实分析 H 作业解答

原生生物

* 对应教材为周民强《实变函数论》，每次作业为两次讲义后的习题。

目录

1 第一次作业

1. (P13 思考题 1)

   单射：若有 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=f_{n_0}(x_1)=f_{n_0}(x_2)=x_2$，由此知为单射。

   满射：若存在 $t\in\mathbb{R}$ 使 $f(x)=t$ 无解，则 $f_{n_0}(x)=t$ 无解，与 $f_{n_0}(t)=t$ 矛盾。

   因此 f 必然为一一映射。

2. (P13 思考题 2)

   [理解一] $f(\mathbb{R}/\mathbb{Q})=\mathbb{R}/\mathbb{Q}, f(\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$，证明双射。

   假设 f 在无理数集上是一一映射，下证其在有理数集上亦为一一映射：

   单射：若有 $f(q_1)=f(q_2)=q, q_1,q_2\in\mathbb{Q}, q_1\neq q_2$，若 $\forall q_1\le x\le q_2, f(x)=q$，则考虑其中无理数已矛盾。否则，由连续，$f$ 必然在 (q_1,q_2) 取到 $[q_1,q_2]$ 上的最大值或最小值，不妨设 $f(x_0)=t>q$ 为最大值。任取一 (q,t) 间的无理数 s，由介值定理知 (q_1,x_0) 与 (x_0,q_2) 上至少各有一点取值为 s，与其在无理数上为一一映射矛盾。

   满射：由于其在无理数上为满射，由介值定理知值域连续，因此必然能取到所有有理数。

   [理解二] $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 到 $f(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ 为一一映射 (即 f 在无理数上为单射)，证明 f 在有理数上为单射。

   若有 $f(q_1)=f(q_2)=q, q_1,q_2\in\mathbb{Q}, q_1\neq q_2$，设 $f([q_1,q_2])=[s,t]$，利用介值定理可知，(s,t) 上的点在 $[q_1,q_2]$ 上至少有两个原像，而 s,t 若不存在两个原像，必然只有一个原像，因此 $[q_1,q_2]$ 上除了至多两点外，对每一点 x 都存在 $y\neq x$ 使得 $f(x)=f(y)$。由此，考虑 $[q_1,q_2]$ 上存在这样的 y 的无理数点，由于 f 在无理数上是单射，对不同的无理数，找到的 y 必然是不同的有理数，因此构造了 $[q_1,q_2]$ 上除了至多两个外的全部无理数到 $[q_1,q_2]$ 上有理数的单射，矛盾。

3. (P13 思考题 3)

   当：$f^{-1}(B)=\{x\in X|\exists b\in B, f(x)=b\}$，由满射，$\forall b\in B,\exists x\in X, f(x)=b$，从而 $x\in f^{-1}(B)$，因此 $B\subset f(f^{-1}(B))$。另一方面，由原像定义可知 $f(f^{-1}(B))\subset B$，于是 $f(f^{-1}(B))=B$。

   仅当：若 Y 只有一个元素，则不为满射可知 X 必为空集，不满足映射定义，由此 Y 至少有两个元素，任何单元集为其真子集。若不为满射，设 $y\in Y$ 不在其值域中，则 $f(f^{-1}(y))=\varnothing$，因此原式不成立。

2 第二次作业

1. (P54 习题 1.4)

   (i) 成立。由于 $f:X\to Y$，$f^{-1}(Y)=X$，于是

   $$f^{-1}(Y\backslash B)=\{x|f(x)\notin B\}=X\backslash\{x|f(x)\in B\}=f^{-1}(Y)\backslash f^{-1}B$$

   (ii) 不成立。令 $X=\{1,2\}, Y=\{1\}, f(1)=f(2)=1$，取 $A=\{1\}$ 即矛盾。

2. (P50 思考题 1)

   由 P49 例 19 知完全集是不可数集。若对某个 x，$\forall y\in E, x-y\in\mathbb{Q}$，则由 $y\to x-y$ 可以建立 E 到 $\mathbb{Q}$ 的单射，矛盾。

3. (P50 思考题 2)

   $\frac{1}{4}_{(10)}=0.\dot{0}\dot{2}_{(3)}, \frac{1}{13}_{(10)}=0.\dot{0}0\dot{2}_{(3)}$，由此三进制表示不出现 1，都在 Cantor 集中。

4. (Stein P38 3)

   (a) 由于每一次挖去的开集互不相交，C_ξ 的补集是若干开集的无交并。第 n 次挖去的长度是 $(1-\xi)^{n-1}\xi$，由此补集中开集的总长度为 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\xi)^{n-1}\xi=1$。

   (b) 由于开区间的外测度即为其长度，且可测集的可数并依然可测，无交并的测度即为各个集合测度之和，由 (a) 可知其对 $(0,1)$ 的补集外测度为 1，因此其内测度为 0。

5. (Stein P38 4)

   (a) 与上一题类似，其对 $(0,1)$ 补集的测度为 $\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k<1$，由此其测度为 $1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k>0$。

   (b) 归纳构造 x_n。取 x_k 为第 k 次挖去的区间中点，若 x 在 x_k 左侧，则 x_{k+1} 取 x_k 所在区间左侧相邻的第 $k+1$ 次挖去的区间中点，反之亦然。

   由 $\lim_{k\to\infty}l_k=0$，可知 $\lim_{n\to\infty}|I_n|=0$，而 $|x_k-x|\le\frac{1}{2^k}$，由此 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$。

   (c) 由闭集可知 $\hat{C}'\subset\hat{C}$，与 Cantor 集完全相同方式取区间端点可知其为完全集。由 (b) 可知 $\hat{C}$ 中没有点的邻域在其中，因此不可能包含开集。

   (d) 由完全集不可数知结论。

3 第三次作业

1. (P25 思考题 14)

   全体代数数可以由整系数方程的根确定，所有整系数方程的基数为 N^{N}，利用对角线可以与 N 建立一一对应，从而基数为 $\aleph_0$，而每个方程至多有限个根，因此代数数可数。由于超越数为代数数补集，其基数必为 c。

2. (P43 思考题 2)

   收敛点集 $\{x|\forall\varepsilon,\exists N,\forall m,n>N,f_n(x)-f_m(x)<\varepsilon\}$，即为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m,n=N}^{\infty}\{x|f_n(x)-f_m(x)\le\dfrac{1}{k}\}$。

   由于闭集的交仍为闭集，由连续每个右侧的集合为闭集，$\bigcap\limits_{m,n=N}^{\infty}\{x|f_n(x)-f_m(x)\le\dfrac{1}{k}\}$ 为闭集，因此收敛点集为 $F_{\sigma\delta}$ 集。

3. (P55 习题 1.19)

   先说明每点左极限存在。假设在点 x 处左上极限 a 大于左下极限 b，分别找趋于 a 的子列 $f(a_n)$ 与趋于 b 的子列 $f(b_n)$。

   由于极限保序，可分别取出子列 (此后子列仍记为 a_n,b_n) 使得任意 a_i 的函数值大于任意 b_j。

   对 a_n，由于 $\lim_{n\to\infty}a_n=x,\lim_{n\to\infty}f(a_n)=a,x\ge a_i,a\ge f(a_i)$，可取出单调增趋于 x 的子列，进一步从中取出函数值单调增趋于 a 的子列 a_n，同理可取出单调增趋于 x 且函数值单调减趋于 b 的子列 b_n。

   利用极限性质，可进一步取出子列满足 $a_1<b_1<a_2<b_2<\dots$。

   任取 $f(a_1)<t<f(b_1),t\in\mathbb{Q},t\ne f(x)$，利用介值性可知每个 a_i,b_i 之间都存在值为 t 的点，从而存在 $x_n\to x$ 使得 $f(x_i)=t$，但 $f(x)\ne t$，与闭集矛盾。

   同理可知右极限亦存在，结合介值性即知函数连续。

4. (P55 习题 1.30)

   由 Darboux 定理，导函数具有介值性，再利用习题 1.19 得结果。

5. (P94 习题 2.1)

   先说明 $m(E \cap (0,1)) = 0$。

   由题意，取出一列开区间 I_{1n} 使得 $E \cap (0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{1n}$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{1k}) < q$。接着，对每个 I_{1i}，取出一列开区间使 $E \cap I_{1i} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) < qI_{1i}$，由于 $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N}$，对每个 I_{1i} 取出的这些 I_k 仍为可数个，重新排列为 I_{2i}，则 $E \cap (0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{2i}$，且 $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{2k}) < q \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{1k}) < q^2$。由此，可构造出总长度小于任意 q^n 的开区间列覆盖 $E \cap (0,1)$，从而 $m(E \cap (0,1)) = 0$。

   由于 $E \subset \big(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E \cap (k, k+1)\big) \cup \mathbb{Z}$，后方为可数个零测集，故 $m(E) = 0$。

6. (P94 习题 2.2)

   对任意点集 T，$m^*(T) = m^*(T \cap A_1) + m^*(T \cap A_1^c)$。由于 $A_1 \subset A_2$，$m^*(T \cap A_1^c) \geq m^*(T \cap A_2^c)$。另一方面，$m^*(T \cap A_2) \leq m^*(T \cap A_1) + m^*(A_2 \backslash A_1)$。若 $m^*(A_2 \backslash A_1) > 0$，则 $m^*(A_2) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2 \backslash A_1) > m^*(A_1)$ 矛盾，由此知其为 0，故 $m^*(T \cap A_2) \leq m^*(T \cap A_1)$。综合两式可知 $m^*(T) \geq m^*(T \cap A_2) + m^*(T \cap A_2^c)$，由此 A_2 可测。

7. (P94 习题 2.7)

   $\overline{\lim}_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{t=n}^{\infty} E_t$。由于后方为递减可测集列可知

$$m\big(\overline{\lim}_{k=1}^{\infty} E_k\big) = \lim_{n=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{t=n}^{\infty} E_t\right) \geq \lim_{n=1}^{\infty} \sup_{t=n}^{\infty} m(E_t) = \overline{\lim}_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$

8. (P94 习题 2.8)

   由于 $m(E_k) = 1$，可知 $m([0,1] \backslash E_k) = 1 - 1 = 0$，有 $m\big(\bigcup_{k=1}^{\infty}([0,1] \backslash E_k)\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m([0,1] \backslash E_k) = 0$，故其为 0。而 $\bigcup_{k=1}^{\infty}([0,1] \backslash E_k) = [0,1] \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$，由此 $m\big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\big) = 1$。

4 第四次作业

1. (P78 思考题 1)

   先说明第二句：若 $\mathring{E} \neq \varnothing$，$\exists B(x, \varepsilon) \subset E$，由此 $m(E) \geq 2\varepsilon$，不可能为 0。

   由于 $m(E) = 1$，$m([0,1] \backslash E) = 0$，由上方证明知 $[0,1] \backslash E$ 无内点，又由 $E \subset [0,1]$ 知 $\bar{E} = [0,1]$。

2. (P78 思考题 2)

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = m^*\left(A_1 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) + m^*\left(A_1^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = m^*(B_1) + m^*\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right)$$

   由此归纳知 $m^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) \geq \sum_{i=1}^{k} m^*(B_i)$ 对任意 k 成立，又由于 $m^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(B_i)$，取极限可知只能相等。

3. (P78 思考题 5)

   由于 $m(E) = \lim_{n \to \infty} m(E \cap B(0,n))$，必然存在某个 n 使得 $m(E \cap B(0,n)) > \alpha$，从而不妨设 $E \subset [-n, n]$ 有界，由此只需寻找 E 中闭集。

   由 E 可测，$m^*([-n,n] \backslash E) = 2n - m(E)$，由外测度定义，存在可数个开区间并集 (记为 U) 覆盖 $[-n,n] \backslash E$，且总测度为大于 $2n - m(E)$ 的任何数，令其为 $2n - \alpha$。

   由于 U 为开集，U^c 为闭集，故 $U^c \cap [-n,n]$ 为闭集，且测度为 $2n - (2n - \alpha) = \alpha$，又由定义知其包含于 E，由此得证。

4. (P94 习题 2.9)

   记 $F_i=[0,1]\backslash E_i$，则 $\bigcap_{i=1}^k E_k=[0,1]\backslash\bigcup_{i=1}^k F_i$，由 $m\left(\bigcap_{i=1}^k E_k\right)=0$ 知 $m\left(\bigcup_{i=1}^k F_i\right)=1$，有

$$\sum_{i=1}^k m(E_i)=k-\sum_{i=1}^k m(F_i)\leq k-m\left(\bigcup_{i=1}^k F_i\right)=k-1$$

   由此得矛盾。

5. (P84 思考题 2)

   $m^*(B)=m^*(A\cap B)+m^*(A^c\cap B),m^*(A\cup B)=m^*(A\cap(A\cup B))+m^*(A^c\cap(A\cup B))=m^*(A)+m^*(A^c\cap B)$，综合两式得证。

6. (P95 习题 2.12)

   记 $C_k=B_k\backslash\bigcap_{k=1}^\infty B_k$，则 C_k 可测，有 $m^*(A\cap B_k)=m^*(A\cap B_k\cap C_k)+m^*(A\cap B_k\cap C_k^c)=m^*(A\cap C_k)+m^*(E)$，由于 $\lim_{k\to\infty}(B_k)=\bigcap_{k=1}^\infty B_k$，由可测知 $\lim_{k\to\infty}m(C_k)=0$，由夹逼原理知 $\lim_{k\to\infty}m^*(A\cap C_k)=0$，从而得证。

7. (P95 习题 2.13)

   是等测包。

   若 H 不是等测包，可知 $m(H)>m^*(E)$，任取 E 的等测包 H^*，记 $H'=H\cap H^*$，其可测，由 $m^*(E)\leq m(H')\leq m(H^*)$ 可知 H' 亦为等测包。由此 $m(H\backslash H')=m(H)-m(H')=m(H)-m^*(E)>0$，但此集合为 $H\backslash E$ 的可测子集，矛盾，从而得证。

8. (P95 习题 2.14)

   充分：对任意点集 A，由 G_1,G_2 关系可知

$$m^*(A)=m^*(A\cap G_1)+m^*(A\cap G_1^c)\geq m^*(A\cap G_1)+m^*(A\cap G_2)-m^*(A\cap(G_2\backslash G_1^c))$$

$$\geq m^*(A\cap G_1)+m^*(A\cap G_2)-m^*(G_2\backslash G_1^c)=m^*(A\cap G_1)+m^*(A\cap G_2)-m^*(G_2\cap G_1)$$

$$=m^*(A\cap G_1)+m^*(A\cap G_2)-\varepsilon\geq m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)-\varepsilon$$

   令 $\varepsilon\to 0$ 可知 $m^*(A)\geq m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$，从而 E 可测。

   必要：由定理 2.13，构造包含 E 的开集 G，与 E 包含的闭集 H 满足 $m(G\backslash E)<\frac{\varepsilon}{2},m(E\backslash H)<\frac{\varepsilon}{2}$，再取 $G_1=H^c,G_2=G$ 可验证成立。

5 第五次作业

1. (P107 思考题 1)

   由可测定义，$\forall t\geq 0,\{x:f^2(x)>t^2\}$ 可测，即 $\{x:f(x)>t$ 或 $f(x)<-t\}$ 可测，与 $\{x:f(x)>0\}$ 及其补取交可知对非负的 t，$\{x:f(x)>t\},\{x:f(x)<-t\}$ 可测，而 $\{x:f(x)>-t\}=\bigcup_{n=1}^\infty\{x:f(x)<-t+\frac{1}{n}\}^c$，从而可测，综合可知 $f(x)$ 可测。

2. (P109 思考题 6)

   未必。$f(x)=0$，$g(x)$ 为迪利克雷函数即为反例。

3. (P126 习题 3.2)

   由 z 连续，$(t,+\infty)$ 的原像为 $\mathbb{R}^2$ 中开集 U，由 $g_1(x),g_2(x)$ 可测，$(g_1(x),g_2(x))$ 可测，由此 U 在 $(g_1(x),g_2(x))$ 下的原像可测，即 $\{x:F(x)>t\}$ 可测，即得证。

4. (P126 习题 3.3)

   利用右连续考虑振幅知 $f(x)$ 不连续点至多可数，故几乎处处连续，可测，而 $f'_+(x) = \lim_{n\to\infty} n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$，为可测函数列极限，仍然可测。

5. (P119 思考题 1)

   正确。同减去 $f(x)$ 后可不妨设 $f_n(x)$ 几乎处处收敛到 0，下证 $g(x)$ 几乎处处为 0。

   若 $m(\{x : |g(x)| > 0\}) > 0$，由 $\{x : |g(x)| > 0\} = \lim_{n\to\infty}\{x : |g(x) > \frac{1}{n}|\}$ 考虑测度极限可知存在 $\varepsilon > 0$ 使 $m(\{x : |g(x)| > \varepsilon\}) > 0$，记其为 δ。由依测度收敛定义，$\exists N, \forall n > N, m(\{x : |f_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}) < \frac{1}{2}\delta$，从而至少有 $\delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta$ 长度使得 $|f_n(x)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > N$，与几乎处处收敛到 0 矛盾。

6. (P119 思考题 4)

   是。其几乎处处有限，且除 $x = 0, \pi$ 外收敛于 0，由定理 3.14 知依测度收敛。

7. (P127 习题 3.12)

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon > 0, \lim_{k\to\infty} m(\{x : |f_k(x)g_k(x)| > \varepsilon\}) &\le \lim_{k\to\infty} m\big(\{x : |f_k(x)| > \sqrt{\varepsilon}\} \cup \{x : |g_k(x)| > \sqrt{\varepsilon}\}\big) \\ &\le \lim_{k\to\infty} \big(m(\{x : |f_k(x)| > \sqrt{\varepsilon}\}) + m(\{x : |g_k(x)| > \sqrt{\varepsilon}\})\big) = 0\end{aligned}$$

   从而得证。

8. (P109 思考题 7)

   未必。$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$，可发现不存在这样的 g。

6 第六次作业

1. (P119 思考题 5)

   取 $f_n(x) = \frac{1}{n}$ 即为反例。

2. (P119 思考题 6)

   必有几乎处处收敛。由单调可知存在逐点收敛极限 $f(x)$(值为有限或 $-\infty$)，对任何 ε, δ，$\exists N, n > N, m(\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\}) < \delta$。若存在 $f_k(x)$ 在某正测集上小于 0，取有界闭子集，设其中最小模为 ε，测度为 δ，即可得矛盾。由此知 $f(x) \ge 0$ 几乎处处成立，若在某正测集大于 0，取有界闭子集，设其中最小模为 ε，测度为 δ，利用 $f_n(x) > f(x)$ 知矛盾。

3. (P123 思考题 1)

   取 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ 即为反例，由连续函数振幅为 0，必有 0 附近某邻域与 $f(x)$ 几乎处处不等。

4. (P123 思考题 2)

   取连续函数列 $f_n(x)$ 几乎处处逼近可测函数，再利用 Bernstein 多项式一致连续逼近 $f_n(x)$，取出 $P_n(x)$ 使 $\forall x \in [a, b], |P_n(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$，则 $f_n(x)$ 收敛处 $P_n(x)$ 收敛于相同结果，从而得证。

5. (P189 习题 4.1)

   若 $m(E) > 0$，记 $K = \{x : f(x) = 0\}$，则 $m(E\backslash K) = m(E)$。由 Lusin 定理，取有界闭集 $F \subset E\backslash K, m(F) > \frac{m(E)}{2}$ 使得 f 为 F 上的恒正连续函数，由其紧可取到最小值 t，因此 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \ge \frac{m(E)}{2}t > 0$，矛盾。

7 第七次作业

1. (P143 思考题 9)

   定义 $g_k(x)=\max_{n=1}^k f_n(x)$，则其亦非负可测，满足逐点收敛，利用非负渐升列积分定理得证。

2. (P149 思考题 3)

   $\int_E kI_{\{x:|f(x)|>k\}}\le\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=t$，由此 $m(\{x:|f(x)|>k\})\le\frac{t}{k}$，从而得证。

3. (P159 思考题 4)

   由于 $f_k(x)=f(x)I_{E_k}$ 满足依测度收敛于 0 且绝对值不超过 $|f(x)|$，由控制收敛定理可知结论。

4. (P189 习题 4.9)

   由积分可数可加性与 $\mathbb{R}$ 上开集为至多可数个不交开区间，假设一列开区间构成 $U=\bigcup_n(a_n,b_n)$ 覆盖 E，则 $\int_U f(x)\mathrm{d}x=\sum_n\int_{a_n}^{b_n}f(x)\mathrm{d}x$，将每个平移可知 $\ge\int_{[0,t]}f(x)\mathrm{d}x$，又由于可使 $m(U)-m(E)<\varepsilon$，且 $f(x)\le f(1)=M$，可知对任何 ε，$\int_E f(x)\mathrm{d}x+M\varepsilon\ge\int_{[0,t]}f(x)\mathrm{d}x$，即得证。

5. (P159 思考题 3)

   当 $t\ge0,x,x_0>0$ 时，$\left|\frac{1}{x+t}-\frac{1}{x_0+t}\right|=\left|\frac{x-x_0}{(x+t)(x_0+t)}\right|\le\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|$，从而 $|g(x)-g(x_0)|\le\int_0^\infty\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right||f(t)|\mathrm{d}t$，由 $f\in L((0,+\infty))$ 知 $x\to x_0$ 时 $|g(x)-g(x_0)|\to0$，从而连续。

6. (P160 思考题 6)

   由一致收敛定义，可取 N 使 $n>N$ 时 $|f_n(x)-f(x)|<1$，从而 $|f_n(x)|<|f_{N+1}(x)+2|$。由区域测度有限知常数可积，因此可积函数之和可积，从而由控制收敛定理知结论。

7. (P190 习题 4.10)

   假设 $E\subset B(0,R)$。由 $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x$ 存在可知正项级数 $\int_{nR<|x|<(n+1)R}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，从而极限为 0，因此任何 ε 可取 N 使得 $n>N$ 时 $\int_{nR<|x|<(n+1)R}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$，再取 $|y|>NR$，E 一定可以包含在两个 $nR<|x|<(n+1)R$ 中，从而 $\int_{\{y\}+E}f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$，即得证。

8. (P191 习题 4.12)

   记 $x'=ax$ 可不妨设 $a=1$。$S(x)$ 由定义知以 1 为周期，记此级数绝对和为 $T(x)$。

   利用可数零测集之并零测，假设 $T(x)$ 在某非零测集 E_0 上不收敛，存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使 $T(x)$ 在 $E=E_0\cap[k,k+1]$ 上不收敛，由此利用单调收敛定理可知

   $$\int_E T(x)\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_E|f(x+n)|\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{E+\{n\}}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{E+\mathbb{Z}}|f(x)|\mathrm{d}x$$

   但 $T(x)$ 在 E 上处处为无穷，矛盾。同理，由于 $\int_{[0,a]+\mathbb{Z}}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{[0,a]}T(x)\mathrm{d}x$，可知 $S(x)$ 在 $[0,a]$ 可积，

8 第八次作业

1. (P190 习题 4.13)

   $\sum_{n=1}^\infty\int_{\mathbb{R}}n^{-p}|f(nx)|\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty n^{-1-p}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$，从而由逐项积分定理得证。

2. (P190 习题 4.14)

由于 $\forall x>0, |x^u|<|x^s|+|x^t|$，从而 $\int_{\mathbb{R}^+}|x^u f(x)|\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^+}(|x^s f(x)|+|x^t f(x)|)\mathrm{d}x<\infty$，由此知可积，记为 $\varphi(u)$。

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)| \le \int_0^1 |x^\delta - x^{u_0-u+\delta}||x^{u-\delta}f(x)|\mathrm{d}x + \int_1^\infty |x^{-\delta}-x^{u_0-u-\delta}||x^{u+\delta}f(x)|\mathrm{d}x$$

取 $\delta>0$ 满足 $B(u,\delta)\subset(s,t)$，当 $u_0-u\to 0$ 时，$|x^{-\delta}-x^{u_0-u-\delta}|, x>1$ 与 $|x^\delta - x^{u_0-u+\delta}, x\in(0,1)|$ 都一致趋于 0，因此 $|\varphi(u)-\varphi(u_0)|\to 0$，从而连续。

3. (P190 习题 4.15)

   若 f 在某正测集上大于 1，利用 Lusin 定理，设在其中某正测闭集上最小值 $1+\varepsilon$，计算知高次方会超过 c，矛盾，由此 f 几乎处处不超过 1。若在某正测集上大于 0 小于 1，可设在其中某正测闭集上值落在 $[\varepsilon,1-\varepsilon]$ 以内，可发现 $\int_{[0,1]}f^2(x)\mathrm{d}x<\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x$，从而矛盾。由此 $f(x)$ 几乎处处为 0 或 1，再由可积知为 1 的点落在可测集上。

   对一般的 f，先考虑 $f^{2n}(x)$ 可知 $f^2(x)$ 几乎处处为 0 或 1，若 $f(x)$ 在某正测集上为 -1，则有 $\int_{[0,1]}f^2(x)\mathrm{d}x>\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x$，矛盾，从而结论仍成立。

4. (P190 习题 4.16)

   由可积知几乎处处有限。对某个函数值有限的 x，$n\to\infty$ 时 $n\ln\left(1+\frac{f^2(x)}{n^2}\right)\sim\frac{f^2(x)}{n}\to 0$，再由 $\ln(1+x^2)\le x$ 知不超过 $|f(x)|$，从而由控制收敛定理得证。

5. (P190 习题 4.17)

   $\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1}f(x)I_{E_k}\mathrm{d}x$，集合由极限定义知 $\lim_{n\to\infty}I_{E_n}=I_E$，再利用 $|f(x)I_{E_k}|\le|f(x)|$ 在 E_1 上利用控制收敛定理得证。

6. (P190 习题 4.18)

   记 $E_1=\{x\in E: f(x)\le 1\}, E_2=\{x\in E: f(x)>1\}$，分别利用控制收敛定理与单调收敛定理即得 $\int_{E_1}f(x)^{1/k}\mathrm{d}x\to m(E_1), \int_{E_2}f(x)^{1/k}\mathrm{d}x\to m(E_2)$，而 E_1,E_2 不交，从而 $m(E_1)+m(E_2)=m(E)$，即得结论。

7. (P190 习题 4.19)

   记 $g_k(x)=\min(f_k(x),f(x)), h_k(x)=\max(f_k(x),f(x))$，由 $|g_k(x)-f(x)|+|h_k(x)-f(x)|=|f_k(x)-f(x)|$ 知仍依测度收敛。利用控制收敛定理可知 $\int_E g_n(x)\mathrm{d}x\to\int_E f(x)\mathrm{d}x$，由 $g_k(x)+h_k(x)=f(x)+f_k(x)$ 得 $\int_0^1 h_n(x)\mathrm{d}x\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。对任何子区间，若有 $\int_E h_n(x)\mathrm{d}x$ 不收敛于 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$，利用 $h_n(x)\ge f(x)$ 知可取出 $\int_E(h_{n_k}(x)-f(x))\mathrm{d}x>\varepsilon$ 的子列，则 $\int_0^1(h_{n_k}(x)-f(x))\mathrm{d}x>\varepsilon$，矛盾。再次利用 $g_k(x)+h_k(x)=f(x)+f_k(x)$ 即得证。

8. (P192 习题 4.20)

   由于 $\lim_{k\to\infty}\max_{i=1}^k f_i(x)=\max_{i=1}^\infty f_i(x)$，利用单调收敛定理可知 $\max_{i=1}^\infty f_i(x)$ 在 E 上可积，再由 $f_k(x)\le\max_{i=1}^\infty f_i(x)$ 利用控制收敛定理得证。

9. (P192 习题 4.21)

   对于其中任何满足 $\lim_{k\to\infty}\int_E f_{n_k}(x)\mathrm{d}x$ 存在的子列，可从中取出几乎处处收敛子列，由 Fatou 引理得极限 $\ge\int_E f(x)\mathrm{d}x$，即得证。

9 第九次作业

1. (P192 习题 4.22)

   设积分结果为 $I(t)$，由于积分内求导后为 $-2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2xt$，其模不超过 $2x\mathrm{e}^{-x^2}$，因此

   $$I'(t)=\int_{[0,\infty)}-2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2xt\mathrm{d}x=\int_{[0,\infty)}\sin 2xt\mathrm{d}\big(\mathrm{e}^{-x^2}\big)$$

   分部积分知 $I'(t)=-2tI(t)$，结合 $I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 即得结果。

2. (P192 习题 4.23)

   由于不可能在非零测集上有 $f_k(x)>f_{k+1}(x)$，$f_k(x)$ 几乎处处单调递增，而零测集的可数并仍然零测，故去掉某零测集 Z 后 $f_k(x)$ 单调递增，因此存在极限 $f_0(x)$。又由于任何可测集上积分都收敛，$f_0(x)>f(x)$ 与 $f_0(x)<f(x)$ 的点集测度均为 0，由此得证。

3. (P189 习题 4.3)

   记 $E_k'=\bigcup_{i=1}^k E_k$，再记 $f_k(x)=f(x)\chi_{E_k'}(x)$，则 $f_k(x)$ 关于 k 单调不减且几乎处处收敛于 $f(x)$，在 E 上利用单调收敛定理即得证。

4. (P189 习题 4.4)

   利用积分对定义域可数可加可知 $\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{[k,k+1)}f(x)\mathrm{d}x$，由 $f(x)$ 非负知后为正项级数，因此若积分不为 0 可知存在 n 使 $\int_{(-\infty,n]}f(x)\mathrm{d}x=t>0$，由于 $F(x)$ 非负可知 $c\geq n$ 时 $F(x)\geq t$，从而 $\int_{(-\infty,c]}F(x)\mathrm{d}x\geq(c-n)t$，$c\to\infty$ 时极限不存在，同样利用可数可加性知不可积。

5. (P190 习题 4.5)

   由条件可知 $f_{k+1}(x)\geq f_k(x)$ 几乎处处成立，由于零测集可数并仍零测，在某零测集 Z 之外 $f_k(x)$ 关于 k 单调不减，由单调收敛定理可知 $E\backslash Z$ 上积分与极限可交换，再由积分绝对连续性知结论。

6. (P190 习题 4.8)

   假设 $m(\{x:f(x)>1\})>0$，由 $\{x:f(x)>1\}=\bigcup_{n=1}^\infty\{x:f(x)>1+\frac{1}{n}\}$ 可知存在某个 $\{x:f(x)>1+\frac{1}{n}\}=t>0$，由此任何 $|\chi_{E_k}(x)-f(x)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上积分至少为 $\frac{t}{n}$，不收敛于 0，矛盾。同理可证 $m(\{x:0<f(x)<1\})=0,m(\{x:f(x)<1\})=0$，因此 $f(x)$ 几乎处处为 0 或 1。再由每个 χ_{E_k} 可积可推出 $f(x)$ 可测，从而几乎处处为某可测集的特征函数。

10 第十次作业

1. (P193 习题 4.29)

   由于 $g(x)$ 为实值函数，E 测度有限，$\bigcap_{n=1}^\infty\{x:g(x)>n\}=\varnothing$，可知必有 n 使得 $m(\{x:g(x)>n\})<\frac{m(E)}{2}$，由此 $m(\{x:g(x)\leq n\})\geq\frac{m(E)}{2}$，记 $E_0=\{x:g(x)\leq n\}$，由可积知 $\int_{E\times E_0}|f(x)+g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$，而 $|f(x)+g(y)|\geq|f(x)|-n$，由此

   $$\int_{E\times E_0}|f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\int_{E\times E_0}|f(x)+g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+n\cdot m(E\times E_0)<\infty$$

   利用 Tonelli 定理由 f 可测知可积，同理 y 可积。

2. (P193 习题 4.30)

   (i) 由 Tonelli 定理知可交换次序，于是原式化为 $\frac{\pi}{2}\int_{y>0}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)\sqrt{y}}=\pi\arctan\sqrt{y}\big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{2}$。

   (ii) 由 (i) 对 y 积分即可得到此题的式子的两倍，因此结果为 $\frac{\pi^2}{4}$。

3. (P193 习题 4.31)

   利用 Tonelli 定理可知 $m(E)\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} F(x)\mathrm{d}x < \infty$，又由非负可测知可积。

4. (P189 习题 4.1)

   由 $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) > \frac{1}{n}\}$ 与测度可数可加知若 $m(E) > 0$，必有某个 n 使得 $m(\{x : f(x) > \frac{1}{n}\}) = t > 0$，从而积分至少为 $\frac{t}{n}$，矛盾。

5. (P189 习题 4.2)

   由条件知 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = t$ 存在，由极限定义知存在 δ 使得 $|x| < \delta$ 时 $\frac{f(x)}{x} \in (t-1, t+1)$，从而

   $$\left|\int_{[0,+\infty)}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{[0,\delta]}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{[\delta,+\infty)}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right| < \delta(|t|+1) + \frac{1}{\delta}\int_{[\delta,+\infty)}|f(x)|\mathrm{d}x$$

   因此有限，再由可测知积分存在。

6. (P162 思考题 7)

   令 $E_k = \{x \in E : |\cos x| < 1 - \frac{1}{k}\}$，由于 $\lim_{k\to\infty} E_k = E\backslash Z$，$Z$ 为 $|\cos x| = 1$ 的零测集，因此由 $\int_{E\backslash Z} f(x)\mathrm{d}x = 1$ 与单调收敛定理可知存在 E_n 使得 $\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x > \frac{1}{2}$，而其上 $\int_{E_n} f(x)|\cos x|\mathrm{d}x \leq (1-\frac{1}{n})\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2n}$，由此 $\int_E f(x)\cos x\mathrm{d}x \leq \int_E f(x)|\cos x|\mathrm{d}x \leq 1 - \frac{1}{2n} < 1$，即得证。

7. (P162 思考题 8)

   $\forall\varepsilon > 0, m(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \frac{1}{n^2\varepsilon}$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} m(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \infty$，利用 Borel-Cantelli 引理知 $m(\limsup_{n\to\infty}\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$，此即为几乎处处收敛的等价定义。

8. (P163 思考题 9)

   由于右侧级数绝对收敛，将每项写为积分形式后利用逐项积分定理即得证。

9. (P163 思考题 10)

   对 $y_n \to y$，由连续知 $\forall x, f(x, y_n) \to f(x, y)$，又由于其不超过 $g(x)$，且 $g(x)$ 可积，可知每个 $f(x, y_n)$ 对 x 可积，利用控制收敛定理知 $\lim_{n\to\infty}\int_E f(x, y_n)\mathrm{d}x = \int_E f(x, y)\mathrm{d}x$，即得证。

11 第十一次作业

1. (P193 习题 4.32)

   由 Tonelli 定理，

   $$\int_0^{\infty}|F(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\chi_{t<x}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}t\int_0^{\infty}|f(t)|\chi_{t<x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}|tf(t)|\mathrm{d}t < \infty$$

   从而存在，同理 $F(x)$ 在负数上也可积，因此在实轴可积。

2. (P193 习题 4.33)

   法一：将积分区间分为 $[0, \varepsilon]$ 与 $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$，前一部分不超过 $\frac{\pi}{2}\varepsilon$，后一部分中 $\arctan nx$ 一致趋于 $\frac{\pi}{2}$，因此极限与积分可交换，令 $\varepsilon \to 0$ 即知整体极限与积分可交换，从而计算结果为 $\frac{\pi}{2}$。

   法二：由于区间上积分有界可直接利用控制收敛定理即得结果。

3. (P193 习题 4.34)

   类似习题 4.32，将积分记为 $\frac{f(t)}{t}\chi_{t>x}$ 即可交换。

4. (P192 习题 4.24)

   利用 Fatou 引理，$\int_{\mathbb{R}}(g(x) \pm f(x))\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(g_n(x) \pm f_n(x))\mathrm{d}x$，由此提出 $g(x)$ 可知

   $$\int_{\mathbb{R}} \pm f_n(x)\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \pm f_n(x)\mathrm{d}x$$

   再由 $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \geq \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ 可知结论。

5. (P192 习题 4.25)

   也即说明有可列极限点的点集 E 零测。假设极限点集 $F = \{x_1, x_2 \dots\}$，考虑

   $$F_n = [a,b] \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} B\left(x_i, \frac{1}{2^i n}\right)$$

   F_n 中每个点可取出没有其他 E 中点的邻域，考虑有限覆盖知 $F_n \cap E$ 中只有有限个点，因此并中至多可列个点。而 $[a,b] = F \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，从而 E 可列，因此零测。

6. (P192 习题 4.26)

   考虑 $\omega(x) > \frac{1}{n}$ 的点，由每点有极限可取出足够接近区间，利用有限覆盖知有限，由此对 $\frac{1}{n}$ 取并可知不连续点可数，从而得证。

7. (P192 习题 4.27)

   可发现 $\chi_E(x)$ 的不连续点即为不在 E 中的 E 的极限点与不在 E^c 中的 E^c 极限点,即为 $\overline{E}\backslash E \cup \overline{E^c}\backslash E^c$，而 $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$，从而即为 $\overline{E}\backslash E^\circ$，即得证。

12 第十二次作业

1. (P211 思考题 1)

   不可能有原函数。若其有原函数 $F(x)$，由导函数处处非负知单调。利用 Lebesgue 定理可知导函数勒贝格可积，从而矛盾。

2. (P211 思考题 2)

   由于 $G(t)$ 连续与 $F'(t)$ 的定义，计算可发现右侧积分求导即为 $G(x)F'(x)$，从而题中构造求导即得 $g(x)F(x)$，由此得证。

3. (P241 习题 5.2)

   类似 P210 例 5 的构造，将 r_n 改换为 x_n 即可。由一致收敛性，每个函数的连续点必然为和函数的连续点，从而知满足条件。

4. (P241 习题 5.3)

   若否，假设在某正测集 $B \subset E$ 上非零，可取出测度为 t 的正测集 $C \subset B$ 使得 C 上导函数 $f'(x) \geq \delta > 0$。取 $\varepsilon < t\delta$ 即有 $\sum_i [f(b_i) - f(a_i)] \geq \int_E f'(x)\mathrm{d}x \geq \int_C f'(x)\mathrm{d}x \geq t\delta > \varepsilon$，矛盾。

5. (P231 思考题 1)

   不妨设 $y > x$，则 $|f(y) - f(x)| = \int_x^y f'(x)\mathrm{d}x \leq \int_x^y |f'(x)|\mathrm{d}x \leq M(y-x)$，从而得证。

6. (P232 思考题 3)

   利用定理 5.10 与定理 5.14，设和函数 f，则 $f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(x)\mathrm{d}x$，由于 $f_n'(x)$ 非负，由单调收敛定理可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(x)\mathrm{d}x = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\mathrm{d}x$，即得证。

13 第十三次作业

1. (P218 思考题 8)

   当：$F(b)-F(a)$ 即为所求界。

   仅当：记 $F(x)=\bigvee_a^x f$，由于 $\bigvee_a^{x''} f \geq \bigvee_a^{x'} f + \bigvee_{x'}^{x''} f$，可知 $F(x)$ 满足要求。

2. (P218 思考题 10)

   假设有 $y>x, f(y)<f(x)$，则取分点 x,y 可知 $\bigvee_a^b f \geq |f(b)-f(y)|+f(y)-f(x)+|f(x)-f(a)| > f(b)-f(a)$，矛盾。

3. (P222 思考题 1)

   记 $f(x)=\chi_E(x)$，由条件可知 $[0,1]$ 中 $f(x)=0$ 的点定义式积分的的极限至少为 l，从而不为 Lebesgue 点，由可积知其零测，即得证。

4. (P222 思考题 2)

   由定义可知 Lebesgue 点为全体无理点 (有理点定义式积分的极限为 1)。

5. (P231 思考题 2)

   由本节例 1 知其绝对连续，导数几乎处处存在，又由导数定义可知其绝对值不超过 M。

6. (P232 思考题 4)

   由条件，$f(x)=f(\varepsilon)+\int_\varepsilon^x f'(t)\mathrm{d}t$ 对任何 $0<\varepsilon\leq x\leq 1$ 成立，而右侧积分对 ε 绝对连续，将 $\varepsilon=\frac{1}{n}$ 取并可知 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 几乎处处存在，从而 $\varepsilon\to 0$ 时积分为 $\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，再由连续性即得 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，因此得证。

7. (P242 习题 5.4)

   引理：当 $g(x)$ 单调增时，$\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 单调增。

   证明：当 $x_2>x_1$ 时，

   $$\frac{1}{x_2}\int_0^{x_2} g(t)\mathrm{d}t \geq \frac{\int_0^{x_1} g(t)\mathrm{d}t}{x_2}+\frac{x_2-x_1}{x_2}g(x_1) \geq (\frac{1}{x_2}+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2})\int_0^{x_1} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} g(t)\mathrm{d}t$$

   由此 $f(x)$ 的 Jordan 分解即对应 $F(x)$ 的 Jordan 分解，从而得证。

8. (P242 习题 5.5)

   根据逐点收敛可知对任何分化，f 的变差为 f_n 的变差的极限，从而不超过 M，由此即有 $\bigvee_a^b f\leq M$。

9. (P242 习题 5.6)

   对任何 ε，可取 δ 使得 $x_1,x_2\in B(x_0,\delta)$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而可作 $||\Delta||<\delta$ 的分划 Δ 使得分划求和与 $\bigvee_a^{x_0}$ 的差距不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$，从而去除最后一个分点 x_0 后分划求和与 $\bigvee_a^{x_0}$ 的差距不超过 ε，由单调有界可知 $\bigvee_a^x$ 必然 x_0 处有右极限，利用上述推导即知为 $\bigvee_a^{x_0}$，同理左极限亦为此，即得证。

14 第十四次作业

1. (P250 思考题 3)

   将 $|f(x)|$ 分为大于等于 1 与小于 1 两部分，第一部分利用非负可测函数单调收敛定理可知收敛，第二部分利用 1 可控制收敛，从而合并后仍收敛。

2. (P253 思考题 5)

   记 $f_0(x)=f(x)^r, g_0(x)=g(x)^r$，由于 $\frac{r}{p}+\frac{r}{q}=1$，对 $f_0(x), g_0(x)$ 应用 Höler 不等式即得结论。

3. (P289 习题 6.1)

   与定义 6.1 后的证明类似，由 $w(x)$ 积分为 1 可找到其大于某 ε 的正测度区间，考虑区间上积分可知大于等于 $||f||_\infty$，而整体通过本性上界控制可知不超过 $||f||_\infty$，从而得证。

4. (P289 习题 6.2)

   若在某正测集上绝对值大于 M，取 f 为此集合的特征函数即得矛盾。

5. (P289 习题 6.4)

   记 $\frac{1}{|x-t|^{1/2}}=k(x,t)$，则

   $$||g||_2^2=\int_0^1\left|\int_0^1 k(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\le\int_0^1\left(\int_0^1 k(x,t)^2\mathrm{d}t\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=||f||_2^2||k(x,t)||_2^2$$

   代入计算即得证。

6. (P289 习题 6.5)

   由三角不等式，$||f(x)-\sin x||_2+||f(x)-\cos x||_2\ge||\sin x-\cos x||_2=\sqrt{\pi}>1$，即矛盾。

7. (P290 习题 6.8)

   $$\int_E f^2(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_E f^2(x)|g(x)|\mathrm{d}x\le||f^2||_{3/2}||g||_3=||f||_3^2||g||_3$$

   由于左右相等可知中间取等，考虑取等条件可知 $|f(x)|=|g(x)|$ 几乎处处成立，且由于

   $$\int_E f^2(x)(|g(x)|-g(x))\mathrm{d}x=0$$

   假设 g 在某正测集上不为 $|f|$ 可推矛盾，从而得证。

8. (P290 习题 6.15)

   由 $2\langle f,g\rangle=||f+g||_2^2-||f||_2^2-||g||_2^2$ 类似定理 6.15 可计算得结论。