张量积形式

1. 线性空间中的情况

回忆一下，我们在线性代数中证明过如下性质：设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间，则其对偶空间 V^*，即 V 上线性函数的空间，也是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间

进一步，若 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 V 的一组基，则 V^* 有一组对偶基 $\{w^i\}_{i=1}^n$ 满足 $w^i(e_j)=\delta^i_j$.

下面考虑两个线性空间 V，W 及其上的双重线性函数全体 $V^*\otimes W^*$，即若 $T\in V^*\otimes W^*$，则 $T: V\times W\to\mathbb{R}$，$(v,w)\mapsto T(v,w)$ 对每个分量都是线性的，最简单的例子由下给出

Def：设 $f\in V^*$，$g\in W^*$，其**张量积** $f\otimes g$ 定义为

$$f\otimes g: V\times W\to\mathbb{R},\ (v,w)\mapsto f(v)g(w)$$

则 $f\otimes g\in V^*\otimes W^*$. 注意到 $V^*\otimes W^*$ 是线性空间，且

$$\otimes: V^*\times W^*\to V^*\otimes W^*,\ (f,g)\mapsto f\otimes g$$

是双线性映射，故若 $\{w^i\}_{i=1}^n$，$\{v^j\}_{j=1}^m$ 分别为 V^*，W^* 的基，则 $\forall\, a_iw^i\in V^*$，$b_jv^j\in W^*$，有 $(a_iw^i)\otimes(b_jv^j)=a_ib_jw^i\otimes v^j$.

Prop：$V^*\otimes W^*$ 有基 $\{w^i\otimes v^j\}_{1\le i\le n,1\le j\le m}$，进而为 $\mathbb{R}$ 上 $n\times m$ 维线性空间.

证：显然 $\{w^i\otimes v^j\}$ 无关，且 $\forall T\in V^*\otimes W^*$，令 $\bar{T}=T(e_i,f_j)w^i\otimes v^j$，

其中 $\{w^i\}$ 与 $\{e_i\}$，$\{v^j\}$ 与 $\{f_j\}$ 互为对偶，且 $\forall\, a^ie_i\in V$，$b^jf_j\in W$，

有 $T(a^ie_i,b^jf_j)=a^ib^jT(e_i,f_j)=\bar{T}(a^ie_i,b^jf_j)$，故 $T=\bar{T}$，使 $\{w^i\otimes v^j\}$ 为 $V^*\otimes W^*$ 基

#

注意到有限维时，有自然同构 $V \cong V^{**}$，故可依此定义 $V\otimes W$，

且若定义 $f\otimes g(v\otimes w) \triangleq f(v)g(w)$，$\forall f\in V^*$，$v\in V$，$g\in W^*$，$w\in W$，

则 $\{e_i\otimes f_j\}$，$\{w^i\otimes v^j\}$ 互为对偶，故 $V^*\otimes W^* = (V\otimes W)^*$

于是归纳可定义 $\otimes^{r,s}V \triangleq \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s}$ 为 $V^{*r}\times V^s$

上的多重线性函数，且有基 $\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes w^{j_1}\otimes\cdots\otimes w^{j_s}\}_{1\le i_k,j_l\le n}$

$\otimes^{r,s}V$ 中元素称为(r,s)型张量

注意我们有如下的坐标变换公式，设有另一对基 $\{\bar{e}_k\}$，$\{\bar{w}^l\}$，

相应变换关系 $e_i = \alpha_i^k \bar{e}_k$ 和 $w^j = \beta_l^j \bar{w}^l$，那么 $\delta_i^j = \alpha_i^k \beta_k^j$

对 $T\in\otimes^{r,s}V$，$T = T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes w^{j_1}\otimes\cdots\otimes w^{j_s}$

$$= \bar{T}^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\bar{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\bar{e}_{k_r}\otimes\bar{w}^{l_1}\otimes\cdots\otimes\bar{w}^{l_s}$$

其中 $T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = T(w^{i_1},\cdots,w^{i_r},e_{j_1},\cdots,e_{j_s})$，

$\bar{T}^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} = T(\bar{w}^{k_1},\cdots,\bar{w}^{k_r},\bar{e}_{l_1},\cdots,\bar{e}_{l_s})$，则有变换公式

$T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = \bar{T}^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\beta^{i_1}_{k_1}\cdots\beta^{i_r}_{k_r}\alpha^{l_1}_{j_1}\cdots\alpha^{l_s}_{j_s}$．这种变换关系

是张量定义不依赖于坐标选取的体现，也是传统上定义张量的方法，即定义张量为满足此变换关系的高维数组．

接下来考虑内积下的张量．设 V 带一内积 g，或简写为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$．

度量可以把 V 和 V^* 以更显式的方式联系起来．

即考虑如下两个变换 $\flat: V\to V^*$，$\sharp: V^*\to V$，其定义为满

$$v\longmapsto\langle v,\cdot\rangle$$

是 $f=\langle\alpha,\cdot\rangle$ 的唯一元素 $\sharp f\triangleq\alpha$. 注意此良定性是由(最简单的) Riesz 表示定理所保证的.

我们来看 $\flat$ 和 $\sharp$ 在坐标下的表达式. 设 $\{\alpha_i\}$, $\{\beta^j\}$ 为 V, V^* 对偶基. 对 $f=f_j\beta^j$, 有 $f(v)=f(v^i\alpha_i)=f_iv^i$

$$=\langle\sharp f, v^i\alpha_i\rangle$$

记 $g_{ij}=\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$, $\sharp f=f^i\alpha_i$, 那么取 $v=\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 知

$f_i=f^j\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle=f^jg_{ij}$. 或 $f^j=g^{ij}f_i$, 其中 (g^{ij}) 为 (g_{ij}) 逆矩阵. 注意 $g^{ij}=g(\sharp\beta^i,\sharp\beta^j)$.

同样, 对 $v\in V$, 设 $\flat v=v_i\beta^i$, 那么 $\flat v(\alpha_j)=v_j=\langle v,\alpha_j\rangle$

$$=v^ig_{ij}$$

于是, 按 $f^j=g^{ij}f_i$, $v_j=g_{ij}v^i$ 定义分量, 便有 $\sharp f=f^i\alpha_i$, $\flat v=v_i\beta^i$.

这便是指标升降规则

此规则可以自动延伸到张量上. 以 $(0,2)$ 张量 $A=A_{ij}\beta^i\otimes\beta^j$ 为例. 我们可以自然视 A 为 V^{*2} 上的双线性函数, $A(f,g)\triangleq A(\sharp f,\sharp g)$. 不难验证, 对这种诱导的 A 有坐标 $A=A^{ij}\alpha_i\otimes\alpha_j$, 其中

$$A^{ij}=A_{kl}g^{ki}g^{lj}$$

此外, 可以自然定义 $\otimes^{0,2}V$ 上的内积如下. 对 $A,B\in\otimes^{0,2}V$, 设 $\{e_i\}$ 为 V 标正基, 定义 $\langle A,B\rangle\triangleq\sum_{i,j=1}^{n}A(e_i,e_j)B(e_i,e_j)$. 不难验证 $\langle A,B\rangle$ 和标正基选取无关, 且确为 $\otimes^{0,2}V$ 上的内积. 对一般表达式

$A=A_{ij}\beta^i\otimes\beta^j$, $B=B_{ij}\beta^i\otimes\beta^j$, 有

$$\langle A,B\rangle=g^{kl}g^{ij}A_{ki}B_{lj}=A^{lj}B_{lj}$$

类似可以定义 $\otimes^{r,s}V$ 上的内积.

最后是**取迹**. 对 $A\in\otimes^{0,2}V$, 其迹定义为 $\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}A(e_i,e_i)=g^{ij}A_{ij}$.

更一般的, 若 $T\in\otimes^{r,s}V$, $\mathrm{tr}_{12}T\triangleq\sum_{i=1}^{n}T(w^i,w^i,\cdots)$

$/\ T(e_i,w^i,\cdots)$

$\cdots$

类似对任意两个位置取迹. 在取迹的两个位置分别在 V 和 V^* 中取值时, 所得结果实际上为**缩并**, 不仅与标正基的选取无关, 也和度量无关.

最后简单提一下形式

Def: V 上的反对称 k 重线性函数称为 **k 形式**.

$\forall T\in\otimes^{0,k}V$, 我们自然从 T 得到一个 k 形式如下, 称之为 T 的**反对称化**

$$\mathrm{Alt}(T)(v_1,\cdots,v_k)\triangleq\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^{\mathrm{sgn}\,\pi}T(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(k)})$$

不难验证 $\mathrm{Alt}(T)$ 是反对称的. 记 $T\wedge S\triangleq\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\mathrm{Alt}(T\otimes S)$, 称为**外积**. 我们有

Prop: 若 $\{w^i\}$ 为 V^* 基, 则 k 形式全体 $\wedge^kV^*$ 有基 $\{w^{i_1}\wedge\cdots\wedge w^{i_k}\}_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}$

证: 对 $f^1,\cdots,f^k\in V^*$, $v_1,\cdots,v_k\in V$, 有

$$f^1\wedge\cdots\wedge f^k(v_1,\cdots,v_k)=\sum_{\pi\in S_k}(-1)^{\mathrm{sgn}\,\pi}f^{\pi(1)}(v_1)\cdots f^{\pi(k)}(v_k)$$

$$=\det(f^i(v_j))$$

于是若 $\{e_i\}$ 为 $\{w^i\}$ 的对偶基, 则

$$w^{i_1}\wedge\cdots\wedge w^{i_k}(e_{j_1},\cdots,e_{j_k})=\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}$$

由此即知 $\{w^{i_1}\wedge\cdots w^{i_k}\}_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}$ 无关

另一方面，$\mathrm{Alt}(T)=T$，$\forall T\in\Lambda^k V^*$。因此设 $T=T_{i_1\cdots i_k}\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_k}$，

则 $T=\mathrm{Alt}(T)=T_{i_1\cdots i_k}\mathrm{Alt}(\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_k})$

$$=T_{i_1\cdots i_k}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}$$

交换一下顺序，即知 $T\in\mathrm{span}\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}\}_{i_1<\cdots<i_k}$ #

注意到这说明：(1) $k>n$ 时，$\Lambda^k V^*=0$

(2) $k=n$ 处，$\Lambda^k V^*$ 1维，由 det 生成，与线代中的结论一致

2. $\mathbb{R}^n$ 上的张量场

熟知 $\mathbb{R}^n$ 有自然基 $e_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)$，$\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场由 $X^i e_i$ 给出，其中 $X^i\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$。在几何中，常把向量场与 $\mathbb{R}^n$ 上的偏导数算子等同，即 $X=X^i e_i$ 视作算子

$$X: C^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n),\quad Xf\triangleq X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

此时自然基写作 $e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$。这样做的好处有很多。一来许多运算，如李括号可以方便地定义，二来强调了基点的作用：固定一点 p 后，$\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ 为在 p 处的求导，基点 p 被自然体现出来。而 e_i 则不易体现点 p。

如我们在数分中所学，$\forall f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，微分 $df=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$。把向量场与偏导数等同，则可视

$$df: \underset{\text{光滑向量场全体}}{\Gamma(T\mathbb{R}^n)}\to C^\infty(\mathbb{R}^n),\quad X\mapsto df(X)\triangleq Xf$$

此时，$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j$，故总有对偶基 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 和 $\{dx^i\}$，这无疑是极为方便的。

现在 $\frac{\partial}{\partial x^i}$，$dx^i$ 在每一点 $p\in\mathbb{R}^n$ 处都是 $T_p\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$ 的向量 / 1 形式，故我们可以如之前那么定义 $\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\cdots\otimes dx^j$，$dx^i\wedge\cdots\wedge dx^j$。称 T 为 $\mathbb{R}^n$ 上一个光滑张量场，若 T 形如 $T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$，$T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，类似可以定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 k 形式

$\mathbb{R}^n$ 上的**度量**指 $(0,2)$ 张量场 g，且在每一个 p 处，$g|_{T_p\mathbb{R}^n}$ 是内积。

最常见的 $\mathbb{R}^n$ 上度量由 $g=dx^1\otimes dx^1+\cdots+dx^n\otimes dx^n$ 给出。

前面在一个向量空间上所成立的那些运算，对现在的情况自然也成立。

最后简单提一下度量的演化。

设 $g=g(x,t)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上随时间 t 变化的一族度量，且 $\forall X,Y\in\Gamma(T\mathbb{R}^n)$，$t\mapsto g(t)(X,Y)$ 是 t 的光滑函数。记 $h=\frac{\partial g}{\partial t}$，即

$$h(X,Y)=\frac{\partial g(t)(X,Y)}{\partial t},\quad \forall X,Y\in\Gamma(T\mathbb{R}^n)$$

我们来研究演化方程。熟悉几何计算的同学可能会觉得奇怪，为什么我之前一定在任一基下给出计算式，而不在一组标正基下计算，而**后者在计算上往往更加方便（如本课程后半部分）**。但是，在 g 演化的情况下，标正基也随之变动，使计算式中导数项增多，反而使计算复杂化。而选一组固定基，如自然基 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 和 $\{dx^i\}$ 则可以避免这种困难。

记 $g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$，$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$

Prop: $\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}=-h^{ij}$，$h^{ij}$ 是 h_{ij} 的指标升降

证：由 $g^{ij}g_{jl}=\delta^i_l$ 对 t 求导知

$$g^{ij}h_{jl}+\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}g_{jl}=0$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}=\frac{\partial g^{ik}}{\partial t}g_{kl}g^{lj}=-g^{ik}g^{lj}h_{jl}=-h^{ij}$$ #

Prop：若 X, Y 是含时向量场，则

$$\frac{\partial}{\partial t}g(X,Y)=h(X,Y)+g\left(\frac{\partial X}{\partial t},Y\right)+g\left(X,\frac{\partial Y}{\partial t}\right)$$

证：设 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$，则 $g(X,Y)=X^iY^jg_{ij}$，故

$$\frac{\partial}{\partial t}g(X,Y)=\frac{\partial X^i}{\partial t}Y^jg_{ij}+X^i\frac{\partial Y^j}{\partial t}g_{ij}+X^iY^jh_{ij}$$

$$=h(X,Y)+g\left(\frac{\partial X}{\partial t},Y\right)+g\left(X,\frac{\partial Y}{\partial t}\right)$$ #

Prop：设 α 是含时 (0,2) 张量，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{tr}\alpha=-\langle h,\alpha\rangle+\mathrm{tr}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle\triangleq g(0)$

证：记 $\alpha=\alpha_{ij}dx^i\otimes dx^j$，则 $\mathrm{tr}\alpha=g^{ij}\alpha_{ij}$，

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{tr}\alpha=-h^{ij}\alpha_{ij}+g^{ij}\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial t}=-\langle h,\alpha\rangle+\mathrm{tr}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$ #

Prop：记体积元 $dV\triangleq\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx$，则 $\frac{\partial}{\partial t}dV=\frac{1}{2}\mathrm{tr}h\,dV$

证：由 $\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det(g_{ij})}=\dfrac{\frac{\partial}{\partial t}\det g_{ij}}{2\sqrt{\det g_{ij}}}$，$\frac{\partial}{\partial t}\det(g_{ij})=\mathrm{tr}\left((g_{ij})^*\frac{\partial}{\partial t}(g_{ij})\right)$ 即知 #

曲线收缩流

Def: 设 $r_t(u)=r(u,t)$, $u\in[0,2\pi]$, $t\in I$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一族闭曲线, 即 $\forall t\in I$, $r_t=r(\cdot,t)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的正则曲线, 且 $r(0,t)=r(2\pi,t)$.

称 r 在**曲线收缩流**下演化, 若其满足方程

$$\frac{\partial r}{\partial t}=kn$$

其中 $n=n(u,t)$ 是 $r(\cdot,t)$ 的法向, 取法与课上相同, 而 $k=k(u,t)$ 是 $r(\cdot,t)$ 的曲率.

例: 设 $r(u,t)=(l(t)\cos u, l(t)\sin u)$ 为一族圆, $l(t)>0$. 若 r 在平均曲率流下演化, 熟知圆曲率 $\frac{1}{l(t)}$, 有

$$\frac{\partial r}{\partial t}(u,t)=(l'(t)\cos u, l'(t)\sin u)=kn$$
$$=\frac{-1}{l(t)}(\cos u, \sin u)$$

故半径满足演化方程 $l'(t)=-\frac{1}{l(t)}$, 设 $l(0)=1$, 则 $l(t)=\sqrt{1-2t}$

即 $(\sqrt{1-2t}\cos u, \sqrt{1-2t}\sin u)$ 按平均曲率流演化, 且其存在时间至多至 $t=\frac{1}{2}$

形式上

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}$$

$s=s(t)$ 是 $r(\cdot,t)$ 的弧长参数. 但这并不意味着这是一个线性方程, 因为 s 是随 t 变化的. 这实际上是一个非线性方程.

接下来我们考虑曲线收缩流的基本性质.

一、演化方程及其推论

Prop 1.1：在曲线收缩流下，弧长微元 $v=\left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|$ 按如下方程演化

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-k^2 v$$

证：
$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|^2=2\frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial u\partial t}$$
$$=2\frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(kn)$$
$$=2\frac{\partial r}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial k}{\partial u}n-k^2\frac{\partial r}{\partial u}\right)=-k^2v^2$$

而 $\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|^2=2\left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|$ #

Prop 1.2：在曲线收缩流下，Frenet 标架的演化为

$$\frac{\partial \vec{t}}{\partial t}=\frac{\partial k}{\partial s}n,\quad \frac{\partial n}{\partial t}=-\frac{\partial k}{\partial s}\vec{t}$$

证：
$$\frac{\partial \vec{t}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial u}=-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial u}+\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial t\partial u}$$
$$=\frac{k^2}{v}\frac{\partial r}{\partial u}+\frac{1}{v}\left(\frac{\partial k}{\partial u}n-k^2\frac{\partial r}{\partial u}\right)$$
$$=\frac{\partial k}{\partial s}n$$

旋转 $90°$，即得 n 的演化 #

Prop 1.3：曲率的演化为

$$\frac{\partial k}{\partial t}=\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}+k^3$$

证：设 $\vec{t}$ 与 x 轴夹角 θ，则 $\vec{t}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$n=(-\sin\theta,\cos\theta)$。注意我们只用在一点 (u,t) 的小邻域内证明命题，此时 θ 可以选为连续（因而光滑）的。

注：θ 也可以被选为整体的，见教材第 6 章引理 1.

此时 $k=\frac{\partial \vec{t}}{\partial s}\cdot n=\frac{\partial \theta}{\partial s}$，$\frac{\partial k}{\partial s}=\frac{\partial \vec{t}}{\partial t}\cdot n=\frac{\partial \theta}{\partial t}$，故

故 $\frac{\partial k}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial t\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{v}\frac{\partial\theta}{\partial u}=\frac{k^2}{v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial t}$

$$=k^2\frac{\partial\theta}{\partial s}+\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}$$

$$=\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}+k^3$$

Cor1.4 曲线的凸性被曲线收缩流保持，即若 r_0 是满足 $k>0$ 的曲线，则 $\forall t\in I$，有 r_t 满足 $k>0$. 更精确地，设 $k(\cdot,0)\geqslant\alpha>0$，则

$$k(\cdot,t)\geqslant\frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha^2 t}}$$

证：这是热方程极值原理一个应用. 设 φ_ε 满足 ODE

$$\begin{cases}\frac{d\varphi_\varepsilon}{dt}=\varphi_\varepsilon^3-\varepsilon & t\in[0,T]\subset I\\ \varphi_\varepsilon(0)=\alpha-\varepsilon\end{cases}$$

$\varepsilon\to 0$ 时，φ_ε 一致收敛到 $\varphi(t)=\frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha^2 t}}$. 我们证明 $[0,T]$ 上 $k(\cdot,t)>\varphi_\varepsilon(t)$.

假若不然，$\exists$ 最小的 $t_0\in(0,T]$ 使其在 t_0 处不真. 取 u 使 $k(u,t_0)=\varphi_\varepsilon(t_0)$，则 $t\mapsto k(u,t)-\varphi_\varepsilon(t)$ 在 $[0,t_0)$ 上大于 0，在 t_0 处为 0，故 $\frac{\partial k}{\partial t}(u,t_0)-\varphi_\varepsilon'(t_0)\leqslant 0$. 且由于 u 是 $k(\cdot,t_0)$ 的最小值，故 $\frac{\partial k}{\partial s}(u,t_0)=\frac{1}{v}\frac{\partial k}{\partial u}(u,t_0)=0$,

$$\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}(u,t_0)=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{v}\frac{\partial k}{\partial u}+\frac{1}{v}\frac{\partial^2 k}{\partial u^2}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 k}{\partial u^2}\geqslant 0.$$

则 $0=\left(\frac{\partial k}{\partial t}-\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}-k^3\right)(u,t_0)\leqslant\varphi_\varepsilon'(t_0)-\varphi_\varepsilon^3=-\varepsilon<0$，矛盾！ #

Prop1.5：若 $r(\cdot,t)$ 按曲线收缩流演化，且每一个 r_t 都是简单闭曲线，记 $L(t)$ 为 r_t 长度，$A(t)$ 为 $r(t)$ 所围的面积，则

$$L'(t)=-\int_{r_t}k^2 ds \qquad A'(t)=-2\pi$$

证：$L'(t)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}v\,du=-\int_0^{2\pi}k^2v\,du=-\int_{r_t}k^2ds$

对A，设 $r(u,t)=(x(u,t),y(u,t))$，则由 Green 公式有

$$A(t)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{\partial y}{\partial u}-y\frac{\partial x}{\partial u}\right)du$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}v\,r\cdot n\,du$$

故 $A'(t)=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-k^2v\,r\cdot n+v\frac{\partial r}{\partial t}\cdot n+v\,r\cdot\frac{\partial n}{\partial t}\right)du$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-k^2v\,r\cdot n+vk-\frac{\partial k}{\partial u}r\cdot\vec{t}\right)du$$

分布积分 $\int_0^{2\pi}\frac{\partial k}{\partial u}r\cdot\vec{t}\,du=r\cdot\vec{t}\,\frac{\partial k}{\partial u}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}k\left(\frac{\partial r}{\partial u}\cdot\vec{t}+r\cdot\frac{\partial\vec{t}}{\partial u}\right)du$

$$\overset{\text{闭曲线}}{=}-\int_0^{2\pi}vk+k^2v\,r\cdot n\,du$$

因此 $A'(t)=-\int_0^{2\pi}kv\,du=-\int_{r_t}k\,ds=-2\pi$（教材第六章 Thm1.1）

#

从这里可以看出，对简单闭曲线来说，曲线收缩流的存在时间一定是有限的，不超过 $\frac{A(0)}{2\pi}$

二、存在唯一性

我们证明

Thm 2.1：任给光滑闭曲线 $r_0:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$，则 $\exists\,\varepsilon>0$，使

$$\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial t}=kn & t\in[0,\varepsilon)\\ r(\cdot,0)=r_0\end{cases}$$

存在唯一光滑解 $r:[0,2\pi]\times[0,\varepsilon)\to\mathbb{R}^2$

证：首先重写方程 $kn=\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial u}\right)=\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}\right)\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial u}\right)$

记 $r=(x,y)$，那么有方程组

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{1}{v^4}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v^4}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{v^4}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)，即$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{v^4}\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\\ -\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\end{pmatrix}$$

注意矩阵 $A=\begin{pmatrix}y_u^2 & -x_uy_u\\ -x_uy_u & x_u^2\end{pmatrix}$ 半正定但不满秩，故不能直接用

抛物方程解的存在性得到结论.

为此，考虑形如 $\tilde{r}(u,t)=r(u)+f(u,t)n(u)$ 的曲线，则

$\tilde{r}$ 的曲率为

$$\tilde{k}=\frac{(1-kf)\partial_u^2 f+2k(\partial_u f)^2+f\partial_u k\,\partial_u f-2k^2 f+k^3f^2+k}{\left((1-kf)^2+(\partial_u f)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

取 f 满足 $\partial_t f=\frac{((1-kf)^2+(\partial_u f)^2)^{\frac{1}{2}}}{1-kf}\tilde{k}$，这是一个非退化抛物方程，故有解

$f:[0,2\pi]\times[0,\varepsilon)\to\mathbb{R}$，$f(\cdot,0)=0$ 那么

$$\frac{\partial\tilde{r}}{\partial t}=\tilde{k}n$$

但 $\tilde{r}$ 切向 $\tilde{t}=\frac{\partial_u f n+(1-kf)\vec{t}}{((\partial_u f)^2+(1-kf)^2)^{\frac{1}{2}}}$，$\tilde{n}=\frac{-\partial_u f\vec{t}+(1-kf)n}{((\partial_u f)^2+(1-kf)^2)^{\frac{1}{2}}}$

故 $\tilde{r}$ 满足
$$\frac{\partial\tilde{r}}{\partial t}=\tilde{k}\tilde{n}+g\tilde{t}$$

对某 $g=g(u,t)$．右侧含有切向，为消去这一项，重新参数化

设 $r(u,t)=\tilde{r}(\varphi(u,t),t)$，则 $\partial_t r=\partial_t\varphi\,\partial_u\tilde{r}+\partial_t\tilde{r}$

$$=\tilde{k}\tilde{n}+(\partial_t\varphi|\partial_u\tilde{r}|+g)\tilde{t}$$

对每个固定 u，取 φ 为 ODE $\begin{cases}\partial_t\varphi(u,t)=-g(\varphi(u,t),t)/|\partial_u\tilde{r}(\varphi(u,t),t)|\\ \varphi(u,0)=u\end{cases}$

的解 $\varphi(t,u)$ 即可

\#

三. 几何上的结论

Thm3.1：曲线收缩流保持简单闭曲线，即若 $r_0:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ 是简单闭曲线，而 $r:[0,2\pi]\times[0,T)$ 是如下问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial r}{\partial t}=kn\\ r(\cdot,0)=r_0\end{cases}$$

那么每一个 $r_t=r(\cdot,t)$ 都是简单闭曲线.

为此，考虑

$$f:[0,2\pi]\times[0,2\pi]\times[0,T),\quad f(u_1,u_2,t)=|r(u_1,t)-r(u_2,t)|^2$$

我们有

Lem3.2：
$$\frac{\partial f}{\partial t}-\Delta f=4$$

其中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial s_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial s_2^2}$，$s_1,s_2$ 为 t 时刻 r_t 的弧长参数.

证：$\dfrac{\partial f}{\partial t}=2(r(u_1,t)-r(u_2,t))\cdot(kn(u_1,t)-kn(u_2,t))$

$$\frac{\partial f}{\partial s_1}=2(r(u_1,t)-r(u_2,t))\cdot\vec{t}(u_1,t),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}=2+2(r(u_1,t)-r(u_2,t))\cdot\frac{\partial\vec{t}}{\partial s_1}(u_1,t)$$
$$=2+2(r(u_1,t)-r(u_2,t))\cdot kn(u_1,t)$$

同样 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}=2+2(r(u_2,t)-r(u_1,t))\cdot kn(u_2,t)$. 加起来即可 #

Lem3.3：设 $r_1,r_2:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ 是弧长参数曲线，r_i 连接 A_i,B_i. 若 $|k_1(s)|\geq|k_2(s)|$，r_1 和线段 A_1B_1 的并是凸曲线，则 $d(A_1,B_1)\leq d(A_2,B_2)$

证：由假设 $k_1\geq0$. 取坐标使 A_1B_1，A_2B_2 所在直线为 x 轴，设 θ_i 为 $\vec{t_i}$ 和 x 轴所夹的角，则 $\dfrac{d\theta_i}{ds}=k_i$，故 $\dfrac{d\theta_1}{ds}\geq\left|\dfrac{d\theta_2}{ds}\right|$

如图，$\theta_1(0)>0$，$\theta_1(L)<0$，故$\exists s_0\in[0,L]$，$\theta_1(s_0)=0$．知

$$\int_{s_0}^{s}\frac{d\theta_1}{ds}\geqslant\int_{s_0}^{s}\left|\frac{d\theta_2}{ds}\right|ds\geqslant\left|\int_{s_0}^{s}\frac{d\theta_2}{ds}\right|$$

$$\theta_1(s)\geqslant|\theta_2(s)-\theta_2(s_0)|,\quad s<s_0$$

$$-\theta_1(s)\geqslant|\theta_2(s)-\theta_2(s_0)|,\quad s\geqslant s_0$$

总之 $$|\theta_1(s)|\geqslant|\theta_2(s)-\theta_2(s_0)|$$

由于 r_1 凸，故 $|\theta_1|\leq\pi$，此外 $\cos$ 减，故

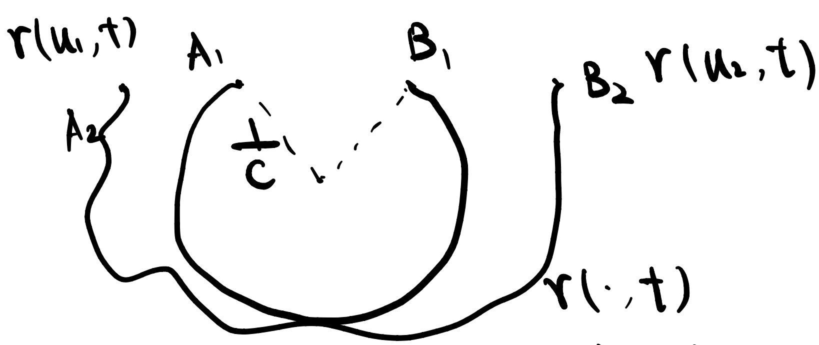
$$\begin{aligned}d(A_1,B_1)=\int_0^L\cos|\theta_1(s)|\,ds&\leq\int_0^L\cos|\theta_2(s)-\theta_2(s_0)|\,ds\\&\leq\int_0^L\cos(\theta_2(s)-\theta_2(s_0))\,ds\\&\leq d(A_2,B_2)\end{aligned}$$

注意最后一个积分是 A_2, B_2 在某条线上的投影 #

Thm3.1 的证明

适当缩短区间 $[0,T)$，可设 $|k(u,t)|\leq C$．令 $l(u_1,u_2,t)$ 为沿 r_t 在 $r(u_1,t)$，$r(u_2,t)$ 间的弧长．

如图，取 γ_1 为长 $l(u_1,u_2,t)$，半径 $\frac{1}{c}$ 的圆弧．$A=r(u_1,t)$，$B=r(u_2,t)$



则 $d(A_1,B_1)=\frac{2}{c}\sin\left(\frac{c}{2}l(u_1,u_2,t)\right)$，$d(A_2,B_2)^2=f(u_1,u_2)$．使

$$f(u_1,u_2)\geqslant\left(\frac{2}{c}\sin\left(\frac{c}{2}l(u_1,u_2,t)\right)\right)^2$$

故 $f=0$ 只有 $l(u_1,u_2,t)=\frac{2\pi}{c}n$ 处发生，$n\in\mathbb{N}$．令

$$E=\{(u_1,u_2,t)\mid l(u_1,u_2,t)<\tfrac{\pi}{c}\}$$

$$D=S^1\times S^1\times[0,T)\setminus E$$ （即视 $u_i=0$ 和 $u_i=2\pi$ 等同）

在E上，若$f=0$则$l=0$，$u_1=u_2$. $\partial D = D_1 \cup D_2$，其中

$$D_1 = \{(u_1,u_2,t) \mid l(u_1,u_2,t) = \frac{\pi}{c}\}$$

$$D_2 = \{(u_1,u_2,0) \mid l(u_1,u_2,t) \geqslant \frac{\pi}{c}\}$$

D_1上$f \geqslant \frac{4}{c^2}$. D_2上由于r_0是简单闭曲线，故$\inf\limits_{D_2} f > 0$. 取m为f在D_1，D_2上最小值的小者. $\forall \varepsilon > 0$，令$g(u_1,u_2,t) = f(u_1,u_2,t) + \varepsilon t$. 则

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \Delta g = -4 + \varepsilon$$

注意D紧. 若g在D上有小于m的最小值m'. 取最小的t使$\min\limits_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} g(\cdot,\cdot,t) \overset{<m}{=m'}$

再取$(u_1,u_2) \in [0,2\pi]\times[0,2\pi]$使$g(\cdot,\cdot,t)$在$(u_1,u_2)$处取到最小值$m'$.

则$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_k \partial s_l}\right)_{k,l=1,2} \geqslant 0$，$\frac{\partial g}{\partial t} \leqslant 0$在$(u_1,u_2,t)$处成立. 由最小值知

$$\frac{\partial g}{\partial s_1} = 2(r(u_1,t) - r(u_2,t)) \cdot \vec{t}_1 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial s_2} = 2(r(u_2,t) - r(u_1,t)) \cdot \vec{t}(u_2,t) = 0$$

知$\vec{t}(u_1,t) \parallel \vec{t}(u_2,t)$，故$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} = 2\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = \pm 2$. 而

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}\frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}\right)^2 \geqslant 0$$

使(u_1,u_2,t)处，$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}\frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}}$

$$\geqslant 2\left|\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2 \partial s_2^2}\right| \geqslant 4$$

故$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta g - 4 + \varepsilon > 0$，矛盾. 知$g \geqslant m$，D上$f \geqslant m - \varepsilon T \to m > 0$. 因此$f=0$处只在E上发生. 此时$u_1 = u_2$，故$r_t$总是简单闭曲线 #

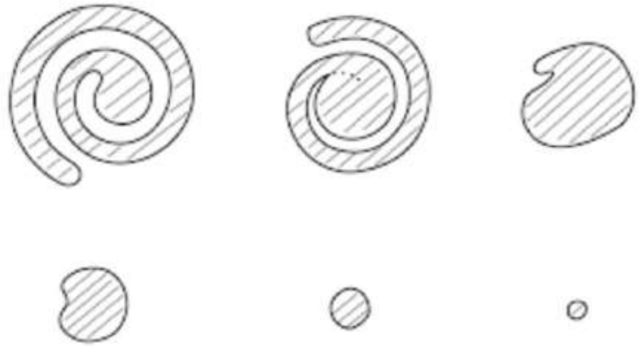
Thm3.4：设$r_0 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$是简单闭曲线，围住面积A. 那么

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} = kn \\ r(\cdot,0) = r_0 \end{cases}$$

的解最大存在区间$[0,T)$，$T = \frac{A}{2\pi}$. 此外，存在唯一$x_0 \in \mathbb{R}^2$，使放大后的流

$$r^\lambda(\cdot,t) \triangleq \lambda(r(\cdot, T + \lambda^{-2}t) - x_0)$$

在 $\lambda\to\infty$ 使收敛到 $\{S^1(\sqrt{-2t})\}_{t\in(-\infty,0)}$.



应用：等周不等式

Thm 3.5：设 $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ 是简单闭曲线，包围面积 A，弧长 L，则

$$L^2\geqslant 4\pi A$$

证：考虑由 γ 开始的曲线收缩流的极大解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}=kn & t\in[0,T)\\ \gamma(\cdot,0)=\gamma\end{cases}$$

由Thm3.4，$T=\frac{A}{2\pi}$. 由 Prop 1.5，$L'(t)=-\int_{\gamma_t}k^2ds$，$A'(t)=-2\pi$. 于是 $t\to T$ 时，$L(t)$，$A(t)\to 0$. 而

$$\begin{aligned}-4\pi A(t)&=2(2\pi)^2\\&=2\left(\int_{\gamma_t}k\,ds\right)^2\\&\leqslant 2\left(\int_{\gamma_t}ds\right)^2\left(\int_{\gamma_t}k^2ds\right)^2\\&=-2L(t)L'(t)=-2\frac{d}{dt}L(t)^2\end{aligned}$$

在 $[0,T)$ 上积分即可 #

例一：设曲线 r 各点切线都过一个固定点，则其为直线(的一部分)

证：在 s 处 r 切线方程 $l = r(s)+\lambda r'(s)$，λ 为切线上的参数.

设切线都过定点 r_0，则

$$r_0 = r(s) + \lambda(s) r'(s) \quad \forall s \text{ 成立}$$

求导得

$$0 = (1+\lambda'(s))r'(s) + \lambda(s) r''(s)$$

$$=(1+\lambda'(s))t + \lambda(s)\kappa(s) n$$

由 t，n 无关知 $1+\lambda'=0$，$\lambda\kappa=0$．即 $\kappa=0$，r 为直线 #

类似有：所有主法线过定点的曲线是圆

例二：设有弧长参数曲线 $C: r=r(s)$．若有另一曲线 $\tilde{C}$，在 C 和 $\tilde{C}$ 的点之间有一个对应关系，使对应点处有公共主法线，则称 C 和 $\tilde{C}$ 是一对伴随曲线.

设 C 的曲率和挠率都非 0．证明：C 存在伴随曲线的充分必要条件为 $\exists$ 常数 λ 和 μ，使

$$\lambda\kappa(s) + \mu\tau(s) = 1$$

证：($\Rightarrow$) 由对应关系，$\tilde{C}$ 的参数方程可以写作

$$\tilde{r}(s) = r(s) + \lambda(s) n(s) \text{，对某 } \lambda(s) \text{ 成立}$$

注意 s 不必是 $\tilde{r}$ 的弧长参数．记 $\tilde{r}$ 的 Frenet 标架为 $\{\tilde{r}; \tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{b}\}$，则由 C，$\tilde{C}$ 有公共主法线，故 $\tilde{n} // n$．另设 $\tilde{r}$ 弧长参数 $\tilde{s}$．求导

$$\frac{d\tilde{r}}{d\tilde{s}}\frac{d\tilde{s}}{ds} = \dot{r} + \lambda\dot{n} + \dot{\lambda} n = (1-\lambda\kappa)t + \dot{\lambda} n + \lambda\tau b = \tilde{t}\frac{d\tilde{s}}{ds}$$

用 $n /\!/ \tilde n$ 点乘两侧得 $\lambda' = 0$，λ 为常数，故

$$\tilde t \frac{d\tilde s}{ds} = (1-\lambda\kappa(s))t(s) + \lambda\tau(s)b(s)$$

使 $$\left|\frac{d\tilde s}{ds}\right| = \sqrt{(1-\lambda\kappa(s))^2+\lambda^2\tau(s)^2}$$

另一方面 $\frac{d}{ds}(t\cdot\tilde t) = \kappa n\cdot\tilde t + \tilde\kappa t\cdot\tilde n\frac{d\tilde s}{ds} = 0$ $(n /\!/ \tilde n)$

使 $t\cdot\tilde t$ 为常数。另外 $t\cdot\tilde t\frac{d\tilde s}{ds} = 1-\lambda\kappa(s)$ 或 $t\cdot\tilde t = (1-\lambda\kappa(s))\frac{ds}{d\tilde s}$

知

$$\frac{1-\lambda\kappa(s)}{\sqrt{(1-\lambda\kappa(s))^2+\lambda^2\tau(s)^2}} = C$$

得 $\frac{1-\lambda\kappa(s)}{\tau(s)}$ = 常数 μ，故 $\lambda\kappa(s)+\mu\tau(s)=1$.

$(\Leftarrow)$ 又设 $\lambda\kappa(s)+\mu\tau(s)=1$ 对某 $\lambda\neq 0$ 和 μ 成立，令 $\tilde r(s) = r(s)+\lambda n(s)$，

则

$$\tilde r'(s) = t(s)+\lambda(-\kappa t+\tau b)$$
$$=(1-\lambda\kappa)t+\lambda\tau b$$
$$=\tau\mu t+\lambda\tau b$$

故 $|\tilde r'(s)| = \sqrt{\mu^2+\lambda^2}\,|\tau|$，$\tilde t = \frac{\tilde r'}{|\tilde r'|} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}t + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}b$

使 $\frac{d\tilde t}{d\tilde s}\frac{d\tilde s}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}(\mu\kappa-\lambda\tau)n = \tilde\kappa\tilde n\frac{d\tilde s}{ds}$，即 $n /\!/ \tilde n$ #

例三：求 $r=(u\cos v, u\sin v, u+v)$ 的新参数 $(\tilde u, \tilde v)$，使 $r_{\tilde u}\perp r_{\tilde v}$.

解：$r_u = (\cos v, \sin v, 1)$，$r_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$

$\mathrm{I} = 2du^2+2dudv+(u^2+1)dv^2$

配方 $\mathrm{I} = 2(du+\frac{1}{2}dv)^2+(u^2+\frac{1}{2})dv^2$. 故若令 $\tilde u = u+\frac{1}{2}v$，

$\tilde v = v$，则 $\mathrm{I} = 2d\tilde u^2+\left((\tilde u-\frac{\tilde v}{2})^2+\frac{1}{2}\right)d\tilde v^2$，使 $r_{\tilde u}\perp r_{\tilde v}$

例四：若 r 的二形式 $\mathrm{II}=0$，则 r 是平面(的一部分)

证：由条件 $r_u\cdot n_u = r_v\cdot n_u = r_u\cdot n_v = r_v\cdot n_v = 0$.

由于 $n_u\cdot n=n_v\cdot n=0$ 恒成立，而 $\{r_u,r_v,n\}$ 构成 $\mathbb{E}^3$ 一组基

故必有 $n_u=n_v=0$，n 是常向量

于是 $d(r\cdot n)=dr\cdot n+r\cdot dn=0$，$r\cdot n=r_0\cdot n$，即为平面方程

#

例五：若 r 为极小的，则 Weingarten 变换满足

$$\langle W(w_1),W(w_2)\rangle=-K(p)\langle w_1,w_2\rangle$$

$w_1,w_2\in T_p\Sigma$

证：做参数变换，使 r_u,r_v 在 $p\in\Sigma$ 处为主方向。由极小知两个主曲率为 $k,-k$，则 $W(r_u)=kr_u$，$W(r_v)=-kr_v$。故

$$\langle W(ar_u+br_v),W(cr_u+dr_v)\rangle$$
$$=\langle akr_u-bkr_v,ckr_u-dkr_v\rangle$$
$$=k^2(ac+bd)=-K(p)\langle ar_u+br_v,cr_u+dr_v\rangle$$

另解：既然 $\mathrm{tr}W=H$，$\det W=K$，则其特征方向为

$$\lambda^2-2H\lambda+K=0$$

由 Kaley-Hamilton 定理，$W^2-2HW+K\,Id=0$，故若 $H=0$，则 $W^2=-K\,Id$，使 $\langle W(w_1),W(w_2)\rangle=\langle W^2(w_1),w_2\rangle=-K\langle w_1,w_2\rangle$ #

注意 Weigarten 变换是 Gauss 映射的微分。本题说明极小曲面的 Gauss 映射是共形（保角）的

例六：设 $r=r(u,v)$ 上没有抛物点，n 为其法向。令 $\tilde{r}=r+\lambda n$，λ 为充分小的常数，则

(1) $r(u,v)$ 和 $\tilde{r}(u,v)$ 处切平面相同

(2) 对应点处 $\tilde{K}=\dfrac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}$，

$$\tilde{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}$$

证：(1) $\tilde{r}_u = r_u + \lambda n_u$, $\tilde{r}_v = r_v + \lambda n_v \in T_p\Sigma$, 故其法向 $\tilde{n} \perp T_p\Sigma$,

使 $\tilde{n} \parallel n$, 故 $T_p\tilde{\Sigma} \parallel T_p\Sigma$

(2) 固定一点，取 (u,v) 使此处 r_u, r_v 为主方向，即 $n_u = -k_1 r_u$,

$n_v = -k_2 r_v$, 则 $\tilde{r}_u = r_u + \lambda n_u = (1-\lambda k_1) r_u$, $\tilde{r}_v = (1-\lambda k_2) r_v$,

由连续性知 $n = \tilde{n}$, 使

$$\tilde{n}_u = n_u = k_1 r_u = \frac{-k_1}{1-\lambda k_1}\tilde{r}_u, \quad \tilde{n}_v = \frac{-k_2}{1-\lambda k_2}\tilde{r}_v$$

因此 $\tilde{r}_u$, $\tilde{r}_v$ 也是此处的主方向，$\tilde{\Sigma}$ 主曲率 $\frac{k_1}{1-\lambda k_2}$ $\frac{k_2}{1-\lambda k_2}$

则 $$\tilde{K} = \frac{k_1 k_2}{(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)} = \frac{K}{1-\lambda(k_1+k_2)+\lambda^2 k_1 k_2}$$

$$= \frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{1-\lambda k_1} + \frac{k_2}{1-\lambda k_2}\right)$$

$$= \frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}$$

#

注：若 (u,v) 非脐点，则小邻域内曲面无脐点，故不难选出小范围的单位向量 e_1, e_2, 使其为两个主方向。此时依之前作业题的结论，可以把 e_1, e_2 实现为 r_u, r_v, 即 r_u, r_v 处处为主方向。不过在脐点附近这是做不到的

例八：若 Σ 切平面过定点，则 Σ 是锥

证：平移，可设 $T_x\Sigma$ 过 0, $\forall x \in \Sigma$ 成立。因此作为一个向量(而不是 E^3 中的点)，$x \in T_x\Sigma$, $\forall x \in \Sigma$ 成立

考虑方程 $$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t) \\ x(0) = x_0 \in \Sigma \end{cases}$$

这时 Σ 上向量场 x 的流，因而是 Σ 上的曲线。另外，$x(t) = x_0 e^t$ 是

一条过原点射线、于是I是锥 #

极小曲面初步

一、极小图

先从极小图说起，设 $u: \Omega \to \mathbb{R}$ 光滑（$\Omega \subset \mathbb{R}^2$），若 u 的图

$$\Gamma_u = \{(x, y, u(x,y)) \mid (x,y) \in \Omega\}$$

是极小的，则可以算出 $n = (u_x, u_y, -1) / \sqrt{1+|Du|^2}$，

$$E = (1+u_x^2),\quad F = u_x u_y,\quad G = (1+u_y^2)$$

$$L = \frac{u_{xx}}{\sqrt{1+|Du|^2}},\quad M = \frac{u_{xy}}{\sqrt{1+|Du|^2}},\quad N = \frac{u_{yy}}{\sqrt{1+|Du|^2}}$$

故

$$H = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1+u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1+u_x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \Big/ (1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy}\right]$$

$$= 0$$

故

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0 \qquad (*)$$

这就是**极小曲面方程**。

在设想中，极小曲面是作为面积泛函的极小值点定义的，我们自然也想知道，其距极小有多远，对此，我们有

Prop 1：设 $u: \Omega \to \mathbb{R}$ 满足 $(*)$，Ω 是有界区域，则

(1) 若曲面 $\Sigma \subset \Omega \times \mathbb{R}$ 且 Σ 与 Γ_u 有相同边界，则

$$\mathrm{Area}\,\Gamma_u \le \mathrm{Area}\,\Sigma$$

(2) 若 Ω 是凸区域，则 (1) 的结论对 $\forall \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 成立。

证：(1) 此时，我们有定义在 $\Omega \times \mathbb{R}$ 上的向量场

$$\nu(x,y,z) \triangleq \frac{(u_x, u_y, -1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}$$

则 $\operatorname{div}\nu = \frac{1}{(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy}\right]$

$= 0$

$\Sigma \cup \Gamma_u$ 构成一区域 $U \subset \Omega \times \mathbb{R}$ 的边界，则

$$0 = \int_U \operatorname{div}\nu = \int_\Sigma n_\Sigma \cdot \nu \, d\sigma + \int_{\Gamma_u} \nu \cdot \nu \, d\sigma$$

$$= \operatorname{Area}\Gamma_u + \int_\Sigma n_\Sigma \cdot \nu \, d\sigma$$

$$\geq \operatorname{Area}\Gamma_u - \operatorname{Area}\Sigma$$

(2) 令 $P: \mathbb{R}^3 \to \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$，$P(p)$ 定义为 $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ 中距 p 最近的点。由于 Ω 是凸的，故 $P(p)$ 存在、唯一。且易知

$$|P(p) - P(q)| \leq |p-q|, \ \forall p, q \in \mathbb{R}^3$$

因此 P 的雅可比行列式 $|\det JP| \leq 1$。进而由换元公式知

$$\operatorname{Area}\Gamma_u \leq \operatorname{Area}P(\Sigma) = \int_\Sigma |\det JP| \, d\sigma \leq \operatorname{Area}\Sigma$$

#

Cor 2：设 $u: \Omega \to \mathbb{R}$ 满足 $(*)$，$B_r \subset \Omega \times \mathbb{R}$，则

$$\operatorname{Area}\Gamma_u \cap B_r \leq 2\pi r^2$$

证：将 $\Gamma_u \cap B_r$ 与上/下半球面比较即可 #

二、散度、Laplacian 与变分公式

在导出曲面的变分公式前，我们先给出一些微分算子的定义。

回忆一下，设 $f: \Sigma \to \mathbb{R}$，其**梯度** $\nabla^\Sigma f$ 定义为 df 的对偶向量场

即 $$\langle \nabla^\Sigma f, \nu \rangle = df(\nu), \ \forall \text{切向量 } \nu$$

如果 Σ 有局部参数 (x^1, x^2)，令 $g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle$，设 $\nabla^\Sigma f = a^i r_i$，

$\forall \nu = b^i r_i$ 有 $\langle \nabla^\Sigma f, \nu \rangle = a^i b^j g_{ij}$

另一方面，$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$，故 $df(v) = \frac{\partial f}{\partial x^i} b^i$，则

$$a^i b^j g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^i} b^i$$

$\forall v$ 成立．取 v 分别为 r_1, r_2，即有 $a^i g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^j}$，$j=1,2$，使 $a^i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}$，$\nabla^\Sigma f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j} r_i$．下面考虑 Σ 上的散度 div_Σ．其定义的一个基本目标是作为 ∇^Σ 的形式伴随，即若 Σ 是紧带边曲面，$\forall f \in C_c^\infty(\Sigma)$，$X$ 为 Σ 上紧支光滑向量场，有

$$\int_\Sigma \langle \nabla^\Sigma f, X \rangle d\sigma = -\int_\Sigma f \,\mathrm{div}_\Sigma X \,d\sigma$$

成立．我们来推导其表达式．设 f，X 都支于一个坐标邻域内，$X = X^i r_i$，则 $\langle \nabla^\Sigma f, X \rangle = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$，令 $G = (g_{ij})_{2\times 2}$

$$\int_\Sigma \langle \nabla^\Sigma f, X \rangle d\sigma = \int_U X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \sqrt{\det G}\, dx$$

$$= -\int_U f \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det G}\, X^i\right) dx$$

$$= -\int_U f \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det G}\, X^i\right) d\sigma$$

其中用到了 $\mathbb{R}^2$ 中区域 U 上的分部积分公式，且由 f，X 的紧支性，在边界上的项消失了．故应有

$$\mathrm{div}_\Sigma X = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det G}\, X^i\right)$$

此时，可以验证若 X 非紧支，则 $\int_\Sigma \mathrm{div}_\Sigma X \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} X \cdot \nu \, dl$．进而同 Stokes 公式的证明（把曲面分为若干曲面片，每一片落在坐标内在每一片边界上的积分相互抵消），成立

$$\int_\Sigma \langle \nabla^\Sigma f, X \rangle d\sigma = -\int_\Sigma f \,\mathrm{div}_\Sigma X \, d\sigma$$

曲面的 Laplacian 相应定义为 $\forall f\in C^\infty(\Sigma)$,

$$\Delta f \triangleq \operatorname{div}_\Sigma \nabla^\Sigma f = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\sqrt{\det G}\right)$$

下面来推导极小曲面的变分公式. 回忆, 在课堂上计算过.

设 $r: U\to\mathbb{R}^3$ 为一曲面片, n 为其法向, $f\in C_c^\infty(\Sigma)$, 考虑一族

曲面 Σ_t 由 $r_t = r + tfn$ 给出. 则

$$g_{ij}(t) = \langle r_i + tf_i n + tf n_i,\ r_j + tf_j n + tf n_j\rangle$$

$$= g_{ij} + 2tf h_{ij} + t^2(f_i f_j + f^2\langle n_i, n_j\rangle)$$

其中 $h_{ij} = \langle r_i, n_j\rangle = \langle r_j, n_i\rangle$ 为 Weingarten 变换的系数矩阵

我们的目标是计算 $H=0$ 时的 $\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Area}\Sigma_t\Big|_{t=0}$, 故要计算面积

元 $d\sigma_t = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}\,dx$ 的展开. 我们有

$$\langle n_i, n_j\rangle = \langle W(r_i), W(r_j)\rangle = \langle W^2(r_i), r_j\rangle$$

由 Caley-Hamilton, $0 = W^2 - 2HW + KI = W^2 + KId$, 故

$$\langle n_i, n_j\rangle = -Kg_{ij}$$

记 $a_{ij} = f_i f_j - Kf^2 g_{ij}$

$$\det(g_{ij}(t)) = \det\begin{pmatrix} E+2tfL+t^2a_{11} & F+2tfM+t^2a_{12} \\ F+2tfM+t^2a_{21} & G+2tfN+t^2a_{22}\end{pmatrix}$$

$$= (EG-F^2) + 2tf(NE+LG-FM) + t^2\big(a_{11}G + a_{22}E + 4f^2LN - 4f^2M^2 - 2Fa_{12}\big) + O(t^3)$$

当然正如课上的计算, $2H = \frac{NE+LG-FM}{EG-F^2} = 0$ 的情况下, 第二项消失

来看第三项. 其中 $4f^2(LN-M^2) = 4f^2K(EG-F^2)$. 而

来看系数 $a_{11}G+a_{22}E-2Fa_{12}$. 事实上

$$
\begin{aligned}
&a_{11}G+a_{22}E-2Fa_{12}\\
&=(f_1^2-f^2KE)G+(f_2^2-fKG)E-2F(f_1f_2-fKF)\\
&=(f_1^2G+f_2^2E-2Ff_1f_2)-2K(EG-KF)f^2\\
&=(EG-KF)(g^{ij}f_if_j-2Kf)
\end{aligned}
$$

于是 $\det(g_{ij}(t))=\det(g_{ij})\left(1+t^2(2f^2K+|\nabla^{\Sigma}f|^2)+O(t^3)\right)$

Taylor 展开 $\sqrt{\det(g_{ij}(t))}=\sqrt{\det(g_{ij})}\sqrt{1+t^2(|\nabla^{\Sigma}f|^2+2f^2K)+O(t^3)}$

$$=\sqrt{\det(g_{ij})}\left(1+\frac{1}{2}t^2(|\nabla^{\Sigma}f|^2+2f^2K)+O(t^3)\right)$$

故 $\left.\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Area}\,\Sigma_t\right|_{t=0}=\left.\frac{d^2}{dt^2}\int_U\sqrt{\det(g_{ij})}\left(1+\frac{1}{2}t^2(|\nabla^{\Sigma}f|^2+2f^2K)+O(t^3)\right)dx\right|_{t=0}$

$$=\int_{\Sigma}(|\nabla^{\Sigma}f|^2+2Kf^2)\,d\sigma$$

$$=-\int_{\Sigma}f(\Delta_{\Sigma}f-2Kf)\,d\sigma$$

这就是曲面的第二变分公式. 注意到, 若 Σ 不在某一坐标区域内, 则可把其分为若干曲面片同样计算, 最后结果的形式是相同的, 即

Prop 3: 设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的可定向曲面, 法向 n. 令 $\Sigma_t=\Sigma+tnf$, $f\in C_c^{\infty}(\Sigma)$, 则

(1) $\left.\frac{d}{dt}\mathrm{Area}\,\Sigma_t\right|_{t=0}=2\int_{\Sigma}fH\,d\sigma$

(2) 若 $H=0$, 则 $\left.\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Area}\right|_{t=0}=\int_{\Sigma}(|\nabla^{\Sigma}f|^2+2Kf^2)\,d\sigma$

$$=-\int_{\Sigma}f(\Delta_{\Sigma}f-2Kf)\,d\sigma$$

以下定义刻画了一个极小曲面距面积极小的曲面有多远.

Def 4：设 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 是紧带边极小曲面，可定向

(1) 若 $\forall f\in C_c^\infty(\Sigma)$，有 $\int_\Sigma(|\nabla f|^2+2Kf)d\sigma\geq 0$，则称 Σ 是稳定的；

(2) $L_\Sigma=\Delta_\Sigma-2K$ 称为 Σ 的 Jacobi 算子，其负特征值数（计重数）称为 Σ 的指标.

注：这里的特征值是相对于 Dirichlet 问题而言的，即称 $\lambda\in\mathbb{R}$ 是 L_Σ 的特征值，指的是如下方程有非平凡解

$$\begin{cases} L_\Sigma u+\lambda u=0 & \text{在}\Sigma\text{内} \\ u=0 & \text{在}\partial\Sigma\text{上} \end{cases}$$

由泛函分析的 Hilbert-Schmidt 定理，以及 PDE 的紧嵌入定理知，L_Σ 的所有特征值为

$$\lambda_1<\lambda_2\leq\lambda_3\leq\cdots\longrightarrow\infty$$

故 Σ 的指标一定有限，且 Σ 稳定 $\Leftrightarrow$ $\lambda_1\geq 0$，并 $\exists u_1\in C_c^\infty(\Sigma)$，$u_1>0$，使 $L_\Sigma u_1+\lambda_1u_1=0$.

当然，作为 Prop 1 的推论，我们知道任一个极小图总是稳定的.

三. 极小曲面的等温参数与 Bernstein 定理

Prop 5：设 $r:U\to\mathbb{R}^3$ 为极小曲面，$r=(x,y,z)$，则

$$\Delta_\Sigma r=2Hn \iff \forall a\in\mathbb{R}^3\text{固定}, \Delta_\Sigma\langle r,a\rangle=2H\langle n,a\rangle$$

证：$\frac{\partial}{\partial x^i}\langle r,a\rangle=\langle r_i,a\rangle$，故 $\nabla^\Sigma\langle r,a\rangle=g^{ij}\langle r_i,a\rangle r_j$，则

$$\Delta_\Sigma\langle r,a\rangle=\frac{1}{\sqrt{\det G}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(g^{ij}\langle r_i,a\rangle\sqrt{\det G}\right)$$

$$=\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^j}\langle r_i,a\rangle+\langle r_{ij},a\rangle g^{ij}+g^{ij}\langle r_i,a\rangle\frac{1}{2\det G}\frac{\partial}{\partial x^j}\det G$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^j}\langle r_i,a\rangle=-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}g^{ik}g^{jl}\langle r_i,a\rangle=-g^{ik}g^{jl}\langle r_i,a\rangle\left(\langle r_{kj},r_l\rangle+\langle r_k,r_{lj}\rangle\right)$$

$$\langle r_{ij}, a\rangle g^{ij} = \langle r_{ij}, r_k\rangle\langle r_l, a\rangle g^{ij}g^{kl} + \langle r_{ij}, n\rangle\langle n, a\rangle g^{ij}$$

$$g^{ij}\langle r_i, a\rangle \frac{1}{2\det G}\frac{\partial}{\partial x^j}\det G = \frac{1}{2}g^{ij}\langle r_i, a\rangle g^{kl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}$$

$$= \frac{1}{2}g^{ij}\langle r_i, a\rangle g^{kl}\left(\langle r_{kj}, r_l\rangle + \langle r_k, r_{lj}\rangle\right)$$

$$= g^{ij}\langle r_i, a\rangle g^{kl}\langle r_{kj}, r_l\rangle$$

于是 $\Delta_\Sigma\langle r, a\rangle = \langle r_{ij}, n\rangle\langle n, a\rangle g^{ij} = g^{ij}h_{ij}\langle n, a\rangle = 2H\langle n, a\rangle$

#

特别地，若 Σ 是极小曲面，则其坐标函数都是调和的

现在设 $\Sigma = \Gamma_u$ 是 $u: \Omega \to \mathbb{R}$ 的图，那么 $G = \begin{pmatrix} 1+u_x^2 & u_xu_y \\ u_xu_y & 1+u_y^2 \end{pmatrix}$，

$G^{-1} = \frac{1}{1+|Du|^2}\begin{pmatrix} 1+u_y^2 & -u_xu_y \\ -u_xu_y & 1+u_x^2 \end{pmatrix}$，则 $\forall f: \Omega \to \mathbb{R}$，$f$ 自然视为

Γ_u 上 $(x, y, u(x,y))$ 处的函数，有

$$\Delta_\Sigma f = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+u_y^2}{\sqrt{1+|Du|^2}}f_x - \frac{u_xu_y}{\sqrt{1+|Du|^2}}f_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{u_xu_y}{\sqrt{1+|Du|^2}}f_x + \frac{1+u_x^2}{\sqrt{1+|Du|^2}}f_y\right)\right]$$

特别地，取 $f = x, y$ 为坐标函数，则由 $\Delta_\Sigma x = 0$，$\Delta_\Sigma y = 0$，知

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1+u_y^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{u_xu_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} = 0 \quad 5 \quad -\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_xu_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{u_x^2+1}{\sqrt{1+|Du|^2}} = 0$$

下设 Ω 单连通，由于

$$\frac{1+u_y^2}{\sqrt{1+|Du|^2}}dy + \frac{u_xu_y}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx \quad \text{和} \quad \frac{u_xu_y}{\sqrt{1+|Du|^2}}dy + \frac{u_x^2+1}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx$$

都是 Ω 上闭形式，故由 Poincare 引理，它们恰当，即 $\exists \xi, \eta$，使

$\xi_x = \frac{1+u_x^2}{\sqrt{1+|Du|^2}}$，$\xi_y = \frac{u_xu_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \eta_x$，$\eta_y = \frac{u_y^2+1}{\sqrt{1+|Du|^2}}$。$\xi_y = \eta_x$ 又使

$\exists\, \varphi = \varphi(x,y)$ 使 $\varphi_x = \xi$，$\varphi_y = \eta$。此时 φ 的 Hessian $H\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}G$，

$\det H\varphi = 1$. 考虑 Levy 变换 $\begin{cases} s = x + \xi(x,y) \\ t = y + \eta(x,y) \end{cases}$，则

$$\begin{cases} ds = (1+\xi_x)dx + \xi_y dy = \left(1 + \dfrac{1+u_x^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)dx + \dfrac{u_x u_y}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}dy \\ dt = \dfrac{u_x u_y}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}dx + \left(1 + \dfrac{1+u_y^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)dy \end{cases}$$

故 $(x,y) \mapsto (s,t)$ 的雅可比行列式 $J = I + \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}G$，且

$\det J = 2 + \dfrac{2+u_x^2+u_y^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} > 0$，故 $(x,y) \mapsto (s,t)$ 确为(非退化)的参数变换.

Prop 6: (s,t) 为 T_u 的等温参数，即其下 I 形如 $\lambda^2(ds^2+dt^2)$，$\lambda > 0$.

证: $ds^2 + dt^2 = \left(1 + 2\dfrac{1+u_x^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + \dfrac{(1+u_x^2)^2 + u_x^2 u_y^2}{1+|\nabla u|^2}\right)dx^2$

$+ 2\dfrac{u_x u_y}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\left(1 + \dfrac{2+u_x^2+u_y^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)dxdy + \left(1 + 2\dfrac{1+u_y^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + \dfrac{(1+u_y^2)^2 + u_x^2 u_y^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)dy^2$

$1 + 2\dfrac{1+u_x^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + \dfrac{1+u_x^2(|\nabla u|^2+2)}{1+|\nabla u|^2}$

$= (1+u_x^2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + \dfrac{1}{1+|\nabla u|^2}1\right) = (1+u_x^2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + 1\right)^2$

因此 $ds^2+dt^2 = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)^2\left((1+u_x^2)dx^2 + 2u_x u_y dxdy + (1+u_y^2)dy^2\right)$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)^2 I.$$

或 $$I = \left(\frac{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}{1+\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)^2 (ds^2 + dy^2)$$ #

Prop 7: 若 $\Omega = \mathbb{R}^2$，则 $(s,t) = L(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的双射.

证: 任给两点 $P_0 = (x_1, y_1)$，$P_2 = (x_2, y_2)$，令 $\gamma(t) = tP_1 + (1-t)P_0$，$h(t) = \varphi\circ\gamma$

$$h''(t) = (x_1 - x_0 \quad y_1 - y_0) H\varphi \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \geq 0 \ (H\varphi \geq 0)$$

故 $h'(1) - h'(0) = (x_1 - x_0)(\varphi_x(P_1) - \varphi_x(P_0)) + (y_1 - y_0)(\varphi_y(P_1) - \varphi_y(P_0))$

$$= (x_1 - x_0)(\xi(P_1) - \xi(P_0)) + (y_1 - y_0)(\eta(P_0) - \eta(P_1)) \geq 0$$

使 $|L(P_0) - L(P_1)|^2 = ((x_1 - x_0) + \xi(P_1) - \xi(P_0))^2 + ((y_1 - y_0) + \eta(P_1) - \eta(P_0))^2$

$$\geq (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = |P_1 - P_0|^2$$

因此 L 单. 另外由 $|L(P_0) - L(P_1)|^2 \geq |P_1 - P_0|^2$ 知 $L(\mathbb{R}^2)$ 既开又闭 (开用逆映射定理, 闭用定义取柯西列), 故 $L(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ #

Bernstein 定理: 设 $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 使 T_u 极小, 则 u 为线性函数.

证: 由 Prop 1.7, T_u 有定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的等温参数 (s, t),

$$I = \left(\frac{W}{1+W}\right)^2 (ds^2 + dt^2)$$

其下其 Gauss 曲率为 $K = -\left(\frac{1+W}{W}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \ln \frac{W}{1+W} \leq 0$

故 $\ln \frac{W}{1+W}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的次调和函数. 另一方面 $\ln \frac{W}{1+W} = -\ln(1 + \frac{1}{W}) \leq 0$

由 Liouville 定理, $\ln \frac{W}{1+W}$ 是常数, 进而 $K = 0$. $H = 0$ 与 $K = 0$ 推知 T_u 是平面, 进而 u 是线性函数 #

更一般地, 有

Thm 1.9: 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是完备、连通、可定向、稳定极小曲面, 则 Σ 是平面.

等温参数

所谓等温参数，指的是曲面Σ的坐标 (u,v)，使其下度量可写为 $\lambda^2(du^2+dv^2)$ 的形式，λ 是Σ上的正光滑函数.

在先前的作业中，我们知道，曲面上一定存在正交参数，显然，等温参数比正交参数更强，稍后我们也会看到其深刻的意义.

Thm 1：在任意一个曲面Σ上总是局部地存在等温参数.

以下证明来自陈省身.

为简便起见，先取曲面的正交参数 (x,y)，即

$$I = E\,dx^2 + G\,dy^2$$

令 $\omega^1 = \sqrt{E}\,dx$，$\omega^2 = \sqrt{G}\,dy$，则

$$I = \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2$$

在取复形式 $\phi = \omega^1 + i\omega^2$，那么 $I = \phi\bar{\phi}$. 现在，等温参数 (u,v) 的存在性等同于说，$\exists$ 复函数 $f = u+iv$，使 $df = \frac{1}{\rho}\phi$，则

$$I = \phi\bar{\phi} = |\rho|^2 df\,d\bar{f} = |\rho|^2(du^2+dv^2)$$

接下来我们会看到使用复坐标 $z = x+iy$ 的好处.

同样考虑复形式 $dz = dx+idy$，$d\bar{z} = dx-idy$，$\forall f \in C^\infty(D)$，$D\subset\mathbb{C}^2$ 为半径R的圆盘

$$f_z \triangleq \frac{1}{2}(f_x - if_y),\quad f_{\bar{z}} \triangleq \frac{1}{2}(f_x+if_y)$$

则 $df = f_x dx + f_y dy = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$. 则可以验证

$$F(\zeta,\bar{\zeta}) \triangleq -\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{f(z,\bar{z})}{z-\zeta}\,d\bar{z}\,dz \left(= \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(z,\bar{z})}{z-\zeta}\,dx\,dy\right)$$

满足 $F_{\bar{\zeta}} = f(\zeta,\bar{\zeta})$ （挖去一个点为 Green 公式）

回到 $df = \frac{1}{p}\varphi = \frac{1}{p}(\sqrt{E}dx + i\sqrt{G}dy)$

$$= \frac{1}{2p}\left((\sqrt{E}+\sqrt{G})dz + (\sqrt{E}-\sqrt{G})d\bar{z}\right)$$

对坐标做线性变换，使 $z=0$ 处 $E=G=1$，f 满足的方程是

$$\begin{cases} f_z = \frac{1}{2p}(\sqrt{E}+\sqrt{G}) \\ f_{\bar{z}} = \frac{1}{2p}(\sqrt{E}-\sqrt{G}) \end{cases}$$

消去 p 得 $f_z(\sqrt{E}-\sqrt{G}) = f_{\bar{z}}(\sqrt{G}+\sqrt{E})$，记 $a = \frac{\sqrt{E}-\sqrt{G}}{\sqrt{E}+\sqrt{G}}$，考虑如下方程

$$2\pi i f(\zeta,\bar{\zeta}) + \iint_D \frac{a f_z(z,\bar{z})}{z-\zeta} d\bar{z}dz = \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{D} \qquad (*)$$

$\mathbb{D}$ 是原来坐标区域内一个以 R 为半径，0 为心的圆盘，若 $(*)$ 成立，对 $\bar{z}$ 求导就有 $f_{\bar{z}} = a f_z$，$f_z(\sqrt{E}-\sqrt{G}) = f_{\bar{z}}(\sqrt{G}+\sqrt{E}) \triangleq \frac{1}{2p}$，那么原来想要的关系就成立，进而得到所需的等温参数。最后来考虑 $(*)$ 的可解性

Thm2：令 $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \le R\}$，$a \in C^\infty(\mathbb{D})$，$a(0)=0$，则

$$2\pi i f(\zeta,\bar{\zeta}) + \iint_D \frac{a f_z(z,\bar{z})}{z-\zeta} d\bar{z}dz = \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{D}$$

在 R 充分小的时候存在唯一解 $f \in C^\infty(\mathbb{D})$。

我们首先证明如下引理

Lem3：设 $g \in C^\infty(\mathbb{D})$ 满足 $|g| \le A$，$|\nabla g| \le B$，$|\nabla^2 B| \le C$

$$G(\zeta,\bar{\zeta}) \triangleq -\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{D}} \frac{g(z,\bar{z})}{z-\zeta} d\bar{z}dz$$

则 $|G| \le 4RA$，$|G_\zeta| \le 4RB$，$|\nabla G| \le 2(A+4RB)$ 与 $|\nabla G_\zeta| \le 2(B+4RC)$

C 是常数.

证：首先可以算出 $-\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{d\bar{z}dz}{z-\zeta}=\bar{\zeta}$，因此

$$G(\zeta,\bar{\zeta})-g(\zeta,\bar{\zeta})\bar{\zeta}=-\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{g(z,\bar{z})-g(\zeta,\bar{\zeta})}{z-\zeta}d\bar{z}dz$$

注意积分内容的收敛性不同，对 ζ 求导，有

$$G_\zeta(\zeta,\bar{\zeta})=\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{g(z,\bar{z})-g(\zeta,\bar{\zeta})}{(z-\zeta)^2}d\bar{z}dz$$

因此 $|G|\le\frac{A}{\pi}\iint_D\frac{dxdy}{|z-\zeta|}\le\frac{A}{\pi}\iint_{|z-\zeta|\le 2R}\frac{dxdy}{|z-\zeta|}=4AR$

$$|G_\zeta|\le\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{|g(z,\bar{z})-g(\zeta,\bar{\zeta})|}{|z-\zeta|^2}dxdy$$

$$\le\frac{B}{\pi}\iint_D\frac{dxdy}{|z-\zeta|}\le 4BR$$

由于 $G_{\bar{\zeta}}=g$，$|G_{\bar{\zeta}}|\le A$，故 $|\nabla G|\le 2(A+4BR)$，同样有 $|\nabla G_\zeta|$ 的估计 #

Thm2 的证明

归纳定义 $f_0=\frac{1}{2\pi i}\zeta$，$f_{n+1}=-\frac{1}{2\pi i}\iint_D\frac{a\frac{\partial f_n}{\partial z}}{z-\zeta}d\bar{z}dz$，则取 R 充分小，可设 $|a|\le M$，有 $|f_0|\le\frac{R}{2\pi}$，$\left|\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right|\le\frac{1}{2\pi}$，用 Lem3 归纳就有

$$|f_n|\le M(CMR)^n$$

$$|\nabla f_n|\le M(CMR)^n$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ 在 D 上一致、绝对收敛，于是便收敛到 $(*)$ 之解 f.

唯一性的验证和 Peano 定理中的类似 #

等温坐标下的几何量

1. $\Delta=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$ 恰是平面上的 λ^2 倍，故 Σ 上的函数 f（上\下）调和 $\Leftrightarrow$ f 在任一等温参数下（上\下）调和，因此有

Cor4：若 f 是 Σ 上的(上\下)调和函数，那么 f 满足相应的极值原理

2. Gauss 曲率

由于 $I=\lambda^2(du^2+dv^2)$，故 $\omega^1=\lambda du$，$\omega^2=\lambda dv$ 使

$$I=\omega^1\omega^1+\omega^2\omega^2$$

$d\omega^1=-\lambda_v du\wedge dv$，$a=\dfrac{d\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}=-\dfrac{\lambda_v}{\lambda^2}$

$d\omega^2=\lambda_u du\wedge dv$，$b=\dfrac{\lambda_u}{\lambda^2}$，则 $\omega_1^2=\dfrac{1}{\lambda^2}(-\lambda_v\omega^1+\lambda_u\omega^2)$，

$$=\frac{1}{\lambda}(-\lambda_v du+\lambda_u dv)$$

$d\omega_1^2=((\log\lambda)_{vv}+(\log\lambda)_{uu})du$，

$$K=-\frac{d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\lambda$$

$$=-\Delta_I\log\lambda$$

Cor(共形度量的 Gauss 曲率)：设 Σ 上有度量 g，则 $\forall\varphi\in C^\infty(\Sigma)$，$\varphi>0$，考虑共形度量 $h=\varphi^2 g$，则若 (u,v) 为 g 等温参数 $g=\lambda^2(du^2+dv^2)$，则 $h=\varphi^2\lambda^2(du^2+dv^2)$ 也是等温参数，故

$$K_h=-\frac{1}{\varphi^2\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\varphi\lambda$$

$$=-\frac{1}{\varphi^2}\Delta_g(\log\varphi+\log\lambda)$$

$$=\frac{1}{\varphi^2}(K_g-\Delta_g\log\varphi)$$

#

最后说明等温参数的意义

设同一个坐标区域内有两个等温参数 (x,y) 和 (u,v)，我们来考虑参数变换 $(x,y)\mapsto(u,v)$。

即设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 则

$$I=\lambda^2(du^2+dv^2)$$
$$=\lambda^2\left((u_x^2+v_x^2)dx^2+2(u_xu_y+v_xv_y)dxdy+(u_y^2+v_y^2)dy^2\right)$$

既然 (x,y) 也是等温参数, 那么

$$\begin{cases} u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2 \\ u_xu_y+v_xv_y=0 \end{cases}$$

因此 $u_x=\varepsilon v_y$, $u_y=-\varepsilon v_x$. $\varepsilon=\pm1$ 如果 (x,y), (u,v) 还是定向相容的

即 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}>0$, 则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ -\varepsilon u_y & \varepsilon u_x \end{vmatrix}=\varepsilon(u_x^2+u_y^2)$$

故必有 $\varepsilon=1$. 但 $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$ 是 (u,v) 的 Cauchy-Riemann 方程.

若用复数表示, $z=x+iy$, $w=u+iv$, 那么 $w=w(z)$ 是全纯函数

Cor6: 若 Σ 是可定向曲面, 则可选取 Σ 的一组坐标, 使其间的坐标变换是全纯的. 换而言之, 可定向曲面总有黎曼面, 或者说一维复曲线的结构.

这背后有更为深刻的理论. 任给一个 $2n$ 维流形 M, 若其上有一近复结构 J, 即线性的 $J: TM\to TM$, 使 $J^2=-Id$, 那么这个近复结构的可积性条件, 或者说使 J 诱导一个复结构的唯一障碍, 就在于其 Nijenhuis 张量是否消失.

一张曲面上 $\phi=\omega^1+i\omega^2$ 总是诱导一个近复结构, 而 Nijenhuis 张量也总是消失. 于是等温参数的存在性实际上是这个大定理在低维时

的特殊情形.