^3 = dk_2 \wedge \omega^2 + k_2 d\omega^2 \end{cases}$$

代入 (4) 和 Codazzi 方程, 有

$$\begin{cases} \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = dk_1 \wedge \omega^1 + k_1 \omega^2 \wedge \omega_2^1 \\ \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = dk_2 \wedge \omega^2 + k_2 \omega^1 \wedge \omega_1^2 \end{cases}$$

整理得 $\begin{cases} 0 = dk_1 \wedge \omega^1 + (k_1 - k_2) \omega_1^2 \wedge \omega^2 \\ 0 = dk_2 \wedge \omega^2 + (k_1 - k_2) \omega_1^2 \wedge \omega^1 \end{cases} \quad (**)$

代入 $(dk_1) \wedge \omega^1 = ((k_1)_u du + (k_1)_v dv) \wedge \sqrt{E} du$
 $= (k_1)_v dv \wedge \omega^1 = - \frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}} \omega^1 \wedge \omega^2$
 $(dk_2) \wedge \omega^2 = ((k_2)_u du + (k_2)_v dv) \wedge \sqrt{G} dv$
 $= (k_2)_u du \wedge \omega^2 = \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} \omega^1 \wedge \omega^2$

到 (**) 得 $\begin{cases} 0 = \left[-\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}} \omega^1 + (k_1 - k_2) \omega_1^2 \right] \wedge \omega^2 \\ 0 = \left[-\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} \omega^2 + (k_1 - k_2) \omega_1^2 \right] \wedge \omega^1 \end{cases}$

因此 M 上任一点, 形式均可表为 $a\omega^1 + b\omega^2$.
 不妨设 $(k_1 - k_2)\omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^2$.

则有 $\begin{cases} 0 = \left[-\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}} + a \right] \omega^1 \wedge \omega^2 \\ 0 = \left[-\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} + b \right] \omega^2 \wedge \omega^1 \end{cases}$ 即 $a = \frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}, b = \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}$

也就是有 $(k_1 - k_2)\omega_1^2 = \frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}} \omega^1 + \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} \omega^2 \quad (***)$

注记: 通常我们从 $\begin{cases} d\omega^1 = a\omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega^2 = b\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}$ 来求 $\omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^2$.

在上述情况即有 $\omega_1^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \omega^1 + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \omega^2$

这里我们从另一种途径解 ω_1^2 , 得到 ~~曲线~~ 主曲率和 E, G 表达式.

为求得 Gauss 曲率, 我们需^{对 (***)}再求一次外微分

(257) (10)

$$d(k_1 - k_2) \wedge \omega^2 + (k_1 - k_2) d\omega^2 = d\left(\frac{(k_1)_u}{\sqrt{G}} \omega^1 + \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} \omega^2\right) \\ = -K \omega^1 \wedge \omega^2$$

限制在 P_0 点处, 由极值性质知 $dk_1(P_0) = dk_2(P_0) = 0$, 故

$$-(k_1 - k_2) K \omega^1 \wedge \omega^2 (P_0) = d\left(\frac{(k_1)_u}{\sqrt{G}} \omega^1 + \frac{(k_1)_u}{\sqrt{G}} d\omega^1\right) + d\left(\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} \omega^2 + \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} d\omega^2\right) \Big|_{P_0} \\ = \left(\frac{(k_1)_{uu}}{\sqrt{G}}\right)_u d\omega^1 \wedge \omega^1 + \left(\frac{(k_2)_{uu}}{\sqrt{E}}\right)_u d\omega^2 \wedge \omega^2 \Big|_{P_0} \\ = \frac{(k_1)_{uu}}{G} \omega^2 \wedge \omega^1 + \frac{(k_2)_{uu}}{E} \omega^1 \wedge \omega^2 \Big|_{P_0}$$

$$\text{整理得 } K(P_0) = - \frac{1}{(k_1(P_0) - k_2(P_0))} \left(\frac{(k_2)_{uu}}{E} - \frac{(k_1)_{uu}}{G} \right) (P_0)$$

注意 k_1 在 P_0 取局部极大 推出 $(k_1)_{uu}(P_0) \leq 0$

k_2 在 P_0 取局部极小 推出 $(k_2)_{uu}(P_0) \geq 0$.

从而有 $K(P_0) \leq 0$.

□

现在, 我们可以证明 Liebmann 1899 的结果了. 这个证明 ~~S.S. Chern~~ 是陈省身先生基于 Hilbert 的证明给出的. (S. S. Chern, Some new characterizations of the Euclidean Sphere, Duke Math J. 12(1945), 270-290.)

证明: 由引理 1, 知 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的 Gauss 曲率为正常数. 设 k_1, k_2 为 M 上的主曲率函数, $k_1 \geq k_2$, 可知 k_1, k_2 为连续函数. 设 k_1 在 P_0 取极大值, 由 $K = k_1 k_2$ 为常数知 k_2 在 P_0 取极小值.

(257') (11)

若 P_0 点非脐点, 我们有 $k_1(P_0) > k_2(P_0)$, 则引理 2 告诉我们在 P_0 处, $K(P_0) \leq 0$, 矛盾. 因此, P_0 点为脐点, 即 $k_1(P_0) = k_2(P_0)$. 实际上, 这意味着 M 上每点均为脐点: $\forall P \in M$, 有

$$k_1(P_0) \geq k_1(P) \geq k_2(P) \geq k_2(P_0) = k_1(P_0) \Rightarrow k_1(P) = k_2(P).$$

回忆全脐点曲面(片)要么是平面的一部分要么是球面的一部分. 由于 $K > 0$, 知是球面的一部分. 故 M 为半径为 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ 的球面的子集. 紧性推出 M 为闭子集, M 为光滑曲面 (每点局部同胚于欧氏开区域) 推出 M 为开子集. 即 M 为一个半径为 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ 的球面的既开且闭的非空子集, 故而 M 就是这个球面. $\square$

重新思考上述证明, 我们发现现在在保证 Gauss 曲率 > 0 的情况下, "Gauss 曲率为常数" 的条件上用到说明在 k_1 的极大值点 k_2 达极大值点, 实际上, k_2 是 k_1 的递减函数.

定理': 设 M 是 E^3 中一个紧致连通, Gauss 曲率为正的光滑曲面. 如果存在递减函数 f , 使得 M 的两个主曲率函数 k_1, k_2 , k_1 及 k_2 满足 $k_2 = f(k_1)$. 则 M 为一个球面.

Gauss 曲率 $K \equiv C_{>0}$ 意味着 $k_2 = \frac{C}{k_1}$. 同时, 常平均曲率 $H \equiv C$ 意味着 $k_2 = 2C - k_1$!

推论: 设 M 是 E^3 中一个紧致、连通、Gauss 曲率为正的光滑曲面. 如果 M 有常平均曲率, 则 M 为一个球面.

Gauss 曲率为正 可推出 M 同胚于球面, 也即亏格 $g=0$, (高斯定理内) 1950 年前后, Hopf 证明 " $K > 0$ " 条件可弱化为 "同胚于球面", 即 E^3 中一个紧致连通同胚于球面的光滑曲面若具有常平均曲率, 则必为球面.

1956年A. Alexandroff 证明“同胚于球面”条件可弱化⁽²⁵⁷⁾ ⑫
为仅要求“紧致”。即“ E^3 中一个紧致连通具有常平均曲率的光滑
曲面必为球面”。

1956年A. Alexandroff 证明“同胚于球面”条件可弱化⁽²⁵⁷⁾ ⑫
为仅要求“紧致”。即“ E^3 中一个紧致连通具有常平均曲率的光滑曲面必为球面”。

凸曲面: Hadamard 定理。

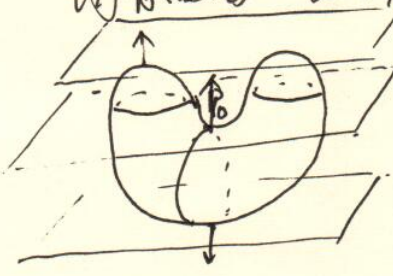
另外一种思考“ E^3 中紧致连通、高斯曲率 > 0 的光滑曲面”的方式是凸性。

定义: E^3 中的光滑曲面 M 称为凸曲面, 如果 M 位于每点切平面的同一侧。也即, 对 $\forall P_0 \in M$, 函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(P) := \langle r(P) - r(P_0), n(P_0) \rangle$ 不变号 (要么 $f \geq 0$ 要么 $f \leq 0$), 其中
 $r(P)$ 为位置向量, $n(P)$ 为 P 点单位法向量。

我们首先证明 Hadamard (1897) 的一个定理。

定理 (Hadamard) 设 M 为 E^3 中的紧致 (连通) 曲面。若 M 的高斯曲率 K 处处为正, 则 M 是凸曲面。

注记: 这个定理直观上容易理解。若有一点 P 其切平面两侧

均有曲面的点, 直观上 P 点高斯曲率为负。我们的证明基于

如下稍不平凡的观察: 紧致曲面应夹于另
两个平行于 P 点处切平面的两个切平面
之间, 则曲面上有至少三点处法向量平行。

从而其中有两点 $\odot$ 单位法向量相同。这就意味着, 从曲面出发
的高斯映射 $g: M \rightarrow S^2$ 不是单射。然而我们有如下引理:

引理: 设 M 为 E^3 中紧致(连通), $K > 0$ 的光滑曲面. (257) (13)

则高斯映射 $g: M \rightarrow S^2$ 是 1:1 映射.

证明: 我们先来证明 $g: M \rightarrow S^2$ 是满射. 也即对任意 $e \in S^2$,

要证明 $\exists P_0 \in M$ s.t. $n(P_0) = g(P_0) = e$.

为此目的, 考虑函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R} : f(P) = \langle g(P), e \rangle = \langle n(P), e \rangle$.
 $\forall P \in M$.

观察到, 若 $n(P) = e$, 则 $f(P) = 1$, 而 $|f(P)| \leq 1, \forall P \in M$.

故我们考虑查函数的最大值点 P_0 . 取包含 P_0 的曲面片,

设其有参数化 $r = r(u, v)$ 使得 $\langle r_u, r_v \rangle \equiv 0$. 由极值性质,

知 $df(P_0) = 0$. 即

$$\begin{aligned} 0 &= d\langle n, e \rangle|_{P_0} = \langle dn, e \rangle|_{P_0} = \langle n_u du + n_v dv, e \rangle|_{P_0} \\ &= \langle n_u, e \rangle du + \langle n_v, e \rangle dv|_{P_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \langle n_u, e \rangle|_{P_0} \\ 0 = \langle n_v, e \rangle|_{P_0} \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{因此, 若从 } \begin{cases} \langle n_u, r_u \rangle = -L \\ \langle n_u, r_v \rangle = -M \end{cases} \text{ 可解得 } n_u = ar_u + br_v, \begin{cases} aE = -L \\ bG = -M \end{cases}$$

$$\text{即 } n_u = -\frac{L}{E}r_u - \frac{M}{G}r_v$$

$$\text{类似地, 有 } n_v = -\frac{M}{E}r_u - \frac{N}{G}r_v$$

$$\text{从而 (*) 可写成 } \begin{cases} 0 = -\frac{L}{E}\langle r_u, e \rangle - \frac{M}{G}\langle r_v, e \rangle|_{P_0} \\ 0 = -\frac{M}{E}\langle r_u, e \rangle - \frac{N}{G}\langle r_v, e \rangle|_{P_0} \end{cases} \quad (**)$$

由假设 $K(P_0) > 0$. 知

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{L}{E} & -\frac{M}{G} \\ -\frac{M}{E} & -\frac{N}{G} \end{pmatrix} \Big|_{P_0} = \frac{LN - M^2}{EG}(P_0) > 0.$$

解方程 (*) 得 $\langle r_u, e \rangle = \langle r_v, e \rangle = 0$.

即 $e = \pm n(P_0)$.

再由 P_0 的极大性, 知

$$\begin{cases} (i) 0 \geq f_{uu}(P_0) = \left\langle \left(-\frac{L}{E} r_u - \frac{M}{G} r_v \right)_u, e \right\rangle \Big|_{P_0} = \left\langle -\frac{L}{E} r_{uu} - \frac{M}{G} r_{uv}, e \right\rangle \Big|_{P_0} \\ (ii) 0 \geq f_{vv}(P_0) = \left\langle \left(-\frac{M}{E} r_u - \frac{N}{G} r_v \right)_v, e \right\rangle \Big|_{P_0} = \left\langle -\frac{M}{E} r_{uv} - \frac{N}{G} r_{vv}, e \right\rangle \Big|_{P_0} \end{cases}$$

若 $e = -n(P_0)$, 则 $\langle r_{uu}, e \rangle \Big|_{P_0} = -L$, $\langle r_{vv}, e \rangle \Big|_{P_0} = -N$,

代入 (i) 得 $0 \geq \frac{L^2}{E} + \frac{M^2}{G}$

类似的, (ii) 推出 $0 \geq \frac{M^2}{E} + \frac{N^2}{G}$. 也就是 P_0 点处有 $L=M=N=0$.

这与高斯曲率 $K(P_0) > 0$ 矛盾.

因此, 我们推出 $e = n(P_0)$. 满射得证.

下证高斯映射 $g: M \rightarrow S^2$ 是单的. 反证法: 设存在两点 $P, Q \in M$ 使得 $g(P) = g(Q) = e \in S^2$. 注意到

$$K = \frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v} \text{ 是高斯映射的 Jacobian.}$$

由 $K > 0$, 及反函数定理知, P, Q 存在邻域 W_P, W_Q s.t.

$$\begin{aligned} g: W_P &\rightarrow g(W_P) \text{ 为微分同胚.} \\ g: W_Q &\rightarrow g(W_Q) \end{aligned}$$

不妨设 $W_P \cap W_Q = \emptyset$, $g(W_P) \subset g(W_Q)$

故 Gauss 映射 g 在 $M \setminus W_P$ 上仍是满射. 故而

$$\int_{M \setminus W_P} K dV \geq \int_{S^2} d\sigma \underset{\substack{\uparrow \\ \text{单位球面面积元}}}{=} 4\pi.$$

然而

$$\int_M K dV = 4\pi \quad \left(\text{这是因为 } K > 0 \Rightarrow \int_M K dV > 0 \Rightarrow \chi = 2 \right)$$

这导出矛盾

$$4\pi = \int_M K dV = \int_{W_p} K dV + \int_{M \setminus W_p} K dV \\ > \int_{M \setminus W_p} K dV \geq 4\pi. \quad \square$$

(257) (15)

定理 (Hadamard) 的证明:

反证. 若不然, $\exists P_0 \in M$ 使得 $f(P) := \langle r(P) - r(P_0), n(P_0) \rangle$

变号. 即 $\{P \in M : f(P) > 0\}$, $\{P \in M : f(P) < 0\}$ 均非空.

设 Q_1, Q_2 分别为 $f, -f$ 在 M 上的最大值点. 类似于引理

的论证知 $n(P_0)$ 也与 Q_1, Q_2 处切平面垂直.

也即 Q_1, Q_2, P_0 三点处^{单位}法向量平行. 则至少有其中两个相等.

这与 Gauss 映射为单矛盾. $\square$

定义: 我们称 E^3 中高斯曲率 > 0 的紧致曲面为 卵形面 (ovaloid).

注记: 若将定理中的设 " $K > 0$ " 弱化为 " $K \geq 0$ ", 定理仍成立. 证明

可见 S.S. Chern, R.K. Lashof, On the total curvature of immersed manifolds I., Amer. J. Math. 79 (1957), 302-318.

II., Michigan. Math. J. 59 (1958), 5-12.

紧致卵形面: 积分公式

下面我们再回到整体微分几何的另一基本工具: Stokes 公式.

这里的基本原则如下: 在 E^3 中的紧致曲面 M 上, 若能找到一个整体

定义的微分一形式 ϕ , 则由 Stokes 公式 $\int_M d\phi = 0$.

若 ϕ 有特别的表达式, 这将推出非常有趣的结论

(257) (16)

设 M 为 E^3 中的一个紧致曲面. 考虑其上的 1-形式

$$(r, n, dn).$$

其中 r 为位置向量, n 为单位法向量 (E^3 中曲面紧致 $\Rightarrow$ 可定向). 此 1-形式是整体定义的. 下面要计算其外微分. 我们更进一步看一下这个 1-形式.

记 $r = (r^1, r^2, r^3)$, $n = (n^1, n^2, n^3)$. 则有

$$(r, n, dn) = \begin{vmatrix} r^1 & r^2 & r^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \\ dn^1 & dn^2 & dn^3 \end{vmatrix}$$

$$= (r^2 n^3 - r^3 n^2) dn^1 - (r^1 n^3 - r^3 n^1) dn^2 + (r^1 n^2 - r^2 n^1) dn^3$$

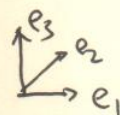
$$\text{故 } d(r, n, dn) = d(r^2 n^3 - r^3 n^2) \wedge dn^1 - d(r^1 n^3 - r^3 n^1) \wedge dn^2 + d(r^1 n^2 - r^2 n^1) \wedge dn^3$$

$$\stackrel{=}{=} \begin{vmatrix} dr^1 & dr^2 & dr^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \\ dn^1 & dn^2 & dn^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r^1 & r^2 & r^3 \\ dn^1 & dn^2 & dn^3 \\ dn^1 & dn^2 & dn^3 \end{vmatrix}$$

这里要注意上面的行列式中, dn^i 作为“系数”的 0-微分形式相乘要取“外积”且顺序要特别注意, 不能交换!

于是我们在每个局部进行如下计算: 在每个曲面片上, 取^{正交}标架

$$e_1, e_2, e_3 = n$$



利用运动方程和结构方程计算

$$d(r, n, dn) \doteq (dr, n, dn) + (r, dn, dn)$$

$$\text{其中 } (dr, n, dn) = (\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, e_3, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2)$$

$$= \langle \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, e_3 \wedge (\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2) \rangle$$

$$= \langle \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, \omega_3^1 e_2 + \omega_3^2 (-e_1) \rangle$$

(257') (17)

$$= -\omega^1 \wedge \omega_3^2 + \omega^2 \wedge \omega_3^1$$

$$= \omega_1^3 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \omega_2^3$$

$$= 2H \omega^1 \wedge \omega^2 \quad (\text{因为}) \quad \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

另外. $(r, dn, dn) = (r, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2)$

$$= \langle r, \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \cdot n + \omega_3^2 \wedge \omega_3^1 (-n) \rangle$$

$$= + \langle r, n \rangle (\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 - \omega_3^2 \wedge \omega_3^1)$$

$$= + \langle r, n \rangle (\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^3 \wedge \omega_2^3)$$

$$= +2 \langle r, n \rangle \omega_1^3 \wedge \omega_2^3$$

$$= +2 \langle r, n \rangle \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$= +2 \langle r, n \rangle K \omega^1 \wedge \omega^2.$$

总结起来, $d(r, n, dn) = 2(H + \langle r, n \rangle K) \omega^1 \wedge \omega^2.$

由 Stokes, 即 $0 = \int_M d(r, n, dn) = 2 \int_M (H + \langle r, n \rangle K) \omega^1 \wedge \omega^2.$

$$\Rightarrow \int_M H dV = \int_M -\langle r, n \rangle K dV. \quad \triangleleft \triangleright$$

定义. E^3 中光滑曲面 M 上的函数 $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(p) := -\langle r(p), n(p) \rangle, \quad \forall p \in M$$

称为 M 的 支撑函数。

支撑函数的绝对值是原点到 P 点切平面的距离。 $\triangleleft \triangleright$ 可重新写为

$$\int_M H dV = \int_M K \varphi dV \quad \triangleleft \triangleright$$

类似地去考察整体定义的1-形式 (r, n, dr) ,
 可得公式
$$\int_M dv = \int_M H g dv. \quad \langle 2 \rangle$$

上述公式 $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$ 称为 Minkowski 公式。

类似地论证还可以推出其他有趣的结论：对任一给定常向量 a ,
 考察整体定义的1-形式 (r, dr, a) , (r, n, a) , (n, dn, a)

可分别推出

$$\int_M \langle n, a \rangle dv = 0, \quad \int_M H \langle n, a \rangle dv = 0, \quad \int_M k \langle n, a \rangle dv = 0$$

由 a 的任意性, 知

$$\int_M n dv = 0, \quad \int_M H n dv = 0, \quad \int_M k n dv = 0.$$

↑
向量值

积分公式在凸曲面的应用

凸曲面的一个好处是, 对其所包围的区域内任一点, 都在曲面的同一侧。故将原点选在其包围区域内, 可通过选取单位法向量使支撑函数 $\varphi > 0$ (或 $\varphi < 0$)。

应用1. Liebmann 定理的新证明:

E^3 中 Gauss curvature 为常数的紧致连通曲面具有正常高斯曲率 $K > 0$.

注意到一个一般的事实:

$$H^2 = \left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2) \right]^2 = \left(\frac{1}{2}(k_1 - k_2) \right)^2 + k_1 k_2 = K + \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2.$$

从而有 $H^2 \geq K$, " $=$ " $\Leftrightarrow k_1 = k_2$

注意到 $\varphi > 0$ 的 $\odot$ 单位法向量的选取恰好使

(257) (19)

$$H > 0.$$

故由积分公式得

$$\int_M K \varphi dV \stackrel{①}{=} \int_M H dV \geq \int_M \sqrt{K} dV = \sqrt{K} \int_M dV \stackrel{②}{=} \sqrt{K} \int_M H \varphi dV$$
$$\geq \sqrt{K} \int_M \sqrt{K} \varphi dV$$

故不等号均为等号.

$$= \int_M K \varphi dV$$

亦即 $H^2 = K$ 处处成立. 因而 M 为全脐点曲面.

由 M 为紧致曲面知 M 为球面. $\square$

应用2: (257) (11) 推论的推广.

定理: 设 M 为 E^3 中紧致凸曲面. 若 M 的平均曲率为常数,

则 M 为球面.

证明: 由 Minkowski 积分公式知

$$\int_M K \varphi dV \stackrel{①}{=} \int_M H dV = H \int_M dV \stackrel{②}{=} H \int_M H \varphi dV$$

$$\Rightarrow \int_M (H^2 - K) \varphi dV = 0.$$

由凸性, 可选适当的单位法向量, 使 $\varphi > 0$. 从而有

$$(H^2 - K) \varphi \geq 0$$

这意味着 $H^2 = K$, 即 M 是全脐点曲面.

由紧致性, 知 M 有一点 $K > 0 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow M$ 是球面. $\square$

关于支撑函数的一个注记：

(257) (20)

对于卵形面，知道了其支撑函数 $\varphi := -\langle r, n \rangle$ ，便可求出曲面本身，即求出各位置向量 r 。

$\uparrow$ $\uparrow$
位置向量 法向量

由于卵形面 M 上的高斯映射 $g: M \rightarrow S^2$ 是 1:1 映射，曲面的位置向量也可看作 S^2 上的向量值函数

$$\begin{array}{ccccc} S^2 & \xrightarrow{g^{-1}} & M & \xrightarrow{r} & E^3 \\ \xi & \longmapsto & g^{-1}(\xi) & \longmapsto & r(g^{-1}(\xi)) \end{array}$$

而同时 n 可以看作是 S^2 的位置向量。从而支撑函数 φ 可以看作是 S^2 上的函数。

- 曲面片

选取 S^2 上的正交活动标架 $\{\xi; e_1, e_2, e_3\}$ ，其中 $e_3 = \xi$ 为法向量。其诸微分形式记为 $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^1, \theta^2$ 。作为 S^2 的函数 φ 求外微分有函数 $\varphi_1, \varphi_2: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 使

$$d\varphi = \varphi_1 \theta^1 + \varphi_2 \theta^2.$$

另一方面， $d\varphi = d(-\langle r, n \rangle) = -\langle dr, n \rangle - \langle r, dn \rangle$

$$\begin{aligned} \text{这里 } n \text{ 看作 } S^2 \text{ 的位置向量，故 } \langle r, dn \rangle &= \langle r, \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2 \rangle \\ &= \langle r, e_1 \rangle \theta^1 + \langle r, e_2 \rangle \theta^2 \end{aligned}$$

$$\text{这里 } r \text{ 看作 } S^2 \text{ 上的向量值函数，} \langle dr, n \rangle = \langle d(r \circ g^{-1}), n \rangle$$

$$\text{其中 } d(r \circ g^{-1})v = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r \circ g^{-1}(c(t)) = dr((g^{-1})_*(v))$$

为 M 上切向量的 ~~任意~~ 线性组合，故 $\langle dr, n \rangle = 0$ 。

$$\text{综上，我们有 } \varphi_1 \theta^1 + \varphi_2 \theta^2 = -\langle r, e_1 \rangle \theta^1 - \langle r, e_2 \rangle \theta^2$$

$$\text{故 } \langle r, e_1 \rangle = -\varphi_1, \quad \langle r, e_2 \rangle = -\varphi_2$$

$$\text{因此： } r = \langle r, e_1 \rangle e_1 + \langle r, e_2 \rangle e_2 + \langle r, e_3 \rangle e_3 = -\varphi_1 e_1 - \varphi_2 e_2 - \varphi_3 e_3. \quad \square$$

卵形面的刚性 :

Liebmann (1899) 的定理又可叙述为: 给定两个 E^3 中常高斯曲率的紧致曲面 $M, \bar{M}$, 若 $f: M \rightarrow \bar{M}$ 是一个等距对应, 则 f 必为合同变换. 简言之, 球面是 "not bendable".

Stefan Emmanuilovich Cohn-Vossen (1902. born, Breslau, Germany, now Wrocław, Poland - 1936 died Moscow, Russia) 1927 年证明卵形面也是 "not bendable". (Cohn-Vossen 的另一个著名工作是研究完备非紧曲面的全曲率和欧拉示性数. 他还与 Hilbert 合著 "Geometry and Imagination".) 下面定理见: S. Cohn-Vossen, Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1927), 125-134.

定理: (Cohn-Vossen 1927) E^3 中两个等距的卵形面是合同的, 即它们只差 E^3 中的一个合同变换, 即一个刚体运动或反向刚体运动.

证明思路套用 "曲面论基本定理" 唯一性部分的思路.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \bar{M} \\ \uparrow r & \nearrow \bar{r} := f \circ r & \\ (u, v) & & \end{array}$$

设 f 为 M 到 $\bar{M}$ 的等距对应. 取 $\bar{M}$ 曲面片建立参数映射 $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ 和 $\bar{r} = \bar{r}(u, v) = f(r(u, v))$. 则相应的自然标架运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial u^\alpha} = r_\alpha \\ \frac{\partial r}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma r_\gamma + b_{\alpha\beta} n \\ \frac{\partial n}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha^\beta r_\beta \end{cases} \quad \text{及}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^\alpha} = \bar{f}_* r_\alpha \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{r}_\gamma + \bar{b}_{\alpha\beta} \bar{n} \\ \frac{\partial \bar{n}}{\partial u^\alpha} = -\bar{b}_\alpha^\beta \bar{r}_\beta \end{cases}$$

若能证明各系数函数 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(u,v)$, $b_{\alpha\beta}(u,v)$, $b_{\alpha}^{\beta}(u,v)$ (257) (22)

与 $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}(u,v)$, $\bar{b}_{\alpha\beta}(u,v)$, $\bar{b}_{\alpha}^{\beta}(u,v)$ 分别相等, 则上述两个方程相同! 为此只须检查相应第一、第二、第三项之系数相符即可.

这样的话两个方程的解的差在于初值.

若此两标架差一刚体运动, 需证 $I(u,v) = \bar{I}(u,v)$, $II(u,v) = \bar{II}(u,v)$
若差一反向刚体运动, 需证 $I(u,v) = -\bar{I}(u,v)$, $II(u,v) = -\bar{II}(u,v)$
同变换调整后, 方程也相同

在一点处 (u_0, v_0) , $\{r(u_0, v_0), r_1(u_0, v_0), r_2(u_0, v_0), \frac{r_1 \wedge r_2}{|r_1 \wedge r_2|}(u_0, v_0)\}$

与 $\{\bar{r}(u_0, v_0), \bar{r}_1(u_0, v_0), \bar{r}_2(u_0, v_0), \frac{\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2}{|\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2|}(u_0, v_0)\}$ 之间差变换 ± 1

合同变换。又方程为线性方程, 知两方程之解相差一个合同变换!

运动方程还可以用正交活动标架来表示. 取 M 相应曲面片上的正交活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$, 及 M 上相应标架 $\{r; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 := e_1 \wedge e_2\}$, 其中 $\bar{e}_1 = f_* e_1$, $\bar{e}_2 = f_* e_2$. 则两组

运动方程写为 (与标准形式等价)

$$\begin{cases} dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \\ de_1 = \omega^1 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_2 = \omega^2 e_1 + \omega^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} d\bar{r} = \bar{\omega}^1 \bar{e}_1 + \bar{\omega}^2 \bar{e}_2 \\ d\bar{e}_1 = \bar{\omega}_1^2 \bar{e}_2 + \bar{\omega}_1^3 \bar{e}_3 \\ d\bar{e}_2 = \bar{\omega}_2^1 \bar{e}_1 + \bar{\omega}_2^3 \bar{e}_3 \\ d\bar{e}_3 = \bar{\omega}_3^1 \bar{e}_1 + \bar{\omega}_3^2 \bar{e}_2 \end{cases}$$

粗略地讲, 通过映射 f , M 上任一微分形式 $\bar{\omega}$ 可以看作 M 上的微分形式. 实际上, 我们考虑 M 上 1 形式 $f^* \bar{\omega}$

对任意 $v \in T_p M$, $p \in M$, $f^* \bar{\omega}(v) := \bar{\omega}(f_* v)$.

所以我们需要证明微分形式在上下相等即可. 回忆

ω_3^1 完全由 ω^1, ω^2 决定, 故只需比较

$$\begin{cases} \omega^1 \wedge f^* \bar{\omega}^1, & \omega^2 \wedge f^* \bar{\omega}^2 \\ \omega_1^3 \wedge f^* \bar{\omega}_1^3, & \omega_2^3 \wedge f^* \bar{\omega}_2^3 \end{cases} \quad \text{作为 } M \text{ 上 1 形式}$$

根据定义: $f^* \bar{\omega}^\alpha(e_\beta) = \bar{\omega}^\alpha(f_* e_\beta) = \bar{\omega}^\alpha(\bar{e}_\beta) = \delta_\beta^\alpha$ (257) (23)

从而 $\omega^1 = f^* \bar{\omega}^1, \omega^2 = f^* \bar{\omega}^2$.

这就是说为证 Cohn-Vossen 定理, 只需证

$\omega_1^3 = f^* \bar{\omega}_1^3, \omega_2^3 = f^* \bar{\omega}_2^3$ 若 $\det(f_*) > 0$ (*)
 $\omega_1^3 = -f^* \bar{\omega}_1^3, \omega_2^3 = -f^* \bar{\omega}_2^3$ 若 $\det(f_*) < 0$.
 若记 $\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1^3 \\ \bar{\omega}_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} \\ \bar{h}_{21} & \bar{h}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\omega}^1 \\ \bar{\omega}^2 \end{pmatrix}$ (*)

我们有 $\begin{pmatrix} f^* \omega_1^3 \\ f^* \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_{11} \circ f & \bar{h}_{12} \circ f \\ \bar{h}_{21} \circ f & \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^* \bar{\omega}^1 \\ f^* \bar{\omega}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_{11} \circ f & \bar{h}_{12} \circ f \\ \bar{h}_{21} \circ f & \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$ (2)

这就是说, 为证 (*), 只需证

$h_{11} = \bar{h}_{11} \circ f, h_{12} = \bar{h}_{12} \circ f, h_{22} = \bar{h}_{22} \circ f$ 若 $\det(f_*) > 0$ (**)
 $h_{11} = -\bar{h}_{11} \circ f, h_{12} = -\bar{h}_{12} \circ f, h_{22} = -\bar{h}_{22} \circ f$ 若 $\det(f_*) < 0$.
 为此目的, 我们先建立如下线性代数引理.

引理: 设 $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \bar{\lambda} & \bar{\mu} \\ \bar{\mu} & \bar{\nu} \end{pmatrix}$ 为两个正定矩阵

满足 $\lambda \nu - \mu^2 = \bar{\lambda} \bar{\nu} - \bar{\mu}^2$. <1>

则有 $\det \begin{pmatrix} \bar{\lambda} - \lambda & \bar{\mu} - \mu \\ \bar{\mu} - \mu & \bar{\nu} - \nu \end{pmatrix} \leq 0$, <2>

其中 "=" 成立当且仅当 $\lambda = \bar{\lambda}, \mu = \bar{\mu}, \nu = \bar{\nu}$.

证明: 设 A 为非奇异矩阵使得

$$A \begin{pmatrix} \bar{\lambda} - \lambda & \bar{\mu} - \mu \\ \bar{\mu} - \mu & \bar{\nu} - \nu \end{pmatrix} A^T =$$

为对角矩阵。(可取 A 为由 $\begin{pmatrix} \bar{\lambda} - \lambda & \bar{\mu} - \mu \\ \bar{\mu} - \mu & \bar{\nu} - \nu \end{pmatrix}$ 的特征向量组成).

记 $A \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} \lambda^* & \mu^* \\ \mu^* & \nu^* \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & \bar{\mu} \\ \bar{\mu} & \bar{\nu} \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^* & \bar{\mu}^* \\ \bar{\mu}^* & \bar{\nu}^* \end{pmatrix}$.

则有 $\bar{\mu}^* = \mu^*$.

由 <1> 易知 $\det \begin{pmatrix} \lambda^* & \mu^* \\ \mu^* & \nu^* \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^* & \bar{\mu}^* \\ \bar{\mu}^* & \bar{\nu}^* \end{pmatrix}$ (25) (24)

故而 $\lambda^* \nu^* = \bar{\lambda}^* \bar{\nu}^*$. <3>

这时 $\det \left[A \begin{pmatrix} \bar{\lambda} - \lambda & \bar{\mu} - \mu \\ \bar{\mu} - \mu & \bar{\nu} - \nu \end{pmatrix} A^T \right] = (\det A)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{\lambda} - \lambda & \bar{\mu} - \mu \\ \bar{\mu} - \mu & \bar{\nu} - \nu \end{pmatrix}$
 $= \det \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^* - \lambda^* & 0 \\ 0 & \bar{\nu}^* - \nu^* \end{pmatrix} = (\bar{\lambda}^* - \lambda^*)(\bar{\nu}^* - \nu^*)$ <4>

由于 $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ 正定知 $A \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} A^T$ 正定, 从而 $\lambda^* > 0$
 $\nu^* > 0$

同理 $\bar{\lambda}^* > 0, \bar{\nu}^* > 0$.

将 <3> 代入 <4> 中有

$$(\det A)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{\lambda} - \lambda & \bar{\mu} - \mu \\ \bar{\mu} - \mu & \bar{\nu} - \nu \end{pmatrix} = (\bar{\lambda}^* - \lambda^*) \left(\frac{\lambda^* \nu^*}{\bar{\lambda}^*} - \nu^* \right)$$

$$= -\frac{\nu^*}{\bar{\lambda}^*} (\bar{\lambda}^* - \lambda^*)^2 \leq 0. \quad <5>$$

即有 $\det \begin{pmatrix} \bar{\lambda} - \lambda & \bar{\mu} - \mu \\ \bar{\mu} - \mu & \bar{\nu} - \nu \end{pmatrix} \leq 0$.

且 <5> 中等号成立当且仅当 $\bar{\lambda}^* = \lambda^*$.

由 <3> 及 $\bar{\mu}^* = \mu$ 知, $\bar{\lambda}^* = \lambda^* \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} A^T = A \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & \bar{\mu} \\ \bar{\mu} & \bar{\nu} \end{pmatrix} A^T$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & \bar{\mu} \\ \bar{\mu} & \bar{\nu} \end{pmatrix}. \quad \square$

下面 Cohn-Vossen 定理的证明应用积分公式, 基本上属于 Herglotz.

G. Herglotz, über die Starrheit der Eiflächen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 15 (1943), 127-129.

Cohn-Vossen 定理的证明:

回忆在证明积分公式 $\int_M H dv = \int_M K_g dv$ 时我们考查了整体

$\det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$

定义的微分1-形式 (r, n, dn)

(257) (25)

在一个曲面片上的局部表示 $= (r, e_3, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2)$

现在, 我们考虑 M 上曲面片上微分1-形式

$$\phi = (r, n, f^* \bar{\omega}_3^1 e_1 + f^* \bar{\omega}_3^2 e_2)$$

这里首先一个问题是, ϕ 是否为 M 上“整体”定义的微分1-形式?

为此, 需证 ϕ 的定义不依赖于标架的选取. 易见 r, n 不依赖于标架选取, 故只需证 $f^* \bar{\omega}_3^1 e_1 + f^* \bar{\omega}_3^2 e_2$ 不依赖于标架选取.

设 M 上另取正交标架 $\{r; e'_1, e'_2, n\}$, 其中

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

注意: M 上标架选取通过 f 与 M 上的选取“联动”.

$$\begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_* e'_1 \\ f_* e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_* e_1 \neq \bar{e}_1 \\ f_* e_2 \neq \bar{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{从而 } \begin{pmatrix} \bar{\omega}'_3^1 \\ \bar{\omega}'_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle dn, \bar{e}'_1 \rangle \\ \langle dn, \bar{e}'_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\omega}_3^1 \\ \bar{\omega}_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{即有 } \begin{pmatrix} f^* \bar{\omega}'_3^1 \\ f^* \bar{\omega}'_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^* \bar{\omega}_3^1 \\ f^* \bar{\omega}_3^2 \end{pmatrix}$$

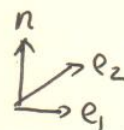
$$\begin{aligned} \text{因此, } f^* \bar{\omega}'_3^1 e'_1 + f^* \bar{\omega}'_3^2 e'_2 &= (f^* \bar{\omega}'_3^1 \ f^* \bar{\omega}'_3^2) \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} \\ &= (f^* \bar{\omega}_3^1 \ f^* \bar{\omega}_3^2) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{= Id} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ &= f^* \bar{\omega}_3^1 e_1 + f^* \bar{\omega}_3^2 e_2. \end{aligned}$$

这就证明了 ϕ 是 M 上整体定义的微分1-形式.

下面我们计算 $d\phi$:

$$\begin{aligned} d\phi &= (dr, n, f^* \bar{\omega}_3^1 e_1 + f^* \bar{\omega}_3^2 e_2) \\ &\quad + (r, dn, f^* \bar{\omega}_3^1 e_1 + f^* \bar{\omega}_3^2 e_2) \\ &\quad + (r, n, d(f^* \bar{\omega}_3^1 e_1 + f^* \bar{\omega}_3^2 e_2)). \\ &=: \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}. \end{aligned}$$

分别计算



$$\textcircled{1} = (\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, n, f^* \bar{\omega}_3^1 e_1 + f^* \bar{\omega}_3^2 e_2)$$

$$= \langle \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, f^* \bar{\omega}_3^1 e_2 - f^* \bar{\omega}_3^2 e_1 \rangle$$

$$= -\omega^1 \wedge f^* \bar{\omega}_3^2 + \omega^2 \wedge f^* \bar{\omega}_3^1.$$

$$= \omega^1 \wedge f^* \bar{\omega}_3^2 + f^* \bar{\omega}_3^1 \wedge \omega^2$$

(23) 页

$$(\textcircled{1}) \textcircled{2} \quad \omega^1 \wedge (\bar{h}_{21} \circ f \omega^1 + \bar{h}_{22} \circ f \omega^2) + (\bar{h}_{11} \circ f \omega^1 + \bar{h}_{12} \circ f \omega^2) \wedge \omega^2$$

$$= 2\bar{H} \circ f \omega^1 \wedge \omega^2;$$

$$\textcircled{2} = (r, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2, f^* \bar{\omega}_3^1 e_1 + f^* \bar{\omega}_3^2 e_2)$$

$$= \langle r, \omega_3^1 \wedge f^* \bar{\omega}_3^2 n - \omega_3^2 \wedge f^* \bar{\omega}_3^1 n \rangle$$

$$= -\varphi (\omega_1^3 \wedge f^* \bar{\omega}_3^2 + f^* \bar{\omega}_3^1 \wedge \omega_2^3)$$

(23) 页

$$(\textcircled{1}) \textcircled{2} \quad -\varphi \left[\det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \bar{h}_{21} \circ f & \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \bar{h}_{11} \circ f & \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \right] \omega^1 \wedge \omega^2.$$

观察到行列式公式:

按第一行展开

$$\det \begin{pmatrix} h_{11} - \bar{h}_{11} \circ f & h_{12} - \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} - \bar{h}_{21} \circ f & h_{22} - \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} - \bar{h}_{21} \circ f & h_{22} - \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -\bar{h}_{11} \circ f & -\bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} - \bar{h}_{21} \circ f & h_{22} - \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix}$$

按第二行展开

$$\stackrel{\downarrow}{=} \underbrace{\det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}}_{=K} + \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ -\bar{h}_{21} \circ f & -\bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -\bar{h}_{11} \circ f & -\bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} -\bar{h}_{11} \circ f & -\bar{h}_{12} \circ f \\ -\bar{h}_{21} \circ f & -\bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix}}_{=K \circ f}$$

f 等距

$$= 2K - \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \bar{h}_{21} \circ f & \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \bar{h}_{11} \circ f & \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

代回②中有:

$$\textcircled{2} = \left[-2k\varphi + \varphi \det \begin{pmatrix} h_{11} - \bar{h}_{11} \circ f & h_{12} - \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} - \bar{h}_{21} \circ f & h_{22} - \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} \right] \omega^1 \wedge \omega^2$$

最后, 再计算③.

④ 首先, 对 $\bar{M}$ 上任一微分 1-形式 $\bar{\omega}$, 我们有

$$d(f^*\bar{\omega}) = f^*d\bar{\omega}$$

实际上, 回忆在一个曲面片 $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ 上, 有

$$\begin{aligned} d(f^*\bar{\omega})(r_u, r_v) &= \frac{\partial}{\partial u}(f^*\bar{\omega}(r_u)) - \frac{\partial}{\partial v}(f^*\bar{\omega}(r_u)) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}(\bar{\omega}(f_*r_u)) - \frac{\partial}{\partial v}(\bar{\omega}(f_*r_u)) \\ &= d\bar{\omega}(f_*r_u, f_*r_v) \\ &= f^*d\bar{\omega}(r_u, r_v). \end{aligned}$$

(更细致讨论, 见 [O'Neill, § 4.5])

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &= (r, n, de_1 \wedge f^*\bar{\omega}_3^1 + e_1 d \circ f^*\bar{\omega}_3^1 + de_2 \wedge f^*\bar{\omega}_3^2 + e_2 df^*\bar{\omega}_3^2) \\ &= (r, n, (\omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3) \wedge f^*\bar{\omega}_3^1 + e_1 f^*(\bar{\omega}_3^2 \wedge \bar{\omega}_2^1) \\ &\quad + (\omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3) \wedge f^*\bar{\omega}_3^2 + e_2 f^*(\bar{\omega}_3^1 \wedge \bar{\omega}_1^2)) \end{aligned}$$

注意到 $f^*(\bar{\omega}_3^2 \wedge \bar{\omega}_2^1) = f^*\bar{\omega}_3^2 \wedge f^*\bar{\omega}_2^1$, 和 $f^*\bar{\omega}_2^1 = \omega_2^1$, 我们

$$\begin{aligned} \text{有 } \textcircled{3} &= (r, n, \underbrace{[\omega_1^2 \wedge f^*\bar{\omega}_3^1 + f^*\bar{\omega}_3^1 \wedge f^*\bar{\omega}_1^2]}_{=0} e_2 + \underbrace{[f^*\bar{\omega}_3^2 \wedge f^*\bar{\omega}_2^1 + \omega_2^1 \wedge f^*\bar{\omega}_3^2]}_{=0} e_1 \\ &\quad + [\omega_1^3 \wedge f^*\bar{\omega}_3^1 + \omega_2^3 \wedge f^*\bar{\omega}_3^2] e_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

综上, 有 $d\phi = \left[2\bar{H} \circ f - 2k\varphi + \varphi \det \begin{pmatrix} h_{11} - \bar{h}_{11} \circ f & h_{12} - \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} - \bar{h}_{21} \circ f & h_{22} - \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} \right] \omega^1 \wedge \omega^2.$

由 Stokes 公式知

$$0 = \int_M d\phi = 2 \int_M \bar{H} \circ f dV - 2 \int_M k\varphi dV + \int_M \varphi \det \begin{pmatrix} h_{11} - \bar{h}_{11} \circ f & h_{12} - \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} - \bar{h}_{21} \circ f & h_{22} - \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} dV.$$

回忆我们仍有 Gauss 曲率 > 0 .

若 $\det(f_*) < 0$, 我们可设原点及 M 上单位法向 n 选取使 $\varphi > 0$.

(257) (28) 补.

(此时 $H > 0$). 故 $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ 正定

但是 $\begin{pmatrix} \bar{h}_{11} \circ f & \bar{h}_{12} \circ f \\ \bar{h}_{21} \circ f & \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix}$ 负定. $\Rightarrow (-\bar{h}_{\alpha\beta} \circ f)$ 正定.

我们在 (24) 页 (2) 的计算时, 同时观察到

$$\det \begin{pmatrix} h_{11} + \bar{h}_{11} \circ f & h_{12} + \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} + \bar{h}_{21} \circ f & h_{22} + \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} = 2K + \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \bar{h}_{21} \circ f & \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \bar{h}_{11} \circ f & \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

从而 (2) 也可表成

$$(2) = [+2K\varphi - \varphi \det(h_{\alpha\beta} + \bar{h}_{\alpha\beta} \circ f)] \omega^1 \wedge \omega^2$$

从而 Stokes 公式推出 $0 = 2 \int_M \bar{H} \circ f \, dV + 2 \int_M H \, dV - \int_M \varphi \det(h_{\alpha\beta} + \bar{h}_{\alpha\beta} \circ f) \, dV$

$$\text{即 } 2 \int_M (H + \bar{H} \circ f) \, dV = \int_M \varphi \det(h_{\alpha\beta} - (-\bar{h}_{\alpha\beta} \circ f)) \, dV.$$

$$\leq 0 \text{ 由引理. } \quad \langle A \rangle$$

(注意此时有 $H > 0$, $\bar{H} \circ f < 0$)

我们仍维持由 $M, \bar{M}$ 上述原点及法向量选取, 对称的有

$$2 \int_M (H \circ f^1 + \bar{H}) \, d\bar{V} = \int_M \underbrace{\varphi}_{<0} \underbrace{\det(h_{\alpha\beta} \circ f^1 + \bar{h}_{\alpha\beta})}_{\leq 0} \, d\bar{V}$$

$$2 \int_M (H + \bar{H} \circ f) \circ f^1 \, d\bar{V} \geq 0 \quad \langle B \rangle$$

$$2 \int_M (H + \bar{H} \circ f) \, dV$$

由 (A) 及 (B) 知, 等号成立. 由引理知 $h_{\alpha\beta} = -\bar{h}_{\alpha\beta} \circ f$. 得证.

□.

应用 Minkowski 积分公式, $\int_M K \varphi dV = \int_M H dV$, 得 (257) (28)

$$-2 \int_M (H \circ f - H) dV = \int_M \varphi \det \begin{pmatrix} h_{11} - \bar{h}_{11} \circ f & h_{12} - \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} - \bar{h}_{21} \circ f & h_{22} - \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} dV$$

因为卵形面高斯曲率 > 0 , 有 $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ 先设 $\det(f_x) > 0$, 此时 $\begin{pmatrix} \bar{h}_{12} \circ f & \bar{h}_{12} \circ f \\ \bar{h}_{21} \circ f & \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix}$ 正定

(可设 M 为原点及 M 上单位法向 n 的选取使 $\varphi > 0$, 此时 $H > 0$) 则有引理得

$$2 \int_M (H - H \circ f) dV \leq 0$$

同理, 可证 $2 \int_M (H - H \circ f^{\perp}) dV \leq 0$, 即

$$2 \int_M (H \circ f - H) \cdot f^{\perp} dV = 2 \int_M (H \circ f - H) dV \leq 0.$$

故有 $2 \int_M (H - H \circ f) dV = 0$. 因此有

$$\det \begin{pmatrix} h_{11} - \bar{h}_{11} \circ f & h_{12} - \bar{h}_{12} \circ f \\ h_{21} - \bar{h}_{21} \circ f & h_{22} - \bar{h}_{22} \circ f \end{pmatrix} = 0 \quad (28) \text{ 补}$$

由引理知 $h_{11} = \bar{h}_{11} \circ f$, $h_{12} = \bar{h}_{12} \circ f$, $h_{22} = \bar{h}_{22} \circ f$, 得证. $\uparrow$ 口.

卵形面之间存在等距对应意味着相应点处高斯曲率相等. 回忆

两个卵形面通过各自 Gauss 映射 1:1 对应到单位球面.

$$M \xrightarrow{g} \text{球面} \xleftarrow{\bar{g}} \bar{M}$$

从而我们有 M 到 $\bar{M}$ 的 1:1 对应 $\bar{g}^{-1} \circ g: M \rightarrow \bar{M}$. 这个 1:1

对应当然不能保证等距. 但是下面我们证明, 如果这个对应相

应点处高斯曲率相等 (这只是 $\bar{g}^{-1} \circ g$ 为等距对应的必要条件), 则这个对应是一个平移!

定理: 设 $M, \bar{M}$ 为 E^3 中两个卵形面。若存在 S^2 上的正值函数 $K > 0$, 使得 $M, \bar{M}$ 的高斯曲率函数分别为

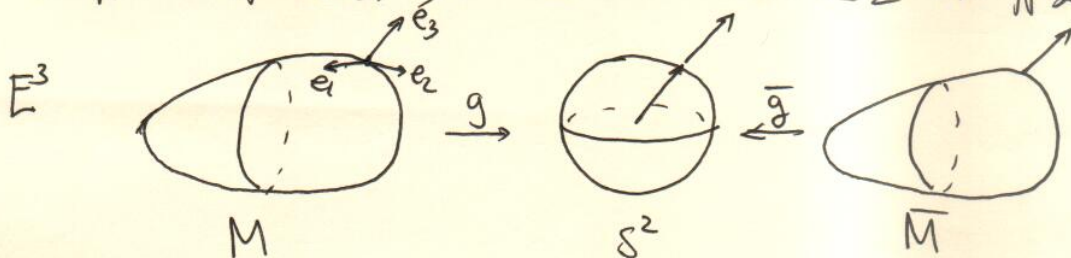
$$K = K \circ g \quad \text{和} \quad \bar{K} = \bar{K} \circ \bar{g}$$

其中 $g: M \rightarrow S^2, \bar{g}: \bar{M} \rightarrow S^2$ 为高斯映射。
则 $M, \bar{M}$ 相差一平移。

注记: 著名的 Minkowski 问题是一个卵形面是否由它作为法向量函数的高斯曲率 (唯一) 确定? 主要是存在性问题: 给定 S^2 上正函数 $K: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 是否存在 E^3 中卵形面, 使其高斯曲率函数为 $K \circ g$? 上述定理是说, 若这样的卵形面存在, 则步唯一。Minkowski 问题的解决要用到非线性 PDE 的理论。回忆卵形面可由其支撑函数 g 确定。求解 Minkowski 问题可化为 g 满足的一个 Monge-Ampère 型方程的解的存在性问题。这个问题由 Nirenberg, Pogorelov 解决。

1. L. Nirenberg, The Weyl and Minkowski Problems in Differential Geometry in the Large, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 337-394.
2. A.V. Pogorelov, Regularity of a convex surface with given Gaussian curvature, Mat. Sb. 31 (1952), 88-103.

证明: 证明主要套路和上述 Cohn-Vossen 定理的证明类似。



在 M 的一个曲面片上取正交活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3 = n\}$ 。

易见, $\forall p \in M$, p 点处, $g(p)$ 点处, $\bar{g}^{-1}(g(p))$ 点处⁽²⁵⁷⁾ 分别在⁽³⁰⁾
 $M, S^2, \bar{M}$ 上的单位法向量在 E^3 中平行 (相差一个平移)

将 e_1, e_2 平移至 $S^2, \bar{M}$ 相应点处也得到 $S^2, \bar{M}$ 上的正交活动标架. 三个曲面上各自正交活动标架下端微分 1-形式记作

$$M: \omega^1, \omega^2, \omega_1^3, \omega_2^3, \omega_3^3$$

$$S^2: \theta^1, \theta^2, \theta_1^3, \theta_2^3, \theta_3^3$$

$$\bar{M}: \bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_2^3, \bar{\omega}_3^3.$$

我们需证在相应~~对应~~对应下, $M, \bar{M}$ 的端微分 1-形式相等. 从而标架的运动方程吻合, 且其初值相差一个平移, 得两卵形面只差一个平移.

更精确地, 我们需证:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= (\bar{g}^{-1} \circ g)^* \bar{\omega}^1, \quad \omega^2 = (\bar{g}^{-1} \circ g)^* \bar{\omega}^2 \\ \omega_1^3 &= (\bar{g}^{-1} \circ g)^* \bar{\omega}_1^3, \quad \omega_2^3 = (\bar{g}^{-1} \circ g)^* \bar{\omega}_2^3 \end{aligned} \quad (\text{作为 } M \text{ 上 1-形式})$$

等价地 (注意到 $(\bar{g}^{-1} \circ g)^* = g^* \circ (\bar{g}^{-1})^*$, $(g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$),

$$(I) (g^{-1})^* \omega^1 = (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1, \quad (g^{-1})^* \omega^2 = (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 \quad (\text{作为 } S^2 \text{ 上 1-形式})$$

$$(II) (g^{-1})^* \omega_1^3 = (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}_1^3, \quad (g^{-1})^* \omega_2^3 = (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}_2^3$$

注意到对 S^2 上任意光滑曲线 $c = c(t)$, 有

$$\frac{d}{dt} e_3(c(t)) = \frac{d}{dt} e_3(g^{-1}(c(t))) \quad (\text{作为欧氏向量 (不经过点) 相等})$$

$$\text{从而 } \left\langle \frac{d}{dt} e_3(c(t)), e_\alpha(c(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} e_3(g^{-1}(c(t))), e_\alpha(g^{-1}(c(t))) \right\rangle, \alpha=1,2$$

(欧氏平行性)

这就是说 $\omega_3^\alpha((g^{-1})_* v) = \theta_3^\alpha(v), \quad \forall v \in T_p S^2, p \in S^2.$

$$\text{即 } (g^{-1})^* \omega_3^\alpha = \theta_3^\alpha, \quad \alpha=1,2$$

类似地有 $(\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}_3^\alpha = \theta_3^\alpha$. 故 (II) 得证.

所以,问题的关键是证 (I).

(257) (31)

回忆在 M 上有 $\begin{pmatrix} w_1^3 \\ w_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$, 其中 $K = \det(h_{\alpha\beta}) > 0$.

故存在 $(h_{\alpha\beta})$ 的逆矩阵 $(\lambda_{\alpha\beta})$ 使

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^3 \\ w_2^3 \end{pmatrix}.$$

~~证 $(\lambda_{\alpha\beta})$ 是对称正定矩阵.~~

由于 $K = \det(h_{\alpha\beta}) > 0$ 我们可以适当选取法向量使 $(h_{\alpha\beta})$ 正定, 从而 $(\lambda_{\alpha\beta})$ 是对称正定矩阵。

进而在 S^2 上我们有

$$\begin{pmatrix} (g^{-1})^* w^1 \\ (g^{-1})^* w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \cdot g^{-1} \begin{pmatrix} (g^{-1})^* w_1^3 \\ (g^{-1})^* w_2^3 \end{pmatrix}. \quad \langle 1 \rangle$$

类似地我们有

$$\begin{pmatrix} (\bar{g}^{-1})^* \bar{w}^1 \\ (\bar{g}^{-1})^* \bar{w}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_{11} & \bar{\lambda}_{12} \\ \bar{\lambda}_{21} & \bar{\lambda}_{22} \end{pmatrix} \cdot \bar{g}^{-1} \begin{pmatrix} (\bar{g}^{-1})^* \bar{w}_1^3 \\ (\bar{g}^{-1})^* \bar{w}_2^3 \end{pmatrix}. \quad \langle 2 \rangle$$

由 (II), 为证 (I), 只须证 S^2 上的函数

$$\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} = \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}, \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2.$$

因为 $(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1}), (\bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1})$ 均正定, 我们的策略仍是应用引理, 也即去证 $\det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) = 0$.

方法仍然是用积分公式。

考虑 S^2 上微分 1-形式 $\psi = (r \circ g^{-1}, \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, dF \circ \bar{g}^{-1})$, 其中 $r, \bar{r}$ 分别为 $M, \bar{M}$ 的位置向量. 这显然是 S^2 上整体定义的. 计算

$$\begin{aligned} d\psi &= (dr \circ g^{-1}, d\bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, d(dF \circ \bar{g}^{-1})) + (r \circ g^{-1}, d(\bar{r} \circ \bar{g}^{-1}), d(\bar{r} \circ \bar{g}^{-1})) \\ &= \textcircled{A} + \textcircled{B} \end{aligned}$$

(257) (32)

$$\text{其中由 } d(r \circ g^{-1})(v) = \frac{d}{dt} (r \circ g^{-1})(c(t)) = \frac{d}{dt} r(g^{-1}(c(t))) \\ = dr((g^{-1})_* v), \quad \forall v \in T_p S^2, \forall p \in S^2.$$

$$\text{于是 } d(r \circ g^{-1}) = (g^{-1})^*(dr) = (g^{-1})^*(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2) \\ = (g^{-1})^* \omega^1 e_1 + (g^{-1})^* \omega^2 e_2 \quad \xrightarrow{\text{平移回 } S^2 \text{ 相点}}$$

$$\text{类似地 } d(\bar{r} \circ \bar{g}^{-1}) = (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 e_1 + (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 e_2.$$

$$\text{故而 } \textcircled{A} = ((g^{-1})^* \omega^1 e_1 + (g^{-1})^* \omega^2 e_2, \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 e_1 + (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 e_2) \\ = (g^{-1})^* \omega^1 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 (\underbrace{e_1, \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, e_2}_{= -\langle \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, n \rangle = \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1}}) + (g^{-1})^* \omega^2 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 (\underbrace{e_2, \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, e_1}_{\langle \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, n \rangle = \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1}}) \\ = \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} ((g^{-1})^* \omega^1 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 - (g^{-1})^* \omega^2 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1)$$

$$\textcircled{3} \xrightarrow{1,2} = \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} \left(\underbrace{\det \begin{pmatrix} \lambda_{11} \circ g^{-1} & \lambda_{12} \circ g^{-1} \\ \lambda_{21} \circ g^{-1} & \lambda_{22} \circ g^{-1} \end{pmatrix}}_{=: I} + \det \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_{11} \circ \bar{g}^{-1} & \bar{\lambda}_{12} \circ \bar{g}^{-1} \\ \bar{\lambda}_{21} \circ \bar{g}^{-1} & \bar{\lambda}_{22} \circ \bar{g}^{-1} \end{pmatrix} \right) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$$

$$\text{同样 } \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) = \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1}) + \det(-\bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \neq I. \\ = \frac{2}{K} \neq I$$

$$\text{故 } \textcircled{A} = \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} \left(\frac{2}{K} - \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \right) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$$

$$\text{进一步, } \textcircled{B} = (r \circ g^{-1} (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 e_1 + (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 e_2, (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 e_1 + (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 e_2) \\ = (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 (\underbrace{r \circ g^{-1} e_1, e_2}_{= \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1}}) + (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 (\underbrace{r \circ g^{-1} e_2, e_1}_{= \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1}}) \\ = -2 \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2$$

$$\textcircled{3} \xrightarrow{2} = -2 \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} \det(\bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3 = -\frac{2 \varphi \circ g^{-1}}{K} \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$$

$$\text{综上, } d\psi = \left\{ \frac{2}{K} (\bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} - \varphi \circ g^{-1}) - \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \right\} \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$$

$$\text{由 Stokes 知, } 0 = \int_{S^2} d\psi = \int_{S^2} \frac{2}{K} (\bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} - \varphi \circ g^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3 - \int_{S^2} \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3.$$

$$\text{即. } \int_{S^2} \frac{2}{k} (\bar{\varphi} \bar{g}^{-1} - \varphi g^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$$

$$= \int_{S^2} \bar{\varphi} \bar{g}^{-1} \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$$

由原点位于卵形面内, 由前述法向选取, 知 $\bar{\varphi} > 0$, $\varphi > 0$.

~~$$\theta_1^3 \wedge \theta_2^3 = \det(h_{\alpha\beta}) \theta^1 \wedge \theta^2$$~~

$$\text{由引理. } \int_{S^2} \frac{2}{k} (\bar{\varphi} \bar{g}^{-1} - \varphi g^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3 \leq 0$$

$$\text{由对称性可得 } \int_{S^2} \frac{2}{k} (\varphi g^{-1} - \bar{\varphi} \bar{g}^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3 \leq 0$$

故 "=" 成立, 由引理知

$$\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} = \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}.$$

$$\text{即 } \lambda_{\alpha\beta} = \cancel{\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} \circ g} = \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ (\bar{g}^{-1} \circ g), \text{ 得证. } \square$$

Hilbert 定理:

由 Liebmann (1899) 定理 E^3 中位-紧致(连通)常高斯曲率曲面必为球面, 也即常正高斯曲率曲面。特别地, 不存在 ^{E^3 中}紧致常零高斯曲率或常负高斯曲率曲面。

若把考虑曲面范围由“紧致”曲面扩大为“完备”曲面, 即作欧度量空间完备, 则 ^{E^3 中}平面(或更一般地, 广义柱面)为完备常零高斯曲率曲面。但是对于 ^{E^3 中}常负高斯曲率完备曲面, D. Hilbert (1901) 证明了如下定理:

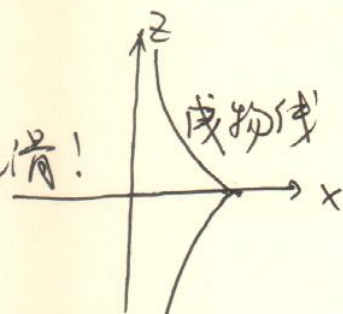
定理 (Hilbert, 1901) 在 E^3 中不存在常负高斯曲率的完备光滑曲面。

这个结果给出了局部 (local) 和大范围 (global) 几何的另一种区别:

(257) 34

E^3 中常负高斯曲率的曲面片有很多, 但是不完备 (infinitely extendable)
 以常负高斯曲率光滑曲面却不存在!

回忆伪球面在 x, y 平面上的曲线上的点均不光滑!



Hilbert 的定理发表在

D. Hilbert, über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung,
 Trans. Amer. Math. Soc. 2(1901), 87-99.

不久 E. Holmgren 便发表了一个不同的证明:

E. Holmgren, Sur les surfaces à courbure constante negative,
 C. R. Acad. Sci. Paris 134 (1902), 740-743.

我们这里给出的证明大体上是 Holmgren 的证明。在正式开始讨论之前, 我们先讨论 完备曲面 的概念。

① 完备曲面: 设 M 为 E^3 中的光滑曲面。设 $P, Q \in M$ 为任意两点, 则定义它们之间的距离为

$$d(P, Q) = \inf_{\gamma} l(\gamma)$$

其中 γ 为连接 P, Q 两点的分段光滑曲线, $l(\gamma)$ 为曲线 γ 的长度。

我们有如下观察:

引理 1: E^3 中光滑^{连通}曲面 ^{M} 上任两点, 都可由曲面上的分段光滑曲线相连接。

证明: "连通"性意味着 M 的既开且闭非常集为全集 M 。

对任意 $P \in M$, 由于 M 的每点都包含在某一曲面片内, 知

集合 $A_P = \{Q \in M \mid \text{存在曲面上分段光滑曲线连接 } P, Q\}$ 为开集,

同理, 其补集

(257) (33)

$MA_p = \{Q \in M \mid \text{存在曲面上分段光滑曲线连接 } P, Q\}$ 也为开集

又若 Q 和 P 属于同一曲面片, 则必有光滑曲线相连, 知 A_p 为非空.
由连通性, 知 $A_p = M$. □

这个引理保证了 $d(P, Q) < \infty$. 下面我们说明 d 确为一个度量:

引理 2. 距离函数 $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

(i) $d(P, Q) = d(Q, P)$

(ii) $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$

(iii) $d(P, Q) \geq 0$ 且 $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

证明: (i), (ii) 由定义直接推得. 对 (iii) 只需证若 $P \neq Q$, 则 $d(P, Q) > 0$.

事实上, 存在充分小 $\varepsilon > 0$ s.t. $B(P, \varepsilon)$, 其中

$B(P, \varepsilon)$ 是以 P 为心, ε 为半径的 (小) 地球.

(这由欧氏开区域在 Hausdorff 可分性可知).

设 γ 是连接 P, Q 的分段光滑曲线, 且 ~~且 γ 不经过 P~~

$(\gamma(0) = P, \gamma(l) = Q)$

$\leq t_0 = \inf \{t \in (0, l) : \gamma(t) \notin B_P(\varepsilon)\}$

则有 $l(\gamma) \geq l(\gamma|_{[0, t_0]}) \geq d(P, P') = \varepsilon > 0$, 故而 $d(P, Q) \geq \varepsilon > 0$. □

定义: E^3 中光滑曲面 M 称为是完备的, 若 (M, d) 作为度量空间完备, 即关于 d 的 Cauchy 列收敛.

性质: 如果曲面 M 是 E^3 中 ^{作为}子集为闭集, 则 M 是完备的.

证明: 易见, $\forall P, Q \in M$,

$$d_{\text{Euclidean}}(P, Q) \leq d_M(P, Q)$$

故 $\{P_n\}$ 是 M 上关于 d_M 的 Cauchy 列 可推出 $\{P_n\}$ 是 $\textcircled{257}$ $\textcircled{36}$ 关于 $d_{\text{Euclidean}}$ 的 E^3 中 Cauchy 列。由 E^3 的完备性知, 存在极限点 P_0 s.t. $P_n \rightarrow P_0$ as $n \rightarrow \infty$. 由于 M 是闭集, $P_0 \in M$.

要说明 $d_M(P_n, P_0) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. ~~需证当 $d_E(P_n, P_0)$ 充分小时, 说明 d_M 定义的 M 的拓扑与曲面 M 作为 E^3 子集的子空间拓扑一致。实际上, d_M 定义的 M 的拓扑与拓扑是取为以点 P 为中心, r 为半径的距离球 $B_{d_M}(P, r) = \{Q \in M : d(Q, P) < r\}$, $\forall P \in M, \forall r$. 根据测地坐标系之讨论知, 当 r 充分小时, 距离球 $B_{d_M}(P, r)$ 与以 P 为中心, r 为半径的测地球 $B_P(r)$ 相等, 故两种拓扑一致。注意后者又与 E^3 的子空间拓扑一致。~~

□.

局部.

② 常负高斯曲率曲面上参数曲线为渐近线的 Chebyshev 网的存在性.

我们要证明如下引理: 局部渐近 Chebyshev 网的存在性

引理 3: 设 M 为 E^3 中高斯曲率为 $K \equiv -1$ 的光滑曲面. 对任意 $P \in M$, 存在曲面片:

$$r = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M.$$

$$r(0, 0) = P$$

其参数曲线均为弧长参数的渐近线.

注记 1: 由 $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$, 知若对曲面作相似变换 $(r \mapsto cr)$

则有 $K \mapsto \frac{c^2}{c^4} K = \frac{1}{c^2} K$. 故而我们为简便起见设 $K \equiv -1$.

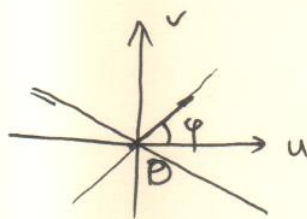
注记 2: 我们称曲面片 $r: (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$ 的参数化为一个 Chebyshev 网, 如果所有参数曲线都是弧长参数化的.

(即有 $|r_u| = |r_v| = 1$)。如把 $(a, b) \times (c, d)$ 看作一片织布, (257) (37)

则 $r: (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$ 为 Chebyshev 网即是指它没有拉伸或收缩任何纤维。我们称 r 为一个渐近 Chebyshev 网 (asymptotic Chebyshev net) 如果一个 Chebyshev 网的每条参数曲线均为渐近线。

引理 3 的证明:

回忆 $K < 0$ 点处的渐近方向:



在一点处切平面内, 设 u 轴, v 轴为主

方向, 则渐近方向由 $k_1 u^2 + k_2 v^2 = 0$ 定义。也即

$$v = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} u.$$

$$\text{设 } k_1 \geq k_2, \text{ 则 } K = -1 \Rightarrow \begin{matrix} k_1 > 0, \\ k_2 < 0 \end{matrix} \quad k_1 k_2 = -1 \Rightarrow \begin{matrix} v = \pm \sqrt{k_1^2} u \\ = \pm k_1 u. \end{matrix}$$

注意 $K = -1$ 意味着曲面无脐点, 因而在 $p \in M$ 附近可取曲率线

参数化: $r = r(u, v)$, 即 r_u, r_v 均为主方向。

从而取 $e_1 = \frac{r_u}{|r_u|}$, $e_2 = \frac{r_v}{|r_v|}$, $e_3 = e_1 \wedge e_2$ 为正则标架。
对应 k_1 对应 k_2 , $k_1 \geq k_2$

$$\text{从而有 } \omega^1 = \sqrt{E} du, \omega^2 = \sqrt{G} dv$$

$$\text{进而 } \begin{cases} d\omega^1 = -(\sqrt{E})_v du \wedge dv = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega^2 = (\sqrt{G})_u du \wedge dv = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}$$

这意味着

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \omega^1 + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \omega^2 \\ &= -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv. \end{aligned}$$

另外, $\omega_1^3 = k_1 \omega^1, \quad \omega_2^3 = k_2 \omega^2$

(257) (38)

利用以上信息考查 Codazzi 方程

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 & \text{--- ~~not~~ } <1> \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 & <2> \end{cases}$$

以 <1> 为例, 右端 = $\omega_1^2 \wedge k_2 \omega^2 = k_2 \omega_1^2 \wedge \omega^2$

左端 = $d(k_1 \omega^1) = d(k_1 \sqrt{E} du) = (k_1 \sqrt{E})_v dv \wedge du$

故有 $-(k_1 \sqrt{E})_v du \wedge dv = k_2 \left(-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right) du \wedge (\sqrt{G} dv)$

$$= -k_2 (\sqrt{E})_v du \wedge dv$$

$$\Rightarrow (k_1 \sqrt{E})_v - k_2 (\sqrt{E})_v = 0$$

即 $(k_1)_v \sqrt{E} + (k_1 - k_2) (\sqrt{E})_v = 0 \quad <3>$

类似地, 从 <2> 可推出

$$(k_2)_u \sqrt{G} - (k_1 - k_2) (\sqrt{G})_u = 0 \quad <4>$$

由一开始的分析知, 设 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为渐近方向和主方向 $e_1 = \frac{r_u}{|r_u|}$ 的

夹角, 则有 $k_1 = \tan \varphi, \quad k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\cot \varphi$.

$$\begin{aligned} <3> \Rightarrow 0 &= \frac{\varphi_v}{\cos \varphi} \sqrt{E} + \frac{(\sqrt{E})_v}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{\varphi_v \sin \varphi \sqrt{E} + (\sqrt{E})_v \cos \varphi}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{\sqrt{E}}{\cos \varphi} \right)_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} <4> \Rightarrow 0 &= \frac{\varphi_u}{\sin^2 \varphi} \sqrt{G} - \frac{(\sqrt{G})_u}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{\varphi_u \cos \varphi \sqrt{G} - (\sqrt{G})_u \sin \varphi}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \\ &= -\frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\sqrt{G}}{\sin \varphi} \right)_u \end{aligned}$$

即 $\left(\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}\right)_u = 0, \quad \left(\frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi}\right)_v = 0.$

(257) (39)

因此 $\begin{cases} dz = \frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi} du \\ d\eta = \frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi} dv \end{cases}$ 有解. (因为 $d^2z=0, d^2\eta=0$ 成立)

又因为 $\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}(u,v)$ 与 v 无关, 知 $z = z(u).$

类似地 $\eta = \eta(v)$, 即 z, η 给出原参数曲线之重新参数化.

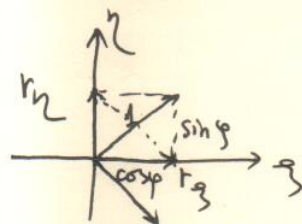
特别地, z -线, η -线仍为曲率线. $r = r(u,v) = r(z,\eta)$

注意, 此时有 $\begin{cases} \omega^1 = \sqrt{E} du = \cos\varphi dz \\ \omega^2 = \sqrt{G} dv = \sin\varphi d\eta \end{cases}$

因 $r_z = |r_z| e_1$ 且 $\omega^1(r_z) = \cos\varphi = \omega^1(|r_z| e_1) = |r_z|.$

即 $|r_z| = \cos\varphi$

类似 $|r_\eta| = \sin\varphi.$



易见 $r_z + r_\eta$ 为渐近方向, 且模长为 1.

另 $r_z - r_\eta$ 为另一渐近方向, 模长也为 1

因此, 若我们再做参数变换 $\begin{cases} z = s + t \\ \eta = s - t \end{cases}$

则有 $r = r(u,v) = r(z,\eta) = r(s,t),$

$\begin{cases} r_s = r_z \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + r_\eta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s} = r_z + r_\eta \\ r_t = r_z \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + r_\eta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = r_z - r_\eta \end{cases}$

为该点处的渐近方向, 且参数曲线 s -线, t -线均为弧长参数.

□.

③ 渐近方向角和 Sine-Gordon 方程.

引理 4: 设 M 为 E^3 中高斯曲率 $K \equiv -1$ 的无界曲面.

$r: (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ 为渐近 Chebyshev 网.

令 $\alpha(s_0, t_0)$ 为 $(0, \pi)$ 中唯一的 $r_s(s_0, t_0)$ 和 $r_t(s_0, t_0)$ 的夹角

则 α 满足 Sine-Gordon 方程

$$\alpha_{st} = \sin \alpha.$$

证明: 由前述分析, 易见 $\alpha = 2\varphi$. 在引理 3 证明中考虑参数化 $r = r(\xi, \eta)$. 考虑高斯方程

$$K = \frac{-dw_1^2}{w_1 \wedge w_2}.$$

回忆 $w_1 = \cos \varphi d\eta$, $w_2 = \sin \varphi d\xi$

$$\begin{cases} dw_1 = -\sin \varphi \cdot \varphi_\eta \cdot d\eta \wedge d\xi = \frac{\sin \varphi \cdot \varphi_\eta}{\sin \varphi \cos \varphi} w_1 \wedge w_2 \\ dw_2 = \cos \varphi \cdot \varphi_\xi \cdot d\xi \wedge d\eta = \frac{\cos \varphi \cdot \varphi_\xi}{\sin \varphi \cos \varphi} w_1 \wedge w_2 \end{cases}$$

$$\text{进而 } w_1^2 = \frac{\varphi_\eta}{\cos \varphi} w_1 + \frac{\varphi_\xi}{\sin \varphi} w_2 = \varphi_\eta d\xi + \varphi_\xi d\eta$$

$$\begin{aligned} \text{此外微分有 } dw_1^2 &= \varphi_{\eta\eta} d\eta \wedge d\xi + \varphi_{\xi\xi} d\xi \wedge d\eta \\ &= (\varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta}) d\xi \wedge d\eta \end{aligned}$$

$$\text{代入高斯方程有 } -1 \equiv K = \frac{-(\varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta}) d\xi \wedge d\eta}{\sin \varphi \cos \varphi d\xi \wedge d\eta}$$

$$\Rightarrow \varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta} = \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin(2\varphi).$$

即 $\alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} = \sin \alpha$, 回忆 $\begin{cases} \xi = s+t \\ \eta = s-t \end{cases}$

$$\text{由 } \alpha_{st} = (\alpha_\xi + \alpha_\eta)_t = \alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\xi\eta} + \alpha_{\eta\xi} - \alpha_{\eta\eta} = \alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} \text{ 得证. } \square$$

~~Sine~~ sine-Gordon 方程的来源:
物理上著名的 Klein-Gordon 方程:
 $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \varphi = 0$

实际上, 知道了 Sine-Gordon 方程的一个解, 就能得到一个常负曲率的 曲面片: 这是因为第 I - 第 = 卷形式可表示为

$$I = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2, \quad II = \omega^1 \otimes \omega^3 + \omega^2 \otimes \omega^3$$

其中 $\omega^1 = \cos \varphi d\xi$, $\omega^2 = \sin \varphi d\eta$.

由结构方程 $\begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \end{cases}$ 解出 $\omega^3 = \varphi_\eta d\xi + \varphi_\xi d\eta$ (*)

~~故这组结构方程~~

又有 $\begin{cases} \omega_1^3 = k_1 \omega^1 = \tan \varphi \cdot \cos \varphi d\xi = \sin \varphi d\xi \\ \omega_2^3 = k_2 \omega^2 = -\cot \varphi \cdot \sin \varphi d\eta = -\cos \varphi d\eta \end{cases}$ (**)

从而有 $I = \cos^2 \varphi d\xi \otimes d\xi + \sin^2 \varphi d\eta \otimes d\eta$. (*)

$$II = \frac{1}{2} \sinh 2\varphi (d\xi \otimes d\xi - d\eta \otimes d\eta)$$

~~注意到~~ $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.

故给定 Sine-Gordon 方程的一个解 α , 则由 (**) 确定第 I - 第 = 卷形式. 要确定曲面片, 由曲面论基本定理, 只需验证结构方程均满足. 由 (**) 知, 这组结构方程 $\begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \end{cases}$ 自然满足.

另外, Sine-Gordon 方程由 Gauss 方程解出, 故 Gauss 方程

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3$$

也自然满足. 最后由 (**) 可直接检查 Codazzi 方程

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \end{cases}$$

亦成立. $\square$

小结	$\begin{cases} \omega^1 = \cos \varphi d\xi \\ \omega^2 = \sin \varphi d\eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^3 = \varphi_\eta d\xi + \varphi_\xi d\eta \\ \omega_2^3 = k_1 \omega^1 = \sin \varphi d\xi \\ \omega_2^3 = k_2 \omega^2 = -\cos \varphi d\eta \end{cases}$
Codazzi 方程自然满足	
Gauss 方程要求 $\alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} = \sinh \alpha$	

在渐近 Chebyshev 网坐标下, 第 I - 第 = 卷形式可写为如下形式.

由参数变换 $\begin{cases} \xi = s+t \\ \eta = s-t \end{cases}$ (257) (42)
 $\text{故 } d\xi = ds + dt, \quad d\eta = ds - dt$

代入④, 得

$$I = \cancel{\cos^2 \alpha} ds \otimes ds + \cos 2\alpha (ds \otimes dt + dt \otimes ds) + dt \otimes dt.$$

$$II = \sin 2\alpha (ds \otimes dt + dt \otimes ds).$$

④. 在 E^3 中常负高斯曲率完备曲面上存在渐近 Chebyshev 网
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M.$

~~证法~~: 我们的目标是证明从整个平面 $\mathbb{R}^2$ 到 M 的映射.

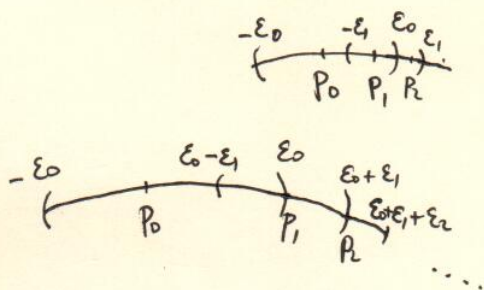
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M: (s, t) \mapsto f(s, t).$ 使得

- $s \mapsto f(s, t_0), s \in \mathbb{R}$ 为渐近线, $\forall$ 给定 $t_0 \in \mathbb{R}.$
- $t \mapsto f(s_0, t), t \in \mathbb{R}$ 为渐近线, $\forall$ 给定 $s_0 \in \mathbb{R}.$

我们的构造如下:

(i) 对任一点 $P_0 \in M$, 和该点的一个 ^{单位} 渐近方向 $v \in T_{P_0} M$,
 由前述局部渐近 Chebyshev 网的存在性 (引理3), 知存在唯一
 的一条弧长参数渐近线 $c(s), s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 使得
 $c(0) = P_0, \quad c'(0) = v.$

(ii) 由 M 的完备性, 知道 c 可以定义在整个 $\mathbb{R}$ 上, 即 c 可以无限延长! 实际上, c 总是可以延长:



但是 ε_i 依赖于 P_i , 如果 ε_i 变得越来越小, $\varepsilon_i \rightarrow 0$ as $i \rightarrow \infty$, 则 P_i 为 Cauchy 列. ^{这时} 纵使可以无限次延长, 但曲线不会通过 $\{P_i\}$ 的极限点!

若曲面不完备, 此极限点不在曲面上, 即曲面不完备, 则此渐近线只能定义在 $(0, \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i)$

(257) (43)

但若曲面完备, 则可以用此极限点周围的局部渐近 Chebyshev 网从该极限点开始, 再延长某个正数 $\varepsilon > 0$. 从而可以“越过”该点, 继续延长.

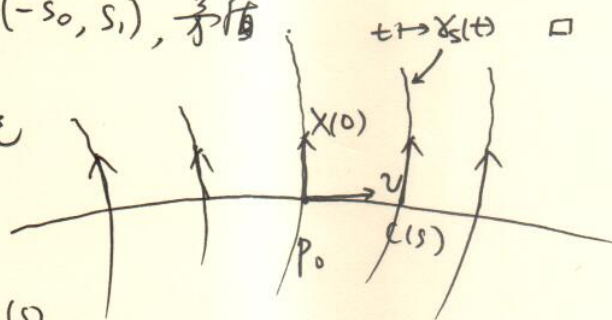
更确切地, 若 c 只能定义在 $(-s_0, s_1)$ 上, 记

$$P_0 = \lim_{s \rightarrow -s_0} c(s) \in M, \quad P_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} c(s) \in M. \quad (s \text{ 是弧长参数, } \Rightarrow)$$

则利用 P_0, P_1 处的局部渐近 Chebyshev 网 $d(c(s), c(s')) \leq |s' - s|$ 即可让 c 的定义超出区间 $(-s_0, s_1)$, 矛盾.

(iii) 令 $X(0)$ 为 P_0 处与 v 线性无关的单位渐近方向.

更一般地, $X(s)$ 为 $c(s)$ 处与 $\dot{c}(s)$ 线性无关的单位渐近方向.



定义映射 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ 如下.

$$(s, t) \mapsto f(s, t) = \text{过 } c(s) \text{ 点, 与单位渐近方向 } X(s) \text{ 相切的渐近线 } \gamma_s(t) \text{ 在 } t \text{ 处取值.}$$

(iv) 为说明上述构造的 f 即为所求, 需说明对任一给定 $t \in \mathbb{R}$, 曲线 $s \mapsto f(s, t)$ 是以 s 为弧长参数的渐近线!

只需证, 对任意 (s_0, t_0) , 曲线 $s \mapsto f(s, t_0)$ 在 $|s - s_0|$ 足够小时是弧长参数的渐近线.

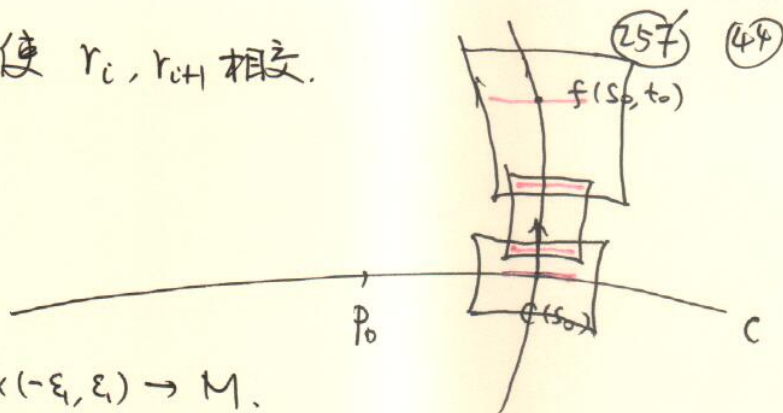
注意此时, $\{f(s_0, t) : 0 \leq t \leq t_0\}$ 有限致, 故存在有限多个局部 Chebyshev 网覆盖它. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

我可假设上述排列使 r_i, r_{i+1} 相交.

设 r_i 覆盖 $c(s_0)$ 点.

注意 $c(s)$ 是弧长参数

渐近线.



因此不妨可设 $r_i: (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow M$.

$$r_i(s, 0) = c(s) = f(s, 0) \quad \text{对 } |s-s_0| \text{ 充分小 } s \in (s_0-\varepsilon_1, s_0+\varepsilon_1)$$

设曲面 M 上两个线性无关单位渐近方向向量场为 v_1, v_2 . 使

$$v_1(c(s)) = \dot{c}(s), \quad v_2(c(s)) = X(s).$$

由定义 ~~$f(s, t) = \gamma_s(t) = f(s, 0) + \int_0^t v_2 dt$~~

$$r_i(s, t) = \gamma_s(t) = f(s, t).$$

故 对 $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, 有 $\gamma_s(t)$, $s \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ 为弧长参数渐近线.

由上述论证可迭代推广, 最终证明 $\gamma(s, t_0)$ 在 $|s-s_0|$ 充分小时为弧长参数渐近线.

实际上, 这里的基本原理是: 对 r_i , 若存在一个 t_0 , 使得

$$f(s, t_0) = r_i(s, t_0) \quad |s-s_0| \text{ 充分小在 } r_i \text{ 定义范围内}$$

则有

$$f(s, t) = r_i(s, t) \quad \text{对任意 } t \text{ 在 } r_i \text{ 定义范围内. } \square$$

上述构造说明: 夹角函数 α 在整个 $\mathbb{R}^2$ 上有定义且满足

$$\text{Sine-Gordon 方程. } \alpha_{st} = \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

下面来到 Hilbert 定理证明的最后一步:

⑤. 不存在函数 $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\alpha_{st} = \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

证明: 反证法. 假设存在这样的函数 α . 则我们注意到 α 有界.

若可说明, 在一无界区域上, $\sin \alpha$ 有正下界, 则积分

(257) (45)

Sine-Gordon 方程会得到一个解量 $\geq$ 无界量的矛盾.

首先, 我们看到 $\sin \alpha > 0$, $0 < \alpha < \pi$. 我们需在一个小一些的无界区域上得到一个正的下界.

" $\sin \alpha > 0$ " 已然说明函数 $t \mapsto \alpha_s(t)$, $t \in \mathbb{R}$ 是严格单增函数. 故特别地, α_s 不恒为 0.

不失一般性, 可设 $\alpha_s(0,0) \neq 0$. 又观察到 $(s,t) \mapsto \alpha(-s,-t)$

仍然满足 Sine-Gordon 方程. 故可设

$$\alpha_s(0,0) > 0.$$

由光滑性, $\exists s_3 > 0$ s.t. $\alpha_s(s,0)$ 在 $s \in [0, s_3]$ 上严格大于 0!

又由 α_s 关于 t 的严格单增性, 知 α_s 在 $[0, s_3] \times [0, \infty)$ 上严格正!



$\alpha_s(s,0)$ 在 $s \in [0, s_3]$ 上严格大于 0 说明函数 $s \mapsto \alpha(s,0)$, $s \in [0, s_3]$ 是严格单增函数. 所以在稍小区间 $[s_1, s_2]$, $0 < s_1 < s_2 < s_3$ 上,

有 $\alpha(s,0) \in [\alpha(s_1,0), \alpha(s_2,0)]$, $s \in [s_1, s_2]$.

而 $\alpha(s_1,0) - \alpha(0,0) > 0$, $\alpha(s_3,0) - \alpha(s_2,0) > 0$.

记 $\delta = \min \{ \alpha(s_1,0) - \alpha(0,0), \alpha(s_3,0) - \alpha(s_2,0) \} > 0$.

~~故~~ 故 $\alpha(s_1,0) \geq \delta + \alpha(0,0) \geq \delta$

$$\alpha(s_2,0) \leq \alpha(s_3,0) - \delta \leq \pi - \delta$$

即 $\alpha(s,0) \in [\delta, \pi - \delta]$, $s \in [s_1, s_2]$. (*)

这时注意到 (*) 对任意 t 都成立. 这是因为 α_s 关于 t 严格单增, 有

$$\alpha(s_1,t) - \alpha(0,t) = \int_0^{s_1} \alpha_s(t) ds \geq \int_0^{s_1} \alpha_s(0) ds = \alpha(s_1,0) - \alpha(0,0)$$

257 46

$$\alpha(S_3, t) - \alpha(S_2, t) = \int_{S_2}^{S_3} \alpha_s(t) ds \geq \int_{S_2}^{S_3} \alpha_s(0) ds = \alpha(S_3, 0) - \alpha(S_2, 0)$$

故 $\forall t \geq 0$, 有

$$\alpha(S_1, t) \geq \alpha(0, t) + \delta \geq \delta$$

$$\alpha(S_2, t) \leq \alpha(S_3, t) - \delta \leq \pi - \delta \quad \phi$$

$$\Rightarrow \alpha(s, t) \in [\alpha(S_1, t), \alpha(S_2, t)] \subseteq [\delta, \pi - \delta], \quad \forall t \geq 0, s \in [S_1, S_2].$$

也就有 $\sin \alpha$ 在无界区域 $[S_1, S_2] \times [0, \infty)$ 上,

$$\sin \alpha \geq \sin \delta > 0.$$

这时在区域 $[S_1, S_2] \times [0, T]$ 上积分 Sine-Gordon 方程, 有

$$\int_0^T \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s \partial t} ds dt = \int_0^T \int_{S_1}^{S_2} \sin \alpha(s, t) ds dt \geq \sin \delta \cdot T \cdot (S_2 - S_1).$$

$$\text{而左端} = \int_0^T (\alpha_t(S_2, t) - \alpha_t(S_1, t)) dt$$

$$= \alpha(S_2, T) - \alpha(S_2, 0) - \alpha(S_1, T) + \alpha(S_1, 0)$$

$$= \alpha(S_2, T) - \alpha(S_1, T) - [\alpha(S_2, 0) - \alpha(S_1, 0)]$$

$< \pi$ 有界



但右端 $\rightarrow \infty$ as $T \rightarrow \infty$.

故矛盾。得证。

例3: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 是双曲面
 $(f(u), g(u)) = (u, \sqrt{u^2+1}) \rightarrow (\sqrt{u^2+1}, u)$
 $\Rightarrow k = \frac{(f'g'' - f''g')g'}{(f')^2 + (g')^2} = -\frac{1}{(u^2+1)^2} \rightarrow 0$ as $u \rightarrow \infty$

注记: 如果放松 " $K \equiv -c, c > 0$ " 为 " $K < 0$ ", 是否存在 E^3 中完备曲

面具有 $K < 0$ 的, 比如 elliptic hyperboloid of one sheet. 但是, 1964 年, Efimov 证明 E^3 中不存在 $K \leq \delta < 0$, 对某数 δ , 的完备曲面! 这是 Cohn-Vossen

的一个猜想。(1936).

N. V. Efimov, Appearance of Singularities on surfaces of negative curvature, Math. Sb. 106 (1964). AMS translations. Series 2, vol 66, 1968, 154-190.

§9 Willmore 能量

Willmore, Note on embedded surfaces, An. Sti. Univ.

"Al. I. Cuza" Iasi. Sect. I a Mat. (N.S.) 11B (1965) 493-496.

(Dedicated to Prof. Professor Octav Mayer on his 70-th birthday)

Willmore 在其 1965 年的文章中对 Gauss-Bonnet 定理作如下看法: 令 M 为一个光滑的、紧致无边、可定向曲面, $f: M \rightarrow E^3$

为 M 到 3 维欧氏空间的光滑嵌入. 则 $f(M)$ 上有 E^3 上欧氏度量的自然诱导的“度量结构”(节为坐标形式). 则对 $\forall p \in f(M)$, 有高斯曲率 $K(p)$. 在这种情况下, Gauss-Bonnet 定理说

$$\frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} K dV = \chi(M).$$

上式的左端不依赖于嵌入 $f: M \rightarrow E^3$ 的选取.

在这种观点下, Willmore 考虑如果把上式左端的高斯曲率替换成平均曲率平方 H^2 , 所得量

$$\tau(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} H^2 dV$$

是否是 M 的一个拓扑量?

注意平均曲率 H 依赖于嵌入 f 的选取, $\tau(f)$ 一般不是一个拓扑量. 因此, 我们可定义

$$\tau(M) := \inf_{f \in \mathcal{F}} \tau(f).$$

其中下确界取的在 $\mathcal{F} = \{\text{所有 } M \rightarrow E^3 \text{ 的光滑嵌入}\}$ 上. 则 $\tau(M)$ 就是 M 的一个拓扑不变量了.

问题: $\tau(M)$ 和 $\chi(M)$ 有什么关系呢?

(260)

定理1 (Willmore, 1965) 设 M 为亏格 $g=0$ 的曲面. (C^∞ , closed, orientable)

则有 $\tau(M) = \chi(M)$

且 $\tau(f) = 2$ 当且仅当 $f(M)$ 是一个欧氏球面.

证明. 设 $f(M)$ 任意点处的主曲率为 k_1, k_2 . 则有

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\text{由于 } H^2 = \frac{1}{4}(k_1 + k_2)^2 = \frac{1}{4}(k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2)$$

$$= k_1 k_2 + \frac{1}{4}(k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2)$$

$$= K + \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2$$

我们有

$$\tau(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} H^2 dV = \frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} K dV + \frac{1}{8\pi} \int_{f(M)} (k_1 - k_2)^2 dV$$

$$\stackrel{\text{Gauss-Bonnet}}{=} \chi(M) + \frac{1}{8\pi} \int_{f(M)} (k_1 - k_2)^2 dV$$

因此有 $\tau(f) \geq \chi(M), \quad \forall f \in \mathcal{F}$.

当 $\tau(f) = \chi(M)$, 则有 $\int_{f(M)} (k_1 - k_2)^2 dV = 0 \Rightarrow k_1(p) = k_2(p), \quad \forall p \in f(M)$

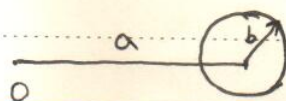
从而 $f(M)$ 为全脐点曲面, 从而只能是球面; 此时 $\chi(M) = 2, g=0$.
+ (260') □

自然地一个问题: 如果曲面 M 的亏格 $g \geq 1$, $\tau(M)$ 是否还有更好的下界?

对亏格 $g=1$ 的曲面, 即环面, Willmore 考虑了如下特别的一类嵌入: 环面 T : $f: T \rightarrow E^3$

这里 $f(T)$ 由如下坐标给出: $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$\begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v \\ y = (a + b \cos u) \sin v \\ z = b \sin u \end{cases}$$



$$0 < b < a,$$

实际上, 我们有对任一光滑、紧致、可定向曲面 M , 有

$$\chi(M) \geq 2, \quad "=" \text{成立} \Leftrightarrow f(M) \text{ 是球面.}$$

定理 9.2 设 M 为 E^3 中紧致曲面, 则有

$$\frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dV \geq 2$$

且等式成立当且仅当 M 为球面。

证明: 利用恒等式 $H^2 = K + \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2$, 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dV \geq \frac{1}{2\pi} \int_M K dV = \chi(M) = 2 - 2g.$$

这样做的太多了。实际上, 记 $M_+ = \{p \in M : K(p) \geq 0\}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dV \geq \frac{1}{2\pi} \int_M K dV = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{M_+} K dV + \int_{M \setminus M_+} K dV \right)$$

其中负项 $\int_{M \setminus M_+} K dV$ 可避免。我们改进如下

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dV &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{M_+} H^2 dV = \frac{1}{2\pi} \int_{M_+} \left(K + \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \right) dV \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{M_+} K dV. \end{aligned}$$

但 $\int_{M_+} K dV$ 有好的估计吗? 这由如下引理回答并可完成证明。

引理: 设 M 为 E^3 中紧致曲面。设 $M_+ = \{p \in M : K(p) \geq 0\}$

$$\text{则有 } \int_{M_+} K dV \geq 4\pi.$$

证明: ~~记 $d\sigma$ 为 S^2 上面积元~~, 回忆 $K dV = d\sigma$.

~~记 D 为 M_+ 在 Gauss 映射下的像~~ 考查 M_+ 在 Gauss 映射下的像 $D = g(M_+) \subset S^2$.

$$\text{记 } D_1 = \{e \in D : \#(g^{-1}(e) \cap M_+) = 1\}$$

$$D_2 = D \setminus D_1$$

$$\text{则 } \int_{M_+} K dV = \int_{g^{-1}(D_1) \cap M_+} K dV + \int_{g^{-1}(D_2) \cap M_+} K dV$$

$$\geq \int_{D_1} d\sigma + 2 \int_{D_2} d\sigma$$

这里一个重要的观察是 $\int_{D_2} d\sigma \geq \int_{S^2 \setminus D} d\sigma$!

Claim: $-S^2 \setminus D \subseteq D_2$.

考查函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

$P \mapsto \langle r(P), e \rangle$, 其中 e 为固定单位向量, r 为位置向量.

则 f 为光滑函数. 由紧性知 $\exists P_1, P_2 \in M$ 使 f 在 P_1, P_2 分别达到极大、极小值.

故对 M 上过 P_i 点的任意弧长参数曲线 $r(s)$, $r(0) = P_i$ 有

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(r(s)) = \langle \dot{r}(0), e \rangle = 0$$

由曲线的任意性知 e 与 P_1, P_2 点处单位法向量 $n(P_1), n(P_2)$ 平行. 在 P_1 处取曲面片, 参数化为 $r = r(u, v)$, 则 f 在 P_1 达极大值.

推出 $\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}$ 半负定, 即 $\begin{pmatrix} \langle r_{uu}, e \rangle & \langle r_{uv}, e \rangle \\ \langle r_{uv}, e \rangle & \langle r_{vv}, e \rangle \end{pmatrix}$ 半负定.

因为 $e = n(P_1)$ or $-n(P_1)$, 知在 P_1 处, $\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ 半负定.

从而 $\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \geq 0$. 亦即 $P_1 \in M_+$, 类似地有 $P_2 \in M_+$.

由此, 若 $e \in S^2 \setminus D$, 则 $e \neq g(P_1), e \neq g(P_2)$. 故有

$$e = -g(P_1) = -g(P_2)$$

因此 $-e \in D_2$. 这就证明了 $-S^2 \setminus D \subseteq D_2$. $\square$

应用 Claim, 我们有 $\int_{M^+} k dv \geq \int_{P_1} d\sigma + \int_{D_2} d\sigma + \int_{D_2} d\sigma \geq \int_{P_1} d\sigma + \int_{D_2} d\sigma + \int_{S^2 \setminus D} d\sigma$
 $= \int_{S^2} d\sigma = 4\pi$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dv \geq \frac{1}{2\pi} \int_{M^+} H^2 dv \geq \frac{1}{2\pi} \int_{M^+} k dv \geq 4\pi, \quad " = " \text{ 成立 } \Rightarrow k_1 = k_2 \text{ on } M_+$$

(268) ③

由于 M 紧致, 知 $\exists p_0 \in M$ 使 $K(p_0) > 0$

这说明在 M_+ 上, 有 $k_1 = k_2 > 0$

若 $M_- \neq \emptyset$, 则 M_- 上 $k_1 k_2 < 0$, 即 k_1, k_2 反号.

则 k_1, k_2 中有一个函数在 M_+ 上 > 0 , 在 M_- 上 < 0 . 与主曲率函数值的连续性矛盾.

故 $M_- = \emptyset$.

这就是说 M 是全脐点曲紧致曲面, 故 M 是球面. $\square$

且有 $r_u = (-b \sin u \cos u, -b \sin u \sin u, b \cos u)$

$$r_v = (-(a+b \cos u) \sin u, (a+b \cos u) \cos u, 0)$$

进而计算 $E = \langle r_u, r_u \rangle = b^2 \sin^2 u \cos^2 u + b^2 \sin^2 u \sin^2 u + b^2 \cos^2 u$
 $= b^2$

$$F = \langle r_u, r_v \rangle = b(a+b \cos u) \sin u \sin u \cos u - b(a+b \cos u) \sin u \sin u \cos u$$

 $= 0$

$$G = \langle r_v, r_v \rangle = (a+b \cos u)^2 \sin^2 u + (a+b \cos u)^2 \cos^2 u$$

 $= (a+b \cos u)^2$

由此可计算

$$r_u \wedge r_v = (-(a+b \cos u) b \cos u \cos u, -(a+b \cos u) b \cos u \sin u, -(a+b \cos u) b \sin u)$$

$$|r_u \wedge r_v|^2 = (a+b \cos u)^2 b^2$$

也即 $n = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|} = (-\cos u \cos u, -\cos u \sin u, -\sin u)$

$$\Rightarrow n_u = (\sin u \cos u, \sin u \sin u, -\cos u)$$

$$n_v = (\cos u \sin u, -\cos u \cos u, 0)$$

进而 $L = -\langle r_u, n_u \rangle = -[-b \sin^2 u \cos^2 u - b \sin^2 u \sin^2 u - b \cos^2 u]$
 $= b$

$$M = -\langle r_u, n_v \rangle = -[-b \sin u \cos u \sin u \cos u + b \sin u \cos u \sin u \cos u]$$

 $= 0$

$$N = -\langle r_v, n_v \rangle = -[-(a+b \cos u) \sin^2 u \cos u - (a+b \cos u) \cos^2 u \cos u]$$

 $= (a+b \cos u) \cos u$

则平均曲率 $H = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \right)$

$$= \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

我们计算 $H = \frac{1}{2} \frac{b(a+b\cos u)^2 + b^2(a+b\cos u)\cos u}{b^2(a+b\cos u)^2}$

(262)

$$= \frac{1}{2} \frac{(a+b\cos u) + b\cos u}{b(a+b\cos u)} = \frac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)}$$

回到 $\tau(f)$ 的计算. 我们有.

$$\tau(f_{a,b}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H^2 \cdot \sqrt{EG-F^2} \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)} \right)^2 \cdot b(a+b\cos u) \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a+2b\cos u)^2}{4b(a+b\cos u)} \, du \, dv$$

令 $\frac{1}{2} \frac{b}{a} = c$, 则 $\frac{1}{2} \frac{b}{a} = c$

$$\tau(f_{a,b}) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+2c\cos u)^2}{c(1+c\cos u)} \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{4c} \int_0^{2\pi} \frac{(1+2c\cos u)^2}{1+c\cos u} \, du$$

$$= \frac{1}{4c} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1-c^2}}$$

观察到当 $c \rightarrow 0$ (即环面很小时) $\tau(f_{a,b}) \rightarrow \infty$

当 $c \rightarrow 1$ (即环面很扁时) $\tau(f_{a,b}) \rightarrow \infty$.

所以当 $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\tau(f_{a,b})$ 达最小值 π .

"It seems reasonable to interpret $\tau(f)$ as a measure of the "niceness" of the shape of the surface $f(M)$, and to argue heuristically that a small value of $\tau(f)$ corresponds to a simple

shape for ~~an~~ $f(M)$. This suggest that $f_{a,b}$ with (26)

$b/a = 1/\sqrt{2}$ gives the nicest shape for an embedded torus.

However, whether or not $\tau(T) = \pi$ remains an open question.

The problem for surfaces of genus $g \geq 2$ remains unsolved."

Willmore 猜想: the problem of determining the best torus among all.

实际上 Willmore energy 作为一种描述弹性薄膜的 elastic or bending energy 最早在 1810s 就被 Sophie Germain 研究过. 在数学上, Willmore energy 被 Blaschke 和他学生 Thomassen 于 1920s 在研究共形映射 (conformal Gauss map) 时研究过.

Marques, Neves, Min-max theory and the Willmore

conjecture, Ann. of Math. (2) 179 (2014), no. 3, 683-782
上面得到的环面 $f_{a,b}(T)$, $b/a = 1/\sqrt{2}$ 是一种非常特殊的
曲面, 在任何研究中已经出现过. 实际上, 存在单位球面

$$S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

上的球极投影 (即从 S^3 去掉一点到 $\mathbb{R}^3$) 把 Clifford 环面

$$\hat{\Sigma} = S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

映射 (onto) $f_{\sqrt{2},1}(T)$.

定理 (Marques - Neves), $\mathbb{R}^3$ 中一个具有正亏格的嵌入紧致曲面满足

$$\tau(M) \geq \pi.$$

等号成立当且仅当 M 为 Clifford 环面的球极投影像.

Willmore conjecture 一研究 激发了很多领域数学的研究
包括 共形几何, PDEs, 代数几何, 几何测度论等.

一个很重要的看法是 Willmore energy 与 S^3 中 黎曼
曲面 的面积 还有密切关系。Clifford torus 是 S^3 的一个 极
小曲面.

1991. 生物学家 Bensimon and Muty 在研究 ~~膜~~
薄膜时 借助 显微镜 实验上 验证了 Willmore conjecture.

Observation of toroidal vesicles, Phys. Rev. A, 43(1991)
4525-4527.

"自然而真实的"