微分几何 H 笔记

原生生物

* 刘世平老师微分几何 H 课堂笔记

目录

一　曲线的几何

§1.1　欧氏空间

最早认识 三维欧氏空间 E^3 (点、线、面、欧氏几何公理)
向量：空间中有长度、方向的量
* 欧氏空间**齐次性** (不同原点无区别)、**各向同性** (不同方向无区别)，因此向量**不区分起点**，由此可定义向量运算

1. 加法 (交换、结合、零元、逆元)
2. 数乘 (结合、分配加法、单位)
   * 抽象出 $\mathbb{R}$ 上的**向量空间**结构
3. 内积 $\langle v_1, v_2\rangle$(余弦定理、交换、双线性)
4. 外积 $v_1 \wedge v_2$[平行四边形有向面积](**反交换**、双线性)

引入坐标：任取欧氏空间原点 O，三个线性无关向量 v_1, v_2, v_3，则 $\{O; v_1, v_2, v_3\}$ 为 E^3 以 O 为原点的一个一般**标架**
* 由此欧氏空间 E^3 与三维数组空间 $\mathbb{R}^3$ 对应
为保证内积结构，需要 $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_i^j$，此时即称为**正交标架**，所有运算可通过坐标表示
* 混合积 $(v_1, v_2, v_3) = \langle v_1, v_2 \wedge v_3\rangle$，代表张成平行六面体的有向体积 $\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$

运算性质：

1. $v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3) = \langle v_1, v_3\rangle v_2 - \langle v_1, v_2\rangle v_3$
2. $\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4\rangle = \langle v_1, v_3\rangle \langle v_2, v_4\rangle - \langle v_1, v_4\rangle \langle v_2, v_3\rangle$
3. $(v_1, v_2, v_3) = (v_2, v_3, v_1) = (v_3, v_1, v_2)$

* 坐标坏处：不同点不同方向标架**未必一致**

坐标变换：若 $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$[$T$ 为正交阵，行列式 1 代表两标架定向相同，否则相反]，则 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标与 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 下的坐标 (y^1, y^2, y^3) 关系为 $(x^1, x^2, x^3) = (c^1, c^2, c^3) + (y^1, y^2, y^3)T$。
* 保持欧氏空间结构 (度量) 的变换称**合同变换**

定理 1.1. *$\mathcal{T}$ 为 E^3 的合同变换，则存在 $T \in O_3(\mathbb{R})$ 与 $P \in E^3$ 使得 $\forall X \in E^3, \mathcal{T}(X) = XT + P$。*

证明. 由平移不妨设保原点，通过保距离由余弦定理可推出保内积，由坐标定义可推出线性，从而得结果。 □

* **欧氏空间中正交标架全体与合同变换群一一对应**

对向量值函数 $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$，有微分性质：

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda\vec{a}) = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\vec{a} + \lambda\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t},\vec{b}\rangle+\langle\vec{a},\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\rangle$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\wedge\vec{b}=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t},\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t},\vec{c})+(\vec{a},\vec{b},\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t})$

定理 1.2. 光滑向量值函数 $\vec{a}(t)$ 长度不变 $\Longleftrightarrow\langle\vec{a}(t),\vec{a}'(t)\rangle=0$。

证明. $\langle\vec{a}(t),\vec{a}(t)\rangle$ 恒定 $\Longleftrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{a}(t),\vec{a}'(t)\rangle=0$，由此得结论。 □

练习. 设 $\vec{a}(t)$ 为光滑非零向量值函数，则

1. 方向不变 $\Longleftrightarrow\vec{a}'(t)\wedge\vec{a}(t)=0$；
2. 若 $\vec{a}(t)$ 与某固定方向垂直，那么 $(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))=0$；反之，若 $(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))=0$ 且处处 $\vec{a}'(t)\wedge\vec{a}(t)\neq0$，则 $\vec{a}(t)$ 与某固定方向垂直。

证明. 假设 α 为每问里提到的特殊方向：

1. 左推右：由于 $\alpha\wedge\vec{a}(t)=0$，对 t 求导即有 $\alpha\wedge\vec{a}'(t)=0$，从而 $\vec{a}'(t)$ 方向与 $\vec{a}(t)$ 相同，即得证。

   右推左：设 $\vec{a}(t)=f(t)\alpha(t)$，其中 α 为单位向量，则计算知 $\vec{a}(t)\wedge\vec{a}'(t)=f^2(t)\alpha(t)\wedge\alpha'(t)$，由条件 $f(t)\neq0$，因此 $\alpha(t)\wedge\alpha'(t)=0$，由 $\alpha(t)$ 模长不变可知 $\langle\alpha(t),\alpha'(t)\rangle=0$，由 $\alpha(t)$ 为单位向量可知必须 $\alpha'(t)=0$，从而得证。

2. 第一句：通过对 $\langle\vec{a}(t),\alpha\rangle$ 求导可知 $\langle\vec{a}'(t),\alpha\rangle=0$，同理 $\langle\vec{a}''(t),\alpha\rangle=0$，于是三者共面，原命题得证。

   第二句：设 $\vec{a}(t)=f(t)\alpha(t)$，其中 α 为单位向量，计算知 $(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))=f^3(t)(\alpha(t),\alpha'(t),\alpha''(t))$，由条件 $f(t)\neq0$ 得 $(\alpha(t),\alpha'(t),\alpha''(t))=0$，有 $\langle\alpha'(t),\alpha(t)\wedge\alpha''(t)\rangle=0$，结合条件知 $\alpha''(t)\wedge\alpha(t)=0$，由此计算可得 $(\alpha(t)\wedge\alpha'(t))\wedge(\alpha(t)\wedge\alpha'(t))'=(\alpha(t)\wedge\alpha'(t))\wedge(\alpha(t)\wedge\alpha''(t))=0$，利用 1 知 $\alpha(t)\wedge\alpha'(t)$ 方向恒定，因此 $\alpha(t)$ 与某固定方向垂直。

□

§1.2 微分形式

定义 1.3. 切向量
切向量 v_p 包含一个向量 v 与起点 p，而向量场是给每一个点 p 赋一个切向量 v_p 的函数。

性质：设 $u_1(p)=(1,0,0)_p,u_2(p)=(0,1,0)_p,u_3(p)=(0,0,1)_p$，则任何向量场每点都可以表示为 u_1,u_2,u_3 组合。

定义 1.4. E^3 上的一形式、光滑一形式
E^3 一形式 ϕ 是定义在 E^3 所有切向量上的函数，使得对任意 $a,b\in\mathbb{R},p\in E^3,v,w\in T_pE^3$(即以 p 为起点的切向量)，有 $\phi(av+bw)=a\phi(v)+b\phi(w)$。
给定一形式与向量场 V，有实函数 $\phi(V):E^3\to\mathbb{R},\phi(V)(p)=\phi(V(p))$，若对任何光滑向量场 V 都有 $\phi(V)$ 是光滑函数，则称 ϕ 为光滑一形式。

运算：给定一形式 ϕ,ψ，$f:E^3\to\mathbb{R}$，则 $(\phi+\psi)(v)=\phi(v)+\psi(v)$，$(f\phi)(v_p)=f(p)\phi(v_p)$。
关于函数的线性性质：V,W 为切向量场，f,g 为空间函数，则 $\phi(fV+gW)=f\phi(V)+g\phi(W)$。

给定空间光滑函数 f，可定义一形式 $\mathrm{d}f$，满足 $\mathrm{d}f(v_p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t\to0}f(p+tv_p)$，由于其即为 $\langle\mathrm{grad}\,f,v_p\rangle$，因此良定。
对投影函数 $x^i:E^3\to\mathbb{R}$，计算发现有 $\mathrm{d}x^i(v_p)=v_p^i$。

性质：E^3 上一形式可表示为 $\phi = \sum_{i=1}^{3} f_i \mathrm{d}x_i$，其中 $f_i = \phi(u_i)$。
验证：$\phi(v_p) = \phi(\sum v_p^i u_i) = \sum v_p^i \phi(u_i)(p) = \sum f_i v_p^i = \sum f_i \mathrm{d}x_i(v_p)$。

定义 1.5. E^3 上的二形式
E^3 上的二形式 η 是 E^3 上所有切向量对 (v_p, w_p)，或写成 $v_p \wedge w_p$ 上的实值函数，使得在任何 p 处满足双线性性、反对称性 $\eta(v_p, w_p) = -\eta(w_p, v_p)$。
若对任何光滑向量场 V, W 满足 $\eta(V, W)$ 是光滑函数，则称其为光滑二形式。

例：E^3 中，令 $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j - \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i$，即 $(v_p, w_p) \to v_p^i w_p^j - v_p^j w_p^i$，则其为一个二形式。
性质：E^3 上二形式可表示为 $\eta = \sum_{i<j} \eta(u_i, u_j) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$，可与一形式的情况类似拆分验证。
几何意义：$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j(v_p, w_p) = \begin{vmatrix} v_p^i & v_p^j \\ w_p^i & w_p^j \end{vmatrix}$，代表 E^3 中两切向量构成的平行四边形向坐标平面**投影的面积**。

定义 1.6. E^3 上的三形式
E^3 上的三形式 ψ 是 E^3 上所有 (v_p, w_p, u_p) 上的实值函数，使得在任何 p 处满足三重线性性、交换反对称性 *(*交换任意两个都导致符号变化*)*。
若对任何光滑向量场 V, W, U 满足 $\psi(V, W, U)$ 是光滑函数，则称其为光滑三形式。

$\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \sum_{\sigma \in S(3)} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^2 \otimes \mathrm{d}x^3 = \det \begin{pmatrix} v_p & u_p & w_p \end{pmatrix}$，即**有向体积**。
*E^3 上**不存在**非平凡的四形式；再扩充定义零形式，代表函数。

* 记 Ω_i 代表 E^3 上光滑的 i-形式

定义 1.7. 外微分运算 d

$$\forall f \in \Omega_0, \mathrm{d}f = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i$$

$$\forall \phi = \sum \phi(u_i) \mathrm{d}x^i \in \Omega_1, \mathrm{d}\phi = \sum \mathrm{d}(\phi(u_i)) \wedge \mathrm{d}x^i = \sum_{i,j} \frac{\partial \phi(u_i)}{\partial x^j} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

$$\forall \eta = \sum_{i<j} \eta(u_i, u_j) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j, \mathrm{d}\eta = \sum_{i<j} \mathrm{d}(\eta(u_i, u_j)) \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \psi \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$$

* 性质：由于对不同分量求偏导可交换，可计算得 $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$

*$\mathrm{d}\Omega_0$ 的系数与 grad 对应，$\mathrm{d}\Omega_1$ 的系数与 rot 对应，$\mathrm{d}\Omega_2$ 的系数与 div 对应，有 $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0, \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, F = 0$。

§1.3 平面曲线

* 研究怎样的曲线？

定义 1.8. 正则曲线
$(a, b) \to E^3 : t \to \gamma(t)$ 称为正则曲线，当其每个分量光滑且 $|\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ 处处非零 *(*这保证了其为浸入，即局部一一映射*)*。

不是正则曲线的例子：如 (t^2, t^3) 在零点处对 t 导数为 $(0, 0)$，局部非一一映射。
长度：$\int_a^b |r'(t)| \mathrm{d}t$
弧长参数：$s(t) = \int_a^t |r'(u)| \mathrm{d}u$，$s'(t) = |r'(t)| > 0$。
弧长参数化：$C = \gamma \circ s^{-1}$，则有 $C(s) = \gamma(t)$，$|C'(s)| = |r'(t)t'(s)| = s'(t)|t'(s)| = 0$。

平面曲线的曲率

对曲线的正则点 t，当 $t_1 < t_2 < t_3$ 充分靠近 t 时，$r(t_1), r(t_2), r(t_3)$ 各不相同。假设三点不共线，令三点趋近 t，设 C 为三点构成的圆的圆心。

考察函数 $t \to \langle r(t) - C(t_1,t_2,t_3), r(t) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle$ 在 $t_{1,2,3}$ 处取值相同，求导，利用中值定理可知 $\exists \xi_1 \in (t_1,t_2), \xi_2 \in (t_2,t_3), \langle \gamma'(t), \gamma(t) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle |_{t=\xi_{1,2}} = 0$。

再次求导并利用中值定理，可知 $\exists \eta \in (\xi_1,\xi_2)$，使得 $\langle \gamma''(\eta), \gamma(\eta) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle + \langle \gamma'(\eta), \gamma'(\eta)\rangle = 0$

结合以上两式，若 $t_{1,2,3} \to t_0$ 时 $C(t_1,t_2,t_3) \to C$，则满足 $\langle \gamma'(t_0), \gamma(t_0) - C\rangle = 0$，且 $\langle \gamma''(t_0), \gamma(t_0) - C\rangle + \langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = 0$。

* 当 $\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)$ 不共线时，C 被唯一确定。

弧长参数 $\gamma(s)$ 下：由于 $\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle = 1$，求导可知 $\langle \gamma''(s), \gamma'(s)\rangle = 0$，因此 $\gamma'(s_0), \gamma''(s_0)$ 共线当且仅当 $\gamma''(s_0) = 0$。其不为 0 时，方程组化为 $\begin{cases} \langle \gamma'(s_0), \gamma(s_0) - C\rangle = 0 \\ \langle \gamma''(s_0), \gamma(s_0) - C\rangle = -1 \end{cases}$。

利用方程组与 $\langle \gamma''(s), \gamma'(s)\rangle = 0$ 可推知 $\gamma''(s_0) = a(\gamma(s_0) - C), a < 0$，同时点积 $\gamma(s_0) - C$ 可知 $a|\gamma(s_0) - C|^2 = -1$，，从而 $|\gamma(s_0) - C| = \frac{1}{\gamma''(s_0)}$

定理 1.9. 设 $r(s)$ 是弧长参数正则曲线，则：

1. $r''(s) \neq 0$ 时，$s_{1,2,3}$ 充分接近 s 时 $r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 不共线，且在 $s_{1,2,3} \to s$ 时，三点所确定的圆收敛到过 $r(s)$ 的圆，半径为 $\frac{1}{|r''(s)|}$，圆心在与 $r(s)$ 处切线垂直的直线上。

2. $r''(s) = 0$ 时，即使 $r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 不共线，其确定的圆也不可能收敛。

证明. 以下不妨设 $s_1 < s_2 < s_3$：

1. 若任何邻域内有 $r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 共线，由柯西中值定理可知存在 $s_1 < a < s_2 < b < s_3$ 使得 $r'(a)$ 与 $r'(b)$ 同向，又由弧长参数可知其相等，从而再由中值定理知存在 $a < c < b$ 使得 $r''(c) = 0$，再令 s_1, s_3 趋近 s 可得矛盾。

   设 C 为满足 $\langle r'(s), r(s) - C\rangle = 0, \langle r''(s), r(s) - C\rangle = -1$ 的唯一确定的圆心，下证 $s_{1,2,3}$ 构成的圆的圆心 $C(s_1,s_2,s_3)$ 收敛到 C，从而再由收敛到的圆过 $r(s)$ 可知半径即为 $\frac{1}{|r''(s)|}$。

   类似上方取中值，由中值定理，记 $C(s_1,s_2,s_3) = C_0$，其满足 $\langle r'(a), r(a) - C_0\rangle = \langle r'(b), r(b) - C_0\rangle = 0, \langle r''(c), r(c) - C_0\rangle = -1$。记 $C - C_0 = D$，利用极限可知 $\langle r'(a), D\rangle = \langle r'(b), D\rangle = \langle r''(c), D\rangle \to 0$。由连续性即可知 $D \to 0$，因此得证。

2. 类似 1，若 C_0 收敛到 C，仍然存在 $\langle r'(s), r(s) - C\rangle = 0, \langle r''(s), r(s) - C\rangle = -1$，但此时 $r''(s) = 0$，第二个式子不可能成立，从而矛盾。

* 这样确定的圆称为**密切圆** □

* 设 $r(s)$ 为平面弧长参数正则曲线，其 s 处曲率定义为 $|r''(s)|$。

记 $r'(s) = t(s)$，可发现其为单位切向量，设单位向量 $n(s)$ 与 $t(s)$ 垂直，且 $\{t(s), n(s)\}$ 与 $\{i, j\}$ 定向相同，则称其为 s 处的单位正法向量，由 $t(s)$ 唯一确定。

$\{r(s); t(s), n(s)\}$ 是一个以 $r(s)$ 为原点的正交标架，称它为沿曲线 r 的 **Frenet 标架**。

$t'(s) = r''(s) = \kappa(s) n(s)$，而由对 $\langle t(s), n(s)\rangle$ 求导可算出 $n'(s) = -\kappa(s) t(s)$，这里的 $\kappa(s)$ 是标量函数，称为**带符号曲率**，与参数化有关 (如记 $\bar{r}(s) = r(l - s)$，则 $\bar{\kappa}(s) = -\kappa(l - s)$)。

定理 1.10. 对正则曲线 $r(t) = (x(t), y(t))$，有 $\kappa = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$。

证明. 弧长参数下，其为 $r'(s), r''(s)$ 张成的有向面积，即 $x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$，再化为一般参数。 □

* 常曲率曲线只能为直线 (曲率为 0) 或圆 (曲率非 0)

证明. 前者由定义易得，后者通过求导可说明 $p(s) = r(s) + \frac{1}{a}n(s)$ 为常向量，从而得证。 □

定理 1.11. *设 $\kappa : (a,b) \to \mathbb{R}$ 为连续函数，则存在弧长参数曲线 $r(s)$ 使得 s 处曲率为 $\kappa(s)$，且若存在两条这样的曲线 $r, \bar{r}$，则有刚体变换 A 使得 $\bar{r} = A \circ r$。*

证明. 存在性也即寻找 $r(s)$ 满足 $\begin{cases} r'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa(s)n(s) = \kappa(s)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t(s)^T \end{cases}$，利用微分方程中的 Picard 存在唯一性定理，由任给的满足 $|t(s_0)| = 1$ 的初值可以解出 t，进而解出 r。
对于唯一性，r 的初值相差平移矩阵，t 的初值相差旋转矩阵，而旋转矩阵与 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ 均可交换，从而可以提出，得唯一性。 □

§1.4 空间曲线

* 正则曲线、曲率 ($|r''(s)| = \langle t', n \rangle$，$n$ 定义见下)、密切圆的定义与平面曲线相同

定理 1.12. *设 $r : (a,b) \to E^3$ 为弧长参数的正则曲线，且 $r''(s)$ 处处非零，则：*
1. $s_{1,2,3}$ 充分靠近时，$r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 不共线；
2. $s_{1,2,3} \to s$ 时，此三点确定的平面收敛到过 $r(s_0)$，由 $r'(s_0), r''(s_0)$ 张成的平面。

证明. 与平面情况类似可知 1 成立，记 $P(s_1, s_2, s_3)$ 为三点唯一确定的平面，假设其单位法向量 $a(s_1, s_2, s_3)$，p 为其上一点，考虑函数 $s \to \langle r(s) - p, a(s_1, s_2, s_3) \rangle$，利用两次中值定理可取出 $\langle r'(\xi_{1,2}), a \rangle = \langle r''(\eta), a \rangle = 0$。由于 a 方向不定，可不妨假设 $\{r'(\xi_1), r''(\eta), a\}$ 成右手系，有收敛时 $\begin{cases} \langle r'(s), a \rangle = \langle r''(s), a \rangle = 0 \\ \langle r'(s) \wedge r''(s), a \rangle = |r'(s) \wedge r''(s)| \end{cases}$。 □

* 空间中，法向量不唯一，当 $r''(s) \neq 0$ 时，令 $n(s) = \frac{r''(s)}{|r''(s)|}$ 为主法向量，$b(s) = t(s) \wedge n(s)$ 为副法向量，则有空间中的 Frenet 标架 $\{r(s); t(s), n(s), b(s)\}$，其中 t-n 平面称为**密切平面**，n-b 平面称为**法平面**，t-b 平面称为**从切平面**。

类似定义曲率，对 $\langle n, b \rangle$ 求导，定义 $\tau(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle$，称为**挠率**，有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$。

计算：利用 $\tau = -\langle n, b \rangle$ 与定义可以化出 $\tau(s) = \dfrac{(r'(s), r''(s), r'''(s))}{|r''|^2}$，进一步化为一般参数可知 $\tau = \dfrac{(r', r'', r''')}{|r' \wedge r''|^2}$，而空间曲率可类似算得 $\kappa = \dfrac{|r' \wedge r''|}{|r'|^3}$。
* 计算可知，一点处 κ, τ 不依赖参数化的选取

挠率的几何意义：$|b'(s)| = |\tau(s)|$，为空间曲线**离开密切平面的速度**。

定理 1.13. *空间正则曲线 $r = r(t)$ 曲率处处大于 0，则其在某个平面上的充要条件是 $\tau \equiv 0$。*

证明. 对左推右，设弧长参数化后有 $\langle r(s)-r(s_0),a\rangle=0$ 恒成立，求导即可知 $t(s),n(s)$ 亦在此平面，组合可知 $\tau(s)\langle b(s),a\rangle=0$，从而得证。右推左时，由 $b'(s)=0$ 可知 $b(s)$ 为常向量，求导可验证 $r(s)$ 与 b 恒垂直。 □

$\tau(s)$ 符号的意义：离开密切平面的方向与 b 相同/相反
* 反向参数化后，挠率不变
计算得 0 处展开 $r(s)$ 可得 $r(s)=r(0)+(s-\frac{\kappa(0)^2s^3}{6})t(0)+(\frac{\kappa(0)s^2}{2}+\frac{\kappa'(0)s^3}{6})n(0)+\frac{\kappa(0)\tau(0)s^3}{6}b(0)+o(s^3)$，从而可得 Frenet 标架下点的坐标。

定理 1.14. 曲线的弧长、曲率、挠率在刚体运动下不变。

证明. 设刚体运动将 p 变为 $pT+x$，直接进行计算可发现旋转矩阵 T 由于行列式为 1 被合并消去，x 在求导中消去，从而不变。 □

定理 1.15. 空间曲线基本定理
设 $\kappa,\tau:(a,b)\to\mathbb{R}$ 连续，且 $\kappa>0$，则存在弧长参数曲线 $r:(a,b)\to E^3$ 以 κ,τ 为曲率，挠率，若有两条不同，则可以通过刚体变换使之重合。

证明. 类似平面时的讨论，化为常微分方程控制。 □

对 $s\in(a,b)$ 作为弧长参数的曲线，$\int_a^b\kappa(s)\mathrm{d}s$ 称为全曲率。
令 $r:[0,l]\to E^3$ 为正则曲线 (闭区间光滑指能光滑延拓到某开区间上)，且 $r(0)$ 与 $r(l)$ 各阶导数相等，则称其为闭曲线。若其在 $[0,l)$ 上为一一映射，则称简单闭曲线。

练习. 探索平面简单闭曲线的全曲率。

对空间曲线，由定义 $\kappa(s)\geq 0$，由此全曲率必然非负。
Fenchel,1929：任何空间简单闭曲线有 $\int_0^l\kappa(s)\mathrm{d}s\geq 2\pi$，取等等价于曲线为平面简单凸闭曲线。
Fary,1949/Milnar,1950：若曲线具非平凡扭结，则 $\int_0^l\kappa(s)\mathrm{d}s\geq 4\pi$。

二 曲面的几何

* 研究怎样的曲面？
曲面可作以下映射：$r:D\subset E^2\to E^3$，且满足每个分量函数光滑且 $r_u=(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}),r_v=(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v})$ 线性无关 (即外积非零)，则称为**正则曲面片**。
一点 $r(u_0,v_0)$ 处，考虑曲线 $r(u,v_0)$ 与 $r(u_0,v)$ 可得到两个切向量 $r_u(u_0,v_0),r_v(u_0,v_0)$。
* 曲面上过 $r(u_0,v_0)$ 的所有光滑曲线在此处的切向量构成二维线性空间，即为 r_u,r_v 张成的平面，定义为**切平面**。

证明. 定义光滑函数 $t\to(u(t),v(t))$，则曲面上的光滑曲线可写成 $t\to r(u(t),v(t))$，不妨设 $u(0)=u_0,v_0=v(0)$，求导可知 $r(u_0,v_0)$ 处的切向量为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}r_u+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}r_v$。 □

另一个推论：$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ 不可能同时为 0，于是由反函数定理：
不妨设 (u_0,v_0) 处 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 非零，则存在 (u_0,v_0) 邻域，其上 $(u,v)\to(x,y)$ 有反函数 $(x,y)\to(u,v)$，于是 $r(u,v)=(x,y,\tilde{z}(x,y))$。

法向量

*$r_u \wedge r_v$ 定义为法向量，与切平面垂直，$\{r; r_u, r_v, r_u \wedge r_v\}$ 构成 (未必正交的) 标架

对**光滑参数变换** $(\bar{u}, \bar{v}) \to (u, v)$，记 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} \overline{r_u} \\ \overline{r_v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$，计算得 $\overline{r_u} \wedge \overline{r_v} = \det(J) r_u \wedge r_v$，由此不同参数化下法向量可能反向。

§2.1 第一基本形式

记 $E = \langle r_u, r_u \rangle, F = \langle r_u, r_v \rangle, G = \langle r_v, r_v \rangle$：

1. 曲面上**曲线的长度**

记 $r = r(u,v), r(t) = r(u(t), v(t))$

曲线长度 $s(a) = \int_0^a |r'(t)| \mathrm{d}t$

而 $s'(a) = \sqrt{\langle r'(t), r'(t) \rangle}$，代入可发现根号内为 $Eu_t^2 + 2Fu_tv_t + Gv_t^2$

2. 切向量 $\nu = \lambda r_u + \mu r_v, \omega = \bar{\lambda} r_u + \bar{\mu} r_v$，则 $\langle \nu, \omega \rangle = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$ 构成 $T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ 的映射，其中 T_pS 代表 S 在 P 处的切平面。

3. 计算可验证，在不同参数化下，$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^T$。

定义 $I = E\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + F\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v + F\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}u + G\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v$，可发现其在坐标变换下保持不变，称为**第一基本形式**。

* 它是一个由一形式 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 张量积得到的二形式

定义说明：对 $f: S \to \mathbb{R}$ 曲面上的光滑函数 (可看作对 u, v 光滑)，可定义一形式

$$\mathrm{d}f(p): T_pS \to \mathbb{R}, v \to \mathrm{d}f(v)(p) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(r(t))$$

其中 $r(t) = r(u(t), v(t))$ 满足 $r(0) = p, r'(0) = v$。

其具有线性性，事实上只与 p, v 有关，与 $r(t)$ 选取无关。

于是，$r(u,v) \to u$ 的映射 (不妨记为 u)，有 $\mathrm{d}u(r_u)(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0} u(r(u, v_0)) = 1$，$\mathrm{d}u(r_v) = 0$，同理 $\mathrm{d}v(r_u) = 0, \mathrm{d}v(r_v) = 1$。

于是，对任何 $V = \lambda r_u + \mu r_v, W = \bar{\lambda} r_u + \bar{\mu} r_v$，即有 $I(V, W) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$。

* 第一基本形式在合同变换下不变

面积：设 $r: D \to E^3$ 为正则曲面片，其面积定义为 $\iint_D |r_u \wedge r_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$

*$|r_u \wedge r_v|^2 = \langle r_u, r_u \rangle \langle r_v, r_v \rangle - \langle r_u, r_v \rangle^2$

曲率：高斯曲率定义为 $K(p) = \frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v}$，其中 n_u, n_v 代表 $r_u \wedge r_v$ 归一化后对 u, v 偏导，由于两者平行可作商。

* 验证可知面积、曲率均不依赖参数选取，且在合同变换下不变

例：计算 $(u, v, f(u,v))$ 的高斯曲率。

$$r_u = (1, 0, f_u), r_v = (0, 1, f_v) \Rightarrow r_u \wedge r_v = (-f_u, -f_v, 1)$$

$$n = (\frac{-f_u}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, \frac{-f_v}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}})$$

$$K(p) = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(f_u^2 + f_v^2 + 1)^2}$$

参数变换

由 r_u,r_v 不共线，对某点附近可参数化使得 $r(u,v)=(u,v,f(u,v))$，下面不妨考虑 $(0,0)$ 处高斯曲率：
在 $(0,0)$ 处切平面上取标准正交基 e_1,e_2，记

$$\begin{cases} h(u,v)=\langle r(u,v)-r(0,0),n(0,0)\rangle \\ \bar{u}(u,v)=\langle r(u,v)-r(0,0)-h(u,v)n(0,0),e_1\rangle \\ \bar{v}(u,v)=\langle r(u,v)-r(0,0)-h(u,v)n(0,0),e_2\rangle \end{cases}$$

可以发现 $\bar{r}(u,v)=(\bar{u},\bar{v},h)$ 是 r 在平移 $(0,0,f(0,0))$ 至 $(0,0,0)$ 后将切平面转到 xy 平面的结果。
计算知 $\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}=\langle r_u\wedge r_v,e_1\wedge e_2\rangle\neq 0$，局部可存在 $\bar{r}(\bar{u},\bar{v})=(\bar{u},\bar{v},\bar{f}(\bar{u},\bar{v}))$。由于 $h_u(0,0)=h_v(0,0)=0$，利用复合函数求导可知 $\bar{f}_{\bar{u}}=\bar{f}_{\bar{v}}=0$，从而 $\bar{K}(\bar{r}(0,0))=\bar{f}_{\bar{u}\bar{u}}\bar{f}_{\bar{v}\bar{v}}-\bar{f}_{\bar{u}\bar{v}}^2$。
另一方面，由于此时切平面已经在 xy 平面上，考虑适当的绕 z 轴的旋转，也即成为 $(\bar{u},\bar{v},\bar{f}\circ R_\theta(\bar{u},\bar{v}))$，这时

$$\begin{cases} \tilde{u}\cos\theta-\tilde{v}\sin\theta=\bar{u} \\ \tilde{u}\sin\theta+\tilde{v}\cos\theta=\bar{v} \\ \bar{f}(\bar{u},\bar{v})=\tilde{f}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{cases}$$

计算可知 $\tilde{f}_{\tilde{u}\tilde{v}}=\bar{f}_{\bar{u}\bar{v}}\cos 2\theta+(\bar{f}_{\bar{v}\bar{v}}-\bar{f}_{\bar{u}\bar{u}})\sin\theta\cos\theta$，从而可选取合适的角度使得 $\tilde{f}_{\tilde{u}\tilde{v}}=0$。
于是，经过合适的合同变换与参数变换，正则曲面片在一点处周围总可以写成 $r(u,v)=(u,v,f(u,v))$ 使得 $K(u_0,v_0)=f_{uu}f_{vv}$。
不妨设这点为 $(0,0)$，此时由于 $f_v(0,0)=0$，计算可得 $v-z$ 平面上截线 $(0,0)$ 处带符号曲率为 $f_{vv}(0,0)$，$u-z$ 平面上则为 $f_{uu}(0,0)$。
* 一般做不到参数 u,v 使得 r_u,r_v 点点标准正交，除非曲面“平坦”

定义 2.1. 法曲率
取 O 点处任何单位切向量 v 与单位法向量 n，将张成平面对曲面的截线参数化 *(*弧长参数、正确方向*)* 使得 O 点切向量为 v，则此时的定向 $\{O;v,n\}$ 对应截得的带符号曲率 $K_n(v)$ 称为 O 点处单位切向量的法曲率。

* 由于取相反的 v 时参数化方向与定向同时反向，$K_n(-v)=K_n(v)$
一点处参数化使得 $K(u_0,v_0)=f_{uu}f_{vv}$ 后，考虑任何 $v=\cos\theta r_u+\sin\theta r_v$，可计算发现以 $v-n$ 为平面标架时 $r(t)=(t,f(t\cos\theta,t\sin\theta))$ 即为所需的参数化曲线，此时 $K_n(v)$ 即为 $f_{uu}\cos^2\theta+f_{vv}\sin^2\theta=K_n(e_1)\cos^2\theta+K_n(e_2)\sin^2\theta$。

定理 2.2. *Euler:* 若 $K_n(v)$ 不全相等，则不区分 $\pm v$ 的意义下存在唯一方向 v_1 使得 $k_1=K_n(v_1)$ 达到最大值；唯一方向 v_2 使得 $k_2=K_n(v_2)$ 达到最大值，且两方向相互垂直。若 v 与 v_1 成角度 θ，则 $K_n(v)=\cos^2\theta k_1+\sin^2\theta k_2$。

§2.2　第二基本形式

考虑 $r(u,v)$ 与一点 $P=r(u_0,v_0)$，取过 P 点的一条弧长参数化的曲线 $r(s)=r(u(s),v(s))$。
考虑 $\langle r_{ss},n\rangle=\langle r_{uu},n\rangle u_s^2+2\langle r_{uv},n\rangle u_sv_s+\langle r_{vv},n\rangle v_s^2=II(V,V)$，其中 $V=r_uu_s+r_vv_s$，而 II 即为第二基本形式，由 $L=\langle r_{uu},n\rangle, M=\langle r_{uv},n\rangle, N=\langle r_{vv},n\rangle$ 决定。
*$II=L\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+M\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+M\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v$
对 P 点任一切向量 $V=\lambda r_u+\mu r_v$，有 $K_n(V)=\langle r_{ss},n\rangle_P=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$。
而对 $V=\lambda r_u+\mu r_v, W=\xi r_u+\eta r_v$，有 $II(V,W)=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$，第二基本形式是**对称双线性**的。

* 当 V 为单位切向量时，$K_n(V)=II(V,V)$ 即为沿 V 的法曲率。
而对任一切向量，沿其的法曲率为

$$K_n(\frac{V}{|V|})=II(\frac{V}{|V|},\frac{V}{|V|})=\frac{II(V,V)}{|V|^2}=\frac{II(V,V)}{I(V,V)}$$

性质：设 $r=r(u,v)$，合同变换 T 下为 $\tilde{r}$，则对 $r(u,v)$ 任一切向量 V 有 $II(V,V)=\det(T)\tilde{I}I(\mathcal{T}(V),\mathcal{T}(V))$。

证明. 利用 $\langle r_u,n\rangle=0$ 求导可得 $\langle r_{uu},n\rangle=-\langle r_u,n_u\rangle$，从而利用 $\tilde{n}=\dfrac{\mathcal{T}(r_u)\wedge\mathcal{T}(r_v)}{|\mathcal{T}(r_u)\wedge\mathcal{T}(r_v)|}=\det(T)\mathcal{T}(n)$ 可计算 $\tilde{L},\tilde{M},\tilde{N}$ 知结论成立 (中间利用了 $\det T=\pm1$，于是乘除无区别)。 □

* 对 $r(u,v)$ 的任一切向量 V，$II(V,V)$ 在同向参数变换下不变，反向参数变换下反号
* 法曲率的最值也即求 $\frac{II(V,V)}{I(V,V)}$ 的最值，可写为 $\frac{xS_0x^T}{xSx^T}$ 的最值 (记第一基本形式对应的矩阵为 S，第二基本形式为 S_0，x 为 V 在 r_u,r_v 下的矩阵表示)，又由于 S 正定，S_0 对称，设 $S=LL^T$，利用线代知识可发现其即化为求 $L^{-1}S_0L^{-T}$ 的最大/最小特征值，由相似进一步化为 S_0S^{-1} 的最大/最小特征值 (由于矩阵为二阶，即为所有特征值 λ_1,λ_2)。

Weingarten 变换
考虑 $T_P(M)$ 上由 $I(V,W)$ 定义内积产生的内积空间，对第二基本形式 $II:T_P(M)\times T_P(M)\to\mathbb{R}$，设存在线性算子 $\mathcal{W}$ 使得 $II(V,W)=\langle V,\mathcal{W}(W)\rangle$，由二形式对称性可知 $\mathcal{W}$ 是自伴算子。
接下来推导 $\mathcal{W}$ 的形式：考虑 $II(V,V)$ 可知 $\mathcal{W}(\lambda r_u+\mu r_v)=-\lambda n_u-\mu n_v$，从而 $\mathcal{W}:T_P(M)\to T_P(M)$ 由 $\mathcal{W}(r_u)=-n_u,\mathcal{W}(r_v)=-n_v$ 确定。
* 可验证 $\mathcal{W}$ 的确满足上述条件
* 高斯映射 $g:M\to S^2,r(u,v)\to n(u,v)$，考虑其微分：
$p=r(u_0,v_0)$，定义 $\mathrm{d}g_p:T_pM\to T_{g(p)}S^2$，对于 $V\in T_pM$，选 M 上过 p 的一条曲线 $r(t)$ 使得 $r(0)=p,r'(0)=V$，则 $\mathrm{d}g_p(V)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}g(r(t))$。
计算：$r'(t)=r_uu_t+r_vv_t$，设 $V=ar_u+br_v$，则 $\mathrm{d}g_p(v)=(g\circ r)_uu_t+(g\circ r)_vv_t=a(g\circ r)_u+b(g\circ r)_v$，具有**线性性**。
由定义，$\mathrm{d}g_p(r_u)=n_u(g(p))$，只需要再平移到 p 点即只与 Weingarten 变换差符号，于是 $\mathcal{W}=P\circ(-\mathrm{d}g_p)$。
* 由于 $II(V,W)=\langle\mathcal{W}(V),W\rangle=I(\mathcal{W}(V),W)$，可知 $\mathcal{W}$ 在基 r_u,r_v 下的的矩阵表示为 SS_0^{-1}

* 由定义与上方推导，高斯曲率

$$K(P)=\frac{\mathcal{W}(r_u)\wedge\mathcal{W}(r_v)}{r_u\wedge r_v}=\det(\mathcal{W})=\frac{\det S}{\det S_0}$$

进一步计算，由于 $|r_u\wedge r_v|^2=EG-F^2=\det S_0$，有 $L=\dfrac{(r_{uu},r_u,r_v)}{\sqrt{\det S_0}},M=\dfrac{(r_{uv},r_u,r_v)}{\sqrt{\det S_0}},N=\dfrac{(r_{vv},r_u,r_v)}{\sqrt{\det S_0}}$，通过复杂的计算可发现 $LN-M^2$ 可以通过 E,F,G 对 u,v 求至多两阶导数表示，从而有：

定理 2.3. 高斯绝妙定理
高斯曲率只依赖第一基本形式。

* 第一基本形式是**内蕴**的，第二基本形式则是**外蕴**的
* 内蕴：将参数反向，法向量变向，但由高斯绝妙定理容易发现高斯曲率不变
* 高斯曲率在**等距变换**下不变

定义 2.4. 等距变换
设 $M,\tilde{M}$ 是 E^3 中两正则曲面片，考虑 $\sigma:M\to\tilde{M}$ 双射且其与其逆均光滑。若对任何 M 上曲线 C，C 与 $\sigma(C)=\tilde{C}$ 长度相等，则称其为等距变换。

* 曲面上的度量结构可以归结为**每点切空间的内积**上，即关乎第一基本形式

$$s(T)=\int_0^T\sqrt{I(r'(t),r'(t))}\mathrm{d}t=\tilde{s}(T)=\int_0^T\sqrt{\tilde{I}(\tilde{r}'(t),\tilde{r}'(t))}\mathrm{d}t$$

两边求导可知 I 与 $\tilde{I}$ 对应相等。
考虑 $\sigma_*:=\mathrm{d}\sigma_p:T_pM\to T_{\sigma(p)}M$，$V\to\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\sigma(r(t))$，$r(t)$ 为过 p 且 0 处以 V 为切向量的曲线。
利用极化，$I(V,V)=\tilde{I}(\sigma_*(V),\sigma_*(V))$ 可推出 $I(V,W)=\tilde{I}(\sigma_*(V),\sigma_*(W))$，由此对每点处的内积空间，$\sigma_*$ 都构成同构。
设 $\tilde{r}(u,v)=\sigma(r(u,v))$，则 $\tilde{E}=\langle\tilde{r}_u,\tilde{r}_u\rangle=\langle\sigma_*(r_u),\sigma_*(r_u)\rangle=E$，$F,G$ 类似，于是两个曲面片若等距同构，一定可以参数化使对应点第一基本形式相同。

例：环面去掉两个圆构成的曲面片 $\big((R+r\cos u)\cos v,(R+r\cos u)\sin v,r\sin u\big),u,v\in(0,2\pi)$
由 r_u,r_v 定义 (或计算) 可发现 $E=r^2,F=0,G=(R+r\cos u)^2$，于是 $I=r^2\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+(R+r\cos u)^2\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v$。
$n=(-\cos u\cos v,-\cos u\sin v,-\sin u)$，于是 $L=r,M=0,N=(R+r\cos u)\cos u$，$K(u,v)=\frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}$。
曲面全曲率 $\iint_{(0,2\pi)^2}K|r_u\wedge r_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 可计算发现为 0。
* 对球面，计算知这一积分的结果为 4π
* 切平面内积的定义？(当前的定义为外围空间诱导，若强行定义 r_u,r_v 单位正交，可发现全曲率仍然不变)
* 即同样的拓扑对应不同度量时结果不变

§2.3 平均曲率、局部外蕴几何

* 由前述讨论有 $K=\det(\mathcal{W})$，线性变换的另一个重要量？

定义 2.5. 平均曲率
$H=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathcal{W})=\frac{k_1+k_2}{2}$ 称为平均曲率，计算可知其为 $\dfrac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$。

* 和面积密切相关 (如 $H\equiv 0$ 的曲面称**极小曲面**)
考虑正则曲面片 $r:D\to E^3$，假设 D 紧且边界 (分段) 光滑。光滑映射 $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\times D\to E^3$ 满足 $\alpha(0,u,v)=r(u,v)$ 称为 r 的**变分**，而 $W(u,v)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ 称为**变分向量场**。
下面考虑 $\alpha=r(u,v)+\varphi(u,v)n(u,v)t$ 的情况，变分向量场为 φn。
性质：对上述的一族曲面片 $r_t(u,v)$，面积为 $A(t)=\iint_D|(r_t)_u\wedge(r_t)_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，有

$$A'(0)=-\iint_D 2\varphi H|r_u\wedge r_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

证明. $A(t)=\iint_D\sqrt{E_tG_t-F_t^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，而展开知 $\begin{cases}E_t=E-2t\varphi L+o(t)\\F_t=F-2t\varphi M+o(t)\\G_t=G-2t\varphi N+o(t)\end{cases}$，从而进一步计算并利用求导积分交换可得结果。 □

* 由此可知 $H=0$ 时有极值

* 曲面的局部**外蕴**几何 [第二基本形式的几何意义]
对正则曲面片 $r(u,v)$，设 $P=r(0,0)$，高度函数 $h(u,v)=\langle r(u,v)-r(0,0),n(0,0)\rangle$ 为任何点到 P 点切平面距离。
计算发现 $h(0,0)=h_u(0,0)=h_v(0,0)=0$，而恰好有 $L=h_{uu}(0,0),M=h_{uv}(0,0),N=h_{vv}(0,0)$，于是 $h(u,v)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+o(u^2+v^2)$。若 $LN-M^2>0$，则 $\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$ 正定时高度函数达到

最小值，P 为凸点，反之负定时 P 为凹点；若 $LN-M^2<0$，$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ 不定，类似鞍点；$LN-M^2=0$，则构成退化情况。
* 一点处刚体变换至 $(u,v,h(u,v))$ 后，进一步近似成 $\left(u,v,\frac{1}{2}(Lu^2+2Muv+Nv^2)\right)$。
假定参数化 $(u,v,f(u,v))$ 使 r_u,r_v 为 $r(0,0)$ 处主方向，此时 $\mathcal{W}(e_i)=k_ie_i$，于是 $L=k_1,M=0,N=k_2$，称 $\left(u,v,\frac{1}{2}(k_1u^2+k_2v^2)\right)$ 为这点的**密切抛物面** (计算可发现密切抛物面这点的主曲率与原本一致)。
$LN-M^2=k_1k_2$，若其大于 0，所有法曲率符号一致，为**椭圆抛物面**；其小于 0 时，有两个线性无关切向量使得法曲率均为 0，此时为**双曲抛物面**，也即马鞍面；其为 0 且 k_1,k_2 不全为 0 时，构成**抛物柱面**；而 k_1,k_2 全为 0 时即为平面。
* 根据密切抛物面 (第二基本形式情况)，可将曲面上的点分为四类：椭圆点、双曲点、抛物点、平点 (L,M,N 全为 0)
* 对双曲点，切平面截密切抛物面得两直线
* 注：考虑 (u,v,u^3+v^2) 与 (u,v,u^3-3uv^2)[猴鞍面] 可发现抛物点、平点附近可能具有不同性态

定义 2.6. *渐进方向*
曲面在一点处法曲率为 0 的方向称为该点的渐进方向。

* 椭圆点、抛物点分别有零个、一个渐进方向，而平点每个方向都是渐进方向。
* 双曲点有两个渐进方向 (截得的直线)，计算可发现夹角 $\tan^2\theta=-\frac{k_1}{k_2}$，当且仅当平均曲率为 0 时两渐进方向垂直。

定义 2.7. *脐点*
沿各个方向法曲率为常数的点，即 $k_1=k_2$，每个方向都是主方向。

* 性质：由法曲率计算可发现此点处 $\frac{II}{I}$ 为常数 k，即 $\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=k$。当 $k\neq 0$ 时称为**圆点**，$k=0$ 时即为平点。计算发现，这点处的 $\mathcal{W}$ 恰好为数乘。

定理 2.8. *给定连通正则曲面片，若其每点均为脐点，则其必然为平面或球面的一部分*

证明. 设 $II=k(u,v)I$，对 $\mathcal{W}(r_u)=-n_u,\mathcal{W}(r_v)=-n_v$ 求导可知 $-n_{uv}=k_vr_u+k_ruv,-n_{vu}=k_ur_v+kr_{vu}$，于是 $k_ur_v=k_vr_u$，由其线性无关可知必须 $k_u=k_v=0$，从而 k 必为常数
于是，再次利用 $\mathcal{W}$ 知 $n=-kr+v_0$，$\langle r,n\rangle$ 为常数，从而分类讨论，$k\neq 0$ 时考虑 $|r-\frac{v_0}{k}|$ 可发现为球面。 □

* 点点 $L=M=N=0$ 的曲面必为平面
* 问题：给定基本形式是否存在曲面？(容易想到，$EFGLMN$ 需要满足一些结构性方程才可能存在)

§2.4 特殊曲面

旋转曲面

考虑 xz 平面正则曲线 $c(u)=(f(u),g(u)),f(u)>0$，绕 z 旋转后 $r(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))$。
$r_u=(f'(u)\cos v,f'(u)\sin v,g'(u)),r_v=(-f(u)\sin v,f(u)\cos v,0)$，可验证其满足正则性。
计算知 $E=(f')^2+(g')^2,F=0,G=f^2,L=\frac{f'g''-f''g'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}},M=0,N=\frac{fg'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$，而 Weingarten 变换矩阵为 $\mathrm{diag}\left(\frac{f'g''-g'f''}{((f')^2+(g')^2)^{3/2}},\frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\right)$。
几何角度：$u\to n(u,v_0)$ 是 xz 平面曲线，而 n_u 为切向量，于是考虑切平面与 xz 平面交线发现只能每点 $-n_u$ 与 r_u 共线，r_u 即为主方向，相应的主曲率即为母线的曲率 $\frac{f'g''-g'f''}{((f')^2+(g')^2)^{3/2}}$。另一方面，$v\to n(u_0,v)$ 事实上也是平面曲线 (n_v 第三个坐标为 0)，于是也有 $-n_v$ 与 r_v 共线 (观察可知亦有同向)。注意到 $-n(u_0,v)$

与 $r(u_0,v)$ 为同参数化的圆，于是 n_v, r_v 的长度比例为两圆的半径比例，而一个为 f，一个为 $\frac{g'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$(考察三角函数)，即可知另一个主曲率为 $\frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$。
* 若要求 u 为母线的弧长参数，则矩阵变为 $\mathrm{diag}(f'g''-g'f'', \frac{g'}{f})$，对 $(f')^2+(g')^2$ 求导可发现 $(f'g''-g'f'')g' = -f''$，于是高斯曲率为 $-\frac{f''}{f}$。
* 重要方程：$f''+Kf=0$ [当 K 为常数时容易求解]

1. $K=0, f''=0 \Longrightarrow f(u)=au+b$

   计算发现只能为平面、柱面或圆锥面。

2. $K=c^2, f''+c^2f=0 \Longrightarrow f(u)=A\cos(cu)+B\sin(cu)=a\cos(cu+b)$

   当 $a=\frac{1}{c}$ 时为球面，$a<\frac{1}{c}$ 时为纺锤形，$a>\frac{1}{c}$ 时为桶形。

3. $K=-c^2, f''-c^2f=0 \Longrightarrow f(u)=a\mathrm{e}^{cu}+b\mathrm{e}^{-cu}$

   a,b 有一个为 0 时，不妨设 $b=0$[相差负参数化] 且 $a>0$，再次通过参数化可使 $a=\frac{1}{c}$，此时 $g(u)=\pm\int_0^u\sqrt{1-\mathrm{e}^{2ct}}\mathrm{d}t$，考虑 $u\in(-\infty,0)$ 的情况，此时曲面称为**伪球面** [表面积与同半径球面一致，体积相差 $\frac{1}{2}$]。

   性质：考虑切向量 $(f'(u),g'(u))$，计算可发现切点与切线 z 轴交点的距离为定值 $\frac{1}{c}$，因此 (f,g) 被称为**曳物线**。

* 极小旋转曲面：须 $ff''+(f')^2=1$，解出 $f(u)^2=u^2+2Au+B$，由大于 0，$f(u)=\sqrt{u^2+2Au+B}$，而 $g'(u)^2=\frac{B-A^2}{u^2+2Au+B}$。

1. $B=A^2$

   只能为平面的一部分。

2. $B-A^2=a^2$

   可参数化为 $f(u)=\sqrt{u^2+a^2}$，于是 $g(u)=\pm a\,\mathrm{arcsinh}\,\frac{u}{a}$，可化为 $x=a\cosh\frac{z}{a}$，称为**悬链线**。

直纹面
$r(u,v)=a(u)+vb(u)$，当 $a'(u)$ 与 $b(u)$ 线性无关时一定为正则曲面片
*$N=0, K=\frac{-M^2}{EG-F^2}$
例子：

1. $b(u)=b_0$ 广义柱面

2. $a(u)=a_0$ 广义锥面，正则要求 $v\neq 0, b'(u)\wedge b(u)\neq 0$

3. $r(u,v)=a(u)+va'(u)$ 切线面 (曲线的切线组成的曲面)，依然要求 $v\neq 0$ 且 $a'(u)\wedge a''(u)\neq 0$

   * 计算发现高斯曲率恒为 0，高斯曲率为 0 的直纹面称为**可展曲面**

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 单叶双曲面

   * 取 $r(u,v)=(a\cos u, b\sin u, 0)+v(\pm a\sin u, \mp b\cos u, c)$ 均可

   * 当 $a=b$ 时为旋转面

5. $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 双曲抛物面

   * 取 $r(u,v)=(au,0,u^2)+v(a,\pm b,2u)$ 均可

定理 2.9. 直纹面可展 $\Longleftrightarrow (a', b, b') = 0 \Longleftrightarrow$ 任给 u_0，沿直母线 $r(u_0, v)$ 方向法向量不变。

证明. 直接计算 $\langle r_{uv}, n\rangle = c\langle r_{uv}, r_u \wedge r_v\rangle$，进一步计算得第一个等价成立。
对第二个等价，直纹面可展可等价于 n_v 与 r_u, r_v 内积均为 0，于是只能为 0。 □

* 可展曲面局部：从 $(a', b, b') = 0$ 出发分类讨论。若局部 $b \wedge b' \equiv 0$，则 $b(u)$ 方向不变，局部是柱面；若局部 $b \wedge b' \neq 0$，a' 可以写作 $\lambda(u)b(u) + \mu(u)b'(u)$，利用参数化 $\tilde{a}(u) = a(u) - \mu(u)b(u)$，$\tilde{v} = v + \mu(u)$ 有 $r(u, v) = \tilde{a}(u) + \tilde{v}b(u)$，进一步分类讨论可知 $\lambda(u) - \mu'(u) = 0$ 时为锥面，否则为切线面。
* 直纹面是极小曲面时：
$r(u, v) = a(u) + vb(u)$，由正则化条件可不妨参数化为 $|b(u)| = 1, \langle a', b'\rangle = 0$。
当 $b' \equiv \mathbf{0}$ 时，即 $b(u) = b_0$，为广义柱面，又由极小要求知为平面。其他情况可假定 $|b'(u)| = 1$。
直纹面 $H = 0 \Leftrightarrow LG = 2MF$，计算可得

$$F = \langle a', b\rangle, G = 1, L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(a'' + vb'', a' + vb', b), M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(b', a' + vb', b)$$

整理出 $1, v, v^2$ 项可得到方程

$$-2\langle a', b\rangle (b', a', b) + (a'', a', b) = (b'', a', b) + (a'', b', b) = (b'', b', b) = 0$$

进一步计算出 $b(u)$ 曲率为 1，挠率为 0，于是 $b(u)$ 为单位圆，不妨刚体变换后参数化为 $(\cos u, \sin u, 0)$，再结合第二个方程得 $a(u) = (\alpha(u), \beta(u), \lambda u + c)$，刚体变换可使 $a(u) = (\alpha(u), \beta(u), \lambda u)$，代回第一个方程讨论。若 $\lambda = 0$ 时可说明其为平面的部分，否则可得到 $r(u, v) = (\alpha, \beta, \lambda u) + v(\cos u, \sin u, 0)$[**正螺面**]。

问题：两张曲面片之间存在映射保持高斯曲率不变，该映射是否等距？若高斯曲率平均曲率都不变，是否合同？
答案：均否。

练习. 给定曲面片

$$\begin{cases} r_1(u, v) = (v\cos u, v\sin u, u) \\ r_2(u, v) = (u\cos v, u\sin v, \ln u) \\ r_3(u, v) = (\sqrt{1 + u^2}\cos v, \sqrt{1 + u^2}\sin v, \operatorname{arcsinh} u) \end{cases}$$

证明在合适参数范围下，r_1 到 r_2 存在保高斯曲率的一一映射，但不为等距映射；r_1 到 r_3 存在保高斯曲率、平均曲率的一一映射，但不为刚体运动。

三　标架与曲面论基本定理

核心问题：给定第一、第二基本形式，能否在相差刚体运动的情况下唯一确定正则曲面？
(**存在性、唯一性**)

§3.1　活动标架与运动方程

由于 E, F, G, L, M, N 是由 $r_u, r_v, r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}$ 确定的，事实上是希望通过这些解出 r。
*$\{r_u, r_v, n\}$ 成为曲面上的**活动标架** (标架：$\{r; x_1, x_2, x_3\}$，曲面上处处线性无关的向量场，一般要求定向为正)
*$r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}, n_u, n_v$[即标架的偏导] 在标架下的表示？
之前的计算方式：设 $r_{uu} = \Gamma^u_{uu} r_u + \Gamma^v_{uu} r_v + C_{uu} n$，由 $\langle r_{uu}, n\rangle = L$ 知 $C_{uu} = L$，而对于 $\Gamma^u_{uu}, \Gamma^v_{uu}$，有

$$\langle r_{uu}, r_u\rangle = \Gamma^u_{uu} E + \Gamma^v_{uu} F = \frac{1}{2}E_u,\ \langle r_{uu}, r_v\rangle = \Gamma^u_{uu} F + \Gamma^v_{uu} G = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

可知 $\begin{pmatrix}\Gamma^u_{uu}\\ \Gamma^v_{uu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E_u/2\\ F_u - E_v/2\end{pmatrix}$
* 类似可得到其他的 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$

引入记号：$u^1 = u, u^2 = v, r = r(u^1, u^2)$，下标 1 或 2 代表对对应分量求导，可叠加；记 $g_{\alpha\beta} = \langle r_\alpha, r_\beta\rangle, b_{\alpha\beta} = \langle r_{\alpha\beta}, n\rangle$，即对应 E, F, G, L, M, N。

Einstein 求和约定：同时在上下指标出现的指标视为对所有求和，省去求和符号。由此有 $I = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \otimes \mathrm{d}u^\beta, II = b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \otimes \mathrm{d}u^\beta$。

记 $(g_\alpha\beta)^{-1}$ 对应位为 $g^{\alpha\beta}$，则由矩阵逆定义 $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$，其中 $\delta^j_i = \begin{cases}0 & i \neq j\\ 1 & i = j\end{cases}$。再记 $g = \det(g_{\alpha\beta})$，$b = \det(b_{\alpha\beta})$。

将想求解的式子利用新的记号写作：$\begin{cases}r_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\gamma + b_{\alpha\beta}n\\ n_\alpha = D^\beta_\alpha r_\beta\end{cases}$，下面求解 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 与 D^β_α。

*$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 称为**第一类 Christoffel 符号**

D^β_α 的求解：由于 $-b_{\alpha\gamma} = \langle n_\alpha, r_\gamma\rangle = D^\beta_\alpha g_{\beta\gamma}$，乘 $g^{\gamma\delta}$ 并对 γ 求和可知 $D^\delta_\alpha = -b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\delta}$。记 $b^\delta_\alpha = b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\delta}$，即有 $D^\delta_\alpha = -b^\delta_\alpha$。

*(b^β_α) 就是 Weingarten 变换在基 r_1, r_2 下的矩阵

$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 的求解：利用 r_ξ 内积可知 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}g_{\gamma\xi} = \langle r_{\alpha\beta}, r_\xi\rangle$，记 $g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}$，轮换相减可知 $g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 2\Gamma^\xi_{\alpha\beta}g_{\xi\gamma}$，从而乘 $g^{\xi\gamma}$ 并求和可知 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\xi}(g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma})$。

* 交换 α, β 结果不变
* 定义 $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}g_{\gamma\xi} = \frac{1}{2}(g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma})$ 为**第二类 Christoffel 符号**

于是标架满足

$$\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial u^\alpha} = r_\alpha\\ \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\gamma + b_{\alpha\beta}n\\ \frac{\partial n}{\partial u^\alpha} = -b^\beta_\alpha r_\beta\end{cases}$$

称为曲面自然标架的**运动方程**。

§3.2　曲面结构方程

给定 $g_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$，解是否存在？

* 偏微分可交换：$\begin{cases}r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha} & (1)\\ r_{\alpha\beta\gamma} = r_{\alpha\gamma\beta} & (2)\\ n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha} & (3)\end{cases}$

直接利用结构方程知 (1) 即 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}, b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$。、

(2) 计算可得

$$\frac{\partial\Gamma^\xi_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma^\xi_{\eta\gamma} - \Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma^\xi_{\eta\beta} - b_{\alpha\beta}b^\xi_\gamma + b_{\alpha\gamma}b^\xi_\beta = 0 \quad \text{(Gauss)}$$

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \Gamma^\xi_{\alpha\beta}b_{\xi\gamma} - \Gamma^\xi_{\alpha\gamma}b_{\xi\beta} = 0 \quad \text{(Codazzi)}$$

引入 **Riemman 记号** $R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\delta\xi}\left(\frac{\partial\Gamma^\xi_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma^\xi_{\eta\gamma} - \Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma^\xi_{\eta\beta}\right)$，则计算知 Gauss 方程可写为 $R_{\delta\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}$。

* 此处为书中定义，老师讲义中 R 为此处相反数，两种定义都合理

练习. *利用第二类 Christoffel 符号说明*

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^\gamma\partial u^\alpha}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma\partial u^\delta}-\frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}+\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta\partial u^\delta})-\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma_{\eta\delta\gamma}+\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma_{\eta\delta\beta}$$

并进一步计算 R_{1212}，得到高斯绝妙定理。

(3) 计算可得 $\frac{\partial b^\xi_\beta}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial b^\xi_\gamma}{\partial u^\beta}=-b^\eta_\beta\Gamma^\xi_{\eta\gamma}+b^\eta_\gamma\Gamma^\xi_{\eta\beta}$，而将 b^β_α 展开后可发现其事实上与 Codazzi 方程等价。
由对称性，Gauss 方程只有一个独立方程

$$R_{1212}=-b$$

同理 Codazzi 只有两个独立方程

$$\begin{cases}\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}=b_{1\xi}\Gamma^\xi_{12}-b_{2\xi}\Gamma^\xi_{11}\\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}=b_{1\xi}\Gamma^\xi_{22}-b_{2\xi}\Gamma^\xi_{21}\end{cases}$$

这三个方程称为**曲面的结构方程**。

曲面论基本定理

定理 3.1. *唯一性*
同一个参数域上的两个曲面，若对应点第一、二基本形式都相同，则必然存在刚体变换使两者相等。

证明. 通过刚体变换与某点处 r_u,r_v 内积的结果可不妨设刚体变换使一点处的自然标架重合。此时从第一、二基本形式相同可知自然标架的任何微分处处相同，从而利用 PDE 的唯一性定理可知这时两者必然处处相等。 □

定理 3.2. *存在性*
给定 E,F,G,L,M,N，若从其得到的记号满足 Gauss 方程与 Codazzi 方程，且 $EG-F^2>0$ (即非零，确保有标架)，必然存在第一、第二基本形式符合这些量的正则曲面片。

证明. 将其看作对 r,r_1,r_2,n 的一阶线性偏微分方程组，利用 PDE 解的存在性定理可知其对任何点 r,r_α,n 给定的任何初值条件有解。取初值满足一点处 $\langle r^0_\alpha,r^0_\beta\rangle=g_{\alpha\beta}(u_0)$，$\langle r^0_\alpha,n^0\rangle=0$ 且 $\langle n^0,n^0\rangle=1$，且标架为右手系，两边内积可进一步验证这样解出的曲面任何点处第一、第二基本形式符合这些量。 □

* 作为一阶线性偏微分方程组，Gauss 方程与 Codazzi 方程事实上是活动方程的**可积性条件**

§3.3 正交活动标架

曲面自然标架 $\{r_u,r_v,n\}$，r_u,r_v 未必正交。
对曲线：$\{t(s),n(s),b(s)\}$ 为正交标架 [Frenet 标架]
曲面的标架运动方程见上节，而曲线的标架运动方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}t\\n\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\n\\b\end{pmatrix}$，注意到其中的系数矩阵是**反对称**的。
* 曲面比起曲线的困难：求导方向可以对二维上的任何方向 (可以归结为两个参数曲线的方向)
对 $V=a\frac{\partial}{\partial u_1}+b\frac{\partial}{\partial u_2}$ 方向求导，意义：参数平面上找曲线 $c(t)$ 使得 $c(0)=0,c'(0)=V$，则 V 方向求导事实上是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}r(c(t))$，于是任何方向求导可以看作**微分**

由此改造曲面活动方程：$\begin{cases}\mathrm{d}r=(\mathrm{d}u^\alpha)r_\alpha\\ \mathrm{d}r_\alpha=(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta)r_\gamma+(b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta)n\\ \mathrm{d}n=-(b^\gamma_\alpha\mathrm{d}u^\alpha)r_\gamma\end{cases}$

(其中 $\mathrm{d}r=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$)
进一步写作

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma^1_{1\beta}\mathrm{d}u^\beta & \Gamma^2_{1\beta}\mathrm{d}u^\beta & b_{1\beta}\mathrm{d}u^\beta\\ \Gamma^1_{2\beta}\mathrm{d}u^\beta & \Gamma^2_{2\beta}\mathrm{d}u^\beta & b_{2\beta}\mathrm{d}u^\beta\\ -b^1_\alpha\mathrm{d}u^\alpha & -b^2_\alpha\mathrm{d}u^\alpha & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\n\end{pmatrix}$$

* 当 e_1,e_2,e_3 为标准正交标架，类似构造矩阵 $A=(a_i^j)$，对 $\langle e_i,e_j\rangle$ 求导可发现其必然为**反对称阵**，能不能类似曲线 Frenet 标架更加优化，使得 a_1^3 与 a_3^1 为 0，从而只有两个自由度？

练习. 当 $\kappa=\sqrt{(a_1^2)^2+(a_1^3)^2}>0$ 时，不妨设 $a_1^2\neq 0$，计算说明，一定可以在 e_2,e_3 构成的平面对 e_2,e_3 作适当旋转使得 $a_1^3=0,a_1^2>0$。

* 对曲线，这样的条件下得到的恰好为 Frenet 标架

曲面的正交活动标架

* 对曲面，无法通过参数化使得 $\{r_u,r_v,n\}$ 为标准正交标架，因为这会导致高斯曲率为 0，对一般曲面不成立

定义 3.3. 光滑向量场
在曲面 $r(u,v)$ 上每点处给一个向量给 $X(u_0,v_0)$，且 $X(u,v)$ 对 u,v 光滑，则 X 称为曲面上的一个光滑向量场。

定义 3.4. 活动标架场
若任一点处 $\{r(u,v):X_1(u,v),X_2(u,v),X_3(u,v)\}$ 为 E^3 上标架，X_i 光滑，不失一般性假设 $(X_1,X_2,X_3)>0$，$\{r:X_1,X_2,X_3\}$ 其称为曲面上的活动标架场。
当 $\{X_1,X_2,X_3\}$ 为单位正交标架，则称为正交活动标架。

* 存在性：对 r_u,r_v 作 Schmit 正交化，即可与 n 得到正交活动标架

正交活动标架的运动方程

重新考虑 r_1,r_2：对任何参数平面 D 的切向量 $V\in T_p(D)$，有 $\mathrm{d}r(V)=r_1\mathrm{d}u^1(V)+r_2\mathrm{d}u^2(V)\in T_{r(p)}r(D)$，即将 $\mathrm{d}r$ 看作曲面上的切映射。
为了**与参数化脱钩**，对曲面的任何切向量 V，可直接在曲面上看求导方向：$\mathrm{d}r_\alpha(V)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}r_\alpha(c(t))$，类似其中 $c(t)=r(u(t),v(t))$。这样，u,v 可以看作曲面上的函数 (曲面上点 p 的 u,v 坐标，$r(u(p),v(p))=p$)，$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 也成为了曲面上的一形式。
于是，$\dfrac{\partial}{\partial u^1},\dfrac{\partial}{\partial u^2}$ 与 r_1,r_2 相对应 (这样的定义下即有 $\mathrm{d}u^i(r_j)=\delta_i^j$)。这时 $\mathrm{d}r(X)=r_i\mathrm{d}u^i(X)=X$。
假设 $\{r:e_1,e_2,e_3\}$ 为曲面的正交活动标架，$e_3=n$，下面考察运动方程 (由于相差线性组合，记 $r_\alpha=a_\alpha^\beta e_\beta$)。
计算 $\mathrm{d}r=r_\alpha\mathrm{d}u^\alpha=(a_\alpha^\beta e_\beta)\mathrm{d}u^\alpha$，记 $\omega^\beta=a_\alpha^\beta\mathrm{d}u^\alpha$，则 $\mathrm{d}r=\omega^\beta e_\beta$。
ω^i 的实际含义：给定切向量场 $X=X^\alpha r_\alpha$，则 $\omega^\alpha(X)=X^\eta a_\eta^\alpha=\langle X,e_\alpha\rangle,\alpha=1,2$，于是 ω^α 是 e_α 的**对偶一形式**。

定义 3.5. 曲面上的一形式
给定正则曲面片 M，其上的一形式定义为所有切向量集合上的函数，限制在每点 p 处的 $\phi:T_pM\to\mathbb{R}$ 是线性函数。
若对任何光滑向量场 X 有 $\phi(X)$ 光滑则称为光滑一形式。

性质：若曲面上光滑切向量场 V_1,V_2 逐点线性无关，一形式 Θ^1,Θ^2 为光滑一形式使得 $\Theta^\alpha(V_\beta)=\delta_\beta^\alpha$，则曲面片上任何光滑一形式 $\phi=\phi(V_\alpha)\Theta^\alpha$。

证明. $\phi(X) = X^\alpha\phi(V_\alpha) = \Theta^\alpha(X)\phi(V_\alpha) = (\phi(V_\alpha)\Theta^\alpha)(X)$。 □

于是，$\phi = \phi(e_\alpha)\omega^\alpha$，而设 $\mathrm{d}e_i = \omega_j^i e_j$，则只有 $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$ 三个独立分量。结合 $\mathrm{d}r = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$，运动方程归结为五个一形式。
基本形式 $I(V,W) = \langle V,W\rangle = \langle V,e_1\rangle\langle W,e_1\rangle + \langle V,e_2\rangle\langle W,e_1\rangle = (\omega^1\otimes\omega^1 + \omega^2\otimes\omega^2)(V,W)$，而 $II(V,W) = \langle V, \mathcal{W}(W)\rangle$，而设 Weingarten 变换在基 e_1,e_2 下为 $\mathcal{W}(e_\alpha) = h_\alpha^\beta e_\beta$，则计算 $\mathrm{d}n$ 可知 $\omega_3^\alpha = -h_\beta^\alpha\omega^\beta$，进一步推导知 $II = \omega^\alpha\otimes\omega_\alpha^3$。
性质：第一基本形式与正交活动标架的选取无关，第二基本形式与同法向正交活动标架选取无关。

证明. 当 e_3 固定为法向时，利用 $\mathrm{d}r$、$\mathrm{d}n$ 不变直接计算可发现若 $(\bar{\omega}^\alpha) = A(\omega^\alpha)$，则 $(\bar{\omega}_\alpha^3) = A(\omega_\alpha^3)$，又由两者都为正交标架可知 A 为正交阵，从而将 I, II 类似内积展开计算得结论。 □

* 当 e_1,e_2 每一点为主方向时，Weingarten 矩阵为 $h_i^j = k_i\delta_i^j$，从而 $II = k_\alpha\omega^\alpha\otimes\omega^\alpha$，$k_\alpha$ 为主曲率。
问题：是否存在？

练习. 证明对不是脐点的点 $p\in M$，有邻域存在上述标架。

*ω_1^2 是什么？

§3.4　曲面上的微分形式

零形式-曲面上的光滑函数
一形式-函数的微分

定义 3.6. 曲面上的二形式
M 是正则曲面片，η 定义为 $T_pM\times T_pM, \forall p\in M$ 上的函数，且满足每点处双线性性与反对称性 $\eta(v,w) = -\eta(w,v)$。
若 η 对任何光滑切向量场是光滑函数，则称为光滑二形式。

性质：$\eta(av+bw, cv+dw) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\eta(v,w)$

定义 3.7. 外积
假设 ϕ,ψ 为曲面上的一形式，定义 $\phi\wedge\psi(V,W) = \phi(V)\psi(W) - \psi(V)\phi(W)$，即 $\phi\wedge\psi = \phi\otimes\psi - \psi\otimes\phi$，则外积结果为二形式。

* 设 u_1,u_2 是 M 上处处无关的光滑切向量场，ψ^1,ψ^2 为两个一形式满足 $\psi^\alpha(u_\beta) = \delta_\beta^\alpha$，则 M 上任何 (光滑) 二形式 $\eta = \eta(u_1,u_2)\psi^1\wedge\psi^2$。

证明. 直接计算可知 $\eta(u_{1,2}) = \eta(u_1,u_2)\psi^1\wedge\psi^2(u_1,u_2)$，于是由于左右都为二形式，由二形式性质可知相等。 □

* 由于切平面最多有两个线性无关向量，类似上方定义三形式后会有线性相关，利用反对称性可知**恒为 0**，类似知更高次形式均恒为 0。

定义 3.8. 外微分
一形式 ϕ 的外微分 $\mathrm{d}\phi(r_u,r_v) = \frac{\partial}{\partial u}\phi(r_v) - \frac{\partial}{\partial v}\phi(r_u)$。
即 $\mathrm{d}\phi = (\frac{\partial}{\partial u}\phi(r_v) - \frac{\partial}{\partial v}\phi(r_u))\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$

* 计算可以发现与参数变换无关
* 利用偏导可交换知 $\mathrm{d}^2 = 0$
运算法则 (f 为零形式，ϕ,ψ 为一形式):

1. $\mathrm{d}(\phi+\psi)=\mathrm{d}\phi+\mathrm{d}\psi$
2. $\mathrm{d}(f\phi)=\mathrm{d}f\wedge\phi+f\mathrm{d}\phi$

正交标架下的结构方程

由曲面外微分运算的要求需要 $\mathrm{d}(\mathrm{d}r=0),\mathrm{d}(\mathrm{d}e_i)=0$，结合运动方程 $\mathrm{d}r=\omega^\alpha e_\alpha$ 计算可知

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega^1-\omega^2\wedge\omega_2^1=0\\ \mathrm{d}\omega^2-\omega^1\wedge\omega_1^2=0\\ \omega^\alpha\wedge\omega_\alpha^3=0\end{cases}$$

性质：前两个方程可唯一确定 ω_1^2。

证明. 设 $\mathrm{d}\omega^1=a\omega^1\wedge\omega^2,\mathrm{d}\omega^2=b\omega^1\wedge\omega^2$，可验证 $\omega_1^2=a\omega^1+b\omega^2$ 为解，若此解不唯一，作差可知其差与 ω^1,ω^2 外积都为 0，从而只能为 0。 □

* 设 $\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$，则 $\bar{\omega}_1^2=\omega_1^2+\mathrm{d}\theta$，而若复合反射 (法向变为相反) 有 $\bar{\omega}_1^2=-\omega_1^2-\mathrm{d}\theta$。

而外微分条件结合 $\mathrm{d}e_i=\omega_i^j e_j$ 可知 $\mathrm{d}\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k,i,k=1,2,3$。其中实际上的独立方程有 $\mathrm{d}\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2$ 与 $\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1^3=\omega_1^2\wedge\omega_2^3\\ \mathrm{d}\omega_2^3=\omega_2^1\wedge\omega_1^3\end{cases}$，前者即为 Gauss 方程，后者为 Codazzi 方程。

Gauss 方程：考虑 Weingarten 变换在正交标架下的矩阵，可以发现 $\mathrm{d}\omega_1^2=-K\omega^1\wedge\omega^2$，即 $K=-\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$，事实上是**高斯绝妙定理**。

* 注意求和中指标范围 1 到 2 与 1 到 3 的区别

* 考虑 E^3 上的正交活动标架，也可以类似定义 $\omega^\alpha,\omega_\alpha^\beta$，$\alpha,\beta=1,2,3$，考虑到反对称性事实上有六个独立分量。类似可得结构方程为 $\mathrm{d}\omega^j=\omega^i\omega_i^j,\mathrm{d}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j$。而曲面上的标架可以小范围延拓成三维欧氏空间上的标架，即可以看作上方 $\omega^3=0$ 的情况。

正交标架选取

若 $\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$，有 $\begin{pmatrix}\bar{\omega}_1\\ \bar{\omega}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}\bar{\omega}_1^3\\ \bar{\omega}_2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}$

假设 $r_\alpha=a_\alpha^\beta e_\beta$，可以发现 $\omega^\alpha=a_\beta^\alpha\mathrm{d}u^\beta$，即相差转置。于是 $\omega^1\wedge\omega^2=\det(A)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$，利用 Weingarten 变换矩阵表示可以算出 $\det(A)=\sqrt{EG-F^2}$，不依赖正交活动标架选取，由 $\omega_1^3\wedge\omega_2^3=\det(\mathcal{W})\omega^1\wedge\omega^2$ 可知 $\omega_1^3\wedge\omega_2^3$ 也不依赖，类似知 $\omega^1\wedge\omega_2^3-\omega^2\wedge\omega_1^3$ 亦不依赖。

* 计算可知 $\omega^1\wedge\omega_2^3-\omega^2\wedge\omega_1^3=h_\alpha^\alpha\omega^1\wedge\omega^2=2H\omega^1\wedge\omega^2$

应用：可展曲面

给定正则曲面片，其主曲率 k_1,k_2 为常函数且不等 (无脐点)，如何分类？

* 圆柱面为简单的例子，是否唯一？

由无脐点，可以构造正交活动标架使得 e_1,e_2 为主方向，这时 Weingarten 变换在基下的矩阵表示为 $\mathrm{diag}(k_1,k_2)$，于是 $\omega_1^3=k_1\omega^1,\omega_2^3=k_2\omega^2$。

求微分得 $\mathrm{d}\omega_1^3=k_1\mathrm{d}\omega^1=k_1\omega^2\wedge\omega_2^1$，另一方面其为 $\omega_1^2\wedge\omega_2^3=k_2\omega_1^2\wedge\omega^2$，联立即有 $(k_1-k_2)\omega_1^2\wedge\omega^2=0$，同理 $(k_1-k_2)\omega_1^2\wedge\omega^1=0$，得到 $\omega_1^2=0$，于是高斯曲率为 0，$k_1k_2=0$。

不妨设 $k_2=0$，有 $\omega_1^3=k_1\omega_1,\omega_2^3=\omega_1^2=0$。此时标架运动方程变为 $\mathrm{d}e_1=k_1\omega^1e_3,\mathrm{d}e_2=0,\mathrm{d}e_3=-k_1\omega^1e_1$。由于 e_2 为常向量，取一个垂直于 e_2 过曲面上一点得平面解得一条曲线 c_1，弧长参数下 (调整正负) 曲线

的切向量即为 e_1。这时 e_1, e_2, e_3 成为 Frenet 标架，限制在曲线上有 $(e_1)_s = k_1 e_3, (e_3)_s = -k_1 e_1$，对比平面曲线运动方程可发现曲率恒为为 k_1，于是曲线必然为圆。另一方面，对某点 P 处，找曲线 $c_2(t)$ 满足 $\frac{\mathrm{d}c_2(t)}{\mathrm{d}t} = e_2(t)$，且 $c_2(0) = P$，可发现其必然为直线。综合上方讨论可知此曲面片必然为圆柱面。

* 性质推广：曲面片 M 高斯曲率为 0 且无脐点，则其必然为直纹面 (从而为可展曲面)

证明. 仍然取 e_1, e_2 为主方向的正交活动标架，两主曲率为光滑函数。由于高斯曲率处处为 0，可不妨设 $k_1 \neq 0, k_2 = 0$(不可能发生转换，否则会产生脐点)。类似上方可推导出 $0 = \mathrm{d}\omega_2^3 = k_1 \omega_2^1 \wedge \omega^1$. 设 $\omega_1^2 = f\omega^1 + g\omega^2$，可知 $g = 0$。
由运动方程知 $\mathrm{d}e_2 = -f\omega^1 e_1$。依然类似上方寻找 $c(s)$ 使得 $\frac{\mathrm{d}c(s)}{\mathrm{d}s} = e_2(s)$，且 $c(0) = P$，由 ODE 理论可知局部存在唯一解。而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e_2(s) = \mathrm{d}e_2(e_2) = -fe_1\omega^1(e_2) = 0$，于是局部为直线，从而可延拓到整体的直线，即证明了其为直纹面。 □

四　曲面的内蕴几何

§4.1　测地线与协变导数

* 高斯绝妙定理保证了等距变换下第一基本形式不变，于是高斯曲率不变。反之，若不存在保持高斯曲率的变换，则不可能等距同构 (如球面与平面)。
* 内蕴几何即为**等距变换下不变的几何**
对球面三角形，利用初等几何可以发现满足 $\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \frac{S(\triangle ABC)}{R^2}$，有 $\int_{\triangle ABC} K\mathrm{d}S = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$，其中 S 代表面积元，K 代表高斯曲率。
* 对任何**测地三角形** [测地线构成的三角形] 都对
测地线为连接曲面上两点的最短光滑曲线，设 L 为连接 P, Q 两点的光滑曲线到 $\mathbb{R}$ 的函数，利用变分进行计算。
对测地线 $C : r(s) = r(u^1(s), u^2(s)), s \in (0, l)$，可取曲面正交标架使得 C 上 $e_1 = r_s, e_3 = n$[Darbour 标架]。设沿着 C 有 $e_2 = a^i r_i$，假设 f 为 $[0, l]$ 上任一两端为零光滑函数，考虑曲线的变分

$$r^\lambda(s) = r(u^1(s) + \lambda f(s)a^1(s), u^2(s) + \lambda f(s)a^2(s)), \lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$$

它满足 $r^0(s) = r(s), \frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} = f(a^i r_i) = f(e_2), r^\lambda(0) = P, r^\lambda(l) = Q$。
利用条件，假设其长度为 $L(\lambda)$，必有 $L_\lambda(0) = 0$。而交换求导次序计算知

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\int_0^l \left|\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial s}\right| \mathrm{d}s\bigg|_{\lambda=0} = -\int_0^l f\left\langle e_2, \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right\rangle \mathrm{d}s$$

由于 f 的任意性，测地线应满足处处 $\left\langle e_2, \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0$。

定义 4.1. 测地线
曲面上的弧长参数曲线 $r(s)$，若其 Darbour 标架满足处处 $\left\langle e_2, \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right\rangle = 0$，则称为一条测地线。

* 例：平面上的直线 e_1 不变，是测地线
* 沿测地线线 t_s 只有曲面法向量方向的分量，测地线等价于**主法向量垂直曲面**的曲线

定义 4.2. 测地曲率
曲面上的弧长参数曲线 $r(s)$，由其 Darbour 标架计算的 $\left\langle e_2, \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right\rangle$ 为曲面沿着曲线的测地曲率。

* 根据法曲率几何意义可知 $e_{1s} = r_{ss} = k_g e_2 + k_n e_3$，于是 $\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2$。
* 由于 $k_g = \langle \mathrm{d}e_1(e_1), e_2\rangle = \omega_1^2(e_1)$，而由于 $\omega^1(e_1) = 1$，限制在曲线上有 $k_g \omega^1 = \omega_1^2$。

当 u,v 为正交参数时，利用 ω_1^2 可化简参数曲线上的测地曲率，即 $k_g(u)=-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}, k_g(v)=\frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}$。假设弧长参数曲线 $r(s)$ 在某点处与 u 线的夹角为 θ，利用 $\bar{\omega}_1^2=\omega_1^2+\mathrm{d}\theta$ 进一步算得 k_g 为 [Liouville 公式]

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}\sin\theta$$

利用自然标架，可算出

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}s^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\right)r_\alpha+\left(b_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)n$$

于是法曲率 $k_n=\langle r_{ss},n\rangle=II(e_1,e_1)=\langle\mathcal{W}(e_1),e_1\rangle$，测地曲率 $k_g=\langle r_{ss},n\wedge r_s\rangle$。定义 $\kappa_g=\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\right)r_\alpha$ 为**测地曲率向量**，用 Darbour 标架可以写成 $\langle(e_1)_s,e_2\rangle\,e_2=k_ge_2$。
从而，一条曲线为测地线当且仅当 $\frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}=0,\alpha=1,2$[仅由**第一基本形式**决定]。此为非线性常微分方程，只能确定解**局部存在**。

定理 4.3. 测地线存在唯一性
对正则曲面 M，$r=r(u,v)$，对任何 $p\in M,V\in T_pM$，则 $\exists\varepsilon>0,r=r(s),s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 为测地线，满足 $r(0)=p,r_s(0)=V$。

证明. 将初值作为上方常微分方程的初值，利用解的存在唯一性定理即得证。 □

* 可验证测地曲率向量在参数化改变时不变，从而与**协变导数**相关

协变导数
考虑沿曲线的切向量场 $r_s=V^\alpha r_\alpha$ 为切向量场，其再求导 r_{ss} 未必是切向量场，如何转化为切向量场？(去除法向分量)

定义 4.4. 协变导数 *Covariant derivative along a curve*
正则曲面片 $M:r=r(u,v)$，上有一条正则曲线 $C:r=r(t)$，假设 V 是沿曲线的光滑切向量场，$V(t)\in T_{r(t)}M$，定义 V 沿 C 的协变导数 $\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}-\left\langle\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t},n\right\rangle n$。

* 计算自然标架下 $V=V^\alpha r_\alpha$，可得到 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}V^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\right)r_\alpha+\left(b_{\alpha\beta}V^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)n$，于是即有 $\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}V^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\right)r_\alpha$。
* 于是测地线可刻画为 $\frac{\mathrm{D}e_1}{\mathrm{d}s}=0$
* 协变导数只由第一基本形式确定，在正则参数变换下不变
* 不依赖参数化的意义：曲面片相交处会有不同参数化，不依赖代表可以在**整体曲面**上定义
性质：假设 V,W 是曲线 C 上的两个光滑切向量场，f 是沿曲线光滑函数，则有：

1. $\frac{\mathrm{D}(V+W)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}$
2. $\frac{\mathrm{D}(fV)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}V+f\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$
3. $\frac{\mathrm{d}\langle V,W\rangle}{\mathrm{d}t}=\left\langle\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t},W\right\rangle+\left\langle V,\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}\right\rangle$

* 性质 3 证明：先写出 d，再由与切向量内积可将 d 换为 D

§4.2 平行移动

定义 4.5. *Levi-Civita* 平行
正则曲面片 $M:r=r(u,v)$，上有一条正则曲线 $C:r=r(t)$，假设 V 是沿曲线的光滑切向量场，若 $\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=0$，则称切向量场沿曲线 C 是平行的。
在此情况下，称 $V(t_1)$ 是由 $V(t_2)$ 沿 C 作平行移动得到。

* 平移的存在性？唯一性？[本质还是 ODE 问题，由于其为线性，整体存在唯一解]
* 测地线另一等价说法：$e_1(s)$ 沿 $r = r(s)$ **平行**。
利用上方性质 3，假设 V, W 是沿曲线平行的光滑切向量场，可以得到 $\langle V, W\rangle$ 不变，从而“平行移动”是**保持内积**的 (保长、保角)。于是，对曲面片上两点 p, q，取一条曲线 C，可以定义映射 $PT_C : T_p(M) \to T_q(M)$，由平行移动得来。由于保内积，可以得到线性性等，进一步推出 PT_C 为内积空间的同构。于是，协变导数有时也称为**联络**。
* 反过来，有联络就有平行移动，从而可以考虑不同点切平面张量的差距，可以定义导数
* 平移的结果与曲线选取**有关**，于是切向量沿闭曲线绕一圈后未必为原向量，事实上与高斯曲率有关
* 若两曲面 M_1, M_2 沿着某曲线 C 相切，即 C 上对应点处切平面相同，则 $V(t)$ 在 M_1 上沿 C 平行等价于 $V(t)$ 在 M_2 上沿 C 平行 (可用于简化计算)

考察沿曲线平移的方法：假设有一条曲面上的正则曲线 $r = r(t)$，考虑其每点处切平面上与曲线切向量垂直的向量方向构成的切线面 (有局部正则性)，切线面可以展开成平面，从而变为欧氏空间上平移考察。
例：球面的纬线圈，赤道处会如此展为柱面，否则为锥面。假设纬度 (在上半球中) 为 ψ，可作锥面展开，计算可知扇形的圆心角 $\theta = 2\pi \sin\psi$。通过考察平面中平移可发现，切向量沿纬线圈平行移动一圈后，转过的角度即为 θ[物理：**傅科摆**证明地球自转]。
关于测地线问题：
是否全局最短？[未必]
任意两点之间是否存在测地线？[取决于曲面的完备性，如圆盘挖掉一点后相对的点间不存在测地线]
测地线是否唯一？[未必，且无上界，如球面对径点间]
* 对圆柱面，可发现任何圆柱螺线都是测地线，因此不在同一纬线圈上会有无穷多条。

练习. 考察张角为 θ 圆锥面两点间测地线条数最多最少。

* 测地线具有**局部**最短性
思路：如何证明两点间直线最短？考察挖去原点的极坐标系，计算极坐标系上的第一基本形式可得 $I = \mathrm{d}\rho \otimes \mathrm{d}\rho + \rho^2 \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta$，于是切向量长度 $|r'(t)| \geq |r_\rho(t)|$，后者恰好是直线对应参数化下的的切向量长度。
建立曲面上一点处极坐标系：
指数映射 $\exp_p : T_p^M \to M$，$\exp_p(V) = \gamma(\frac{V}{|V|}, |V|)$，其中 γ 是过 p 点以 $\frac{V}{|V|}$ 为单位切向量的弧长参数测地线在 $s = |V|$ 处的点 (即沿指定方向走过指定弧长的测地线)。利用解对初值的连续性可知此映射一定对模长充分小的 V 存在 [由于 S^1 紧，对每点存在必有最小值]，且若对 V 由定义一定对 $tV, 0 < t < 1$ 有定义。
*$|V|$ 取定称为以 p 为心的**测地圆**
由于 T_p^M 即为二维欧氏空间，考虑其上的一组基后，指数映射也是曲面的**参数化**。下面说明 $r(x^1, x^2) = \exp_p(x^1 e_1 + x^2 e_2)$ 是 p 附近的正则参数化：

证明. 由于存在参数化 $r = r(u^1, u^2)$ 使得 p 点处有 $\langle r_\alpha, r_\beta\rangle\big|_p = \delta_\alpha^\beta$，取 $e_1 = r_1, e_2 = r_2$，说明正则性只需说明 $r_{x^1} \wedge r_{x^2} \neq 0$ 在 p 点成立 (根据光滑即得局部成立)，计算参数变换可知等价于 $\det\left(\frac{u^\alpha}{x^\beta}\right)\big|_p \neq 0$。
事实上，p 点处此矩阵为**单位阵**，从而结论成立。看法：考虑测地线自身的参数化代入计算。 □

* 称 (x^1, x^2) 为 P 点处的**法坐标系**，此坐标系在 P 点处的 $r_1 = r_{x^1}, r_2 = r_{x^2}$ 标准正交，从而第一基本形式 $g_{\alpha\beta}(P) = \delta_\alpha^\beta$，且这点处 Christoffel 符号都为 0，从而推出 $g_{\alpha\beta,\gamma}(P) = 0$。
*$g_{\alpha\beta,\gamma}(P) = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\langle r_\alpha, r_\beta\rangle = \left\langle \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta r_\eta, r_\beta\right\rangle + \left\langle r_\alpha, \Gamma_{\beta\gamma}^\eta r_\eta\right\rangle = \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta(P) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(P)$
* 证明 Christoffel 符号都为 0：利用测地线方程与参数区域上极坐标直接计算。

定理 4.6. 高斯引理
从 M 上一点 P 出发的测地线与以 P 为心的测地圆正交。

证明. 在法坐标系上作参数变换将欧氏坐标化为极坐标 (ρ,θ)[这时称为**测地极坐标系**，可发现除原点外正则]，计算可知 $\lim_{\rho\to 0}F(\rho,\theta)=0$，且 $F_\rho=0$[可通过内蕴或外蕴角度计算]，于是 $F=0$，得证。 □

* 测地极坐标系中，θ 线为测地圆，ρ 线为测地线

定理 4.7. *设 $p\in M$ 为一点，总存在一个邻域 U 使得对 U 中任意 q，落在 U 内的连接 pq 的测地线长度为所有连接 pq 的曲线的最短长度。*

证明. 取充分小 U 使得其上有极坐标系，指数映射对应的 $|V|<\varepsilon$，对 U 内的曲线 $C:r(t),r\in(0,t_0)$，$L(C)=\int_0^{t_0}\sqrt{\rho_t^2+G(\rho,\theta)\theta_t^2}\mathrm{d}t\geq\int_0^{t_0}\sqrt{\rho_t^2}\mathrm{d}t=|\rho(t_0)-\rho(0)|=\rho_0$。若不完全落在 U 内，可以取落在内部的部分估算，得到长度大于等于 ε，从而不影响最短。 □

* 问题：测地极坐标系下高斯曲率？
由于其为正交活动标架，直接计算可知 $\omega_1^2=\frac{(\sqrt{G})_\rho}{\sqrt{G}}\omega^2$，进一步得到 $K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$。[当 K 为常数时，可以直接解出第一基本形式。]
性质：测地极坐标系下有 $\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0$、$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=1$。

证明. 回到测地法坐标系进行计算，$\sqrt{G}=\sqrt{g_{\alpha\beta}x_\theta^\alpha x_\theta^\beta}$，利用测地法坐标系性质可算出结果。 □

练习. *考虑曲线 $C(s)$，每点作与曲线切向量垂直的测地线，考虑 $F=\langle r_\rho,r_s\rangle$，有 $F(0,s)=0$，F_ρ 是否为 0?*

测地三角形内角和

定理 4.8. *测地三角形内角和-基础形式*
曲面上三个点之间两两用测地线连接得到测地三角形，假设它们落在以 A 为心的测地极坐标系之内，且连接 A 与 BC 中间某点的测测地线 $\alpha(s)$ 坐标可以写为 $(f(\theta(s)),\theta(s))$，则有 $\iint_{\triangle ABC}K\mathrm{d}V=\angle A+\angle B+\angle C-\pi$(角定义为测地线切向量在切空间中夹角)。

证明. 此时 $\iint_{\triangle ABC}K\mathrm{d}V=\iint_{\triangle ABC}-(\sqrt{G})_{\rho\rho}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\angle A}(1-(\sqrt{G})_\rho f(\theta))\mathrm{d}\theta$。

考虑 BC 与每条 $\alpha(s)$ 的夹角 $\varphi(s)$，有 $\varphi(0)=\pi-\angle B,\varphi(s_0)=\angle C$，且 $\begin{cases}\cos\varphi(s)=\langle\alpha'(s),r_\rho\rangle\\ \sin\varphi(s)=\left\langle\alpha'(s),\frac{r_\theta}{\sqrt{G}}\right\rangle\end{cases}$。假设 $\alpha(s)$ 每点坐标 $(\rho(s),\theta(s))$，对第一个式子求导可得到 $-\sin\varphi(s)\varphi_s=\langle r_\rho\rho_s+r_\theta\theta_s,r_{\rho\rho}\rho_s+r_{\rho\theta}\theta_s\rangle$(消去由测地线知为零的 $\alpha''(s)$)，化简得 $-\sin\varphi(s)\varphi_s=\frac{1}{2}G_\rho(\theta_s)^2$。而第二个式子可以化简为 $\sin\varphi(s)=\sqrt{G}\theta_s$，代入得 $\varphi(s)=-(\sqrt{G})_\rho\theta_s$。于是 $\int_0^{\angle A}-(\sqrt{G})_\rho f(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^L-(\sqrt{G})_\rho\theta_s\mathrm{d}s=\angle C+\angle B-\pi$，从而得证。 □

§4.3 局部 Gauss-Bonnet 公式

测地曲率的加入
利用 Liouville 公式，计算可知测地极坐标系下对测地线有 $\varphi_s+\frac{\sqrt{G}_\rho}{\sqrt{G}}\sin\varphi(s)=0$，而 $\sin\varphi(s)=\left\langle\alpha_s,\frac{r_\theta}{\sqrt{G}}\right\rangle=\left\langle r_\theta\theta_s,\frac{r_\theta}{\sqrt{G}}\right\rangle=\sqrt{G}\theta_s$，于是 $\varphi_s+\sqrt{G}_\rho\theta_s=0$。
一般情况下 $k_g(s)=\varphi_s+\sqrt{G}_\rho\theta_s$，于是对测地线 AB、AC，BC 未必为测地线时，进行积分可算出 (以下 AB 记为 γ，AC 记为 β，BC 记为 α)：

Gauss-Bonnet I:
在三角形 ABC 中，β,γ 为测地线，三点都落在以 A 为心的测地极坐标系中，α 在极坐标系下坐标写成 $(f(\theta),\theta)$，则有

$$\iint_{\triangle ABC}K\mathrm{d}V=\angle A+\angle B+\angle C-\pi-\int_0^{l(\alpha)}k_g(s)\mathrm{d}s$$

Gauss-Bonnet II:
多边形 $A_1,\ldots,A_n$ 落在内部某点 O 为心的测地极坐标系中，且每条边可在极坐标系下写成 $(f_i(\theta),\theta)$，即只与径向**相交一次**，则记区域为 D 有：

$$\iint_D K\mathrm{d}V+\int_{\partial D}k_g(s)\mathrm{d}s=\sum_i\angle A_i-(n-2)\pi=-\sum_i(\pi-\angle A_i)+2\pi$$

Green 公式：对平面定向分段光滑简单闭曲线 C 围成区域 D，对区域中任何光滑函数 f,g，有

$$\oint_C f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y=\iint_D(g_x-f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Gauss-Bonnet III:
考虑 D 和去掉绕 O 的某小圈和一条径向的长条后的连通区域 D_ε，D_ε 高斯曲率的积分极限与 D 相同，于是：

$$\iint_D K\mathrm{d}V=\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{D_\varepsilon}-\sqrt{G}_{\rho\rho}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\lim_{\varepsilon\to0}\oint_{C_\varepsilon}-\sqrt{G}_\rho\mathrm{d}\theta=2\pi+\int_{\partial D}(\varphi_s-k_g)\mathrm{d}s$$

由此可以不要求能写成 $(f_i(\theta),\theta)$。

对不同点的测地极坐标系进行拼接，最终得到

定理 4.9. *Gauss-Bonnet* 定理
对曲面 M 上一条分段光滑简单闭曲线 C，围成单连通区域 D，则有

$$\iint_D K\mathrm{d}V+\int_C k_g(s)\mathrm{d}s+\sum_i(\pi-\angle A_i)=2\pi$$

* 另一个证明思路：由 $K=\frac{-\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$，对微分形式进行积分，乘面积元即对 $-\mathrm{d}\omega_1^2$ 积分，靠 **Stokes 定理**可计算出结论。

应用：**角差**

定理 4.10. 平行移动角差
对曲面上光滑简单闭曲线 $C:r=r(s),s\in[0,l]$，围成单连通区域 D，其上的 *Darbour* 标架 $\{r:e_1,e_2,n\}$。沿曲面平行的单位切向量场 $V(s)$，记 $V(s)$ 与 $e_1(s)$ 夹角 $\beta(s)$，有 $\beta(l)-\beta(0)=\iint_D K\mathrm{d}V$.

证明. 利用 $V=\cos\beta e_1+\sin\beta e_2$ 直接代入计算得 $\iint_D K\mathrm{d}V=\int_0^l\beta_s\mathrm{d}s$。 □

* **角度函数**

定理 4.11. $C:r=r(s),s\in I$ 为弧长参数正则曲线，V,W 为沿其的处处非零光滑切向量场，则存在光滑函数 $\varphi(s),s\in I$ 满足 $\frac{W}{|W|}=\cos\varphi\frac{V}{|V|}+\sin\varphi J\big(\frac{V}{|V|}\big)$，其中 n 为曲面法向量，$J:S^1\subset T_pM\to S^1\subset T_pM,J(V)=n\wedge v$，于是 $\{V,J(V),n\}$ 构成正交活动标架，这时 φ 称 V 到 W 的有向角。

证明. 不妨设两切向量场已被单位化，则存在 $W=fV+gJ(V)$，f,g 从内积得到，光滑，且由单位知 $f^2+g^2=1$。在一点 s_0 处，可取到 $\varphi(s_0)\in[0,2\pi)$，$f(s_0)=\cos s_0,g(s_0),\sin s_0$。由此构造 $\varphi:I\to\mathbb{R},\varphi(s)=\varphi(s_0)+\int_{s_0}^s(fg'-f'g)\mathrm{d}s$
计算可知 $L(s)=(f-\cos\varphi)^2+(g-\sin\varphi)^2$ 的导数为零 (需要利用 $ff'=gg'$)，从而得证。 □

* 角差计算中存在**定向**问题

平面曲线

对光滑简单闭曲线，此时高斯曲率为 0，有 $2\pi=\oint_{\partial D}k_g\mathrm{d}s$，而利用定义可发现 k_g 恰为平面曲线在定向下的**带符号曲率**。于是对平面光滑简单闭曲线 $r=r(s),s\in[0,l]$，且 $0,l$ 处各阶导函数 (包含 0) 相等。记 κ 为带符号曲率，则 $2\pi=\oint_C\kappa(s)\mathrm{d}s$，此处积分定向选取与曲线定向一致。

定义 4.12. 旋转指数 *Rotation Index*
定义 $i=\frac{1}{2\pi}\int_0^l\kappa(s)\mathrm{d}s$ 为闭曲线的旋转指数。

性质；考虑 $r_s=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2$，$\theta$ 取 e_1 到 r_s 的有向角，则

$$\int_0^l\kappa(s)\mathrm{d}s=\int_0^l\langle r_{ss},J(r_s)\rangle\,\mathrm{d}s=\int_0^l\theta_s\mathrm{d}s=\theta(l)-\theta(0)$$

§4.4 整体 Gauss-Bonnet 公式

全曲率

* 定义为高斯曲率在整个曲面上的积分，计算可知球面积分结果为 4π，环面积分结果为 0[同一条线上反向算两次]。

练习. 证明旋转面上两条纬线间的全曲率为 $2\pi(\sin\varphi(a)-\sin\varphi(b))$，其中 a,b 为纬线上 u 的取值，φ 为这点处沿母线切向量和 $(0,1)$ 夹的有向角。

定义 4.13. E^3 整体曲面
E^3 的一个子集 M 称为 E^3 中的光滑曲面，若对子集中任何点，存在 E^3 中邻域 $\mathcal{V}$ 与一个映射 $r:U\subset E^2\to\mathcal{V}\cap M$，其中 U 为开集，r 是一个可逆的正则参数化。

* 也可定义为一族正则曲面片，且两个正则曲面片交的部分有光滑的正则参数变换
* 球面可由去掉上顶点与去掉下顶点的两个曲面片覆盖。

定义 4.14. 可定向曲面
若 $M=\bigcup_\alpha M_\alpha$，使得每个正则曲面片上可选取一个单位法向量 n_α，使得任何两个曲面片的交处 $n_\alpha=n_\beta$，则称其可定向，否则不可定向。

* 球面、柱面、环面可定向，莫比乌斯带不可定向。
性质：光滑曲面 M 可定向等价于 M 上存在**处处非零**二形式。

证明. 由定义可知可定向 $\Leftrightarrow$ 存在整体的光滑单位法向量场 n，即对每点 p 有 $n(p)$ 在一点处为曲面法向，此外，二形式在一点处为 0$\Leftrightarrow$ 此点任意一对切向量映射到 0，
左推右：对法向量场 u，定义二形式 μ，一点 $p\in M$ 处 $\mu_p:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$，$\mu_p(v,w)=(n(p),v,w)$，可验证其为光滑二形式，取 v,w 线性无关即有一点处非零。
右推左：对处处非零二形式 μ，定义向量场 n，一点 $p\in M$ 处找线性无关切向量 v,w，$n(p)=\frac{v\wedge w}{\mu(v,w)}$。若有另一对线性无关切向量 v',w'，利用双线性反对称计算可知 n 不改变，从而 n 为光滑法向量场。 □

定义 4.15. 紧致曲面
当曲面 M 是有界闭集时称为紧致曲面。

* 其存在有限子覆盖，从而可分取有限个正则曲面片拼成
* 类似平面 **Jordan 曲线定理**可以说明任何紧致曲面把空间分为了内部和外部，从而可定向。

曲面的三角剖分

* 称曲面上的三边形围成的三角形区域为二维的面，其边称为一维的面，顶点称为零维的面。

定义 4.16. 曲面的三角剖分

M 上的一族三角形区域 T_α，满足并集为整个曲面、任意两个交集若非空则为各自的零维或一维的面，且包含每点的三角形个数有限。

性质：紧致曲面上总存在二维面数有限的三角剖分 (拓扑中证明)。

* 记不同的二维面、一维面、零维面个数为 F, E, V。考虑对三角形的进一步划分可感受曲面三角剖分的 $V - E + F$ 为定值 (事实上其为拓扑不变量)，称为**欧拉示性数**，记作 $\chi(M)$。

定理 4.17. 整体 *Gauss-Bonnet* 定理

设 M 是 E^3 中紧致光滑曲面，则有

$$\iint_M K\mathrm{dV} = 2\pi\chi(M)$$

证明. 取 M 的一个三角剖分，设每个 T_i 上的内角为 $\angle A_i, \angle B_i, \angle C_i$，对每片利用局部的 Gauss-Bonnet 公式，由于整体可定向可以发现每条边 k_g 项被反向积分两次，于是被抵消。最终得到 $2\pi F = \iint_M K\mathrm{d}V + 3\pi F - \sum_i(\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i)$，所有面上所有角加和即 $2\pi V$，又由于 $3F = 2E$ 可得结果。 □

* 于是任何等距变换全曲率不变
* 事实上对任何紧致可定向光滑曲面都对，未必需要嵌入 E^3
* 拓扑结论：这样的曲面的拓扑可以由**亏格**个数 g 确定，欧拉示性数为 $2-2g$。反过来，这个定理代表了几何量可以确定拓扑。

* 应用：**处处非零切向量场**

对紧致曲面，若存在这样的 V，可单位化出整体的 e_1，再结合整体 n，有整体的正交活动标架。于是利用正交活动标架有全曲率为 $\iint_M -\omega_1^2$，而利用 Stokes 公式，由于边界为空，全曲率必须为 0，于是 M 同胚于环面。

五 几个重要定理

(见补充定理部分讲义)