实分析(H), 第1次课

任广斌(中国科大)

2022-2-23

助教:　　田珺昊

- 周三：第1节、第2节.

  7:50–8:35,　　8:40–9:25

- 周五：第3节、第4节、第5节.

  9:45–10:30,　　10:35–12:05

- 教材：周民强《实变函数论》第三版 2016
- 参考文献:
  - Stein 《Real Analysis》2005
  - Simon 《Real Analysis》2015
  - Tao 《An Introduction to Measure Theory》2011
  - Rudin 《实分析与复分析》Ch 1-2，1990
  - Folland 《Real Analysis》1999
  - MacDonald and Weiss 《A Course in Real Analysis》2005
  - 严加安《测度论讲义》2004
  - 齐民友《重温微积分》Ch 4, 2004

实分析简介

- 数学的定位:

  人类是宇宙的眼睛,　数学是人类的眼睛.

- 量子物理和相对论, 已成为数学的一部分:

量子物理	相对论
Banach空间上的谱理论	流形和纤维丛理论

从分析的角度看数学

- 分析：
  数学分析　(导数和积分)
  复分析　(ℂ上数学分析)
  实分析　(什么是积分, 积分定义的最广场所)
  泛函分析　(无限维数学分析)
  偏微分方程　(数学分析的应用)
  概率论　(数学分析的拓展)

- 代数
  线性代数　(数学分析线性化)
  抽象代数　(什么是加减乘除)

- 几何
  微分几何　(什么导数, 导数定义的最广场所)
  点集拓扑　(什么是连续)

实分析是数学分析推广

- $C[a,b] \subset R[a,b] \subset L^1[a,b]$ (Lebesgue可积)
- $f \in R[a,b] \Longleftrightarrow f$有界且几乎处处连续
- Lebesgue 积分是Riemann积分的推广
- Lebesgue于1902年建立Lebesgue积分理论
- Schwartz于1952年建立广义函数理论理论
  (好函数通过极限能达到的最远的地方)

微积分基本定理及其推广

$$C[a,b] \underset{\dfrac{d}{dx}}{\overset{\displaystyle\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

$$L^1[a,b]/\sim \underset{\dfrac{d}{dx}}{\overset{\displaystyle\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

- 实分析的抽象积分理论是积分理论推广的最广场所.
- 微分几何的流形和纤维丛理论是导数推广的最广场所.

从仿生学看Lebesgue可积函数

数学框架结构, 打包处理, 将个体放到整体进行研究:

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$	$(R[a,b], \|\cdot\|)$	$(L^1[a,b], \|\cdot\|)$
$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}$	$\\|f\\| = \int_a^b \|f(x)\|dx$	$\\|f\\| = \int_a^b \|f(x)\|dx$
完备	不完备	完备

$R[a,b]$非完备

分析理论需要建立在完备的集合上. 处理极限框架需要足够的大.

$$R[a,b] \subsetneqq \overline{R[a,b]} = L^1[a,b]$$

下列赋范线性空间不完备

$$(R[-1,1], \|\cdot\|_{L^1}).$$

反例：Cantor集合的特征函数.

Lebesgue积分起源: 对于y轴分割

- 有界非负函数$f:[a,b]\longrightarrow[0,M)$, 对于$y$轴分割

$$\pi: \qquad 0=y_0<y_1<\cdots<y_n=M.$$

- $[a,b]=\bigsqcup_{i=1}^{n} f^{-1}[y_{i-1},y_i), \qquad [0,M)=\bigsqcup_{i=1}^{n}[y_{i-1},y_i)$

$$f|_{f^{-1}[y_{i-1},y_i)}: f^{-1}[y_{i-1},y_i)\longrightarrow[y_{i-1},y_i) \tag{1}$$

- 考察长度非常非常小的区间$[y_{i-1},y_i)$:
  - 该区间上, 函数值认为完全相同, 都等于$y_{i-1}\simeq y_i$.
  - (1)视为常值函数, 其相应的曲边梯形面积为

$$m(f^{-1}[y_{i-1},y_i))\ y_{i-1}.$$

Lebesgue积分=Riemann积分+测度论

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n m(f^{-1}[y_{i-1}, y_i))y_{i-1} \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n \Big(m(f^{-1}[y_{i-1}, +\infty)) - m(f^{-1}[y_i, +\infty))\Big)y_{i-1} \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n m(f^{-1}[y_i, +\infty))(y_i - y_{i-1}) \\
&= \int_0^M m(f^{-1}[y, +\infty))dy
\end{aligned}
$$

由微元法看蛋糕表示

Lebesgue积分=Riemann积分+测度论(续)

- 上述积分是单调函数的Riemann积分.
- 问题：如何定义任意集合的Lebesgue测度？

存在Lebesgue不可测集合.

- Lebesgue可积的必要条件:

$m(f^{-1}[y,+\infty))$有意义

$\Longleftrightarrow$ $\forall y, \quad \{x \in [a,b] : f(x) > y\}$是Lebesgue可测集

$\Longleftrightarrow$ 开集的原像是Lebesgue可测集

$\Longleftrightarrow$ f是Lebesgue可测函数

实分析的内容

- 实分析————测度论+积分论

- 测度论 $\|$ 积分论

测度论核心：Littlewood三原理

实分析和数学分析的血缘关系：

可测集	可测函数	收敛可测函数列
开集	连续函数	一致收敛函数列
测度正则性	Lusin定理	Egorov定理

Lebesgue测度论: 外测度

- 用可列个开矩体覆盖给定集合$E \subset \mathbb{R}^n$

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \qquad I_k = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

- 可列个开矩体的体积近似代替E的外测度：

$$m^*(E) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|, \qquad |I_k| = I_k\text{的体积}.$$

- 该粗糙值给出的最小可能,就是精确值

$$m^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Big\}.$$

$$(\text{有限求和} \Longrightarrow m([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1)$$

Lebesgue测度论: 测度(长度, 面积, 体积的推广)

- A是Lebesgue可测集$\overset{E\subset\mathbb{R}^n}{\underset{A\subset\mathbb{R}^n}{\Longleftrightarrow}}$ A将任意集合E 很好地一剖为二:

$$\begin{aligned} E &= (E\cap A)\bigsqcup(E\cap A^c) \\ m^*(E) &= m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c). \end{aligned} \tag{2}$$

  - 假设$A\subset I$, I是有界开矩体.

$$A\text{的内测度} := |I| - A^c\text{的外测度}$$

(取余集是集合论中最重要的对合变换: 内外，开闭，有界无界)

  - 在(2)中, 取$E=I$, 则

$$\text{内测度} = \text{外测度}.$$

- 若A是Lebesgue可测集, 则

$$A\text{的Lebesgue测度} = m(A) := m^*(A).$$

Lebesgue积分论

集合论		函数论
A	$=$	χ_A
$m(A)$	$=$	$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)dm(x)$
测度		积分

- 测度论是特征函数的积分论.
- 积分论是测度论的升华, 是关于绝对连续测度的测度理论
- 积分是一个测度(积分是面积).

$$f \in L^+(E) \Longrightarrow \int_E f dm = m(\underline{G}(f))$$

其中$\underline{G}(f) = \left\{(x,y) : x \in E, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$ = f的下方图形.

抽象测度论: 测度

测度空间(Ω, Σ, μ)

- Ω是非空集合.
- $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ 是σ-代数.
- $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$是测度：
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$.

例子: Harr测度, Radon测度, Hausdorff测度, Dirac测度.

抽象积分论: 可测函数的积分

- 可测函数 $= \chi_A + (+, \quad \cdot, \quad \lim)$
  $=$ 可测特征函数通过代数运算和极限运算生成

- 可测函数重要特性：对于极限运算封闭.

- $$\int_\Omega f\, d\mu = \text{特征函数的积分+代数运算+极限运算}$$

  - $f_n = \sum\limits_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{f^{-1}[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})} + 2^n \chi_{f^{-1}[2^n, +\infty)} \nearrow f$

  - $\int_\Omega f\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu$

抽象积分论的核心内容: 交换积分次序的等价定理

- 单调收敛定理:

$$f_k \in L^+(\Omega), \quad f_k \nearrow f \Longrightarrow \int_\Omega f_k \, d\mu \nearrow \int_\Omega f \, d\mu$$

- Lebesgue控制收敛定理:

$$f_k \in L(\Omega), \quad |f_k| \leqslant g \in L^1(\Omega, d\mu), \quad f_k \to f$$

$$\Longrightarrow \qquad f_k \xrightarrow{L^1} f, \qquad \int_\Omega f_k \, d\mu \longrightarrow \int_\Omega f \, d\mu$$

- Fatou引理:

$$f_k \in L^+(\Omega) \Longrightarrow \int_\Omega \varliminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu$$

交换积分次序的等价定理(续)

- Fubini定理:

$$(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)\text{是}\sigma\text{有限测度空间}, i = 1, 2.$$

$$f \in L^+(\Omega_1 \times \Omega_2) \cup L^1(\Omega_1 \times \Omega_2). \quad \text{则}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mu_1 \times \mu_2 &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\
&= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)
\end{aligned}$$

- 测度σ可加性:

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^\infty \chi_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_\Omega \chi_{A_k} d\mu$$

极限=级数, 级数是一种积分

- 离散测度空间 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$

- 计数测度

$$\mu(A) = \begin{cases} A\text{的元素个数}, & A\text{是有限集} \\ \\ +\infty, & A\text{是无限集}. \end{cases}$$

- 任意函数 $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty)$ 必可测.

级数是关于计数测度的积分

假设$f \geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} f(x)\, d\mu(x) &= \int_{\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} f(x)\chi_{\{k\}}(x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f(x)\chi_{\{k\}}(x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f(k)\chi_{\{k\}}(x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\mu(\{k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k
\end{aligned}$$

实分析是现代分析基石

- 实分析: 具体Banach空间$L^1(\Omega)$, 积分和测度工具
- 概率论: 实分析+相关性和无关性结构。
- 泛函分析: 抽象Banach空间, 谱理论是量子物理的出发点
- 偏微分方程: 广义解和古典解.
  函数是测度，测度是正的广义函数.

$$\text{函数} \xrightarrow{\text{测度}} \text{广义函数}$$

分析是极限的艺术

- 实分析充满了极限过程:

$$\text{规则情形} \xrightarrow[\text{Littlewood三原理, 测度和积分的构造}]{\text{极限过程}} \text{不规则情形}$$

实分析(H), 第2次课

任广斌(中国科大)

2022-2-25

Ch1 集合论(Cantor俄国1845-1918)

本章内容: 集合论—测度论的基础.

本讲要点:

- 集合的极限
- 推广的数学归纳法
- 两个无穷集合, 哪一个元素更多?

集合论公理体系的重要性

- 近代数学为何没有在中国建立起来？

外因	内因
数学被视为旁门	缺少符号系统
周易占统治地位	

集合论公理体系的局限性

Theorem 1

哥德尔不完备性定理:

不存在万能的公理体系: 利用该体系能证明任何数学真理.

数学：宗教———逻辑：直觉———局限：无限

- 数学不是万能的, 没有数学是万万不能的。

§1 集合的极限

- 集合论是一切数学的基础:

  所有数学概念都需要直接或间接地利用集合来定义.

集合概念(描述)	集合论公理
地心	地壳

集合论和函数论的统一

- 集合X, 视为宇宙.　　$A \subset X$

- 特征函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

- 集合视为函数

$$A = \chi_A(x), \qquad A = \chi_A^{-1}\{1\}$$

集合论和函数论的统一(续)

A	$=$	$\chi_A(x)$
集合论		函数论
并、交、差、极限运算		加、减、乘、除、极限运算
$A \subset B$		$\chi_A \leqslant \chi_B$
$A \cap B$	$=$	$\chi_A \chi_B$
$A \sqcup B$	$=$	$\lvert\chi_A - \chi_B\rvert$

集合的上极限

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim} A_k &= \overline{\lim_{k\to\infty}} \chi_{A_k}(x) \quad \text{(只取0,1的特征函数=集合)} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{无穷多项}\chi_{A_k}(x) = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
&= \left\{ x \in X : \quad x \in \text{无穷多个}A_k \right\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k
\end{aligned}
$$

集合的下极限

$$
\begin{aligned}
\varliminf_{k\to\infty} A_k &= \varliminf_{k\to\infty} \chi_{A_k}(x) \quad \text{(只取0,1的特征函数=集合)} \\
&= \begin{cases} 1, & x \in \text{所有} A_k \text{ (只允许有限个例外)} \\ \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
&= \left\{ x \in X : \quad x \in \text{所有} A_k \text{ (只允许有限个例外)} \right\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k
\end{aligned}
$$

集合的极限

$$\lim A_k := \varliminf_{k\to\infty} A_k \xlongequal{\text{在该等式成立条件下}} \varlimsup_{k\to\infty} A_k$$

单调集合列极限存在

$$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\uparrow \quad\Longrightarrow\quad A_1\subset A_2\subset\cdots\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}A_k$$

$$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\downarrow \quad\Longrightarrow\quad A_1\supset A_2\supset\cdots\supset\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}A_k$$

集合的极限

$$\overline{\lim} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\underline{\lim} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \underline{\lim}_{k\to\infty} A_k \subset \overline{\lim}_{k\to\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

集合的极限

$\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k$	$\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$
$\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k$	$\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geqslant n} A_k$

例题

$$\left\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to f(x)\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < 1/k\right\}$$

ϵ	N
$\bigcap_{k=1}^{\infty}$	$\underline{\lim}_{n\to\infty}$

$$\left\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \nrightarrow f(x)\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1/k\right\}$$

§2 Zorn引理

归纳法	Zorn引理
可数	不可数
一步一脚印	一步登天膨胀法

Zorn引理特点:　命题从小到大扩充, 扩充到极大元.
用反证法证明极大元即为所求.

Zorn引理:　若偏序集合X的每一个全序子集合都具有上界,
则X具有极大元.

集合中的关系

- X上的关系$R \Longleftrightarrow R \subset X \times X$. $(x, y) \in R \xLeftrightarrow{\text{记为}} xRy$.

- 例如: $X = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \leqslant y\}$

$(x, y) \in R \xLeftrightarrow{\leqslant\text{关系}} x \leqslant y$.

偏序关系和全序关系

- 偏序集合$(X,\leqslant)$: X上关系满足

(1) 自身性: $\forall\ x \in X \Longrightarrow x \leqslant x$

(2) 反对称性: $x \leqslant y, \quad y \leqslant x \xrightarrow{\forall x,y\in X} x = y$

(3) 传递性: $x \leqslant y, \quad y \leqslant z \xrightarrow{\forall x,y,z\in X} x \leqslant z$

- 全序集合$(X,\leqslant)$: 还满足

(4) 全序性: $\forall\ x,\ y \in X \Longrightarrow x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$.

极大元和上界

- 极大元(没有更大): 设$(X, \leqslant)$是偏序集，$x_0 \in X$.

  如果$x_0 \leqslant y \in X \Longrightarrow y = x_0$, 那么称$x_0$是$X$的一个极大元.

- 上界: 设$(X, \leqslant)$是偏序集， $E \subset X$, $x_0 \in X$.

  如果 $\forall\, y \in E \Longrightarrow y \leqslant x_0$, 那么称x_0是E的一个上界.

选择公理

- 选择公理:

$$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \quad A\neq\phi, \quad X_\alpha\neq\phi \quad \Longrightarrow \quad \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \neq \phi.$$

其中

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha := \left\{ f: A\to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \quad f(\alpha)\in X_\alpha, \ \ \forall\, \alpha\in A \right\}.$$

- 选择公理与Zorn引理等价.

选择公理(续)

- 选择公理:

$$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \quad A \neq \phi, \quad X_\alpha \neq \phi \quad X_\alpha\text{互不相交}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{存在} Y \subset \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \quad Y \cap X_\alpha \text{是独点集}, \quad \forall \alpha \in A.$$

集合	等价类	代表元
学校	班级	班长
$\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$	X_α	Y

势(基数, Cardinality)

- $X = \{a_1, \cdots, a_n\} \Longrightarrow X$的势 $= \bar{\bar{X}} = n$

Def

$$\bar{\bar{X}} \leqslant \bar{\bar{Y}} \Longleftrightarrow \exists 单射 f : X \to Y.$$

$$\bar{\bar{X}} \geqslant \bar{\bar{Y}} \Longleftrightarrow \exists 满射 f : X \to Y.$$

$$\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{Y}} \Longleftrightarrow \exists 双射 f : X \to Y.$$

良定性

- $$\bar{\bar{X}} \leqslant \bar{\bar{Y}} \Longleftrightarrow \bar{\bar{Y}} \geqslant \bar{\bar{X}}$$

$\Longrightarrow$: 设$\exists$单射$f: X \to Y$, 需要构造满射$g: Y \to X$

$$\text{定义} \qquad g|_{f(X)} = f^{-1}, \qquad g|_{Y \setminus f(X)} = x_0.$$

$\Longleftarrow$: 设$\exists$满射$g: Y \to X$, 需要构造单射$f: X \to Y$.

$$\text{(选择公理)}\exists \quad Z \subset \bigsqcup_{x \in X} g^{-1}(x), \qquad Z \cap g^{-1}(x)\text{是独点集}$$

$$\text{定义} \qquad \begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto Z \cap g^{-1}(x)\text{中的独点} \end{aligned}$$

势是全序关系

- $(2^X, \subset)$是偏序集

$$2^X := X\text{的所有子集合全体}$$

势是全序关系

- 函数视为集合: $f = \text{Graph } f$

$$f : X \longrightarrow Y, \qquad \text{Graph } f = \{(x, f(x)) \subset X \times Y\}$$

集合论	函数论
A	χ_A
$\text{Graph}f$	f
集合的包含关系(偏序)	函数的延拓

势是全序关系(续)

- $\forall$ 集合$X, Y \Longrightarrow \bar{\bar{X}} \leqslant \bar{\bar{Y}}$ 或者 $\bar{\bar{Y}} \leqslant \bar{\bar{X}}$.

Zorn引理使用范例：稳扎稳打、得寸进尺、一步登天三步骤。

步骤一：构造偏序集。

$$\Gamma := \left\{ f : A \longrightarrow Y \mid f\text{是单射}, A \subset X \right\} \subset 2^{X \times Y}$$

$$\xrightarrow[\Gamma \neq \emptyset, (\Gamma, \subset)\text{是偏序集}]{\text{Zorn引理}} \quad \Gamma\text{具有极大元} \quad f : A \longrightarrow f(A) \quad \text{双射}.$$

势是全序关系(续)

步骤二：断言极大元使得结论成立。

断言: $A = X$ 或者 $f(A) = Y$.

由断言可导出$f : X \longrightarrow Y$ 是单射或$f : A \longrightarrow Y$是满射.

步骤三：利用反证法证明断言。

反证法: 假设断言不成立, 则存在映照

$$\begin{aligned} f : A \sqcup \{x_0\} &\longrightarrow f(A) \sqcup \{y_0\} \\ x_0 &\longmapsto y_0 \end{aligned}$$

与f是极大元矛盾

作业

P.13　第1, 2, 3题

实分析(H), 第9次课

任广斌(中国科大)

2022-3-23

本节主要内容

Ch3 可测函数

- 可测函数
- 可测函数关于运算的封闭性

Ch2和Ch3关系: 提升

集合论		特征函数的函数论	函数论
A	=	χ_A	$f = (\chi_A, +, \cdot, \lim)$
可测集	=	可测函数	可测函数
$m(A)$	=	$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\, dm(x)$	$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dm(x)$
测度		积分	积分
Ch2			Ch3

实分析中的陷阱：来自测度值域的代数性质

- 测度论中的陷阱:

$$m(E_1) - m(E_2) = (+\infty) - (+\infty) \text{ 无意义.}$$

(做测度减法的运算需要避开的陷阱)

- 积分论中的陷阱:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_1}(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_2}(x)dx = (+\infty) - (+\infty) \text{ 无意义.}$$

(可测函数=$(\chi_A, +, \cdot, \lim)$)可能不可积, 需要剔除陷阱, 产生可积子类)

可测函数起源

- 曲边梯形面积的推广中, 对y轴进行分割, 非负有界函数围成的曲边梯形面积有定义的前提条件是函数可测. 这源于没有一把万能的尺子来定义测度.

- 曲边梯形面积是带有符号的面积, 在实轴上方为正, 否则为负. 为了避开$+\infty-(+\infty)$陷阱, 需要将可测函数类缩小到可积函数类.

- 在抽象理论中, 可测函数是与连续函数地位相同的函数类, 分别隶属于实分析和点集拓扑. 广义实值可测函数类对于代数和极限运算封闭. 可积函数全体构成Banach空间.

可测函数

- 抽象可测函数

$$f:(X,\Gamma_X)\longrightarrow(Y,\Gamma_Y)\text{可测}\quad\overset{def}{\Longleftrightarrow}\quad f^{-1}(\Gamma_Y)\subset\Gamma_X$$

(可测集的原像是可测集)

- 抽象连续函数

$$f:(X,\tau(X))\longrightarrow(Y,\tau(Y))\text{连续}\quad\overset{def}{\Longleftrightarrow}\quad f^{-1}(\tau(Y))\subset\tau(X)$$

(开集的原像是开集)

可测函数等价刻画

- 可测函数利用生成元刻画

$$f:(X,\Gamma_X)\longrightarrow(Y,\Gamma_Y)\text{可测}\iff f^{-1}(\mathscr{F})\subset\Gamma_X,\ \sigma(\mathscr{F})=\Gamma_Y.$$

(生成元集合$\mathscr{F}$中可测集的原像可测)

证明: $\Gamma:=\{E\in\Gamma_Y:f^{-1}(E)\subset\Gamma_X\}$

$$\mathscr{F}\subset\Gamma,\qquad \Gamma\text{是}\sigma\text{代数}\Longrightarrow\Gamma_Y\subset\Gamma$$

例题

- 存在$[0,1]$区间的同胚, 不满足: 可测集的原像是可测集.

    - 取$[0,1]$严格单调的同胚:

$$f := \frac{1}{2}(\text{Cantor函数}+\text{恒等函数}).$$

    - $[0,1]$的剖分:

$$\begin{aligned} [0,1] &= C \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}, \qquad |I_{n,k}| = \frac{1}{3^n} \\ f[0,1] &= f(C) \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} f(I_{n,k}), \qquad f[0,1] = [0,1]. \end{aligned}$$

续

- 在开区间$I_{n,k}$上:

$$f|_{I_{n,k}} \xlongequal[\text{限制于}I_{n,k}]{\text{Cantor 函数为常数}} \frac{1}{2}\text{常数} + \frac{1}{2}\text{恒等}\Big|_{I_{n,k}} = \text{平移} + \frac{1}{2}\text{伸缩}.$$

$$\Longrightarrow m(f(I_{n,k})) = \frac{1}{2}m(I_{n,k}), \qquad m(f(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k})) = \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow m(f(C)) = \frac{1}{2}.$$

续

$$m(f(C)) > 0 \Longrightarrow \text{存在不可测集} W \subset f(C)$$

- $g := f^{-1}, \qquad Z := g(W) \subset g(f(C)) = C.$

- Lebesgue可测集Z的原像$g^{-1}(Z) = W$不是Lebesgue集.

注记： 零测集Z不是Borel集. (否则$W = g^{-1}(Z) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$)

Lebesgue可测函数

- 设E是$\mathbb{R}^n$ 上可测集.

$$\mathscr{L}(E) := \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \cap E = E\text{上Lebegue } \sigma\text{代数}.$$

- $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue 可测:

$$f : (E, \mathscr{L}(E)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))\text{可测}.$$

- 值域$\mathbb{R}$中, 默认的σ代数是Borelσ代数$\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Borel σ代数

- Borel σ代数是拓扑学和测度论的桥梁, 兼顾连续和可测.
    - 连续必可测
    - 集合的可测和函数的可测相容$A = \chi_A$.

Borel σ代数生成元

- Borel σ代数的生成

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\tau(\mathbb{R})) \\
&= \sigma\Big\{(a, +\infty): \quad a \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \sigma\Big\{[a, +\infty): \quad a \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \sigma\Big\{[a, b): \quad a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\Big\}.
\end{aligned}
$$

注意: $(a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus (b - \frac{1}{n}, +\infty)) \cap (a, +\infty)$.

Lebesgue可测判别准则

- Lebesgue可测函数判别准则.

$$
\begin{aligned}
& f: E \longrightarrow \mathbb{R}\ \text{Lebesgue可测} \\
= \ & \text{开集的原像可测} \\
= \ & \text{右半开直线}(a, +\infty)\text{的原像可测} \\
= \ & \text{半开半闭有界区间}[a, b)\text{的原像可测.}
\end{aligned}
$$

Lebesgue可测函数的积分=Riemann积分+测度论

- Lebesgue可测函数的积分

$$\int_a^b f(x)dm(x) \xlongequal{0\leqslant f<M} \int_0^M m(f^{-1}[y,+\infty)) \downarrow dy.$$

$\overline{\mathbb{R}}$值Lebesgue可测函数

扩充实轴$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

$$\mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \quad := \quad \text{可测集E上Lebesgue可测函数全体}$$

$$\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \quad := \quad \text{可测集E上}\overline{\mathbb{R}}\text{值Lebesgue可测函数全体.}$$

$\overline{\mathbb{R}}$值Lebesgue可测函数(续)

- 研究$\overline{\mathbb{R}}$值Lebesgue可测函数的理由.
  - $\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$关于上、下极限运算封闭, 比$\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$具有优越性.
  - 将a.e.相等视为恒等时

$$L^1(E,\mathbb{R}) = L^1(E,\overline{\mathbb{R}}).$$

扩充实轴可视为闭区间

- 扩充实轴与闭区间的双射对应:

$$\begin{aligned} \Phi : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\longmapsto \arctan x \end{aligned}$$

- 类似单点紧化

扩充实轴的距离

- $\overline{\mathbb{R}}$是度量空间:

距离拉回(Φ是等距)

$$\mathrm{dist}(x, y) := |\Phi(x) - \Phi(y)|.$$

扩充实轴的拓扑

- $\overline{\mathbb{R}}$是度量空间：开集拉回(Φ是同胚),

  - $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$取子空间拓扑

$$(X,\tau)\text{是拓扑空间} \xRightarrow[\text{子空间拓扑}]{E\subset X} (E, \tau|_E)\text{是拓扑空间}.$$

  - $\overline{\mathbb{R}}$是紧集, 类似单点紧化.

  - $\overline{\mathbb{R}}$中的拓扑:

$$\tau(\overline{\mathbb{R}}) = \text{由}(a,b),\ (a,+\infty],\ [-\infty,b)\text{生成}.$$

- 扩充实数的Borel σ 代数.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) &= \sigma(\tau(\overline{\mathbb{R}})) \\
&= \sigma\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\} \\
&= \sigma\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\} \\
&= \{A \sqcup B : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad B = \emptyset, \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{+\infty, -\infty\}\}
\end{aligned}
$$

扩充实值的Lebesgue可测函数

- 扩充实值Lebesgue可测函数判别准则.

$$
\begin{aligned}
& f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ Lebesgue可测} \\
\Longleftrightarrow \quad & f: (E, \mathscr{L}(E)) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})) \text{ Lebesgue可测} \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{开集的原像可测}, \{+\infty\}, \{-\infty\}\text{的原像可测} \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{右半开直线的原像可测}, \{+\infty\}, \{-\infty\}\text{的原像可测} \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{半开半闭有界区间的原像可测}, \{+\infty\}, \{-\infty\}\text{的原像可测}
\end{aligned}
$$

良定性:

- 良定性:

  实值函数$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$可自然地视为扩充实值函数$f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

  两者可测性一致.

可测关于复合运算的封闭性

- 复合运算:

$$f \in C(\mathbb{R}^n), \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n\text{可测} \Longrightarrow f \circ g\text{可测}.$$

证: $\forall$ 开集$G \subset \mathbb{R} \Longrightarrow (f \circ g)^{-1}(G) = g^{-1}(f^{-1}(G))$可测.

可测关于代数运算的封闭性

- 直乘积:

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \Longrightarrow (f, g) : E \longrightarrow \mathbb{R}^2\text{可测}$$

证: 记$F = (f, g)$, 则

$$F^{-1}([a_1, b_1) \times [a_2, b_2)) = f^{-1}([a_1, b_1)) \cap g^{-1}([a_2, b_2))\text{可测}.$$

可测关于代数运算的封闭性续

- 加法、数乘: $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$可测 $\Longrightarrow f + g, \quad \lambda f \quad f \cdot g$可测.

证: 令

$$F : E \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F = (f, g)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y) = x + y$$

$$\Longrightarrow \qquad h \circ F(x) = f(x) + g(x) \text{ 可测.}$$

可测关于极限运算的封闭性

- 极限运算:

$$f_k \in \mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \quad \Longrightarrow \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k, \quad \underline{\lim_{k\to\infty}} f_k \in \mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}).$$

证: 令$g = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, 则

$$g^{-1}(a,+\infty] = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}(a,+\infty] \Longrightarrow g\text{可测}.$$

- $f, g \in \mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \Longrightarrow \max\{f,g\},\ \min\{f,g\},\ f^+, f^-,\ |f| \in \mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$.

零测集的作用

- 零测集在集合论中起作完备化的作用:

  Lebesgue可测集=Borel集±零测集.

- 零测集在函数论中不影响可测性、可积性、积分值.

$$f \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xLeftrightarrow{f \overset{a.e.}{=} g} g \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}).$$

- 积分论中无法区别零测集:

  两个函数在任意集合上积分相同$\Longleftrightarrow$ 它们几乎处处相等.

- 积分论中涉及的相等是几乎处处相等.

  某性质a.e.成立$\Longleftrightarrow$除去一个零测集成立.

几乎处处收敛

- $\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$关于a.e.收敛封闭.

证明: 设$f_k \in \mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$, $\quad f_k \xrightarrow{a.e.} f$.

$$\Longrightarrow m(E\setminus A)=0, \quad 其中A=\{x\in E: \lim f_k(x)=f(x)\}$$

$$\Longrightarrow f_k\in\mathscr{L}(E\setminus A,\overline{\mathbb{R}}) \qquad f_k\in\mathscr{L}(A,\overline{\mathbb{R}})$$

$$\Longrightarrow f\in\mathscr{L}(E\setminus A,\overline{\mathbb{R}}), \qquad f\in\mathscr{L}(A,\overline{\mathbb{R}})$$

$$\Longrightarrow f\in\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}).$$

可测性是局部性质(作为连续性的推广)

- 可测是局部性质

$$f \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xLeftrightarrow{E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k,\ E_k\text{可测}} f|_{E_k} \in \mathscr{L}(E_k, \overline{\mathbb{R}}), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

证明: $\quad f^{-1}(a, \infty] = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (f|_{E_k})^{-1}(a, \infty].$

不可测函数

- 绝对可测$\not\Rightarrow$ 可测

  例如:$\chi_W - \chi_{W^c}$,　W不可测.

- 可测关于不可数取上确界不再封闭.

  例如:$\chi_W = \sup\limits_{x\in W} \chi_{\{x\}}$,　W不可测.

  (原因: 可测仅对可列并交叉封闭)

- 可测关于复合运算不封闭.

$$g^{-1} = f = \frac{1}{2}(Cantor+\text{恒等}),\quad \text{不可测}W \subset f(C),\quad g(W) = Z\text{零测集}$$

则 $\chi_Z \circ g$ 不可测:　$(\chi_Z \circ g)^{-1}(\{1\}) = g^{-1} \circ \chi_Z^{-1}(\{1\}) = W$

作业

P107　第1，6题

P126　第2，3题

实分析(H), 第10次课

任广斌(中国科大)

2022-3-25

本节主要内容

- 可测函数结构

- 三种收敛性

(几乎处处收敛， 几乎一致收敛， 以测度收敛)

内容一: 可测函数结构

- 回顾记号: $E \subset \mathbb{R}^n$可测.

$\mathscr{L}(E)$	可测	$\overline{\mathbb{R}}$值
$\mathscr{L}^+(E)$	非负可测	$\overline{\mathbb{R}}$
$S(E)$	简单可测	$\mathbb{R}$
$S^+(E)$	非负简单可测	$\mathbb{R}$

简单可测函数结构

体现对y轴分割: 与Lebesgue积分相伴而生的函数.

- 简单可测函数结构:

$$
\begin{aligned}
S(E) &= \{f: E \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \mid \text{Range } f\text{是有限集}\ \} \\
&= \langle \chi_A, +, \cdot \rangle
\end{aligned}
$$

简单可测函数标准表示

- $f \in S(E)$标准表示:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x).$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{Range} f &= \{a_1, \cdots, a_m\}, \\ E &= \bigsqcup_{k=1}^{m} E_k, \qquad E_k = f^{-1}(a_k). \end{aligned}$$

- 标准表示中, 在每点处, 求和项最多只有一项非零
- 非标准表示例子: $\quad \chi_{[0,1]} = \chi_{[0,1/2]} + \chi_{(1/2,1]}.$

可测函数和简单函数的联系

- 如何将可测函数表达为简单函数列的极限:
  $\chi_A + (+, \cdot, \lim)$?

  答案: 简单函数的特点是值域有限. 为此需要如下手段:

  对y轴二进制分解, 精细化+逼近

  Strategy: 剖分=逼近=化整为零=极限思想=同Riemann

非负可测函数结构

- 简单可测函数结构: $f \in \mathscr{L}^{+}(E)$

$$[0,+\infty] \xlongequal[\text{值域剖分长度}2^{-k}]{\text{y轴第k次二进制剖分}} \bigsqcup_{j=1}^{2^{2k}} [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}) \bigsqcup [2^k,+\infty].$$

$$E = f^{-1}[0,+\infty] \xlongequal[\text{定义域剖分}]{} \bigsqcup_{j=1}^{2^{2k}} f^{-1}[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}) \bigsqcup f^{-1}[2^k,+\infty].$$

非负可测函数结构续

- 在y轴的每个二进制区间

$$\frac{j-1}{2^k} \leqslant y < \frac{j}{2^k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2^{2k})$$

  - 第0次二进制剖分:　区间长度=1
  - 第1次二进制剖分:　区间长度= 前一次的一半=$\frac{1}{2}$
  - 第2次二进制剖分:　区间长度= 前一次的一半=$\frac{1}{2^2}$ etc.

- 在y轴的二进制剩余区间

$$2^k \leqslant y \leqslant \infty.$$

- 函数常值化, 取为最小值.

有效的有限区间膨胀，小区间长度收缩

非负可测函数结构续

- 简单函数列

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{j-1}{2^k}, & \text{if} \quad \dfrac{j-1}{2^k} \leqslant f(x) < \dfrac{j}{2^k} \quad (j = 1, 2, \ldots, 2^{2k}) \\ 2^k, & \text{if} \quad f(x) \geqslant 2^k. \end{cases}$$

- 一致收敛的根源:

在$\{x \in E : 0 \leqslant f(x) < 2^k\}$上:

$$0 \leqslant f(x) - f_k(x) < \frac{1}{2^k}.$$

非负可测函数结构续

- 值域局部常值化产生的简单函数列

$$f_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k} \chi_{f^{-1}[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} + 2^k \chi_{f^{-1}[2^k, +\infty]} \qquad \nearrow \qquad f$$

$$S^+(E) \qquad\qquad \mathscr{L}^+(E)$$

具体例子

$$f(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \in [0,1) \\ 1, & \text{if} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \in [0,\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}, & \text{if} \quad x \in [\frac{1}{2},1) \\ 1, & \text{if} \quad x \in [1,\frac{3}{2}) \\ \frac{3}{2}, & \text{if} \quad x \in [\frac{3}{2},2) \\ 2, & \text{if} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$$

- 第k次二进制剖分: 区间长度= 前一次的一半=$\frac{1}{2^k}$
- 消去半直线$[2^k, +\infty]$

函数与非负函数关系

函数的研究归结于非负函数, 非负函数研究是研究函数的桥梁.

$$f = \frac{1}{2}(|f| + f) - \frac{1}{2}(|f| - f) = f^+ - f^-, \qquad f^\pm \geqslant 0$$

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{(每点处, 求和项最多只有一项非零)}$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

$$f^+ = f\text{的正部} = \max\{f, 0\} = \text{小于零的部分零化, 其它不变}$$

$$f^- = f\text{的负部} = \max\{-f, 0\} = \text{大于零的部分零化, 其它关于实轴反演}$$

可测函数结构

- 可测函数结构定理:

$$f \in \mathscr{L}^+(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, f_k \in S^+(E), \quad f_k \uparrow f$$

$$f \in \mathscr{L}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \varphi_k \in S(E), \quad \varphi_k \longrightarrow f, \quad |\varphi_k| \uparrow |f|.$$

可测函数结构续

证明: 设$f \in \mathscr{L}(E)$, 则$f^{\pm} \in \mathscr{L}(E)$,

$$\exists\, u_k, v_k \in S^+(E) \implies u_k \uparrow f^+, \quad v_k \uparrow f^-$$

$$\implies \varphi_k := u_k - v_k \in S(E), \quad \varphi_k \to f$$

$$\forall x \in E \implies \text{要么} u_k = 0 \text{要么} v_k = 0$$

$$\implies |\varphi_k| = u_k + v_k \uparrow f^+ + f^- = |f|$$

可测函数结构

- 可测函数的原子分解:　　(类似于初等函数的Taylor展开)

$$\mathscr{L}(E) = \langle \chi_A, +, \cdot, \lim \rangle_{A\text{可测}}$$

- 可测函数研究的四部曲

$$\chi_A \xRightarrow[+,\cdot,\lim]{S^+,\mathscr{L}^+} \mathscr{L}(E).$$

可测函数研究的两个层次

- 可测函数: 开集的原像是可测集
- 可测函数: 原子方法 χ_A+代数运算+极限运算.

方法一	抽象	建立可测和连续的关系
方法二	具体	问题简化到原子

测度论和积分理论关系

黄河源头	黄河入海口
测度论	积分理论
集合论	函数论
特征函数	可测函数(以特征函数为积木)
σ代数	可测函数关于运算封闭
测度可列可加性	交换次序等价定理

一致收敛性

- 简单函数一致逼近非负可测函数. (记号$\mathscr{L}^{\infty}$=有界)

$$f \in \mathscr{L}^{+}(E) \cap \mathscr{L}^{\infty}(E) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, f_k \in S^{+}(E), \quad f_k \uparrow f, \quad f_k \rightrightarrows f.$$

- 紧支撑简单函数紧一致逼近非负可测函数: $g_k := f_k \chi_{B(0,k)}$

$$f \in \mathscr{L}^{+}(E) \cap \mathscr{L}^{\infty}(E) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, g_k \in S_c^{+}(E), \quad g_k \uparrow f, \quad g_k \overset{\text{紧一致}}{\rightrightarrows} f.$$

$$f \in \mathscr{L}(E) \cap \mathscr{L}^{\infty}(E) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, h_k \in S_c(E), \quad |h_k| \uparrow |f|, \quad h_k \overset{\text{紧一致}}{\rightrightarrows} f.$$

内容二

- 三种收敛性

$a.e.$	almost everywhere	几乎处处收敛
$a.un.$	almost uniformly convergence	几乎一致收敛
m	measure	以测度收敛

记号:

$$[|f_n - f| \geqslant \epsilon] \xlongequal{def} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \epsilon\}$$

三种收敛性

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$，$f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \iff m[f_n \nrightarrow f] = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{a.un} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\text{可测}E_\epsilon \subset E:$$

$$m(E_\epsilon) < \epsilon, \qquad f_n \overset{onE\setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

(测度刻画小集合)

三种收敛性的直观含义

- 几乎处处收敛是除去一个零测集的点态收敛.
- 几乎一致收敛说明挖去一个任意小测度集后一致收敛.
- 以测度收敛不是点态收敛, 它说明f_k 远离f的点集是小测度集, 但不论该集合的位置.

用不收敛点集的大小, 给出收敛准则

- 用ϵ表示远离程度

$$a, b\text{远离} \quad \Longleftrightarrow \quad |a-b| \geqslant \epsilon$$

三种收敛的依测度收敛型的刻画

- 无穷多项远离f的是零测集.

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \quad m(\overline{\lim_{k\to\infty}}[|f_k - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- (允许有限项例外的)一致远离f的点集是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 依测度意义远离f是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

记忆方法

a.e.	无穷多项远离	零测集
a.un.	除有限项全部一致远离	小集合
m	依测度远离	小集合

续

证明: (1) 不收敛点$\Longleftrightarrow$无穷多项远离f.

$$\text{不收敛点集}=\bigcup_{\epsilon>0}\overline{\lim_{k\to\infty}}[|f_k-f|\geqslant\epsilon].$$

(2a) $f_k\xrightarrow{a.un}f \Longrightarrow$ $\forall\,\theta>0,\ \exists\,E_\theta: m(E_\theta)<\theta$, 使得 $\forall\,\epsilon>0,\ \exists\, j\in\mathbb{N}$, 当$k\geqslant j$,

$$\sup_{x\in E\setminus E_\theta}|f_k(x)-f(x)|<\epsilon$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=j}^{\infty}[|f_k-f|\geqslant\epsilon]\subset E_\theta \quad \text{一致远离是小集合}$$

$$\Longrightarrow \lim_{j\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty}[|f_k-f|\geqslant\epsilon]\Big)\leqslant\theta$$

续2

$$(2b): \quad \forall \text{ 固定} k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{j=n}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \forall\, \theta > 0,\ \exists\, n = n(k) \in \mathbb{N}: \quad m\left(\bigcup_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]\right) \leqslant \frac{\theta}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \text{令} E_\theta^c := \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| \geqslant \frac{1}{2^k}], \qquad m(E_\theta^c) < \theta$$

$$\Longrightarrow \text{在} E_\theta = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| < \frac{1}{2^k}]\text{上}, \qquad f_i \rightrightarrows f.$$

三种收敛的关系

- $f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longrightarrow f_k \xrightarrow{a.e.} f, \quad f_k \xrightarrow{m} f.$

- $f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \overset{m(E)<+\infty}{\Longleftrightarrow} f_k \xrightarrow{a.un} f.$

- $f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall$子列$,\exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.un} f.$

Littlewood三原理之一

Theorem 1 (Egorov定理)

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \overset{m(E)<+\infty}{\Longleftrightarrow} \quad f_k \xrightarrow{a.un} f.$$

Littlewood 三原理之一：

$[a,b]$区间上函数列收敛$\Longleftrightarrow$差不多一致收敛.

Riesz定理

Theorem 2 (Riesz 定理)

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \exists \text{子列} f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f.$$

注记1: 依测度收敛, 极限必唯一.

(几乎处处相等视为恒等, 测度无法分辨零测集)

注记2: 在有限测度集上, 在有子列a.e.收敛意义下, 三种收敛等价.

(续) , 证明: $f_k \xrightarrow{m} f \Longrightarrow \forall$子列, $\exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.un} f$..

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{j\to\infty} m[|f_j - f| \geqslant \frac{1}{2^k}] = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \text{对于任意子列}, \exists\ \text{子列}: m[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}] \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

$$\xrightarrow[\text{BC测度有限}]{Borel-Cantelli} \quad \lim_{s\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=s}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]\Big) = 0$$

$$\xrightarrow{\forall\ \epsilon>0, \exists\ s_0} \quad E_\epsilon^c := \bigcup_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}], \qquad m(E_\epsilon^c) < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad E_\epsilon = \bigcap_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| < \frac{1}{2^k}]$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \xrightarrow{a.\ un.} f$$

续, 证明: $f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftarrow \forall$子列, $\exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.un} f$..

证明:

$$f_k \overset{m}{\nrightarrow} f \quad \Longrightarrow \quad \exists\ \epsilon_0 > 0, \qquad \varlimsup_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon_0] = \delta_0 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\text{子列}\{f_{k_n}\}: \quad m[|f_{k_n} - f| \geqslant \epsilon_0] > \frac{\delta_0}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \{f_{k_n}\}\text{不包含a.un 收敛子列.}$$

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念

- 几乎处处收敛, 非依测度收敛.

$$E = (0, +\infty)$$

$$\chi_{(n,n+1)} \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\chi_{(n,n+1)} \overset{m}{\nrightarrow} 0$$

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念续

- 依测度收敛, 非几乎处处收敛.

$$E = [0, 1]$$

$$f_{kr} = \chi_{[\frac{r-1}{k}, \frac{r}{k})}, \qquad r = 1, \ldots k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\{g_k\} := \{f_{11}, f_{21}, f_{22}, \ldots\}$$

$$g_k \xrightarrow{m} 0$$

$$g_k \overset{a.e.}{\nrightarrow} 0$$

几乎处处收敛$v.s.$依测度收敛

$a.e.$	几乎处处收敛	点态	零测集
m	以测度收敛	非点态	小测度集

Borel-Cantelli引理

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty \Longrightarrow m(\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{a.un} 0$$

$$\Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\Longrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0$$

注记: $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0 \Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0$

作业

P119　第1, 4题

P127　第12题

P109　第6, 7题

实分析(H), 第11次课

任广斌(中国科大)

2022-3-30

本节主要内容

- 以测度Cauchy
- Lusin定理　(Littlewood 三原理之一)

回顾：三种收敛性

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \Longleftrightarrow m[f_n \nrightarrow f] = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{a.un} f \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\text{可测}E_\epsilon \subset E: \\ m(E_\epsilon) < \epsilon, \qquad f_n \overset{onE \setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k \to \infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

三种收敛的依测度收敛型的刻画

- 无穷多项远离f的是零测集.

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad m(\overline{\lim_{k\to\infty}}[|f_k - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 除有限项外一致远离f的是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{a.un} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 依测度意义远离f是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{m} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

依测度Cauchy

- $E \subset \mathbb{R}^n$可测. $f_k \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\text{依测度Cauchy} \quad \Longleftrightarrow \quad \{f_k\}_{k=1}^{\infty}\text{依测度收敛.}$$

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$依测度Cauchy, 即

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{i,k\to\infty} m[|f_i - f_k| \geqslant \epsilon] = 0.$$

依测度Cauchy续

证明: $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$依测度Cauchy, 即

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{i,k\to\infty} m[|f_i - f_k| \geqslant \epsilon] = 0.$$

归纳选取子列$g_j = f_{n_j}$:

$$m[|g_j - g_{j+1}| \geqslant \frac{1}{2^j}] \leqslant \frac{1}{2^j}, \qquad \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

$j = 1$时, 可选取g_1, g_2, 其中g_1取定, g_2 有无穷候选.

$j = 2$时, 可选取g_2, g_3, 其中g_2取定, g_3 有无穷候选,

如此构造下去.

续

$$E_j := [|g_j - g_{j+1}| \geqslant \frac{1}{2^j}], \qquad F_k := \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$$

$$\xrightarrow[m(E_j)\leqslant\frac{1}{2^j}]{Borel-Cantelli} \qquad m(\lim_{k\to\infty} F_k) = \lim_{k\to\infty} m(F_k) = 0.$$

续

$$\forall x \in F_k^c = \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j^c = \bigcap_{j=k}^{\infty} [|g_j - g_{j+1}| < \frac{1}{2^j}]$$

$$\Longrightarrow \quad |g_j(x) - g_i(x)| \leqslant \sum_{s=j}^{i-1} |g_{s+1} - g_s| \leqslant \frac{1}{2^{j-1}} \quad (\forall\ i > j > k)$$

$\Longrightarrow$ 在F_k^c上, $\{g_j\}$逐点Cauchy, 几乎一致收敛

$\Longrightarrow$ 从而依测度收敛, 故$\{f_j\}$依测度收敛

Littlewood 三原理之一

- Lusin定理:

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists\text{闭集}F \subset E :$$

$$m(E \setminus F) < \epsilon, \quad f|_F \text{ 连续}.$$

注记

- 当$m(E) < \infty$时, 可取闭集F为紧集K.

- 当$m(E) = \infty$时, 不可取闭集F为紧集K.

$$例如 \quad E = \mathbb{R}^n, \quad m(K) < \infty.$$

- ϵ一般不能取为0.　例如推广的Cantor集合的特征函数

- 结论中的连续函数一般不能修改为多项式.

  例如$\chi_{[0,1/2]}$只取两个值, 挖去$[0,1]$的小测集合, 不可能与一个非常值多项式相同.

Lusin定理的充分性

充分性证明:　可测性是局部性质:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \sqcup Z, \qquad f|_{F_n} \text{ 连续}$$

$$m(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}, \qquad \text{闭} F_n \subset E, \qquad m(Z) = 0$$

Lusin定理的必要性

必要性证明: 分四种情况.

(1) $f = \chi_A$:

由测度的正则性, 可取闭集$F_1 \subset A$, $F_2 \subset A^c$满足

$m(A \setminus F_1) < \epsilon/2, \quad m(A^c \setminus F_2) < \epsilon/2 \qquad \chi_A|_{F_1 \bigsqcup F_2}$ 连续.

续

(2) f简单:

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{E_j}, \quad E_j = f^{-1}(c_j).$$

取闭集$F_j \subset E_j$, $\quad m(E_j \setminus F_j) < \frac{\epsilon}{2^j}$, $\quad f|_{F_j}$ 连续.

闭集$F = \bigcup_j F_j$, $\quad m(E \setminus F) < \epsilon$, $\quad f|_F$ 连续.

续

(3) f有界:

$$\exists \varphi_k \in S(E), \quad \varphi_k \rightrightarrows f.$$

$$\Longrightarrow \quad \exists 闭集 F_k \subset E: \quad \varphi_k|_{F_k} 连续, \quad m(F_k^c) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \quad F := \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k, \quad m(F^c) < \epsilon, \quad \varphi_k|_F \rightrightarrows f|_F 连续.$$

续

(4) f无界:

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\Longrightarrow(1-|g(x)|)(1+|f(x)|)=1$$

$$f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}$$

$\exists$ 闭集F, $g|_F$ 连续 $\Longrightarrow$ $f|_F$ 连续.

注记

- 可测函数可转化为有界函数研究:

$$T : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}^{\infty}(E) \quad 双射$$

$$Tf(x) = \frac{f(x)}{1+|f(x)|} \qquad T^{-1}g(x) = \frac{g(x)}{1-|g(x)|}$$

$$(1-|Tf(x)(x)|)(1+|f(x)|) = 1, \quad (1+|T^{-1}g(x)(x)|)(1-|g(x)|)$$

- $\mathscr{L}^{\infty}(E)$的特点:　　特征函数生成$\mathscr{L}^{\infty}(E)$.

Urysohn引理:

$$K \subset G \subset \mathbb{R}^n, \quad K\text{紧}, \quad G\text{开}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, f \in C_c(\mathbb{R}^n): \qquad \chi_K \leqslant f \leqslant \chi_G.$$

Urysohn引理续

证明: 不妨设G有界 (否则考虑$G \cap B(0,k)$). 取

$$f(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, G^c)}{\mathrm{dist}(x, G^c) + \mathrm{dist}(x, K)}.$$

注记: 可取$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (利用卷积).

记号

下标c	下标b
紧支集(涉及定义域某种意义下有界)	值域有界

Tietze扩张定理

Tietze扩张定理:

$$K \overset{(\text{紧})}{\subset} \mathbb{R}^n \Longrightarrow C_c(K) \overset{(\text{等距})}{\subset} C_c(\mathbb{R}^n).$$

$$\begin{aligned} K \overset{(\text{闭})}{\subset} \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad & C_b(K) \overset{(\text{等距})}{\subset} C_b(\mathbb{R}^n) \\ & C(K) \quad \subset \quad C(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Lusin定理: 可测是连续的弱化

Theorem 1 (Lusin定理)

设$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$可测, 则

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \ \exists\, g \in C(\mathbb{R}^n),\ \ \exists\, \text{闭集} F \subset E :$$

$$m(E \setminus F) < \epsilon, \quad f|_F = g|_F \,.$$

f定义域有界	$g \in C_c(\mathbb{R}^n)$	
f值域有界	$g \in C_b(\mathbb{R}^n)$	且L^∞范数不增加

可测函数是连续函数在几乎处处收敛意义下的极限

Theorem 2 (可测函数结构定理)

$$f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \overset{f:E \longrightarrow \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \exists\, g_k \in C(\mathbb{R}^n): \quad g_k \xrightarrow[\text{on } E]{a.e.} f.$$

f定义域有界	$g_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$
f值域有界	$g_k \in C_b(\mathbb{R}^n)$

注记1: 当f值域有界时, g_k值域也有界, 且L^∞范数不增加.

注记2: 当f定义域有界时, g_k的支撑有界.

续

证明:

$$f\text{可测} \xrightarrow{Lusin} \exists\, g_k \in C(\mathbb{R}^n)$$

$$m[|f - g_k| > 0] < \frac{1}{k}.$$

$$\Longrightarrow \quad g_k \xrightarrow{m} f$$

$$\xrightarrow{Riesz} \exists\, g_{k_j} \xrightarrow{a.e.} f$$

注记

$$\mathscr{L}(E) = \overline{C(\mathbb{R}^n)\mid_E}^{a.e.\lim}$$

在紧集$[a, b]$上, 在a.e.收敛下, 多项式在$\mathscr{L}([a, b], \mathbb{R})$ 稠密.

例题

- $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$可加+局部有界$\Longrightarrow$ 线性.

- $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$可加+可测$\Longrightarrow$ 线性.

测度论的解题思路

Littlewood 三原理	战略	战术
测度正则性	可测集	开集
Lusin定理	可测函数	连续函数
Egorov定理	收敛函数列	一致收敛函数列

- 可测集=开矩体$+\lim+$*Caratheodory* $=G_\delta\setminus Z=F_\sigma\cup Z$
- 可测函数$=\chi_A+(+,\cdot,\lim)=$连续$+a.e.\lim$

例题

证明: f可测 $\xRightarrow[f|_{[-1,1]}\text{可测}]{Lusin}$ $\exists$ 紧$K\subset[-1,1]$: $m(K)>0$, $f|_K$ 连续

$\xRightarrow{Tietze}$ $f|_K$ 连续可连续扩张到$C_c(\mathbb{R})$, 一致连续.

$\xRightarrow{Steinhaus}$ $\exists[-\delta_0,\delta_0]\subset K-K$:

$$|f(z)| \xlongequal[x,y\in K]{z=x-y} |f(x)-f(y)|\le M.$$

$\xRightarrow{\text{局部有界}}$ f连续.

概念: 《a.e. 连续》，《与连续函数a.e.相等的函数》

(1) $g \overset{a.e.}{=\!=\!=} f \in C(\mathbb{R}) \quad \not\Rightarrow \quad g$在$\mathbb{R}$上a.e.连续.

(例如: $g = \chi_{\mathbb{Q}}, \quad f = 0$)

(2) g在$\mathbb{R}$上a.e.连续 $\quad \not\Rightarrow \quad g \overset{a.e.}{=\!=\!=} f \in C(\mathbb{R})$

(例如: 阶梯函数$g = \chi_{[0,+\infty)}$)

例题

- 设$\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$是全体有理多项式, $\varphi_0 = 0$, $f_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. 则

  $\forall\, f \in \mathscr{L}([a,b],\mathbb{R})$, 存在加括号的方法使得

$$f \xlongequal{a.e.} (f_1 + \cdots f_{n_1}) + (f_{n_1+1} + \cdots + f_{n_2}) + \cdots .$$

证明: 取多项式列$p_k \longrightarrow f\ a.e.\quad \text{in}\quad [a,b]$.

取$\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$子列$\varphi_{n_k}$: $|p_k - \varphi_{n_k}| < \frac{1}{k}$ in $[a,b]$, 添加$\varphi_{n_0} = \varphi_0 = 0$.

$$\Longrightarrow f \xlongequal{a.e.} \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k} = \sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}) = (f_1 + \cdots f_{n_1}) + (f_{n_1+1} + \cdots + f_{n_2}) + \cdots$$

例题

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $m(E) < \infty$ $f_k, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, $f_k \xrightarrow{a.e.} f$.

$\Longrightarrow \exists$可测集$E_k \uparrow, \exists$零测集$Z : E = \lim\limits_{k\to\infty} E_k \sqcup Z$, $\quad f_k \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad E_k$

证明:

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \xrightarrow{\text{Egorov}} \exists \text{ 可测集} A_k, \quad m(A_k^c) < \frac{1}{k}, \qquad f_k \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad A_k$$

$$\Longrightarrow E_k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j \uparrow,\ Z = (\lim_{k\to\infty} E_k)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^c \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c$$

$$m(Z) = 0, \qquad f_k \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad E_k$$

例题

- 例题

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \xRightarrow{\exists\ C_n>0} \frac{f_n(x)}{C_n} \xrightarrow{a.e.} 0.$$

例题

证明: $$\lim_{k\to\infty} m[|f_n|>k] = m[f_n=\infty] = 0, \qquad \forall\ n\in\mathbb{N}$$

$$\xRightarrow{\exists k(n)\in\mathbb{N}} m[|f_n|>k(n)] < \frac{1}{2^n}$$

$$\xRightarrow{Borel-C} m\left(\overline{\lim}\left[\left|\frac{f_n(x)}{C_n}\right| > \frac{1}{n}\right]\right) = 0 \quad (C_n := nk(n))$$

$$\Longrightarrow \forall\ \epsilon>0, \quad m\left(\overline{\lim}\left[\left|\frac{f_n(x)}{C_n}\right| > \epsilon\right]\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{f_n(x)}{C_n} \xrightarrow{a.e.} 0.$$

作业

P119 第5, 6题

P123 第1, 2题

实分析(H), 第12次课

任广斌(中国科大)

2022-4-1

本节主要内容

- 回顾Littlewood 三原理

- Ch4. Lebesgue 积分.

§1. 积分定义

Littlewood 三原理

- $[a, b]$每一个可测集差不多是有限个区间的并.
- 每一个可测函数差不多是连续函数.
- 每一个逐点收敛的可测函数列差不多是一致收敛函数列.

测度正则性

Theorem 1

$\forall\ E \subset \mathbb{R}^n, m(E) < \infty$. 则 $\forall\ \epsilon > 0, \exists$ 有限个开矩体$I_1, \ldots, I_s$:

$$m(E \setminus \bigcup_{k=1}^{s} I_k) < \epsilon, \qquad m(\bigcup_{k=1}^{s} I_k \setminus E) < \epsilon.$$

证明: 不妨设$E = G$是开集, 由测度正则性存在紧集$K \subset G$

$$m(G \setminus K) < \epsilon.$$

$$G = \bigcup \text{开矩体}, \qquad K \subset \bigcup_{\text{有限}} \text{开矩体} \subset G.$$

Lusin定理: 可测是连续的弱化

Theorem 2 (Lusin定理)

设$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$可测, 则

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \ \exists\, g \in C(\mathbb{R}^n),\ \ \exists\,\text{闭集} F \subset E :$$

$$m(E \setminus F) < \epsilon, \quad f|_F = g|_F\,.$$

f定义域有界	$g_\in C_c(\mathbb{R}^n)$	
f值域有界	$g \in C_b(\mathbb{R}^n)$	且L^∞范数不增加

Egorov定理

Theorem 3 (Egorov定理)

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f$$

$$\xLeftrightarrow{m(E)<+\infty} \quad f_k \xrightarrow{a.un} f$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0, \exists E_\epsilon \subset E: \quad m(E_\epsilon) < \epsilon, \qquad f_n \overset{onE\setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

回顾：记号

- $E \subset \mathbb{R}^n$可测.

S^+	$S^+(E)$	非负简单可测	$\mathbb{R}$值
$\mathscr{L}^+$	$\mathscr{L}^+(E)$	非负可测	$\overline{\mathbb{R}}$值
$\mathscr{L}^1$	$\mathscr{L}^1(E)$	可积	$\overline{\mathbb{R}}$值 (本质$\mathbb{R}$值)

积分定义

- 标准四步:

$$\chi_A \xrightarrow{S^+,\mathscr{L}^+} \mathscr{L}^1$$

- Lebesgue 积分记号:

$$\int_E f(x)dx = \int_E f(x)dm(x) = \int_E f$$

- 三个层次

$$\mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}^n \Longrightarrow (X, \Gamma, d\mu)$$

积分定义四部曲

(1): 面积=长×宽的推广:

$$\int_E \chi_A := m(A)$$

(2): 线性性的要求:

$$\int_E \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{E_j} \xlongequal[\text{标准表示}]{f=\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{E_j} \in S^+} \sum_{j=1}^{k} c_j m(E_j).$$

注记

注记1： 约定:

$$0 \cdot \infty = 0.$$

$$(\text{宽} = 0 \Longrightarrow \text{面积} = 0)$$

注记2： Lebesgue 积分剖分值域$\Longrightarrow$ 第一步、第二步成立.

注记3： Lebesgue 积分几何意义$\xrightarrow[\text{高}=c_j,\text{宽}=m(E_j)]{\text{f下方图形面积}}$ 第二步良定.

续

(3) 单调收敛定理嵌入到积分定义:

$$\int_E f := \!\!\!\!\!\overset{S^+ \ni \varphi_k \uparrow f \in \mathscr{L}^+}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k$$

续

注记:　该定义自然:

利用可测函数的四部曲, 通过线性性和单调收敛定义积分

$$\chi_A \xrightarrow{+,\cdot,\lim} \mathscr{L}^1$$

$$\Longrightarrow \int_E f = \int_E \chi_A + (+,\cdot,\lim)$$

续

注记：　需要证明良定性:

$$\int_E f \xlongequal{\text{待证}} \sup_{S^+\ni\varphi\leqslant f} \int_E \varphi.$$

续

(4)　　一般情形:

$$\int_E f := \!\!\!\!\!\!\underset{f\text{可测}}{\overset{f=f^+-f^-}{=\!=\!=\!=\!=}} \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

注记:　陷阱:

$$+\infty - (+\infty)$$

续

$$f \in \mathscr{L}^1(E) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f^{\pm} \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow \int_E |f| < +\infty$$

$$f\text{在E上积分存在(有定义)} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f^{\pm}\text{之一} \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow \int_E f \in \overline{\mathbb{R}}$$

注记

- 不是所有集合都能定义测度:

  只对可测集.

- 不是所有函数都能定义积分:

  只对可测特征函数的代数和极限运算得到的函数

- 不是所有可测函数都能定义积分:

  需要避开$(+\infty)-(+\infty)$陷阱.

- 不是所有可定义积分的函数都可积

两种积分的差别

Riemann积分	Lebesgue积分
非绝对收敛的积分理论	绝对收敛的积分理论
不适用于高维	适用于高维
交换次序条件苛刻	交换次序条件较弱
非完备	完备
局限性	释放了积分的手脚,统一了离散和连续

积分良定性: 不依赖于φ_k的选取

S^+性质:　　本节总是假设$f, g, f_k, g_k \in S^+$.

(1) 线性: 积分作为映照是线性映照

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

(只要对特征函数验证: 归结于积分的定义和测度论)

积分良定性: 不依赖于φ_k的选取

(2) 单调性: 积分作为映照保序

$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_E f \leqslant \int_E g.$$

(只要对特征函数验证: 归结于测度的单调性)

积分良定性: 不依赖于φ_k的选取

(3) 可积性判别: $f \in \mathscr{L}^1 \xLeftrightarrow{f\in S^+} m[f>0] < +\infty.$

证明: 假设$f \in S^+$取的非零值:

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k.$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 \chi_{[f>0]} \leqslant f|_{[f>0]} \leqslant a_k \chi_{[f>0]}.$$

积分良定性(续)

(4) 单调收敛: (将测度命题由$A = \chi_A$推广到S^+)

(4a) $f_n \downarrow f, \quad f_1 \in \mathscr{L}^1 \xrightarrow{S^+\text{框架内}} \int_E f_n \downarrow \int_E f.$

(4b) $f_n \uparrow f \xrightarrow{S^+\text{框架内}} \int_E f_n \uparrow \int_E f.$

(4c) $f_n \uparrow, g_n \uparrow, \quad \lim f_n \leqslant \lim g_n \xrightarrow{S^+\text{框架内}} \lim \int_E f_n \leqslant \lim \int_E g_n.$

积分良定性(续)

证明: (4a) $S^+ \cap \mathscr{L}^1 \ni f_n \downarrow 0.$

$$\forall\, \epsilon > 0, \qquad f_n \leqslant M\chi_{[f_n \geqslant \epsilon]} + \epsilon\chi_{[0<f_n\leqslant\epsilon]}$$

$$M = \max f_1, \qquad [0 < f_n \leqslant \epsilon] \subset [f_1 > 0]$$

$$0 \leqslant \overline{\lim} \int_E f_n \leqslant \epsilon m[f_1 > 0].$$

积分良定性(续2)

证明: (4b) 情形1 $f \in \mathscr{L}^1$:

$$f - f_n \downarrow 0 \xRightarrow{(4a)} \int_E f - f_n \downarrow 0.$$

情形2 $f \notin \mathscr{L}^1$:

$$f \notin \mathscr{L}^1 \xRightarrow[f \in S^+]{(3)} \exists a > 0, \quad m[f \geqslant a] = +\infty$$

$$f_n \geqslant \frac{a}{2}\chi_{[f_n \geqslant \frac{a}{2}]} \xRightarrow{(2)} \int_E f_n \geq \frac{a}{2} m[f_n \geqslant \frac{a}{2}] = +\infty.$$

积分良定性(续3)

$$\text{(4c)}\quad f_n\uparrow, g_n\uparrow,\quad \lim f_n \leqslant \lim g_n \xRightarrow{S^+\text{框架内}} \lim \int_E f_n \leqslant \lim \int_E g_n.$$

(注意此时不要求$\lim f_n \in S^+$, $\lim g_n \in S^+$)

(4c) min 阀门: 处理双指标技巧

$\forall$固定m, $\min\{g_n, f_m\} \uparrow f_m$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \int_E \min\{g_n, f_m\} \overset{(4b)}{=\!=} \int_E f_m.$$

积分良定性

注记:　积分的良定性来自于(4c).

积分的等价定义

- $$f \in \mathscr{L}^+(E) \quad \Longrightarrow \quad \int_E f = \sup_{S^+ \ni \varphi \leqslant f} \int_E \varphi$$

积分的等价定义

证明: $$\int_E f \xlongequal[\text{def}]{S^+\ni\varphi_k\uparrow f\in\mathscr{L}^+} \lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k$$

$$\leqslant \sup_{S^+\ni\varphi\leqslant f}\int_E \varphi$$

$$\xlongequal{\exists S^+\ni\psi_k\leqslant f} \lim_{k\to\infty}\int_E \psi_k$$

$$\overset{\text{取定}S^+\ni f_k\uparrow f}{\leqslant} \lim_{k\to\infty}\int_E \underbrace{\max\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k,f_k\}}_{\in[f_k,f]}\uparrow$$

$$\xlongequal{def} \int_E f$$

例题

- 设C是$[0,1]$区间三等分Cantor集,

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{if } x\in C\\ \\ \dfrac{1}{n}, & \text{if } x\in \text{第}n\text{次去掉的长为}3^{-n}\text{的区间}.\end{cases}$$

计算$\int_0^1 f(x)dx$.

例题续

$$
\begin{aligned}
\text{解:}\quad [0,1] &= C \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}, \qquad |I_{n,k}| = \frac{1}{3^n} \\
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{n}\chi_{I_{n,k}}(x) \\
\int_0^1 f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{n}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{2^{n-1}}{3^n} = \ln\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Lebesgue积分=Riemann积分+测度论

$$\int_E f(x)dx \xlongequal[E=[a,b]]{f\in L^+\cap L^\infty} \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n m(f^{-1}[y_{i-1},y_i))y_{i-1}$$

$$= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n \Big(m(f^{-1}[y_{i-1},+\infty)) - m(f^{-1}[y_i,+\infty))\Big)y_{i-1}$$

$$= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n m(f^{-1}[y_i,+\infty))(y_i - y_{i-1})$$

$$= \int_0^{+\infty} m(f^{-1}[y,+\infty)) \downarrow dy$$

由微元法看积分的蛋糕表示

$$\int_E f(x)dx \quad \overset{\text{积分的蛋糕表示}}{\underset{f\text{非负有界可测}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \quad \int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t, +\infty)) \downarrow dt$$

由微元法看积分的蛋糕表示

- f图形下方的水平截面:

$$\{(x,t_0): \ \ x\in E,\ 0\leqslant t_0\leqslant f(x)\}, \qquad \text{其中} t_0\in[0,\infty)\text{固定}.$$

- 该集合的一维测度:

$$m(\{x: \ \ x\in E,\ 0\leqslant t_0\leqslant f(x)\}) = m(f^{-1}[t_0,+\infty))$$

- f的图形的下方位于两条直线$y=t$和$y=t+dt$之间的面积

$$m(f^{-1}[t,+\infty))dt$$

- 利用微元法, f的图形的下方的面积为

$$\int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t,+\infty))dt$$

例题

- 设$f \in \mathscr{L}^{+}([a,b],\mathbb{R})$ 则

$$f \in \mathscr{L}^{1}[a,b] \quad \xLeftrightarrow{\text{单调减函数Riemann可积性}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} m[f \geqslant k] < +\infty.$$

作业

P189　第1题

实分析(H), 第13次课

任广斌(中国科大)

2022-4-6

本节主要内容

- 积分的性质:

(与Riemann积分相似)

- 关于绝对连续测度的积分

(积分的测度论面目)

- 交换次序的四个等价定理

(交换次序定理是实分析伸向其它学科的重要触角)

Lebesgue 积分定义回顾

- $E \subset \mathbb{R}^n$可测.

$S^+ = S^+(E, \mathbb{R})$	非负简单可测
$\mathscr{L}^+ = \mathscr{L}^+(E, \overline{\mathbb{R}})$	非负可测
$\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(E, \overline{\mathbb{R}})$	可积

Lebesgue 积分定义回顾

- 测度论 || 积分论

测度论 积分论

$$\chi_A \quad \overset{\text{提升}}{\underset{\text{限制}}{\Longleftrightarrow}} \quad \mathscr{L}^1 \cup \mathscr{L}^+$$

测度 σ 可加性 交换次序四大定理

- 测度论和积分论是一体两面, 不能分割对待.

续

注记: 从特征函数建造可积函数, 需要三种结构:

向量空间结构, 拓扑结构, 序结构.

$$\int_E \chi_A := m(A),$$

$$\int_E f :\xlongequal{S^+ \ni \varphi_k \uparrow f \in \mathscr{L}^+} \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k = \sup_{S^+ \ni \varphi \leqslant f} \int_E \varphi.$$

$$\int_E f :\xlongequal[f^+ \text{ or } f^- \in \mathscr{L}^1]{f \in \mathscr{L}} \int_E f^+ - \int_E f^-, \quad f^\pm = \frac{|f| \pm f}{2}$$

$$f \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow f^\pm \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow \int_E |f| < \infty.$$

积分性质

(1) 线性: $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

证明: $S^+(E)$性质 $\xRightarrow{\uparrow\lim}$ $\mathscr{L}^+(E)$性质.

$\mathscr{L}^+(E)$性质 $\xRightarrow{f=f^+-f^1}$ $\mathscr{L}^1(E)$性质.

$$-f = f^- - f^+ \xRightarrow{\text{积分定义}} \int_E -f = -\int_E f.$$

积分性质

$$f^+ - f^- + g^+ - g^- = f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$$

$$\stackrel{\text{移项}}{\Longrightarrow} \quad f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+$$

$$\stackrel{\text{积分}}{\Longrightarrow} \quad \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E (f+g)^- = \int_E f^- + \int_E g^- + \int_E (f+g)^+$$

$$\stackrel{\text{移项}}{\Longrightarrow} \quad \int_E f + \int_E g = \int_E (f+g)$$

续

(2) 单调性: $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$

$$f \leqslant g \xrightarrow{\text{不妨设f=0}} \int_E f \leqslant \int_E g.$$

(3) 三角不等式(积分统一了离散和连续):

$$\left|\int_E f\right| \leqslant \int_E |f|.$$

证明: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, 积分即可.

绝对连续测度

- 绝对连续测度: $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \mu)$

$$\mu(A) \xlongequal{f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E)} \int_A f dm, \qquad \forall\ A \subset E \text{ Lebesgue可测}$$

- 关于绝对连续测度的积分:

$$\int_E g d\mu = \int_E g f dm, \qquad \forall g \in \mathscr{L}^1(E, d\mu).$$

测度与积分关系

注记1： 绝对连续测度也记为

$$d\mu = fdm$$

注记2： 由测度产生积分的桥梁是特征函数：

$$\mu(A) = \int_A fdm \Longleftrightarrow \int_E gd\mu = \int_E gfdm \quad \text{其中} g = \chi_A$$

- 测度是特征函数的积分
- 积分作为曲边梯形的面积是测度

关于测度$f\ dm$的积分

- $A \subset E \subset \mathbb{R}^n$ 可测,　$f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$积分存在. 则

$$\int_E \chi_A\, fdm = \int_A fdm.$$

关于测度$f\,dm$的积分公式的证明

证明: 四部曲:

(1) f是特征函数, 归结于测度论.

(2). 结论可以推广到$f \in S^+$情形.

(3). $f \in \mathscr{L}^+$情形可转化为$f \in S^+$情形.

(4). $\int_E f\exists$, 不妨设$f^+ \in \mathscr{L}^1(E)$, 则$f^+ \in \mathscr{L}^1(A)$.

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_A f^+ - \int_A f^- \\ &\overset{(3)}{=\!=} \int_E f^+\chi_A - \int_E f^-\chi_A = \int_E f\chi_A. \end{aligned}$$

积分限的可加性

- 积分限的可加性.

$$\int_E f = \int_A f + \int_{E\setminus A} f$$

注记1: 证明来自于将积分全部化为E上积分.

注记2: 这实际上是连续测度的有限可加性.

注记2: 积分使用了集腋成裘、化整为零的手段。

积分限的剖分产生了化整为零的拆分技巧

零测集的作用(从测度论上升到积分论)

- 设$f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$积分存在, $A \subset E$ 是零测集. 则

$$\int_E f = \int_{E \setminus A} f, \qquad \int_A f = 0.$$

证明: $$\int_A f^{\pm} \leqslant \int_A |f| = \sup_{S^+ \ni \varphi \leqslant |f|} \int_A \varphi = 0.$$

零测集的作用续

零测集不影响积分存在性, 可积性, 积分值.

- 设$f, g \in \mathscr{L}(E)$, $f \xlongequal{a.e.} g$. 则

(1) $\displaystyle\int_E f \exists \Longleftrightarrow \int_E g \exists.$

(2) $f \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow g \in \mathscr{L}^1(E).$

(3) $\displaystyle\int_E f \exists \Longrightarrow \int_E f = \int_E g.$

可积函数几乎处处有限

- 设$f \in \mathscr{L}^1(E) \quad \Longrightarrow \quad |f| < \infty \quad a.e.\ in\ E.$

证明: $\quad |f| \geqslant k\chi_{[|f|=+\infty]}, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad +\infty > \int_E |f| \geqslant k\ m[|f| = +\infty]$$

$$\Longrightarrow \quad m[|f| = +\infty] = 0$$

约定

- 空间$\mathscr{L}^1(E)$ 中的约定:　(Banach空间的需求)

a.e.相等视为恒等,

a.e. 收敛视为收敛.

因此可积函数视为恒取有限值.

- 在上述约定下, 将空间记为$L^1(E)$.

$$L^1(E)\text{是Banach 空间.}$$

积分理论只能在a.e.相等层次分辨函数

- 设$f \in \mathscr{L}^+(E) \bigcup \mathscr{L}^1(E)$, 则

$$f \xlongequal{a.e. in\ E} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_A f = 0, \ \ \forall A \subset E\text{可测}.$$

- 采用积分手段, 判别函数相等.

续

证明: 充分性. 反证法:

$$m[f \neq 0] > 0 \Longrightarrow \text{不妨设} m[f > 0] > 0$$

$$\xrightarrow{[f>0]=\bigcup\limits_{k}[f>1/k]} \exists \epsilon_0 = \frac{1}{k_0},\ m[f > \epsilon_0] > 0$$

$$\Longrightarrow \int_{[f>\epsilon_0]} f \geqslant \epsilon_0 m[f > \epsilon_0] > 0$$

积分交换次序定理

下列等价：

- 测度σ可加性
- Levi单调收敛定理
- Fatou引理
- Lebesgue控制收敛定理
- Fubini定理

注记: 交换次序定理在$\mathscr{L}^+ \cup \mathscr{L}^1$的框架内.

Levi单调收敛定理↑

Theorem 1 (Levi单调收敛定理)

$$L^+(E) \ni f_n \uparrow f \Longrightarrow \int_E f_n \uparrow \int_E f.$$

单调收敛函数列相伴的单调简单函数列

$$
\xrightarrow{\quad\quad S^+\ \text{单调增加}\quad\quad}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots \longrightarrow f_1 \\
\varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \cdots \longrightarrow f_2 \\
\varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \cdots \longrightarrow f_3 \\
\cdots & & & \\
\varphi_{m1} & \varphi_{m2} & \varphi_{m3} & \cdots \longrightarrow f_m \\
\cdots & & & \qquad\quad\ \vdots \\
 & & & \qquad\quad\ \downarrow (\text{单调增加}) \\
g_1 & g_2 & g_3 & \cdots \longrightarrow f
\end{array}
$$

$$
\underrightarrow{\quad\quad S^+\ \text{单调增加}\quad\quad}
$$

$$
g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \cdots, \varphi_{jj}\} \leqslant f_j, \qquad g_j \uparrow f
$$

单调最大化函数列例子

$$
\begin{array}{cccccl}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \longrightarrow 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \longrightarrow 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \longrightarrow 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \longrightarrow 1 \\
\cdots & & & & & \qquad\ \ \vdots \\
 & & & & & \qquad\ \ \downarrow \\
 & & & & & \qquad\ \ 1
\end{array}
$$

单调最大化函数列

重要性质:

$$g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \cdots, \varphi_{jj}\} \uparrow f$$

证明: 固定x, 只考虑$f(x) \in \mathbb{R}$情形, 另一情形类似.

固定ϵ, 选取$k_0 > m_0$:

$$f(x) - \epsilon < \varphi_{m_0 k_0}(x) \leqslant f_{m_0}(x) \leqslant f(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad f(x) - \epsilon < \varphi_{m_0 k_0} \leqslant g_{k_0} \leqslant f_{k_0} \leqslant f$$

证明

- $L^+(E) \ni f_n \uparrow f \Longrightarrow \int_E f_n \uparrow \int_E f.$

证明: 取$S^+ \ni \varphi_{kj} \uparrow f_k, \quad g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{1j}, \cdots, \varphi_{jj}\} \leqslant f_j, \quad g_j \uparrow f$

$$\int_E f = \lim \int_E g_j \leqslant \lim \int_E f_j \leqslant \int_E f.$$

Levi单调收敛定理↓

Theorem 2 (Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E) \ni f_n \downarrow f \Longrightarrow \int_E f_n \downarrow \int_E f.$$

证明: 不妨设f_1 恒取有限值.

$$f_1 - f_n \uparrow f_1 - f \quad \Longrightarrow \quad \int_E f_1 - f_n \uparrow \int_E f_1 - f$$

$$\xRightarrow{f_n \in L^1} \quad \int_E f_n \downarrow \int_E f.$$

Theorem 3 (Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}^+(E) \Longrightarrow \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

反例:

$$f_n(x) = \frac{|x|}{n}, \quad \chi_{(n,n+1)}(x), \quad n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Lebesgue控制收敛定理

Theorem 4 (Lebesgue控制收敛定理)

设$f_n \in \mathscr{L}(E)$, $|f_n| \leqslant g \in L^1$. 则

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

Lebesgue控制收敛定理反例

反例: 无控制收敛条件下的面积逃逸:

- 面积沿着x轴逃逸:

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

- 面积沿着y轴逃逸:

$$f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

- 连续版本的面积逃逸

$$f_n(x) = \frac{|x|}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

等价定理的证明

- *Levi*单调收敛定理 $\Longrightarrow$ *Fatou*引理:

$$\int_E \underline{\lim} f_n = \int_E \lim_{k\to+\infty} \inf_{n\geqslant k} f_n \xlongequal{Levi} \lim_{k\to+\infty} \int_E \inf_{n\geqslant k} f_n \leqslant \underline{\lim}_{k\to+\infty} \int_E f_k.$$

续

- *Fatou*引理 $\Longrightarrow$ *Lebesgue*控制收敛定理:

$$|f_n| \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad 2g - |f_n - f| \in \mathscr{L}^+$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E \varliminf_{n\to+\infty} (2g - |f_n - f|) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_E (2g - |f_n - f|)$$

$$\Longrightarrow \quad \varlimsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \leqslant 0.$$

不等式如何产生等式?

等价证明续

- *Lebesgue*控制收敛定理 $\Longrightarrow$ *Levi*单调收敛定理:

  只要考虑$f \in \mathscr{L}^+ \setminus \mathscr{L}^1$情形:

  取$S^+ \ni \varphi_{kj} \uparrow f_k, \quad g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{1j}, \cdots, \varphi_{jj}\} \leqslant f_j, \quad g_j \uparrow f$

  $$\lim \int_E f_j \geqslant \lim \int_E g_j = \int_E f = +\infty.$$

作业

P143　第9题

P149　第3题

P159　第4题

P189　第9题

实分析(H), 第14次课

任广斌(中国科大)

2022-4-8

本节主要内容

- 逐项积分定理
- 含参变量积分

回顾积分理论

- 积分理论的精髓:
  - 对y轴分割$\Longrightarrow$ Lebesgue积分$\Longrightarrow$抽象积分理论.
  - $\chi_A \xrightarrow{+,\cdot,\lim} L^+ \cup L^1.$ (强调测度和积分是一体两面)
- 积分理论在可测集、可测函数框架内.
- 交换次序定理$L^+ \cup L^1$在框架内.

计算v.s.结构

Riemann积分	Lebesgue积分
侧重计算	侧重结构
古典理论特色	当代数学特色

由微元法看积分的蛋糕表示

Layer cake reprersentation: $f \in \mathscr{L}^{+}(E) \cap \mathscr{L}^{\infty}(E)$.

$$\int_E f(x)dx \;=\!=\!=\!=\!=\!=\; \int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t, +\infty)) \downarrow dt$$

曲边梯形的水平集

固定$t_0 \geqslant 0$.

$$
\begin{aligned}
& (x, t_0) \in \text{曲边梯形}(f\text{的图形的下方})\text{的水平截面} \\
\Longleftrightarrow \quad & t_0 \leqslant f(x) \\
\Longleftrightarrow \quad & x \in f^{-1}[t_0, +\infty)
\end{aligned}
$$

由微元法看积分的蛋糕表示续

- f的图形的下方位于两条直线$y=t$和$y=t+dt$之间的面积

$$m(f^{-1}[t,+\infty))dt$$

- 利用微元法, f的图形的下方的面积为

$$\int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t,+\infty))dt$$

注记

Riemann积分	Lebesgue积分
切片面包	层状蛋糕

注记

- $L^1(E)$是Banach空间,
- $L^1(E)$中收敛是a.e.收敛, L^1收敛.
- 可积函数不妨设恒取有限值.

交换积分次序的五个等价定理

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xRightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim} f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \longrightarrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \overset{f \in L^+ \cup L^1}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dm(y) \Big) dm(x).$

交换次序的等价定理在$L^+ \cup L^1$框架内

- 交换次序的等价定理在$L^+ \cup L^1$框架内

Levi	$f \in L^+$
Lebesgue	$f \in L^1$
Fatou	$f \in L^+$
Fubini	$f \in L^+ \cup L^1$

注记

反例:

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x), \quad n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x), \quad \frac{|x|}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Fatou引理“ $<$ ”可取到(面积可能逃逸到无穷).
- Lebesgue控制收敛定理(面积不会逃逸到无穷)

逐项积分定理

- Fubini定理的级数形式:

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx \xlongequal{f(n,x)\in L^+\cup L^1(\mathbb{N}\times E)} \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

- $f_n(x) =: f(n,x) \in L^1(\mathbb{N}\times E) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f(n,x)|dx < \infty.$

逐项积分定理注记

- L^+情形, 来自单调收敛定理.
- L^1情形, 来自控制收敛定理.
- L^+情形:
  - 单调收敛定理的级数形式.
  - 测度σ可加性由特征函数到非负可测函数的推广
  - Fubini定理的级数形式.

关于积分限的σ可加性

- 积分关于积分限的σ可加性.

$$\int_E f \xlongequal[E=\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k\text{可测}]{f\in L^+(E)} \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f.$$

注记

- 积分关于积分限的σ可加性.
- Fubini定理的级数形式
- 关于绝对连续测度$f\ dm$的σ可加性.

绝对连续测度

- 测度空间$(E, \mathscr{L}(E), d\mu)$测度空间

$$f \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1, \qquad d\mu = fdm.$$

$$\mu(E) = \int_E d\mu = \int_E fdm.$$

$$\int_E gd\mu = \int_E gfdm, \qquad \forall g \in \mathscr{L}^1(E, d\mu).$$

- 注记: 积分是测度(绝对连续测度).

其雏形: Riemann积分是曲边梯形的面积.

含参量积分理论

- 含参量积分

$$\text{初等函数} \xrightarrow{\text{含参量积分}} \text{非初等函数}$$

- 注记:

$$\text{Riemann框架下的含参量积分} \Longrightarrow \text{Lebesgue框架下的含参量积分}$$

- 注记: $\quad \text{离散} \xrightarrow{\text{交换次序的等价定理}} \text{连续}$

含参量积分理论: 连续性

- 含参量积分的连续性:

$$f(x,\cdot)\text{关于}t\in[a,b]\text{连续}\ \xRightarrow[\text{关于}x\in E\text{可积}]{|f(\cdot,t)|\leqslant g\in L^1(E)}\ \int_E f(x,t)dx\in C[a,b].$$

含参量积分的连续性的注记

- 含参量积分保持连续性:

只要可积性加强为控制可积性

含参量积分连续性的证明

证:
$$\lim_{t\to t_0}\int_E f(x,t)dx = \int_E f(x,t_0)dx$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E f(x,t_n)dx \xlongequal{\text{控制收敛}} \int_E f(x,t_0)dx,\quad \forall\, t_n\to t_0.$$

连续版本的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 1 (连续版本的Lebesgue控制收敛定理)

假设$f(x,t)$关于x在E上可测, 关于t在$[a,b]$连续, 而且

$$|f(\cdot,t)| \leqslant g \in L^1(E), \qquad \forall t \in [a,b]$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to t_0} \int_E f(x,t)dx = \int_E \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx, \qquad \forall\ t_0 \in [a,b].$$

含参量积分理论: 可导性

Theorem 2 (导数和积分交换次序)

$$\left|\frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial t}\right| \leqslant g \in L^1(E)$$

$$\xRightarrow[f_t\text{存在}]{f,\,f_t\text{关于}x\text{可积}} \frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx = \int_E \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$

注记

只要函数及其导数可积, 而且关于导数的可积性加强为控制可积性.

- 含参量积分保持可导性
- 求导和积分可以交换次序.

含参量积分可导性的证明

证明:

$$\text{右边}\Big|_{t=t_0} \xlongequal[\text{中值定理}]{\forall\, t_0\neq t_n\to t_0} \int_E \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}}_{=f'(x,\xi_n)} dx$$

$$\xlongequal{\text{控制收敛}} \lim_{n\to\infty} \frac{\int_E f(x,t_n)dx - \int_E f(x,t_0)dx}{t_n-t_0}$$

$$\xlongequal{\qquad\qquad} \text{左边}\Big|_{t=t_0}.$$

Borel-Cantelli引理:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1(E)} < +\infty \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{a.e.} 0.$$

注记: $f(n,x) := f_n(x) \in L^1(\mathbb{N} \times E) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1(E)} < +\infty$

注记: $f \in L^1(\mathbb{N} \times E) \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{a.e.} 0.$

注记

- a.e.收敛性的证明转化为L^1可积性(积分理论)处理.
- (加强)L^1可积蕴含a.e.收敛
- 取f为特征函数, 得到古典的测度论结果.

问题: 单调收敛定理的条件下是否能推出L^1收敛性?

续

证明: $\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1(E)} = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, dm$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \in L^1(E)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \overset{a.e.}{<} +\infty.$$

$$\Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{a.e.} 0.$$

例题1

设$f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{if } xy \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

计算

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy$$

续

解:

$$[xy \in \mathbb{Q}] = \bigcup_n [xy = r_n] = \mathbb{R}^2\text{中零测集}$$

$$\Longrightarrow \qquad f \xlongequal{a.e.} 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy = \int_{[0,1]^2} 1dxdy = 1.$$

例题2

设$f \in L^1(E)$, $f > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$可测. 证明:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f(x)^{1/k} dx = m(E).$$

续

证明: 只要证明极限和积分可交换次序, 为此将积分限剖分成两部分

$$E = [f \geqslant 1] \sqcup [f < 1].$$

在$[f \geqslant 1]$上: $f(x)^{1/k} \leqslant f(x)$, 可利用Lebesgue控制收敛定理.

在$[f < 1]$上: $f(x)^{1/k} \uparrow 1$, 可利用Levi单调收敛定理.

例题3

证明下述结论:

$$f \in L^1[0,1] \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n\log\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)dx = 0$$

续

证明:

$$\forall x > 0, \quad \log(1+x^2) \leqslant x \xRightarrow{\text{控制收敛定理}} \text{极限和积分可交换次序}$$

$$\log(1+x^2) \leqslant x^2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n\log(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}) = 0$$

实分析(H), 第15次课

任广斌(中国科大)

2022-4-13

本讲内容

- 推广的交换次序的定理
  - 非负性条件的弱化
  - 控制性条件的弱化

交换积分次序的五个等价定理

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xRightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim}\, f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \longrightarrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \overset{f \in L^+ \cup L^1}{=\!=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dm(y) \Big) dm(x).$

交换次序的等价定理在$L^+ \cup L^1$框架内

- 交换次序的等价定理在$L^+ \cup L^1$框架内

Levi	$f \in L^+$
Lebesgue	$f \in L^1$
Fatou	$f \in L^+$
Fubini	$f \in L^+ \cup L^1$

推广1

- 弱化的非负性

推广的Levi单调收敛定理

- 推广的法则:

$$f \in \mathscr{L}^{+} \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-} \equiv 0 \quad \xrightarrow{\text{推广}} \quad f^{-} \in \mathscr{L}^{+} \cap \mathscr{L}^{1}$$

推广的Levi单调收敛定理↑

Theorem 1 (推广的Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \ni f_n \uparrow f \xrightarrow{\quad f_1^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \quad} \int_E f_n \uparrow \int_E f.$$

注记

序结构:

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = \frac{|f| - f}{2} = \max\{-f, 0\} = (-f)^+$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \max\{f, 0\} \leqslant \max\{g, 0\} \quad \Longrightarrow \quad f^+ \leqslant g^+$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \min\{f, 0\} \leqslant \min\{g, 0\} \quad \Longrightarrow \quad f^- \geqslant g^-$$

续

$$f_n \uparrow f \quad \Longrightarrow \quad f_n^- \downarrow f^-, \qquad \forall n$$

$$f_1^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \quad \xLeftrightarrow{f_n \uparrow f} \quad f_n^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1, \qquad \forall n$$

推广的Levi单调收敛定理↑的证明

证明: 情形1: $f_1^+ \notin \mathscr{L}^1$

$$\int_E f_1 = \int_E f_1^+ - \int_E f_1^- = +\infty \Longrightarrow \int_E f_n = +\infty$$

续

情形2: $f_1^+ \in \mathscr{L}^1$

$$f_1^\pm \in \mathscr{L}^1 \implies f_1 \in \mathscr{L}^1 \qquad (\text{不妨设} f_1 \text{恒取有限值})$$

$$\implies 0 \leqslant f_n - f_1 \uparrow f - f_1 \implies \int_E (f_n - f_1) \uparrow \int_E (f - f_1)$$

$$\implies \int_E f_n \uparrow \int_E f$$

推广的Levi单调收敛定理↓

Theorem 2 (推广的Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \ni f_n \downarrow f \quad \xRightarrow{f_1^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \quad \int_E f_n \downarrow \int_E f.$$

续

证明: 利用序结构中乘以−1的对合即可.

$$f_n \downarrow f, \qquad f_1^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1$$

$$\xrightarrow{f^- = \frac{|f|-f}{2}} \quad -f_n \uparrow -f, \qquad (-f_1)^- = f_1^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E (-f_n) \uparrow \int_E (-f)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_n \downarrow \int_E f$$

推广的Fatou引理

Theorem 3 (推广的Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xrightarrow{(\inf\limits_n f_n)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

$$(\inf_n f_n)^- \geqslant f_k^-, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \xrightarrow[\varliminf = \liminf]{(\inf\limits_n f_n)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} f_k^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1$$

反之不成立例如$f_n = -n$.

续

证明:

$$f_n \geqslant \inf_{k\geqslant n} f_k \uparrow \varliminf_{n\to\infty} f_n$$

$$\xRightarrow{\text{推广的单调收敛定理}} \int_E f_n \geqslant \int_E \inf_{k\geqslant n} f_k \uparrow \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n$$

$$\Longrightarrow \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \int_E \inf_{k\geqslant n} f_k = \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n$$

推广的Fatou引理

Theorem 4 (推广的Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xRightarrow{(\sup\limits_n f_n)^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

推广的交换积分次序定理

测度的σ可加性等价于:

Levi $\uparrow$	f^-好	$f_n \uparrow f \Longrightarrow \int f_n \uparrow \int f$
Levi $\downarrow$	f^+好	$f_n \downarrow f \Longrightarrow \int f_n \downarrow \int f$
Fatou	$(\inf\limits_n f_n)^-$好	$\int \underline{\lim} f_n \leqslant \underline{\lim} \int f_n$
Fatou	$(\sup\limits_n f_n)^+$好	$\int \overline{\lim} f_n \geqslant \overline{\lim} \int f_n$

推广2

- 控制收敛条件弱化为控制收敛序列条件

推广的Lebesgue控制收敛定理

- 推广的Lebesgue控制收敛定理

控制条件:

$$\text{由一个函数控制} \xRightarrow{\text{减弱}} \text{用函数列控制}$$

$$\text{一致控制} \xRightarrow{\text{减弱}} \text{非一致控制}$$

L^1收敛和交换积分次序的等价性

- 假设

(1) $f_n \xrightarrow{a.e.} f$

(2) $f_n, f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E)$.

则

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n.$$

推广的Lebesgue控制收敛定理续

证明:“ $\Longrightarrow$ ” : $\quad \overline{\lim}\left|\int_E f_n - \int_E f\right| \leqslant \overline{\lim}\int_E |f_n - f| = 0.$

续

“ $\Longleftarrow$ ” : $\quad (f_n+f)-|f_n-f|\in L^+(E)$

$$\xrightarrow{Fatou}\int_E \underline{\lim}((f_n+f)-|f_n-f|)\leqslant \underline{\lim}\int_E((f_n+f)-|f_n-f|)$$

$$左边=\int_E 2f$$

$$右边=\lim\int_E(f_n+f)-\overline{\lim}\int_E|f_n-f|)=\int_E 2f-\overline{\lim}\int_E|f_n-f|)$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim}\int_E|f_n-f|\leqslant 0.$$

注记

Fatou引理能产生等式的根本原因:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| \leqslant 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| = 0.$$

推广的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 5 (推广的Lebesgue控制收敛定理)

设$f_n \in \mathscr{L}(E)$, $\quad |f_n| \leqslant g \in L^1$. 则

$$f_n \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

证明:

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当} n > N \text{时, 有} \|f_n - f\|_{L^1} < \epsilon.$$

$$f_n \overset{L^1}{\nrightarrow} f \quad \xRightarrow{\text{可利用子列判别法}} \quad \exists \epsilon_0 > 0, \quad \exists \text{子列} f_{k_n}: \quad \|f_{k_n} - f\|_{L^1} \geqslant \epsilon_0$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \quad \xRightarrow{Riesz} \quad \exists f_{k_n} \text{子列} f_{k_n'} \xrightarrow{a,e} f$$

$$\xRightarrow{Lebesgue\text{控制收敛}} \quad f_{k_n'} \xrightarrow{L^1} f \qquad \text{矛盾}$$

弱化控制收敛定理

Theorem 6 (Lebesgue控制收敛定理, 比较判别法)

设$f_n \in \mathscr{L}(E)$,

$$|f_n| \leqslant g_n \xrightarrow[a.e.]{L^1} g$$

则

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

弱化控制收敛定理续

证明: $$(g_n+g)-|f_n-f|\in L^+(E)$$

$$\xrightarrow{Fatou}\int_E \underline{\lim}((g_n+g)-|f_n-f|)\leqslant \underline{\lim}\int_E((g_n+g)-|f_n-f|)$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim}\int_E|f_n-f|\leqslant 0.$$

注记

Theorem 7 (利用函数列控制的Lebesgue定理)

设$f_n \in L(E)$, $f_n \xrightarrow{a.e.} f$,

$$|f_n| \leqslant g_n \xrightarrow[a.e.]{L^1} g$$

则

(1) 控制函数列满足

$$g_n \xrightarrow{a.e.} g, \quad g_n \xrightarrow{L^1} g, \quad \int_E g_n \longrightarrow \int_E g.$$

(2) 被控制的函数列满足

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f, \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

利用函数列控制的Lebesgue定理注记

条件:

	$a.e.$收敛	L^1收敛	积分和极限换序
函数列$\{f_n\}$	√		
控制函数列$\{g_n\}$	√	√	

结论:

	$a.e.$收敛	L^1收敛	积分和极限换序
函数列$\{f_n\}$	√	√	√
控制函数列$\{g_n\}$	√	√	√

作业

P191　第13, 14, 15, 16, 17 题

实分析(H), 第16次课

任广斌(中国科大)

2022-4-15

实分析(H)期中考试：

时间：2022年4月17日(星期天)晚上7:00–9:00

地点：5103(五教)

内容：第一、二、三章

本讲内容

- 积分号下取极限的充要条件:

一致可积条件(防止面积逃逸)

  - 推广的Fatou引理
  - 推广的Lebesgue控制收敛定理
  - Vitali收敛定理

交换积分次序的五个等价定理

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xRightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim} f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \longrightarrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \overset{f \in L^+ \cup L^1}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dm(y) \Big) dm(x).$

推广的Levi单调收敛定理↑

Theorem 1 (推广的Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \ni f_n \uparrow f \xrightarrow{\quad f_1^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \quad} \int_E f_n \uparrow \int_E f.$$

推广的Fatou引理

Theorem 2 (推广的Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xRightarrow{(\inf\limits_n f_n)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

一致可积性

- 一致可积性

积分在无穷点处差不多为零

- 积分在无穷点处差不多为零:

$$f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R \to +\infty} \int_{[|x|>R]} |f(x)| dx = 0.$$

积分在无穷点处差不多为零

证明：
$$\text{左} = \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\chi_{[|x|>R]}(x)\,dx \xlongequal[\text{离散化}]{\text{控制收敛}} 0.$$

积分在有限点处差不多为零

$$f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{当} A \text{可测}, \quad m(A) < \delta \text{时}, \quad \text{有}$$

$$\int_A |f| dm < \epsilon.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{m(A) \to 0} \int_A |f| dm = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{m(A) \to 0} \mu(A) = 0, \qquad d\mu = |f| dm.$$

续

证明: 反证法:

$$\exists \epsilon_0, \quad \exists A_n\text{可测}, \quad m(A_n) < \frac{1}{2^n}, \quad \int_{A_n} |f| \geq \epsilon_0$$

$$\xRightarrow{\text{Borel-Cantelli}} \quad A := \varlimsup_{n\to\infty} A_n, \quad m(A) = 0$$

$$0 \xlongequal{m(A)=0} \int_A |f| \xlongequal[\text{Lebesgue}]{f\in L^1} \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k} |f| \geqslant \epsilon_0.$$

可积性$\Longrightarrow$绝对连续性

设$E \subset \mathbb{R}^n$是Lebesgue可测集.

$$f \in \mathscr{L}^1(E) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R\to\infty} \int_{[|f|>R]} |f| = 0$$

证明1

$$\text{零扩充} \Longrightarrow \text{可不妨设} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{取} \quad R > \frac{1}{\delta}\int_E |f| \quad \xrightarrow{\text{Chebyshev}} \quad m[|f| > R] \leqslant \frac{1}{R}\int_E |f| < \delta, \qquad R \gg 1$$

$$\xrightarrow{\text{积分在有限点处差不多为零}} \quad \int_{[|f|>R]} |f| < \epsilon.$$

证明2

$$\lim_{R\to\infty}[|f|>R]=[|f|=\infty] \quad \text{零测集}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{[|f|>R]}|f| \xlongequal{Lebesgue} 0$$

一致可积定义

Def

设$f_n \in \mathscr{L}^1(E)$, $\quad m(E) < \infty \quad E \subset \mathbb{R}^n$ 可测.

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积} \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{R\to\infty} \sup_n \int_{[|f_n|>R]} |f_n| = 0$$

一致的秘密: 无穷个差不多是一个.

一致可积等价定义

设$f_n \in \mathscr{L}^1(E), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sup_n \int_E |f_n| < \infty & (\mathscr{L}^1\text{中有界集合}) \\ \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{当}m(A) < \delta\text{时, 成立} & \end{cases}$$

$$\sup_n \int_A |f_n| < \epsilon$$

即 $\lim_{m(A)\to 0} \sup_n \int_A |f_n| = 0.$

必要性证明

必要性:

$$\int_E |f_n| = \int_{[|f_n|\geqslant R]} |f_n| + \int_{[|f_n|<R]} |f_n| < \epsilon + Rm(E)$$

$$\int_A |f_n| = \int_{A\cap[|f_n|\geqslant R]} |f_n| + \int_{A\cap[|f_n|<R]} |f_n| < \frac{\epsilon}{2} + Rm(A) < \epsilon, \qquad \delta := \frac{\epsilon}{2R}$$

充分性证明

充分性:

$$\text{取} \quad R > \frac{1}{\delta} \sup_n \int_E |f_n|$$

$$\xRightarrow{\textit{Chebyshev}} \quad m[|f_n| \geqslant R] \leqslant \int_{[|f_n| \geqslant R]} \frac{|f_n|}{R} \leqslant \int_E \frac{|f_n|}{R} < \delta$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_n \int_{[|f_n| \geqslant R]} |f_n| < \epsilon.$$

控制可积蕴含一致可积

设$f_n \in \mathscr{L}^1(E), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$|f_n| \le g \in L^1(E) \Longrightarrow \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积}$$

证明

证明:

$$\text{控制可积} \xLongrightarrow[\text{无穷个用一个代替}]{\text{一致可积的等价定义}} \text{一致可积}$$

具有一致可积条件的推广的Fatou引理

Theorem 3 (推广的Fatou引理)

设$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n,$

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积}$$

$$\Longrightarrow \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n$$

续

证明: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致可积 : $\lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_{[|f_n|>R]}|f_n| = 0$

$$\Longrightarrow \quad \forall\epsilon>0,\quad \exists R>0:\quad \left|\int_{[f_n<-R]} f_n\right| < \epsilon,\quad \forall n$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_n = \int_{[f_n\geqslant -R]} f_n + \int_{[f_n<-R]} f_n$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_n > \int_{[f_n\geqslant -R]} f_n - \epsilon$$

续

$$f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]} \geqslant -R$$

$$\Longrightarrow \quad (\inf_n f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]})^- \leqslant (-R)^- = R \in L^1(E)$$

$$\xrightarrow[f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]}\geqslant f_n]{\text{Fatou引理}} \quad \underline{\lim}\int_{[f_n\geqslant -R]} f_n \geqslant \int_E \underline{\lim}(f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]}) \geqslant \int_E \underline{\lim}\, f_n$$

续

综上所述:

$$\Longrightarrow \underline{\lim} \int_E f_n \geqslant \underline{\lim} \int_{[f_n \geqslant -R]} f_n - \epsilon \geqslant \int_E \underline{\lim}\, f_n - \epsilon$$

$$\xrightarrow{\epsilon \to 0} \underline{\lim} \int_E f_n \geqslant \int_E \underline{\lim}\, f_n$$

推广的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 4 (推广的Lebesgue控制收敛定理)

设$f, f_n \in \mathscr{L}^1(E)$, $\quad m(E) < \infty$, $\quad E \subset \mathbb{R}^n$. 则

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \iff f_n \xrightarrow{m} f, \qquad \{f_n\}\text{一致可积}$$

必要性证明

必要性:

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^1} < \infty$$

$$\begin{aligned}\sup_n \int_A |f_n| &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_A |f_n| + \sup_{n>N} \int_A |f_n - f| + \int_A |f| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\epsilon}{N} + \epsilon + \epsilon\end{aligned}$$

证明

充分性:

$$f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_{n_k}\text{一致可积}]{\text{一致可积等价定义}} |f_{n_k} - f|\text{一致可积}, \quad |f_{n_k} - f| \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\xRightarrow{Fatou} |f_{n_k} - f| \xrightarrow{L^1} 0$$

再利用反证法.

续

证明:

$$f_n \overset{L^1}{\nrightarrow} f \Longrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \quad \exists 子列 f_{k_n}: \quad \|f_{k_n} - f\|_{L^1} \geqslant \epsilon_0$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \xRightarrow{Riesz} \exists f_{k_n} 子列 f_{k_n'} \xrightarrow{a,e} f$$

$$\xRightarrow{Lebesgue} \quad f_{k_n'} \xrightarrow{L^1} f \quad 矛盾于 \quad \|f_{k_n} - f\|_{L^1} \geqslant \epsilon_0$$

L^1收敛和交换积分次序的等价性

- 假设

(1) $f_n \xrightarrow{a.e.} f$

(2) $f_n, f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E)$.

则

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n.$$

推广的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 5 (推广的Lebesgue控制收敛定理)

设$f, f_n \in \mathscr{L}^1(E)$, $\quad m(E) < \infty$, $\quad E \subset \mathbb{R}^n$, $\quad f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 则

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{f_n\}\text{一致可积}$$

注记: 在测度有限条件下, $a.e. = a.un \Longrightarrow m$.

交换次序的充要条件

Theorem 6 (交换次序的充要条件)

设$f, f_n \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n, \quad f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 则

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n dx \quad \Longleftrightarrow \quad \{f_n\}\text{一致可积}$$

Vitali 收敛定理

设$f_k, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$f_k \xrightarrow{L^1} f \Longleftrightarrow \begin{cases} f_k \xrightarrow{m} f \\ \forall \epsilon > 0, \quad \exists R > 0 : \quad \sup\limits_k \|f_k\|_{L^1(B(0,R)^c)} < \epsilon \\ \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall m(A) < \delta : \quad \sup\limits_k \|f_k\|_{L^1(A)} < \epsilon \end{cases}$$

即 $\lim\limits_{m(A)\to 0} \sup\limits_n \|f_n\|_{L^1(A)} = \lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_n \|f_n\|_{L^1(B(0,R)^c)} = 0.$

Vitali收敛定理的证明

必要性:　Chebyshev不等式

$$m[|f_n - f| \geqslant \epsilon] \leqslant \int_{[|f_n - f| \geqslant \epsilon]} \frac{|f_n - f|}{\epsilon} \leqslant \frac{1}{\epsilon} \|f_n - f\|_{L^1}$$

$$\int_{B(0,R)^c} |f_k| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f| + \int_{B(0,R)^c} |f|.$$

$$\int_{E_\delta} |f_k| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f| + \int_{E_\delta} |f|.$$

Vitali收敛定理的证明

充分性:　情形1:　$f_k \xrightarrow{a.e.} f$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|$$

$$\leqslant \int_{B(0,R)^c} (|f_k| + |f|) + \int_{B(0,R)\setminus E_\delta} |f_k - f| + \int_{B(0,R)\cap E_\delta} (|f_k| + |f|)$$

$< \epsilon$　　(第二项利用Egorov定理, 最后一项利用Fatou引理)

一般情形

充分性: 情形2: $f_k \xrightarrow{m} f$

反证法: 假设$f_k \xrightarrow{L^1} f$不成立.

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \epsilon_0 > 0, \quad \exists 子列 f_{n_k}$$

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^1} > \epsilon_0, \qquad \forall k, \qquad f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$$

$$\xRightarrow{情形1} \quad \|f_{n_k} - f\|_{L^1} \to 0. \qquad 矛盾$$

Littlewood三原理之一

Theorem 7 (Egorov定理)

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \xLeftrightarrow{m(E)<+\infty} \quad f_k \xrightarrow{a.un} f.$$

Littlewood 三原理之一：

$[a,b]$区间上函数列收敛$\Longleftrightarrow$差不多一致收敛.

三种收敛性

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \Longleftrightarrow m[f_n \nrightarrow f] = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{a.un} f \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \text{可测} E_\epsilon \subset E: \\ m(E_\epsilon) < \epsilon, \qquad f_n \overset{onE \setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k \to \infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

(测度刻画小集合)

三种收敛的依测度收敛型的刻画

- 无穷多项远离f的是零测集.

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad m(\overline{\lim_{k\to\infty}}[|f_k - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- (允许有限项例外的)一致远离f的点集是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 依测度意义远离f是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

注记

- 交换积分次序定理可以解读为各种收敛性之间的关系.
- 我们梳理了各种收敛性之间关系. ($a.e.$, $a.un$, m, L^1)

作业

P191　第18, 19, 20, 21题

实分析(H), 第17次课

任广斌(中国科大)

2022-4-20

本讲内容

- 抽象的测度论

- 抽象的积分理论

目的: Lebesgue积分理论 $\xRightarrow[\text{关键提升}]{\text{举一反三}}$ 抽象的积分理论

注记

- 抽象的测度论:
  - Hausdorff测度　(几何函数论)
  - 谱测度　(泛函分析)
  - Wiener测度　(概率论)
  - Haar测度　(李群理论)

注记

- 抽象的积分论:

释放了积分论的手脚, 统一了极限、离散求和、连续积分.

函数=广义函数=测度=积分=级数=极限

抽象测度论: 测度

测度空间(X,Γ,μ): X是非空集合, $\Gamma\subset 2^X$ 是σ-代数.

- $\mu:\Gamma\longrightarrow[0,+\infty]$是测度:
  - $\mu(\emptyset)=0$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(A_k)$.

续

Lebesgue测度空间 抽象测度空间

$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$ (X, Γ, μ)

具体 $\xRightarrow{\text{提升,进化}}$ 抽象

续:

- 可测函数 $=\chi_A+(+,\quad \cdot,\quad \lim)$

  $=$ 可测特征函数通过代数运算和极限运算生成

- $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$可测

  $=$ 开集的原像可测

  $=[a,+\infty]$的原像可测，$\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$

- 可测函数柔韧特性：对于极限运算封闭.

- Littlewood 三原理

Radon测度

正则Borel测度μ:

(1) 紧集的测度有限

(2) 任意可测集的测度可以由开集的测度收缩得到

(3) 任意可测集的测度可以由紧集的测度膨胀得到

Lusin定理

- 设$X=$局部紧空间, $\mu=$是X上的正则Borel测度.

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ 可测}, \quad \exists\, E \subset X, \quad m(E) < \infty: \qquad f|_{E^c} = 0$$

$$\Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \quad \exists \varphi \in C_c(X): \qquad m(\{x \in X : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \epsilon.$$

- 若$f \in L^\infty(X, d\mu)$, 则可选取φ:

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

Egorov定理

设测度空间(X, Σ, μ), $\mu(X) < \infty$,

$$\mathscr{L}(X) \ni f_n \xrightarrow{a.e. \quad \mu} f$$

$$\Longrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists E \in \Gamma : \quad \mu(E) < \epsilon, \quad f_n \rightrightarrows f \quad on \quad X \setminus E$$

积分理论

- (X, Γ, μ)测度空间.

S^+	$S^+(X,\mu)$	非负简单可测	$\mathbb{R}$值
L^+	$L^+(X,\mu)$	非负可测	$\overline{\mathbb{R}}$值
L^1	$L^1(X,\mu)$	可积	$\overline{\mathbb{R}}$值

标准四步

- 标准四步:

$$\text{测度论} \underset{\text{限制}}{\overset{\text{提升 }(S^+\text{代数}, L^+\text{极限})}{\rightleftharpoons}} \text{积分论}$$

$$\chi_A \underset{\text{绝对连续测度}}{\overset{\text{桥梁: }\mu(A)=\int_X \chi_A d\mu}{\rightleftharpoons}} f \in L^+ \cup L^1$$

积分定义四部曲

$$(1)\quad \int_X \chi_A d\mu \xlongequal{f=\chi_A} \mu(A)$$

$$(2)\quad \int_X \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j} d\mu \xlongequal[\text{标准表示}]{f\in S^+} \sum_{j=1}^{k} c_j \int_X \chi_{A_j} d\mu.$$

$$(3)\quad \int_X f d\mu \xlongequal[S^+\ni\varphi_k\uparrow f]{f\in L^+} \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k d\mu = \sup_{S^+\ni\varphi\leqslant f} \int_X \varphi d\mu.$$

$$(4)\quad \int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \begin{cases} \text{可定义,} & f^\pm\text{之一} \in L^1(X, d\mu) \\ \text{无定义,} & \text{其它.} \end{cases}$$

可积函数

- 函数可积:

$$f \in \mathscr{L}^1(X) \Longleftrightarrow \int_X |f| < \infty.$$

- 函数可积等价刻画:

$$f \in \mathscr{L}^1(X) \Longleftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(X) \Longleftrightarrow f^{\pm} \in \mathscr{L}^1(X)$$

积分理论

- $$\int_X f\, d\mu = \text{特征函数的积分+代数运算+极限运算}$$

- $$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu$$

$$f_n = \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n}\chi_{f^{-1}[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n})} + 2^n\chi_{f^{-1}[2^n,+\infty)} \nearrow f \in \mathscr{L}^+$$

- 抽象积分论的核心内容:　　交换积分次序的等价定理

单调收敛定理

- 单调收敛定理:

$$f_k \in L^+(X), \quad f_k \nearrow f \Longrightarrow \int_X f_k \, d\mu \nearrow \int_X f \, d\mu$$

Fatou引理

- Fatou引理:

$$f_k \in L^+(X) \quad \Longrightarrow \quad \int_X \underline{\lim}\, f_k \; d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_X f_k \; d\mu$$

Lebesgue控制收敛定理

- Lebesgue控制收敛定理:

$$f_k \in L(X), \quad |f_k| \leqslant g \in L^1(X, d\mu), \quad f_k \to f. \quad \text{则}$$

$$f_k \xrightarrow{L^1} f, \qquad \int_X f_k \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu$$

连续版本的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 1 (连续版本的Lebesgue控制收敛定理)

假设$f(x,t)$关于x在X上可测, 关于t在$[a,b]$连续, 而且

$$|f(\cdot,t)| \leqslant g \in L^1(X,d\mu), \qquad \forall t \in [a,b]$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to t_0} \int_X f(x,t)d\mu(x) = \int_X \lim_{t\to t_0} f(x,t)d\mu(x), \qquad \forall\ t_0 \in [a,b].$$

含参量积分理论: 连续性

- 含参量积分的连续性:

$$|f(\cdot,t)| \leqslant g \in L^1(X,d\mu) \xRightarrow[\text{关于}x\text{可积}]{f\text{关于}t\text{连续}} \int_X f(x,t)d\mu(x) \in C[a,b].$$

含参量积分理论: 可导性

Theorem 2 (导数和积分交换次序)

$$\left|\frac{\partial f(\cdot, t)}{\partial t}\right| \leqslant g \in L^1(X, d\mu)$$

$$\xRightarrow[f_t\text{存在}]{f, f_t\text{关于}x\text{可积}} \frac{d}{dt}\int_X f(x,t)d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} d\mu(x).$$

Fubini定理

- Fubini定理:

  设(X_i, Σ_i, μ_i)是σ有限测度空间, $\quad i = 1, 2.$

$$f \in L^+(X_1 \times X_2) \bigcup L^1(X_1 \times X_2, d\mu_1 d\mu_2)$$

$$\Longrightarrow \int_{X_1 \times X_2} f \, d\mu_1 d\mu_2 = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$

$$= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

测度的σ可加性的积分描述

- 测度σ可加性:

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_k} d\mu$$

Fubini定理一统天下

$$\text{单调收敛定理} \quad \xlongequal[\text{极限=级数=积分}]{L^{+}\text{框架}} \quad \textit{Fubini}\text{定理}$$

$$\text{控制收敛定理} \quad \xlongequal[\text{极限=级数=积分}]{L^{1}\text{框架}} \quad \textit{Fubini}\text{定理}$$

$$\text{测度的}\sigma\text{可加性} \quad \xlongequal[\text{级数=积分}]{\text{集合测度=特征函数积分}} \quad \textit{Fubini}\text{定理}$$

- 抽象测度和抽象积分的例子

Dirac测度的积分:　函数=积分

- Dirac测度空间(X, Γ, δ_x):

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

- Dirac测度的积分

$$\int_X f d\delta_x = f(x), \quad \forall f \in \mathscr{L}(X).$$

证明四步： $\chi_A \Longrightarrow S^+(X) \Longrightarrow \mathscr{L}^+(X) \Longrightarrow \mathscr{L}(X)$

$$\int_X f d\delta_x = \sup_{S^+(X) \ni \varphi \leqslant f} \int_X \varphi d\delta_x = f(x)$$

计数测度的积分:　极限=积分

- 测度空间 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$

$$\mu(A) = \begin{cases} A\text{的元素个数}, & A\text{是有限集} \\ \\ +\infty, & A\text{是无限集}. \end{cases}$$

计数测度的积分续

- 任意函数$f:\mathbb{N}\longrightarrow[0,+\infty)$ 必可测.

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{k\}} f\,d\mu=\sum_{k=1}^{\infty} f(k)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\int_{\mathbb{N}} |f|\,d\mu=\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

- 绝对收敛的级数是关于计数测度的积分.

绝对连续测度的积分

- 设$(X, \Gamma, d\mu)$是测度空间.
- 绝对连续测度$d\nu = f d\mu, \qquad f \in L^1(X, \mu) \cap L^+(X)$.
- 绝对连续测度空间$(X, \Gamma, d\nu)$

续

- 关于绝对连续测度的积分:

$$\nu(A) = \int_A d\nu = \int_A f d\mu.$$

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu, \qquad \forall g \in L^+(X,\mu) \cup L^1(X,\mu).$$

证明: 对于$g = \chi_A$验证.

实分析大楼

推广值域的抽象测度论	推广值域的抽象积分论
抽象测度论	抽象积分论
Lebesgue 测度论	Lebesgue积分论

作业

P191: 22, 23

实分析(H), 第18次课

任广斌(中国科大)

2022-4-22

本讲内容

- 测度的绝对连续性
  - 测度是广义函数(测度分解是函数正负部分解的推广)
  - 积分的绝对连续性(函数视为测度)
- 加权计数测度
- 函数的重整

内容1

- 测度的绝对连续性

测度的绝对连续性

- 设$(X, \Gamma, \mu), (X, \Gamma, \nu)$是测度空间.

  ν 是有限测度, 即$\nu(X) < \infty$.

- ν 关于μ绝对连续　$(\nu \ll \mu)$:

$$\mu(A) \xlongequal{\forall A \in \Gamma} 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

测度的绝对连续性

- ν 关于μ绝对连续判别法:

$$\nu \ll \mu \iff \left(\mu(A) \xlongequal{\forall A\in\Gamma} 0 \implies \nu(A) = 0\right)$$

$$\iff \lim_{\mu(A)\to 0} \nu(A) = 0$$

$$\left(\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 当A \in \Gamma,\ \mu(A) < \delta 时, 有\nu(A) < \epsilon\right)$$

测度的绝对连续性必要性证明

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \nu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\mu(A) \xlongequal{\forall A\in\Gamma} 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0\right)$$

证明: $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \nu(A) = 0$

$\Longrightarrow$ $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当$A \in \Gamma$, $\mu(A) < \delta$时, 有$\nu(A) < \epsilon$

$\Longrightarrow$ "$\mu(A) \xlongequal{A\in\Gamma} 0 \Longrightarrow \nu(A) < \epsilon \quad (\forall \epsilon > 0)$"

.

测度的绝对连续性充分性的证明

$$\text{“}\mu(A) \xlongequal{A\in\Gamma} 0 \Longrightarrow \nu(A) < \epsilon \quad (\forall \epsilon > 0)\text{“}$$

$$\Longrightarrow \qquad \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \text{当} A \in \Gamma, \ \mu(A) < \delta \text{时}, \text{有} \nu(A) < \epsilon$$

证明: 反证法: $\exists \epsilon_0, \quad \exists A_n \in \Gamma, \quad \mu(A_n) < \frac{1}{2^n}, \quad \nu(A_n) \geqslant \epsilon_0.$

$$\xRightarrow{Borel-C} A := \varlimsup_{n\to\infty} A_n, \quad \mu(A) = 0, \quad \nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geqslant \epsilon_0.$$

Radon-Nikodym定理: 测度论顶峰

Theorem 1 (Radon-Nikodym定理)

设μ是有限测度, 则

$$\mu \ll m \xLeftrightarrow{\exists\,!\ f \in L^+(E) \cap L^1(E)} \quad d\mu = fdm.$$

注记: 积分论意义下唯一

证明

$m(E) < \infty$.

$$0 \in \Gamma := \left\{ g \in L^{+}(E) \cap L^{1}(E) : \int_A g \, dm \leqslant \mu(A), \ \forall A \subset E\text{可测} \right\}.$$

$$\lambda := \sup_{g \in \Gamma} \int_E g \, dm \xlongequal[\text{待证}]{\exists! f \in \Gamma} \int_E f \, dm$$

续

$$\text{取}\{g_n\}_{n\geqslant 1}\subset\Gamma:\quad \int_E g_n dm\to\lambda$$

$$\Longrightarrow\quad h_n:=\max_{1\leqslant k\leqslant n} g_k\in\Gamma,\quad \int_E h_n dm\uparrow\lambda$$

$$\xrightarrow{\text{令}h_n\uparrow f}\quad \int_E f dm \xlongequal{Levi} \lim\int_E h_n dm(=\lambda)\leqslant\mu(E),\text{故}f\in L^+(E)\cap L^1(E)$$

$$\int_A f dm \xlongequal{Levi} \lim\int_A h_n dm\leqslant\mu(A)$$

$$\Longrightarrow\quad f\in\Gamma,\qquad \int_E f dm=\max_{g\in\Gamma}\int_E g dm$$

续

$$\nu(A) := \mu(A) - \int_A fdm \quad \Longrightarrow \quad \nu\text{是一个测度，}\nu(A) \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \quad \nu = 0$$

反证法: 不妨设$\nu(E) > 0$. $\exists \epsilon_0 > 0 :$ $\quad \epsilon_0 m(E) < \nu(E)$

$\nu - \epsilon_0 m$是符号测度, 具有Hahn分解(E_+, E_-)

$$\Longrightarrow \quad \forall\text{可测集}A \subset E : \quad \epsilon_0 m(A \cap E_+) \leqslant \nu(A \cap E_+)$$

续

$$\xrightarrow[\nu(A\cap E_-)\geqslant 0]{\nu\geqslant 0} \int_A (f+\epsilon_0\chi_{E_+})dm \leqslant \int_A fdm + \nu(A\cap E_+) \leqslant \mu(A)$$

$$\Longrightarrow f+\epsilon_0\chi_{E_+} \in \Gamma \qquad \int_E (f+\epsilon_0\chi_{E_+})dm > \int_E fdm, \quad \text{矛盾}$$

补充证明$m(E_+) > 0$:

$$m(E_+) = 0 \quad \xrightarrow{\mu\ll m} \quad \mu(E_+) = 0 \xrightarrow{\nu(A):=\mu(A)-\int_A fdm} \nu(E_+) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < (\nu-\epsilon_0 m)(E) = (\nu-\epsilon_0 m)(E_-) \leqslant 0.$$

内容2

- 积分的绝对连续性

积分的绝对连续性

$$f \in L^1(E) \iff |f| \in L^1(E)$$

$$\iff |f|dm \ll dm \quad (Radon - Nikodym\text{定理})$$

$$\iff \lim_{m(A)\to 0} \int_A |f|dm = 0$$

$$\iff \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{当} A \in \Gamma, \quad m(A) < \delta\text{时}, \quad \text{有}$$

$$\int_A |f|dm < \epsilon.$$

积分在有限点处差不多为零

- $m(A) = 0 \xrightarrow{f \in L^1(E)} \int_A |f| dm = 0.$

积分在无穷点处差不多为零

- 积分在无穷点处差不多为零:

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{|x|>k} |f(x)| dx = 0.$$

证明:

$$\text{左} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, \chi_{[|x|>k]}(x)\; dx \;\overset{\text{控制收敛}}{=\!=\!=\!=}\; 0.$$

内容3

- 加权计数测度

加权计数测度

- 加权计数测度空间

$$(\mathbb{Z}_n, \quad 2^{\mathbb{Z}_n}, \quad \mu) \qquad \mathbb{Z}_n := \left\{1, 2, \ldots, n\right\}.$$

- 加权计数测度:

$$\mu(\{j\}) = \lambda_j, \qquad j = 1, \ldots n$$

$$1\text{的分解:}\quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, \quad \lambda_j \geqslant 0.$$

- 任意函数 $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ 必可测.

加权平均是一种积分

- 加权平均是关于加权计数测度的积分

$$\int_{\mathbb{Z}_n} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{\{k\}} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$$

$$\int_{\mathbb{N}} |f|\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |a_k|.$$

凸函数积分刻画

- 凸函数$\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(a_j).$$

$$\forall\ a_j \in (a, b),\ \ \lambda_j \geqslant 0,\ \ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

凸函数积分刻画续

- 加权计数测度:

$$\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\{j\}) = \lambda_j.$$

- 凸函数积分刻画

$$\varphi\text{凸} \quad \overset{f\in L^1}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi\left(\int_{\mathbb{Z}_n} f \, d\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\right) \leqslant \int_{\mathbb{Z}_n} \varphi\circ f \, d\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \quad \forall\ n, \lambda_j.$$

Jensen不等式

- Jensen不等式:

$$\varphi:(a,b)\xrightarrow{\text{凸}}\mathbb{R}\iff\varphi\left(\int_X fd\mu\right)\leqslant\int_X\varphi\circ fd\mu,$$

对$\forall\ f:X\xrightarrow{f\in L^1(X,\mu)}(a,b)$成立.

其中(X,Γ,μ)是任意概率测度空间.

Jensen不等式续

- Jensen不等式:

设(X,Γ,μ)是测度空间, $\mu(X)\in(0,+\infty)$. 则

$$\varphi:(a,b)\xrightarrow{\text{凸}}\mathbb{R}\iff\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu\right)\leqslant\frac{1}{\mu(X)}\int_X\varphi\circ f\,d\mu,$$

对$\forall\ f:X\xrightarrow{f\in L^1(X,\mu)}(a,b)$成立.

其中(X,Γ,μ)是任意测度空间: $\mu(X)\in(0,+\infty)$.

注记

$$\varphi\left(\int_{\mathbb{Z}_n} f\, d\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\right) \leqslant \int_{\mathbb{Z}_n} \varphi\circ f\, d\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$$

$$\xRightarrow[\text{数学的洞察力}]{\text{见微知著}} \quad \varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leqslant \int_X \varphi\circ f d\mu$$

- Jensen不等式的终极形式。

续

证明:

$$\alpha := \!\!\!\!\overset{\mu(X)=1}{=\!=\!=} \int_X f \, d\mu \in (a, b).$$

$$(\alpha = a \implies \int_X (f - a) d\mu = 0$$

$$\implies f - a \overset{a.e.}{=} 0 \text{与} \mu(X) = 1 \text{矛盾.})$$

续

设$(\alpha,\varphi(\alpha))$处的支撑线为

$$\varphi(\alpha)+k(x-\alpha).$$

$$\xRightarrow{\varphi\text{凸}} \quad \varphi(\alpha)+k(x-\alpha)\leqslant\varphi(x)$$

$$\xRightarrow[x:=f(t)]{\text{积分}} \quad \varphi(\alpha)\leqslant\int_X\varphi\circ f\,d\mu.$$

内容4

- 函数的重整

函数的蛋糕表示Layer cake reprersentation:

- 出发点

$$f(x) \xlongequal{f \in L^+(E)} \int_0^{f(x)} dt$$

- 函数的蛋糕表示

$$f(x) \xlongequal{f \in L^+(E)} \int_0^{+\infty} \chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x)\,dt$$

从微元法看函数的蛋糕表示:

$$f(x) \xlongequal[f\text{非负有界可测}]{\text{函数的蛋糕表示}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x)dt}_{\text{带有系数}0,1\text{的微元}}$$

- 固定横坐标x, 则f图形下方垂直集的特征的两种表示:

$$\chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x) = \chi_{[0,f(x))}(t)$$

- $f(x)$下方的第t层$\xRightarrow[\text{上方无贡献}]{\text{曲边梯形视为蛋糕}}$对$f(x)$有贡献

蛋糕表示的作用

- 特征函数$\chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x) \Longrightarrow$ 可测函数$f(x)$

$$\text{特征函数} \xrightarrow[\text{蛋糕表示}]{\text{直接联系}} \text{可测函数}$$

- 函数的蛋糕表示$\xrightarrow[\text{两边积分}]{Fubini}$积分的蛋糕表示

积分的蛋糕表示

$$\int_E f(x)d\mu(x) \xlongequal[f\text{非负有界可测}]{\text{积分的蛋糕表示}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\mu(f^{-1}(t,+\infty))}_{\text{f图形下方水平集的测度}} \downarrow dt$$

函数的重整:

- 函数的重整:

$$\text{不规则} \xRightarrow{\text{重整}} \text{规则} \qquad (\text{极值往往在规则情形达到})$$

函数重整: Rearrangement

- 集合的重整

$$A \xrightarrow[m(A)<\infty]{m(A)=m(A^*)} A^* = B(0,r)$$

- 特征函数的重整

$$\chi_A \xrightarrow{\chi_A^*=(\chi_A)^*:=A^*=\chi_{A^*}} \chi_{A^*}$$

- 非负可测函数的重整

$$\mathscr{L}^+(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)\ni f \xrightarrow[f(x)=\int_0^\infty \chi_{f^{-1}[t,+\infty)}(x)dt]{f^*(x):=\int_0^\infty \chi^*_{f^{-1}[t,+\infty)}(x)dt} f^*$$

函数重整的性质

- 单调性: 径向函数 $\chi_A^* \downarrow \Longrightarrow f^* \downarrow$

- 保序性: $f \leqslant g \Longrightarrow f^* \leqslant g^*$

  f的图形下方 $\subset$ g的图形下方

- 保范性: $\|f\|_1 \xlongequal{\text{积分的蛋糕表示}} \|f^*\|_1$

- 距离不增: $\|f^* - g^*\|_1 \leqslant \|f - g\|_1$

  (参见Lieb 《Analysis》)

作业

P189　第3, 4, 5, 8题

实分析(H), 第19次课

任广斌(中国科大)

2022-4-27

本讲内容:　测度论的升华

- 测度的推广:　实分析的触角
  - 符号测度
  - 复测度

物理意义

正测度	符号测度	复测度
质量分布	电荷分布	向量值测度

推广的立足点

- 函数是测度、测度是广义函数。
- 函数是特殊的测度、绝对连续测度. 测度是特殊的广义函数.

$$f \equiv fdm$$

- 测度视为推广的函数，测度以函数为大本营。

起点	f	f^+	f^-	$\|f\|$	$\mathrm{Re}f$	$\mathrm{Im}f$
终点	ν	ν^+	ν^-	$\|\nu\|$	$\mathrm{Re}\nu$	$\mathrm{Im}\nu$

函数的Hahn-Jordan分解

Lebesgue测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$, $\quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

- Jordan分解: $\quad f = f^+ - f^- \equiv f^+ dm - f^- dm =: \nu^+ - \nu^-$
- Hahn分解: $\quad \mathbb{R}^n = [f \geq 0] \bigsqcup [f < 0] =: A^+ \bigsqcup A^-$
- 两者联系:

$$\nu^+ \perp \nu^- \Longleftrightarrow \begin{cases} \nu^+(A^-) = \int_{A^-} d\nu^+ = \int_{[f<0]} f^+ dm = 0, \\ \\ \nu^-(A^+) = \int_{A^+} d\nu^- = \int_{[f\geqslant 0]} f^- dm = 0 \end{cases}$$

内容1

- 符号测度

符号测度

可测空间(X,Γ): X是非空集合, $\Gamma\subset 2^X$ 是σ-代数.

- 符号测度

$$\mu:\Gamma\longrightarrow[-\infty,\infty)\text{或}(-\infty,+\infty]$$

  - $\mu(\emptyset)=\emptyset$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(A_k).$

符号测度的例子1

可测空间(X, Γ):

$$\mu, \nu\text{是正测度, 其中之一是有限测度} \Longrightarrow \mu - \nu\text{是符号测度}$$

符号测度的例子2

Lebesgue测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$.

- 积分$\int_{\mathbb{R}^n} fdm$ 有定义$\xRightarrow{f^{\pm}\text{之一}\in \mathscr{L}^1} \nu = fdm$是符号测度

- $f = f^+ - f^- \Longrightarrow \nu = \nu^+ - \nu^- = f^+dm - f^-dm$

- $\mathbb{R}^n = A_+ \bigsqcup A_- = [f \geqslant 0] \bigsqcup [f < 0]$

$$\nu^+ \perp \nu^- \Longleftrightarrow \quad \nu^+(A_-) = 0, \qquad \nu^-(A_+) = 0$$

- 全变差测度: $\quad |\nu| = \nu^+ + \nu^- = |f|dm$

符号测度的正部和负部

可测空间(X,Γ):　ν是符号测度.

- Jordan分解:　$\nu = \nu^+ - \nu^-$,　$\nu^+ \perp \nu^-$,　$\nu^\pm$是正测度.

- Hahn分解:　$X = X_+ \bigsqcup X_-$,　$\nu^+(X_-) = 0$,　$\nu^-(X_+) = 0$

- 全变差测度:　$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$

- 符号测度的正部和负部:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap X_+) = \sup_{P \subset E} \nu(P), \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap X_-) = -\inf_{P \subset E} \nu(P)$$

Hahn分解和Jordan分解的唯一性

测度空间(X,Γ,ν):　ν是符号测度.

- Jordan分解:　$\exists !$分解

$$\nu = \nu^+ - \nu^-, \qquad \nu^+ \perp \nu^-, \qquad \nu^\pm\text{是正测度}$$

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$$

- Hahn分解:

$$X = X_+ \bigsqcup X_-, \quad \nu^+(X_-) = 0, \quad \nu^-(X_+) = 0$$

X_+, X_-相差$|\nu|$-零测集唯一

全变差测度

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : \quad E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right\}$$

关于符号测度的积分

$$\int_X f\, d\nu := \int_X f\, d\nu^+ - \int_X f\, d\nu^-, \qquad f \in L^1(X, d|\nu|)$$

测度的绝对连续

测度空间(X, Γ, m):　ν是符号测度.

$$\nu \ll m \iff \text{“}\forall E \in \Gamma, \quad m(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0\text{”}$$

$$\iff \lim_{m(E)\to 0} \nu(E) = 0, \quad \forall E \in \Gamma$$

$$\iff |\nu| \ll m$$

有限测度

可测空间(X,Γ):　ν是符号测度.

$$\nu\text{是有限测度} \overset{def}{\Longleftrightarrow} |\nu(X)| < \infty \Longleftrightarrow |\nu(A)| < \infty, \qquad \forall A \in \Gamma.$$

证明:　$\nu(X) = \nu(A) + \nu(A^c)$.

$$|\nu(A)| = \infty \Longrightarrow |\nu(X)| = \infty.$$

内容2

- 复测度

复测度

测度空间(X, Γ, μ), X是非空集合, $\Gamma \subset 2^X$ 是σ-代数.

- $\mu : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$是复测度：
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$ 绝对收敛

复测度的实部、虚部、共轭、收敛

测度空间(X,Γ), ν是复测度

$$\nu_r(A) := \mathrm{Re}(\nu(A)), \qquad \nu_i(A) := \mathrm{Im}(\nu(A))$$

$$\nu = \nu_r + i\nu_i = (\nu_r^+ - \nu_r^-) + i(\nu_i^+ - \nu_i^-)$$

$$\overline{\nu} = \nu_r - i\nu_i$$

$$\nu_n \longrightarrow \nu \xLeftrightarrow{def} \nu_n(A) \longrightarrow \nu(A), \qquad \forall A \in \Gamma$$

复测度在极限运算下封闭

复测度的全变差测度

可测空间(X, Γ), $\quad \nu$ 是复测度

全变差测度$|\nu|$:

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : \quad E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right\}$$

绝对连续测度的全变差测度, 实部, 虚部

测度空间(X, Γ, m), $\quad h \in \mathscr{L}^1(X, m; \mathbb{C})$

$$d\nu := h\, dm \Longrightarrow d|\nu| = |h|\, dm$$

$$\nu(E) = \int_E h\, dm, \qquad |\nu|(E) = \int_E |h|\, dm$$

$$\mathrm{Re}\nu(E) = \int_E \mathrm{Re}h\, dm, \qquad \mathrm{Im}\nu(E) = \int_E \mathrm{Im}h\, dm$$

奇异测度定义

可测空间(X,Γ), μ,ν 是复测度

$$\mu \perp \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \exists 剖分 X = X_+ \bigsqcup X_- : \quad \mu(X_-) = 0, \quad \nu(X_+) = 0$$

注记: $\mu(E) = \mu(E \cap X_+), \quad \nu(E) = \nu(E \cap X_-), \quad \forall\ E \in \Gamma$

绝对连续测度定义

可测空间(X,Γ)， m 是正测度， ν是复测度

$$\nu \ll m \quad \Longleftrightarrow \text{“} m(E)=0 \Longrightarrow \nu(E)=0 \text{”}$$

绝对连续测度和奇异测度位于两个极端

测度空间(X, Γ, m)， m 是正测度， ν是复测度

$$\nu \ll m, \qquad \nu \perp m \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = 0$$

奇异测度例子:

$$\text{Lebesgue测度} \perp \mathit{Dirac}\text{测度},$$

从整体的角度看待复测度

- 可测空间(X, Γ)上复测度全体构成Banach空间

  - 测度空间(X, Γ, m)上复测度的范数:

$$\|\nu\| = |\nu|(X) < \infty$$

  - 特例: $d\nu = h\ dm, \quad h \in \mathscr{L}^1(X, dm)$,

$$\|\nu\| = \|h\|_{L^1} < \infty$$

Hahn分解定理

可测空间(X,Γ), ν是实测度

$\exists!$(相差零测集)剖分$X = X_+ \bigsqcup X_-$:

$$\begin{cases} \nu(E) \geqslant 0, & \text{if } E \subset X_+ \\ \\ \nu(E) \leqslant 0, & \text{if } E \subset X_-. \end{cases}$$

Hahn分解定理的例子

测度空间(X, Γ, m), $\quad h \in \mathscr{L}^1(X, dm, \mathbb{R})$

对于实测度$d\nu = h\ dm$, $\quad \exists!$(相差零测集)剖分$X = A_+ \bigsqcup A_-$:

$$A_+ = \{x \in X : h(x) \geqslant 0\}, \qquad A_- = \{x \in X : h(x) < 0\}$$

$$\begin{cases} \nu(E) \geqslant 0, & \text{if } E \subset A_+ \\ \\ \nu(E) \leqslant 0, & \text{if } E \subset A_-. \end{cases}$$

Jordan分解定理

可测空间(X, Γ) 上实测度μ, $\exists!$有限正测度 $\mu^{\pm}$:

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu^{+} - \mu^{-}, \qquad \mu^{+} \perp \mu^{-} \\
|\mu| &= \mu^{+} + \mu^{-}
\end{aligned}$$

Jordan分解具体表达式

可测空间(X,Γ)上实测度μ

实测度μ的Hahn分解： $$X = X_+ \bigsqcup X_-$$

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap X_+), \qquad \mu^-(E) = \mu(E \cap X_-)$$

Radon-Nikodym定理

σ有限测度空间(X, Γ, m), ν是有限符号测度或复测度

$$\nu \ll m \quad \xLeftrightarrow{\exists ! h \in L^1(X,m)} \quad d\nu = h\, dm.$$

注记: ν是有限正测度 $\Longrightarrow h \in L^+ \cap L^1(X, m)$

注记: h称为测度ν关于测度m的Radon-Nikodym导数, 记为

$$h = \frac{d\nu}{dm}$$

Lebesgue分解定理

可测空间(X, Γ, m),　ν是复(符号)测度,　$m, |\nu|$是σ有限测度

$\exists!$复(符号)测度ν_a, ν_s :

$a =$ *absolutely continuous measure*,　$s =$ *singular measure*

$$
\begin{aligned}
\nu &= \nu_a + \nu_s \\
\nu_a &\ll m, \qquad |\nu_s| \perp m \\
d\nu_a &= hdm \qquad (h^{\pm}\text{之一} \in L^1(X, dm))
\end{aligned}
$$

注记:　当ν是正测度时, ν_a, ν_s也是正测度.

测度分解

σ有限测度空间(X, Γ, m). $\quad \forall\, x \in X \Longrightarrow \{x\} \in \Gamma$.

ν是σ有限测度 $\quad\Longrightarrow\quad$ $\exists!$分解 :

$$\nu = \nu_c + \nu_d = \nu_{ac} + \nu_{sc} + \nu_d$$

$$\nu_{ac} \ll m, \qquad \nu_{sc} \perp m, \qquad \nu_d \perp m$$

注记: ν_d是离散测度: $\exists$可数集K, $\nu_d(K^c) = 0$.

ν_c是连续测度: $\forall\, x \in X \Longrightarrow \nu(\{x\}) = 0$.

d=discrete, c=continuous

例如: Lebesgue测度, 计数测度.

关于复测度的积分

$$f \in L^1(X, d|\nu|)$$

$$\int_X f\, d\nu := \left(\int_X f\, d\nu_r^+ - \int_X f\, d\nu_r^-\right) + i\left(\int_X f\, d\nu_i^+ - \int_X f\, d\nu_i^-\right)$$

$$\left|\int_X f\, d\nu\right| \leqslant \int_X |f|\, d|\nu|, \qquad \overline{\int_X f\, d\nu} = \int_X \bar{f}\, d\bar{\nu}$$

Lebesgue控制收敛定理对于符号测度和复测度成立

(符号测度和复测度可分解为正测度)

Riesz表示定理：测度是广义函数；构造测度的方法

设X是局部紧Hausdorff空间. 对于$C_c(X)$上任意正有界线性泛函

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(|I(f)| \leq M\|f\|, \qquad f \geqslant 0 \Longrightarrow I(f) \geqslant 0)$$

存在唯一X上Radon正测度μ:

$$I(f) = \int_X f \, d\mu.$$

注记：　Riesz表示定理表明由积分造测度$\xrightarrow{\text{推广}}$ Daniell积分

复测度是广义函数

设X是局部紧Hausdorff空间.

$C_c(X)$是X上具有紧支集的连续函数全体.

$\mathcal{M}(X)$是X上复测度全体.

$$\Longrightarrow \mathcal{M}(X) \cong C_c(X)^* \qquad \text{等距同构}$$

作业

P184　第1, 2 题

P193　第29, 30, 31题

实分析(H), 第20次课

任广斌(中国科大)

2022-4-29

本讲内容

- 可积函数的逼近
- Lebesgue 积分与Riemann积分的关系

§3 可积函数的逼近

逼近的精髓:　从规则到不规则, 从简单到复杂.

实数理论	$\mathbb{Q}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{R}$
极限理论	常值数列	$\longrightarrow$	差不多常值数列
连续函数	常值函数	$\longrightarrow$	差不多常值函数
可导函数	线性函数	$\longrightarrow$	差不多线性函数
微分学	多项式	$\longrightarrow$	初等函数
积分学	阶梯函数	$\longrightarrow$	Riemann可积函数
实分析	简单函数	$\longrightarrow$	Lebesgue可积函数
泛函分析	光滑函数	$\longrightarrow$	广义函数

框架结构———核心(主要矛盾)+运算(代数、分析)

极限的注记

- 分析是极限的艺术。
  - 极限是分析的触角。极限是扩充知识的重要工具。
  - 完备化需要极限。

极限定义的回顾

- 极限a是由a_n传递的信息
- 由a_n传递出极限a的信息，采用的方法是由粗糙到精致.
  - ϵ固定, 传递的是粗糙的信息:
    $$a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon), \qquad n >> 1$$
  - ϵ任意, 传递的是精致的信息:
    $$\{a\} = \bigcap_{\forall \epsilon>0} (a-\epsilon, a+\epsilon).$$

问题简化

- 一般情形归结于特殊情形:

$$f \in L^1(E) \xLeftrightarrow{\text{零扩充}} f\chi_E \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

光滑函数的稠密性定理

Theorem 1

具有紧支撑的光滑函数在$L^1(\mathbb{R}^n)$稠密.

- $\mathbb{Q} : \mathbb{R} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : L^1(\mathbb{R}^n)$.

光滑函数的稠密性定理

- 稠密性的三种等价描述:

$$L^1(\mathbb{R}^n) \xlongequal{\text{拓扑表达}} \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^1}$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \xLeftrightarrow{\text{极限表达}} \exists\text{具有紧支撑的光滑函数列}g_k \xrightarrow[a.e.]{L^1} f$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \xLeftrightarrow[\text{好+小}]{\text{逼近表达}} \forall\, \epsilon > 0, \exists\text{分解}$$

$$f = g + h, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

续

证明: (1) $L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[K\text{是闭球，} f = f\chi_K + f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus K}]{\text{无穷远点处积分绝对连续性}}$ 归结于$L^1(K)$.

(2) $L^1(K)$归结于紧集上简单函数.

$$\varphi_k \to f, \quad |\varphi_k| \leqslant |f| \xrightarrow{\text{控制收敛}} \varphi_k \xrightarrow{L^1} f.$$

(3) 紧集上简单函数$\in L^\infty(K) \xrightarrow{Lusin}$ 具有紧支撑的光滑函数.

$$\exists K_\epsilon, \quad \exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n): \qquad m(K \setminus K_\epsilon) < \epsilon, \quad f = g \ \text{ on } \ K_\epsilon.$$

续

(4) 具有紧支撑的光滑函数$\Longrightarrow$一致连续$\Longrightarrow$ 差不多阶梯函数.

(5) 依L^1收敛$\xrightarrow{\text{Chebyshev不等式}}$ 依测度收敛

$\xrightarrow{\text{Riesz定理}}$ $\exists$ 子列a.e. 收敛

Chebyshev不等式

- Chebyshev不等式

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \geqslant \int_{[|f|\geqslant\epsilon]} |f(x)|dx \geqslant \epsilon m([|f| \geqslant \epsilon]).$$

$$m([|f| \geqslant \epsilon]) = \int_{[|f|\geqslant\epsilon]} dx \leqslant \int_{[|f|\geqslant\epsilon]} \frac{|f(x)|}{\epsilon} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\epsilon} dx = \frac{1}{\epsilon}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

两种收敛性关系

- L^1收敛蕴含依测度收敛:

$$f_k \xrightarrow{L^1} f$$

$$\xRightarrow{\text{Chebyshev}} \quad m([|f_k - f| \geqslant \epsilon]) \leqslant \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)| dx \xrightarrow[\epsilon \text{ fixed}]{k \to \infty} 0$$

$$\Longrightarrow \quad f_k \xrightarrow{m} f$$

稠密性的应用: 积分的平均连续性

- 可积函数在L^1范数下连续

$$\lim_{h\to 0}\left\|f(x+h)-f(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xlongequal{f\in L^1(\mathbb{R}^n)} 0.$$

续

证明: $\forall \epsilon > 0, \exists$ 好+小分解,

$$f = f_1 + f_2, \qquad f_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{4}.$$

$$\Longrightarrow \|f(x+h) - f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2} + 2\|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

阶梯函数的稠密性定理

Theorem 2

具有紧支撑的阶梯函数在$L^1(\mathbb{R}^n)$稠密.

Riemann-Lebesgue引理

- 设$\|g_n\|_{L^\infty[a,b]} \leqslant 1$. 则下列等价:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)dx = 0, \quad f \in L^1[a,b];$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)dx = 0, \quad f \in \chi_{[a,c]}, \forall c \in [a,b].$$

Riemann-Lebesgue引理续

证明: $$\Gamma := \left\{ f \in L^1[a,b] : \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) g_n(x) dx = 0 \right\}$$

$$\Gamma \supset \{\text{阶梯函数}\} \xrightarrow{\text{体现框架结构的威力}} \Gamma \supset L^1[a,b]$$

Riemann-Lebesgue引理续

$\Gamma \ni f = f_1 + f_2$,　f_1阶梯函数,　f_2小(积分意义下)

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b fg_n = \int_a^b f_1 g_n + \int_a^b f_2 g_n$$

$$\Longrightarrow \quad \text{右}1 \xrightarrow{\text{假设}} 0, \qquad \text{右}2 \overset{g_n\text{一致有界}, f_2\text{小}}{=\!=\!=\!=\!=} o(1).$$

古典Riemann-Lebesgue引理

- 古典的Riemann-Lebesgue引理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \xlongequal{f\in L^1[0,2\pi]} 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \xlongequal{f\in L^1[0,2\pi]} 0.$$

例题

- 例题:

$$\lim_{h\to 0} m(E\cap(h+E)) \xlongequal{E\subset\mathbb{R}^n\text{可测}} m(E).$$

例题续

证明: 情形1: $m(E) < +\infty$. $(\Longrightarrow \chi_E \in L^1)$.

$$
\begin{aligned}
|m(E \cap (h+E)) - m(E)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E\cap(h+E)} dm - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E dm \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left| \chi_E \chi_{h+E} - \chi_E \chi_E \right| dm \\
&\leqslant \|\chi_{h+E} - \chi_E\|_{L^1} \\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

例题续

<u>情形2: $m(E) = +\infty$:</u>　令$E_k = E \cap B(0,k)$

$$\begin{aligned}\varliminf_{h\to 0} m(E\cap(h+E)) &\geqslant \varliminf_{h\to 0} m(E_k\cap(h+E_k)) \\ &= m(E_k) \qquad (\text{情形1}) \\ &\longrightarrow m(E)=\infty.\end{aligned}$$

§4 Lebesgue 积分与Riemann积分的关系

- Lebesgue 积分是Riemann积分的推广:

$$R[a,b] \subset L^1[a,b], \qquad \text{且积分值相同:}$$

$$(R)\int_a^b f(x)dx \xlongequal{\forall f \in R[a,b]} \int_{[a,b]} f(x)dm(x).$$

续

证明: $$f \in R[a,b] \xRightarrow[f\text{有界} \Longrightarrow f \in L^{\infty}[a,b]]{f\ a.e.\text{连续} \Longrightarrow f\text{可测}} f \in L^1[a,b].$$

续

证明: 取单调趋于零的分割:

$$\pi^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b,$$

$M_i^{(n)}, m_i^{(n)}$分别是f在区间$[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$的上确界和下确界

续

$$\int_{[a,b]} f(x)dm(x) = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]} f(x)dm(x)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \leqslant \int_{[a,b]} f(x)dm(x) \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \int_{[a,b]} f(x)dm(x) \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$\xrightarrow{f\in R[a,b]}$ 三者相同.

- 广义Riemann积分与Lebesgue积分的关系。

广义Riemann积分

- 设$E_k \nearrow E$, $\quad f \in L^1(E_k)$, 则

$$f \in L^1(E) \iff \lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|dx\text{存在且有限}$$

$$\Longrightarrow \int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx.$$

例1： $\quad E = [a, b], \qquad E_k = [a + \frac{1}{k}, b].$

例2： $\quad E = [0, +\infty), \qquad E_k = [0, k].$

续

证明: f在E_k $(\forall k)$ 可测$\Longrightarrow$ f可测$\Longrightarrow$ $|f|$ 在E上积分有定义, 而且

$$\int_E |f(x)|dx \xlongequal{\text{单调收敛}} \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx.$$

$$\Longrightarrow \quad \text{结论1成立.}$$

结论2是Lebesgue控制收敛定理的直接推论.

注记

单调收敛定理, 控制收敛定理联合使用

- 单调收敛定理$\Longrightarrow$ 可积性
- 控制收敛定理$\Longrightarrow$ 计算积分

广义Riemann积分

- 设$f \in R[0,b] \quad (\forall b > 0)$, 则

$$f \in L^1[0,+\infty) \iff \lim_{b\to+\infty}\int_0^b |f(x)|dx\text{存在且有限}$$

$$\iff |f| \in R[0,+\infty)$$

$$\iff f \in R[0,+\infty), \quad |f| \in R[0,+\infty)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dm(x) \quad = \quad (R)\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

Lebesgue积分 广义Riemann积分

$$\text{证明：} f \in L^1[0,+\infty) \xrightarrow{\text{Cauchy准则}} |f| \in R[0,+\infty)$$

$$\xrightarrow{f\ a.e.\text{连续}} f \in R[0,+\infty).$$

续

- 绝对收敛的广义Riemann积分可视为Lebesgue积分.

- 广义Riemann可积 $\nRightarrow$ Lebesgue可积

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n,n+1]} \in R[0,+\infty) \setminus L^1[0,+\infty).$$

例题

设$f \in L^1(\mathbb{R})$, 且

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0, \qquad \forall\, \varphi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

证明: $f \xlongequal{a.e.} 0$

证明

$$\int_E f(x)dx = 0, \qquad \forall\ m(E) < \infty.$$

$$取E = [-R, R] \cap [f \geqslant 0] \Longrightarrow f|_{[-R,R]\cap[f\geqslant 0]} \xlongequal{a.e.} 0$$

$$取E = [-R, R] \cap [f < 0] \Longrightarrow f|_{[-R,R]\cap[f<0]} \xlongequal{a.e.} 0$$

例题

假设可测集$E \subset \mathbb{R}$, $\quad f \in L^1(E)$, $\quad$ 而且

$$\int_E f(x)dx \in (0, +\infty)$$

则存在可测集$e \subset E$:

$$\int_e f(x)dx = \frac{1}{3}\int_E f(x)dx.$$

证明

$$g(t) := \int_{E\cap(-\infty,t)} f(x)dx \in C(\mathbb{R})$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} |g(t+\Delta t) - g(t)| \leqslant \overline{\lim_{\Delta t\to 0}} \left| \int_{[t,t+\Delta t]} |f(x)|dx \right| = 0$$

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} g(t) = \int_E f(x)dx$$

再利用连续函数介值定理即可.

例题

设 $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 可测. 则下列等价:

(1) $\exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} 0$

(2) $\exists \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$: $\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n| > 0, \quad \sum_{n\geqslant 1} c_n f_n(t) a.e.$收敛

(3) $\exists \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$: $\quad \sum_{n\geqslant 1} |c_n| = \infty, \quad \sum_{n\geqslant 1} |c_n f_n(t)| a.e.$收敛

证明

$(1) \Longrightarrow (2),(3):\quad$ 不妨设$f_n \xrightarrow{a.e.} 0.$

$$\xRightarrow{Egorov} \quad \exists\text{闭集}F_n \subset [0,1]: \quad m([0,1]\setminus F_n) < \frac{1}{n}, \quad f_n \overset{a.e.}{\rightrightarrows} 0 \ \text{ on } \ F_n$$

$$\Longrightarrow \quad \exists n_k \uparrow, \text{当}n \geqslant n_k\text{时, 有}|f_n| \leqslant \frac{1}{2^k} \ \text{ on } \ F_k$$

$$\Longrightarrow \quad [0,1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \sqcup Z$$

续

$$c_n := \begin{cases} 1, & \text{if } n = n_k \quad \text{for some} \quad k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{n \geqslant 1} c_n f_n = \sum_{k \geqslant 1} f_{n_k}, \qquad \sum_{n \geqslant 1} |c_n f_n| = \sum_{k \geqslant 1} |f_{n_k}|$$

续

(2) $\Longrightarrow$ (1) :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n| > 0 \Longrightarrow \exists \delta_0 > 0, \quad \exists n_k \uparrow: \quad c_{n_k} \geqslant \delta_0.$$

$$\sum_{n\geqslant 1} c_n f_n(t)\text{收敛} \Longrightarrow c_{n_k} f_{n_k} \to 0 \Longrightarrow f_{n_k} \to 0$$

续

$(3) \Longrightarrow (1)$:

$$G(t) := \sum_{n \geqslant 1} |c_n f_n(t)| < +\infty \ \ a.e. \ t \in [0,1]$$

$$A_k := \{t \in [0,1] : \ G(t) \leqslant k\} \uparrow, \qquad [0,1] = \cup_{k \geqslant} A_k \sqcup Z.$$

$$\sum_{n \geqslant 1} |c_n| \int_{A_k} |f_n| = \int_{A_k} G < +\infty$$

续

$$\xLongrightarrow{\sum\limits_{n\geqslant 1}|c_n|=\infty} \quad \lim_{n\to\infty}\int_{A_k}|f_n| = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists n_k\uparrow: \qquad \int_{A_k}|f_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$$

$$\xLongrightarrow{A_k\uparrow} \quad \sum_{k\geqslant 1}\int_{A_m}|f_{n_k}| < +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \forall a.e.t \in A_m : \sum_{k\geqslant 1}|f_{n_k}(t)| < +\infty \Longrightarrow f_{n_k}(t) \to 0$$

作业

P162　第7, 8, 9, 10题

实分析(H), 第21次课

任广斌(中国科大)

2022-5-4

本讲内容

- Fubini定理的证明

§5 Fubini定理

- Tonelli 定理 (重积分化为累次积分):

$$f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy\Big)dx.$$

注记

- 注记1:

$$f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \in L^+(\mathbb{R}^n)$$

$$\Longrightarrow f(x,\cdot) \in L^+(\mathbb{R}^m) \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n.$$

注记续

- Tonelli定理对于下列函数成立:
  - $f|_{\mathbb{R}^{n+m}\setminus(\{0\}\times\mathbb{R}^m)} = 0$
  - $f(0,\cdot)$ 在$\mathbb{R}^m$上不可测
- Tonelli定理成立的函数, 其在垂直截面上的性质可能很差.

构造集合

$$\Gamma = \left\{ f \in L(\mathbb{R}^{n+m}) : f\text{满足三条性质} \right\}$$

性质1. $\displaystyle \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \right) dx.$

性质2. $\displaystyle \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \in L(\mathbb{R}^n)$

性质3. $f(x,\cdot) \in L(\mathbb{R}^m) \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n.$

预备引理

下列性质成立:

$\Gamma \cap L^+$是锥　　(对加法和关于非负数的乘法封闭)

$\Gamma \cap L^1$是向量空间　　(Γ是向量空间)

$$\Gamma \ni f_n \nearrow f \xRightarrow{f_n, f \in L^+} f \in \Gamma$$

$$\Gamma \ni f_n \searrow f \xRightarrow{f_n, f \in L^1} f \in \Gamma$$

预备引理图示

$\Gamma \cap L^+$	锥	关于$\nearrow$ lim封闭(在L^+的框架内)
$\Gamma \cap L^1$	向量空间	关于$\searrow$ lim封闭(在L^1的框架内)

预备引理续

证明:

$$\Gamma \text{ 非空:} \quad 0 \in \Gamma.$$

$$\Gamma \text{ 关于代数运算的封闭性显然.}$$

预备引理续

Γ 关于极限运算的封闭性:

(1) 来自单调收敛定理.

(2) 意味着

$$\Gamma \cap L^1 \ni f_n \searrow f \in L^1 \Longrightarrow f \in \Gamma \cap L^1.$$

转化为情形一: $f_1 - f_n \nearrow f_1 - f$

Tonelli定理的证明

利用标准四步骤:

$$\chi_E \xrightarrow[+,\cdot,\lim]{S^+} L^+$$

$$\chi_E \in \Gamma \quad \xRightarrow[(\forall E\subset\mathbb{R}^{n+m}\text{可测})]{\text{预备引理}} L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \subset \Gamma$$

$\chi_E \in \Gamma$五种情形

- 矩体:

$$E = I \times J, \quad I \subset \mathbb{R}^n, \quad J \subset \mathbb{R}^m, \quad I, J\text{是矩体}.$$

$$\text{性质(1)中的积分相等} = |I|\,|J|.$$

五种情形续

- 开集:

$$E \xlongequal{\text{二进制剖分}} \bigsqcup_{\text{可列}} I_k, \qquad I_k \text{ 是矩体}.$$

$$\chi_E = \sum_{\text{可列}} \chi_{I_k} \in \Gamma \cap L^+ \subset \Gamma.$$

五种情形续

- 紧集:

$$B(0,R) = E \bigsqcup \overbrace{(E^c \cap B(0,R))}^{\text{开集}}, \qquad R \gg 1$$

$$\xRightarrow{\text{预备引理}} \chi_E = \chi_{B(0,R)} - \chi_{E^c \cap B(0,R)} \in \Gamma \cap L^1 \subset \Gamma.$$

五种情形(续)

- 零测集E:

$$\exists 开集 G_k \supset E: \qquad \lim_{k\to\infty} m(G_k) = m(E) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad 可设 G_k \downarrow, \qquad m(G_1) < +\infty$$

$$\Longrightarrow \qquad H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k 是 E 的等测包$$

$$\xrightarrow[G_k \in \Gamma \cap L^1]{预备引理} \qquad \chi_H \in \Gamma \cap L^1 \subset \Gamma.$$

五种情形(续)

$$0 = m(E) = m(H) \xlongequal{\chi_H \in \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_H(x,y)dy \Big) dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^m} \chi_H(x,y)dy \xlongequal{a.e.} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \chi_H \xlongequal{a.e.} 0$$

五种情形(续)

$$\chi_H \in \Gamma, \qquad \chi_H \xlongequal{a.e.} 0 \Longrightarrow \qquad \chi_E \in \Gamma$$

五种情形(续)

- 可测集E:

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\bigsqcup Z,\quad \text{紧集}F_k\uparrow\subset\mathbb{R}^{n+m},\ m(Z)=0.$$

$$\Longrightarrow \chi_E=\chi_Z+\lim_{k\to\infty}\chi_{F_k}\subset\Gamma\cap L^+\subset\Gamma.$$

Fubini-Tonelli定理

Theorem 1 (Fubini-Tonelli 定理)

设$f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \cup L^1(\mathbb{R}^{n+m})$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Fubini-Tonelli定理续

- 注记

$$f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m}) \implies f(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m) \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies f(x,\cdot)\ \ a.e.\text{可测,}\ \ a.e.\text{有限.}$$

$$f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \implies f(x,\cdot) \in L^+(\mathbb{R}^m) \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies f(x,\cdot)\ \ a.e.\text{可测.}$$

Fubini-Tonelli定理续

证明: $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m}) \xRightarrow{\textit{Tonelli}} f = f^+ - f^-,\ \ f^\pm \in \Gamma \cap L^1$

$\xRightarrow{\text{预备引理}} f \in \Gamma \cap L^1 \subset \Gamma.$

关于Fubini-Tonelli定理应用的注记

Fubini-Tonelli定理应用的两部曲:

- Tonelli定理验证f可积性.

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|dy \Big) dx < +\infty \Longrightarrow f \in L^1.$$

- Fubini定理计算f积分值.

$$f \in L^1 \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \Big) dx.$$

例题

Fubini定理对于下列函数不成立:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad (x,y)\in(0,1]\times(0,1].$$

例题

证明:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{x}{x^2+a^2}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{2x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$$

$$\xRightarrow{\text{移项通分}} \quad \int_0^1 \frac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}dx = -\frac{1}{1+a^2}$$

例题续

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\Big)dy = \int_0^1 -\frac{1}{1+y^2}dy = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\Big)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

例题续

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \Big) dy \neq \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \Big) dx$$

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)| dx dx = +\infty.$$

交换积分次序的五个等价定理

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xRightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim} f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \longrightarrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \xlongequal{f \in L^+ \cup L^1} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dm(y) \Big) dm(x).$

作业

P193　第32, 33, 34题

实分析(H), 第22次课

任广斌(中国科大)

2022-5-6

本节主要内容

- 抽象积分理论中的Fubini定理
- Vitali覆盖定理

抽象积分理论中的Fubini定理

Theorem 1 (Fubini 定理)

设(X,Γ_X,μ), (Y,Γ_Y,ν)是σ有限正测度空间,

$$f\in L^+(X\times Y)\cup L^1(X\times Y,\mu\times\nu).$$

则

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d\mu\times\nu &= \int_X\Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big)d\mu(x)\\ &= \int_Y\Big(\int_X f(x,y)d\mu(x)\Big)d\nu(y).\end{aligned}$$

Fubini-Tonelli定理续

- 注记

$$f \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x, \cdot) \in L^1(Y) \qquad (\mu - a.e. \;\; x \in X)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x, \cdot) \;\; \text{可测} \qquad (\mu - a.e. \;\; x \in X)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x, y) \;\; \text{有限} \qquad (\mu - a.e. \;\; x \in X, \quad \nu - a.e. \;\; y \in Y)$$

Fubini-Tonelli定理续

- 注记

$$f \in L^+(X \times Y, \mu \times \nu) \implies f(x, \cdot) \in L^+(Y) \qquad \mu - a.e.\ x \in X$$

乘积测度空间

- 乘积测度空间

$$(X \times Y, \quad \Gamma_{X \times Y}, \quad \mu \times \nu)$$

乘积测度空间σ代数

- $\Gamma_{X\times Y}$ 是$\Gamma_X \times \Gamma_Y$生成的最小σ代数.

乘积测度空间的乘积测度

- 乘积测度是由Caratheodory构造出的测度, 它的出发点是

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B),$$

- 它的定义域$\hat{\Gamma}_{X\times Y}$:

$$\hat{\Gamma}_{X\times Y} \supset \Gamma_{X\times Y}$$

乘积测度空间

- 乘积测度空间$(X\times Y,\hat{\Gamma}_{X\times Y},\mu\times\nu)$是完备测度空间
- $(X\times Y,\Gamma_{X\times Y},\mu\times\nu)$可能非完备.
- 若(X,Γ_X,μ), (Y,Γ_Y,ν)是σ有限测度空间,

  则$(X\times Y,\Gamma_{X\times Y},\mu\times\nu)$是$\sigma$有限测度空间.

逐项积分定理: 计数测度

- 取计数测度ν:

$$\text{Fubini 定理} \quad =\!=\!=\!=\!= \quad \text{逐项积分定理} \quad =\!=\!=\!=\!= \quad \text{测度}\sigma\text{可加性}$$

$$=\!=\!=\!=\!= \quad \text{Levi单调收敛定理}$$

$$=\!=\!=\!=\!= \quad \text{Lebesgue 控制收敛定理}$$

逐项积分定理的条件

(X, Γ_X, μ)是σ有限测度空间.

$$f(x,n) := f_n(x)$$

- $f(x,n) \in L^+(X \times \mathbb{N}) \Longleftrightarrow f_n \in L^+(E)$.
- $f(x,n) \in L^1(X \times \mathbb{N}, \mu \times \nu) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n(x)| d\mu(x) < +\infty$

注记

数列 $=\!=\!=$ 函数 (维数升高一维)

级数(极限) $=\!=\!=$ 积分 (离散测度)

Levi = *Lebesgue* = *Fubini* = 交换积分次序

逐项积分定理

Theorem 2 (逐项积分定理)

(X, Γ_X, μ)是σ有限测度空间.

$$f_n(x) =: f(x,n) \in L^+ \cup L^1(X \times \mathbb{N}, \mu \times \nu))$$

$$\Longrightarrow \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

交换积分次序的五个等价定理

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xRightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim}\, f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \uparrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{X\times Y} f \xlongequal{f \in L^+ \cup L^1} \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$

绝对连续测度刻画

- Radon-Nikodym 定理

  设ν,μ是可测空间(X,Γ)测度, ν有限, μ是σ有限, 则

$$\nu \ll \mu \iff d\nu = fd\mu \quad (\exists f \in L^+ \cap L^1(X,\mu))$$

$$即\nu(A) = \int_A d\nu = \int_A fd\mu, \ \ \forall A \in \Gamma.$$

- Radon-Nikodym 定理刻画: 哪些测度本质上就是函数?

抽象积分是高维的测度

Theorem 3

$$m_{n+1}(U(f)) = \int_E f(x)dm(x) = \int_0^{\infty} m\Big\{x \in E : t < f(x)\Big\}dt$$

- $f \in \mathscr{L}^+(E)$, $\quad f$的图形的下方

$$U(f) = \Big\{(x,t) \in E \times [0, +\infty) : 0 \leqslant t < f(x)\Big\}$$

- 积分是曲边梯形的面积.

$$\text{微元面积= 长} \times \text{ 宽} = \overbrace{m\Big\{x \in E : t < f(x)\Big\}}^{\text{图形下方长度}} dt$$

积分是高维的测度续

证明: 图形下方是可测集(f有界):

$$U(f)=\bigcup_{j=1}^{2^{2k}} f^{-1}[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})\times[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k}),\qquad k>>1.$$

蛋糕分层

积分是高维的测度续

$$
\begin{aligned}
m_{n+1}(U(f)) &= \int_{E\times(0,+\infty)} \chi_{U(f)}(x,t)\,dm_n(x)dt \\
&= \int_E \Big(\int_0^{+\infty} \chi_{U(f)}(x,t)dt \Big) dm_n(x) \\
&= \int_E \int_0^{f(x)} dt\,dm_n(x) \\
&= \int_E f(x)dm_n(x) \\
&= \int_0^{\infty} \Big(\int_E \chi_{U(f)}(x,t)dm_n(x) \Big) dt \\
&= \int_0^{\infty} m\Big\{x \in E : t < f(x)\Big\} dt
\end{aligned}
$$

积分是高维的测度

Theorem 4

$$(\mu \times m)(U(f)) = \int_X f(x) d\mu(x) = \int_0^\infty \mu\big\{x \in X : t < f(x)\big\} dm(t)$$

- 测度空间(X, Γ, μ), $\quad$ *Borel*测度空间$(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), m)$
- $f \in \mathscr{L}^+(X)$, $\quad f$的图形的下方

$$U(f) = \big\{(x, t) \in X \times [0, +\infty) : t < f(x)\big\}$$

- 积分是曲边梯形的面积.

$$\text{微元面积} = \text{长} \times \text{宽} = \overbrace{\mu\big\{x \in X : t < f(x)\big\}}^{\text{图形下方水平集长度}} dt$$

Vitali覆盖

- Vitali覆盖是分析的手术刀:

$$\text{无穷} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{可列、有限}$$

- 应用：

$$\text{导数} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{差商}$$

Vitali覆盖的定义

$$E \subset \mathbb{R}, \qquad \Gamma\text{是}E\text{的Vitali覆盖}$$

- Γ是E 的覆盖
- $\Gamma =$ 非退化的闭区间族
- 每点处无穷小层次覆盖:

$$\forall\ x \in E, \quad \inf\{|I| : \quad x \in I \in \Gamma\} = 0$$

Vitali覆盖定理

Theorem 5 (Vitali覆盖定理)

$E \subset \mathbb{R}$, $m^*(E) < \infty$, Γ 是E的$Vitali$覆盖.

$$\Longrightarrow E \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j \sqcup Z \qquad (\exists I_j \in \Gamma, m(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j) < \infty,\ m(Z) = 0)$$

$$\overset{\text{逐次收割}}{\Longleftrightarrow} \forall \epsilon > 0, \quad E \subset \bigsqcup_{j=1}^{n(\epsilon)} I_j \sqcup E_\epsilon \quad (\exists I_j \in \Gamma, \quad m(E_\epsilon) < \epsilon.)$$

Vitali覆盖定理注记

- Vitali覆盖定理在$\mathbb{R}^n$中成立:

$$\text{闭区间} \longrightarrow \text{闭球}$$

$$|I| \longrightarrow \text{闭球直径.}$$

Vitali覆盖定理的证明

- 宇宙取为测度有限开集. 不妨设

$$E \subset G \subset \mathbb{R}, \qquad m(G) < +\infty, \qquad I \subset G(\mathit{Vitali}) \qquad (\forall\ I \in \Gamma).$$

续

- 归纳选取:

$$\text{设已选取} I_1, \ldots, I_n \in \Gamma \text{互不相交}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{选取} I_1, \ldots, I_{n+1} \in \Gamma \text{互不相交}$$

续

- 贪婪算法(每步择优):

$$\text{可设} E \setminus \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j \neq \emptyset$$

$$\delta_n = \sup\left\{|I| : \ I \in \Gamma, \ I\text{与}I_1, \ldots, I_n\text{互不相交}\right\}$$

$$\xRightarrow{|I| \leqslant m(G) < \infty} \quad \delta_n \in (0, +\infty)$$

$$\Longrightarrow \quad \text{选取} I_{n+1} : \quad |I_{n+1}| > \frac{\delta_n}{2}.$$

Vitali覆盖定理的证明续

- 假设上述过程一直继续下去:

存在互不相交可列个$I_j \in \Gamma$, 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant m(G) < +\infty \Longrightarrow |I_k| \to 0$$

Vitali覆盖定理的证明续

- 断言:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} :$$

$$E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} 5I_k \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} |I_k| < \frac{\epsilon}{5}.$$

- 记号: $5I$与I同心, $|5I| = 5|I|$

Vitali覆盖定理的证明续

- 利用断言证明定理:

$$m(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k) \leqslant m(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k) < \epsilon.$$

续

断言的证明:

$$\text{只要证明:}\quad E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k \subset \bigsqcup_{k=N+1}^{\infty} 5I_k, \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

$$\forall\, x \in E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k \quad \overset{\exists I}{\Longrightarrow} \quad x \in I \in \Gamma,$$

$$I \cap \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k = \emptyset$$

$$I \cap \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$$

否则$|I| \leqslant \delta_k \leqslant 2|I_{k+1}| \longrightarrow 0.$

续

- I与$I_1, \ldots I_N, \ldots I_{n_0-1}$不相交， I与$I_{n_0}$相交

- $n_0 > N, \quad |I| \leqslant \delta_{n_0-1} \leqslant 2|I_{n_0}|.$

- $x \in I \in \Gamma \Longrightarrow x \in 5I_{n_0}$， 断言成立.

作业

P192　第24，25，26，27题

实分析(H), 第23次课

任广斌(中国科大)

2022-5-11

本节主要内容

- 分布函数
- 微分理论

分布函数

- $E \subset \mathbb{R}^n$Lebesgue可测.

$$f \in \mathscr{L}(E), \qquad g := |f|$$

- 图形下方的水平截面(水平截面落在曲边梯形的部分)

$$\{(x, t_0): \ \ x \in E, \ t_0 < g(x)\}, \qquad 其中 t_0 \in [0, \infty)固定.$$

- 水平截面的测度

$$m(\{x \in E: \quad t_0 < g(x)\}) = m(g^{-1}(t_0, +\infty))$$

分布函数续

- f的分布函数

$$f_*(t) := m\{x \in E : \quad t < |f(x)|\} \xlongequal{g=|f|} m(g^{-1}(t, +\infty))$$

- 几何意义:

$|f|$图形下方的水平截面的测度就是分布函数$f_*(t)$

- 测度论中, 函数的地位被分布函数取代.

分布函数在积分中的作用： 蛋糕表示

$$\int_E |f(x)|dx \quad \xlongequal[\text{利用微元法}]{f\text{的图形的下方的面积}} \quad \int_0^{+\infty} f_*(t)dt$$

积分的蛋糕表示

$$\int_E |f(x)|^p \, dx \quad \xlongequal[p\in[1,\infty)]{f\in\mathscr{L}(E)} \quad \int_0^{+\infty} pt^{p-1} f_*(t)dt$$

分布函数的积分表示

- $|f|$的图形下方:

$$U(f) = \left\{(x,t) \in E \times [0,+\infty] : \quad t < |f(x)|\right\}$$

- 分布函数的积分表示

$$f_*(t) = \int_E \chi_{U(f)}(x,t)dx$$

积分的蛋糕表示证明

$$\int_E |f(x)|^p \, dx = \int_E dx \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} dt$$

$$= \int_E dx \int_0^{+\infty} pt^{p-1} \chi_{U(f)}(x,t) dt$$

$$\overset{Fubini}{=\!=} \int_0^{+\infty} pt^{p-1} dt \int_E \chi_{U(f)}(x,t) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} pt^{p-1} f_*(t) dt$$

分布函数总结

抽象积分	Riemann积分
抽象函数$f(x)$	具体函数$f_*(t)$

抽象积分 $\xrightarrow[\text{具体化的桥梁}]{\text{分布函数}}$ Riemann积分

- 第五章:　微分理论

本章核心内容:　微积分基本定理

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

$$L^1[a,b]/\sim \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

- 实分析的抽象积分理论是积分理论推广的最广场所.
- 微分几何的流形和纤维丛理论是导数推广的最广场所.

Lebesgue 微分定理

Theorem 1 (Lebesgue 微分定理)

单调函数几乎处处可导.

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\uparrow\Longrightarrow f'\,a.e.\text{存在且有限}.$$

续

证明: 证明思路: 总是记$h > 0$. 我们只要证明

$$(1).\qquad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{a.e.}{\leqslant} \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

$$(2).\qquad \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{a.e.}{\geqslant} \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

(3). f' $a.e.$不等于∞.

Lebesgue 微分定理的证明

- (1)$\Longrightarrow$ (2):

$$g(x)\uparrow = -f(t) \qquad (x+t=a+b, \quad x\in[a,b]).$$

$$(1) \quad \xrightarrow{\;g\uparrow\;} \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \overset{a.e.}{\leqslant} \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{g(x)-g(x-h)}{h}$$

$$\xrightarrow{\;g(x)=-f(t)\;} \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{-f(t-h)+f(t)}{h} \overset{a.e.}{\leqslant} \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{-f(t)+f(t+h)}{h}$$

$\Longrightarrow$ (2)成立.

Lebesgue 微分定理的证明(续)

- (3)的证明:

$$E := \{x \in (a,b) : f'(x) = \infty\} \qquad \text{固定} N > 0$$

$$\Gamma := \left\{ [x, x+h] \subset (a,b) : \quad x \in E, \ \ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > N \right\}$$

Γ是E的Vitali覆盖

续

$$\xRightarrow{\text{Vitali定理}} \quad E \subset I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_m \sqcup E_{\frac{1}{N}}, \qquad m(E_{\frac{1}{N}}) < \frac{1}{N},$$

$$\xRightarrow{I_j=[x_j,x_j+h_j]} \quad m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{m} h_j + \frac{1}{N}$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}(f(x_j+h_j) - f(x_j)) + \frac{1}{N}$$

$$\overset{f\uparrow}{\leqslant} \frac{1}{N}(f(b) - f(a) + 1) \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty).$$

Lebesgue 微分定理的证明(续)

(1)的证明:

- (1)描述的是a.e.成立的不等式.
- 只要证明该不等式不成立的集合是零测集.
- 将该零测集表示为可列个集合的并.

续

- $\forall\, R, r \in \mathbb{Q}, \quad R > r, \quad$ 记

$$E := \left\{ x \in (a,b) : \quad \overline{\lim_{h\to 0}}\, \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > R > r > \underline{\lim_{h\to 0}}\, \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right\}$$

- 我们只要证明E是零测集.

右上导数>左下导数的点构成零测集

续

反证法:

- 设$m^*(E) \neq 0$.　(注意: $E \subset (a,b)$)
- 取开集$G \supset E$:

$$m(G) < \frac{R+r}{2r} m^*(E).$$

Lebesgue 微分定理的证明(续3)

- 出发点

$$r > \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

- 构造Vitali覆盖

$$\Gamma_E = \left\{ [x-h, x] \subset (a, b) \cap G : x \in E, \frac{f(x) - f(x-h)}{h} < r \right\}$$

$$\xrightarrow{Vitali} \quad E \subset I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_p \sqcup E_\epsilon, \qquad I_j = [x_j - h_j, x_j] \in \Gamma_E, \quad m(E_\epsilon) < \epsilon$$

续

- 出发点

$$y \in E, \qquad \overline{\lim_{0<k\to 0}} \frac{f(y+k)-f(y)}{k} > R.$$

- 取E的去掉边角料的部分:

$$\begin{aligned} A &= E\text{中被Vitali有限项覆盖的部分} \\ &:= E \cap (\mathring{I}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathring{I}_p) \end{aligned}$$

- 注记: $\mathring{I} = I$的内部

续

- 构造Vitali覆盖

$$A = E \cap (\mathring{I}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathring{I}_p)$$

$$\Gamma_A = \left\{ [y, y+k] \subset \bigsqcup_{j=1}^{p} \mathring{I}_j : \quad y \in A, \quad \frac{f(y+k) - f(y)}{k} > R \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{Vitali}} A \subset J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_q \sqcup A_\epsilon, \quad J_i = [y_i, y_i + k_i] \in \Gamma_A, \quad m(A_\epsilon) < \epsilon.$$

Lebesgue 微分定理的证明(续4)

- 综上,

$$E \subset J_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup J_q \bigsqcup A_\epsilon \cup E_\epsilon \cup \text{有限集}.$$

$$J_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup J_q \subset I_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup I_p \subset G.$$

续

- 考察f在J_i, I_j上跳跃度

$$\xrightarrow{\quad f\uparrow \quad} \qquad \sum_{i=1}^{q}(f(y_i+k_i)-f(y_i)) \leqslant \sum_{j=1}^{p}(f(x_j)-f(x_j-h_j)).$$

续

- 利用构造中的伸缩率条件:

$$\text{上式左边}=\sum_{i=1}^{q}(f(y_i+k_i)-f(y_i))\geqslant R\sum_{i=1}^{q}k_i\geqslant R(m^*(E)-2\epsilon)$$

$$\text{上式右边}=\sum_{j=1}^{p}(f(x_j)-f(x_j-h_j))\leqslant rm(G)<\frac{R+r}{2}m^*(E).$$

矛盾

Vitali覆盖的构造

- 从关于导数的不等式或等式出发
- 脱去极限的外衣
- 提供Vitali覆盖.

Vitali覆盖的方法总结

- Vitali覆盖$\xlongequal[\text{扰动之法}]{\text{退一步海阔天空}}$处理极限的规则化方法

抽象集合	区间
导数	差商

集合、导数 $\xRightarrow[\text{去极限: 保留重要信息}]{\text{炼钢之法: 去粗存精}}$ 区间、差商

Sobolev空间

- Sobolev空间:

$$W^{1,1}[a,b] := \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \mid f' a.e.\text{存在}, \quad f, f' \in L^1[a,b] \right\}.$$

- 两个指标:

(导数指标, 积分指标)

- 与Sobolev理论相比:　　这里对导数的要求更强.

Lebesgue定理

Theorem 2 (Lebesgue定理)

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \uparrow \Longrightarrow f \in W^{1,1}[a, b], \qquad \int_a^b f'(x)dx \leqslant f(b) - f(a).$$

反例

- $f=$ Cantor函数 $\uparrow$,

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1)-f(0).$$

Lebesgue定理的证明

证明: 常值延拓$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\xRightarrow{f\uparrow}\quad f\ \ a.e.\text{连续}$$

$$\Longrightarrow\quad f\text{可测},\quad f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\text{可测},\overset{a.e.}{\geqslant}\ 0$$

Lebesgue定理的证明续

$$\xrightarrow[f' \in L^+]{Fatou} \int_a^b f'(x)dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}\, dx$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\left(\int_b^{b+1/n} f(x)dx - \int_a^{a+1/n} f(x)dx\right)$$

$$\leqslant f(b) - f(a)$$

作业

P211　第1, 2题

P241　第2, 3题

实分析(H), 第24次课

任广斌(中国科大)

2022-5-13

本节主要内容

- 逐项微分定理

- BV[a,b], AC[a,b]

利用单调增加函数帮助研究绝对连续函数.

AC[a,b]在微积分基本定理中起着关键作用.

Fubini逐项微分定理

条件:

- 在L^+框架内: $f_n' \in L^+$加强为$f_n \uparrow$
- 两边有意义: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛.

Theorem 1 (Fubini逐项微分定理)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

注记

- Fubini逐项微分定理与Fubini定理不同:

  它是a.e.成立的等式;　　求导和积分交换次序.

- Fubini逐项微分定理的条件:

  逐项求导后的加强版本的L^+框架内.

续

证明: $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{N} f_n + R_N, \qquad R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{N} f_n' + R_N'$$

$$\xRightarrow[\text{若} \lim\limits_{N\to\infty} R_N' \exists]{N\to\infty} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{\infty} f_n' + \lim_{N\to\infty} R_N'.$$

续

补充证明:

$$f_n\text{关于}x\uparrow$$

$$\Longrightarrow \quad R_{N+1}\text{关于}x\uparrow$$

$$\Longrightarrow \quad R'_N \xlongequal{a.e.} f'_{N+1} + R'_{N+1} \overset{a.e.}{\geqslant} R'_{N+1} \overset{a.e.}{\geqslant} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{N\to\infty} R'_N\exists$$

续

$$0 \overset{R_N\uparrow}{\leqslant} \int_a^b \lim_{N\to\infty} R_N' \overset{Fatou}{\leqslant} \varliminf_{N\to\infty} \int_a^b R_N' \overset{R_N\uparrow}{\leqslant} \varliminf_{N\to\infty} (R_N(b) - R_N(a)) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{N\to\infty} R_N' \xlongequal{a.e.} 0.$$

例题

- $\exists\, f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$严格单调增加， $f' \xlongequal{a.e.} 0.$

例题

- 构造:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{[r_n,1]}(x), \quad \text{其中}(0,1) \cap \mathbb{Q} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

$$\Longrightarrow \qquad f'(x) \xlongequal[\text{Fubini逐项微分定理}]{a.e.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi'_{[r_n,1]}(x) \xlongequal{a.e.} 0$$

§2 $BV[a,b]$

- $[a,b]$上有界变差函数全体$BV[a,b]$

$$
\begin{aligned}
BV[a,b] &= \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid V_a^b f < +\infty \right\} \\
&= \text{包含}[a,b]\text{上所有单调增加函数的最小的线性空间} \\
&= \text{由}[a,b]\text{上所有单调增加函数生成的线性空间}
\end{aligned}
$$

全变差

- 全变差

$$V_a^b f = \sup_{a=x_0<\cdots<x_n=b} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

曲线可求长

- $f \in BV[a,b] \Longleftrightarrow f$作为曲线可求长.

曲线可求长续

- 不可求长曲线:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \in C[0,1] \setminus BV[0,1].$$

$$\text{剖分} 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n+1}$$

$$(\text{剖分点} x_{2k-1} = \frac{1}{((n-k+1)+\frac{1}{2})\pi} < \frac{1}{(n-k+1)\pi} = x_{2k})$$

$$V_0^1 f \geqslant \sum_{k=1}^{2n+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geqslant c \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty \qquad .$$

全变差和积分的相似性

- 全变差和积分的相似性

全变差		积分
分割跳跃取极限		分割求和取极限
$V_a^b f$	$\xlongequal[\text{全变差的计算方法}]{f\in AC[a,b]}$	$\int_a^b \lvert f'\rvert$

- $f \uparrow \Longrightarrow V_a^b f = f(b) - f(a).$

全变差测度

- 全变差

$$V_a^b f = |\nu|([a,b]) = \int_a^b d|\nu| = \int_a^b |f'|dm, \qquad d\nu = f' dm$$

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : \quad E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right\}$$

有界变差对积分限的可加性

- 有界变差对积分限的可加性

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f \qquad \forall\ c \in (a, b).$$

有界变差对积分限的可加性

证明：(1). 对于$\forall\ a = x_0 < \cdots < x_n = b$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant V_a^c f + V_c^b f.$$

(2). 对于$\forall\ a = x_0 < \cdots < x_m = c, \quad c = y_0 < \cdots < y_n = b$

$$V_a^b f \geqslant \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{j=1}^{n} |f(y_j) - f(y_{j-1})|$$

Jordan分解定理

- Jordan分解定理

$$f \in BV[a,b] \iff f = f_1 - f_2 \quad (\exists f_1, f_2 \uparrow).$$

Jordan分解定理续

证明：“ $\Longleftarrow$ ”

$$f_1, f_2 \uparrow \quad \Longrightarrow \quad V_a^b f \leqslant V_a^b f_1 + V_a^b f_2 < +\infty.$$

Jordan分解定理续

“ $\Longrightarrow$ ”

$$f_1(x) := V_a^x f, \qquad f_2 := f_1 - f$$

$$f_2(y) - f_2(x) \xlongequal{y>x} (V_a^y f - f(y)) - (V_a^x f - f(x))$$

$$= V_x^y f - (f(y) - f(x)) \geqslant 0.$$

有界变差是Sobolev

- $BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$.

(因为↑函数$\in W^{1,1}[a,b]$)

§3 $AC[a,b]$

- Lebesgue框架下微积分基本定理:

$$L^1[a,b]/\sim \underset{\dfrac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

注记

- 由微积分基本定理读出绝对连续函数的刻画性质:

反解

绝对连续函数定义: Motivation

$$f \in AC[a,b] \Longrightarrow \exists g \in L^1[a,b]: \quad f(x) = \int_a^x g + c$$

$$\xrightarrow{|g|\in L^1} \lim_{m(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k))\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|$$

$$\leqslant \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} |g| = 0$$

绝对连续函数的定义

$$f \in AC[a,b]$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{m(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k))\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : m\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)\right) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

绝对连续函数是连续的加强版本, C^1的弱化版本

$$C^1[a,b] \subset AC[a,b] \subset C[a,b]$$

绝对连续函数是有界变差函数

$$AC[a,b] \subset BV[a,b]$$

$$V_a^b f \xlongequal{\epsilon=1, \|\pi\|<\delta} \sum_{k=1}^{n} V_{c_{i-1}}^{c_i} f \leqslant n.$$

空间包含关系

$$C^1[a,b] \subset AC[a,b] \subset C[a,b] \cap BV[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b] \subset L^1$$

Cantor函数是单调增加连续函数, 但不是绝对连续函数

例题

$$f \in C[a,b] \quad \Longrightarrow \quad V_a^b f = V_a^b |f|$$

续

- 情形一 $f(x)f(y) \geqslant 0$:

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| = |f(x) - f(y)|$$

- 情形二 $f(x)f(y) < 0 \Longrightarrow \exists\, \xi: \quad f(\xi) = 0$:

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \big||f(x)| - |f(\xi)|\big| + \big||f(\xi)| - |f(y)|\big|$$

续

$$\forall \text{ 分割}\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$\xrightarrow{\text{加入分割点}} \quad \forall \text{ 新分割}\pi' : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$$

续

满足

$$\sum_{k=1}^{n}\left||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\left||f(y_k)|-|f(y_{k-1})|\right|$$

$$\Longrightarrow \qquad V_a^b f = V_a^b |f|$$

作业

P.232　第1, 3题

实分析(H), 第25次课

任广斌(中国科大)

2022-5-18

本讲主要内容

- Lebesgue框架下微积分基本定理
- 加强版本

微积分基本定理

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

- 局部和整体溶于一炉.
- 分析的基石.

Lebesgue框架下微积分基本定理

- Lebesgue框架下微积分基本定理:

$$L^1[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b] \qquad （双射）$$

(a.e. 相等视为恒等) (相差常数视为恒等)

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$\int_a^x$ 单射 $\frac{d}{dx}$ 单射

已知结果

- 求导:

$$AC[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} : AC[a,b] \longrightarrow L^1[a,b].$$

- 积分: 引入绝对连续函数的Motivation

$$\int_a^x : L^1[a,b] \longrightarrow AC[a,b].$$

注记

- 证明分为三步.
- Lebesgue框架下微积分基本定理的内容丰富:

其解读参见证明的三个步骤.

证明分为三步: 第一步

Theorem 1 (微积分基本定理的特殊情形)

$$f' \xlongequal{a.e.} 0 \underset{\text{微积分基本定理}}{\overset{f \in AC[a,b]}{\Longleftarrow\!\!=\!\!=\!\!=\!\!=\!\!\Longrightarrow}} f = \text{常数}.$$

续

证明:

$$f \in AC[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{m(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k))\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 0$$

续

证明: 任意固定$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$:

$$m\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)\right) < \delta \xRightarrow{f\in AC[a,b]} \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

续

- 固定$x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0)\exists$, 只要证明$f(x_0) = f(a)$.
- Vitali覆盖:

$$E := \{y \in (a, x_0): \ \ f'(y) = 0\}$$

$$\Gamma_E = \left\{[y, y+h] \subset (a, x_0): \ y \in E, h > 0, \left|\frac{f(y+h) - f(y)}{h}\right| < \epsilon\right\}$$

续

$$\xrightarrow{\text{Vitali}} \quad E \subset \bigsqcup_{i=1}^{m} [y_i, y_i + h_i] \sqcup E_\delta, \qquad m(E_\delta) < \delta, \quad [y_i, y_i + h_i] \in \Gamma$$

$$\xrightarrow{m(Z)=0} \quad (a, x_0) = E \sqcup Z \subset \bigsqcup_{i=1}^{m} [y_i, y_i + h_i] \sqcup E_\delta \sqcup Z.$$

续

- $[a, x_0]$的剖分：

$$\bigsqcup_{i=1}^{m}[y_i, y_i + h_i]\text{的端点添加}(a, x_0)\text{的端点}.$$

- f在除去 $\bigsqcup_{i=1}^{m}[y_i, y_i + h_i]$以后剩下的剖分区间的跳跃度 $< \epsilon$

续

$$\Longrightarrow \qquad |f(x_0) - f(a)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(y_i + h_i) - f(y_i)| + \epsilon$$

$$< \epsilon(\sum_{i=1}^{n} h_i) + \epsilon \leqslant \epsilon(b - a + 1).$$

证明分为三步: 第二步

- $$f \in L^1[a,b] \Longrightarrow \int_a^x f \in AC[a,b]$$

$$\left(\int_a^x f\right)' \xlongequal{a.e.} f(x)$$

续

证明: 利用积分的绝对连续性

$$f \in L^1[a,b] \Longrightarrow \int_a^x f \in AC[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b].$$

续

下面只要证明:

$$F' \xlongequal{a.e.} f(x)$$

其中

$$F(x) := \int_a^x f \in W^{1,1}[a,b], \qquad f \in L^1(\mathbb{R})(\text{零扩充})$$

续

$$
\begin{aligned}
\|F' - f\|_{L^1[a,b]} & \overset{Fatou}{\leqslant} \varliminf_{h\to 0} \left\| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) \right\|_{L^1[a,b]} \\
& = \varliminf_{h\to 0} \int_a^b \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) \right| dx \\
& = \varliminf_{h\to 0} \int_a^b \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t)dt - f(x) \right| dx
\end{aligned}
$$

续

$$\|F' - f\|_{L^1[a,b]} \underset{Fubini}{\overset{\text{上式}}{\leqslant}} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h \|f(x+t) - f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} dt = 0.$$

续

补充证明:

- $f \in L^1[a,b] \xrightarrow[f\in L^1(\mathbb{R})]{\text{零扩充}} \int_x^{x+h} f = \int_0^h f(\cdot + x).$

(对χ_E成立(测度的平移不变性), 从而对L^1成立.)

续

补充证明:

- $$\lim_{t\to 0}\|f(x+t)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \xlongequal[\text{平均连续性}]{f\in L^1(\mathbb{R})} 0.$$

$$\Longrightarrow \forall\, \epsilon>0, \exists\, \delta>0, \text{当}|t|<\delta\text{时, 有}\|f(x+t)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}<\epsilon.$$

$$\Longrightarrow \text{当}0<h<\delta\text{时, 有}\frac{1}{h}\int_0^h \|f(x+t)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}dt \leqslant \epsilon$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{h}\int_0^h \|f(x+t)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}dt \longrightarrow 0.$$

证明分为三步: 第三步

- $$F \in AC[a,b] \quad \Longrightarrow \quad F' \in L^1[a,b]$$

$$\int_a^x F' = F(x) - F(a).$$

续

证明:

$$F \in AC[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$$

$$\xRightarrow[F' \in L^1[a,b]]{\text{第二步}} \quad \int_a^x F' \in AC[a,b]$$

$$\left(\int_a^x F'\right)' \xlongequal{a.e.} F'(x)$$

续

$$\xRightarrow{AC\text{线性空间}} \quad F(x)-\int_a^x F' \in AC[a,b]$$

$$\left(F(x)-\int_a^x F'\right)' \overset{a.e.}{=\!=} 0.$$

$$\xRightarrow{\text{第一步}} \quad F(x)-\int_a^x F' = c = F(a)$$

- 微积分基本定理的加强版本

由积分恢复函数

- 已知积分可恢复函数

$$f \in L^1[a,b] \quad \Longrightarrow \quad f(x) \xlongequal{a.e.} \left(\int_a^x f\right)' \xlongequal{a.e.} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t) - f(x)dt \xlongequal{a.e.} 0$$

微积分基本定理加强版本

Theorem 2 (Lebesgue点定理)

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt}_{\text{消没平均振荡}} \xlongequal[f\in L^1[a,b]]{a.e.} 0.$$

- 等式成立的点称为f的Lebesgue点.
- 已知积分可反解出函数的具体表达式:

$$f(x) \xlongequal[f\in L^1[a,b]]{a.e.} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f$$

续

证明: $f \in L^1[a,b]$

$\Longrightarrow$ $|f-r| \in L^1[a,b]$ (任意固定 $r \in \mathbb{Q}$)

$\Longrightarrow$ $|f(x)-r| \xlongequal{a.e.} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f-r|$

续

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|$$

$$\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-r| + |r-f(x)| \qquad \text{(freezing技巧)}$$

$$\xlongequal{a.e.} 2|f(x)-r|$$

$$\xrightarrow{r\to f(x)} 0$$

例题1

$$f \in L^1[a,b], \qquad \int_a^b x^n f(x)dx = 0, \quad \forall n = 0,1,2,\cdots$$

$$\Longrightarrow \qquad f \xlongequal{a.e.} 0$$

续

- 由微积分基本定理, 只要证明$F = 0$:

$$f(x) \xlongequal{a.e.} F'(x), \qquad F(x) := \int_a^x f(t)dt \in AC[a,b]$$

- 只要证明$F = 0$.
- $F(a) = F(b) = 0$

续

- 绝对连续函数$x^n F(x) \in AC[a,b]$:

$$G(x) = x^n \in C^1[a,b] \subset AC[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad |G(x)F(x) - G(y)F(y)| \leqslant M(|F(x) - F(y)| + |G(x) - G(X)|)$$

$$\Longrightarrow \quad x^n F(x) \in AC[a,b]$$

续

- 正交性:

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b (x^n F(x))' dx = (x^n F(x))\Big|_a^b$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b x^n f(x) + n x^{n-1} F(x) dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b x^{n-1} F(x) dx = 0, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

续

- 逼近:

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists 多项式 P(x): \qquad \max_{x\in[a,b]} |F(x) - P(x)| < \epsilon$$

- $F = 0$:

$$\int_a^b F(x)^2 dx = \int_a^b F(x)(F(x) - P(x))dx \leqslant \epsilon \int_a^b |F(x)|dx$$

注记

- 利用积分论处理函数:

$$f \xlongequal{a.e.} 0 \overset{f\in L^1}{\Longleftrightarrow} \|f\|_{L^1} = 0.$$

- 利用基本定理处理函数:　坏函数直接转化为好函数处理.

$$f \xlongequal{a.e.} 0 \xLeftrightarrow[F(x)=\int_a^x f]{f\in L^1} F = 0.$$

作业

P.218　第8, 10题

P.222　第1, 2题

P.231　第2题

实分析(H), 第26次课

任广斌(中国科大)

2022-5-20

本讲主要内容

- 全变差计算方法
- L^∞版本的微积分基本定理
- L^1版本的逐项求导

回忆： Lebesgue框架下微积分基本定理

- Lebesgue框架下微积分基本定理:

$$L^1[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftharpoons}} AC[a,b] \qquad \text{（双射）}$$

(a.e. 相等视为恒等) (相差常数视为恒等)

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\int_a^x \text{单射} \qquad\qquad \frac{d}{dx}\text{单射}$$

- 内容一：　全变差计算方法

全变差计算方法

Theorem 1

$$f \in AC[a,b] \quad \overset{f\in W^{1,1}[a,b]}{\Longleftrightarrow} \quad V_a^x f = \int_a^x |f'|$$

特例: 全变差是积分

$$f \in C^1[a,b] \Longrightarrow V_a^x f = \int_a^x |f'|$$

全变差计算方法

充分性:

$$
\begin{aligned}
f \in W^{1,1}[a,b] \Longrightarrow |f'| \in L^1[a,b] \quad & \Longrightarrow \quad \int_a^x |f'| \in AC[a,b] \\
& \xrightarrow{V_a^x f = \int_a^x |f'|} \quad V_a^x f \in AC[a,b] \\
& \Longrightarrow \quad f \in AC[a,b] \\
(\forall\ y > x \quad & \Longrightarrow \quad |f(y) - f(x)| \leqslant V_a^y - V_a^x).
\end{aligned}
$$

全变差计算方法

必要性：
$$\left(\forall\, y > x \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant V_a^y - V_a^x\right)$$

$$\xRightarrow{f\in AC[a,b]} \quad |f'(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} \frac{d}{dx} V_a^x f$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^x |f'| \leqslant V_a^x f \xlongequal{f(x)=\int_a^x f' + f(a)} V_a^x \int_a^x f'$$

$$\leqslant V_a^x \int_a^x (f')^+ \uparrow + V_a^x \int_a^x (f')^- \uparrow$$

$$= \int_a^x (f')^+ + \int_a^x (f')^- = \int_a^x |f'|$$

- 内容二： L^∞版本的微积分基本定理

记号

- $L^\infty[a,b] = [a,b]$上几乎处处有界可测函数全体.
- Lipschitz函数$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$f\in Lip[a,b] \Longleftrightarrow \quad \exists M>0,\ \ \forall\, x,y\in[a,b]:$$

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$$

$L^\infty[a,b]$ 框架下微积分基本定理

- $L^\infty[a,b]$框架下微积分基本定理:

$$L^\infty[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftharpoons}} Lip[a,b] \qquad \text{（双射）}$$

(a.e. 相等视为恒等) (相差常数视为恒等)

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\int_a^x$ 单射 $\frac{d}{dx}$ 单射

续

证明: (1) $f \in L^\infty[a,b] \subset L^1[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^x f \in AC[a,b].$$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| \leqslant \int_x^y |f| \leqslant M|y-x| \qquad (\forall\ x < y)$$

$$\Longrightarrow \int_a^x f \in Lip[a,b].$$

续

(2). $f \in Lip[a,b] \subset AC[a,b] \subset W^{1,1}[a,b].$

$$\Longrightarrow \quad f' \text{几乎处处存在,} \quad |f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$$

$$\Longrightarrow \quad |f'| \overset{a.e.}{\leqslant} M$$

$$\Longrightarrow \quad f' \in L^\infty[a,b].$$

具体实例

$$f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, \quad x \in [0,1], \quad \alpha, \beta > 0.$$

$W^{1,1}[0,1]$	$\alpha > \beta$
$BV[0,1]$	$\alpha > \beta$
$AC[0,1]$	$\alpha > \beta$
$Lip[0,1]$	$\alpha \geqslant \beta + 1$
$C^1[0,1]$	$\alpha > \beta + 1$

例题1

$$\alpha > \beta > 0 \Longrightarrow f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} \in AC[0,1]$$

续

假设$\alpha > \beta > 0$, 则

$$f'(x) \xlongequal{a.e.} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta}$$

$$\Longrightarrow \quad |f'(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} \alpha x^{\alpha-1} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \in L^1[0,1]$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) - f(\epsilon) = \int_\epsilon^x f' \quad \text{(Riemann框架下基本定理)}$$

$$\xRightarrow[\text{控制收敛}]{\epsilon \to 0^+} \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx \in AC[a,b]$$

例题2

$$0 < \alpha \leqslant \beta \Longrightarrow f(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} \notin W^{1,1}[0,1].$$

续

假设$0 < \alpha \leqslant \beta$, 则

$$f'(x) \xlongequal{a.e.} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^{\beta}} \notin L^1[0,1]$$

右边第一项 $\in L^1[0,1]$, 右边第二项 $\notin L^1[0,1]$,

续

$$0<\alpha\leqslant\beta\Longrightarrow x^{\alpha-\beta-1}\left|\cos\frac{1}{x^\beta}\right|\notin L^1[0,1]$$

证明:　做变换$t=x^{-\beta}$, 利用$|\cos t|\geq|\cos t|^2=\frac{1}{2}(\cos(2t)+1)$

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^1 x^{\alpha-\beta-1}\left|\cos\frac{1}{x^\beta}\right|dx &= \frac{1}{\beta}\int_1^{\epsilon^{-\beta}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}|\cos t|dt\\ &\geqslant \frac{1}{2\beta}\Big(\int_1^{\epsilon^{-\beta}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\cot(2t)dt+\int_1^{\epsilon^{-\beta}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}dt\Big)\\ &\to \frac{1}{2\beta}\Big(\int_1^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\cot(2t)dt+\int_1^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}dt\Big)=\infty.\end{aligned}$$

$$Dirichlet\text{判别法}: t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\downarrow 0$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-\beta-1}\left|\cos\frac{1}{x^\beta}\right|dx\geqslant\int_\epsilon^1 x^{\alpha-\beta-1}\left|\cos\frac{1}{x^\beta}\right|dx\to+\infty$$

例题2'

$$0 < \alpha \leqslant \beta \xLongrightarrow{\text{直接证明}} f(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} \notin \mathrm{BV}[0, 1].$$

续

证明: 取区间剖分

$$\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

$$\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\beta} = (n-1-i)\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

$$f(x_{i-1})f(x_i) < 0, \qquad |f(x)| \leqslant 1.$$

续

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| &\geqslant \sum_{i=2}^{n-1}|f(x_i)| \\ &\geqslant \sum_{i=2}^{n-1}|f(x_i)|^{\frac{\beta}{\alpha}} \\ &= \sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{(n-i)\pi+\frac{\pi}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}} \to \infty\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow V_0^1 f = \infty.$$

例题3

$$f(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} \in \mathrm{Lip}[0,1] \overset{\alpha,\beta>0}{\Longleftrightarrow} \alpha \geqslant \beta + 1.$$

续

证明:

$$f \in Lip[0,1] \xLeftrightarrow{\text{微积分基本定理}} f' \in L^{\infty}[0,1]$$

$$f'(x) \overset{a.e.}{=\!=} \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}$$

$$\xRightarrow{\alpha,\beta>0} \quad f'(x) \in L^{\infty}[0,1] \text{当且仅当} \alpha \geqslant \beta + 1 > 1$$

例题4

$$f \in AC[0,1], \quad g \in C^1[0,1] \subset AC[0,1], \qquad f\text{和}g\text{可复合}.$$

$$\not\Rightarrow \qquad f \circ g \in AC[0,1].$$

续

证明:　取

$$
\begin{aligned}
f(y) &= y^{\frac{1}{3}} \in AC[-1,1] \setminus C^1[-1,1] \\
g(x) &= \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^3 \in C^1[-1,1] \\
f \circ g(x) &= x \sin \frac{1}{x} \in C[-1,1] \setminus AC[-1,1]
\end{aligned}
$$

注意:　可复合的条件要求在$[-1,1]$而不是$[0,1]$上考虑.

续

证明: 取

$$f(y)=\int_{-1}^{y} f'+f(-1) \xRightarrow{f'\in L^1[-1,1]} f\in AC[-1,1].$$

$$g'(x)=3x^2\sin^3\frac{1}{x}-3x\sin^2\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\in C[0,1] \xRightarrow{g'(0)=0} g\in C^1[-1,1]$$

$$f\circ g(x)=x\sin\frac{1}{x}\notin AC[-1,1]$$

例题5

$$f \in \mathrm{Lip}[0,1], \quad g \in AC[0,1], \qquad f\text{和}g\text{可复合}.$$

$$\Longrightarrow \qquad f \circ g \in AC[0,1].$$

续

证明: $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|, \qquad x,y\in[0,1].$

$$g\in AC[a,b]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\,\epsilon>0, \exists\delta>0: m(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k))<\delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}|f\circ g(b_k)-f\circ g(a_k)| \leqslant M\sum_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)| \leqslant M\epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad f\circ g\in AC[0,1]$$

- 内容三:　L^1框架下逐项微分

回忆：L^+Fubini逐项微分定理

条件:

- 在L^+框架内: $f_n' \in L^+$加强为$f_n \uparrow$
- 两边有意义: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛.

Theorem 2 (Fubini逐项微分定理)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

注记

- Fubini逐项微分定理与Fubini定理不同:

  它是a.e.成立的等式;　　求导和积分交换次序.

- Fubini逐项微分定理的条件:

  逐项求导后的加强版本的L^+框架内.

逐项微分Fubini定理

$$(1) \quad f_k \in AC[a,b]$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(c)\text{收敛}, \quad \exists c \in [a,b]$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_k'(x)|dx < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k \in AC[a,b], \quad \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)' \xlongequal[\text{利用积分判断相等}]{a.e.} \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$$

注记: 在L^1框架下的逐项微分Fubini定理

- L^1框架: 逐项微分后的级数的L^1可积性.
- 逐项微分的C^1条件弱化为弱C^1条件, 即绝对连续条件.
- 级数收敛的要求可简化为在一点处收敛
- 逐项微分的等式是几乎处处成立的等式

注记

- 逐项微分后的级数的L^1可积性.

$$
\begin{aligned}
f_k'(x) =: f'(x,k) \in L^1([a,b]\times\mathbb{N}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b |f_k'(x)|dx < \infty \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k'(x)| \in L^1[a,b]
\end{aligned}
$$

证明

$$\xrightarrow[L^1\text{框架}]{\text{条件}(3)} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x f_k'(t)dt \xlongequal{Fubini} \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)dt < \infty$$

$$\xrightarrow[f_k\in AC[a,b]]{\text{条件}(2)} \quad \int_c^x f_k'(t)dt = f_k(x) - f_k(c)$$

续

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(c) + \int_c^x \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)}_{\in L^1[a,b]} dt \in AC[a,b]$$

$$\Longrightarrow \qquad \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)' \xlongequal{a.e.} \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$$

注记

- 利用积分论处理函数:

$$f \xlongequal{a.e.} 0 \quad \overset{f\in L^1}{\Longleftrightarrow} \quad \|f\|_{L^1} = 0.$$

- 利用基本定理处理函数: 坏函数直接转化为好函数处理.

$$f \xlongequal{a.e.} 0 \quad \xLeftrightarrow[\text{两边积分的方法}]{f \in L^1, \quad F(x) = \int_a^x f} \quad F = 0.$$

作业

P.232　第4题

P.242　第4, 5, 6题

实分析(H), 第27次课

任广斌(中国科大)

2022-5-25

本讲主要内容

- $L^p(E)$是Banach空间.

$$E \subset \mathbb{R}^n\text{可测}, \quad p \in [1, +\infty].$$

注记

前五章	第六章	泛函分析
个体	整体	整体
$L^1(\mathbb{R}^n)$	$L^p(\mathbb{R}^n)$	抽象Banach空间

注记： L^p空间是Sobolev理论的生长点。

L^p的定义

$$L^p(E) \xlongequal{p\in[1,+\infty)} \left\{f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\text{可测}: \quad \|f\|_p < +\infty\right\}$$

$$L^\infty(E) \xlongequal{\qquad} \left\{f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\text{可测}: \quad f\text{在E上 } a.e. \text{ 有界}\right\}$$

$$\left(f \in L^\infty(E) \Longleftrightarrow \exists M > 0, \quad |f(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} M\right)$$

- $L^p(E)$空间的约定:

$L^p(E)$空间中几乎处处相等视为恒等.

L^p空间的范数

$$\|f\|_{L^p(E)} \xlongequal{p\in[1,+\infty)} \|f\|_p := \left\{\int_E |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

$\mathbb{R}^n$	$L^p(E)$
绝对值	范数
有限维	无限维

L^∞空间的范数: 取范数尽可能小的代表元，尽可能大的代表元的范数是无穷

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty(E)} &= \text{ess sup}_{x\in E}|f(x)| \\
&= \inf_{m(Z)=0}\sup_{x\in E\setminus Z}|f(x)| \\
&= \inf\left\{M>0:\quad \underbrace{|f(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} M}_{\text{M是本性上界}}\right\} \\
&= \sup\left\{M>0:\quad \underbrace{m\{x\in E:\quad |f(x)|>M\}>0}_{\text{M不是本性上界}}\right\}
\end{aligned}
$$

本性上确界

- 本性上确界

$$\textit{ess sup} = \textit{ess}\textit{ential} \;\; \textit{sup}\textit{remum}$$

- 例题

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1, \qquad \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0.$$

本性上确界的作用

- 积分论中, 本性上确界取代上确界的作用:

$$\int_E |f| \leqslant \|f\|_\infty m(E)$$

证明: $\quad$ 左 $= \displaystyle\int_{E\setminus Z} |f| \leqslant \sup_{E\setminus Z} |f| \;\; m(E).$

- 本性上确界与上确界的关系:

$$\|f\|_{L^\infty(E)} \leqslant \sup_{x\in E\setminus Z} |f(x)|, \qquad \forall\ m(Z) = 0$$

共轭指数

- 共轭指数(p, q):

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad p, q \in [1, \infty].$$

- 例子: $\quad (p, q) = (2, 2), (1, \infty), (\infty, 1).$

Hölder不等式

- Hölder不等式:　设p, q共轭, 则

$$\|fg\|_{L^1(E)} \leqslant \|f\|_{L^p(E)}\|g\|_{L^q(E)}$$

- 等号成立条件:

$$\text{等号成立} \xLeftrightarrow[\exists\text{常数}\lambda\geqslant 0]{p,q\in[1,+\infty)} |f(x)|^p \xlongequal{a.e.} \lambda|g(x)|^q, \quad \text{或} g(x) \xlongequal{a.e.} 0.$$

Schwarz不等式

- Schwarz不等式:

$$f, g \in L^2(E) \Longrightarrow \|fg\|_{L^1(E)} \leqslant \|f\|_{L^2(E)} \|g\|_{L^2(E)}$$

$$\int_E |fg| \leqslant \sqrt{\int_E |f|^2} \sqrt{\int_E |g|^2}$$

- 等号成立条件:

$$\text{等号成立} \quad \underset{\exists\text{常数}\lambda \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad |f(x)| \xlongequal{a.e.} \lambda |g(x)|, \quad \text{或} g(x) \xlongequal{a.e.} 0$$

Young不等式

设p, q是共轭指数, $p, q \in [1, +\infty)$, $a, b \geqslant 0$, 则

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$\text{等式成立} \Longleftrightarrow a^p = b^q.$$

证明: $\log x$是$(0, +\infty)$严格凹函数.

Hölder不等式的证明

情形1: p, q之一为∞, 不妨设$p = \infty$.

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty} \int_E |g|.$$

情形2 : $p, q \neq \infty$

$$F(x) := \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}, \qquad G(x) := \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}$$

$$|F(x)G(x)| \leqslant \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^q}{q}$$

$$\xRightarrow{\text{Young不等式}} \quad \|FG\|_{L^1} \leq \frac{\|F\|_p^p}{p} + \frac{\|G\|_q^q}{q} \xlongequal{\|F\|_p = \|G\|_q = 1} 1$$

Hölder不等式达到等式情形

$$\text{等号成立} \quad \Longleftrightarrow \quad |F(x)|^p \xlongequal{a.e.} |G(x)|^q$$

$$\xLeftrightarrow[\exists\text{常数}\lambda\geqslant 0]{} \quad |f(x)|^p \xlongequal{a.e.} \lambda|g(x)|^q, \quad \text{或} g(x) \xlongequal{a.e.} 0.$$

Minkowski不等式

$$\|f+g\|_p \overset{\forall\ p\in[1,+\infty]}{\leqslant} \|f\|_p+\|g\|_p$$

证明: 不妨设$p \in (1, +\infty)$

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leqslant \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|g\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q}
\end{aligned}
$$

Chebyshev不等式

设$p \in (0, +\infty)$, $f \in L^p(E)$, 则

$$m[|f| \geqslant \epsilon] \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\epsilon}\right)^p$$

证明:

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{[|f| \geqslant \epsilon]} |f|^p \geqslant \epsilon^p m[|f| \geqslant \epsilon].$$

L^p收敛

$$f_k \xrightarrow{L^p(E)} f \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \|f_k - f\|_p \longrightarrow 0.$$

四种收敛

$$f_k \xrightarrow[p\in[1,\infty)]{L^p(E)} f \quad \xrightarrow{\text{Chebyshev}} \quad f_k \xrightarrow{m} f \quad \xrightarrow{\text{Riesz}} \quad f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$$

$$f_k \xrightarrow{L^\infty(E)} f \quad \Longrightarrow \quad f_k \xrightarrow{a.un.} f \quad \Longrightarrow \quad f_k \xrightarrow{m} f \qquad f_k \xrightarrow{a.e.} f$$

证明: $\forall \epsilon > 0$, $\exists$零测集Z :

$$\sup_{E\setminus Z} |f_k - f| \leqslant \|f_k - f\|_\infty + \epsilon/2 \leqslant \epsilon \qquad (k \gg 1).$$

$$\Longrightarrow \quad 在E \setminus Z上, f_k \xrightarrow{a.un.} f$$

L^p是线性空间

- $L^p(E)$是线性空间 $\quad (p \in [1, \infty])$.

注记: $\quad a, b \geqslant 0$

$$(a+b)^p \leqslant \begin{cases} 2^{p-1}(a^p + b^p), & \text{if} \quad p \geqslant 1 \\ \\ a^p + b^p, & \text{if} \quad 0 < p < 1. \end{cases}$$

L^p是赋范线性空间

- $L^p(E)$是赋范线性空间 $\quad (p \in [1, \infty])$.

  - 非负性:

$$\|f\|_p \geqslant 0, \qquad \|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0, \quad \text{即} f \xlongequal{a.e.} 0$$

  - 齐性:

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

  - 三角不等式

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

具体Banach空间

Theorem 1

设$E \subset \mathbb{R}^n$可测， $p \in [1, +\infty]$. 则

$$L^p(E)\text{是}Banach\text{空间}.$$

注记

- Banach空间=完备赋范线性空间

- $L^p(E)$完备$\Longleftrightarrow$ Cauchy序列是收敛序列.

- $L^p(E)$中Cauchy序列:

$$\lim_{k,j\to\infty}\|f_k - f_j\|_p = 0$$

完备性证明

- $p \in [1, +\infty)$:

$$
\begin{aligned}
L^p\text{Cauchy} &\xrightarrow{\textit{Chebyshev}} \text{依测度Cauchy} \\
&\Longrightarrow \text{依测度收敛} \\
&\xrightarrow{\textit{Riesz}} \exists a.e.\ \text{收敛子列} \\
&\xrightarrow{\textit{Fatou}} L^p\ \text{收敛}
\end{aligned}
$$

完备性证明续

$$\int_E |f - f_k|^p \leqslant \varliminf_{j\to\infty} \int_E |f_{n_j} - f_k|^p < \epsilon^p, \qquad k \gg 1$$

$$\Longrightarrow \qquad f_k \xrightarrow{L^p} f, \qquad f = (f - f_k) + f_k \in L^p$$

完备性证明续

- $p = +\infty$：

$$
\begin{aligned}
L^{\infty}\text{Cauchy} &\Longrightarrow \text{在}E \setminus Z\text{一致Cauchy}\\
&\Longrightarrow \text{在}E \setminus Z\text{一致收敛}\\
&\Longrightarrow \text{依}L^{\infty}(E \setminus Z)\text{收敛}\\
&\Longrightarrow L^{\infty}(E)\ \text{收敛}
\end{aligned}
$$

完备性证明续

证明: $\forall \epsilon > 0, \exists$零测集$Z_{kj}$:

$$\sup_{x \in E \setminus Z_{kj}} |f_k(x) - f_j(x)| \leqslant \|f_k - f_j\|_\infty + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad (k, j \gg 1)$$

$$\Longrightarrow \sup_{x \in E \setminus Z} |f_k(x) - f_j(x)| < \epsilon, \qquad (k, j \gg 1, \quad Z = \bigcup_{k,j=1}^{\infty} Z_{kj})$$

$$f(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x) \chi_{E \setminus Z}(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad \|f_k - f\|_{L^\infty} \leqslant \epsilon, \qquad f = (f - f_k) + f_k \in L^\infty$$

计数测度情形

- 测度空间$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu = \text{计数测度})$

$$L^p(\mathbb{N}, d\mu) = \ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \left\| \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\|_{\ell^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

- 测度空间$(\mathbb{Z}_n, 2^{\mathbb{Z}_n}, \mu = \text{计数测度})$

$$\mathbb{R}^n = L^2(\mathbb{Z}_n, d\mu) = \ell^2(\mathbb{Z}_n).$$

例题1: 反向Hölder不等式

- 反向Hölder不等式: 设$p, q \in (-\infty, 1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\|fg\|_{L^1(E)} \geqslant \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^g(E)}$$

- 等号成立条件:

$$\text{等号成立} \quad \overset{p,q\in(-\infty,1)}{\underset{\exists\text{常数}\lambda\geqslant 0}{\Longleftrightarrow}} \quad |f(x)|^p \overset{a.e.}{=\!=} \lambda |g(x)|^q, \quad \text{或} g(x) \overset{a.e.}{=\!=} 0.$$

反向Hölder不等式的证明

不妨设$p > 0$, $g \neq 0$, 　共轭指数

$$u = \frac{1}{p}, \qquad v = \frac{1}{1-p}.$$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p} &= \|f^p g^p g^{-p}\|_{L^1}^{1/p} \\
&\leqslant \left(\|f^p g^p\|_{L^u} \|g^{-p}\|_{L^v}\right)^{1/p} \\
&= \frac{\|fg\|_{L^1}}{\|g\|_{L^q}}.
\end{aligned}$$

例题2: L^p包含关系

- $L^p[a,b]$关于p严格$\downarrow$ (Hölder不等式)
- $L^p(\mathbb{R})$ 对不同的p互不包含.

$$L^p(\mathbb{R}^n) \supset A^p := \left\{ f_\alpha, g_\beta : \beta < \frac{1}{p} < \alpha \right\}$$

$$f_\alpha := \frac{1}{x^\alpha}\chi_{[1,+\infty)} \in L^p(\mathbb{R}) \iff \alpha > \frac{1}{p}$$

$$g_\beta := \frac{1}{x^\beta}\chi_{(0,1)} \in L^p(\mathbb{R}) \iff \beta < \frac{1}{p}$$

临界值$\frac{1}{p}$

例题3: p范数的极限

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_{L^p(E)} \xlongequal{m(E)\in(0,+\infty)} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

p范数的极限续

证明: $$\|f\|_{L^p(E)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(E)} m(E)^{1/p}$$

$$\xrightarrow{\text{取上极限}} \quad \overline{\lim_{p\to\infty}} \|f\|_{L^p(E)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(E)}$$

p范数的极限续

$$\forall\ M < \|f\|_{L^\infty(E)}$$

$$\Longrightarrow A = \Big\{x \in E : \quad |f(x)| > M\Big\}, \qquad m(A) > 0$$

$$\Longrightarrow \|f\|_{L^p(E)} \geqslant M\, m(A)^{1/p},$$

$$\xrightarrow{\text{取下确界}} \varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} \geqslant \|f\|_{L^\infty(E)}$$

例题4: Hölder不等式的推广

- $f, g \in L^+(E)$, $\quad p, q \in [1, \infty)$, $\quad r \in [1, +\infty]$. $\quad$ 约定$0^0 = 1$.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{q}{r} - 1$$

$$\Longrightarrow \int_E f(x)g(x)dx \leqslant \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_q^{1-\frac{q}{r}} \Big(\int_E f^p(x) g^q(x) dx \Big)^{\frac{1}{r}}.$$

证明

$$fg = (f^p g^q)^{\frac{1}{r}} (f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}}) \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$$

$$\int_E fgdm \leqslant \Big(\int_E f^p g^q dm\Big)^{\frac{1}{r}} \Big(\int_E (f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}})^{r'} dm\Big)^{\frac{1}{r'}}$$

$$(f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}})^{r'} = (f^p)^{r'(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} (g^q)^{r'(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}$$

$r'(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{r})$与$r'(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r})$倒数共轭

例题5

- $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad p, q, r$同上例题, $r \neq \infty$

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)dt$$

$$\Longrightarrow \|h\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

证明思路： 计算$\int_{\mathbb{R}^n} (h(x))^r dx$, 利用前例题+Fubini定理

作业

P.250　第3题

P.253　第5题

P.289　第1, 2题

实分析(H), 第28次课

任广斌(中国科大)

2022-5-27

本讲主要内容

- L^p的稠密子空间
- Hilbert空间
- 本课程总结

内容一

- L^p的稠密子空间

L^p空间的稠密子集

假设$p \in [1, \infty)$.

$$\left\{ P_{\mathbb{Q}} \chi_{B(0,m)} \right\} \overset{\text{稠密}}{\subset} L^p(\mathbb{R}^n)$$

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{\text{稠密}}{\subset} L^p(\mathbb{R}^n)$$

L^p空间的稠密子集续

证明: $\mathbb{R}^n$情形$\xRightarrow{\text{绝对可积性}}$紧集情形

$$L^1(K) \overset{\text{Hölder}}{\supset} L^p(K) \overset{\text{稠密}}{\supset} C(K) \underset{\text{稠密}}{\overset{Weierstrass}{\supset}} P(\text{多项式}) \supset P_{\mathbb{Q}}(\text{有理多项式})$$

注记

$0 < p < 1$	$1 \leqslant p < \infty$	$p = \infty$
拟范	可分	不可分

可分=可数+极限

例题

- 赋范空间$\Big(R[a,b], \|\cdot\|_2\Big)$不完备

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

(积分取为Riemann积分)

- 赋范空间$\Big(R[a,b], \|\cdot\|_2\Big)$的完备化$L^2[a,b]$

- $\chi_{\{r_1,\ldots,r_n\}}$在赋范空间$\Big(R[a,b], \|\cdot\|_2\Big)$中是恒为零, 不构成反例.

证明

- 不妨设$[a,b]=[0,1]$

$$[0,1]\cap\mathbb{Q}=:\left\{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots\right\}$$

- $I_n:=\left(r_n-\frac{1}{2^{n+2}},\ \ r_n+\frac{1}{2^{n+2}}\right)$

$$J_n=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n\equiv\chi_{J_n}=:f_n$$

- Cauchy 序列

$$n<m\Longrightarrow\|f_n-f_m\|_2\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{m}|I_k|\right)^{1/2}\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\to 0$$

证明续

- 假设Cauchy数列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\Big(R[0,1], \|\cdot\|_2\Big)$收敛数列,

$$\xRightarrow{\text{存在}g\in R[0,1]} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_2 = 0$$

- 逐点收敛

$$f_n = \chi_{J_n} \uparrow f := \chi_{\lim J_n}$$

$$f_n\text{依}L^2\text{收敛于}g \xRightarrow[\text{依测度收敛}]{\text{Riesz定理}} f_n\text{存在子列收敛于}g$$

- 存在零测集$Z \subset [0,1]$:

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in [0,1] \setminus Z.$$

证明续

$$J = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

- J是$[0,1]$稠密开集

$$J \setminus Z\text{是}[0,1]\text{稠密集} \qquad (\text{修改极限列中的代表元})$$

- J, J^c是$[0,1]$正测集.

- g^2在正测集$J^c \setminus Z$不连续$\Longrightarrow \|g\|_2$不可定义, 矛盾.

$$\forall x \in J^c \setminus Z, \exists x_n \in J \setminus Z: \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\lim g^2(x_n) = \lim f^2(x_n) = 1 \neq 0 = f^2(x) = g^2(x)$$

内容二

- Hilbert空间

Hilbert空间: 完备内积空间

设$E \subset \mathbb{R}^n$可测, 则$L^2(E)$是Hilbert空间.

Hilbert空间续

- 内积

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(x)\overline{g(x)}dx \qquad \text{(逐点内积的积分)}$$

- 范数

$$\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f\rangle$$

- 垂直

$$f \perp g \Longleftrightarrow \langle f, g\rangle = 0$$

- 夹角

$$\cos\theta = \frac{\langle f, g\rangle}{\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}}$$

标准正交基

$L^2(E)$的标准正交基$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$:

- 标准

$$\|\varphi_k\|_2 = 1$$

- 正交

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0, \qquad \forall k \neq j$$

- 基

$$L^2(E) = \overline{\text{span}\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}}$$

Theorem 1

$L^2[-\pi,\pi]$常用的两组标准正交基

(1) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$

(2) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$

注记

- Fourier分析————时频分析

$$f \quad \underset{\text{正弦波表达信息}}{\overset{\text{几乎处处相等视为恒等}}{\Longleftrightarrow}} \quad \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

不可数信息 可数信息+零测集

时间域 频率域

Fourier分析的一般理论

Theorem 2

设$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$是$L^2[-\pi,\pi]$标准正交基, 则

$$\begin{array}{ccc} L^2(S^1) = L^2[-\pi,\pi] & \xLeftrightarrow{\text{等距同构}} & \ell^2 \\ f & \longmapsto & \{a_k\}_{\mathbb{N}} \\ & & \textit{Fourier}\text{系数} \end{array}$$

Fourier分析的一般理论续

- 平方平均收敛:

$$f(x) \xlongequal{L^2[-\pi,\pi]} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

- Parseval等式(勾股定理):

$$\|f\|_2 = \left\| \left\{ \langle f, \varphi_k \rangle \right\}_{k\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell^2}$$

注记

- Fourier分析的收敛性:
  - 只有在Lebegue积分理论中才能讲清楚
  - Riemann积分理论不再适用.

注记

- Fourier分析理论的当代发展:

$$\text{Fourier分析} \xrightarrow[\text{(具紧支集光滑基)}]{\text{小波基}} \text{小波分析}$$

$$\xrightarrow[L^2(S^1)\longrightarrow L^2(S^n)]{\text{高维球调和}} \text{调和分析}$$

$$\xrightarrow{L^2(G/H)} \text{李群表示论}$$

对偶空间

Theorem 3

设$p, q \in [1, +\infty)$共轭, 则

$$\begin{array}{ccc} L^p(\mathbb{R}^n)^* & \xlongequal{\text{等距同构}} & L^q(\mathbb{R}^n) \\ fdm = \langle \cdot, f \rangle & \leftarrowtail & f \end{array}$$

对偶空间续

- $T \in L^p(\mathbb{R}^n)^* \overset{def}{\Longleftrightarrow} T : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ 有界线性

- $L^p(\mathbb{R}^n)^*$ 是Banach空间

$$\|T\| := \sup_{f \in L^p(\mathbb{R}^n)} \frac{|Tf|}{\|f\|_p} = \sup_{\|f\|_p = 1} |Tf|$$

放大率. 最大奇异值($p = 2$,矩阵)

广义函数

- 对偶和变分是分析的两大法宝.

广义函数

- 广义函数

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \equiv L^2(\mathbb{R}^n)^* \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^*$$

$$\text{如来佛手心} \xlongequal{\text{通过拓扑即极限}} \text{取闭包}$$

$L^2(X, d\mu)$的统一

$\mathbb{R}^n = L^2(\mathbb{Z}_n, d\mu)$	$L^2[0, 2\pi]$	$L^2(\mathbb{R})$
$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$	$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}$	$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f\overline{g}$
$a = \sum\limits_i \langle a, e_i \rangle e_i$	$f(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle f(s), \frac{e^{iks}}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}$	$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \langle f(s), \frac{e^{ixs}}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{e^{ixt}}{\sqrt{2\pi}}$
向量由投影生成	Fourier级数	Fourier逆变换
内积系数投影	内积是Fourier系数	内积是Fourier变换
e_i是Id特征向量	$\frac{e^{iks}}{\sqrt{2\pi}}$ 是导算子特征向量	$\frac{e^{ixs}}{\sqrt{2\pi}}$ 是导算子特征向量

内容三

- 本课程总结

- 第一层: Lebegue测度论 || Lebegue积分论

实分析大楼续

- Lebegue测度论
  - Lebegueσ代数=长方体体积+ lim+Caratheodory
  - Lebegueσ代数=开集+ lim+零测集=Borel σ代数完备化
  - 核心内容: Littlewood 三原理

实分析大楼续

- Lebegue积分论
  - Lebegue积分四步骤: $(\chi_A, S^+, \mathscr{L}^+, L^1)$
  - 核心内容: 交换积分次序的五个等价定理

实分析大楼续

- Lebegue测度论和Lebesgue积分理论的桥梁:
  - 特征函数
  - 绝对连续测度
  - 积分是高维测度

实分析大楼续

- 第二层: 抽象的测度理论和抽象的积分理论

  符号测度、实测度、复测度

- 第三层: 测度论和积分论的进一步推广:

  向量值测度、算子值测度

  被积函数扩充: 欧氏空间, 流形, 纤维丛, 无限维空间上的函数

从实分析看微积分

- 从实分析看微积分:　一对互逆运算

$$L^1[a,b]/\sim \underset{\dfrac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

$$L^\infty[a,b]/\sim \underset{\dfrac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} Lip[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

从实分析看Fourier分析

- 从实分析看Fourier分析:　原子分解(基的选取)

$$f(x) \xlongequal[\varphi_k(x)=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}]{L^2(S^1)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

$$f(t) \xlongequal[\varphi_s(x)=\frac{e^{isx}}{\sqrt{2\pi}}]{L^2(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s(t) ds$$

- 实分析中对级数认识的升华.

从整体看实分析

- $L^p(X, d\mu)$ 是Banach空间

$$
L^p(X, d\mu) \begin{cases} \mathbb{R}^n = L^2(\mathbb{Z}_n, d\mu) & \\ \ell^2 = L^2(\mathbb{N}, d\mu) & \\ L^2(S^1) & \text{Fourier级数} \\ L^2(\mathbb{R}) & \text{Fourier积分} \end{cases}
$$

当代分析理论: 流形和纤维丛上的微积分

- 研究承载的集合是流形:　　这是弯曲的非线性的.
- 研究非线性的手段是线性化.
- 产生切丛, 余切丛, 张量丛, 外微分形式丛, Spin丛, Clifford丛.
- 赋予各种结构:

  四则运算、极限运算、连续、求导、积分、复结构。

- 各种结构具有相容性.

当代分析理论

线性代数	$+, \cdot$	线性结构
数学分析	$\frac{d}{dx}, \int_{[a,b]}$	求导和积分
实分析	$\int_E$	积分
微分几何	求导	联络和曲率
泛函分析	$\|\cdot\|, \langle , \rangle$	范数和内积
复分析	J	复结构
Clifford分析	乘法	乘法结构
数学物理	$\bigotimes, \bigwedge$	张量和外微分
PDE	f	广义函数
抽象代数	四则运算	群环域模
拓扑学	lim	极限

- 数学将表面上没有关系的现象联系在一起

(仿生学拓展,代数学的综合, 极限的触角)

- 极限体现了上述联系

$$\text{具体、简单} \xRightarrow{\text{极限}} \text{抽象、复杂}$$

- 极限的实现归于粗糙操作

粗糙(ϵ体现粗糙度)+精细(ϵ任意性体现精细度)过程

极限===好+小===主要矛盾+次要矛盾===主角+边角料

作业

P.289 第4, 5, 8, 15题

分析是极限的艺术