

复分析

基本概念: 复数 $z = x + iy$: 复数域 \mathbb{C} .

$$i^2 = -1.$$

x 称为实部, y 称为虚部.

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \rightarrow x + iy.$$

复数运算:

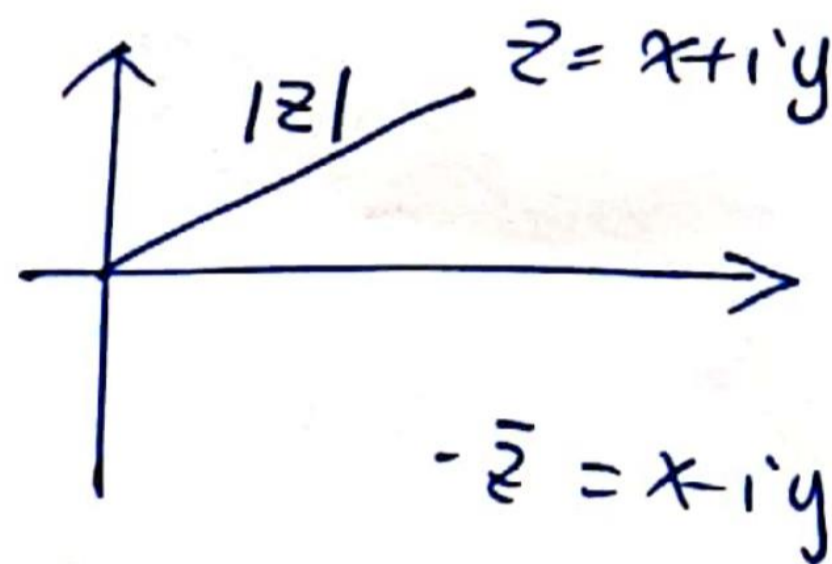
① 加法: $z_1 = x_1 + iy_1$
 $z_2 = x_2 + iy_2$

则 $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

② 乘法: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$
 $= x_1 x_2 + i(y_1 x_2 + y_2 x_1) + i^2 y_1 y_2$
 $= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

③ 模 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

④ 共轭: $\bar{z} = x - iy$



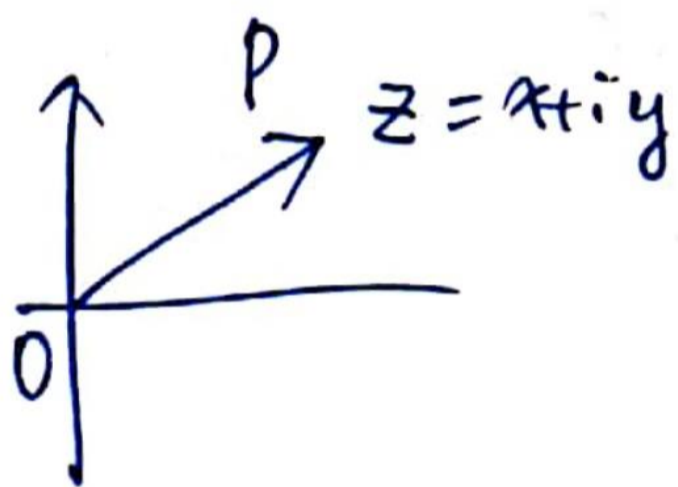
$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases}$$

故 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

几何意义:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \rightarrow x+iy.$$



复数与 \mathbb{R}^2 上点 一一对应

复数与 \mathbb{R}^2 上向量 一一对应.

$$\vec{OP} = (x, y).$$

性质: ① $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$

② $|z+w| \leq |z| + |w|$

$$|z-w| \geq ||z| - |w||$$

③ $|z|^2 = z\bar{z}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, (z \neq 0)$

证: ① $|\operatorname{Re} z| = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

$$|\operatorname{Im} z| = |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z|\cdot|w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2. \end{aligned}$$

极坐标: 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$\text{则 } z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

其中: θ : 定义为 x 轴正向转动到 \vec{Oz} 的角度.

约定: 逆时针转动角度为正

顺时针转动角度为负.

θ 称为 z 的辐角. 若 θ_0 为 z 的一个辐角, 则对任意 $k \in \mathbb{Z}$, $\theta_0 + 2k\pi$ 都是 z 的一个辐角.

故辐角集合可表示为

$$\text{Arg } z = \{ \theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

$\text{Arg } z$ 是 z 的无穷多值函数.

$\text{arg } z$: 称为辐角主值, 定义为 $\text{Arg } z$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中的角度
(或 $[0, 2\pi)$ 中的角度).

则有
$$\text{Arg } z = \{ \text{arg } z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

极坐标运算: $\forall z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$
 $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

加) ① $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

② $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad (r_2 \neq 0)$

③ $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$

④ $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (z_2 \neq 0)$

} 直接验证.

$$\textcircled{5} \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 \quad (\text{集合相等}).$$

$$\cdot \quad \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2 \quad (z_1, z_2 \neq 0).$$

注意集合运算: 设 A, B 为两集合, 则

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$$

$$A - B = \{ a - b \mid a \in A, b \in B \}.$$

問題: $\text{Arg}(z^2) = \# \text{Arg} z + \text{Arg} z = 2 \text{Arg} z ?$

反例: 令 $z=1$, 则 $\arg z = 0$.

$$\text{Arg } 1 = \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots\}$$

$$2\text{Arg } 1 = \{0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \pm 12\pi, \dots\}$$

$$\begin{aligned}\text{Arg } 1 + \text{Arg } 1 &= \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots\} \\ &\quad + \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots\} \\ &= \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots\}.\end{aligned}$$

故 $\text{Arg } 1 + \text{Arg } 1 \neq 2\text{Arg } 1$.

(注意: 若 A 为集合, 则 $2A \neq \{2a \mid a \in A\}$.)

定义: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, (\theta \in \mathbb{R})$ ($e^{i\theta}$ 运算性质与实数 e^x 有同样性质).

例 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1 e^{i\theta_1} \frac{1}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

几何意义: $e^{i\theta} \cdot z$ 表示 \vec{Oz} 向量逆时针旋转 θ 角

如 $iz = e^{\frac{\pi}{2}i} z$ 表示 \vec{Oz} 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角度.

\mathbb{R}^2 中直线方程: $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases}$$

代入 $\frac{1}{2}a(z + \bar{z}) + \frac{b}{2i}(z - \bar{z}) + c = 0$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2i}\right)z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2i}\right)\bar{z} + c = 0$$

令 $B = \frac{a}{2} - \frac{b}{2i}$, 代入 $\bar{B} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2i}\right)$, $B \neq 0$

取 $ax + by + c = 0 \iff \bar{B}z + B\bar{z} + c = 0$, ($B \neq 0$)

圓周方程 $|z - z_0| = R$

$$|z - z_0|^2 = R^2, \quad (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2.$$

$$|z|^2 - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + |z_0|^2 - R^2 = 0.$$

令 $A = 1$, $B = -z_0$, $C = |z_0|^2 - R^2$, 則

$$A|z|^2 + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0,$$

命题: 若 $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, $|B|^2 - AC > 0$, 则

$$(*) \quad A|z|^2 + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0$$

表示圆周或直线, 并且:

① 若 $A = 0$, 则为直线

② 若 $A \neq 0$, 则为圆周

证: 若 $A=0$, 则由假设

$$|B|^2 - AC > 0 \Rightarrow |B|^2 > 0 \Rightarrow B \neq 0$$

$$\text{则 (*) 式} \Leftrightarrow Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \quad (B \neq 0) \quad (\text{为直线})$$

若 $A \neq 0$, 则 (*) 式为

$$z\bar{z} + \frac{B}{A}z + \frac{\bar{B}}{A}\bar{z} + C = 0$$

$$\left(z + \frac{B}{A}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{B}}{A}\right) = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}$$

$$\left|z + \frac{B}{A}\right|^2 = \frac{|B|^2 - AC}{A^2} > 0$$

表示圆周.

扩充复平面与球极投影

在 \mathbb{R}^3 中, 考虑 $S^2: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, 球面

$N(0, 0, 1)$.

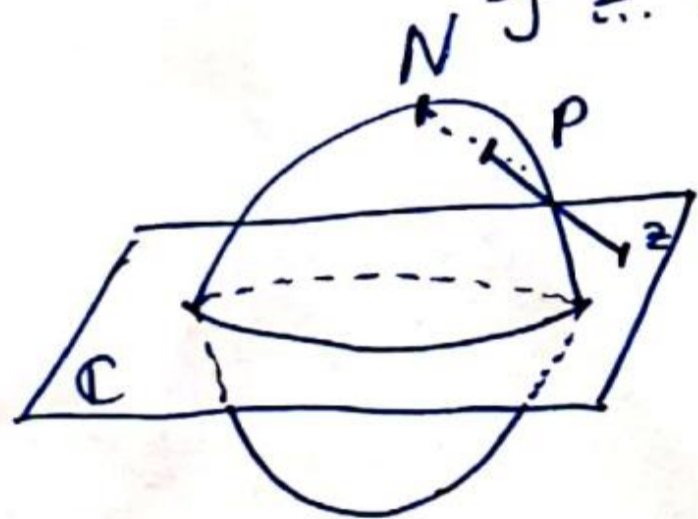
$z = x+iy$ 看作点 $(x, y, 0)$.

给定 z , 在 \mathbb{R}^3 中作直线 Nz , 交 S^2 于点 $P \neq N$

反之, 若 $P \neq N, P \in S^2$, 则直线 NP 交 Oxy 平面

于点 z , 故 \mathbb{C} 与 $S^2 \setminus \{N\}$ 是一一对应的.

$$\mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$$



当 $|z| \rightarrow +\infty$ 时, 点 $P \rightarrow N$.

定义 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 则 $\bar{\mathbb{C}}$ 与 S^2 一一对应, 称为球极投影.

命题: ① 若 $z = x + iy$, 则对应的点 $p \in S^2$ 为:

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

② 若 $p(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, 则对应的复数为:

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

③ 在球极投影下, $S^2 \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}$

不过 N 点的圆周 \leftrightarrow 圆周

经过 N 点的圆周 \leftrightarrow 直线.

故 S^2 上的圆周对应 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的圆周或直线.

因此, $\bar{\mathbb{C}}$ 上的圆周和直线统称为广义圆周.

证明详见方企勤

收敛: 设 $\{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ 是 \mathbb{C} 中数列, 称 $z_n \rightarrow w \in \mathbb{C}$

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |z_n - w| < \varepsilon$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} w \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} w. \end{array} \right.$

记号: $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ a 点的一个邻域

$$\overline{B(a, r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}.$$

$B(\infty, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$, 称为 $z = \infty$ 的邻域.

内点: 称 z_0 是 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 的内点, 若 $\exists r > 0$, $B(z_0, r) \subset \Omega$.

Ω° 为 Ω 内点的集合.

开集: Ω 开 $\Leftrightarrow \Omega = \Omega^\circ \Leftrightarrow \Omega$ 中任何点都是内点.

闭集: Ω 闭 $\Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus \Omega$ 是开集

极限点: z_0 是 Ω 的极限点 $\Leftrightarrow \exists z_n \in \Omega, z_n \neq z_0, z_n \rightarrow z_0$.

闭包: $\bar{\Omega} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \in \Omega \text{ 或 } z \text{ 为 } \Omega \text{ 的极限点} \}$

边界: $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega^\circ$

有界集: Ω 有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0, \sup_{z \in \Omega} |z| \leq M$

直径: $\text{diam}(\Omega) = \sup_{z, w \in \Omega} |z - w|$

紧集: Ω 为 \mathbb{C} 中紧集, 若 Ω 为闭集且有界.

定理: $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为紧集 \Leftrightarrow Ω 中任何点列都有子序列收敛到 Ω 中的点.

\Leftrightarrow Ω 中任何开覆盖都有有限子覆盖.

复导数.

定义 (连续) $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处连续 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$
 $\forall z: |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$

可导: 若极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 存在, 则称 $f(z)$
在 $z = z_0$ 处可导, 记为 $f'(z_0)$.

可微: 若 $f(z)$ 在 z_0 处改变量满足:

$$\Delta f = A(z_0) \Delta z + \rho(\Delta z), \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z} = 0$$

则称 f 在 z_0 处可微, 其中 $\Delta z = z - z_0$, $\Delta f = f(z) - f(z_0)$.

引理: 可导 \Leftrightarrow 可微.

$$\begin{aligned} \text{证: } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A(z_0) \Delta z + \rho(\Delta z)}{\Delta z} \\ &= A(z_0) + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}. \end{aligned}$$

定义: ① 称 $f(z)$ 在区域 D 中全纯, 若 f 在 D 中每点可导.
② 称 $f(z)$ 在 z_0 点全纯, 若 f 在 z_0 点某邻域 $B(z_0, r)$ 中全纯.

例: $f(z) = \bar{z}$ 不连续.

$$\begin{aligned} \text{证: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0+h} - \bar{z}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \begin{cases} 1, & \text{若 } h \in \mathbb{R} \\ -1, & \text{若 } h \in i\mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

故在 z_0 处不可导.

例: ~~f(z)~~ $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ 在 $z=0$ 处可导, 但不全纯.

$$\text{证: } \textcircled{1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z) - f_0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+iy}$$

$$\left| \frac{x^2}{x+iy} \right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = |z| \rightarrow 0.$$

$$\text{或: } \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{\operatorname{Re} z}{z} \cdot \operatorname{Re} z \right|$$

$$\leq \lim_{z \rightarrow 0} |\operatorname{Re} z| \rightarrow 0.$$

$$\leq \lim_{z \rightarrow 0} |z| \rightarrow 0.$$

当 $\operatorname{Re} z_0 \neq 0$ 时, $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处不可导.

原因: ① $z = x + iy_0, x \rightarrow x_0$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 \neq 0$$

② $z = x + iy, y \rightarrow y_0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x_0^2 - x_0^2}{i(y - y_0)} = 0$$

故 f 在 z_0 处不可导.

上例说明: 设 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

u, v 作为 Ω 中 x, y 的 2 元可微函数, 但 f 在 Ω 中不是(复)可微.

定义: (实可微) 若 $f = u(x, y) + i v(x, y)$, u, v 作为 2 元函数在 (x_0, y_0) 处可微, 则称 f 在 z_0 处实可微.

引理: f 在 z_0 处实可微 $\Leftrightarrow f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \overline{\Delta z}$

其中 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ $+ o(|\Delta z|)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

证:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|)$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = v(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|)$$

故 $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$

$$= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

$$- (u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0))$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|) \right)$$

$$+ i \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|) \right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \Delta y$$

$$+ o(|\Delta z|)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|)$$

~~证~~: $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

则 $\overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \frac{1}{2}(\Delta z + \overline{\Delta z}) \\ \Delta y = \frac{1}{2i}(\Delta z - \overline{\Delta z}). \end{cases}$$

故 $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2}(\Delta z + \overline{\Delta z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i}(\Delta z - \overline{\Delta z}) + o(|\Delta z|)$.

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|).$$

定义

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (*)$$

则

$$\Delta f = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \bar{z}} \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)$$

说明: 上述定义(*)的原因:

$$\text{由于 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases} \quad \text{将 } z, \bar{z} \text{ 看作独立变量.}$$

$$\text{则有: } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial y}.$$

结合可导的定义, 有:

引理: f 在 z_0 处可导 (或可微)

$$\Leftrightarrow f \text{ 在 } z_0 \text{ 处实可微, 且 } \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 在 } z_0 \text{ 处实可微, 且 } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{Cauchy-Riemann 方程})$$

证明: 只需证 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow$ Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

$$\text{故 } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

定理: f 在区域 D 中全纯 $\Leftrightarrow f$ 在 D 中实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

例: f 在 z^n 在 \mathbb{C} 上全纯

证明: f 实可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

例: f 在 $(\operatorname{Re} z)^2$ 在 \mathbb{C} 上不连续.

$$\text{证: } f = \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right)^2 = \frac{1}{4}(z + \bar{z})^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \operatorname{Re} z$$

$\forall z_0 \in \mathbb{C}, \exists z_0' \in B(z_0, \delta)$, 使得 $\operatorname{Re} z_0' \neq 0$, 故 f 在 z_0' 不可导.

故 f 在 \mathbb{C} 上任意点 z_0 不连续.

定义: Laplace 算子: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

若 $\Delta u = 0$, $u \in C^2$, 则 u 称为调和函数.

命题: 设 $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$

证:
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) u \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u. \end{aligned}$$

命题: 若 $f = u + iv$, 在 Ω 上全纯, 则 u, v 是 Ω 上调和函数.

证明: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, $\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = 0$, 故 $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$.

(原因: $\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u - iv) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$)

$$\text{故 } \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right) = 0$$

$$\text{故 } \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (f + \bar{f}) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (f - \bar{f}) = 0.$$

故 u, v 是 Ω 上调和函数, (注意 $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$)

定义: (共轭调和函数) 若 u, v 是区域 Ω 上一对调和函数,

且满足
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$
 则称 v 为 u 的共轭调和函数.

定理: 若 Ω 为单连通区域, u 在 Ω 上调和, 则存在 u 的共轭调和函数 v , 使 $u+iv$ 为 Ω 上全纯函数.

证: ① 令
$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \underbrace{-\frac{\partial u}{\partial y}}_P dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_Q dy$$

则
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

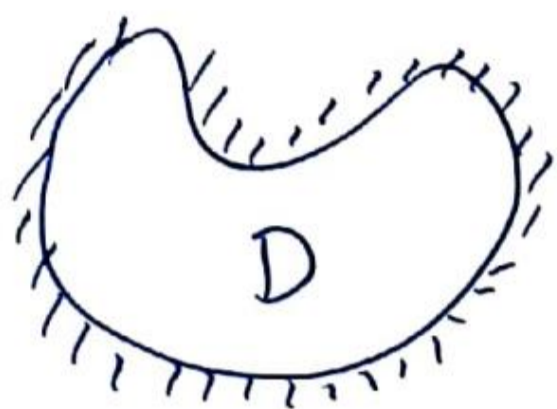
则积分与路径无关, 故 v 是合理定义的函数.

② 验证 u, v 满足 Cauchy-Riemann 方程.

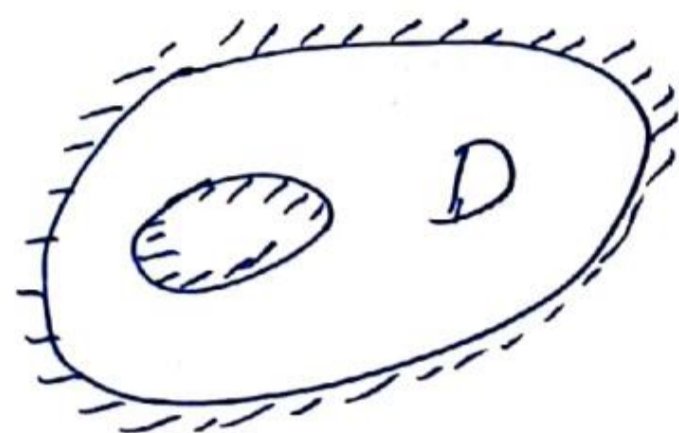
故 $u+iv$ 为 Ω 上全纯函数.

回忆: 单连通: 若区域 D 中任何简单闭曲线内部仍在 D 中

简单闭曲线: 自身不相交的闭曲线.



单连通区域



多连通区域

定理: 若 D 为单连通区域, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上连续, 且有一阶连续的偏导数, 则下面条件等价:

① D 内任一分段光滑的闭曲线 γ ,

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = 0$$

② 在 D 内 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 处处成立.

回忆: Green 公式:

定理: 若函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 Ω 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则有

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial \Omega} P dx + Q dy$$

导数的运算: 若 $f(z), g(z)$ 在区域 Ω 中全纯, 则 $f \pm g, fg$ 也在 Ω 中全纯

且满足: ① $(f \pm g)' = f' \pm g'$

② $(fg)' = f'g + fg'$

③ 若在 Ω 中 $g(z) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 Ω 中全纯且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - gf'}{g^2}$$

④ 若 $\varphi(z) = g(f(z))$ 有定义, 则 $\varphi'(z) = g'(f(z))f'(z)$.

说明: 若 $g(w, \bar{w})$ 为一般函数 (不一定全纯), 则

$$\frac{\partial}{\partial z} (g(f(z))) = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

导数的几何意义: 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 为 \mathbb{C} 上全纯函数.

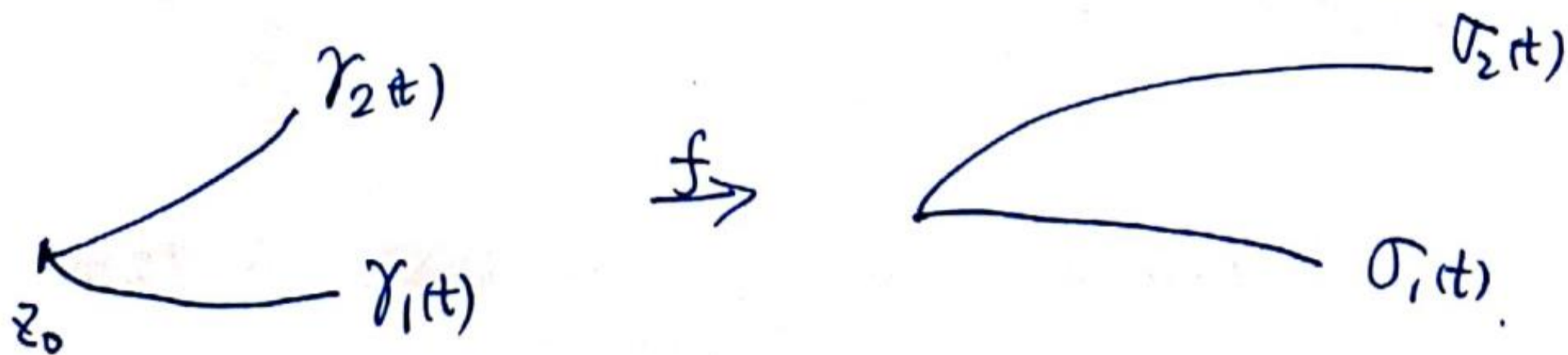
则 f 可看作: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f: (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$$

设 $\gamma(t)$ 为一条光滑曲线, $\gamma(0) = z_0$, $\sigma(t) = f(\gamma(t))$

$$f(z_0) = w_0, \quad (= u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))$$

则 $\sigma(t)$ 为经过 w_0 的曲线.



在 z_0 处, $\gamma_1(t)$ 的切线与 x 轴正向夹角为 $\text{Arg } \gamma_1'(z_0)$

$\gamma_2(t)$ 的切线与 x 轴正向夹角为 $\text{Arg } \gamma_2'(z_0)$

故 z_0 处转动的角度为 $\text{Arg } \gamma_2'(z_0) - \text{Arg } \gamma_1'(z_0)$

设 $\sigma(t) = f(\gamma(t))$

$$\frac{d}{dt} \sigma_1(t) = f'(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t), \quad \frac{d}{dt} \sigma_2(t) = f'(\gamma_2(t)) \gamma_2'(t).$$

若 $f'(z_0) \neq 0$, 则有:

设 $\sigma_1(t)$ 的切线在 w_0 处与 x 轴正向夹角为 $\text{Arg} \sigma_1'(t)$

$$= \text{Arg} f'(z_0) + \text{Arg} \gamma_1'(t)$$

$\sigma_2(t)$ 的切线在 w_0 处与 x 轴正向夹角为 $\text{Arg} \sigma_2'(t)$

$$= \text{Arg} f'(z_0) + \text{Arg} \gamma_2'(t)$$

故 $\text{Arg} \sigma_2'(t) - \text{Arg} \sigma_1'(t) = \text{Arg} \gamma_2'(t) - \text{Arg} \gamma_1'(t)$

故在映射下, 夹角的大小和旋转方向保持不变.

此时称 $f(z)$ 在 z_0 处是保角的 (或共形的).

定理: 若 $f(z)$ 在区域 D 中全纯, 则在 $f'(z) \neq 0$ 处 $f(z)$ 保角

说明: 在 $f'(z) = 0$ 处, $f(z)$ 一定不保角.

一定不保角原因: 若 f 在 z_0 处全纯, 则有展开:

$$f(z) = f(z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots \quad (\text{注意 } f'(z_0) = 0)$$

故 $f(z) - f(z_0) = a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$

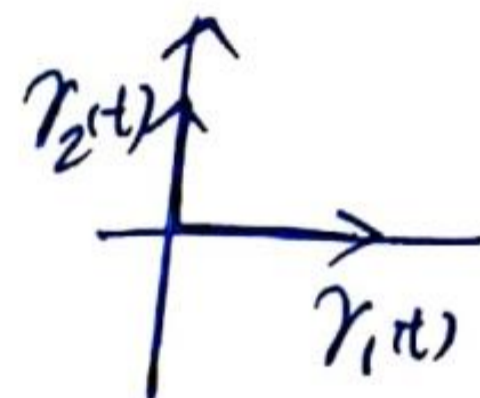
若 $a_2 \neq 0$, 则像曲线之夹角是原像曲线夹角之 2 倍.

若 $a_2 = 0$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, 使得 $a_2 = a_3 = \dots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$,
此时夹角为 m 倍.

例: $f(z) = z^2$, $z_0 = 0$.

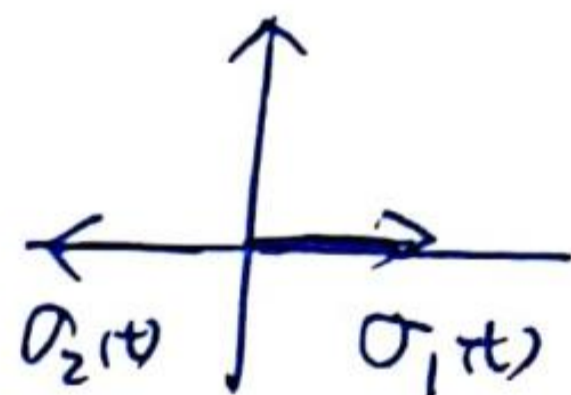
曲线 $\gamma_1(t) = t + i \cdot 0 = t \in \mathbb{C}$, $t \geq 0$

$\gamma_2(t) = 0 + it = it \in \mathbb{C}$, $t \geq 0$.



$\sigma_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^2$

$\sigma_2(t) = f(\gamma_2(t)) = (it)^2 = -t^2$



γ_1, γ_2 在 0 处 夹角为 $\frac{\pi}{2}$, σ_1, σ_2 在 0 处 夹角为 π .

导数模的几何意义:



$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

设 $w = f(z)$, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$

故像点的距离与原像的距离之比在极限与 $|f'(z_0)|$ 有关,
与曲线 γ 无关. 故称 $|f'(z_0)|$ 为 f 在 z_0 处的伸缩率。

例: f 在 $B(0,1) \cup \{1\}$ 上全纯, 且 $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$, $f(1)=1$.

证明 $f'(1) \geq 0$

证: f 在 $z=1$ 处全纯, 故

$$\begin{aligned} f(z) &= f(1) + f'(1)(z-1) + o(|z-1|), \quad \forall z \in B_\delta(1). \\ &= 1 + f'(1)(z-1) + o(|z-1|). \end{aligned}$$

由题设 $|z| < 1$ 时有 $|f(z)| < 1$. 故

$$\left| 1 + f'(1)(z-1) + o(|z-1|) \right| < 1, \quad \forall z: |z| < 1.$$

$$\Leftrightarrow (1 + f'(1)(z-1) + o(|z-1|)) (1 + \overline{f'(1)(z-1)} + o(|z-1|)) < 1$$

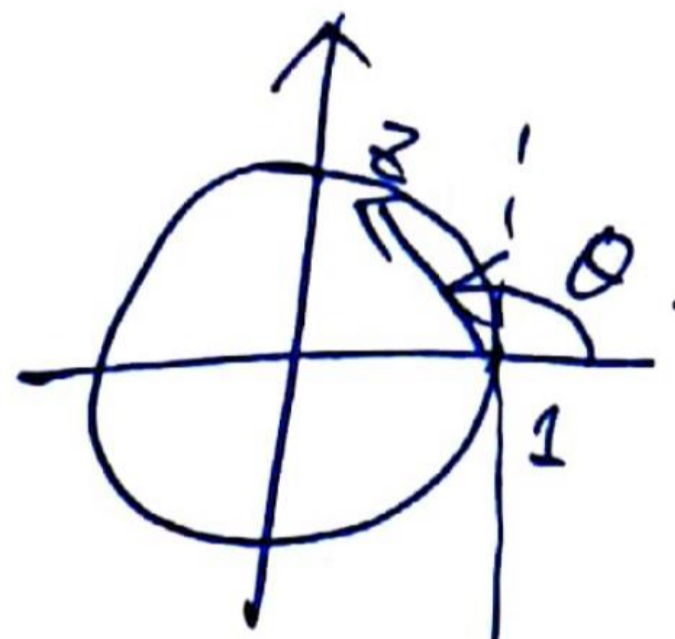
$$\Leftrightarrow 1 + 2 \operatorname{Re}(f'(1)(z-1)) + o(|z-1|) < 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(f'(1)(z-1)) + o(|z-1|) < 0.$$

$$\text{Let } z-1 = re^{i\theta}, \quad \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right).$$

$$\operatorname{Re}(f'(1)re^{i\theta}) + o(r) < 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(f'(1)e^{i\theta}) + o(1) < 0.$$



$$\text{令 } r \rightarrow 0, \text{ 有 } \operatorname{Re}(f'(z) e^{i\theta}) \leq 0, \quad \forall \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{令 } f'(z) = |f'(z)| e^{i \arg f'(z)}, \quad \text{若 } |f'(z)| \neq 0,$$

$$\operatorname{Re}(e^{i(\arg f'(z) + \theta)}) \leq 0, \quad \forall \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \arg f'(z) + \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \forall \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \arg f'(z) = 0, \quad \text{故 } f'(z) = |f'(z)| > 0.$$

$$\text{综上 } f'(z) \geq 0.$$

初等全纯函数.

指数函数 设 $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

定义 $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$.

性质: ① $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ ($|e^z| = e^x > 0$)

② $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

证: 由 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)$$

$$= e^{x_1 + x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2))$$

$$= e^{z_1 + z_2}$$

③ e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的函数.

$$\begin{aligned} \text{证: } e^{z+2\pi i} &= e^{x+(y+2\pi)i} \\ &= e^x (\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) \\ &= e^x (\cos y + i\sin y) \\ &= e^z \end{aligned}$$

④ e^z 在 \mathbb{C} 上全纯, 且 $(e^z)' = e^z$.

证: $e^z = u(x, y) + i v(x, y)$

$$\text{则} \begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y \\ v(x, y) = e^x \sin y \end{cases}$$

则 u, v 在 \mathbb{R}^2 上实可微, 且

$$u_x = v_y = e^x \cos y$$

$$u_y = -v_x = -e^x \sin y.$$

满足 Cauchy-Riemann 方程. 故 e^z 可导.

(5) e^z 的单叶域.

定义: ① 若 $z_1 \neq z_2$, 则 $f(z_1) \neq f(z_2)$. f 称为单叶函数.

② 单叶域: 若 f 在区域 Ω 中单叶, 则称 Ω 为 f 的单叶域.

设 $e^{z_1} = e^{z_2}$, 则 $e^{z_1 - z_2} = 1$, $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

故若区域 D 中任何两点之差不为 $2k\pi i$ ($k \neq 0$) 时, 则

D 为 e^z 的单叶域.

e^z 的映射性质: 设 $z = x + iy$, $f(z) = e^x e^{iy}$ ①

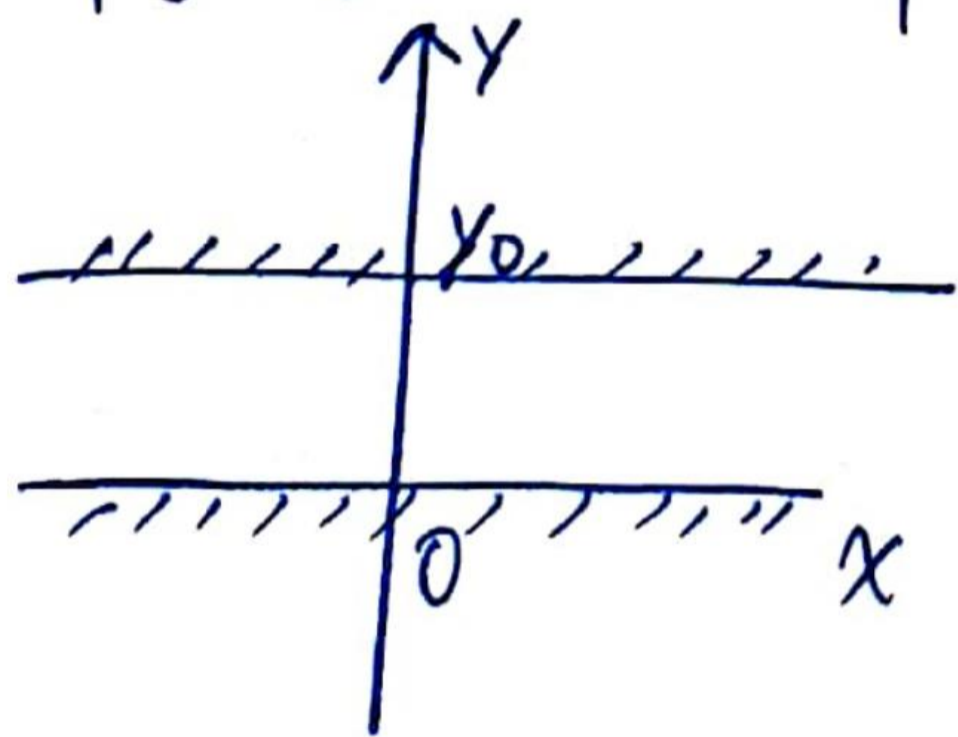
若 $f(z)$ 用极坐标表示, 则有 $f(z) = re^{i\theta}$ ②

比较①,②得 $\begin{cases} r = e^x \\ \theta = y \end{cases}$

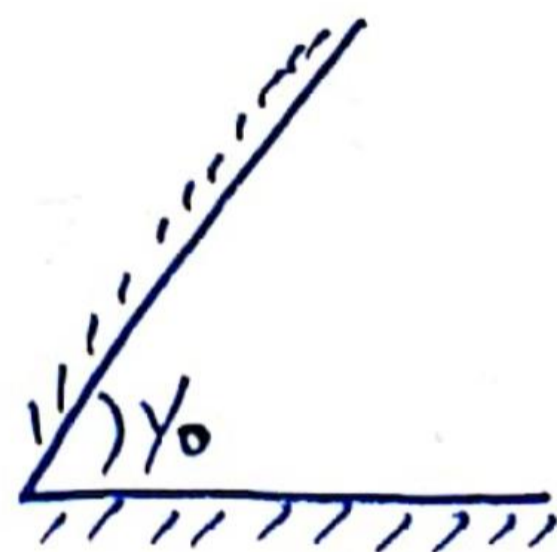
故 $(x, y) \rightarrow (r, \theta) = (e^x, y)$

设 $D = \{ (x, y) \mid 0 < y < y_0 \}, (0 < y_0 < 2\pi)$

则 f 将 D 映为 $\{ (r, \theta) \mid 0 < \theta < y_0 \}$ 角域.



\xrightarrow{f}



$0 < y_0 < 2\pi$

对数函数.

若 $e^{w(z)} = z$, 则 $w(z)$ 称为 z 的对数, 记为 $w(z) = \text{Log } z$.

令 $z = re^{i\theta}$, $w(z) = u(z) + i v(z)$. 则

$$e^{u(z) + i v(z)} = re^{i\theta}$$

$$\text{则} \begin{cases} e^{u(z)} = r \\ e^{i v(z)} = e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(z) = \log r \\ v(z) = \theta + 2k\pi, \end{cases}$$

$\text{Log } z = \{ \log r + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ 是多值函数.

或者 $\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z.$

符号: ① 若 $x > 0$ 为实数, 则 $\log x$ 表示正实数的实对数值.

② $\text{Log } z$ 表示多值函数.

③ $(\text{Log } z)_k$ 表示 $\log |z| + i(\arg z + 2k\pi)$, (固定 k)

$\arg z \in [0, 2\pi)$

性质: $(\text{Log } z)_k$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上不是连续函数.

证: $(\text{Log } 1)_k = \log 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i$

$$\text{令 } z(s) = e^{is} \quad (s \in (0, 2\pi))$$

$$\begin{aligned} (\text{Log } e^{is})_k &= \log |e^{is}| + i(\arg e^{is} + 2k\pi) \\ &= i(s + 2k\pi) \end{aligned}$$

故 $\lim_{s \rightarrow 2\pi^-} (\text{Log } e^{is})_k = i(2\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i \neq (\text{Log } 1)_k$

但 $\lim_{s \rightarrow 2\pi^-} e^{is} = 1.$

问题: 如何求区域 D , 使 $(\log z)_k$ 为连续函数?

设 $R(z)$ 为有理函数, 求区域 D , 使 $\text{Log} R(z)$ 为连续函数?

多值函数.

定义: ① 设 $F(z)$ 为多值函数, 定义在 Ω 上, 初值为 $f(z_0)$.

当 z_0 沿曲线 C 连续变动到 z_1 时, $f(z)$ 连续变动到

唯一确定的值 $f(z_1)$, 则称 $F(z)$ 在 C 上改变量为

$$\Delta_C F(z) = f(z_1) - f(z_0).$$



且
$$\Delta_C (F_1(z) \pm F_2(z)) = \Delta_C F_1(z) \pm \Delta_C F_2(z)$$

② 若 $\Delta_C F(z)$ 的值仅依赖于 $z_0, z_1, f(z_0)$, 不依赖于 C 的选取, 则称 $F(z)$ 在 Ω 内有单值分支, 该分支在任意点 z 的值为:

$$f(z) = f(z_0) + \Delta_C F(z), \quad C \text{ 为 } z_0 \rightarrow z \text{ 的曲线.}$$

要判断 $f(z)$ 在区域 Ω 上有单值分支, 我们有命题.

命题: $f(z)$ 在 Ω 上有单值分支 $\Leftrightarrow \forall \Omega$ 中内单闭链,
$$\Delta_C f(z) = 0.$$

此时称 Ω 为 $f(z)$ 的一个单值域.
 $\triangle \triangle \triangle$

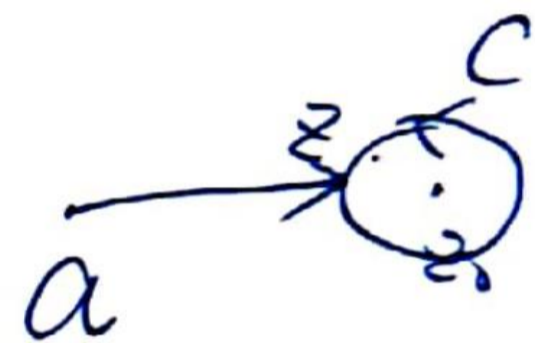
注意: $f(z)$ 的单值域不是唯一的, 通常我们要找最大的单值域 Ω
即不存在 Ω' , 使得 $\Omega \subsetneq \Omega'$, $f(z)$ 在 Ω' 有单值分支.

③ 寻常点: 设 $z_0 \in \mathbb{R}$, 若存在 z_0 的一个邻域, 使多值函数 $f(z)$ 在此邻域中有单值分支, 则该点称为寻常点.

支点: 设多值函数 $F(z)$ 在 $z_0 \in \Omega$ 点某充分小的空心邻域中有定义, 且每点都为寻常点, 又以 z_0 为中心的任意小的空心邻域中都有围绕 z_0 的简单闭曲线 C , 使得 $\Delta_C F(z) \neq 0$, 则称 z_0 为 $F(z)$ 的支点.

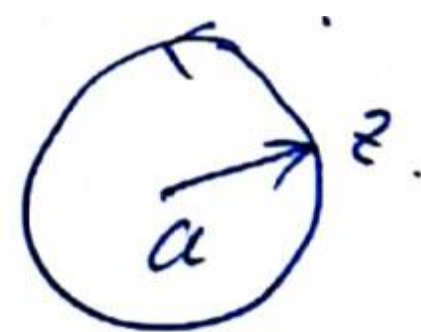
例: 求 $\text{Arg}(z-a)$ 在 \mathbb{C} 上所有支点.

解: ① $\forall z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq a$, 作任意绕 z_0 的闭曲线 C , a 在 C 外部, 则 $\Delta_C \text{Arg}(z-a) = 0$.
故 z_0 不为支点.



C

②. 若 $z = a$, 则. 对任意围绕 z 的简单
闭曲线 C , 有 $\Delta_C \text{Arg}(z-a) = 2\pi$
(注意 C 默认为逆时针方向).



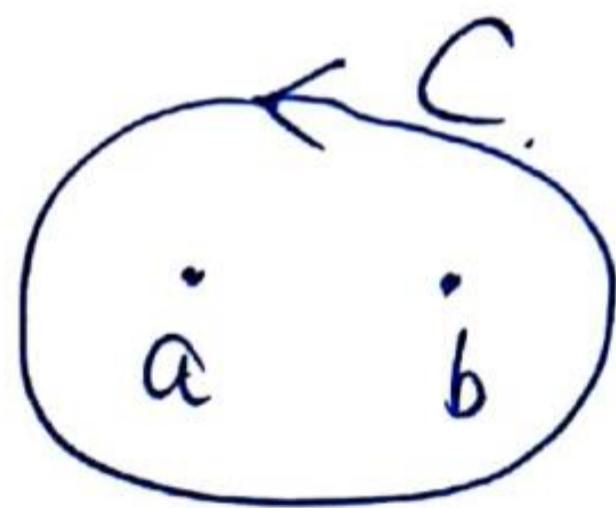
③. 若 $z = \infty$, 则 z 的邻域为圆环 $B(\infty, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$
中作曲线 $C = \{z \mid |z| = R+1\} \subset B(\infty, R)$,
则 $\Delta_C \text{Arg}(z-a) \neq 0$.

故 $\text{Arg}(z-a)$ 在 \mathbb{C} 上所有支点为 a 和 ∞ .

说明: ① 在支点的邻域中, 闭曲线要在“充分小”的邻域中而选取.
 否则在围内部包含支点的闭曲线上, $F(z)$ 的改变量不为 0.

例:
$$F(z) = \operatorname{Log} \frac{z-a}{z-b}, \quad a \neq b,$$

a, b 为支点, 但 $\Delta_C F(z) = 0.$



② 在支点 z_0 邻域中, 不能规定以 z_0 为中心的任意小的
空心邻域中围绕 z_0 的所有简单闭曲线都有 $\Delta_C F \neq 0$.

例 $F(z) = \sqrt{z} \sin \frac{1}{z}$, $z=0, \infty$ 为支点

但在任意小的空心邻域中, 存在曲线 C_n : 以 $z = \frac{1}{n\pi}$ (n 充分大)

为起点和终点, 并绕 $z=0$ 的简单闭曲线, 有 $\Delta_{C_n} F(z) = 0$.

③ 在支点的定义中, 按规定的充分小的邻域中都是
“单值点”

例: $F(z) = \sqrt{\sin \frac{1}{z}}$.

$z = \frac{1}{n\pi}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 都是支点.

但 $z=0$ 不能称为支点, 它是支点的极限点.

例: 求 $\text{Log}(z-a)$ 在 \mathbb{C} 上所有分支, 和一个单值域.

解:
$$\begin{aligned}\Delta_c \text{Log}(z-a) &= \Delta_c (\log|z-a| + i \text{Arg}(z-a)) \\ &= \Delta_c \log|z-a| + i \Delta_c \text{Arg}(z-a) \\ &= i \Delta_c \text{Arg}(z-a) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{若 } a \text{ 在闭域外} \\ \pm 2\pi i, & \text{若 } a \text{ 在闭域内部.} \end{cases}\end{aligned}$$

取 $\text{Log}(z-a)$ 在 \mathbb{C} 上所有支点为 $z=a, \infty$.

对于其他点 $z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq a$, $\Delta_C \text{Arg}(z-a) = 0$

故不是支点.



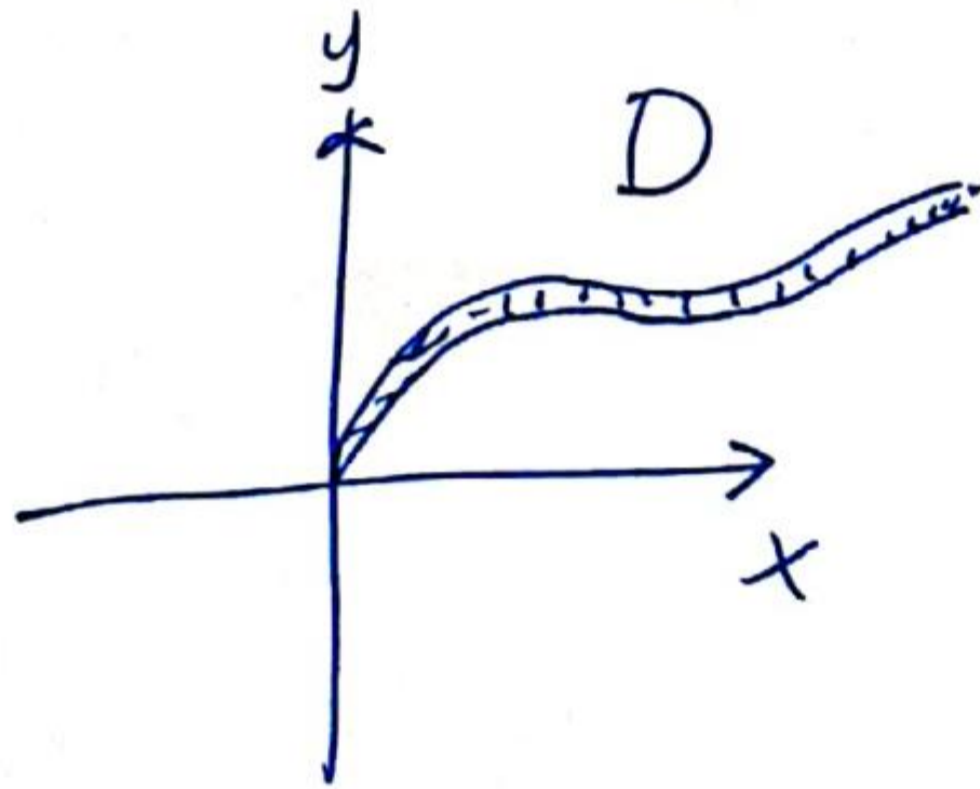
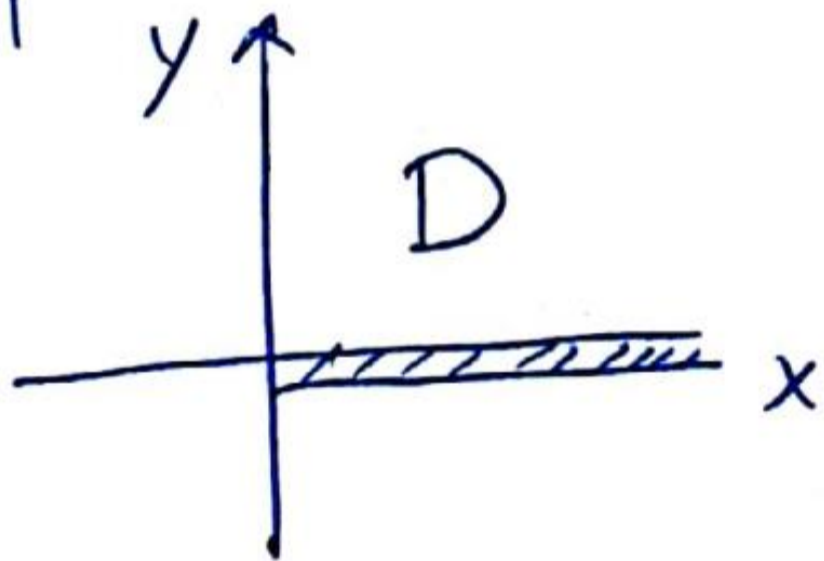
D 为 $\text{Log}(z-a)$ 的单值域 $\Leftrightarrow \forall$ 闭曲线 $C \subset D, \Delta_C \text{Arg}(z-a) = 0$

$\Leftrightarrow D$ 中不包含绕 a 转的简单闭曲线

D 为 $\text{Log}(z-a)$ 的单值域 $\Leftrightarrow \forall$ 闭曲线 C , $\Delta_C \text{Arg}(z-a) = 0$

$\Leftrightarrow D$ 中不包含绕 a 转的简单闭曲线

例如: $D = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.



说明: 单值域不是 $\triangle\triangle$ 不包含支点的区域

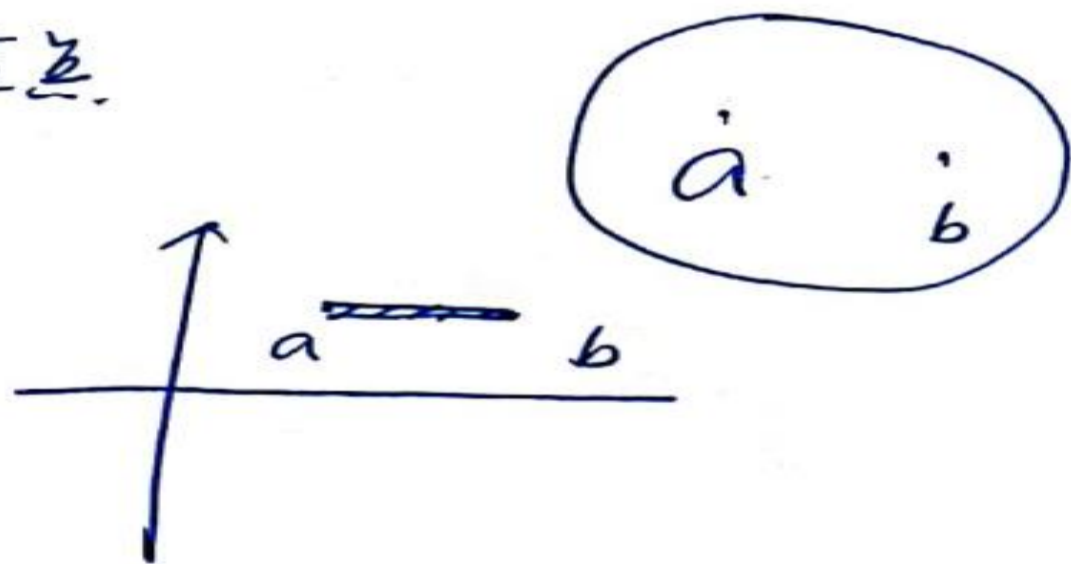
单值域是 不包含改变量不为0的简单闭曲线区域.

例: $f(z) = \text{Log} \frac{z-a}{z-b}$, $a \neq b$ 的所有支点和一个单值域.

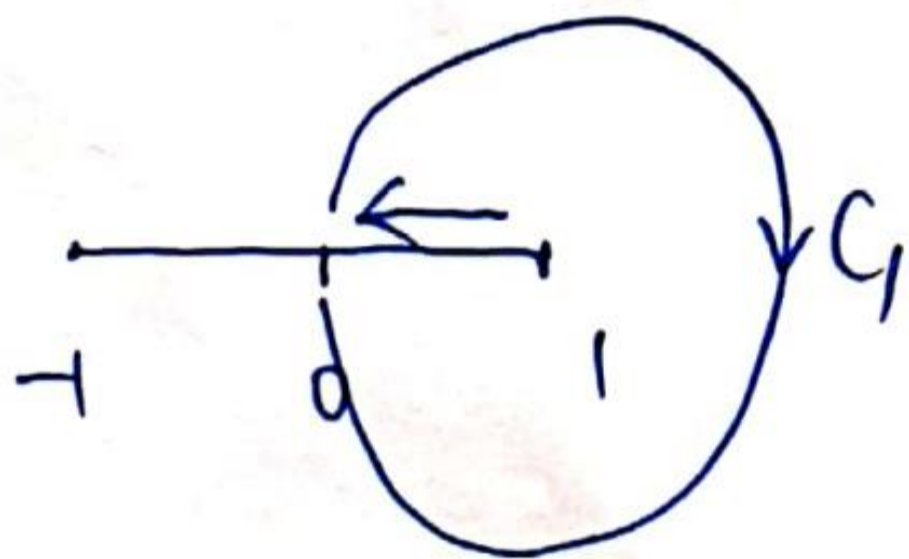
解:
$$\begin{aligned} \Delta_C f(z) &= \Delta_C \text{Log} \frac{z-a}{z-b} \\ &= \Delta_C (\text{Log}(z-a) - \text{Log}(z-b)) \\ &= i (\Delta_C \text{Arg}(z-a) - \Delta_C \text{Arg}(z-b)) \\ &= \begin{cases} 2\pi i, & \text{若 } \text{闭曲线 } C \text{ 仅包含 } a \\ -2\pi i, & \text{若 } \text{闭曲线 } C \text{ 仅包含 } b \\ 0, & \text{若 } \text{闭曲线 } C \text{ 包含 } a, b \text{ 两点} \\ 0, & \text{若 } C \text{ 不包含 } a, b \text{ 两点} \end{cases} \end{aligned}$$

故 a, b 是支点, ∞ 不是支点.

单值域: $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.



例: $F(z) = \text{Log} \frac{z-1}{z+1}$, $D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, 记 $f(z)$ 为 $F(z)$ 在 D 中单值分支, 已知 $f(0_+) = \pi i$, 求 $f(0_-)$, $f(\infty)$.

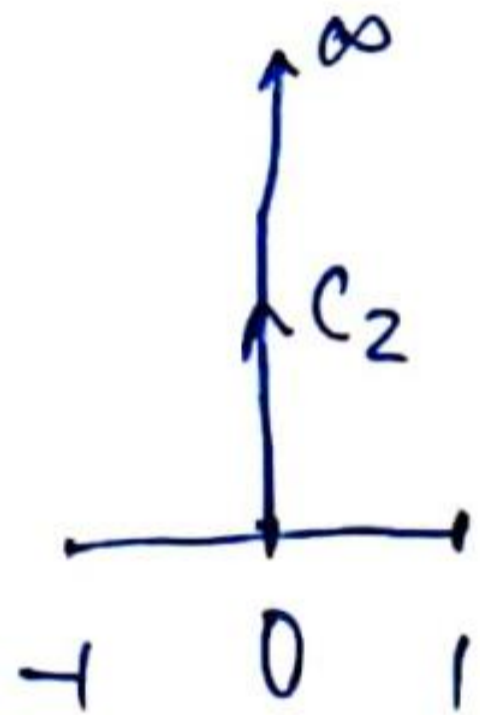


解: $f(0_-) = f(0_+) + \Delta_{C_1} F(z)$

$$= \pi i + \Delta_{C_1} (\text{Log}(z-1) - \text{Log}(z+1))$$

$$= \pi i + (-2\pi i - 0)$$

$$= -\pi i$$



$$\begin{aligned}
 f(\infty) &= f(0_L) + \Delta_{C_2} F(z) \\
 &= \pi i + i \left(\Delta_{C_2} \text{Arg}(z-1) - \Delta_{C_2} \text{Arg}(z+1) \right) \\
 &= \pi i + i \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

例: $F(z) = \text{Log} \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^3(z+2)}$

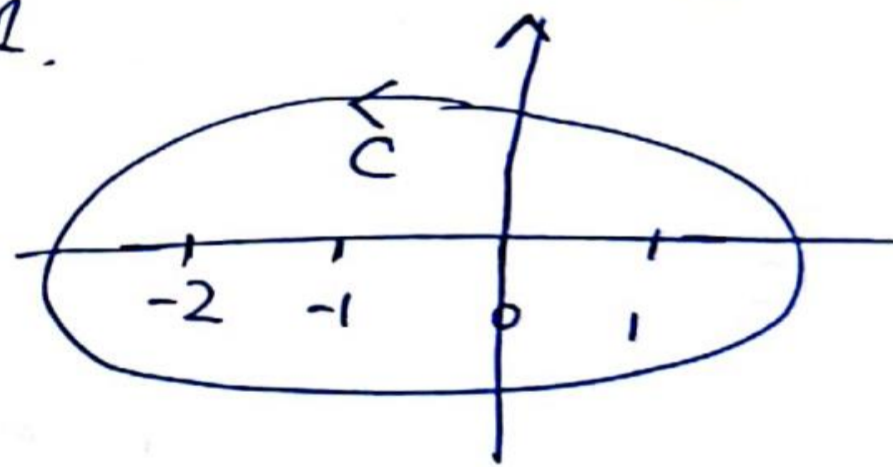
解 ① 支点: $F(z) = 2 \text{Log} z + \text{Log}(z+1) - 3 \text{Log}(z-1) - \text{Log}(z+2)$

$$\begin{aligned} \Delta_C F(z) &= 2 \Delta_C \text{Log} z + \Delta_C \text{Log}(z+1) - 3 \Delta_C \text{Log}(z-1) - \Delta_C \text{Log}(z+2) \\ &= i [2 \Delta_C \text{Arg} z + \Delta_C \text{Arg}(z+1) - 3 \Delta_C \text{Arg}(z-1) - \Delta_C \text{Arg}(z+2)] \end{aligned}$$

故支点为 $z = -2, -1, 0, 1$,

若能绕远点: 设 C 包含 $-2, -1, 0, 1$.

则 $\Delta_C F(z) = i \cdot [2 \cdot 2\pi + 2\pi - 3 \cdot 2\pi - 2\pi]$

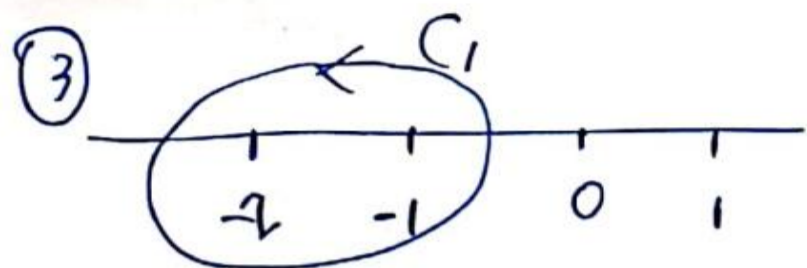


$= -2\pi i \neq 0$. 故 ∞ 是支点.

② 回忆: Ω 为 $F(z)$ 的单值域

$\Leftrightarrow \Omega$ 中不包含闭曲线 C , 使得 $\Delta_C F(z) \neq 0$.

问题: 对于哪些 C , 有 $\Delta_C F(z) = 0$?



若 C_1 仅包含 $-1, 1$, 则 应当是仅包含 $-1, -2$?

$$\Delta_{C_1} \text{Arg}(z+1) = 2\pi$$

$$\Delta_{C_1} \text{Arg}(z+2) = 2\pi$$

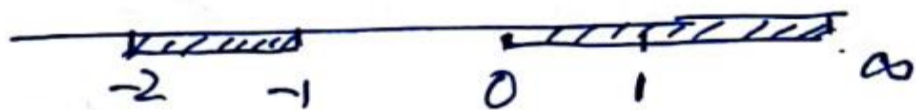
$$\Delta_{C_1} \text{Arg} z = 0$$

$$\Delta_{C_1} \text{Arg}(z-1) = 0.$$

$$\text{故 } \Delta_{C_1} F(z) = i \cdot [2 \cdot 0 + 2\pi - 3 \cdot 0 - 2\pi] = 0.$$

故 $F(z)$ 沿着曲线 C_1 的改变量为 0.

从而: $D = \mathbb{C} \setminus ([-2, -1] \cup [0, \infty))$ 是单值域



④ 沿 C_2 :



若 C_2 反包含 $-1, 0, 1$, 不包含点 -2 , 则

$$\Delta_{C_2} \text{Arg}(z+2) = 0$$

$$\Delta_{C_2} \text{Arg}(z+1) = 2\pi$$

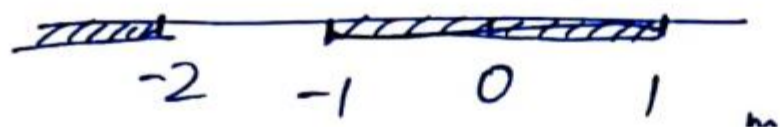
$$\Delta_{C_2} \text{Arg} z = 2\pi$$

$$\Delta_{C_2} \text{Arg}(z-1) = 2\pi$$

$$\text{故 } \Delta_{C_2} F(z) = i[2 \cdot 2\pi + 2\pi - 3 \cdot 2\pi - 0] = 0$$

故 $F(z)$ 沿着曲线 C_2 改变量为 0.

$$\text{从而 } D = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -2] \cup [-1, 1])$$



例: $F(z) = \text{Log } R(z)$, $R(z) = \prod_{i=1}^m (z-a_i)^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{Z}$.

解: $F(z) = \sum_i n_i \text{Log}(z-a_i)$

$$\begin{aligned}\Delta_C F(z) &= \sum_i n_i \Delta_C \text{Log}(z-a_i) \\ &= \sum_{i \in \Lambda} n_i 2\pi i = 2\pi i \sum_{i \in \Lambda} n_i\end{aligned}$$

$$\Lambda = \{i \mid a_i \text{ 在 } C \text{ 内部}\}$$

$$\Delta_C F(z) = 0$$

\Leftrightarrow 包含在 C 内部的点 a_i 的指数 n_i 和为 0

∞ 不是支点 \Leftrightarrow 对任意充分大 C , $\Delta_C F(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m n_i = 0$$

幂函数 $w = z^\alpha$

① 若 $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $(z^n)' = nz^{n-1}$, z^n 是 \mathbb{C} 上全纯函数.

② 若 $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, 则

$$\text{Log } w = \alpha \text{Log } z, \Leftrightarrow e^{\text{Log } w} = e^{\alpha \text{Log } z}$$

$$\Leftrightarrow w = e^{\frac{1}{n} (\log |z| + i \text{Arg } z)}$$

$$= |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n} (\arg z + 2k\pi)}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

故 $w = z^{\frac{1}{n}}$ 有 n 个分支.

③ 若 $\alpha \in \mathbb{C}$, 令 $\alpha = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} W &= e^{\alpha \operatorname{Log} z} = e^{(a+bi)(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} \\ &= e^{a \log|z| - b \operatorname{Arg} z} e^{i(b \log|z| + a \operatorname{Arg} z)} \end{aligned}$$

若 $b=0$, $a=n$, 此时 $w = z^\alpha = z^n$ 单值函数.

$$\begin{aligned} \text{若 } b=0, a=\frac{p}{q}, \text{ 则 } w &= e^{\frac{p}{q} \log|z|} e^{i \frac{p}{q} \operatorname{Arg} z} \\ p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) &= 1 &= |z|^{\frac{p}{q}} e^{i \frac{p}{q} \operatorname{Arg} z} \end{aligned}$$

共有 q 个分支.

$$\begin{aligned} \text{若 } b=0, a \in \mathbb{Q}^c, \text{ 则 } w &= e^{a \log|z|} e^{i a (\operatorname{arg} z + 2k\pi)} \\ &= |z|^a \cdot e^{i a \operatorname{arg} z} \cdot e^{i a 2k\pi} \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} a \text{ 为无理数} \\ k \text{ 为整数} \end{array} \right\} \Rightarrow ka \text{ 不可能为整数} \Rightarrow e^{i a 2k\pi} \text{ 有无穷多值.}$

u 为无理数
 k 为整数 } $\Rightarrow ka$ 不可能为整数 $\Rightarrow e^{ia2k\pi}$ 有无穷值.

此时 $w = z^a$ 为无穷多值函数.

若 $b \neq 0$, 则 $|w| = e^{a \log |z| - b (\arg z + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$

故 $|w|$ 为无穷值函数, $\Rightarrow w$ 为无穷值函数.

例: 若 $F(z) = \sqrt[n]{R(z)}$, $R(z)$ 有理函数, 求单值域

解: $\Delta_C F(z) = \Delta_C \left(|R(z)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n} \text{Arg} R(z)} \right)$
 $= |R(z)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n} (\text{Arg} R(z_0) + \Delta_C \text{Arg} R(z))}$



$$- |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n} \text{Arg} R(z_0)}$$

$$= |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n} \text{Arg} R(z_0)} \left[e^{\frac{i}{n} \Delta_C \text{Arg} R(z)} - 1 \right]$$

$$\Delta_C F(z) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{i}{n} \Delta_C \text{Arg} R(z)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2i}{n} \Delta_C \text{Arg} R(z) = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \Delta_C \text{Arg} R(z) = 2nk\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

设 $R(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_j)^{n_j}$

$$\Delta_C \text{Arg} R(z) = \Delta_C \text{Arg} \prod_{j=1}^m (z - a_j)^{n_j}$$

$$= \sum_{j=1}^m n_j \Delta_C \text{Arg} (z - a_j)$$

$$= \sum_{j \in \Lambda} 2\pi n_j, \quad \Lambda = \{j \mid a_j \in C \text{ 内部}\}$$

$$\text{故 } \Delta_C F(z) = 0 \Leftrightarrow 2\pi \sum_{j \in \Lambda} n_j \neq 2\pi n \bar{m} \text{ 整数倍}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j \in \Lambda} n_j \neq n \bar{m} \text{ 整数倍}$$

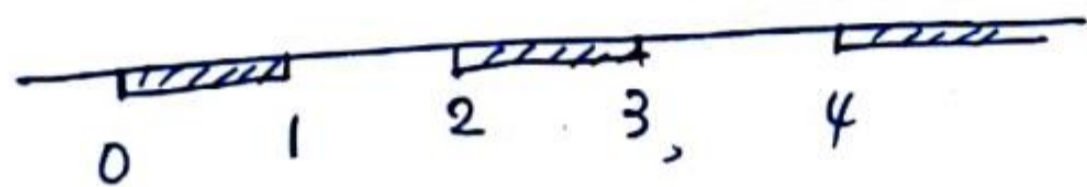
$$\infty \text{ 不是支点} \Leftrightarrow \sum_{j \in \Lambda} n_j \neq n \bar{m}$$

$$\sum_{j=1}^m n_j \neq n \bar{m} \text{ 整数倍.}$$

例: $f(z) = \sqrt{z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$

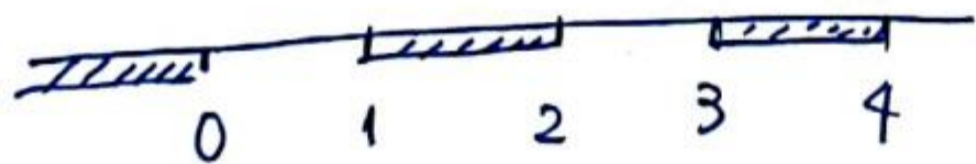
支点 $z = 0, 1, 2, 3, 4$.

指数 $n_j = 1, 1, 1, 1, 1$



单值域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, +\infty) \}$

或者



单值域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ (-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup [3, 4] \}$

例: 已知 $f(z) = \sqrt[3]{z-1}$, 求 $f(z)$ 的支点, 若单值域 $D = (-\infty, 1]$

取点 $z=2$ 取正值 m 分支, 在 $z=-1+i$ 处.

解: $f(z) = |z-1|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} \text{Arg}(z-1)}$

当 $z=2$ 时, 由 $\frac{1}{3} \text{Arg}(z-1)$

$$e^{\frac{i}{3} \text{Arg}(z-1)} \Big|_{z=2} > 0.$$

$$\text{故可取 } \text{Arg}(z-1) \Big|_{z=2} = 0, \pm 6\pi, \pm 12\pi, \dots$$

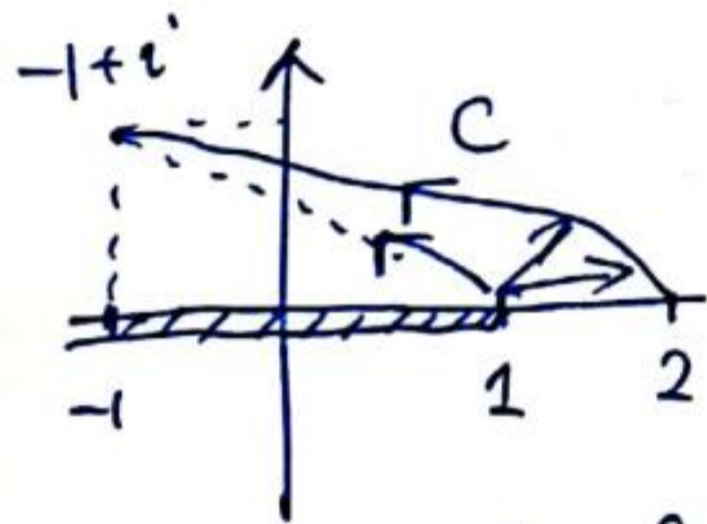
$$\text{即 } \text{Arg}(z-1) \Big|_{z=2} = 6k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

当 $z = z_0$ 时.

$$f(z_0) = |z_0 - 1|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} \text{Arg}(z_0 - 1)} \Big|_{z=z_0}$$

$$= |z_0 - 1|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} (\text{Arg}(z_0 - 1) \Big|_{z=2} + \Delta_c \text{Arg}(z_0 - 1))}$$

其中 c 为从 2 到 $-1+i$ 的曲线.



注意 $\Delta_c \text{Arg}(z-1) = \pi - \arctg \frac{1}{2}$

故 $f(-1+i) = |-2+i|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} (6k\pi + \pi - \arctg \frac{1}{2})}$

$$= 5^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i}{3} (\pi - \arctg \frac{1}{2})}$$

例: 设 $f(z) = \sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}} \cdot \frac{1}{z+1}$

试确定其在 $[0,1]$ 上岸取正值的单值全纯分支 $f_0(z)$, 并计算 $f_0(-i)$.

解: 由于 $\frac{1}{z+1}$ 是单值函数, 故只需考虑 $\varphi(z) = \sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}$

① 确定 $\varphi(z)$ 的支点, 单值域

$\varphi(z)$ 的奇点 $z = 0, 1, \infty$

指数: $-1, 3.$

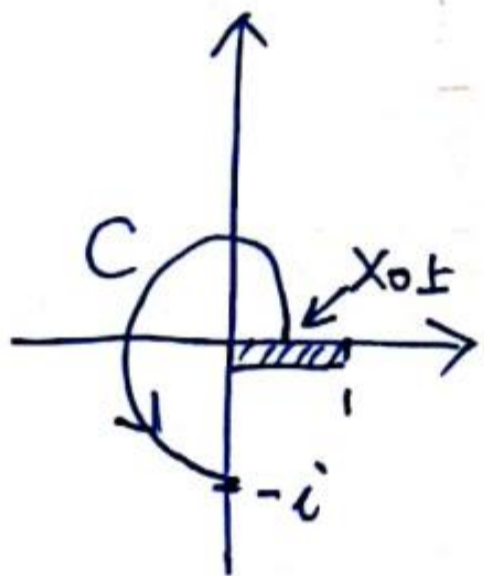
由于 $3-1=2$, 故 ∞ 不是支点, 故 $D = \mathbb{C} \setminus [0,1]$ 是单值域.

②. 注意在 $[0,1]$ 上 $\varphi(z)$ 取正值. 设 $x_0 \in [0,1]$, 则 $|\varphi(z)|_{z=x_0} > 0$.

$$\varphi(z) = |\varphi(z)| e^{i \operatorname{Arg} \varphi(z)}.$$

$$\operatorname{Arg} \varphi(z) \Big|_{z=i} = \operatorname{Arg} \varphi(z) \Big|_{z=x_0} + \Delta_C \operatorname{Arg} \varphi(z)$$

其中 C 为连接 x_0 到 $z=i$ 在 D 中任何曲线.



$$\begin{aligned} \Delta_C \operatorname{Arg} \varphi(z) &= \frac{1}{2} \left(\Delta_C \operatorname{Arg} (1-z)^3 - \Delta_C \operatorname{Arg} z \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(3 \Delta_C \operatorname{Arg} (1-z) - \Delta_C \operatorname{Arg} z \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(3 \Delta_C \operatorname{Arg} (z-1) - \Delta_C \operatorname{Arg} z \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(3 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \pi \right) \\ &= -\frac{3}{8} \pi \end{aligned}$$

取 $\text{Arg } \varphi(z) \Big|_{z=x_0 \pm} = 0$, 此时 $\varphi(z) \Big|_{z=x_0 \pm} > 0$.

$$\text{故 } \varphi(-i) = |\varphi(-i)| \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i} = 2^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{8}\pi i}$$

③ $f_0(-i) = \frac{1}{1-i} \varphi(-i) = \frac{1}{1-i} 2^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{8}\pi i}$

说明：下述解法是否正确？

$$\varphi(z) = |\varphi(z)| e^{i \operatorname{Arg} \varphi(z)}$$

$$\operatorname{Arg} \varphi(z) = \arg \varphi(z) + 2k\pi, \quad \arg \in [0, 2\pi)$$

由初值 $z = x_0$ 时 φ 取正值，故可算出 k 值。

例如：取 $\arg \varphi(z) \Big|_{z=x_0} = 0$ ，取 $k=0$

可知 $\operatorname{Arg} \varphi(z) = \arg \varphi(z) \in [0, 2\pi)$

令 $z = -i$ ，则 $\arg \varphi(-i) = \arg \sqrt{\frac{(1+i)^3}{-i}} = \arg e^{\frac{5}{8}\pi i} = \frac{5}{8}\pi$

从而 $\varphi(-i) = |\varphi(-i)| e^{\frac{5}{8}\pi i}$

但 $e^{\frac{5}{8}\pi i} \neq e^{-\frac{3}{8}\pi i}$ ，哪里错了？

三角函数: 设 $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i \sin y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos y = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}) \\ \sin y = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}) \end{cases}$$

定义:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) & \forall z \in \mathbb{C} \\ \cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) & \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

- 性质: ① $\cos z, \sin z$ 都以 2π 为周期
② $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
③ $|\sin z|, |\cos z|$ 无界函数.

证③: 令 $z = iy$, 则
$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \rightarrow +\infty, (y \rightarrow \pm\infty)$$

说明: 关于三角函数, 在实数范围内成立的恒等式在复数范围内也成立, 但不等式一般没有类似结论.

反三角函数. $w = \operatorname{Arcsin} z$ 为 $z = \sin w$ 所定义的反函数.

$$\text{由 } z = \sin w = \frac{1}{2i} (e^{iw} - e^{-iw}) \text{ 知}$$

$$e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0 \quad \text{解之}$$

$$w = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(iz + \sqrt{1-z^2})$$

多值函数, 支点为 $z = \pm 1, \infty$.

类似地, $\text{Arc cos } z = \frac{1}{i} \text{Log}(z + i\sqrt{1-z^2})$, 支点 $z = \pm 1, \infty$

$\text{Arctan } z = \frac{1}{2i} \text{Log} \frac{i-z}{i+z}$ 支点为 $z = \pm i$
 ∞ 不是支点.

分式线性变换

定义: $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \Delta = ad-bc \neq 0$

若 $ad-bc = 0$, 则 $f(z)$ 为常数或无意义.

特殊情形:

- ① 平移, $w = z + a, (a \in \mathbb{C})$
- ② 旋转: $w = e^{i\theta} \cdot z \quad (\theta \in \mathbb{R})$.
- ③ 伸缩: $w = r \cdot z, (r > 0)$
- ④ 反演: $w = \frac{1}{z},$

定理: 任一分式线性变换为上述四种变换的复合.

证: ① 若 $c=0$, 则: $\Delta = ad \neq 0 \Rightarrow a \neq 0, d \neq 0$.

$$f(z) = \frac{az+b}{d} = a'z + b', \quad a' = \frac{a}{d}, \quad b' = \frac{b}{d}$$

设 $a' = r_0 e^{i\theta_0}$, 则

$$z \xrightarrow{z_1 = e^{i\theta_0} z} z_1 \xrightarrow{z_2 = r_0 z_1} z_2 \xrightarrow{w = z_2 + b'} w$$

旋转 伸缩 平移

$$w = a'z + b'$$

(2) $\frac{7}{2} c \neq 0$, 则

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2z+cd}$$

$$z \xrightarrow{z_1 = cz + cd} z_1 \xrightarrow{z_2 = \frac{1}{z_1}} z_2 \xrightarrow{z_3 = (bc-ad)z_2} z_3 \xrightarrow{w = z_3 + \frac{a}{c}} w = \frac{az+b}{cz+d}$$

引理: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad-bc \neq 0$) 是 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的双射.

证: $f^{-1}: w \rightarrow \frac{dw-b}{-cw+a}$, $ad-bc \neq 0$.

则 f^{-1} 也是分式线性映射.

$$f \circ f^{-1} = \text{id}, \quad f^{-1} \circ f = \text{id}.$$

故 f 为 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的双射.

引理: 若分式线性映射有3个不动点, 则必为恒等映射.

证: $\frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z + b = 0$

有3个不同解 $\Rightarrow c=0, a=d, b=0$. 即为恒等映射

定理: 在 \mathbb{C} 上给定互异的三点 z_1, z_2, z_3 及 w_1, w_2, w_3 , 则存在唯一
的分式线性映射 $w = f(z)$, 使 $f(z_i) = w_i, (i=1, 2, 3)$

证: 唯一性: $w = f_1(z), w = f_2(z)$ 使得 $f_1(z_i) = w_i, f_2(z_i) = w_i,$

例 $z = f_2^{-1} \circ f_1(z)$ 有 3 个不动点. $i=1, 2, 3.$

$$\Rightarrow f_2^{-1} \circ f_1 = \text{id}$$

$$\Rightarrow f_1 \text{ 与 } f_2 \text{ 恒等.}$$

存在性: ① 构造 $g: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (1, 0, \infty)$

$$g(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

则 $g(z_1) = 1, g(z_2) = 0, g(z_3) = \infty.$

② 构造 $h: (w_1, w_2, w_3) \rightarrow (1, 0, \infty)$

$$h(w) = \frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}$$

③ 令 $w = h^{-1} \circ g, z \rightarrow h^{-1}(g(z))$

则 $w(z_i) = w_i$

定义: 交比: $(z_1, z_2, z_3, z_4) \Rightarrow \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$

则上述构造的映射为 $w = h^{-1}(g(z))$

$$\Leftrightarrow h(w) = g(z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

$$\Leftrightarrow (w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$$

引理: 在任何分式线性变换下交比不变.

$$(f(z), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z, z_2, z_3, z_4)$$

证明: 设 $w_2 = f(z_2)$, $w_3 = f(z_3)$, $w_4 = f(z_4)$

则 $g: z_i \rightarrow w_i$ ($i=2,3,4$) 的映射为

$$(w, w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4) \quad (*)$$

即 $g(z_i) = w_i$, ($i=2,3,4$)

由定义 $f(z_i) = w_i$, ($i=2,3,4$)

故 $g \equiv f$ 从 $\mathbb{C}P^1$ (*) 等价于

$$(g(z), w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4)$$

$$\Rightarrow (f(z), w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4), \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

例: 求将 $(2, +i, -2) \rightarrow (-1, i, 1)$ 的分式线性变换.

解: $(w, -1, i, 1) \rightarrow (z, 2, i, -2)$

$$\frac{w-i}{w-1} : \frac{-1-i}{-1-1} = \frac{z-i}{z+2} : \frac{2-i}{2+2}$$

几何性质:

引理: \mathbb{C} 上直线与圆周可写为:

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0, \quad A, C \in \mathbb{R}, \quad |B|^2 - AC > 0.$$

统称为圆周.

性质: 分式线性变换将圆周变为圆周.

证: 只要验证两种:
$$\left\{ \begin{array}{l} w = az + b, \quad (a \neq 0) \\ w = \frac{1}{z} \end{array} \right.$$

性质: 分式线性变换将圆周变为圆周.

注: 只考虑以下两种:
$$\left\{ \begin{array}{l} W = az + b, (a \neq 0) \\ W = \frac{1}{z} \end{array} \right.$$

① 在 $W = \frac{1}{z}$ 下的像.

由于 $Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$, 令 $W = \frac{1}{z}$

$$\text{则: } A\frac{1}{W}\frac{1}{\bar{W}} + \bar{B}\frac{1}{W} + B\frac{1}{\bar{W}} + C = 0$$

$$\Leftrightarrow C|W|^2 + \bar{B}W + BW + A = 0, \quad |B|^2 - AC > 0.$$

也为圆周

② 在 $w = az + b$ 下的像. 由于 $z = \frac{w-b}{a}$

$$\text{代入 } A z \bar{z} + \bar{B} z + B \bar{z} + C = 0.$$

$$A \frac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}} \cdot \frac{w-b}{a} + \bar{B} \cdot \frac{w-b}{a} + B \frac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}} + C = 0.$$

整理: $A|w|^2 + (\bar{B}\bar{a} - A\bar{b})w + (Ba - Ab)\bar{w} + (A|b|^2 + C|a|^2 - \bar{B}\bar{a}b - Ba\bar{b}) = 0.$

注意 $|B'|^2 - A'C'$

$$= |Ba - Ab|^2 - A(A|b|^2 + C|a|^2 - \bar{B}\bar{a}b - Ba\bar{b}).$$

$$= (|B|^2 - AC)|a|^2 > 0$$

故像为圆周.

定理: 四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆 $\Leftrightarrow \Im(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$.

证: ① 令 $f(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, 则 $f(z_1) = 1, f(z_3) = 0, f(z_4) = \infty$.

引理: 过 $1, 0, \infty$ 的圆周为实轴.

故 f 将经过 z_2, z_3, z_4 的圆周映为过 $1, 0, \infty$ 的圆周.

引理证明: $A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$

过 0: $C = 0$

过 1: $A + 2\operatorname{Re} B = 0$.

过 ∞ : 即令 $z = \frac{1}{w}$, 则

$$A \frac{1}{|w|^2} + \bar{B} \frac{1}{w} + B \frac{1}{\bar{w}} = 0 \quad \text{过 } w=0 \text{ 点}$$

$$A + \bar{B}w + B\bar{w} = 0 \quad \text{过 } w=0 \text{ 点}$$

从而令 $w=0$, 得 $A=0$, 故 $\operatorname{Re} B = 0$.

令 $B = ib$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, 故由 $\bar{B}z + B\bar{z} = 0$ 得

$$-ibz + ib\bar{z} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \bar{z} \quad (\text{实轴}).$$

② 定理证明:

若 $\text{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$, 则 $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$

令 $t = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, 则

f^{-1} : 实轴 \rightarrow 由 z_2, z_3, z_4 所确定的圆周

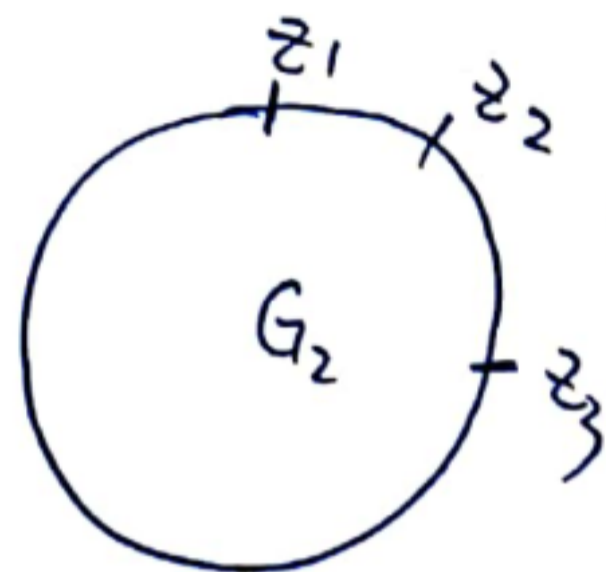
$t \rightarrow z_1 = f^{-1}(t)$ 在圆 z_2, z_3, z_4 上.

故 $f(z_1) = t \in \mathbb{R}$. 可导出 z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆.

若 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆, 则 f 将该圆映为过 $1, 0, \infty$ 的

圆周, 故 $f(z_1) \in \mathbb{R}$, 即 $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

问题: 如何确定 $f(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ 在圆内外的符号?



若 $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$, 则称 G_1 为左边, G_2 为右边

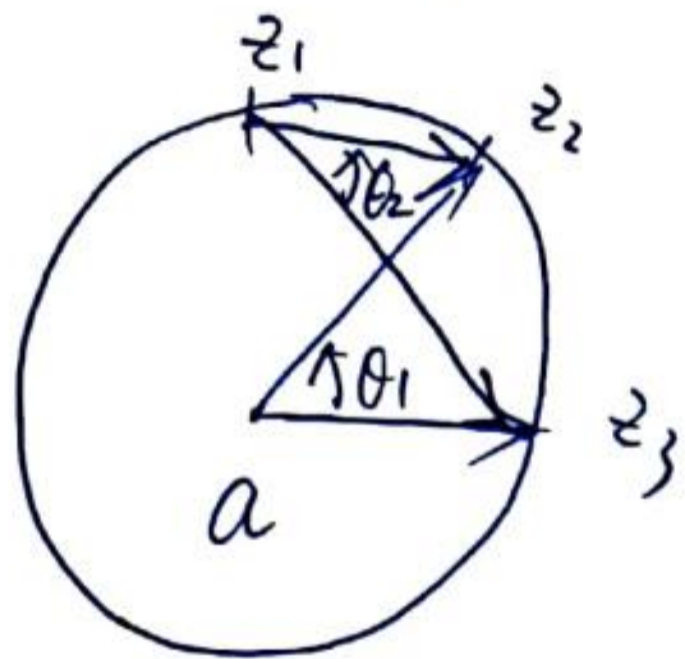
若 $z_3 \rightarrow z_2 \rightarrow z_1$, 则称 G_2 为左边, G_1 为右边.

定理: 设 z_1, z_2, z_3 为 \mathbb{C} 上圆周的有序三点, 则关于

$z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ 右边的点有 $\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0$

$z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ 左边的点有 $\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0$.

证: $\text{Arg} \frac{z}{w} = \text{Arg} z - \text{Arg} w$ 表示向量 \vec{OW} 转动到 \vec{Oz} 的
角度.



$$\begin{aligned} & \text{Arg} (a, z_1, z_2, z_3) \\ &= \text{Arg} \left(\frac{a-z_2}{a-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3} \right) \end{aligned}$$

$$= \text{Arg} \frac{a-z_2}{a-z_3} - \text{Arg} \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

$$= \text{Arg} \frac{z_2-a}{z_3-a} - \text{Arg} \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} \quad \text{注: } \theta_1 \in (0, 2\pi)$$

$$= \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 - \frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta_1}{2} \in (0, \pi)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0$$

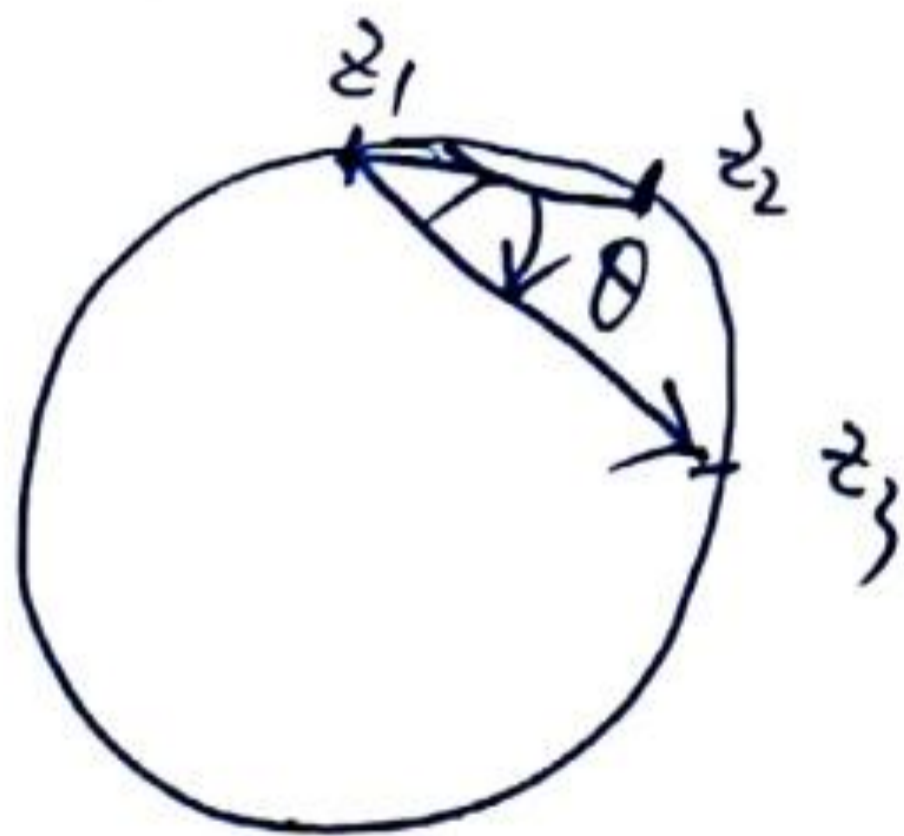
考虑左边: $(\infty, z_1, z_2, z_3) = \frac{\infty - z_2}{\infty - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$

$$= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$$

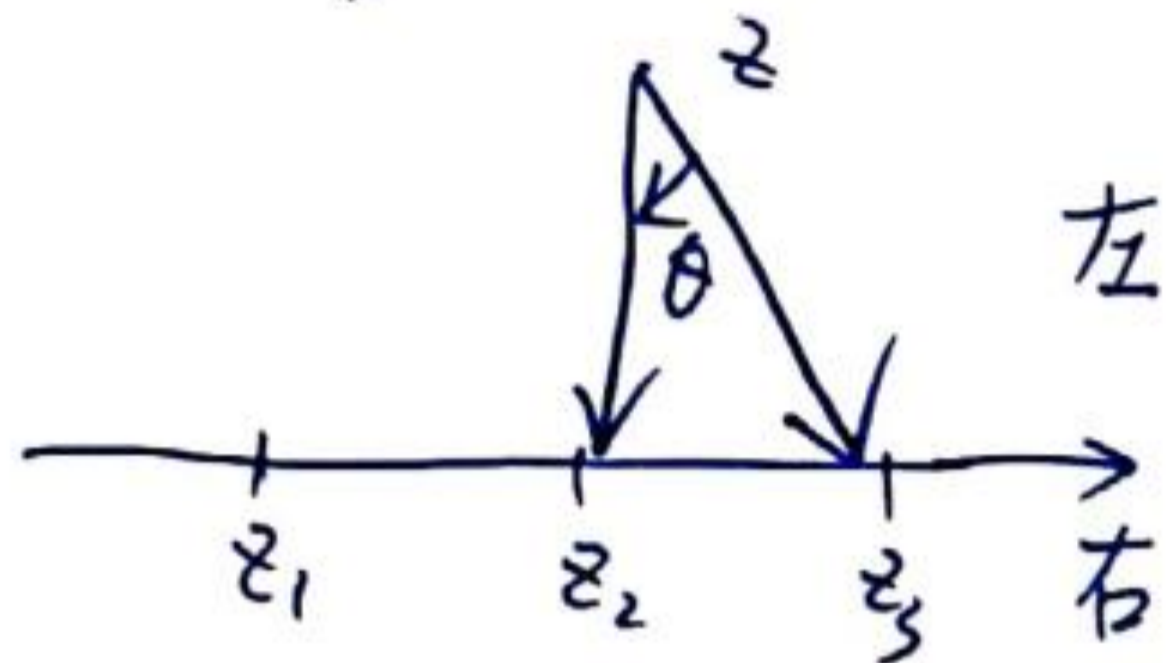
$$= \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$= \theta \in (-\pi, 0)$$

故 $\text{Im}(\infty, z_1, z_2, z_3) < 0$.



若 z_1, z_2, z_3 在一条直线上.



$$\begin{aligned} \text{Arg}(z, z_1, z_2, z_3) &= \text{Arg} \frac{z_2 - z}{z_3 - z} - \text{Arg} \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \\ &= \text{Arg} \frac{z_2 - z}{z_3 - z} - 0 = \theta \in (-\pi, 0) \end{aligned}$$

故 $\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0$.

推论: 若 $f: z_i \rightarrow w_i$ ($i=1,2,3$), 则 f 将 定向 $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ 左(右) 侧 分别映为 $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$ 的左(右)侧.

保对称点

定义: 称 z_1, z_2 关于圆 $|z-a|=R$ 对称, 若 $z_2-a = \frac{R^2}{\bar{z}_1-a}$

定理: ① z_1, z_2 关于圆 $Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C=0$ 对称

$$\Leftrightarrow Az_1\bar{z}_2 + B\bar{z}_2 + \bar{B}z_1 + C = 0$$

② 若分式线性变换将圆 γ_1 映为 γ_2 , 则该变换将 γ_1 的对称点映为 γ_2 的对称点.

证明: ① 设 $A \neq 0$, 则 z_1, z_2 关于 Γ 对称

$$\Leftrightarrow (z_2 - a)(\bar{z}_1 - \bar{a}) = R^2$$

$$\Leftrightarrow z_2 \bar{z}_1 - z_2 \bar{a} - a \bar{z}_1 + |a|^2 - R^2 = 0.$$

下证:

命题: 设直线 L 的方程为 $\bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$ ($B \neq 0, C \in \mathbb{R}$),

则 z_1, z_2 关于 L 对称 $\Leftrightarrow \bar{B}z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0.$

下证:

命题: 设直线 L 的方程为 $\bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$ ($B \neq 0, C \in \mathbb{R}$),

则 z_1, z_2 关于 L 对称 $\Leftrightarrow \bar{B}z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0$.

注意 ① 若 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = x_1 + iy_1$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = x_2 + iy_2$

则: $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \operatorname{Re}(z_2 \bar{z}_1) = x_1 x_2 + y_1 y_2$
 $= r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$.

故 $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ 表示 \vec{Oz}_1, \vec{Oz}_2 两向量的内积.

② 若直线方程为 $\bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$ ($B \neq 0$), 则 \vec{OB} 为直线的法向量.

由 $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$

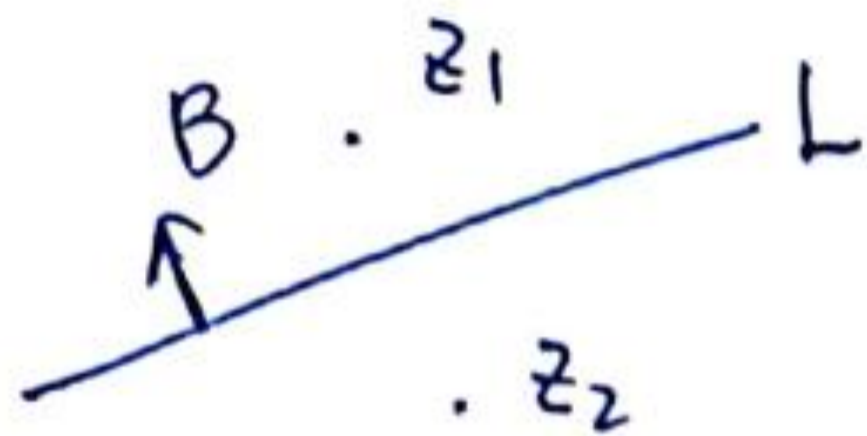
知 $\frac{a}{2}(z + \bar{z}) + \frac{b}{2i}(z - \bar{z}) + c = 0$.

故 $\bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$, $B = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}i$

故 $\vec{OB} \parallel (a, b)$, (a, b) 为 $ax + by + c = 0$ 的法向量.

命题证明:

z_1, z_2 关于直线 L 对称



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{z_1 z_2} \perp \text{直线 } L & \textcircled{1} \\ z_1, z_2 \text{ 的中点落在 } L \text{ 上.} & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \vec{z_1 z_2} \text{ 与 } \vec{OB} \text{ 平行} \Leftrightarrow \vec{z_1 z_2} \text{ 与 } iB \text{ 正交.}$$

$$\text{故 } \operatorname{Re}(iB(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)) = 0.$$

$$\text{即 } iB(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - i\bar{B}(z_2 - z_1) = 0.$$

$$\text{故 } B\bar{z}_2 + \bar{B}z_1 = B\bar{z}_1 + \bar{B}z_2.$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow B \frac{z_1 + z_2}{2} + B \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2} + C = 0.$$

$$\bar{B} z_1 + B \bar{z}_2 + B \bar{z}_1 + B z_2 + 2C = 0.$$

$$\Rightarrow \text{取 } \bar{B} z_1 + B z_2 + C = 0.$$

反之, 若 z_1, z_2 满足 $\bar{B} z_1 + B z_2 + C = 0$, 则

$$B \bar{z}_1 + \bar{B} z_2 + C = 0.$$

两式相加得 $\textcircled{2}$

$$\text{两式相减: } \bar{B} z_1 + B \bar{z}_2 = B \bar{z}_1 + \bar{B} z_2.$$

得 $\textcircled{1}$.

故 z_1, z_2 关于直线 L 对称.

定理证明 (2) 设分式线性变换为 $w = \frac{1}{z}$,

例 z_1, z_2 关于 γ_1 : $Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0$ 对称.

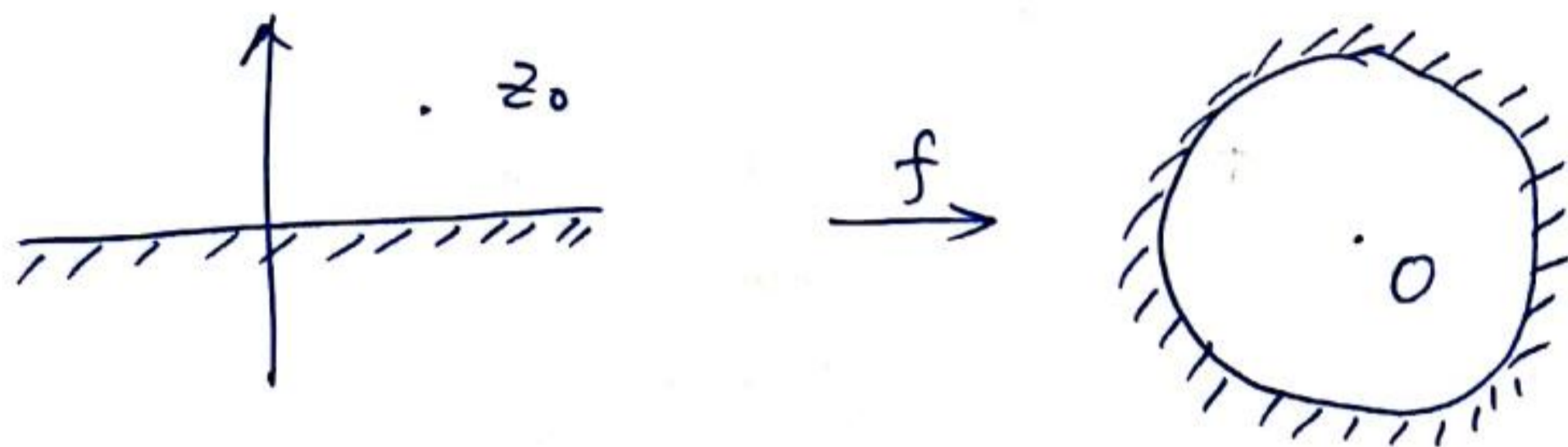
$$\Leftrightarrow A z_1 \bar{z}_2 + B \bar{z}_2 + \bar{B} z_1 + C = 0.$$

$$\Leftrightarrow A \frac{1}{w_1} \cdot \frac{1}{\bar{w}_2} + B \frac{1}{\bar{w}_2} + \bar{B} \frac{1}{w_1} + C = 0.$$

$$\Leftrightarrow A + B w_1 + \bar{B} \bar{w}_2 + C w_1 \bar{w}_2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow w_1, w_2 \text{ 关于 } \gamma_2: C w \bar{w} + B w + \bar{B} \bar{w} + A = 0 \text{ 对称.}$$

例. 求将上半平面 \mathbb{H} 映为单位圆 \mathbb{D} 的分式线性映射.



解. 存在 z_0 , 使 $f(z_0) = 0$
 $f(\bar{z}_0) = \infty$. 令 $f(a) = b$.

则 将 $(a, z_0, \bar{z}_0) \rightarrow (b, 0, \infty)$ 的分式为:

$$(z, a, z_0, \bar{z}_0) = (w, b, 0, \infty)$$

$$\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} : \frac{a - z_0}{a - \bar{z}_0} = \frac{w - 0}{w - \infty} : \frac{b - 0}{b - \infty} = \frac{w}{b}$$

$$\text{故 } w = k \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

由于 f 将实轴映为单位圆, 故令 $z = x \in \mathbb{R}$, 则

$$\left| k \cdot \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad |k| = 1 \quad \Rightarrow \quad k = e^{i\theta}, \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$$\text{故 } w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (\theta \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{H}).$$

例. 求将单位圆映为单位圆的分式.



解: 令 $f(z_0) = 0$, $f(\frac{1}{\bar{z}_0}) = \infty$, $f(a) = b$

故将 $(a, z_0, \frac{1}{\bar{z}_0}) \rightarrow (b, 0, \infty)$ 的分式为:

$$(z, a, z_0, \frac{1}{\bar{z}_0}) = (w, b, 0, \infty)$$

$$\frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} : \frac{a - z_0}{a - \frac{1}{\bar{z}_0}} = \frac{w - 0}{w - \infty} : \frac{b - 0}{b - \infty} = \frac{w}{b}$$

$$\Rightarrow w = k \cdot \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} = k' \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

证 $|z| < 1$ 时 $|w| = 1$, 证

$$1 = |k'| \cdot \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = |k'| \cdot \frac{|z - z_0|}{|z \bar{z} - \bar{z}_0 z|}$$

$$= |k'| \frac{|z - z_0|}{|z| \cdot |z - \bar{z}_0|} = |k'| \quad \text{证 } k' = e^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$$\text{证 } w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (|z_0| < 1, \theta \in \mathbb{R})$$

共形映射总结.

1. 分式线性映射

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

$$ad-bc \neq 0$$

将 \mathbb{C} 上的圆周映为圆周.

2. 指数函数.

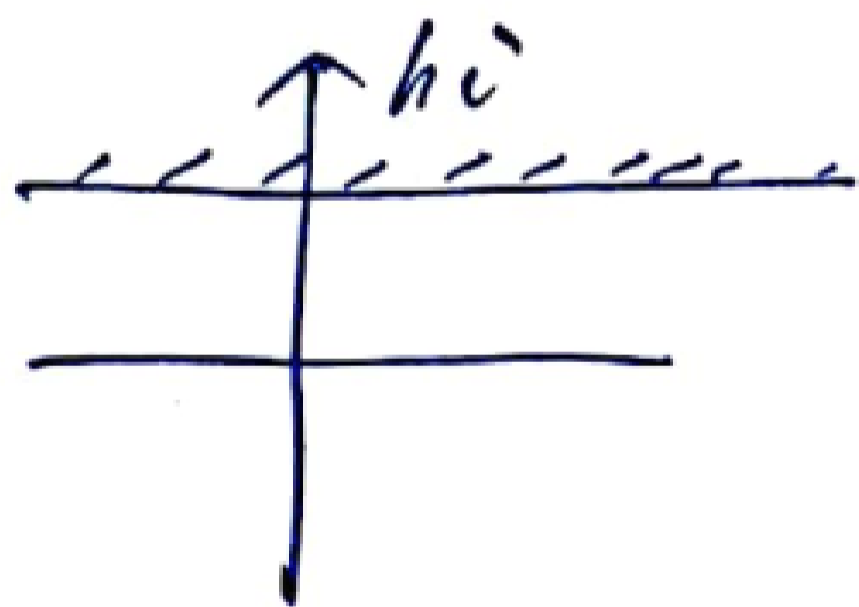
$$w = e^z$$

$$\text{令 } z = x + iy, \quad w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = e^x \\ \theta = y. \end{array} \right.$$

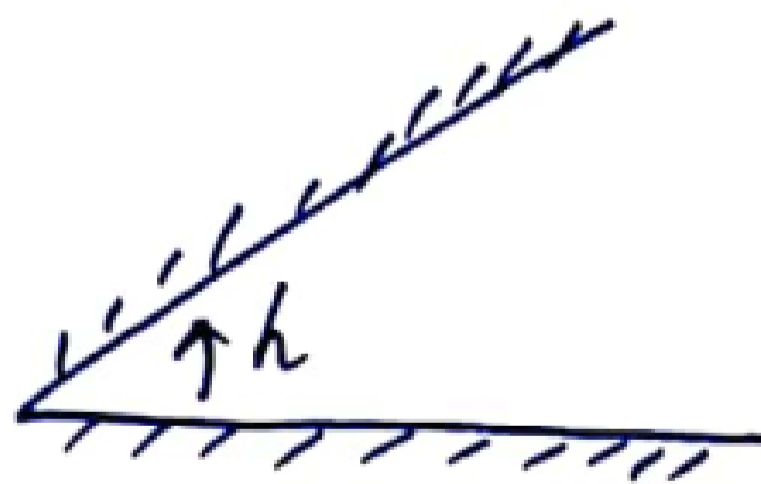
$$\{(x, y) \mid 0 < y < h\} \quad (0 < h \leq 2\pi) \longrightarrow \{(r, \theta) \mid r > 0, 0 < \theta < h\}$$

直角坐标

极坐标



e^z



若 $h > 2\pi$, 则 $w = f(z)$ 不是单射, 故不是共形映射.

3. 对数函数

$$w = \text{Log} z$$

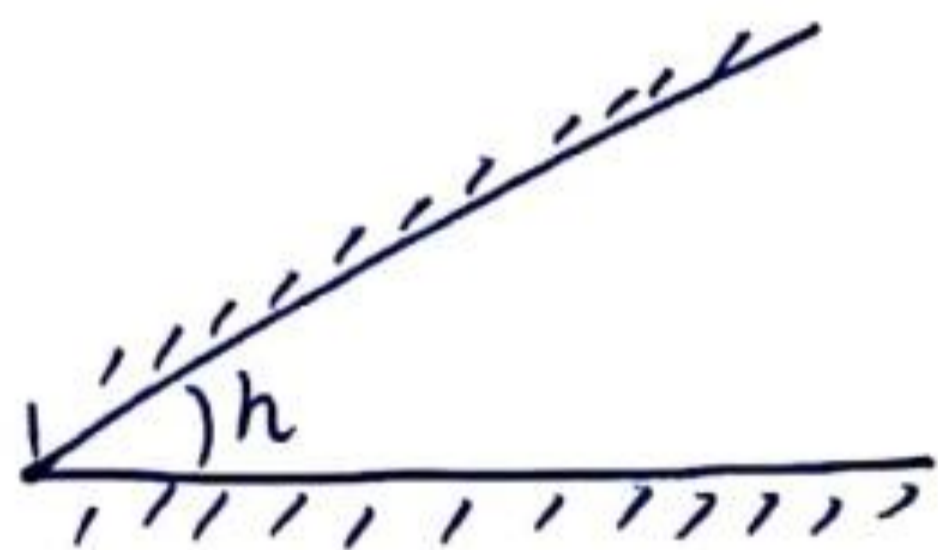
$$\text{令 } z = (r, \theta),$$

$$w = \log |z| + i \text{Arg} z$$

$$= \log |z| + i \arg z,$$

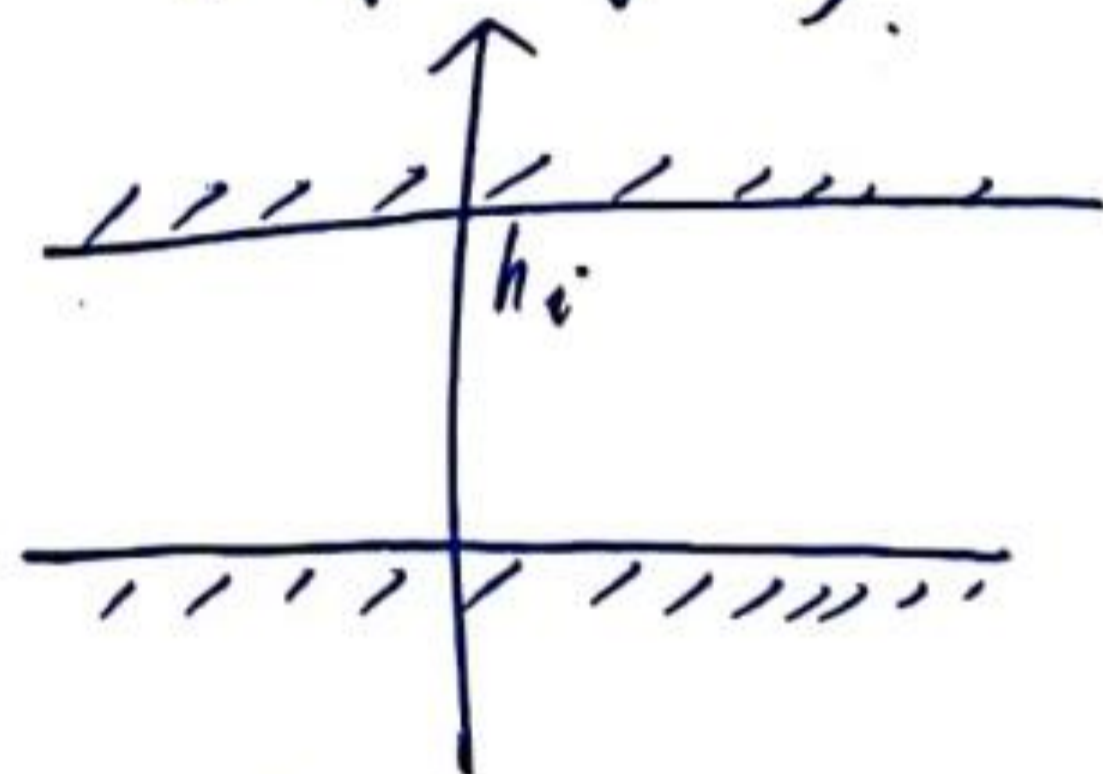
$$0 \leq \arg z < 2\pi.$$

$$\{ (r, \theta) \mid 0 < \theta < h \} \quad (0 < h \leq 2\pi) \longrightarrow \{ (x, y) \mid 0 < y < h \}$$



扇形

$\text{Log} z$
→



带形

4. 幂函数 $W = z^n$, $n \geq 2$.

$$\text{令 } z = re^{i\alpha}, \quad w = r^n e^{in\alpha}$$

$$\Omega = \{(r, \theta) \mid 0 < \theta < \alpha\} \xrightarrow{z^n} \{(r, \tilde{\theta}) \mid 0 < \tilde{\theta} < n\alpha\}, \quad (n\alpha \leq 2\pi)$$

扇形

扇形 (角度扩大 n 倍).

单叶域: $z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow e^{in\theta_1} = e^{in\theta_2}$

$$\Leftrightarrow e^{in(\theta_1 - \theta_2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

取 $\frac{\pi}{n}$ 设 $0 < \alpha < \frac{2\pi}{n}$, 则 Ω 中不存在两点 z_1, z_2 , 使得

$$|\theta_1 - \theta_2| = \frac{2k\pi}{n}.$$

5 根式函数 $W = z^{\frac{1}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) $n \geq 2$.

$$\text{令 } z = re^{i\alpha},$$

$$W = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}.$$

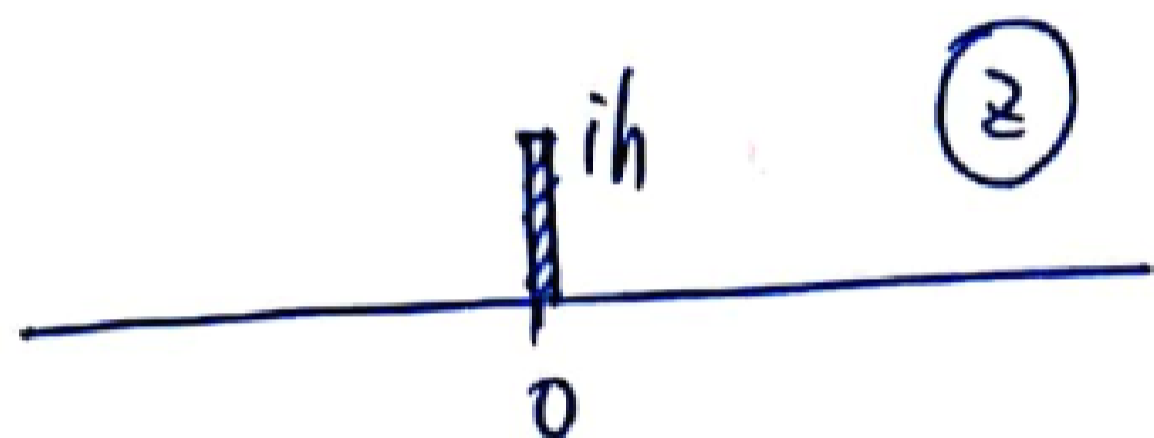
$$\{ (r, \theta) \mid 0 < \theta < \alpha \}$$

扇形

$$\xrightarrow{W = z^{\frac{1}{n}}} \{ (p, \tilde{\theta}) \mid 0 < \tilde{\theta} < \frac{\alpha}{n} \} \quad (0 < \alpha < 2\pi)$$

扇形.

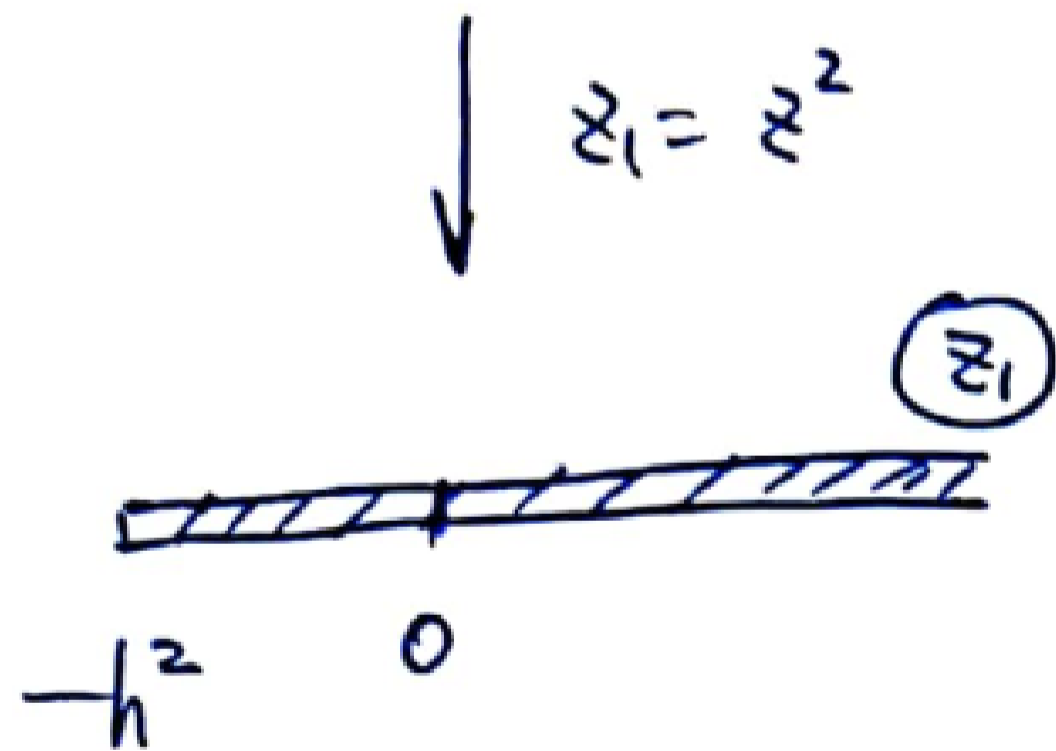
例：设 \mathbb{H} 表示上半平面， $D = \mathbb{H} \setminus [ih, 0]$ ($h > 0$)。
 求将 D 映为 \mathbb{H} 的共形变换。



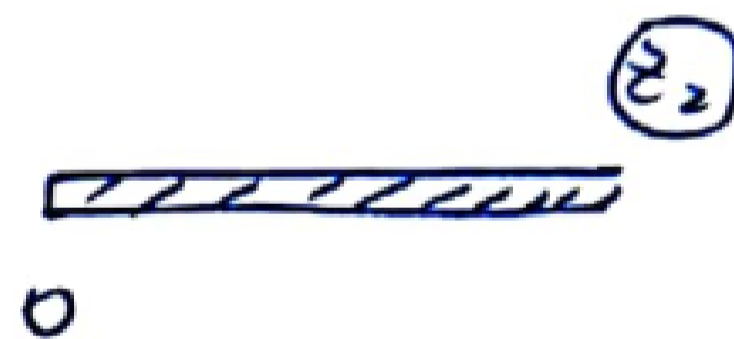
$$w = \sqrt{z^2 + h^2}$$



$$w = \sqrt{z_2}$$

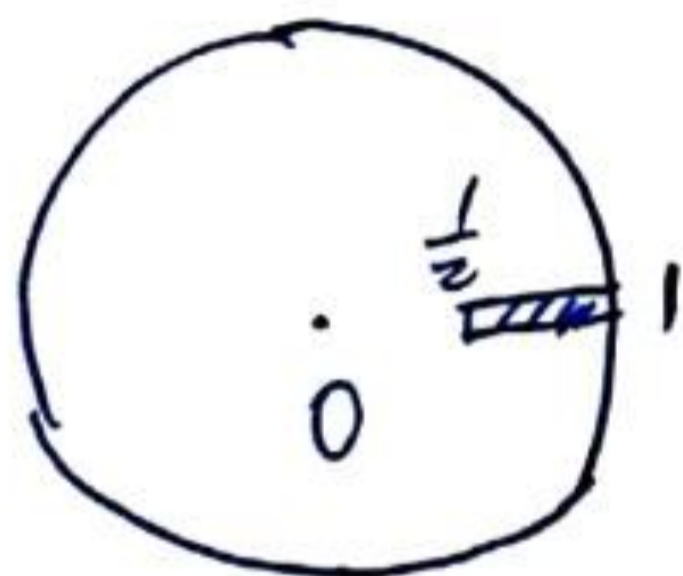


$$z_2 = z_1 + h^2$$

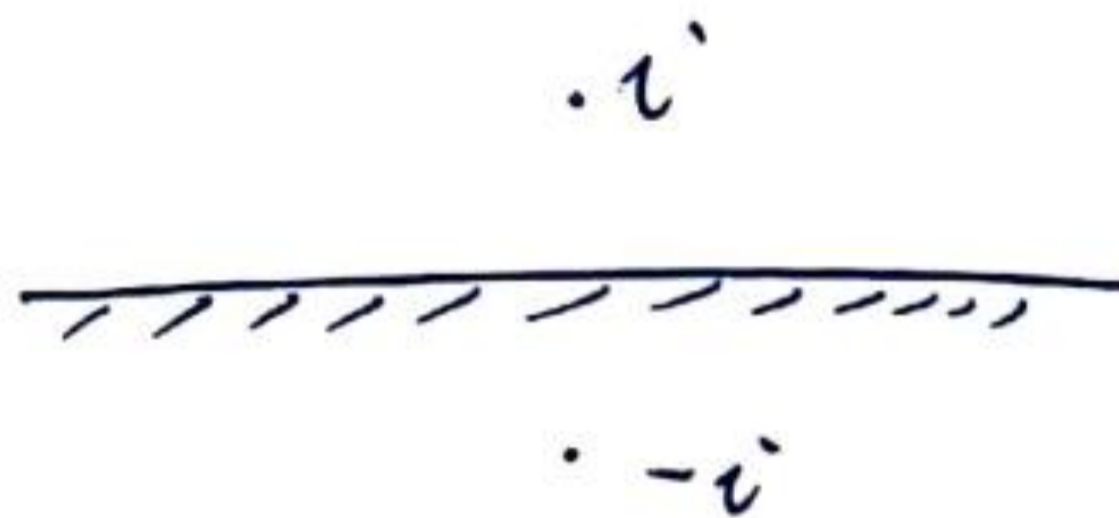


例: 求将 $|z| < 1$ 去掉 $[\frac{1}{2}, 1]$ 的区域映为上半平面的共形变换

解:

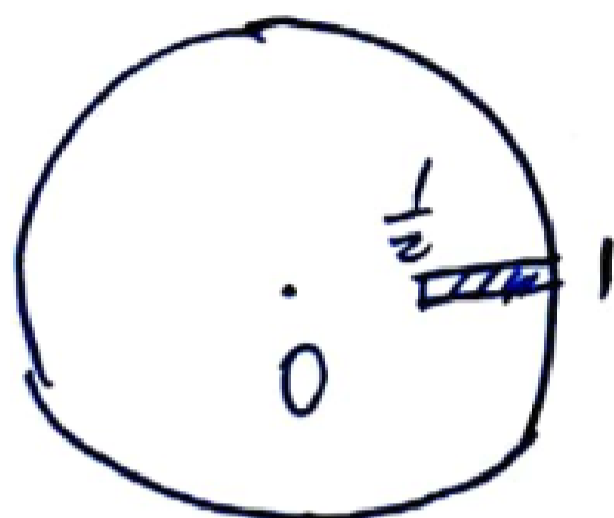


f

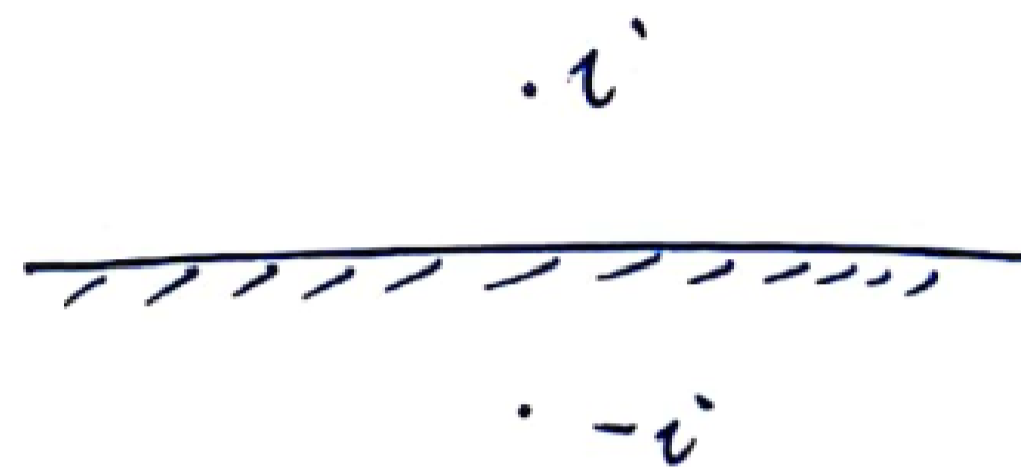


例: 求将 $|z| < 1$ 去掉 $[\frac{1}{2}, 1]$ 的区域映为上半平面的共形变换

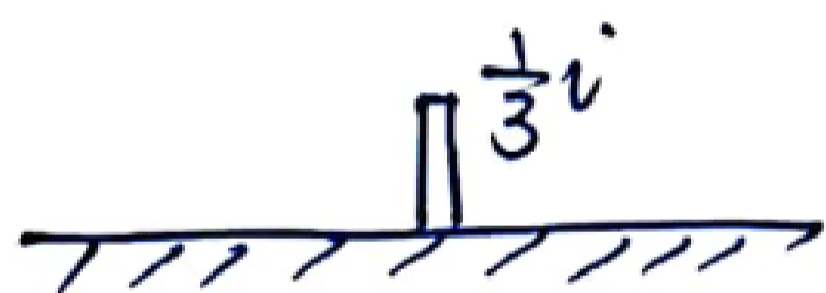
解:



$f \rightarrow$



$z_1 = i \frac{1-z}{1+z}$

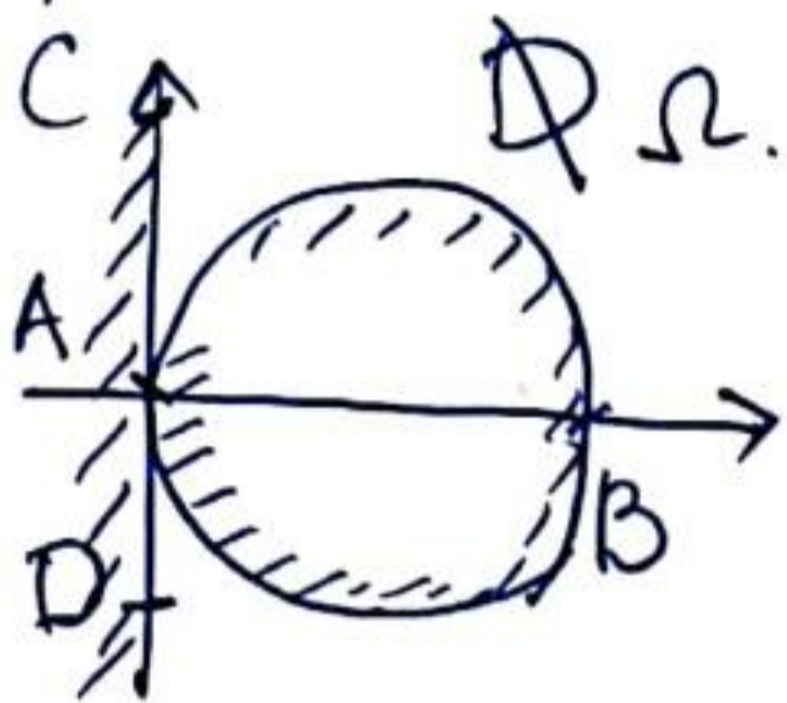


$w = \sqrt{z_1^2 + \frac{1}{9}}$

- $0 \rightarrow i$
- $1 \rightarrow 0$
- $\infty \rightarrow -i$

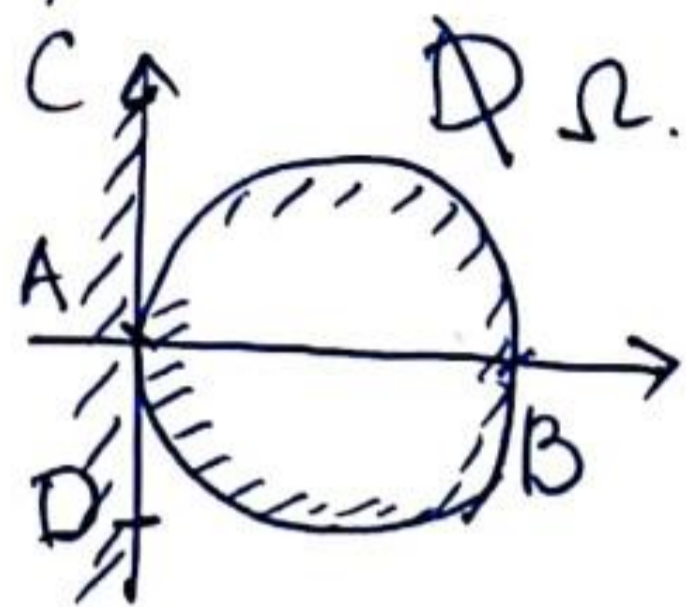
例: 设 Ω 是 $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ 与虚轴围成的无界区域, 求 $\Omega \rightarrow \mathbb{H}$ 的

共形映射.



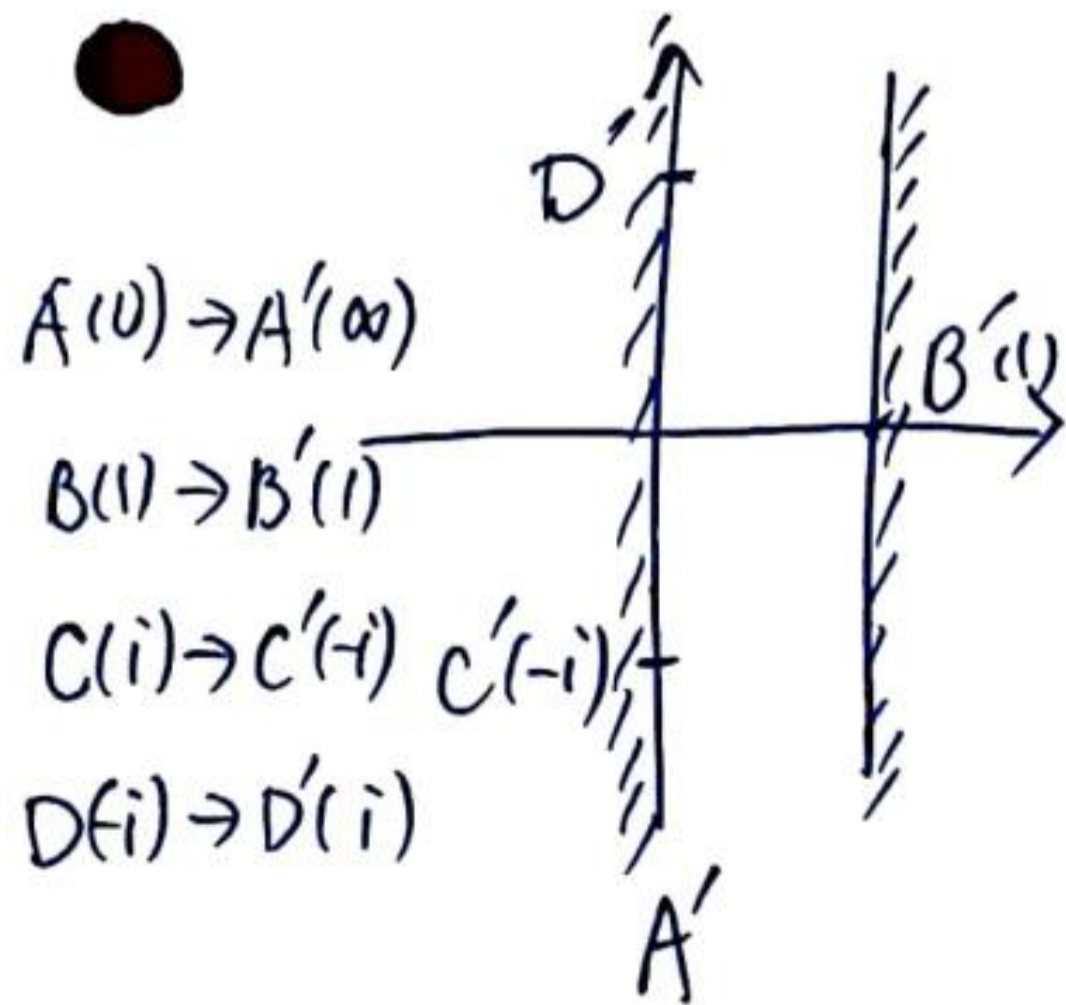
例: 设 Ω 是 $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ 与虚轴围成的无界区域, 求 $\Omega \rightarrow \mathbb{H}$ 的

共形映射.

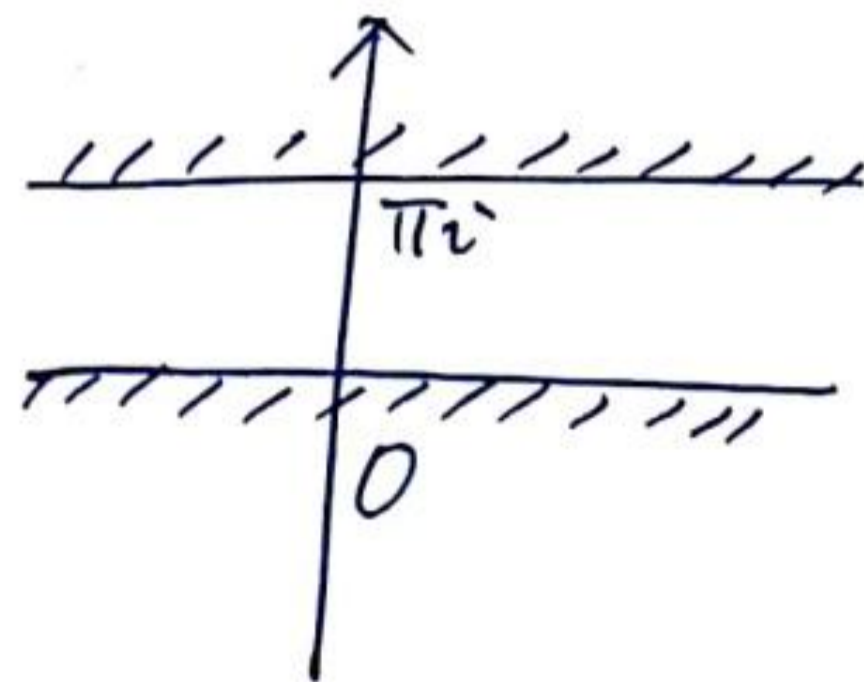


$z_1 = \frac{1}{z}$

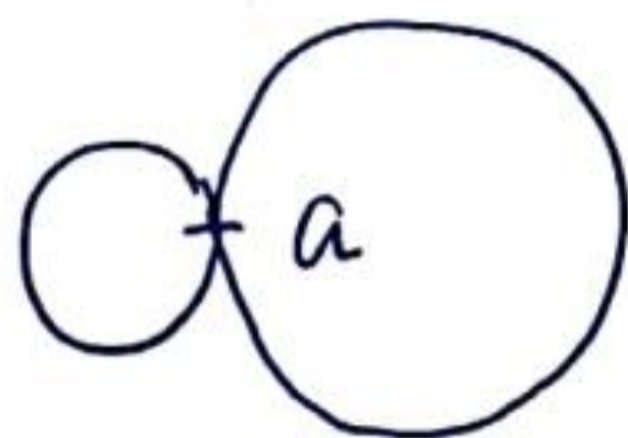
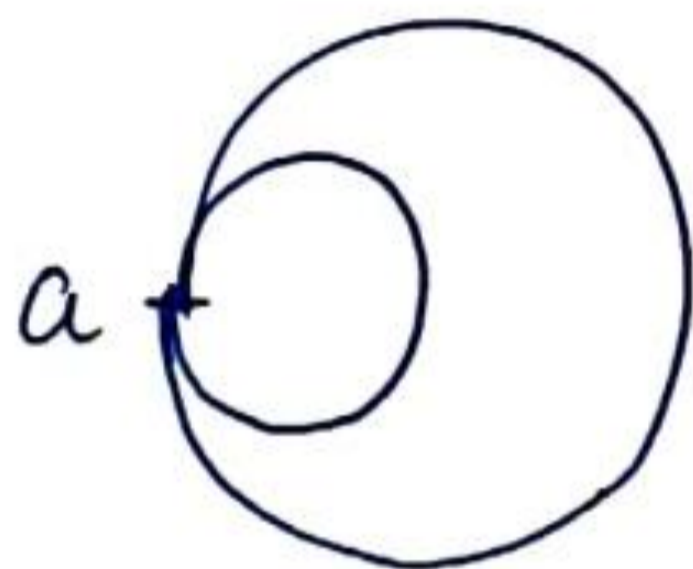
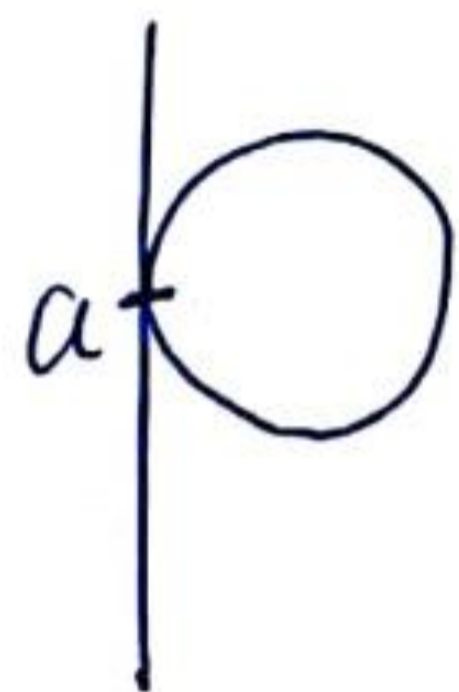
$w = e^{z_2}$



$z_2 = \pi i z_1$



说明: 若两圆相切, 如:

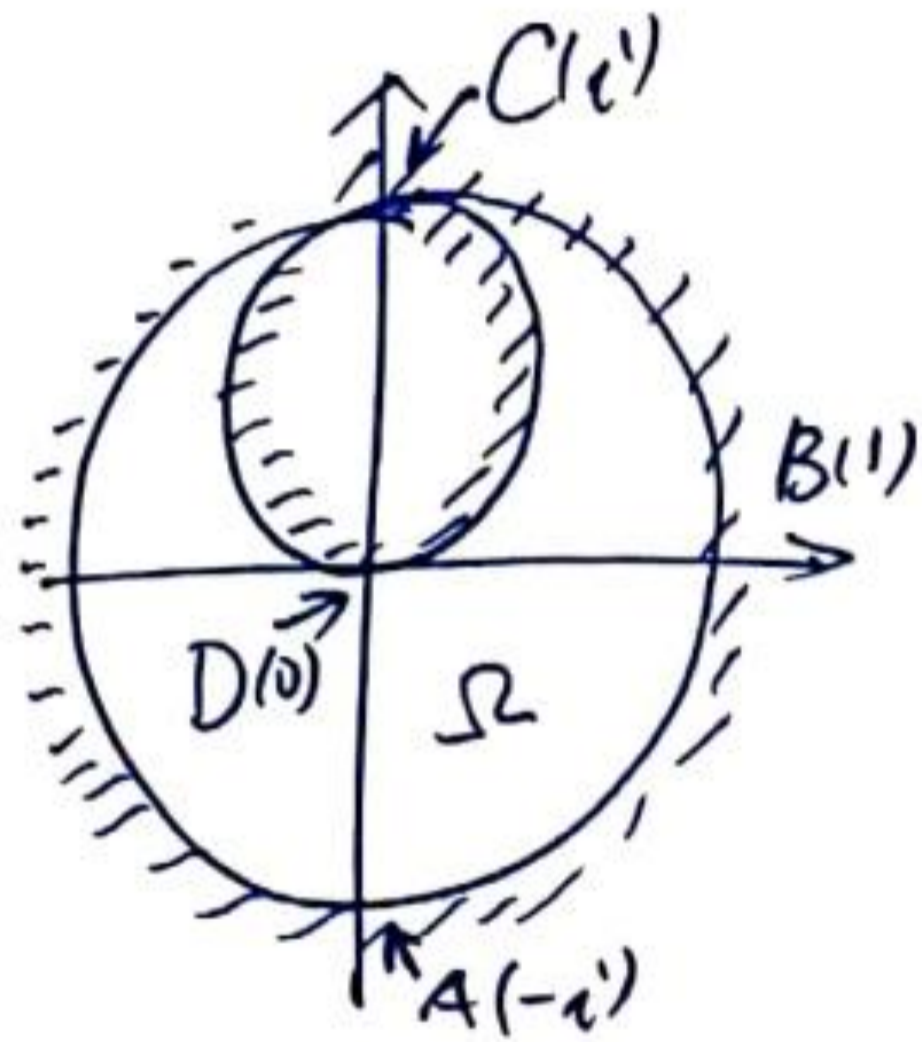


令

$$w = \frac{cz+d}{z-a},$$

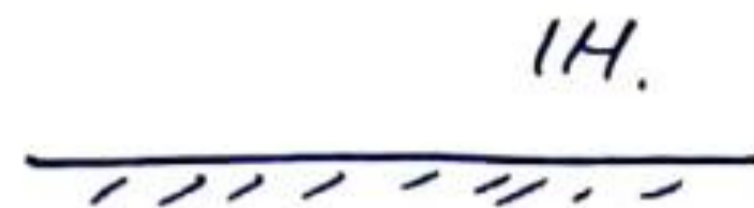
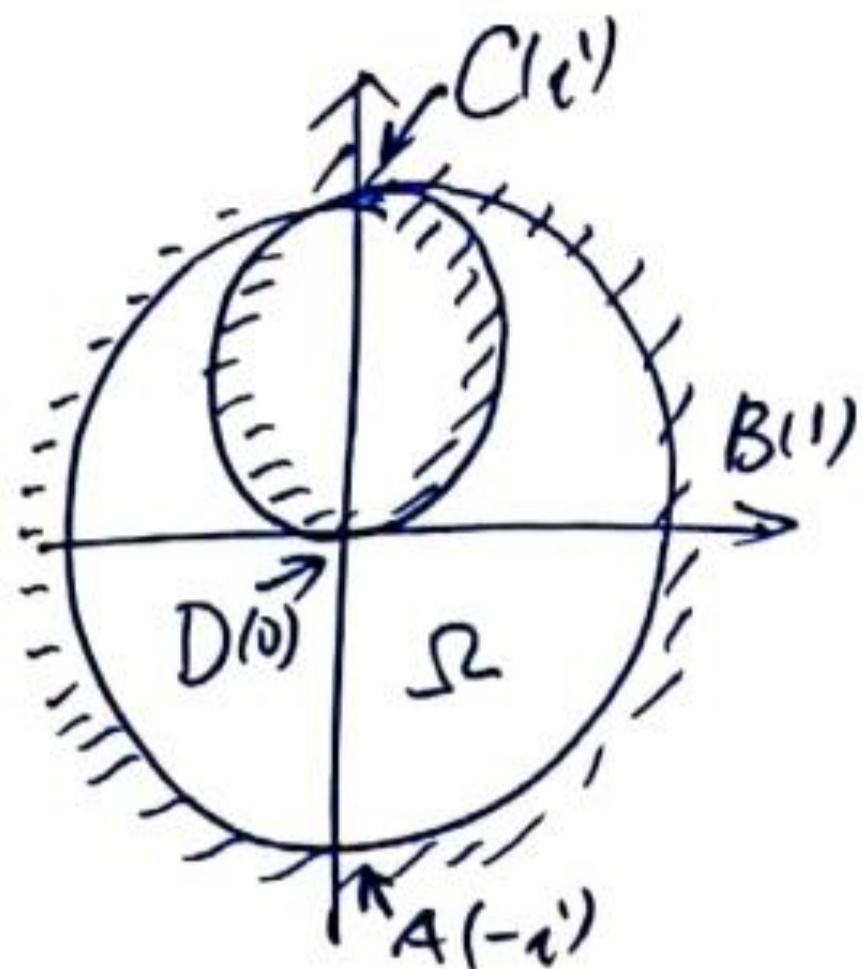
将 a 变为 ∞ , 则两圆相切变为两平行直线.

Ex 1:



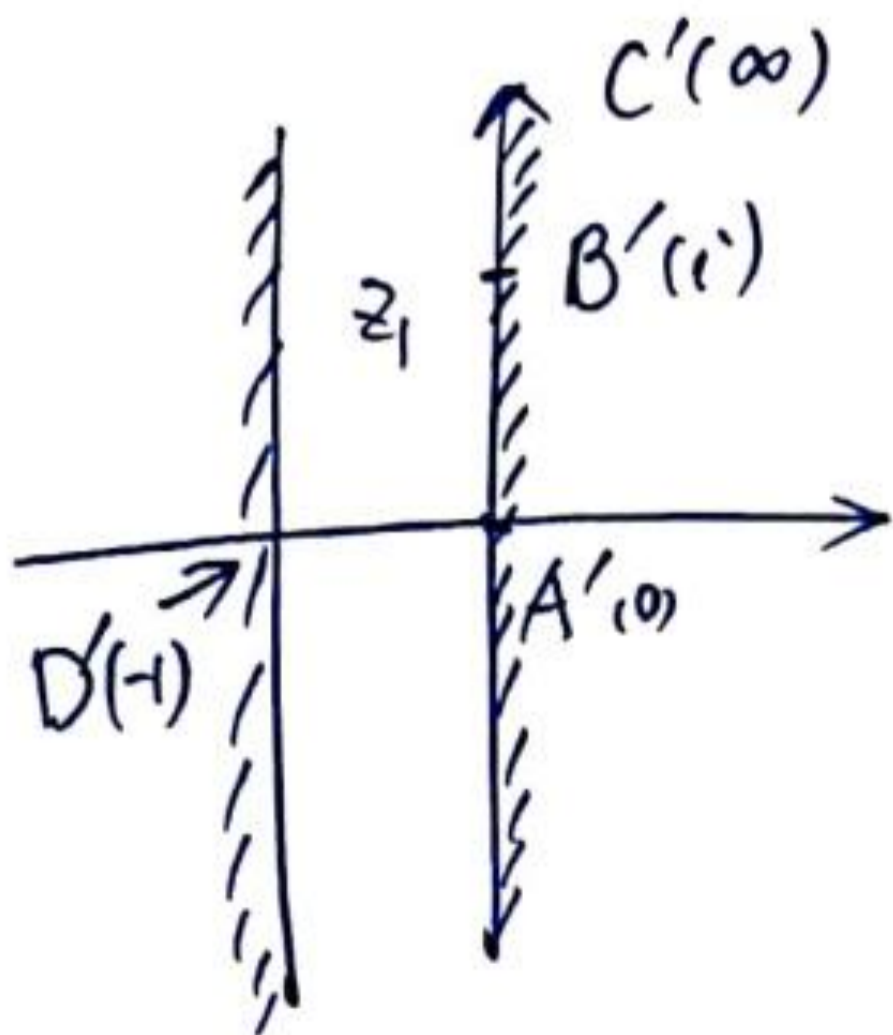
$w = e^{z^2}$

例:

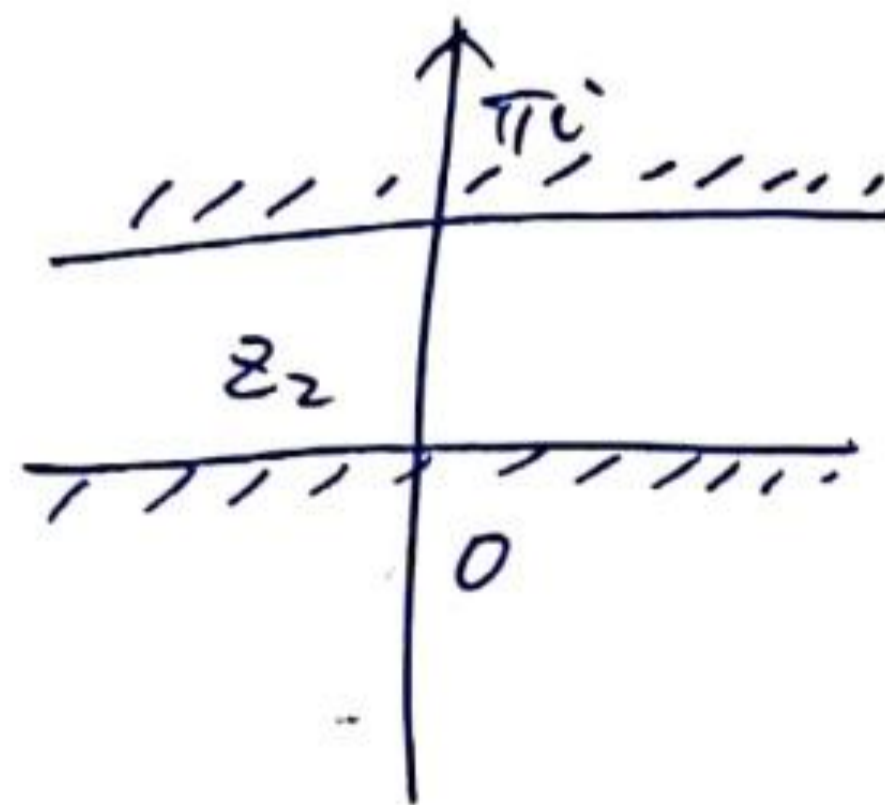


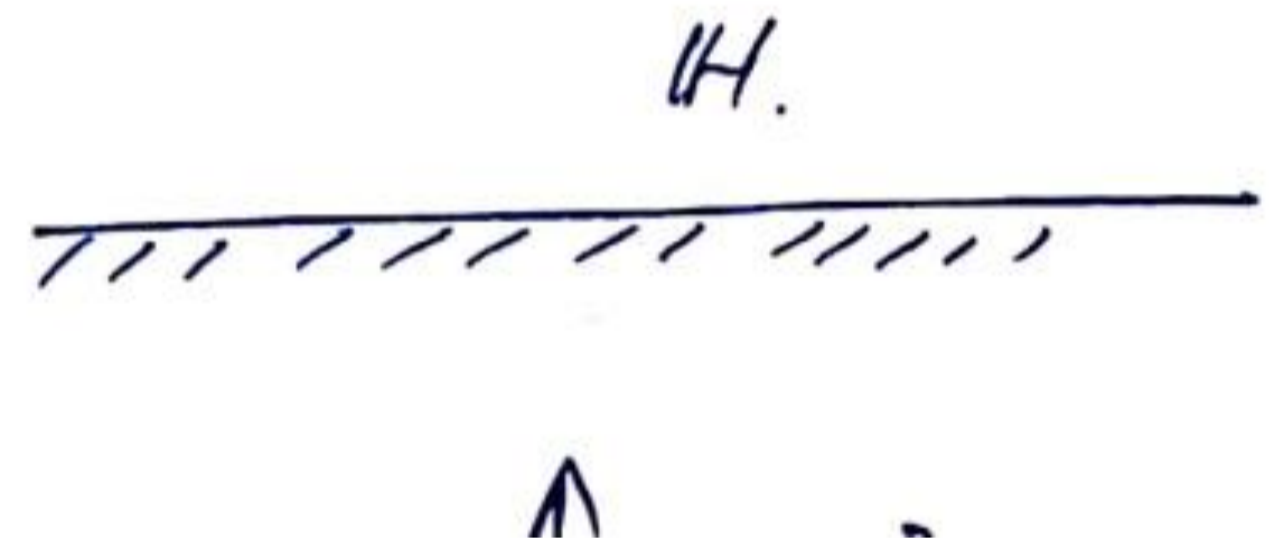
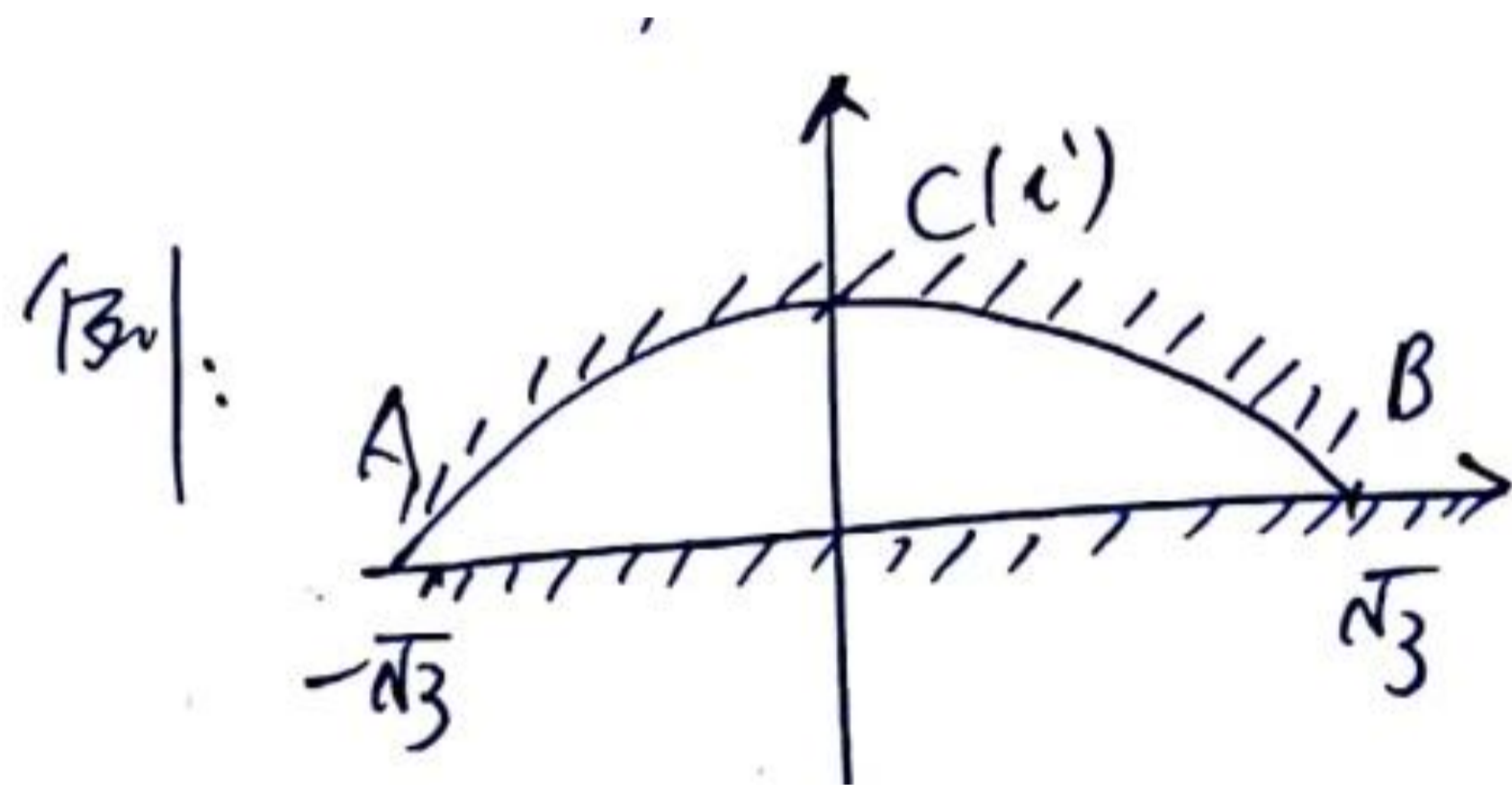
↑ $w = e^{z_2}$

↓ $z_1 = \frac{z+i}{z-i}$ 虚轴 → 实轴.

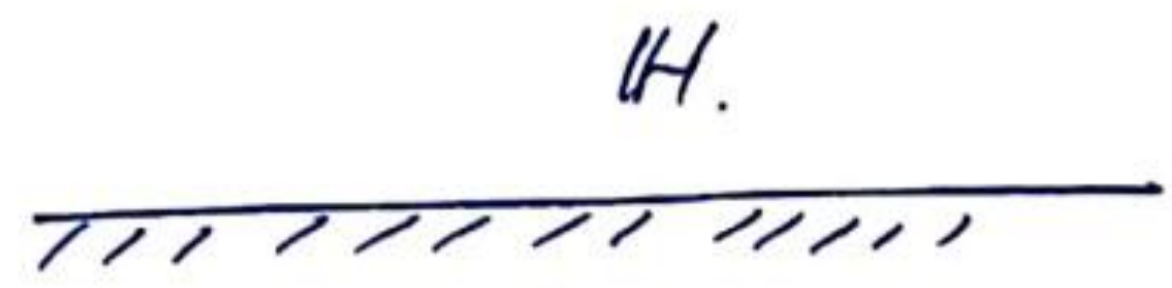
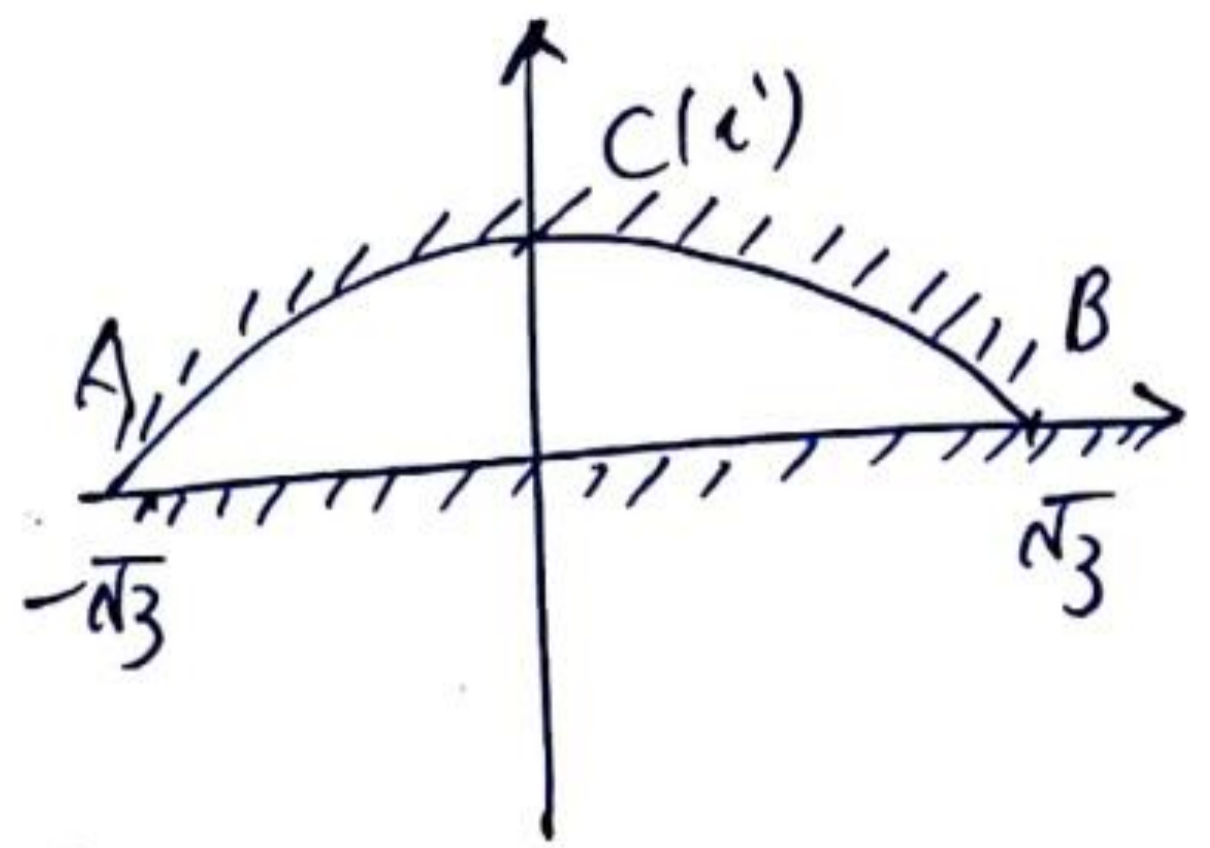


$z_2 = -i\pi z_1$





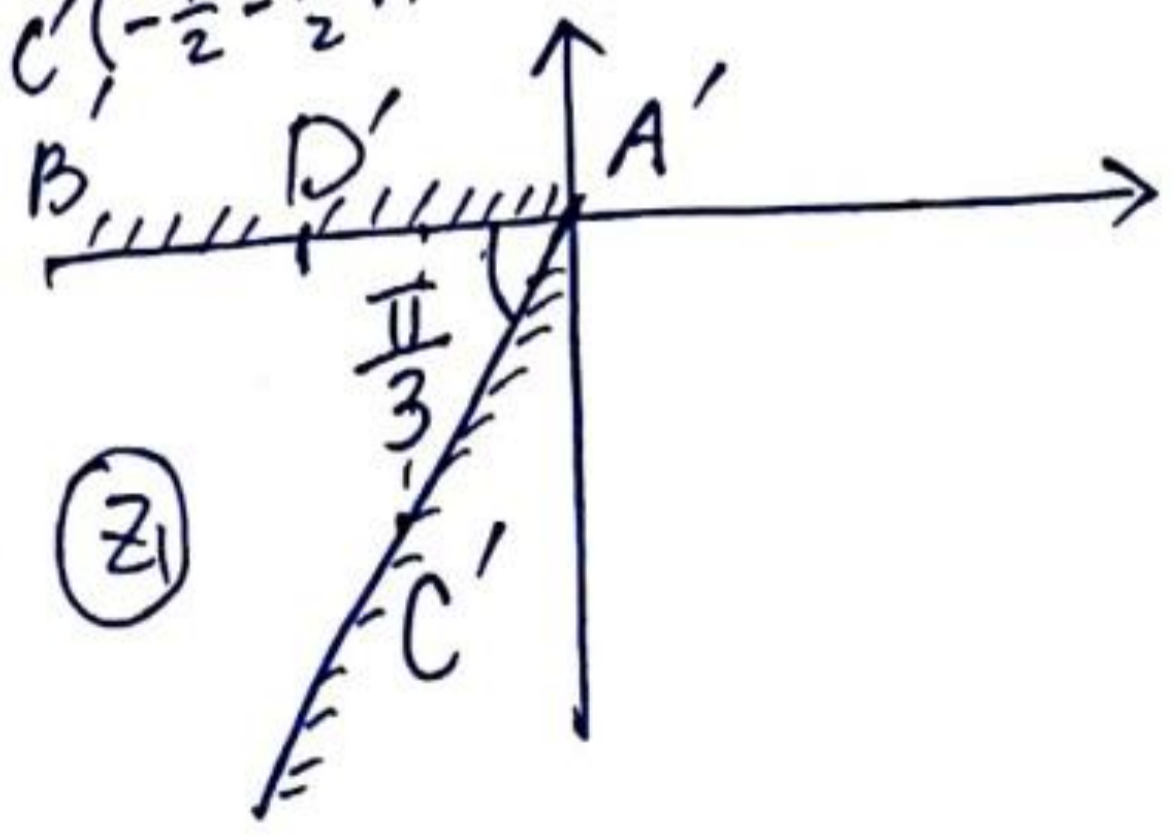
130:



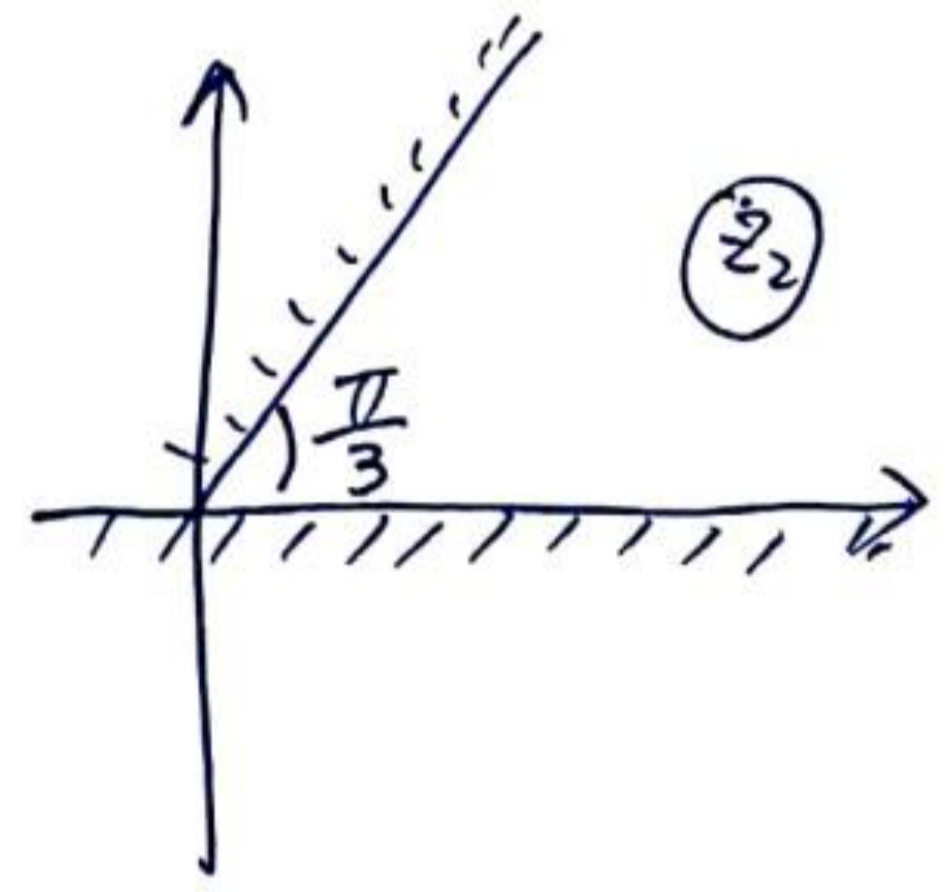
↑ $z_3 = z_2^3$

- $A(-\sqrt{3}) \rightarrow A'(0)$
- $B(\sqrt{3}) \rightarrow B'(\infty)$
- $D(0) \rightarrow D'(-1)$
- $C(i) \rightarrow C'(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$z_1 = \frac{z + \sqrt{3}}{z - \sqrt{3}}$



→ $z_2 = z_1 e^{\pi i}$

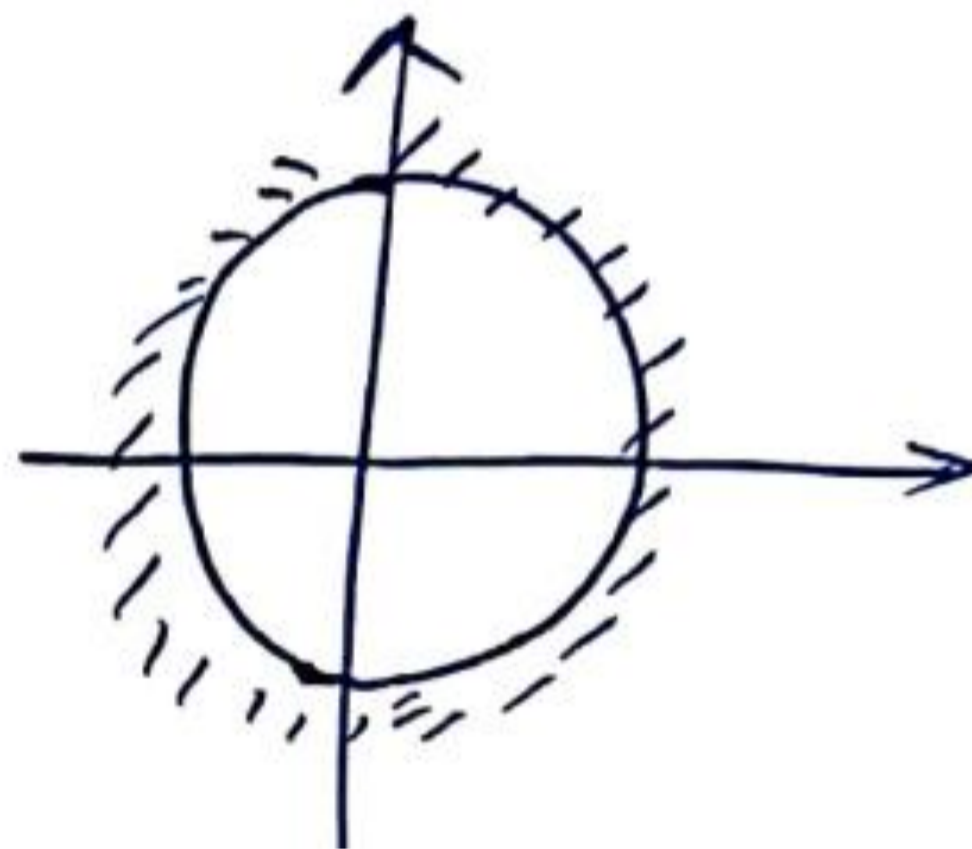
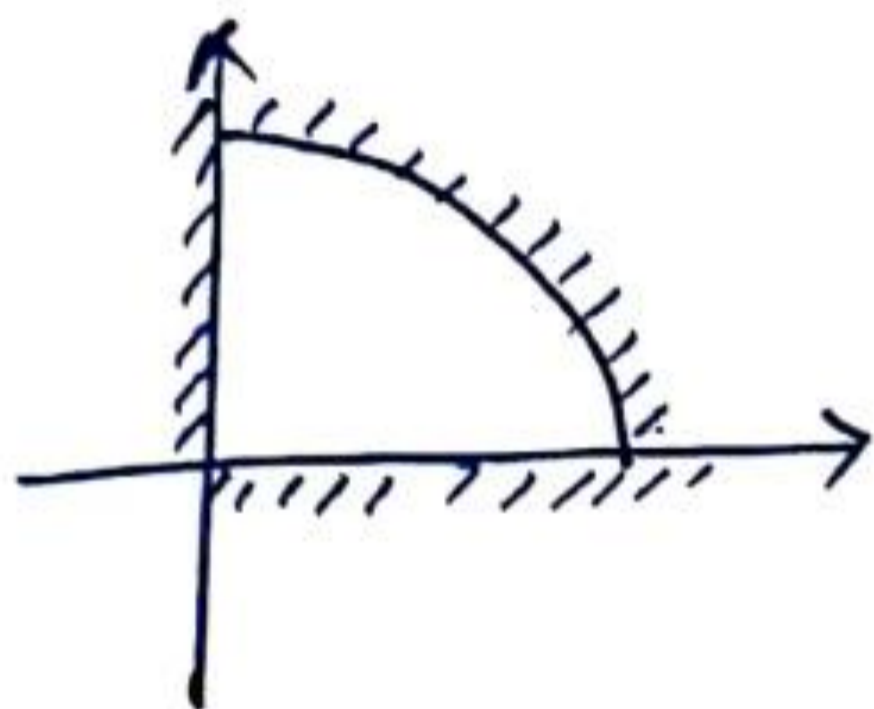


说明: 若两圆相交, 则令 $a \rightarrow 0$
 $b \rightarrow \infty$

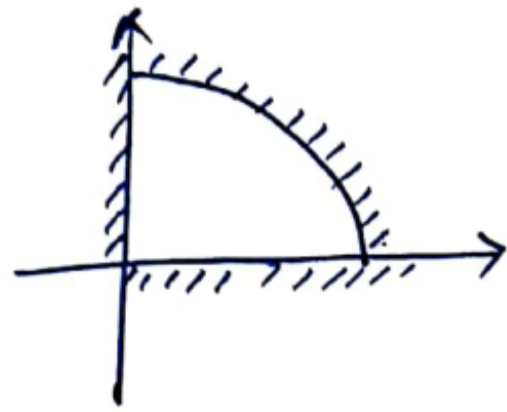
即令 $w = c \cdot \frac{z-a}{z-b}$



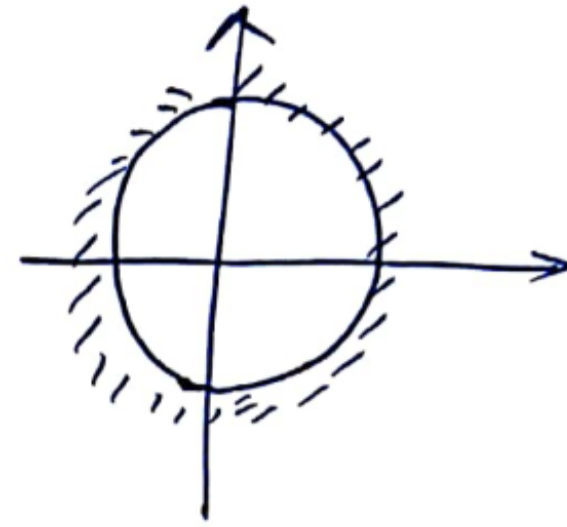
例: 将



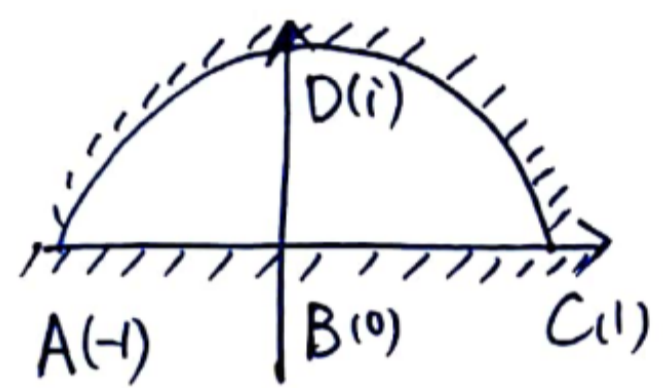
13. | 将



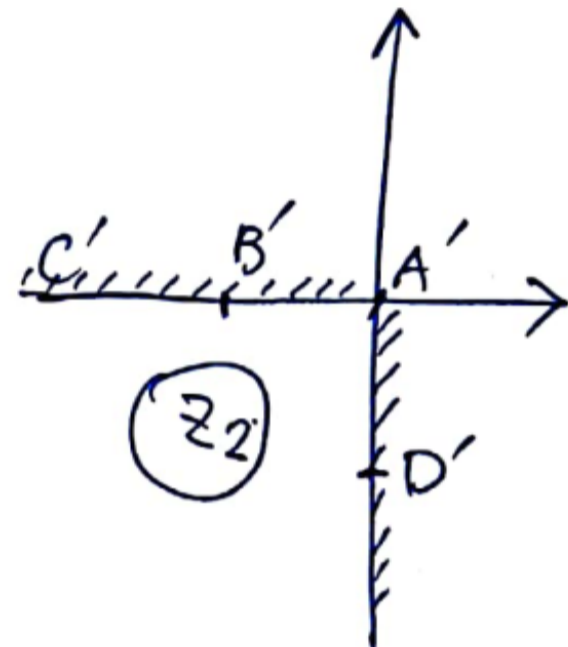
→



$z_1 = z^2$



$z_2 = \frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}$

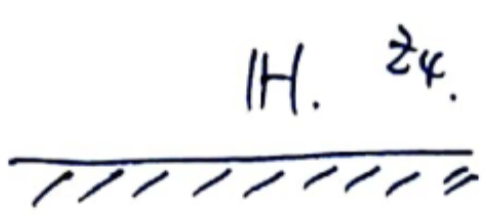


- $A(-1) \rightarrow A'(0)$
- $B(0) \rightarrow B'(-1)$
- $C(1) \rightarrow C'(\infty)$
- $D(i) \rightarrow D'(-i)$

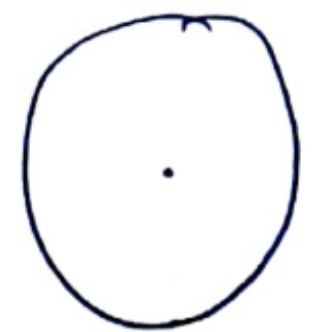
$z_3 = -z_2$



$z_4 = z_3^2$

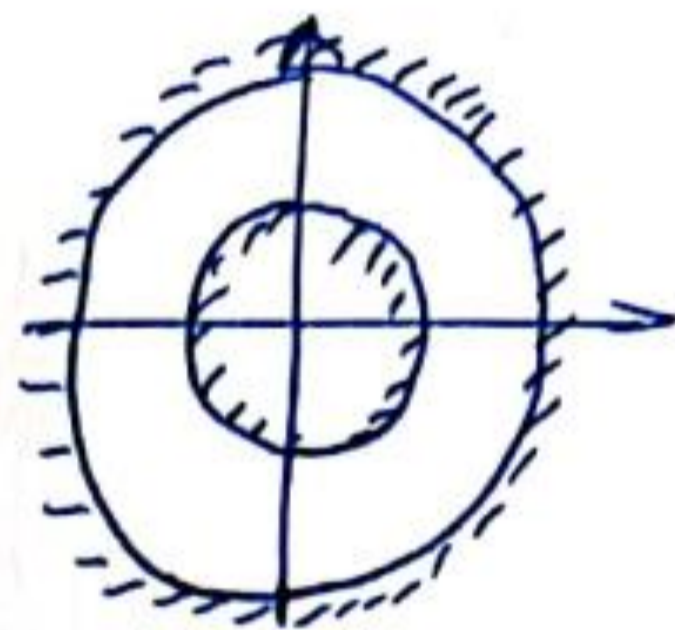
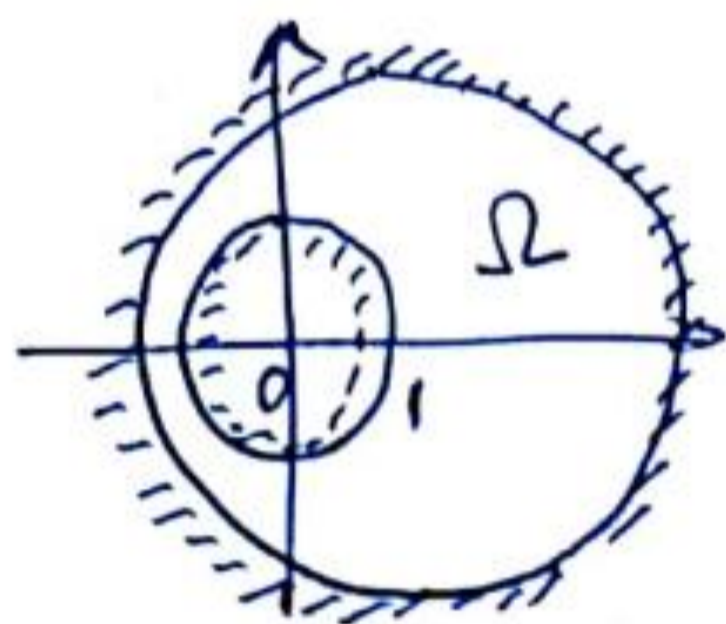


$w = \frac{z_4 - i}{z_4 + i}$



例: 求将 $|z|=1$ 与 $|z-1|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 所围区域 Ω 共形映为同心圆环

$$1 < |w| < R,$$



解: 两圆的公共对称点一定在实轴上 (原因?), 设为 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4} \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{作 } w_1 = \frac{z + \frac{1}{4}}{z + 4}$$

$$\text{当 } z=1 \text{ 时, } w_1 = \frac{1}{4}$$

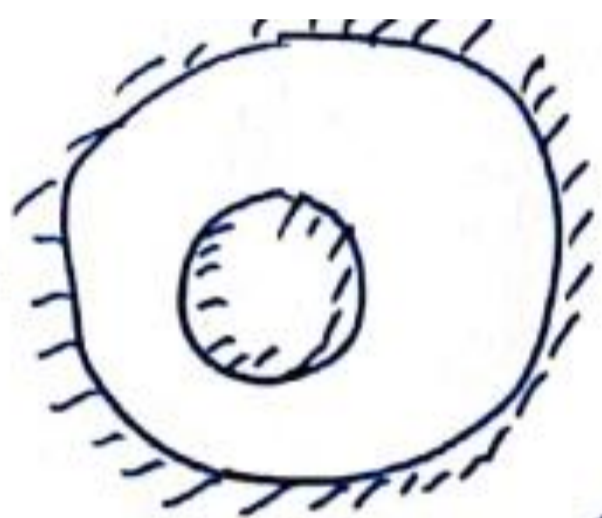
$$\text{当 } z = \frac{7}{2} \text{ 时, } w_1 = \frac{1}{2}$$

故 $w_1 = w_1(z)$ 将 Ω 映为 $\left\{ \frac{1}{4} < |w_1| < \frac{1}{2} \right\}$.

$$\text{令 } w = 4w_1 = 4 \cdot \frac{z + \frac{1}{4}}{z + 4}$$

则 $w = w(z)$ 将 Ω 映为 $\{ 1 < |w| < 2 \}$, $R=2$.

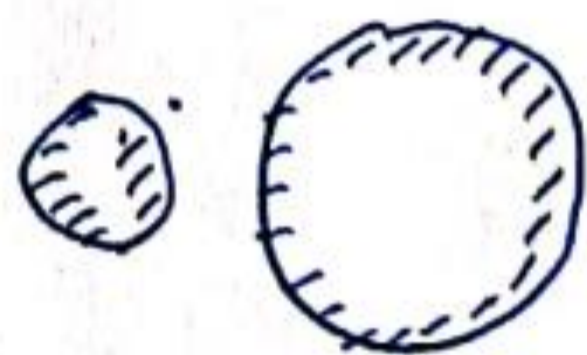
注意，若两圆相离。



则求公共对称点 z_1, z_2 作：

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

将区域映为同心圆环。



例: Rookovsky 函数. $W = \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

① 单叶域: $\frac{1}{z} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{z} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right)$
 $\Leftrightarrow (z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0.$

取 Ω 为单叶域 $\Leftrightarrow \Omega$ 中不含有 $z_1 z_2 = 1$ 的两点 z_1, z_2 .

例: $\mathbb{D}, \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$,

\mathbb{H} 为单叶域: $\forall z \in \mathbb{H}, z = re^{i\theta}, \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \notin \mathbb{H}.$

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{H} = \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ 下半平面也为单叶域.

② 映射性质. 设 $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$. 则:

$$u + iv = \frac{1}{2} \left(r e^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta.$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

③ 圆周 $|z|=r$ 的像: 当 $r \neq 1$ 时, 消去 θ :

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right)^2} = 1$$

故 $|z|=r$ 的像为椭圆, 长半轴 $a = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$

$$\text{短半轴 } b = \frac{1}{2}\left|r-\frac{1}{r}\right|$$

当 $r: 0 \rightarrow 1$ 时 或 $r: +\infty \rightarrow 1$ 时.

$$a: +\infty \rightarrow 1$$

$$b: +\infty \rightarrow 0.$$

故 $|z|=r$ 的像从长半轴为 $+\infty$ 的椭圆退化到
二重线段.

若 $0 < r < 1$, $0 < \theta < \pi$, 则 $v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\theta < 0$

故 $|z|=r$ 上半圆周映为下半椭圆.

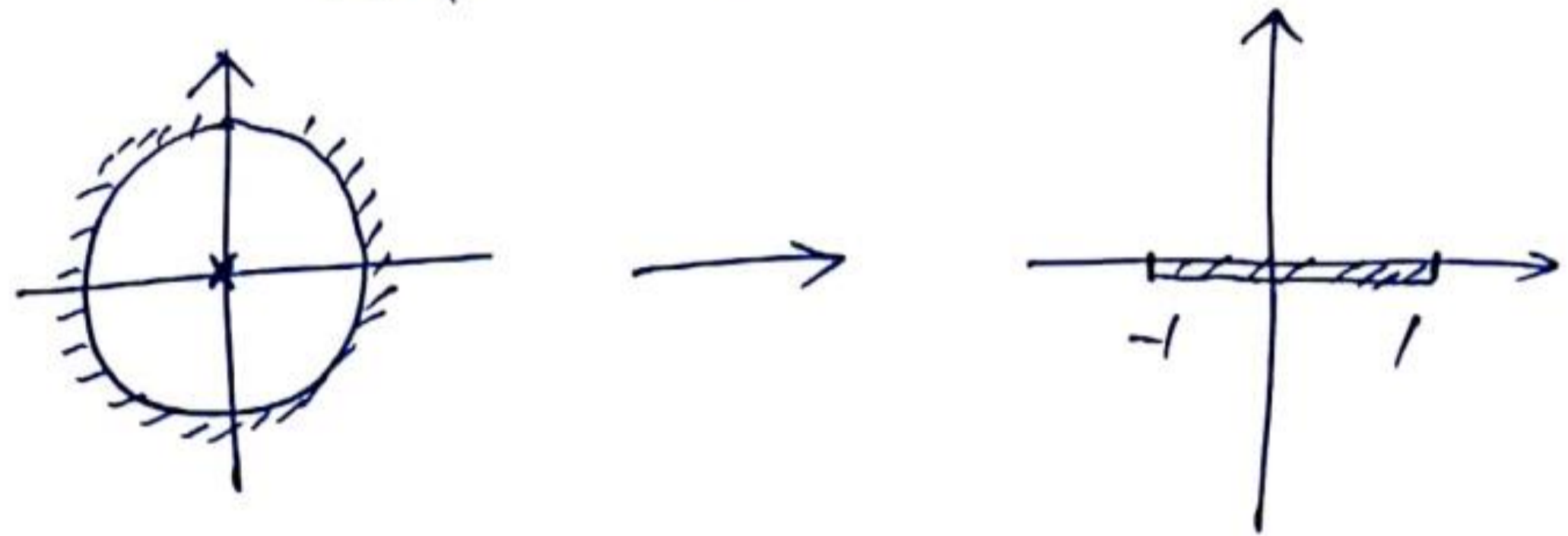
同理: $|z|=r$ 下半圆周映为上半椭圆..

若 $r > 1$, $0 < \theta < \pi$, 则 $v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\theta > 0$

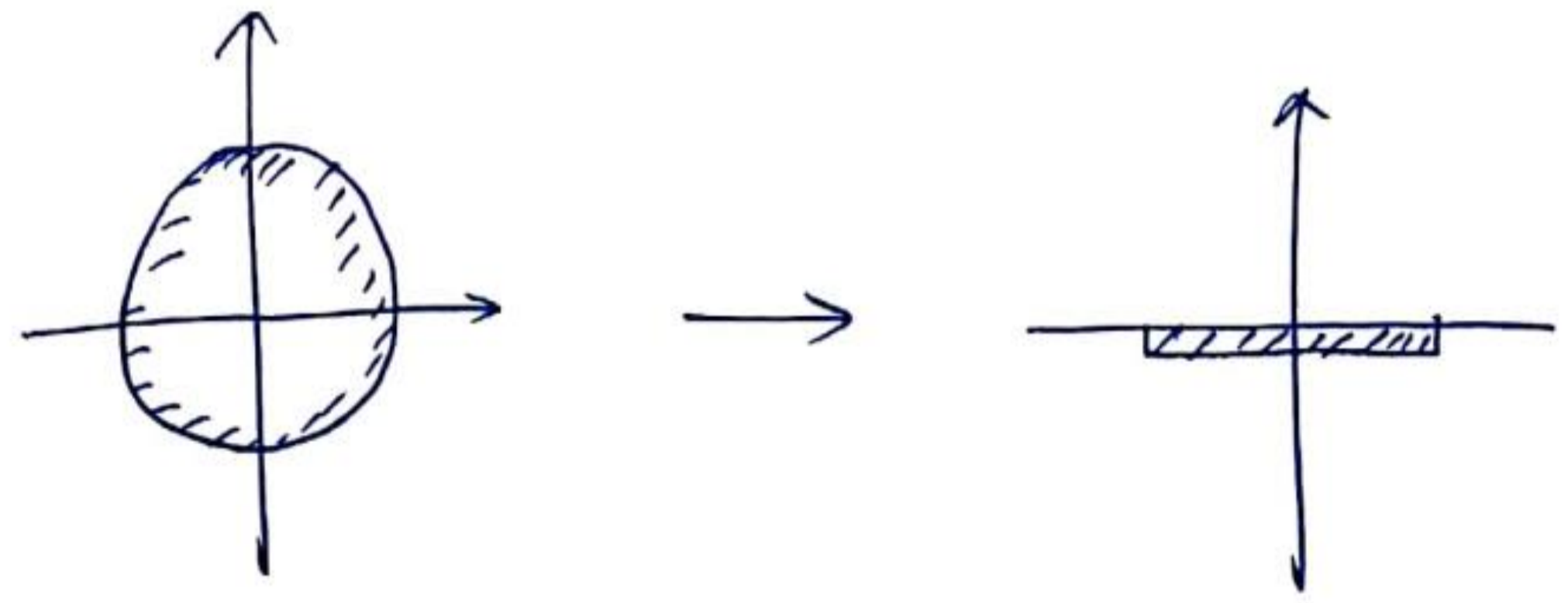
故 $|z|=r$ 上半圆周映为上半椭圆.

同理 $|z|=r$ 下半圆周映为下半椭圆.

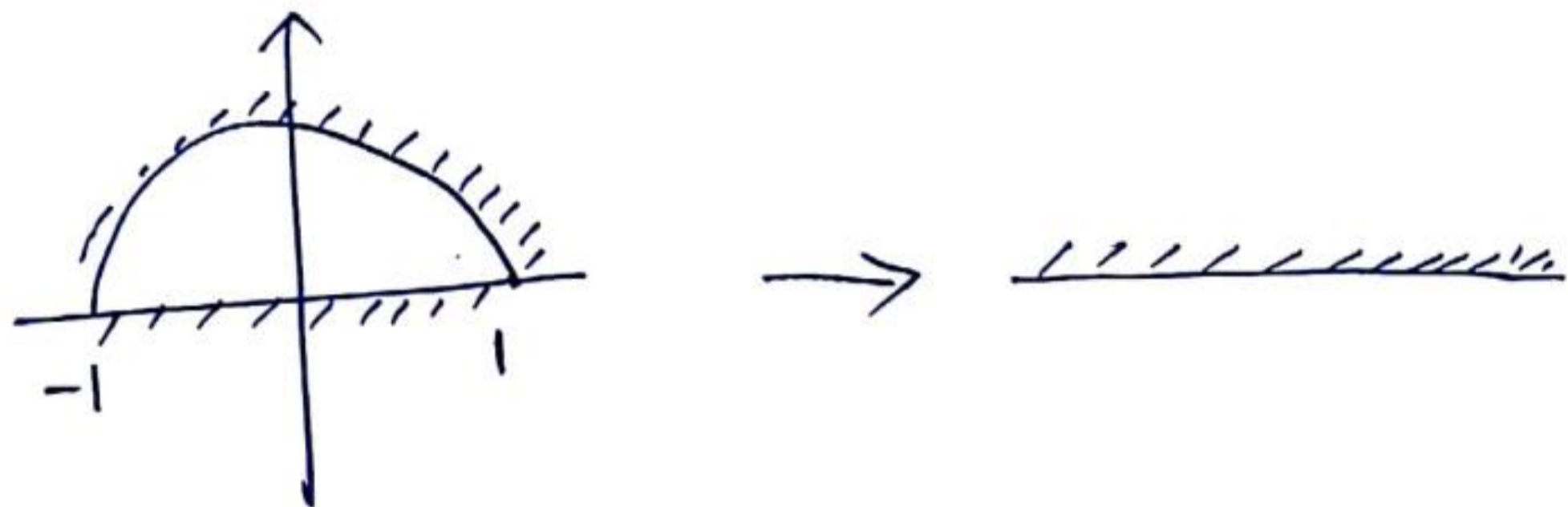
例上: ① $W = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ 가 $\{0 < |z| < 1\}$ 映为 $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
 가 $\{ |z| < 1 \}$ 映为 $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.



② $W = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ 가 $\{ |z| > 1 \}$ 映为 $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

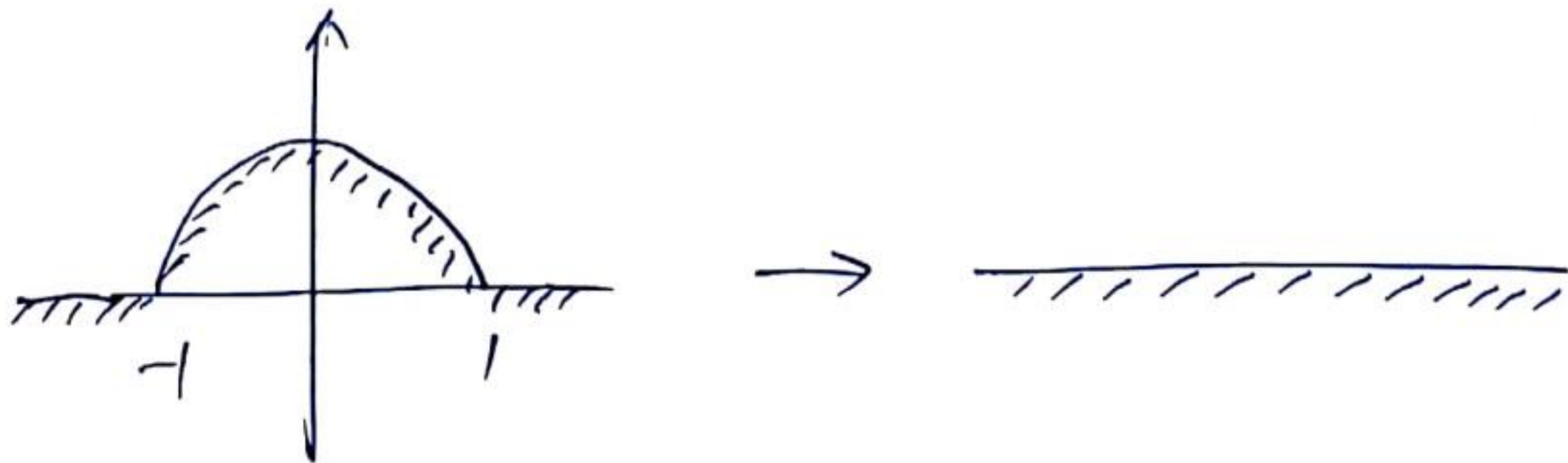


③ $w = \frac{1}{z} (z + \frac{1}{z})$ 将上半圆域映为下半平面.



$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}.$$

④ $w = \frac{1}{z} (z + \frac{1}{z})$ 将 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ 映为 $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$.



④ 射影 $\arg z = 0$ 的像.

若 $\theta \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$, 则 $\cos \theta \neq 0, \sin \theta \neq 0$.

$$\frac{u}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right),$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{4} \left(r^2 + \frac{1}{r^2} + 2 \right)$$

$$\frac{v}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right),$$

$$\frac{v^2}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{4} \left(r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \right)$$

$$\text{故 } \frac{u^2}{\cos^2 \theta} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta} = 1.$$

若 $\theta = 0$, 则 $v = 0, u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$,

当 $r: 0 \rightarrow 1 \rightarrow +\infty$ 时, $\begin{cases} u: +\infty \rightarrow 1 \rightarrow +\infty. \\ v = 0 \end{cases}$

故 $\arg z = 0$ 的像为实轴上半射线 $u \geq 1$ 两次.

若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $u > 0$, $\arg z = 0$ 的像为双曲线右半枝.

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $u = 0$, $\arg z = 0$ 的像为虚轴.

当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $u < 0$, $\arg z = 0$ 的像为双曲线左半枝.

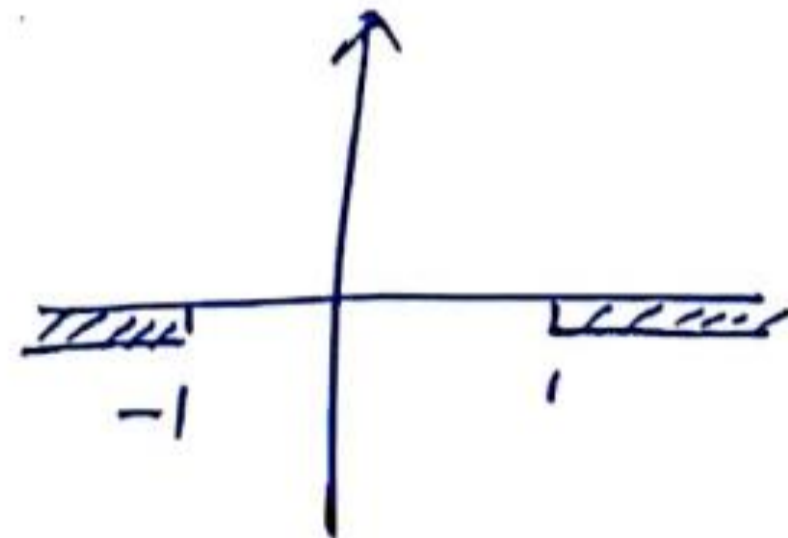
当 $\theta = \pi$ 时, $u = -\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $v = 0$.

$\arg z = \pi$ 映为实轴 $u \leq -1$ 两次.

故映射将 H 映为 $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$



$$W = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$



$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

例: 余弦映射 $w = \cos z$.

① 单叶域: $w = \cos z$ $\cos z_1 = \cos z_2$

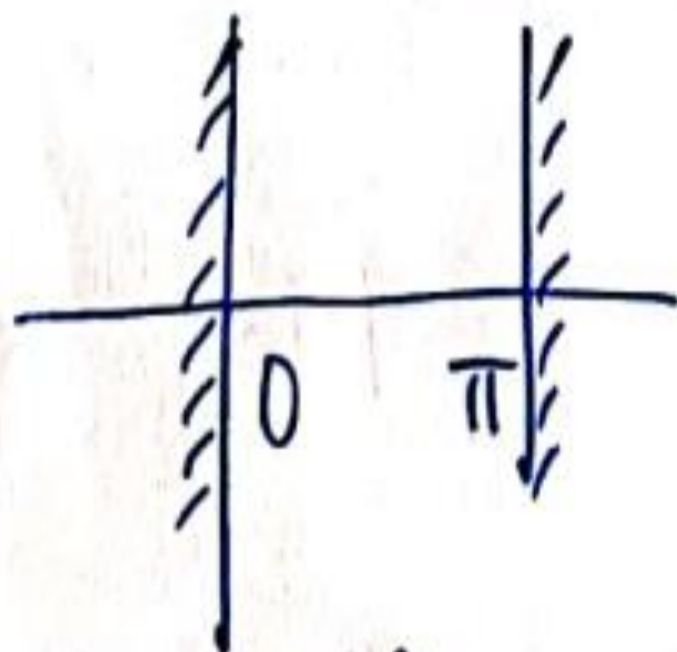
$$2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2} = 0$$

故 $z_1 - z_2 = 2k\pi$ 或 $z_1 + z_2 = 2k\pi$.

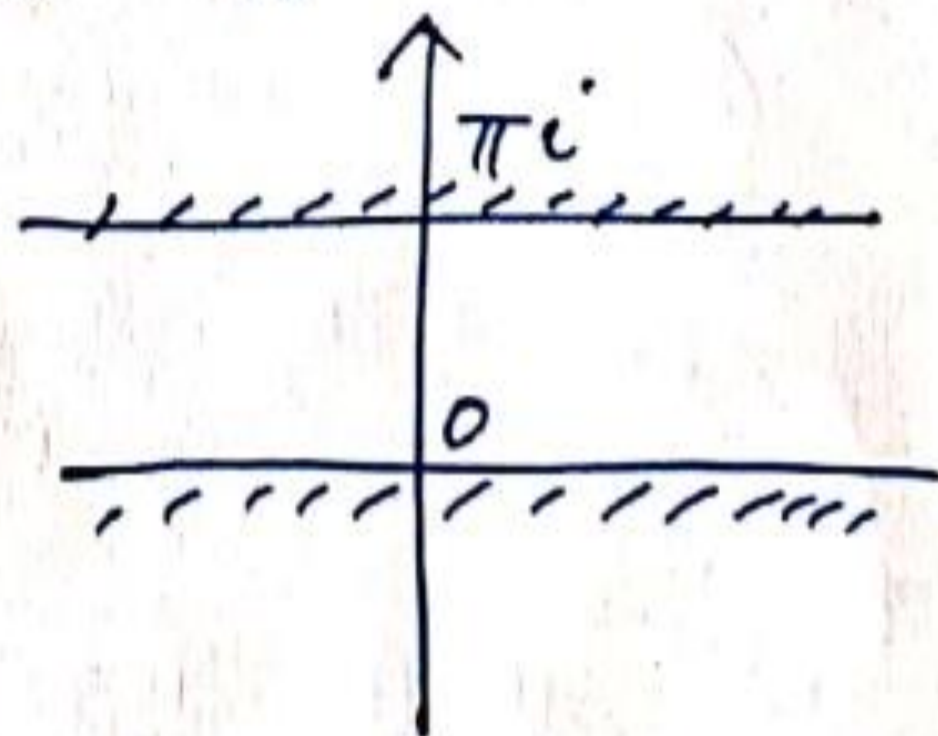
$\left\{ 0 < \operatorname{Re} z < \pi \right\}$ 为单叶域.

(2) $W = \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$

$z \xrightarrow{\xi = iz} \xi \xrightarrow{\eta = e^\xi} \eta \xrightarrow{W = \frac{1}{2}(\eta + \frac{1}{\eta})} W$

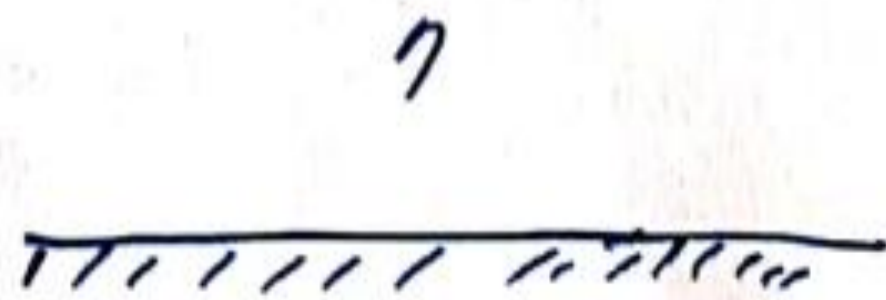


$\xi = iz$

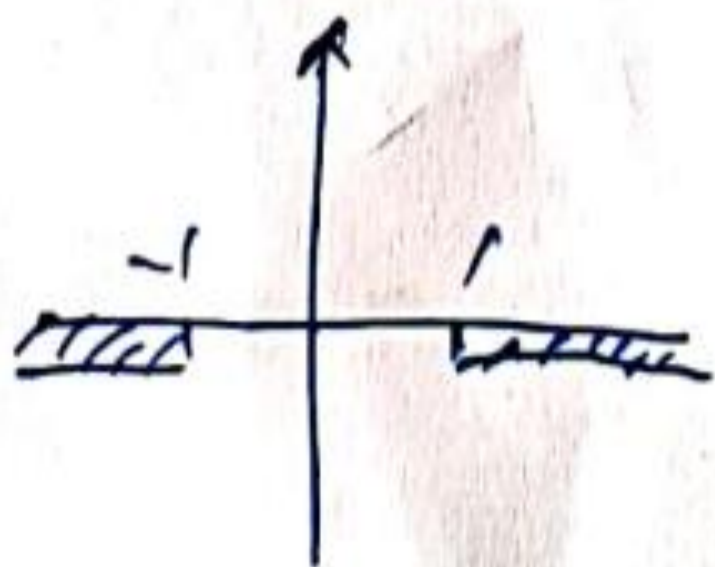


$\eta = e^\xi$

$W = \frac{1}{2}(\eta + \frac{1}{\eta})$



$z = \text{Arccos } W$ \updownarrow $W = \cos z$



积分

闭曲线: \mathbb{C} 上连续曲线 $\gamma(t): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

其中 $x(t), y(t)$ 为实值连续函数, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$

反向曲线: $\gamma^{-}(t) = \gamma(-t), \quad t \in [-\beta, -\alpha]$

光滑曲线: 若 $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ 存在且连续 (在 $t = \alpha, \beta$ 处存在右、左导数), 则称 γ 为光滑曲线

分段光滑: 若 $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = \beta$, 且 γ 在 $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ 上都光滑, 在 α_k 处可能右导数 \neq 左导数.

可求长曲线: 给定连续曲线 $\gamma(t)$: $\alpha \leq t \leq \beta$. 对区间 $[\alpha, \beta]$ 作分割.

$$\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

$$L = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

则 L 为长度.

连续

定义: 复积分 设 $f(t) = x(t) + iy(t)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的复值函数, 定义

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} y(t) dt.$$

则有性质: ①: $\operatorname{Re} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} f(t) dt$

$$\operatorname{Im} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} f(t) dt.$$

$$\textcircled{2} \quad \forall c \in \mathbb{C}, \quad c \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} c \cdot f(t) dt$$

$$\textcircled{3} \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt.$$

证③: 设 $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ 辐角主值为 θ , 则 $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| e^{i\theta}$

$$\text{故 } \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| = e^{-i\theta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-i\theta} f(t) dt.$$

两边取实部:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| &= \operatorname{Re} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-i\theta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

定义: 设 $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ 为光滑曲线, f 在 γ 上连续, 则定义

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

若 γ 为分段光滑, 则 $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$

对于一般的可求长曲线, 可通过 ~~定义~~ 极限来定义积分.

说明: 若 $f(z) = u + iv$, 则有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))(x'(t) + iy'(t)) dt.$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (ux' - vy') dt + i(vx' + uy') dt$$

$$= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

$$= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + i dy)$$

例: 设 $\gamma(t)$ ($t \in [a, b]$) 为分段光滑, 求 $\int_{\gamma} dz$, $\int_{\gamma} z dz$.

解:
$$\int_{\gamma} dz = \int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a)$$

$$\int_{\gamma} z dz = \int_a^b \gamma(t) \gamma'(t) dt = \frac{1}{2} \gamma(t)^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} (\gamma^2(b) - \gamma^2(a))$$

故若 $\gamma(t)$ 为分段光滑时, 上式仍成立.

若 $\gamma(t)$ 为分段光滑的闭曲线, 则 $\int_{\gamma} dz = \int_{\gamma} z dz = 0$.

例: 计算 $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$, 其中 $\gamma(t) = a + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$.

解:
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it} dt}{Re^{it}} = 2\pi i$$

积分性质:

$$\textcircled{1} \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$\textcircled{2} \int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$$

$$\textcircled{3} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot \text{length}(\gamma)$$

$$\text{证} \textcircled{3}: \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \cdot dt.$$

$$\leq \sup_{\gamma} |f| \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \sup_{\gamma} |f| \cdot \text{length}(\gamma).$$

引理: 若 Ω 为有界区域, $P(x, y), Q(x, y)$ 在区域 Ω 中连续, 且有一阶连续的偏导数, 则:

$$\int_{\Omega'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) u x dy = \int_{\partial \Omega'} P dx + Q dy \quad (\Omega' \subset \Omega)$$

$$\begin{aligned}
\text{取 } \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u+iv)(dx+i dy) \\
&= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i(v dx + u dy) \\
&= \int_{\Omega'} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\
&= 0 \quad (\text{Cauchy-Riemann 方程})
\end{aligned}$$

问题: 如何去掉“ $f'(z)$ 连续”?

问题: 如何去掉“ f' 连续”?

(Cauchy 定理) 设 f 在区域 D 中全纯, 且 $\gamma \subset D$ 是包含在 D 中的闭曲线,

则 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$

分段光滑简单

证明: 分为三步:

① 若 $T \subset D$ 是内部包含在 D 中三角形, 则 $\int_T f(z) dz = 0$

② 设 $P \subset D$ 是内部包含在 D 中闭多边形, 则 $\int_P f(z) dz = 0$

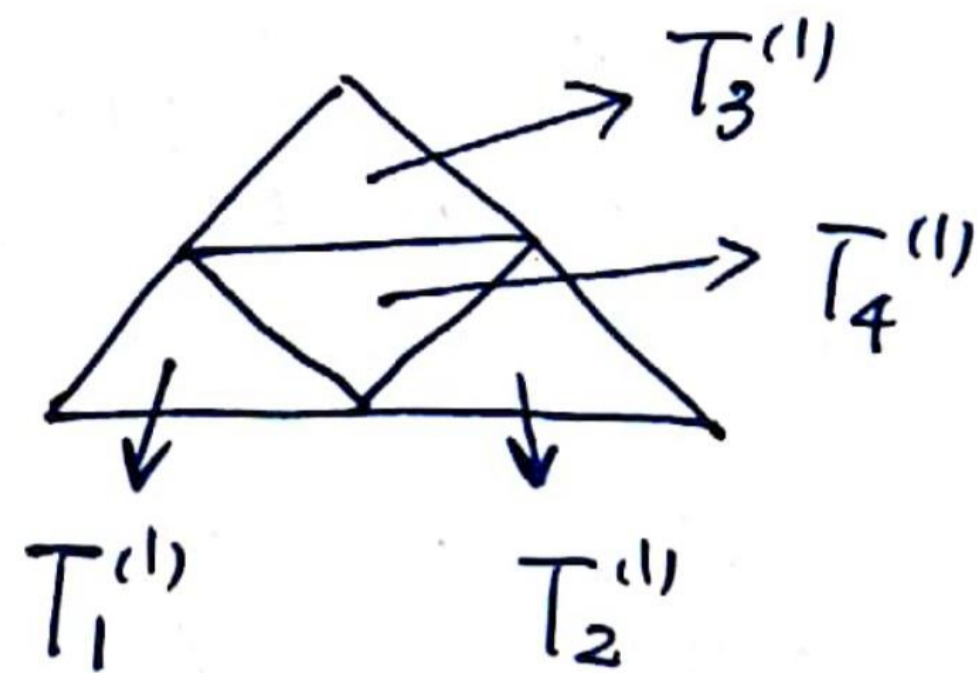
③ 对于曲线 $\gamma \subset D$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在折线 $P \subset D$, 使得

a) P 与 γ 有相同的起点与终点, 且 P 的顶点在 γ 上

b)
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

综合 ①-③, 则定理成立.

证①:



$$\int_{T^{(0)}} f(z) dz = \left(\int_{T_1^{(1)}} + \int_{T_2^{(1)}} + \int_{T_3^{(1)}} + \int_{T_4^{(1)}} \right) f(z) dz$$

故存在 j , 使得:

$$\left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{T_j^{(1)}} f(z) dz \right|$$

$T_j^{(1)}$ 的直径: $d^{(1)} = \frac{1}{2} d^{(0)}$

周长: $p^{(1)} = \frac{1}{2} p^{(0)}$

将 $T_j^{(1)}$ 继续分, 记 $T^{(1)} = T_j^{(1)}$, 则存在 $T^{(2)}$, 使得

$$\left| \int_{T^{(1)}} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{T^{(2)}} f(z) dz \right|.$$

对 $T^{(2)}$ 继续分, 存在 $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$, \dots , $T^{(n)}$, \dots

使得
$$\left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right|.$$

$$d^{(n)} = \frac{1}{2^n} d^{(0)}, \quad \rho^{(n)} = \frac{1}{2^n} \rho^{(0)}$$

设 $F^{(n)}$ 为 $T^{(n)}$ 所围的闭集, 则

$$F^{(0)} \supset F^{(1)} \supset F^{(2)} \supset \dots \supset F^{(n)} \supset \dots$$

故存在点 $z_0 \in F^{(n)}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0), \quad \psi(z) \rightarrow 0 \ (z \rightarrow z_0). \quad \underline{\forall z \in U}$$

由前面的例题知这部分为0

$$\text{则} \int_{T^{(n)}} f(z) dz = \int_{T^{(n)}} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz + \int_{T^{(n)}} \gamma(z)(z - z_0) dz$$

$$= \int_{T^{(n)}} \gamma(z)(z - z_0) dz, \quad \text{若 } n \text{ 充分大, } T^{(n)} \subset U.$$

$$\text{若 } z \in T^{(n)}, \text{ 则 } |z - z_0| \leq d^{(n)}, \quad \varepsilon_n = \sup_{T^{(n)}} |\gamma(z)| \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| &\leq \varepsilon_n \cdot d^{(n)} \cdot p^{(n)} \\
 &\leq \varepsilon_n \cdot \frac{1}{2^n} d^{(0)} \cdot \frac{1}{2^n} p^{(0)} \\
 &\leq \varepsilon_n \cdot \frac{1}{4^n} \cdot d^{(0)} p^{(0)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| &\leq 4^n \cdot \left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| \\
 &\leq 4^n \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{4^n} d^{(0)} p^{(0)} = \varepsilon_n \cdot d^{(0)} p^{(0)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)
 \end{aligned}$$

$$\text{Hence } \int_{T^{(0)}} f(z) dz = 0.$$

第②步: 注意任何凸多边形可分割成若干三角形之并
任何闭多边形可分割成若干凸多边形之并.

第③步: 取分点 $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$, $|z_i - z_{i-1}| < \delta$.



$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z) dz - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[z_k, z_{k+1}]} f(z) dz \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} (f(z) - f(z_k)) dz - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[z_k, z_{k+1}]} (f(z) - f(z_k)) dz \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)| dz + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[z_k, z_{k+1}]} |f(z) - f(z_k)| dz.$$

$$\leq 2\epsilon L \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

讨论:

定理: 若 D 是简单闭曲线 γ 内部, 若 f 在 D 上全纯, 在 \bar{D} 上连续,

则 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

证明想法: 在 D 上构造简单闭曲线 γ_{ε} , 使 $\gamma_{\varepsilon} \rightarrow \gamma$ ($\varepsilon \rightarrow 0$)

则由 $\int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz = 0$ (Cauchy 定理)

和 $\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz \right| < \varepsilon$

可知 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

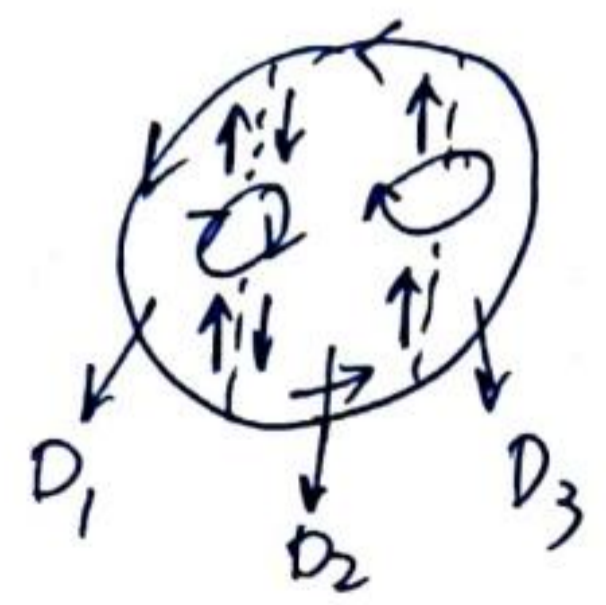
多连通域的 Cauchy 定理: 设 D 为 $n+1$ 条简单闭曲线 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ 围成的区域,
 若 f 在 D 上全纯, 在 \bar{D} 上连续, 则 $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$, 其中

$$\partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_n^- \quad (\gamma_1^-, \dots, \gamma_n^- \text{ 为 } \gamma_i \text{ 的反方向})$$

证:

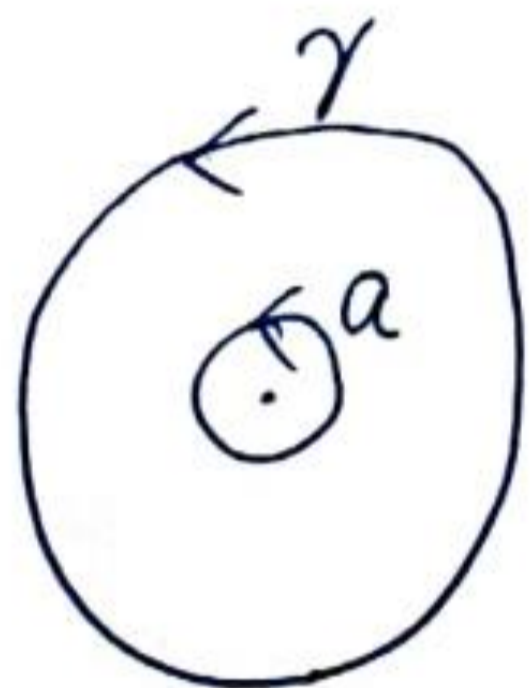


$$\text{由 } \int_{\partial D_1} f(z) dz = 0, \int_{\partial D_2} f(z) dz = 0, \int_{\partial D_3} f(z) dz = 0$$



$$\text{相加: } \int_{\gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^-} f(z) dz = 0$$

例: 设 $a \notin \gamma$, 求 $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$



解: 设 a 在 γ 内部, 则

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{\partial B(a, \varepsilon)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

若 a 在 γ 外部, 则 $\frac{1}{z-a}$ 在 γ 内部是全纯函数,
故积分为 0.

原函数: 给定区域 Ω 上函数 $f(z)$, 若 $F(z)$ 为 Ω 上单值函数, 且 $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in \Omega$, 则称 $F(z)$ 为 f 的原函数.

定理: 若在区域 Ω 上连续函数 $f(z)$ 有原函数 $F(z)$, 且 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 分段光滑, 则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

证:
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) = F(z(b)) - F(z(a)).$$

推论: 若 γ 为简单闭曲线, f 连续, 且在区域 Ω 上有原函数, 则 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

反之, 若 $\gamma \subset \Omega$, 连续点为 $f(z)$ ~~存在~~ 有 $\int_{\gamma} f(z) dz \neq 0$, 则 $f(z)$ 在 Ω 上无原函数.

例: $f(z) = \frac{1}{z}$, $D^* = \{0 < |z| < 1\}$. 则 $\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 2\pi i$

故 $\frac{1}{z}$ 在 D^* 上无原函数.

推论: 若 f 在区域 Ω 上全纯, 且 $f' = 0$, 则 f 为常数.

证明: 取定 $w_0 \in D$, 对任何 $w \in D$, 有

$$f(w) - f(w_0) = \int_{\gamma} f'(z) dz = 0, \quad \text{故 } f(w) = f(w_0), \quad (\forall w \in D)$$

定理: 设 D 为单连通区域, $f(z)$ 在 D 中全纯, 则 $F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw$

为 $f(z)$ 的原函数, 即 $F'(z) = f(z)$.

证: 由 Cauchy 定理, 对任何简单闭曲线 $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, 故

$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw$ 是 D 中单值函数

可导: $F(z) - F(z_1) = \int_{z_0}^z f(w)dw - \int_{z_0}^{z_1} f(w)dw = \int_{z_1}^z f(w)dw$

$$\text{取 } \left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{z - z_1} \int_{z_1}^z f(w) dw - \frac{1}{z - z_1} \int_{z_1}^z f(z_1) dw \right|$$

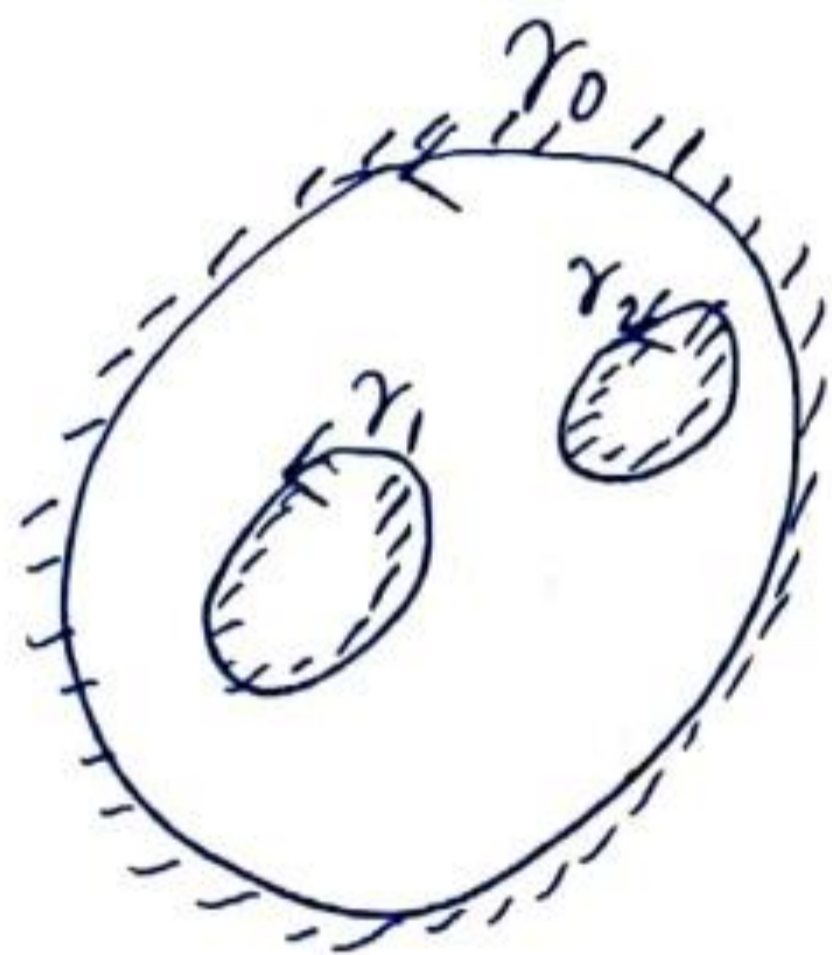
$$= \left| \frac{1}{z - z_1} \int_{z_1}^z (f(w) - f(z_1)) dw \right|$$

$$\leq \max_{w \in [z_1, z]} |f(w) - f(z_1)| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow z_1).$$

$$w \in [z_1, z]$$

取 F 任意 $F'(z) = f(z)$.

多连通域情形: 设 $f(z)$ 在 D 中全纯, 在 \bar{D} 上连续,



$$\text{定义 } K_1 = \int_{\gamma_1} f(z) dz, \quad K_2 = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

$$\dots \quad K_i = \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

定理: 设 $f(z)$ 在 D 中全纯, \bar{D} 上连续, 则 $f(z)$ 有原函数 $F(z)$

$$\Leftrightarrow \forall j=1, 2, \dots, n, \quad K_j = 0.$$

证: \Rightarrow : 若有原函数 $F(z)$, 则对任何曲线 $\gamma(t): [\alpha, \beta] \rightarrow \bar{D}$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))$$

若 γ 闭, 则有 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$

← : 若 $\forall j: K_j = 0$, 则对任何简单闭 γ , 有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n n_j \int_{\gamma_j} f(z) dz = 0.$$

其中 $n_j = 0$ 或 1 .

故 $F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$ 积分与路径无关, 是 D 中单值

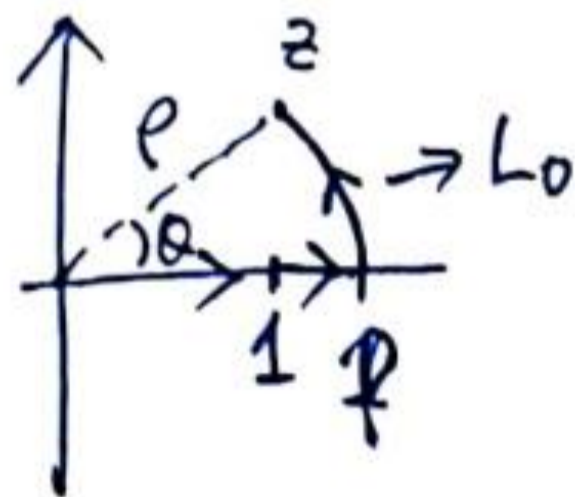
函数, 且 $F'(z) = f(z)$. 故 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数.

原函数:

例: 设 $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\frac{1}{z}$ 在 D 中全纯, 求 $F(z) = \int_1^z \frac{1}{w} dw$

解: $\forall z \in D$, $\rho = |z|$, $\arg z = \theta$.

①



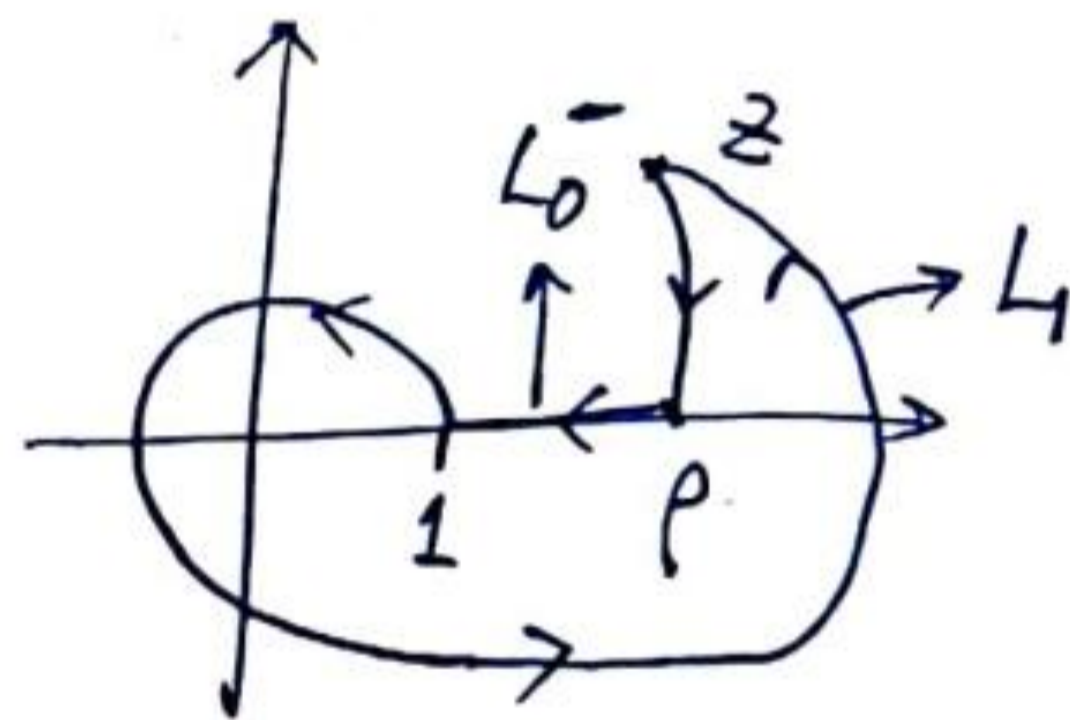
$$\begin{aligned} \int_{L_0} \frac{1}{w} dw &= \int_1^\rho \frac{dx}{x} + \int_0^\theta \frac{ip e^{i\theta} d\theta}{\rho e^{i\theta}} \\ &= \log \rho + i\theta \end{aligned}$$

设 $L_0 = [1, \rho]$ 与 $\rho \rightarrow z$ 圆弧.

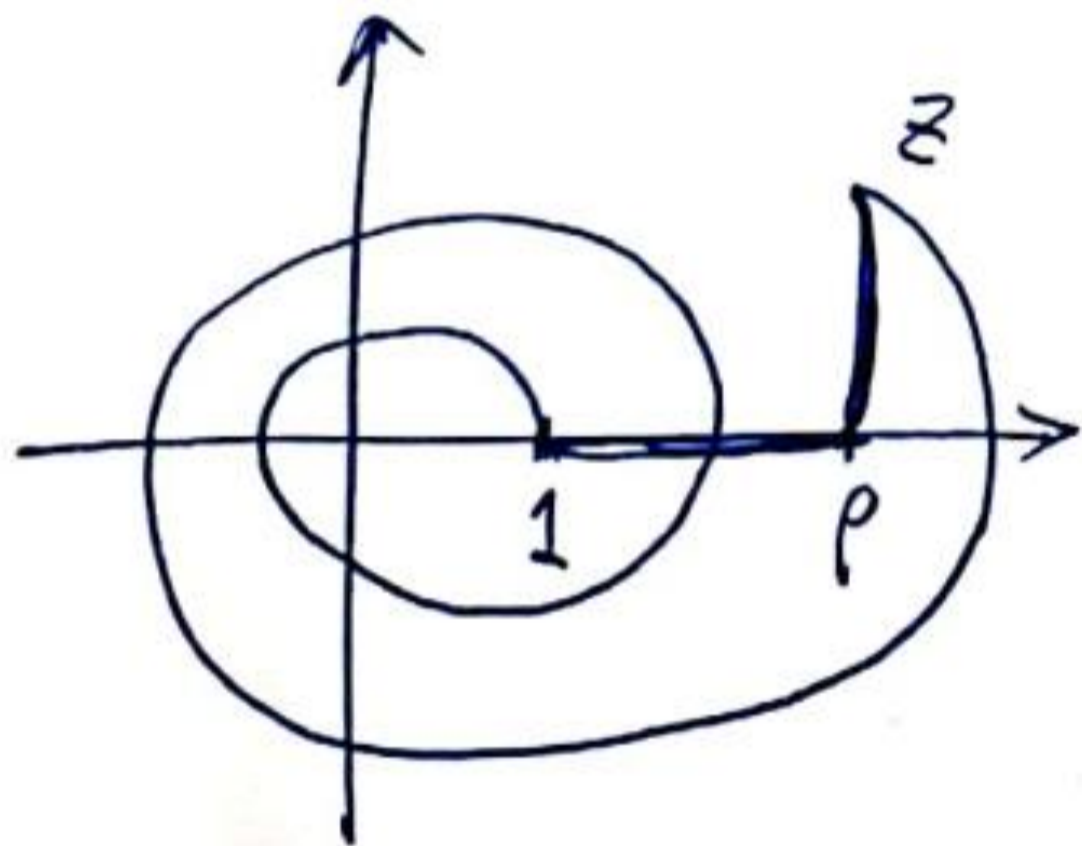
② 设 L_1 是从 1 起绕原点逆时针转一圈, $L_1 \cup L_0^{-}$ 绕
 原点逆时针一圈而闭合, 从而

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw = \int_{L_0} \frac{dw}{w} + \int_{L_1 + L_0^{-}} \frac{dw}{w}$$

$$= \log p + i\theta + 2\pi i$$



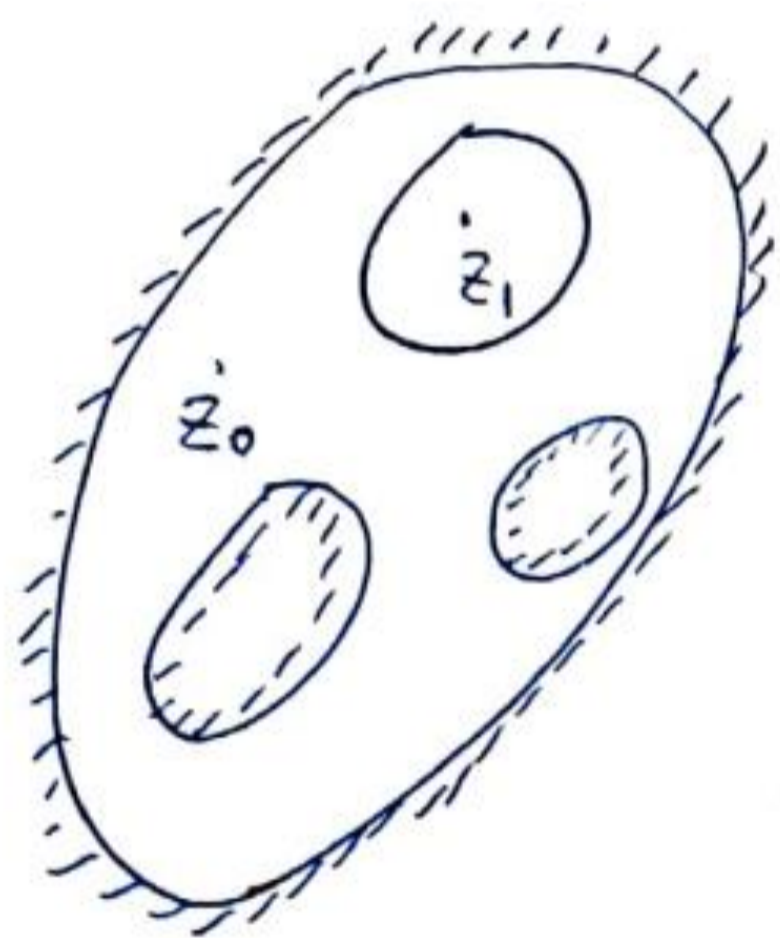
③ $L_2 \cup L_0^-$ 可分解为两个简单闭曲线



$$\int_{L_2 \cup L_0^-} \frac{1}{w} dw = 4\pi i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{L_2} \frac{1}{w} dw &= \int_{L_0} \frac{1}{w} dw + 4\pi i \\ &= \log \rho + i0 + 4\pi i \end{aligned}$$

说明: 若有一周期 $k_j \neq 0$, 则 $F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw$ 为多值函数.



依赖于 $z_0 \rightarrow z$ 的路径选取.

设 $D_1 \subset D$, D_1 单连通, 则 $F(z)$ 在 D_1 上有一单值分支, 记为 $F_1(z)$. 设 $F_2(z)$ 为 $F(z)$ 在 D_1 上另一单值分支,

$$\text{则 } F_2'(z) - F_1'(z) = 0$$

$\Rightarrow F_2(z) - F_1(z)$ 在 D_1 上为常数.

$$F_1(z) = \int_{\gamma_0} f(z) dz, \quad F_2(z) = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

$$\text{例} \quad F_2(z) - F_1(z) = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_0^-} f(z) dz = \sum n_j K_j$$

$$\text{从而} \quad F_2(z) = F_1(z) + \sum n_j K_j$$

即: 若 $F_1(z)$ 为 $F(z)$ 在 D_1 中 m -单值分支, 则 $F(z)$ 在 D_1 中

所有单值分支为 $F_1(z) + \sum n_j K_j, (n_j \in \mathbb{Z})$

例:

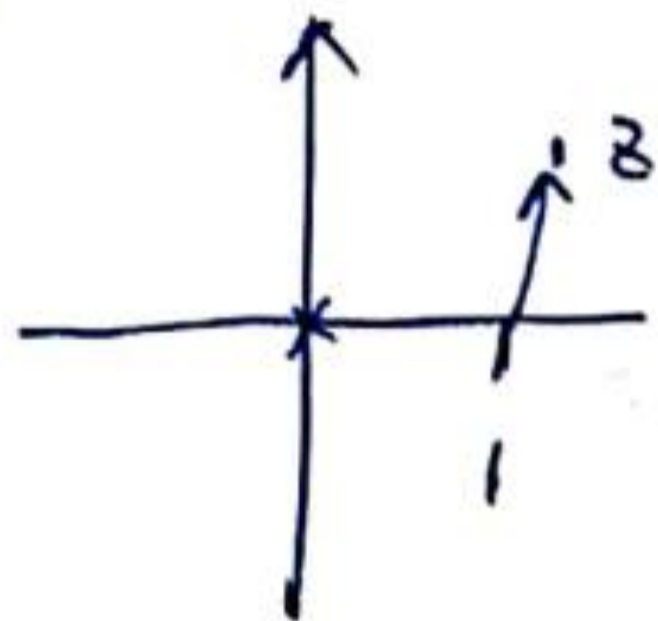


$$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$F(z) = \int_1^z \frac{dw}{w}$$

$$K = 2\pi i, \quad \text{故 } F(z) = \log z + 2\pi i k \\ = \log |z| + i \arg z + 2\pi i k$$

例: $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,



$$F(z) = \int_1^z \frac{1}{w^2} dw$$

$$k = \int_{|z|=1} \frac{1}{w^2} dw = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2i\theta}} i e^{i\theta} d\theta$$
$$= i \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0.$$

故 $F(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 为单值函数, 且

$$F(z) = -\frac{1}{z} + C.$$

注意 $F(1) = 0$, 故 $F(z) = 1 - \frac{1}{z}$.

Cauchy 公式:

定理: 设 D 为简单闭曲线 γ 所围成的区域, $f(z)$ 在 D 上全纯, \bar{D} 上连续, 则 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$. 注意不要遗漏 $2\pi i$

证明: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_{\varepsilon}} \frac{f(w)}{w-z} dw$



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

$$\rightarrow f(z), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

说明: 全纯函数在 D 中的值完全由边界上的值确定。

积分计算:

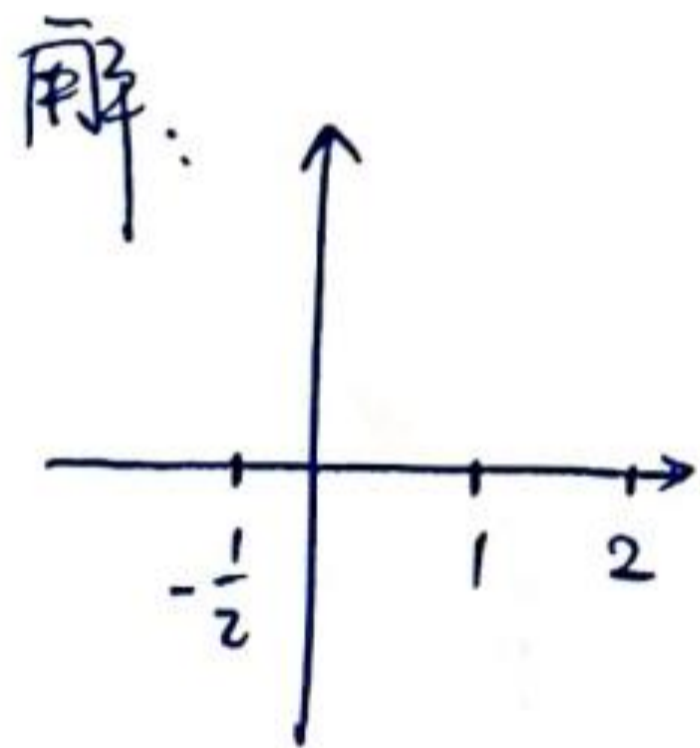
例: $I = \int_L \frac{z dz}{(2z+1)(z-2)}$

其中 ① $L: |z|=1$

② $|z-2|=1$

③ $|z-1| = \frac{1}{2}$

④ $|z|=3$.



$$\begin{aligned} \text{① } I &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{z}{2z-4}}{z+\frac{1}{2}} dz = 2\pi i \frac{z}{2z-4} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi i}{5} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_{|z-2|=1} \frac{\frac{z}{2z+1}}{z-2} = 2\pi i \frac{z}{2z+1} \Big|_{z=2} = \frac{4}{5}\pi i$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(2z+1)(z-2)} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad I = \int_{|z|=3} \frac{z dz}{(2z+1)(z-2)} = \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(2z+1)(z-2)} + \int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{z dz}{(2z+1)(z-2)}$$

$$= \frac{\pi i}{5} + \frac{4\pi i}{5} = \pi i.$$

导数:

定理: 设 $\gamma \subset \mathbb{C}$ 是一条曲线 (不一定闭), $\varphi(\xi)$ 在 γ 上连续, 则

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

在 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 上全纯, 且 $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, 有

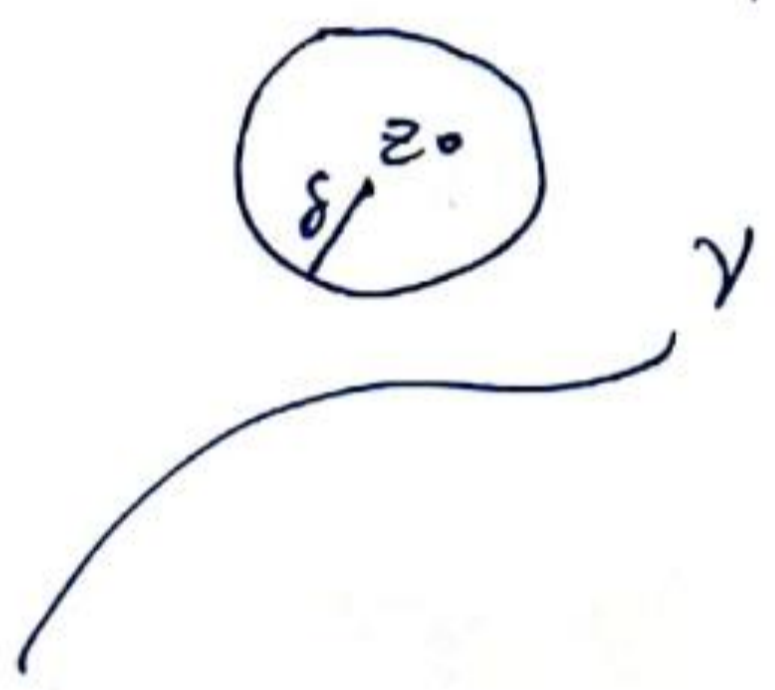
$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{(2\pi i)} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

γ

证: ① 首先证明 $F(z)$ 在 $z \in \mathcal{D} \cap \gamma$ 连续, 取邻域 $B(z_0, \delta) \subset \mathcal{D} \cap \gamma$,

则 $\forall z \in B(z_0, \frac{\delta}{2})$, 有

$$|\xi - z| \geq \frac{\delta}{2}, \quad \forall \xi \in \gamma$$



$$\begin{aligned}
 F(z) - F(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z_0} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(\xi) \cdot \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0} \right) d\xi \\
 &= \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)}
 \end{aligned}$$

取 $|F(z) - F(z_0)| \leq |z - z_0| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |\varphi(\xi)| \cdot \frac{|d\xi|}{|\xi - z| \cdot |\xi - z_0|}$

$$\leq |z - z_0| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |\varphi(\xi)| \frac{|d\xi|}{\frac{\delta}{2} \cdot \frac{\delta}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{\delta^2} \cdot |z - z_0| \cdot \int_{\gamma} |\varphi(\xi)| \cdot |d\xi|$$

取 F 连续.

$$\textcircled{2} \quad F(z) \text{ 存在, } F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi$$

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)} d\xi$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)^2} d\xi$$

注意. 上式用刘

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)} d\xi = \int_{\gamma} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)} d\xi$$

原因, $\int_{\gamma} \left| \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)} \right| d\xi \leq \frac{K}{\delta^2} \int_{\gamma} |\varphi(\xi)| d\xi < +\infty.$

定理: 设 D 为简单闭曲线 γ 所围区域, f 在 D 上全纯, 在 \bar{D} 上连续, 则 $f(z)$ 在 D 中有各阶导数, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi.$$

证: 由 Cauchy 公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi, \quad (\forall z \in D)$$

注意上式右边关于 z 无穷次可导, 故左边也关于 z 无穷次可导, 从而 $f(z)$ 在 D 中有无穷阶导数.

说明: 对多连通域, 只要将 γ 换成 $\partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_n^-$ 即可.



Cauchy 不等式: 若 $f(z)$ 在 D_R $B(a, R)$ 上全纯, 且 $|f(z)| \leq M$, 则

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{R^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

证明: $\forall 0 < r < R$,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{|2\pi i|} \int_{\gamma} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - a|^{n+1}} |d\xi|$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \int_{|\xi - a| = r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - a|^{n+1}} |d\xi| = \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot M \cdot 2\pi r$$
$$= \frac{M n!}{r^n}$$

$\hat{=} r \rightarrow R \text{ 即可.}$

Liouville 定理: 若 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上全纯, 且有界, 则 $f(z)$ 为常数.

证明: $\forall z_0 \in \mathbb{C}$,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{R} \cdot \sup_{|z-z_0| \leq R} |f(z)| \leq \frac{M}{R}, \quad \forall R \rightarrow +\infty,$$

则有 $f'(z_0) = 0$.

代数基本定理: \mathbb{C} 上任何复系数非常数多项式至少有一个根.

证: 设

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

若 $p(z)$ 在 \mathbb{C} 上无根, 则 $\frac{1}{p(z)}$ 在 \mathbb{C} 上全纯且 $\frac{1}{p(z)}$ 有界.

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} \right| = \left| a_n + \frac{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{z^n} \right|$$

$$\geq |a_n| - \frac{C}{|z|}, \geq \frac{1}{2}|a_n|, \quad \text{当 } |z| \text{ 大时.}$$

故 $\left| \frac{z^n}{p(z)} \right| \leq \frac{2}{|a_n|}$

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{2}{|a_n| \cdot |z|^n} \leq C \quad \text{当 } |z| \text{ 大时.}$$

由 Liouville 定理知 $\frac{1}{p(z)}$ 为常数, 矛盾.

推论: 多项式 $P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ ($a_n \neq 0$) 在 \mathbb{C} 上恰有 n 个根 (包含重根)

证: 若 $P_n(z)$ 有一根为 w_1 , 则令 $z = z - w_1 + w_1$ 代入 $P_n(z)$ 中

$$P_n(z) = b_n (z - w_1)^n + \dots + b_1 (z - w_1) + b_0$$

故由 $P_n(w_1) = 0$ 知 $b_0 = 0$. 故

$$P_n(z) = (z - w_1) \underbrace{\left(b_n (z - w_1)^{n-1} + \dots + b_1 \right)}_{Q(z)}$$

$Q(z)$ 为 $n-1$ 次多项式, 可继续分解. 故

$$P_n(z) = a_n (z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_n).$$

(Morera定理) 设 $f(z)$ 是区域 D 中连续函数, 若对 D 中任何简单闭曲线 (或者 D 中任何三角形), 有 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, 则 $f(z)$ 全纯.

证明: 固定 $z_0 \in D$, 令 $F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$. 则 $F(z)$ 积分与路径无关,

且 $F'(z) = f(z)$. 故 F 全纯, 故 F 无穷次可导, 从而 f 全纯.

说明: 两种方法证明全纯.

① 定义

② Morera定理.

无界区域情形:

定义: 简单闭曲线族 $\gamma = \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cdots \cup \gamma_n^-$, 若 γ_i 均为简单闭曲线, 取负定向, 任意一条在其他各条外部, 则称 γ 所围区域 D 为无界区域.

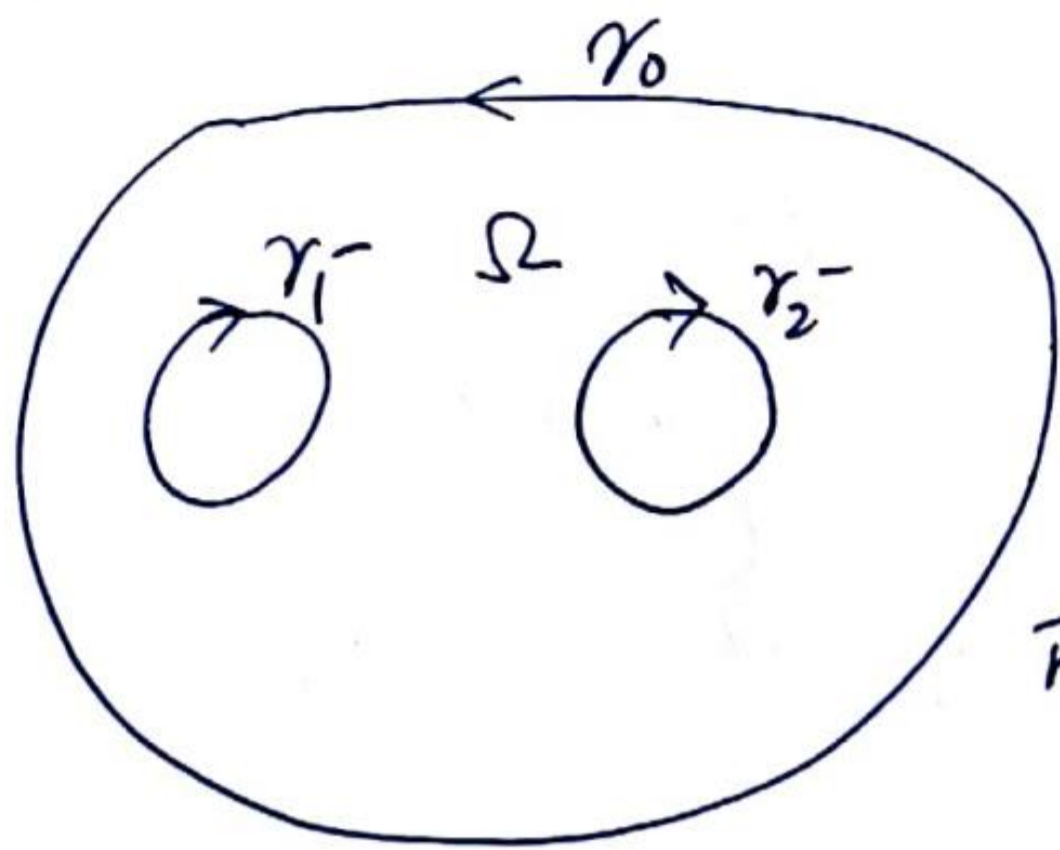


定理: 设简单闭曲线族 $\gamma = \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cdots \cup \gamma_n^-$ 围成无界区域 D ,

$f(z)$ 在 $D \setminus \{\infty\}$ 上全纯, 满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f(z) = a_1$ ($a_1 \in \mathbb{C}$), 且 $f(z)$ 在 \bar{D}

上连续. 则 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

证: 作充分大圆 γ_0 : $|z|=R$ 包含 γ_i , 则 $f(z)$ 在区域 Ω 中全纯



$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0.$$

$$\partial\Omega = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_n^-$$

故 $(\int_{\gamma_0} - \int_{\gamma_1} - \dots - \int_{\gamma_n}) f(z) dz = 0$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = (-\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} - \dots - \int_{\gamma_n}) f(z) dz$$

$$= -\int_{\gamma_0} f(z) dz$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\gamma_0} f(z) dz \right| \leq \max_{|z|=R} |z^2 f(z)| \int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z|^2}$$

$$\leq \max_{|z|=R} |z^2 f(z)| \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 2\pi R \rightarrow 0.$$

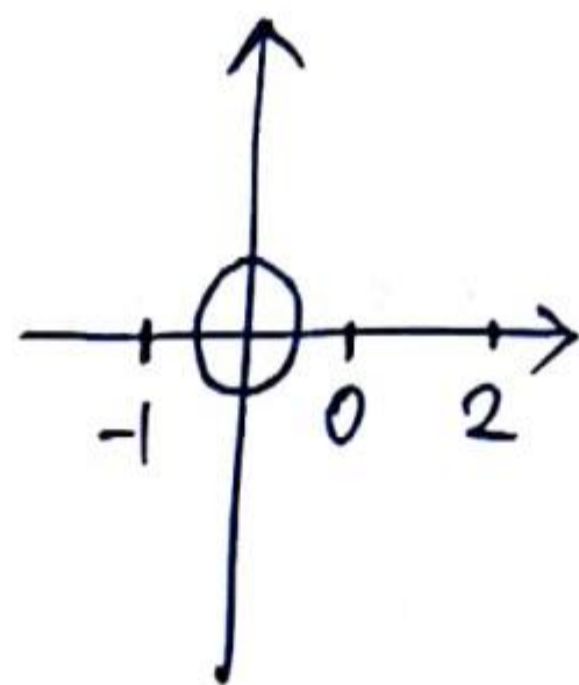
例: 求积分:
$$I = \int_C \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$$

其中 C 为圆周, $|z|=r$, $r \neq 1, 2$.

解: ① 当 $0 < r < 1$ 时

令 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$, 在 C_r 内部全纯.

$$I = \int_C \frac{f(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{3}{4}\pi i$$



柯西积分公式:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$$

② 当 $1 < r < 2$ 时.

$\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}$ 在 C 中有两个奇点 $z=0, -1$

取作 $C_1: |z+1| < \varepsilon$

$C_2: |z| < \varepsilon$

则由多连通域中的 Cauchy 公式.

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} = \int_{C_1} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$$

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{z^3(z-2)}}{z+1} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z^3(z-2)} \right) \Big|_{z=-1}$$
$$= \frac{2}{3}\pi i$$

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} = \int_{C_2} \frac{1}{z^3(z+1)(z-2)} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{1}{(z+1)(z-2)} \right)' \Big|_{z=2}$$

$$= -\frac{3}{4}\pi i$$

故 $I = \frac{2}{3}\pi i - \frac{3}{4}\pi i = -\frac{1}{12}\pi i$

③当 $r > 2$ 时.

方法一: $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$, $C_3: |z-2| = \epsilon$

方法二: 令 $F(z) = \frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}$

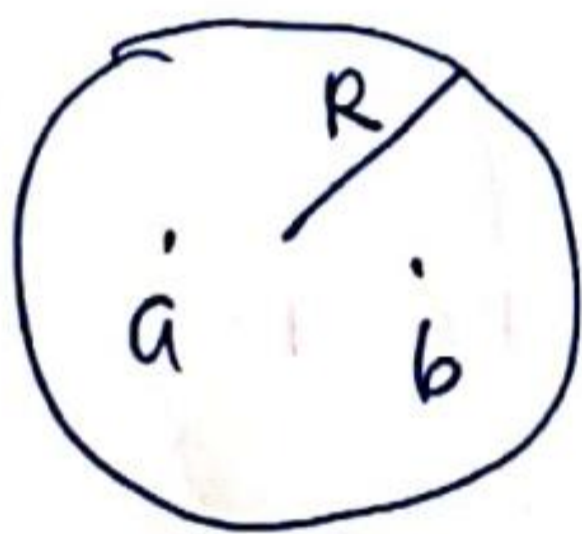
则 $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 F(z) = 0 \in \mathbb{C}$

由无界区域而 Cauchy 公式知积分为 0.

Liouville 定理: \mathbb{C} 上有界全纯函数为常数.

证法一: Cauchy 不等式

证法二: Cauchy 公式: $\forall a, b \in \mathbb{C}$ 当 R 充分大时



$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-b} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) \cdot \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} dz \end{aligned}$$

$f(z)$ 在 \mathbb{C} 上有界, 故 $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$, 从而

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{|z|=R} |f(z)| \cdot |a-b| \cdot \frac{1}{|z-a| \cdot |z-b|} |dz|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot |a-b| \cdot \frac{1}{(R-|a|)(R-|b|)} \cdot 2\pi R \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)$$

故 $f(a) = f(b)$.

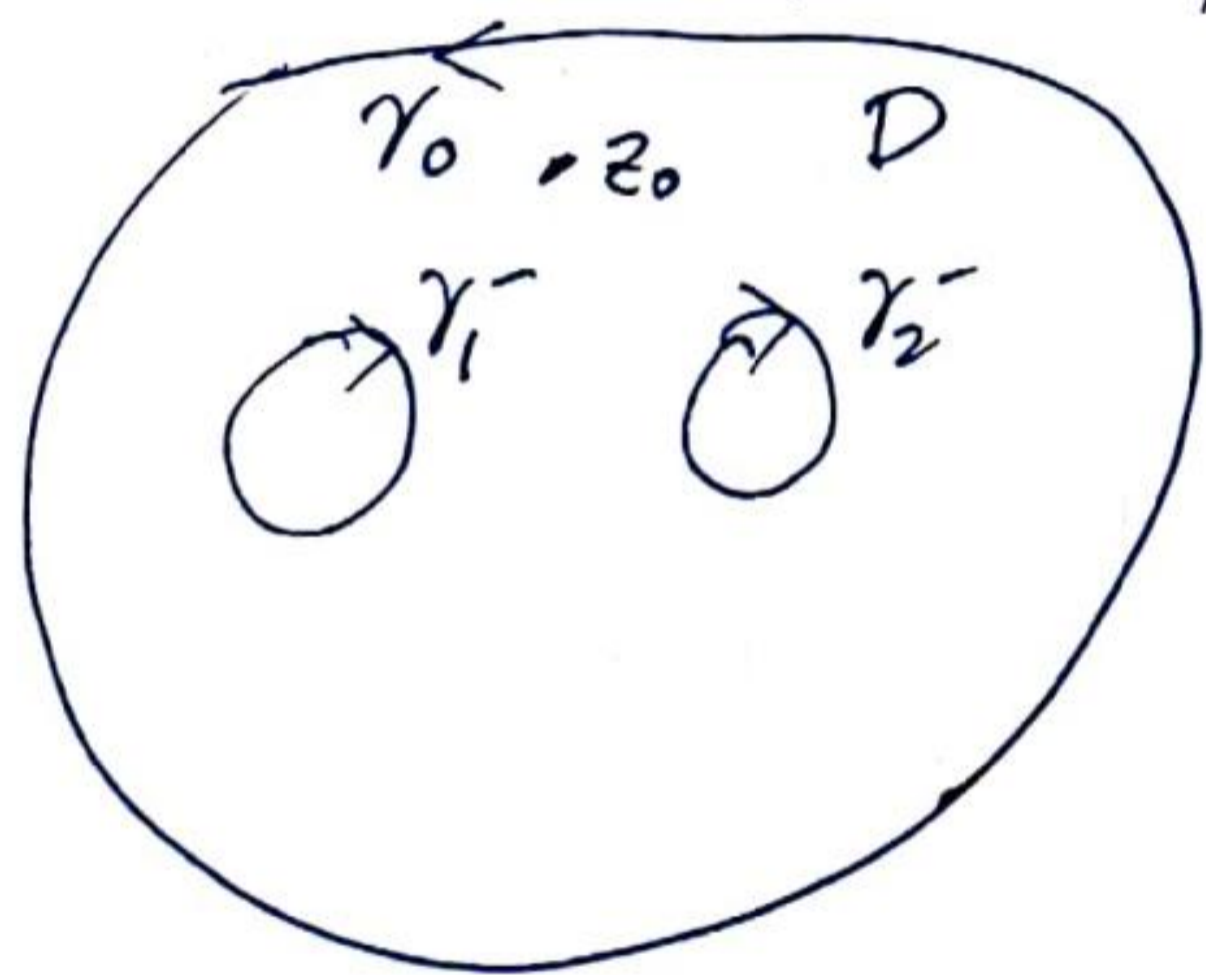
无界区域的 Cauchy 公式:

定理: 设简单闭曲线 $\gamma = \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cdots \cup \gamma_n^-$ 围成无界区域 D , 且 $f(z)$ 在 D 中全纯, 在 \bar{D} 上连续, 则 $\forall z \in D$, 有:

$$f(z) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (\text{注意 } \gamma \text{ 的方向})$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

证明: $\forall z_0 \in D$, 取充分大的圆 $|z|=R$ 包含 z_0 与所有 γ_i , 则
 由多连通域的 Cauchy 公式有:



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi-z_0} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\infty)}{\xi-z_0} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)-f(\infty)}{\xi-z_0} d\xi \\
&= f(\infty) + I.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \max_{|\xi|=R} |f(\xi)-f(\infty)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{|d\xi|}{|\xi-z_0|} \\
&\leq \max_{|\xi|=R} |f(\xi)-f(\infty)| \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi R}{R-|z_0|} \rightarrow 0. \quad (R \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

$$\text{故. } f(z_0) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi-z_0} d\xi.$$

高阶导数定理.

例:
$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4-1)(z-3)^2}$$

方法一: $z^4=1$ 在 $|z|<2$ 内有4个根 z_1, z_2, z_3, z_4 .
分别对 z_1, z_2, z_3, z_4 用 Cauchy's rule ...

方法二: $f(z) = \frac{1}{z^4-1}$ 在 $|z| > 2$ 中全纯. $f'(3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} \frac{f(\xi)}{(\xi-3)^2} d\xi.$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{f(\xi)}{(\xi-3)^2} d\xi = -f'(3) \\ &= - \left(\frac{1}{z^4-1} \right)' \Big|_{z=3} = \frac{27}{1600}. \end{aligned}$$

例. 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0| \leq r$ 上全纯, 且 $|\operatorname{Re} f(z)| \leq M$, 则

$$|f'(z_0)| \leq \frac{2M}{r}.$$

证: $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$, 令 $z = z_0 + re^{i\theta}$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^2} r i e^{i\theta} d\theta.$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta. \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } 0 &= \frac{1}{2\pi i r^2} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i r^2} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) r i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } 0 &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \overline{f(z_0 + re^{i\theta})} e^{-i\theta} d\theta. \quad (2) \end{aligned}$$

①与②相加:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} 2(\operatorname{Re} f(z_0 + re^{i\theta})) e^{i\theta} d\theta$$

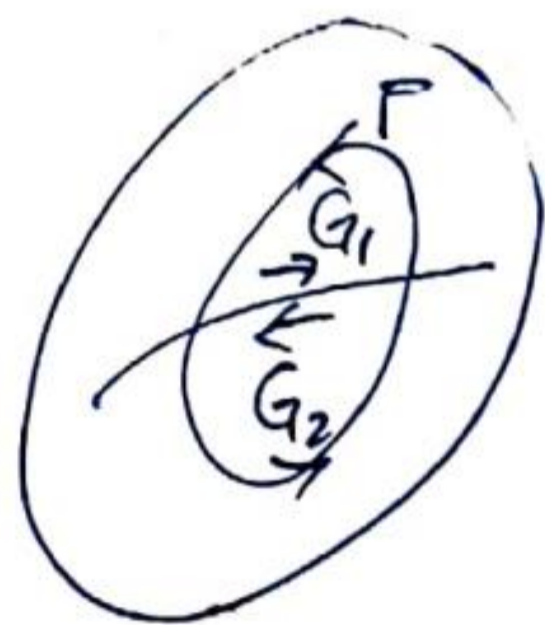
$$\text{故 } |f'(z_0)| \leq \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f| \cdot d\theta$$

$$\leq \frac{1}{\pi r} \cdot M \cdot 2\pi = \frac{2M}{r}.$$

例: 若 $f(z)$ 在区域 G 中连续, 在 $G \setminus \gamma$ 上全纯. 其中 γ 为 G 中分段光滑曲线.

则 f 在 G 中全纯.

证①: $\int_{\partial G_1} f(z) dz = 0, \quad \int_{\partial G_2} f(z) dz = 0.$



相加: $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$

由 Morera 知 $f(z)$ 在 G 中全纯.

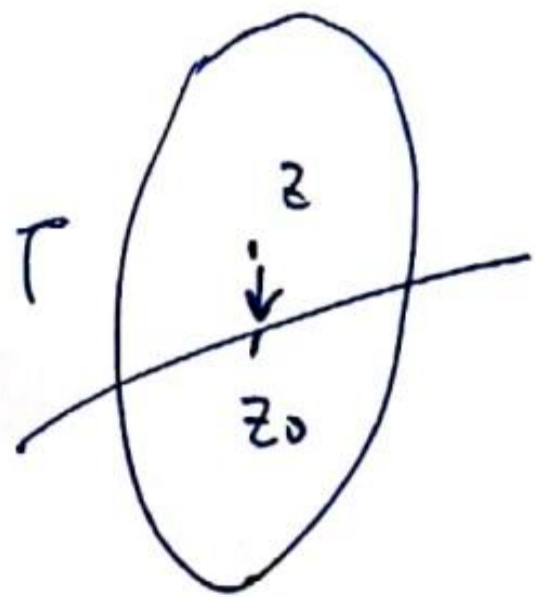
证(2): $\forall z \in G_1, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

又 $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ 当 $\xi \in G_2$ 时全纯. 故由 Cauchy 定理

$$\int_{\partial G_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

相加: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. (\forall z \in G_1)$

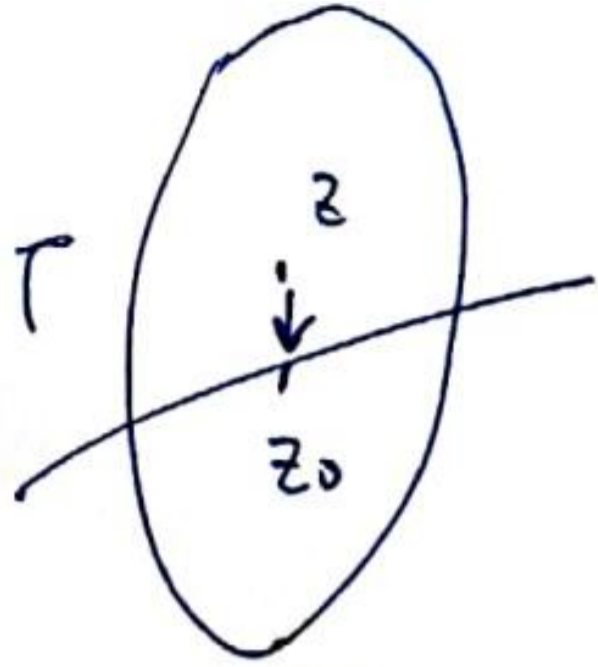
当 $z \rightarrow z_0 \in \Gamma$ 时, $\frac{1}{\xi - z} \rightarrow \frac{1}{\xi - z_0}$



(由 Lebesgue 控制收敛定理知)

$$f(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in G_1}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in G_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi.$$



(1) Lebesgue 定理的证明

$$f(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in G_1}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in G_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi.$$

由于 $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ 在 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 上可导.

故 $f(z)$ 在 z_0 处可导. 由 z_0 的任意性知 $f(z)$ 在 Γ 上可导.

故 f 在 G 中全纯.

级数.

数项级数, 称 $\sum z_n$ 收敛, 若部分和 $S_n = \sum_{k=0}^n z_k$ 收敛到 $S \in \mathbb{C}$, 否则

称为发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_n \text{ 与 } \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_n \text{ 都收敛.}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, p \geq 1$$

$$|z_{n+1} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛.

函数项级数

给定集合 $E \subset \mathbb{C}$, 函数列 $\{f_n(z)\}$

收敛: 若对 $\forall z \in E$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 收敛, 则称函数项级数 $\sum f_n(z)$

在 E 上收敛, 记和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$.

一致收敛: 在集合 E 上, 称 $\sum f_n(z)$ 一致收敛到 $f(z)$

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, |S_n(z) - f(z)| < \varepsilon, (\forall z \in E)$

其中 $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

内闭一致收敛: 若 $\sum f_n(z)$ 在区域 Ω 上任一紧集上一致收敛, 则称 $\sum f_n(z)$ 内闭一致收敛.

判别法: ① $\sum f_n(z)$ 在 E 上一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \forall p \geq 1, \forall A$ 有

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, (\forall z \in E)$$

② 若在 E 上 $|f_n(z)| \leq M_n, \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$, 则

$\sum f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

③ 若 $f_n(z)$ ($n=1, 2, \dots$) 在集合 E 上连续, 且在 $f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 E 上连续.

证③: 一致收敛: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N$ 时

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad (\forall z \in E)$$

固定上述 N , 对 $z_0 \in E$, 取 δ 充分小, $|z - z_0| < \delta$ 时

$$|S_N(z) - S_N(z_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{则 } |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| \\ &\quad + |f(z_0) - S_N(z_0)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

定理: 若 $f_n(z)$ ($n=1, 2, \dots$) 在可求长曲线 γ 上连续, 且 $\sum f_n(z)$ 在 γ 上

- 收敛到 $f(z)$, 则 $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$.

证: 由于 $\sum f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛, 故 $f(z)$ 在 γ 上连续。故 $\int_{\gamma} f(z) dz$ 有定义。

由假设 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 使当 $n \geq N$ 时

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(z) - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{L}, \quad L = \text{length}(\gamma).$$

则当 $n \geq N$ 时

$$\left| \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} f_k(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^n f_k(z) - f(z) \right) dz \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon.$$

$$\text{故 } \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

定理 (Weierstrass 定理). 若

① $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 中全纯

② $\sum f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$.

则 (1) $f(z)$ 在 D 中全纯

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

证: (1) 全纯 + 内闭-致收敛 $\Rightarrow f(z)$ 连续.

设 γ 为任一分段光滑简单闭曲线, 则

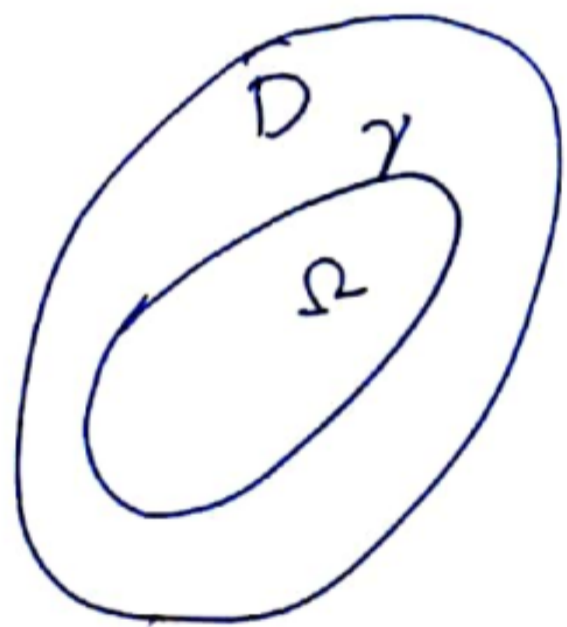
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{h=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_h(z) dz = 0$$

由 Morera 定理 $f(z)$ 在 D 中全纯.

(2). 令 $g_n(z) = f(z) - \sum_{j=1}^n f_j(z)$, 则 $g_n(z)$ 在 D 中全纯.

$$g_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g_n(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}} d\xi, \quad (k \in \mathbb{N})$$

取 设 $d = \min_{\substack{z \in \Omega \\ \xi \in \partial D}} \{ |z-\xi| \} > 0$, 则 $\forall z \in \Omega$.



$$\begin{aligned} |g_n^{(k)}(z)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \max_{\xi \in \Omega} |g_n(\xi)| \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{|\xi-z|^{k+1}} |d\xi| \\ &\leq C \cdot \max_{\xi \in \Omega} |g_n(\xi)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故 $g_n^{(k)}(z)$ 在 Ω 上一致收敛.

定理: 设 $F(z, s): \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 满足:

① $F(z, s)$ 是 z 的连续函数,

② F 在 $\Omega \times [0, 1]$ 上连续.

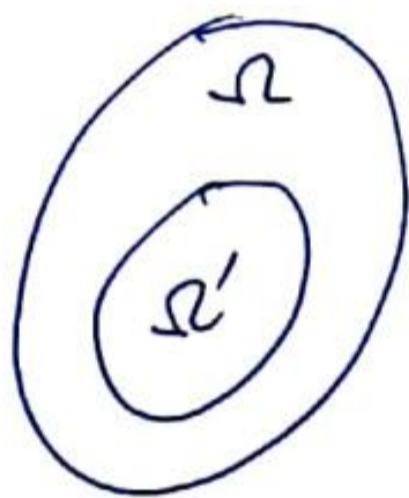
则 $f(z) = \int_0^1 F(z, s) ds$ 连续.

证: $\int_{\Omega} f_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(z, \frac{k}{n})$

证: $f_n(z)$ 在 Ω 上连续, 下证 $f_n(z)$ 内闭一致收敛到 $f(z)$.

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (F(z, \frac{k}{n}) - F(z, s)) ds \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |F(z, \frac{k}{n}) - F(z, s)| ds$$



由于 $F(z, s)$ 在 $\bar{\Omega}' \times [0, 1]$ 上一致连续, 故对 $\forall s_1, s_2$ 且 $|s_1 - s_2| < \delta$ 时

$$|F(z, s_1) - F(z, s_2)| < \varepsilon \quad (\forall z \in \Omega')$$

故 $|f_n(z) - f(z)| \leq \sum_{k=1}^n \varepsilon \cdot \frac{1}{n} = \varepsilon \quad (\forall z \in \Omega')$

从而 $f_n(z)$ 内闭一致收敛到 $f(z)$. \square $f(z)$ 连续.

例: 设函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上连续有界, 则函数

$$g(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt$$

在 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ 上有定义且全纯.
"Ω".

例: 设函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上连续有界, 则函数

$$g(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt$$

在 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ 上有定义且全纯.
" Ω .

记①令 $g_n(z) = \int_0^n f(t) e^{-zt} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$

知 $F(z, t) = f(t) e^{-zt}$ 在 $\Omega \times [0, n]$ 上满足前向定理的条件,

故 $g_n(z) = \int_0^n F(z, t) dt$ 在 Ω 上全纯.

② 设 $K \subset \Omega$ 为任意子集, 则令 $\delta = \min_{z \in K} \operatorname{Re} z > 0$.

$$\text{令 } M = \sup_{t \geq 0} |f(t)| < +\infty.$$

则 $\forall z \in K$.

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g(z)| &= \left| \int_n^\infty f(t) e^{-zt} dt \right| \\ &\leq \int_n^\infty |f(t)| \cdot |e^{-zt}| dt. \end{aligned}$$

设 $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), 则

$$|e^{-zt}| = |e^{-(x+yi)t}| = e^{-xt}$$

$$\text{故 } |g_n(z) - g(z)| \leq M \cdot \int_n^\infty e^{-xt} dt \leq M \cdot \int_n^\infty e^{-\delta t} dt$$

$$= \frac{M}{\delta}, \quad \forall z \in K.$$

故 $g_n(z)$ 在 K 上一致收敛到 $g(z)$.

从而 $g(z)$ 在 Ω 中全纯.

考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

定理. 令 $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

则当 $|z| < R$ 时, $\sum a_n z^n$ 绝对, 内闭一致收敛.

当 $|z| > R$ 时, $\sum a_n z^n$ 发散.

证明: ① 若 $R=0$, 则 $\sum a_n z^n$ 收敛 $\Leftrightarrow z=0$

证: 若 $z_0 \neq 0$, 由于 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$. 故 $\exists n_k$,
 $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{|z_0|} \Rightarrow |a_{n_k}| \cdot |z_0|^{n_k} > 1$

\Rightarrow 发散.

② 若 $R=\infty$, 则 $\sum a_n z^n$ 处处收敛.

证: 取 $z_0 \neq 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ 故 $\forall n > N$ 时

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z_0|} \Rightarrow |a_n| \cdot |z_0|^n < \frac{1}{2^n}$$

\Rightarrow 绝对, 内闭收敛.

③ 设 $0 < R < \infty$, 则取 $0 \neq z_0$, $|z_0| < R$, 取 $|z_0| < \rho < R$

$$\text{则 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}, \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$$

$$\Rightarrow |a_n| \rho^n < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| |z_0|^n < \left(\frac{\rho}{|z_0|}\right)^n$$

故 $\sum a_n z_0^n$ 绝对收敛, 内闭一致收敛.

④ 若 $|z_0| > R$, 取 $|z_0| > r > R$, 则 $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} > \frac{1}{r}$

故 $|a_n| > \frac{1}{r^n}$, 故 $|a_n| \cdot |z_0|^n > \left(\frac{z_0}{r}\right)^n > 1$, 故发散.

例: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$, 在 \mathbb{C} 上收敛.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, $R = 1$, 在 $|z| < 1$ 上收敛.

定理: 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛域为 $|z| < R$

则 ① $f(z)$ 是 $|z| < R$ 上全纯函数

② f 在 $|z| < R$ 上可导, 且 $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

③ $f'(z)$ 在 $|z| < R$ 上收敛且全纯.

证明: 令 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

取 $|z_0| < R$. 要证: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = g(z_0)$.

$$\hat{=} f(z) = S_n(z) + E_n(z), \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

$$\text{证} \quad \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0)$$

$$= \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} + \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} - g(z_0)$$

$$= \left(\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0) \right)$$

$$+ \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} + S_N'(z_0) - g(z_0).$$

由于 $S'_N(z_0) \rightarrow g'(z_0)$, $N \rightarrow +\infty$, A

$$\left| \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| a_n \cdot \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} \right|$$

$$\begin{aligned} |(z_0+h)^n - z_0^n| &= \left| h \cdot [(z_0+h)^{n-1} + (z_0+h)^{n-2} \cdot z_0 + \dots + z_0^{n-1}] \right| \\ &\leq |h| \cdot n \cdot r^{n-1}, \quad \forall |z_0| < r < R, \quad |z_0+h| < r < R. \end{aligned}$$

$$\text{则} \left| \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n \cdot r^{n-1}$$

由于 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ 的收敛半径为 R , 故当 N 充分大时 $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < \varepsilon$.

固定 $z_0 \in B(0, r)$, $\forall \varepsilon > 0$, 可取 N 充分大使得

$$\textcircled{1} |S'_N(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon$$

$$\textcircled{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < \varepsilon$$

固定 N , 取 h 充分小, 使 $\left| \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| < \varepsilon$.

则有 $\left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) \right| < 3\varepsilon$.

故 f 在 z_0 处可导, 且 $f'(z) = g(z)$.

推论: 幂级数 $\sum a_n z^n$ 在收敛域上无穷次可导.

定义: 在区域 D 上, 称函数 $f(z)$ 在 ~~某点~~ $z_0 \in D$ 上解析, 若 f 在 z_0 处可展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B(z_0, \varepsilon).$$

若 f 在 D 中任何点都解析, 则称 f 在 D 中解析.

推论: 若 f 在 D 上解析, 则 f 全纯.

例.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \text{ 在 } \mathbb{C} \text{ 上可导.}$$

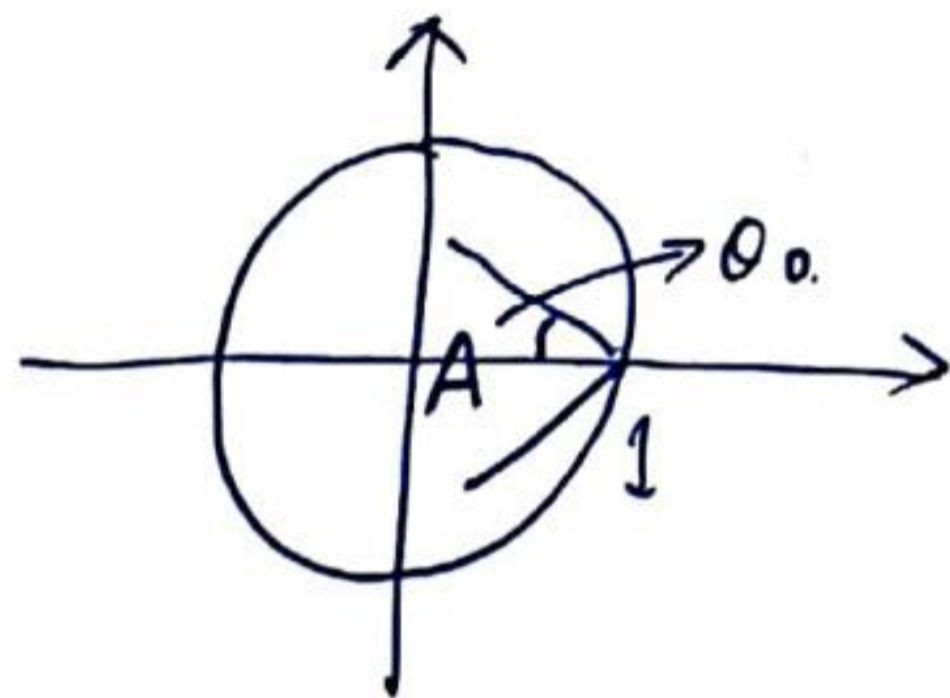
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \text{ 在 } |z| < 1 \text{ 上可导.}$$

定理: (Abel) 幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R=1$, 且在点 $z=1$

处收敛到 S , 则

(1) 级数在区域 A 上一致收敛

$$(2) \lim_{\substack{z \in A \\ z \rightarrow 1}} f(z) = S$$



证明: $\sum \sigma_{n,p} = a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$

则 $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |\sigma_{n,p}| < \varepsilon$.

故 $a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_{n+p} z^{n+p}$

$$= \sigma_{n,1} z^{n+1} + (\sigma_{n,2} - \sigma_{n,1}) z^{n+2} + \dots + (\sigma_{n,p} - \sigma_{n,p-1}) z^{n+p}$$

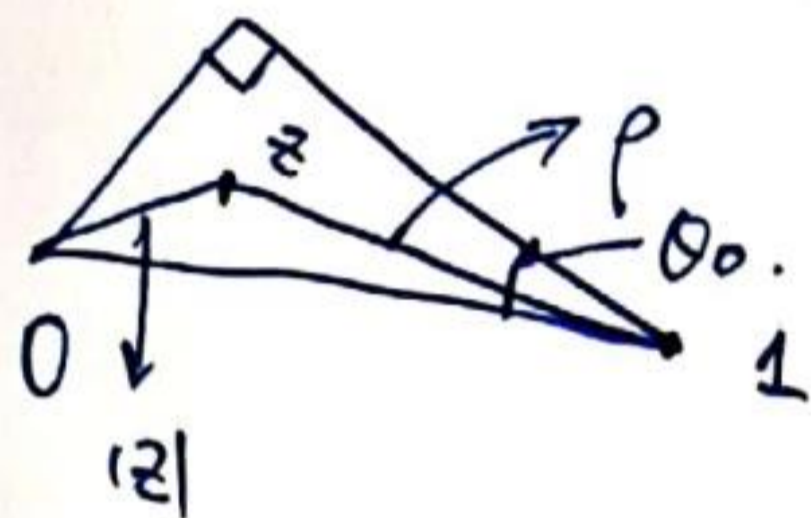
$$= \sigma_{n,1} z^{n+1} (1-z) + \sigma_{n,2} z^{n+2} (1-z) + \dots + \sigma_{n,p-1} (z^{n+p-1} - z^{n+p}) + \sigma_{n,p} z^{n+p}$$

$$= \sigma_{n,1} z^{n+1} (1-z) + \sigma_{n,2} z^{n+2} (1-z) + \dots + \sigma_{n,p-1} z^{n+p-1} (1-z) + \sigma_{n,p} z^{n+p}$$

$$= z^{n+1} (1-z) (\sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} z + \dots + \sigma_{n,p-1} z^{p-2}) + \sigma_{n,p} z^{n+p}$$

$$\begin{aligned}
& \text{故 } |a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_{n+p} z^{n+p}| \\
& \leq |z|^{n+1} |1-z| \cdot (|\sigma_{n,1}| + |\sigma_{n,2}| |z| + \dots + |\sigma_{n,p-1}| \cdot |z|^{p-2}) + |\sigma_{n,p}| \\
& \leq \varepsilon \cdot |z|^{n+1} |1-z| \frac{1}{1-|z|} + \varepsilon
\end{aligned}$$

下证：对 $\forall z \in A$, $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ 一致有界。



设 $r=|z|$, 则

$$r^2 = 1 + p^2 - 2p \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0.$$

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{p}{1-r} = \frac{p(1+r)}{1-r^2}$$

$$= \frac{p(1+r)}{2p \cos \theta - p^2} \leq \frac{1+r}{2 \cos \theta - p}$$

$$\leq \frac{1+r}{\cos \theta} \leq \frac{1+r}{\cos \theta_0}$$

注意. $p \leq \cos \theta_0$.

故级数在区域 A 中一致收敛.

(2) 令 $E = A \cup \{1\}$, 则级数在 E 上一致收敛, 且每项在 E 上连续.

故 $f(z)$ 在 E 上连续. 即

$$\lim_{\substack{z \in A \\ z \rightarrow 1}} f(z) = f(1) = S.$$

例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 在 $\{ |z| < 1 \} \setminus \{1\}$ 上收敛.

解: ① $R=1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 在 $|z| < 1$ 上内闭一致收敛.

② $z=1$ 时发散.

③ 当 $z_0 = e^{i\theta}, (\theta \in \mathbb{R})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{ 实部 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \quad \text{虚部 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

若 $\theta \in (0, 2\pi)$, 则实部虚部都收敛. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 在 $z = e^{i\theta}, (\theta \in (0, 2\pi))$ 收敛.

Dirichlet 判别法: 设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 两数列, $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$,

若 ①: $\{b_k\}$ 单调趋于 0

② $\{S_k\}$ 有界

则 $\sum a_k b_k$ 收敛.

④ 求和函数.

$$\frac{1}{2} |z| < 1 \text{ 时, } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \int_0^z f'(w) dw = \int_0^z \frac{1}{1-w} dw = -[\text{Log}(1-z)]_0^z \\ &= -\log(1-z). \quad (\text{取 } \log 1 = 0 \text{ 分支}). \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z), \quad (|z| < 1)$$

当 $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$ 时收敛. 故由 Abel 定理,

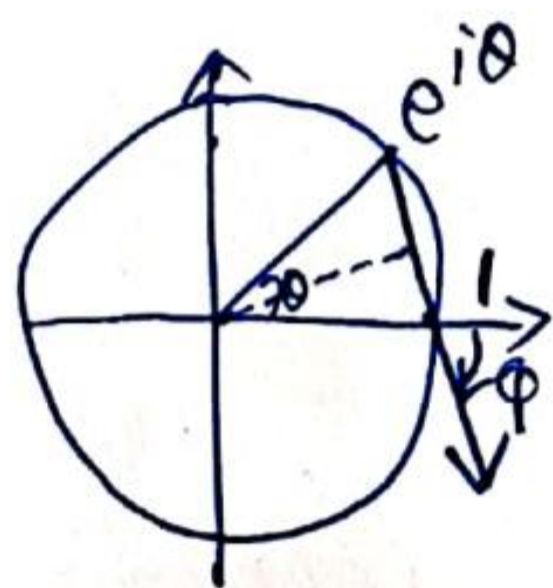
$$f(e^{i\theta}) = \lim_{\substack{z = te^{i\theta} \\ t \rightarrow 1^-}} f(z) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (-\log(1-z))$$

$$= -\log(1 - e^{i\theta})$$

$$= -\log|1 - e^{i\theta}| - i \arg(1 - e^{i\theta}), \quad \arg \in (-\pi, \pi].$$

$$|1 - e^{i\theta}| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\arg(1 - e^{i\theta}) = -\frac{\pi - \theta}{2}$$



$$\text{故 } f(e^{i\theta}) = -\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\pi-\theta}{2}i, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

比较实部与虚部:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

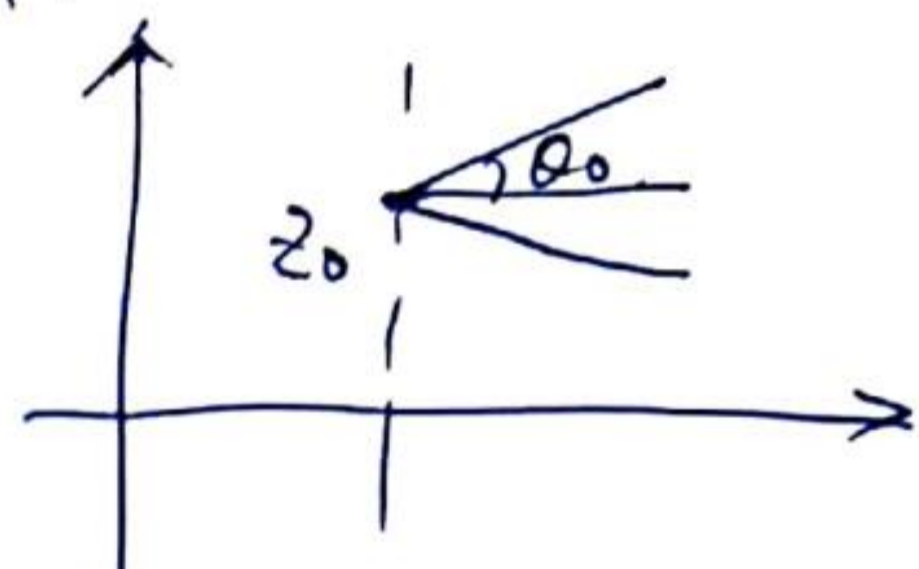
$\forall \theta \in (0, 2\pi).$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ 的收敛性.

定理: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 收敛, 则

① 它在 $\operatorname{Re} z > x_0$ 内收敛.

② 级数在区域 A 的闭包上一致收敛.



证明: ① $\sum \sigma_n = 0$, $\sigma_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}}$. | | $z_0 \in (0, \frac{1}{2})$.

$$\sigma_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}} + \frac{a_{n+2}}{(n+2)^{z_0}}$$

$$\dots$$

$$\sigma_{n+p} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}} + \frac{a_{n+2}}{(n+2)^{z_0}} + \dots + \frac{a_{n+p}}{(n+p)^{z_0}}$$

$$\sigma_{n+p} - \sigma_{n+p-1} = \frac{a_{n+p}}{(n+p)^{z_0}}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k^z} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k^{z_0}} \cdot \frac{1}{k^{z-z_0}}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{k^{z-z_0}}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sigma_k}{k^{z-z_0}} - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{\sigma_k}{(k+1)^{z-z_0}}$$

$$= \left(\frac{\sigma_{n+1}}{(n+1)^{z-z_0}} + \frac{\sigma_{n+2}}{(n+2)^{z-z_0}} + \dots + \frac{\sigma_{n+p}}{(n+p)^{z-z_0}} \right)$$

$$- \left(\frac{\sigma_n}{(n+1)^{z-z_0}} + \frac{\sigma_{n+1}}{(n+2)^{z-z_0}} + \dots + \frac{\sigma_{n+p-1}}{(n+p)^{z-z_0}} \right)$$

$$= \sigma_{n+1} \left(\frac{1}{(n+1)^{z-z_0}} - \frac{1}{(n+2)^{z-z_0}} \right) + \dots$$

$$+ \sigma_{n+p+1} \left(\frac{1}{(n+p+1)^{z-z_0}} - \frac{1}{(n+p+2)^{z-z_0}} \right) + \frac{\sigma_{n+p}}{(n+p)^{z-z_0}}$$

在单值域中

$$\begin{aligned} (w^\beta)' &= (e^{\beta \log w})' = \beta \cdot \frac{1}{w} e^{\beta \log w} \\ &= \beta w^{\beta-1}. \end{aligned}$$

故令 $\beta = -(z-z_0)$, $k > 0$,

$$\begin{aligned} |k^\beta - (k+1)^\beta| &= \left| \int_k^{k+1} \beta t^{\beta-1} dt \right| \\ &\leq |\beta| \cdot \int_k^{k+1} |t^{\beta-1}| \cdot dt. \end{aligned}$$

设 $\beta-1 = u+iv$, $u, v \in \mathbb{R}$.

$$|t^{u+iv}| = |e^{(u+iv) \log t}| = |e^{u \log t}| = t^u$$

$$\uparrow_2 \quad |k^\beta - (k+1)^\beta| \leq |\beta| \int_k^{k+1} t^{\operatorname{Re}\beta - 1} dt.$$

$$= \frac{|\beta|}{\operatorname{Re}\beta} \left((k+1)^{\operatorname{Re}\beta} - k^{\operatorname{Re}\beta} \right)$$

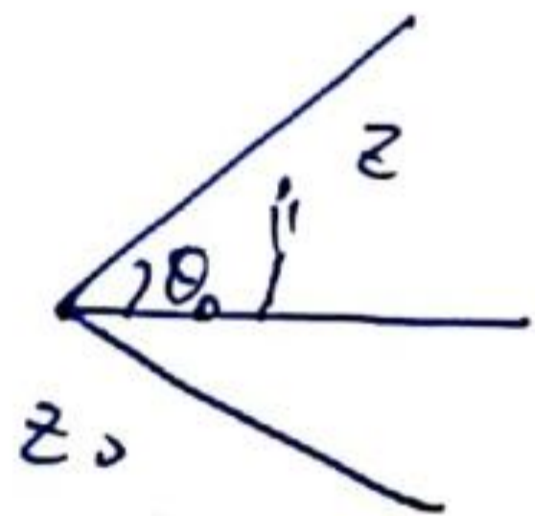
$$\uparrow_2 \quad \left| \frac{1}{k^z - z_0} - \frac{1}{(k+1)^z - z_0} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{z_0 - z} \left((k+1)^{z_0 - z} - k^{z_0 - z} \right)$$

$$= \frac{|z - z_0|}{z - z_0} \left(k^{z_0 - z} - (k+1)^{z_0 - z} \right)$$

$$\uparrow_2 \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k^z} \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|z - z_0|}{z - z_0} \cdot \frac{1}{(n+1)^{z - z_0}} + \frac{\varepsilon}{(n+p)^{z - z_0}}$$

取 $\frac{\delta}{2}$ $\operatorname{Re} z = \sigma > \sigma_0$ 时

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k^z} \right| \leq \varepsilon \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{\sigma - \sigma_0} + 1 \right)$$



$$\leq \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{\cos \theta_0} + 1 \right), \quad \forall z \in A.$$

取 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^z}$ 在区域 A 上一致收敛, 在 \bar{A} 上也一致收敛.

定理: 任一形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ 的函数项级数都有一收敛直线 $\operatorname{Re} z = c$

满足: (1) 级数在直线右半平面内收敛, 在直线的左半平面发散.

(2) 若在直线上一点 z_0 收敛, 则在上述扇状域中一致收敛.

(3) 级数在收敛直线的右半平面内内闭一致收敛. ^{知者}

证明: (1) 若级数处处发散, 则直线为 $\operatorname{Re} z = +\infty$

若级数处处收敛, 则直线为 $\operatorname{Re} z = -\infty$.

若 $\exists z_1 \in \mathbb{C}$ 级数收敛, $\exists z_1' \in \mathbb{C}$ 级数发散,

若 $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_1'$, 取 $C = \operatorname{Re} z_1$

若 $\operatorname{Re} z_1 \neq \operatorname{Re} z_1'$, 则必有 $\operatorname{Re} z_1' < \operatorname{Re} z_1$, 则

可设 $z_1', z_1 \in \mathbb{R}$. 设 $C_1 = \frac{z_1 + z_1'}{2}$ 若级数在 C_1 收敛, 则

记 $b_1 = C_1$, $a_1 = z_1'$, 否则记 $a_1 = C_1$, $b_1 = z_1$, 令 $C_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$.

继续上述操作. 即可得

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

且 $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}} (b_1 - a_1) \rightarrow 0$ 故. 由区间套定理. 存在 $C \in \mathbb{R}$.

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{C}.$$

则直线 $\operatorname{Re} z = C$ 符合题意.

(2)(3) 略.

例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, 当 $z=1$ 时发散, 当 $z=\sigma > 1$ 时收敛.

故收敛直线为 $\sigma=1$. 右半平面在 $\text{Re } z > 1$ 时内闭一致收敛,

令 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, 则 $\zeta(z)$ 可解析开拓到 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 上.

在 $z = -2m (m=1, 2, \dots)$ 上是零点 (平凡零点).

Riemann 猜想: $\zeta(z)$ 的其余所有零点都在 $\text{Re } z = \frac{1}{2}$ 直线上.

例. $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad (|z| < 1)$

函数 $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$ 在 $|z| < 1$ 中收敛, 在 $|z| > 1$ 发散.

但 $f(z)$ 可全纯开拓为 $\frac{1}{1-z}$, 在 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 上全纯.

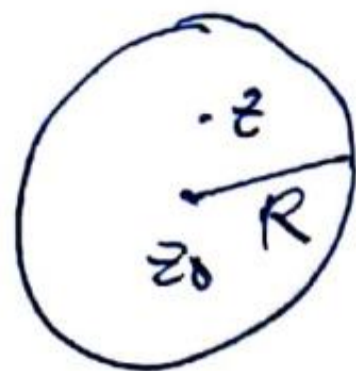
全纯函数的幂级数展开

定理: 设 $f(z)$ 在区域 D 中全纯, $\overline{B(z_0, R)} \subset D$, 则 f 可在 z_0 处展开:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad \forall z \in B(z_0, R).$$

且展式唯一.

证: $\forall z \in B(z_0, R), \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$



$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi-z} &= \frac{1}{\xi-z_0 - (z-z_0)} \\ &= \frac{1}{(\xi-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{\xi-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n \end{aligned}$$

因为 $z \in B(z_0, R)$, 故 $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$, 故上式级数为收敛.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} f(\xi) \cdot \frac{1}{\xi-z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} f(\xi) \cdot \frac{1}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z-z_0)^n \end{aligned}$$

$$\text{令 } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} f(\xi) \cdot \frac{1}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

推论: f 在 z_0 处全纯 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 邻域中展开成幂级数.

定理: 若函数在圆盘内~~全~~纯, 则其幂级数展开式是唯一的.

证: $f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$

$$\int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz = \int_{|z-z_0|=R} \frac{1}{(z-z_0)^{m+1}} (a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots) dz$$

$$|z-z_0|=R$$

$$|z-z_0|=R$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^{k-m-1} dz.$$

$$|z-z_0|=R$$

$$\frac{1}{2\pi} \quad k=m, |z| \quad \int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^{k-m-1} dz = \int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^{-1} dz = 2\pi i$$

$$\frac{1}{2\pi} \quad k \neq m, |z|: \quad \int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^{k-m-1} dz = \int_0^{2\pi} (r e^{i\theta})^{k-m-1} r i e^{i\theta} d\theta$$

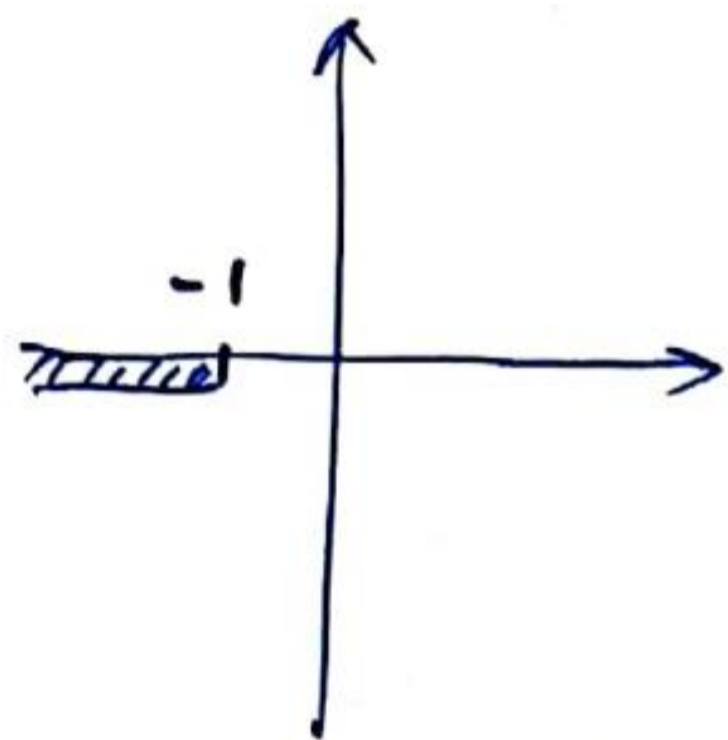
$$= r^{k-m} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)\theta} r i e^{i\theta} d\theta.$$

$$= r^{k-m} i \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)\theta} d\theta$$

$$= 0.$$

$$\text{K.P.P} \quad \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz = a_m \cdot 2\pi i \quad \Rightarrow a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz.$$

例: 对数函数 $\text{Log}(1+z)$ 的单值分支在 $z=0$ 处的展式



设 $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$.

则 $\text{Log}(1+z)$ 在 Ω 上单值分支:

$$\log_k(1+z) = \log_0(1+z) + 2k\pi i$$

$$\log_0(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{3}z^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots$$

$(|z| < 1)$

$$\text{故 } \log_k(1+z) = 2k\pi i + z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots$$

$(|z| < 1, k \in \mathbb{Z})$

定义. 若 $f(z)$ 在 z_0 处全纯, 且 $f(z_0) = 0$, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的零点.

此时 $f(z)$ 在 z_0 的邻域中可展开:

$$f(z) = f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots \quad (\forall z \in B(z_0, \delta))$$

只有两种情形:

1) 若 $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \geq 1$. 则 $f(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 内恒为 0.

2) 若 $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m)}(z_0) = 0, f^{(m+1)}(z_0) \neq 0$. 则称

z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点, 或 m 重零点. 此时.

$$f(z) = (z-z_0)^m \cdot \left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \dots \right], \forall z \in B(z_0, \delta)$$

$$= (z-z_0)^m \cdot g(z)$$

则 $g(z)$ 满足 $g(z_0) \neq 0$, $g(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 内全纯.

命题: z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点 $\Leftrightarrow f(z) = (z - z_0)^m g(z)$,

其中 $g(z)$ 在 z_0 邻域中全纯, $g(z_0) \neq 0$.

证: \Rightarrow f 在 z_0 全纯, 故

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$$= a_m (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots$$

$$= (z - z_0)^m (a_m + a_{m+1} (z - z_0) + \dots)$$

$g(z) = a_m + a_{m+1} (z - z_0) + \dots$ 在 z_0 邻域中全纯.

定理: 若 $f(z)$ 在区域 Ω 中全纯, 则 f 的零点是孤立的.

即若 $z_k \rightarrow z_0 \in \Omega$, $z_k \in \Omega$, $z_k \neq z_0$, $f(z_k) = 0$, 则 f 在 Ω 中恒为 0.

证明:

① $f(z)$ 在 z_0 处全纯, 若 f 在 $B(z_0, \delta)$ 内不恒为 0, 则可展开.

$$f(z) = a_m (z - z_0)^m (1 + \varphi(z)), \quad a_m \neq 0, \quad m \geq 0.$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 内全纯, 且 $\varphi(z_0) = 0$. 取 δ 小, 使

$$|\varphi(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in B(z_0, \delta), \quad \text{则}$$

$$f(z_k) = a_m (z_k - z_0)^m (1 + \varphi(z_k)) \neq 0, \quad \text{若 } z_k \in B(z_0, \delta).$$

与假设矛盾. 故 f 在 $B(z_0, \delta)$ 内恒为 0.

② 下证 f 在黎曼 Ω 上恒为 0.

由于 f 连续, 故 $E = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ 是闭集且非空.

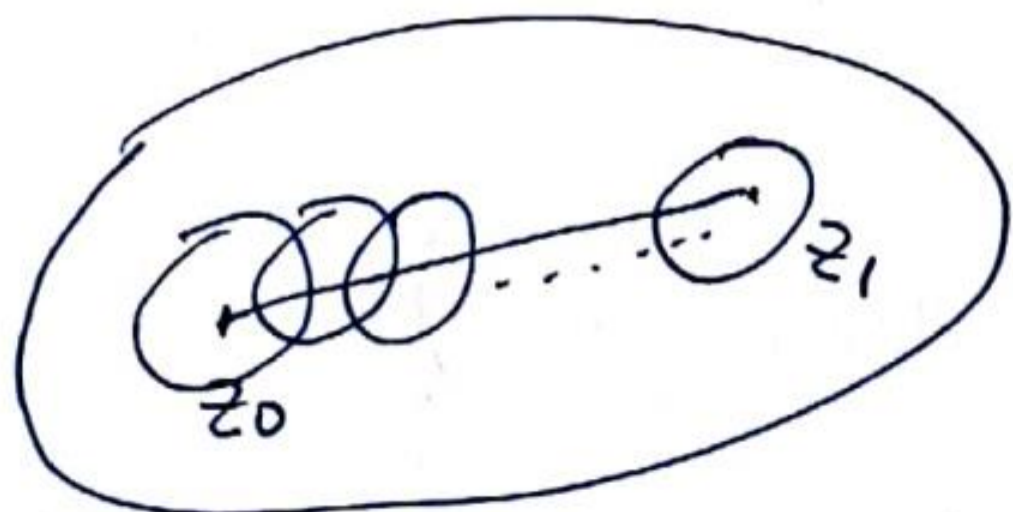
令 U 为 E 的内部, 则 U 为开集. 由①知, U 非空.

下证 U 为闭集. 即证: 若 $z_n \in U$, $z_n \rightarrow z_0 \in \Omega$, ~~且 $f(z_n) = 0$~~ ,
则 $z_0 \in U$. (由①知成立).

故 U 闭, 从而 U 为 Ω 中既开又闭的非空子集, 故由连通性知 $\Omega = U$.

即 $f(z)$ 在 Ω 中恒为 0.

或者:



推论: 若 f_1, f_2 在 Ω 上全纯, 且存在 Ω 上 全点 z_n , 使 $f_1(z_n) = f_2(z_n)$,
 $z_n \rightarrow z_0 \in \Omega, z_n \neq z_0$, 则 $f_1(z) = f_2(z), (\forall z \in \Omega.)$

说明: “ $z_0 \in \Omega$ ” 条件不能去掉.

如: $\sin \frac{1}{1-z}$ 在 $|z| < 1$ 上全纯, 零点 $z_k = 1 - \frac{1}{k\pi} \rightarrow 1 (k \rightarrow \infty)$

但 $\sin \frac{1}{1-z}$ 在 $|z| < 1$ 上不恒为 0.

推论: 三角恒等式对复数 z 都成立.

如 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2\sin z \cos z.$

例: 求 e^z 的幂级数展开式.

$$\text{设 } F(z) = e^z, \quad G(z) = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

则 F 与 $G(z)$ 在 \mathbb{C} 上全纯, 且当 $z = x \in \mathbb{R}$ 上:

$$F(z) \Big|_{z=x} = e^z \Big|_{z=x} = e^{x+iy} \Big|_{z=x} = e^x = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

故由全纯函数零点孤立性可知 $F(z) = G(z)$ ($\forall z \in \mathbb{C}$), 即

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

例: 求 $\sin z$, $\cos z$ 的展式.

由定义: $\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + iz + \frac{1}{2!} (iz)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (iz)^n + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(1 - iz + \frac{1}{2!} (iz)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (-iz)^n + \dots \right)$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

$$= \frac{1}{2i} \left(1 + iz + \frac{1}{2!} (iz)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (iz)^n + \dots \right)$$

$$- \frac{1}{2i} \left(1 - iz + \frac{1}{2!} (iz)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (-iz)^n + \dots \right)$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

全纯函数的 Laurent 展开

定义: Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

(a)

(b)

(c)

称级数 (a) 收敛, 若 (b) (c) 收敛

称 (a) 发散, 若 (b) (c) 有一个发散.

求(a)的收敛域:

① (b)的收敛半径为 R , 则 (b)在 $|z-z_0| < R$ 上收敛.

② 令 $w = \frac{1}{z-z_0}$, 则(c)为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ 为 w 的幂级数.

设收敛半径为 ρ , 则(c)在 $|w| < \rho$ 上收敛.

即在 $|z-z_0| > \frac{1}{\rho}$ 上收敛.

③ 综上: 若 $\frac{1}{\rho} < R$, 则(a)收敛域非空, 为集合 $\left\{ \frac{1}{\rho} < |z-z_0| < R \right\}$.

若 $\frac{1}{\rho} > R$, 则(a)收敛域为空集.

(a)在收敛域中内闭一致收敛到一连续函数.

原上:

定理: 若 Laurent 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 的收敛域为圆环 $D = \{ z \mid r < |z-z_0| < R \}$

则级数 D 内闭一致收敛, 且和函数在 D 中连续.

定理: 若 $f(z)$ 在 $D: r < |z-a| < R$ 上全纯 ($0 \leq r < R \leq +\infty$)

$$\text{则 } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n \quad (*)$$

$$\text{其中 } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad (r < \rho < R)$$

且展式唯一.

证明: (1) (*) 式右边与 ρ 的选取无关, 因为函数 $\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$

在 D 内全纯. 对任意 ρ_1, ρ_2 , $0 < r < \rho_1, \rho_2 < R$ 有

$$\int_{|\xi-z_0|=\rho_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \int_{|\xi-z_0|=\rho_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

(2) 设 $\gamma_1: |z-a|=\rho_1$, $\gamma_2: |z-a|=\rho_2$, $z_0 \in D$

设 $r < \rho_1 < |z_0-a| < \rho_2 < R$

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z_0} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z_0} d\xi$$

当 $\xi \in \gamma_2$ 时, 将 $\frac{1}{\xi - z_0}$ 在 a 点展开为 Laurent 级数.

$$\frac{1}{\xi - z_0} = \frac{1}{(\xi - a) - (z_0 - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0 - a}{\xi - a}}$$

$$\left| \frac{z_0 - a}{\xi - a} \right| < 1, \quad = \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - a}{\xi - a} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}$$

当 $\xi \in \gamma_1$ 时, 展开 $\frac{1}{\xi - z_0}$; 由于 $\left| \frac{\xi - a}{z_0 - a} \right| < 1$ 时

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z_0} &= \frac{1}{(\xi - a) - (z_0 - a)} = -\frac{1}{z_0 - a} \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z_0 - a}} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(\xi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\xi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}} d\xi \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right) (z_0 - a)^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n}} d\xi \right) (z_0 - a)^{-n-1}$$

在第二项中令 $-n = m + 1$, 则第二项为

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{m+1}} d\xi \right) (z_0 - a)^m$$

综上 $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{m+1}} d\xi \right) (z-a)^m, \quad (\forall z \in D)$

(3) 唯一性: 设 $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n' (z-a)^n$

则积分:

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = 2\pi i C_m.$$

原因: 若 $n=m$, 则 $\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = 2\pi i$

若 $n \neq m$, 则 $\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = \int_0^{2\pi} (\rho e^{i\theta})^{n-m-1} \rho i e^{i\theta} d\theta$

$$= \rho^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 0.$$

例: 求 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ 在 $0 < |z| < 1$ 与 $|z| > 1$ 的展式:

解: 当 $|z| < 1$ 时 $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$

$$\begin{aligned} \text{当 } |z| > 1 \text{ 时, } f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

例: $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在 $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < +\infty$ 的 Laurent 展式.

解: $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1}$

当 $1 < |z| < 2$ 时

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{2}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z^2}\right)^n \end{aligned}$$

当 $|z| > 2$ 时.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} \end{aligned}$$

定义: 若 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 上全纯, 在 z_0 处无定义, 则称 z_0 为 f 的孤立奇点.

例: $z=0$ 是 $\frac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

$z=0$ 不是 $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ 的孤立奇点, $z_k = \frac{1}{k\pi} \rightarrow 0$

此时 f 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 上有展式, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$

主要部分: $\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n$

全纯部分: $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$

定理, 若 z_0 是 f 的孤立奇点, 则下列等价:

① $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在且有限

② $f(z)$ 在 z_0 的某空心邻域中有界

③ $f(z)$ 的 Laurent 展式中负幂次项系数均为 0.

满足上述条件之一, 称为可去奇点, 补充定义后, f 在 z_0 全纯.

证明: (1) \Rightarrow (2) 显然

(2) \Rightarrow (3) 设 $n > 0$,

$$|C_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} f(\xi) \cdot (\xi - z_0)^{n-1} d\xi \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \rho^n \cdot 2\pi\rho = M\rho^n \rightarrow 0.$$

故 $C_n = 0, (\forall n > 0)$

(3) \Rightarrow (1) 令 $g(z)$ 为 $f(z)$ Laurent 展式中的一切部分

则 $g(z) = \sum_{h=0}^{\infty} C_h (z - z_0)^h$ 在 z_0 点全纯.

令 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = g(z_0)$. 则 ① 成立.

说明: 第②条可改为: $|f(z)| \leq \frac{M}{|z-z_0|^\delta}$, $\delta \in [0, 1)$, $0 < |z-z_0| < \delta$.

在该条件下:

$$|C_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^\delta} \cdot \rho^M \cdot 2\pi\rho = M\rho^{n-\delta} \rightarrow 0, \text{ 当 } n \geq 1, \text{ 且 } \delta \in [0, 1)$$

故 $C_{-n} = 0$, ($\forall n \geq 1$)

定理: 设 z_0 是 f 的孤立奇点, 则下列条件:

① $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

② 存在 $m \in \mathbb{N}$, $g(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 上全纯, 恒不为 0,

使 $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

③ $f(z)$ 的展式中只有有限多负幂次项不为 0, 即

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

($a_{-m} \neq 0$)

④ 存在 $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z)$ 存在, 且不为 0

⑤ 存在 $m \in \mathbb{N}$, $g = \frac{1}{f}$ 以 z_0 为 m 阶零点.

满足上述条件之一称为 m 阶极点.

证明: ① \Rightarrow ② 设 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 上恒不为 0

$$\text{令 } g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & 0 < |z - z_0| < \delta \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上全纯, 且 z_0 为 g 的零点.

故 $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, $h(z)$ 全纯, 且 $h(z) \neq 0, \forall z \in B(z_0, \delta)$.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{h(z)}$$

其余显然, 证明略.

定理. 设 z_0 为 f 的孤立奇点, 则下列条件:

(1) f 的展式中有无穷多项幂次不为 0.

(2) 对任何复数 $A \in \mathbb{C}$ 或 $A = \infty$, 在 z_0 的任意空心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$

中找到一列互异的 $z_n \rightarrow z_0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

(3) 不存在有限或无限 m 极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

证明: (2) \Rightarrow (3) 显然

(3) \Rightarrow (1) 若 (1) 不成立, 则 z_0 为 f 的可去奇点或极点, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ 为有限或 ∞ , 与 (3) 矛盾.

(1) \Rightarrow (2) 若 $A = \infty$, 则 z_0 不是可去奇点, 故 $f(z)$ 在 z_0 附近无界.

故可找到 $z_n \rightarrow z_0$, 使 $f(z_n) \rightarrow A = \infty$.

若 $A \in \mathbb{C}$, 则若在 z_0 的任意小邻域中都有 $f(z) = A$ 的零点,

则 (2) 成立. 否则 $f(z) - A$ 在某邻域中恒不为 0.

$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ 在 $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ 中全纯, 且不为 0.

若 $g(z)$ 在 $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ 中有界, 则 z_0 是 g 的可去奇点

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - A} = \lambda$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \begin{cases} A + \frac{1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \infty, & \lambda = 0, \end{cases} \Rightarrow z_0 \text{ 为可去奇点或极点, 矛盾.}$$

故 $g(z)$ 在 $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ 中无界. 故存在 $z_n \rightarrow z_0, z_n \in B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$

$$\text{使得 } \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \infty \quad \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A.$$

无穷远奇点

定义: ① $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 / 极点 / 本性奇点

$\Leftrightarrow w = 0$ 是 $f(\frac{1}{w})$ 的可去奇点 / 极点 / 本性奇点

② 若 $f(z)$ 在 $|z| > R$ 内全纯, 则称 $z = \infty$ 是 f 的孤立奇点.

例: ① $z = \infty$ 不是 $\frac{1}{\sin z}$ 的孤立奇点.

② ∞ 是多项式 $P_d(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$ ($a_d \neq 0$)

的 d 阶极点.

定义: 若 f 在 \mathbb{C} 上全纯, 则称 f 为整函数, 即 f 可表示为:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{收敛半径 } R = +\infty.$$

定理: 设 $f(z)$ 为整函数,

(1) ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Leftrightarrow f(z)$ 为常数.

(2) ∞ 为 $f(z)$ 的极点 $\Leftrightarrow f(z)$ 为非零多项式.

(3) ∞ 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 中有无穷多个 $a_n \neq 0$

证: (1) \Leftarrow 显然

\Rightarrow 令 $w = \frac{1}{z}$,

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{w^n}$$

$w=0$ 可去 $\Leftrightarrow a_n=0, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow f$ 常数.

(2) $w=0$ 为 $f\left(\frac{1}{w}\right)$ 极点 $\Leftrightarrow f$ 为多项式.

(3) 显然

推论: 有界整函数为常数.

证: f 有界 $\Rightarrow \infty$ 为可去奇点 $\Rightarrow f$ 为常数.

亚纯函数: 若 f 在 $\Omega (C \mathbb{C})$ 上除极点外处处可导, 则 f 在 Ω 上亚纯.
(没有非孤立奇点或本性奇点.)

定理: 若 f 在 \mathbb{C} 上亚纯, 则 f 为有理函数.

证: ① $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上只能有有限个极点. 若无穷多极点, 则存在极限点 z_0 不是孤立奇点, 故 z_0 不是 $f(z)$ 的极点或极点, 与假设矛盾.

② 设 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上极点为

$$z_1, z_2, \dots, z_k, \infty.$$

相应的 Laurent 展式的主要部分为

$$\psi_j(z) = \frac{C_j^{(j)}}{z - z_j} + \dots + \frac{C_{-m_j}^{(j)}}{(z - z_j)^{m_j}} \quad m_j \geq 1.$$

$$\psi(z) = C_0 + C_1 z + \dots + C_m z^m.$$

② 设 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上极点为

$$z_1, z_2, \dots, z_k, \infty.$$

相应的 Laurent 展式的主要部分为

$$\psi_j(z) = \frac{C_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + \dots + \frac{C_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}} \quad m_j \geq 1.$$

$$\psi(z) = C_0 + C_1 z + \dots + C_m z^m.$$

全纯部分记为 $\phi_j(z)$ 与 $\phi(z)$.

则在 z_j 附近有 $f(z) = \psi_j(z) + \phi_j(z)$

在 ∞ 邻域有 $f(z) = \phi(z) + \psi(z)$

$$\text{令 } F(z) = f(z) - \psi(z) - \sum_{j=1}^k \psi_j(z).$$

则 $F(z)$ 为 \mathbb{C} 上亚纯函数, 且在 $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_k, \infty\}$ 上全纯.

$$\begin{aligned} \text{在 } z_j \text{ 点处: } \lim_{z \rightarrow z_j} F(z) &= \lim_{z \rightarrow z_j} \left(f(z) - \gamma_j(z) - \gamma(z) - \sum_{i \neq j} \gamma_i(z) \right) \\ &= \varphi_j(z_j) - \gamma(z_j) - \sum_{i \neq j} \gamma_i(z_j) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{在 } \infty \text{ 点处: } \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(f(z) - \gamma(z) - \sum_{i=1}^k \gamma_i(z) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) - \sum_{i=1}^k \lim_{z \rightarrow \infty} \gamma_i(z) \\ &= \varphi(\infty) = 0. \end{aligned}$$

注意. $\gamma(z) = C_0 + C_1 z + \dots + C_m z^m$
 $\varphi(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n z^n$

故 $F(z)$ 是 \mathbb{C} 上全纯有界函数, 故 $F(z)$ 为常数. 又 $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$

故 $F(z) \equiv 0$. 从而 $f(z) = \gamma(z) + \sum_{j=1}^k \gamma_j(z)$ 为有理函数.

定理: 若 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上单叶, 则 $f(z)$ 是分式线性变换.

证明: 设 $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, P_n, Q_m 无公共根.

若 $n > m$, 则 $f(\infty) = \infty$. 而 Q_m 在 \mathbb{C} 上无零点 $\Rightarrow Q_m$ 为常数.

故 $f(z) = P_n(z)$ 为多项式. 单叶 $\Rightarrow P_n(z)$ 只有一个零点, 设为 z_0 .

故 $f(z) = a \cdot (z - z_0)^n$, ($a \neq 0$).

因为 $b \neq 0$, $(z - z_0)^n = \frac{b}{a}$ 在 \mathbb{C} 上有 n 个不同的根.

故 $n=1$, 从而 $f(z)$ 为线性函数.

若 $n < m$, 则 $f(\infty) = 0$. 故 $P_n(z)$ 在 \mathbb{C} 上无零点, 故 P_n 为常数.

从而 $f(z) = \frac{1}{Q_m(z)}$. 单叶, $\forall A \in \mathbb{C}$, $Q_m(z) = \frac{1}{A}$ 只有一根

$$\Rightarrow m=1. \quad f(z) = \frac{1}{cz+d} \quad (c \neq 0)$$

若 $n = m$, 则 $f(z) = 0$ 有一根 z_0 , 故 $P_n(z) = 0$ 只有一根 z_0 , $P_n(z) = (z - z_0)^n$.

$f(z) = \infty$ 只有一根 z_1 , 故 $Q_m(z) = (z - z_1)^m$, ($z_0 \neq z_1$)

$f(z) = C \neq 0$ 只有一根. 故 $\left(\frac{z - z_0}{z - z_1}\right)^n = C \neq 0$.

$$\Rightarrow \frac{z - z_0}{z - z_1} = C^{\frac{1}{n}} \text{ 有 } n \text{ 个不同根.}$$

$\Rightarrow n=1$. 故 $f(z)$ 为分式线性映射.

例: 当 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯, 且反函数 $f^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯,

则 $f(z) = az + b$ ($a \neq 0$).

证. ① 若 ∞ 可去, 则 $f(z)$ 为常数, 不可能

② 若 ∞ 本性奇点, $\forall A \in \mathbb{C}$, 存在 $z_n \rightarrow \infty$, $f(z_n) \rightarrow A$

取 $z_n = f^{-1}(f(z_n)) \rightarrow f^{-1}(A) \in \mathbb{C}$

与 $z_n \rightarrow \infty$ 矛盾.

③ 若 ∞ 为 f 的极点, 则 f 为多项式.

由于 f 单, 故 f 为一次多项式.

$$f = az + b, a \neq 0.$$

最大模原理与 Schwarz 引理.

最大模原理, 设 $f(z)$ 在区域 Ω 中全纯, 不是常值函数, 则 $|f(z)|$ 不可能在 Ω 中取到最大值.

引理: 若 $f(z)$ 在 $|z-a| \leq R$ 内全纯, 则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < r < R.$$

证明: $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad z = a + re^{i\theta}$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot r i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

定理证明: 设 $M = \sup_{\Omega} |f(z)| < +\infty$. $f(z)$ 不是常数, 故 $M > 0$.

$$\text{令 } \Omega_1 = \{z \in \Omega \mid |f(z)| = M\}$$

$$\Omega_2 = \{z \in \Omega \mid |f(z)| < M\}.$$

由 f 连续知 Ω_1 闭, Ω_2 开. 下证 Ω_1 为开集.

设 $a \in \Omega_1$, 则 $|f(a)| = M$. 由于 $a \in \Omega$, $\exists \delta > 0$, $B(a, \delta) \subset \Omega$,

故当 $0 < r < \delta$ 时

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

$$M = |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta$$

$$\text{故 } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (M - |f(a + re^{i\theta})|) d\theta \leq 0, \quad \forall r \in (0, \delta).$$

由于 $M - |f(a + re^{i\theta})|$ 非负且连续. 故.

$$M - |f(a + re^{i\theta})| = 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi), \quad \forall r \in (0, \delta).$$

即 $B(a, \delta) \subset \Omega_1$, 故 Ω_1 开.

由于 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. 由连通性知 Ω_1, Ω_2 必有一个为全集.

若 $|f(z)|$ 在 Ω 中达到最大, 则 Ω_1 非空, 故 Ω_2 为全集.

从而 $\Omega_1 = \Omega \Rightarrow f(z)$ 在 Ω 上为常数, 与假设矛盾.

推论: 设 Ω 为有界区域. $f(z)$ 在 Ω 中全纯, 且在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 则

$$|f(z)| \leq \max_{\partial\Omega} |f(z)| \quad (\forall z \in \Omega)$$

且"=" 成立当且仅当 $f(z)$ 为常数.

说明: “有界性”条件不能去掉.

$$f(z) = e^{e^z}, \quad \Omega = \left\{ z \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{则 } f(z) = e^{e^{x+iy}} = e^{e^x \cos y + i e^x \sin y}$$

$$|f(z)| = e^{e^x \cos y}$$

$$\frac{\pi}{2} \notin \partial\Omega, \text{ 则 } |f(z)| = 1$$

但 $|f(z)|$ 在 Ω 上无界.

说明: "最小模"原理不成立.

例: $f(z) = z$, $|f| = |z|$. 在 $|z| < 1$ 中达到最小模 0.

但 f 不为常数.

例: 若 $f(z)$ 全纯, 且在区域 Ω 上 ^恒 不为 0, 则 $|f|$ 在 Ω 内部不能达到最小值.

证: $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在 Ω 上全纯. 故 $|g|$ 在 Ω 中不能达到最大.

$\Rightarrow |f|$ 在 Ω 中不能达到最小.

无界区域的最大模原理.

例: 设 $F(z)$ 在 $G = \{z \mid 0 < \text{Im} z < 1\}$ 上全纯, 有界, 且在 \bar{G} 上连续,

若 $\sup_{\partial G} |F(z)| \leq 1$, 则 $|F(z)| \leq 1, \forall z \in G$.

想法: 构造函数 $F_\varepsilon(z)$ 在 G 上全纯, 且满足

$$\textcircled{1} |F_\varepsilon(z)| \leq 1, \forall z \in \partial G.$$

$$\textcircled{2} \lim_{\substack{z \in G \\ z \rightarrow \infty}} |F_\varepsilon(z)| = 0$$

$$\textcircled{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(z) = F(z), \forall z \in G.$$

例 $|F_\varepsilon(z)|$ 的最大值不可能在无穷远达到. 故只可能在有限区域

$$\text{边界上达到} \Rightarrow |F_\varepsilon(z)| \leq 1, \forall z \in G.$$

$$\text{令 } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ 得 } |F(z)| \leq 1, \forall z \in G.$$

证: 令 $F_\varepsilon(z) = F(z) e^{-\varepsilon z^2}$, 则 $F_\varepsilon(z)$ 在 G 上全纯, \bar{G} 上连续.

$$\frac{\pi}{2} \Im z = 0, \text{ 则 } |F_\varepsilon(x)| = |F(x)| e^{-\varepsilon x^2} \leq 1. \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\frac{\pi}{2} \Im z = 1, \text{ 则 } z = x + i. \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(z)| &= |F(z)| \cdot |e^{-\varepsilon(x+i)^2}| \\ &= |F(z)| \cdot e^{-\varepsilon(x^2-1)} \leq \begin{cases} e^\varepsilon, & \frac{\pi}{2} |x| \leq 1 \\ 1, & \frac{\pi}{2} |x| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} 0 \leq \Im z \leq 1, \text{ 则 } \forall z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, 1].$$

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(z)| &= |F(z)| \cdot |e^{-\varepsilon(x+iy)^2}| \\ &= |F(z)| \cdot e^{-\varepsilon(x^2-y^2)} \end{aligned}$$

$$= |F(z)| \cdot e^{-\varepsilon(x^2 - y^2)}$$

$$= |F(z)| \cdot e^{-\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2} \leq M \cdot e^{-\varepsilon x^2 + \varepsilon} \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow +\infty)$$

故 $\exists R > 0$, 当 $|x| > R$ 时, $|F_\varepsilon(z)| < \frac{1}{2}$.

$$\text{令 } G_R = \left\{ z \mid z = x + iy, \begin{array}{l} |x| < R \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}$$

则 $\forall z \in G \setminus G_R$, 有 $|F_\varepsilon(z)| < \frac{1}{2}$

$\forall z \in G_R$, 有 $|F_\varepsilon(z)| \leq \max_{\partial G_R} |F_\varepsilon(z)| \leq 1$.

综上: $\forall z \in G$, $|F_\varepsilon(z)| \leq 1$.

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 有 $|F(z)| \leq 1, (\forall z \in G)$

$$\text{证②: 令 } F_\varepsilon(z) = F(z) \cdot \frac{1}{1 - i\varepsilon z}$$

$$\text{设 } z = x + iy, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\text{若 } \operatorname{Im} z = 0, \text{ 则 } |F_\varepsilon(z)| = |F(z)| \cdot \frac{1}{|1 - i\varepsilon(x + iy)|}$$

$$\text{或 } \operatorname{Im} z = 1,$$

$$= |F(z)| \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon y)^2 + \varepsilon^2 x^2}}$$

$$\leq |F(z)| \leq 1.$$

$$\text{若 } 0 < \operatorname{Im} z < 1, \text{ 则 } |F_\varepsilon(z)| \leq \frac{M}{\sqrt{(1 + \varepsilon y)^2 + \varepsilon^2 x^2}} \leq \frac{M}{\varepsilon |x|}$$

$$\text{故 } \exists R > 0, \text{ 当 } |x| > R \text{ 时 } |F_\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{取 } R = \frac{2M}{\varepsilon}.$$

$$\text{令 } \Omega_R = \{ z \mid 0 < \text{Im} z < 1, \quad |\text{Re} z| < R \}.$$

则 $\forall z \in \Omega$, 则

$$|F_\varepsilon(z)| \leq \max_{\partial\Omega_R} |F_\varepsilon(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \Omega.$$

$$\text{令 } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ 则 } |F(z)| \leq 1.$$

类似地, 可证:

定理: 令 $S = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$

设 ① $f(z)$ 在 S 上全纯, 在 \bar{S} 上连续

② $|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \partial S$

③ $|f(z)| \leq C e^{\epsilon|z|}, \quad \forall z \in S.$

则 $|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in S.$

(构造 $F_\epsilon(z) = f(z) e^{-\epsilon z^{3/2}}$).

调和函数的极值原理.

调和函数 $\Delta u = 0$.

引理: 若 $u(x, y)$ 在 $|z-a| < R$ 中调和, 则 $\forall 0 < r < R$ 有

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

证: 由于 $|z-a| < R$ 单连通, 故存在全纯 $f(z)$, 使 $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$.

$$\begin{aligned} \text{由于 } f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi-a} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

取实部:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

定理: 设 $u(x, y)$ 在区域 D 中调和, 不是常数, 则 u 在 D 中最大值, 最小值都不能在 D 中内点达到.

证明: ① 令 $M = \sup_{z \in D} u(z)$, 若 $M = +\infty$, 则定理成立.

设 $M \in \mathbb{C}$, 若 $\exists a \in D$, $u(a) = M$, 则取 r 使 $B(a, r) \subset D$.

$$M = u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

$$\text{故 } \int_0^{2\pi} (M - u(a + re^{i\theta})) d\theta = 0, \quad \forall r: 0 < r < d(a, \partial D).$$

$$\text{故 } u(a + re^{i\theta}) = M, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi), 0 < r < d(a, \partial D).$$

$$\text{② 令 } D_1 = \{z \in D \mid u(z) = M\}$$

$$D_2 = \{z \in D \mid u(z) < M\}.$$

则由 u 连续知, D_1 闭, D_2 开. 由①知 D_1 开, 又 $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

D 连通, 故 D_1, D_2 必有一为空, 若 D_2 空, 则 $D_1 = D$. u 为常数.
 D_1 非空.

③ $-u(x)$ 在 D 中调和, 故 $-u(x)$ 在 D 中取不到最大值.
故 $u(x)$ 在 D 中取不到最小值.

例: f 在 $\Omega = \{0 < r_1 < |z| < r_2\}$ 内连续, 在 $\bar{\Omega}$ 上连续.

$$\text{令 } M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad \forall r$$

$$\log M(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2) \quad (*)$$

证明: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 在 $\{z \mid f(z) \neq 0, z \in \Omega\}$ 上

$$g(z) = \alpha \log |z| + \log |f(z)| \quad \text{调和}$$

在 $\{f(z) = 0, z \in \Omega\}$ 上, $g(z) = -\infty$, 故不能达到最大值.

证明: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 在 $\{z \mid f(z) \neq 0, z \in \Omega\}$ 上

$$g(z) = \alpha \log |z| + \log |f(z)| \text{ 调和.}$$

在 $\{f(z) = 0, z \in \Omega\}$ 上, $g(z) = -\infty$, 故不能达到极大值.

由调和函数极大原理, $\forall z \in \Omega$

$$g(z) \leq \max \left\{ \max_{|z|=r_1} g(z), \max_{|z|=r_2} g(z) \right\}.$$

$$\leq \max \left\{ \alpha \log r_1 + \log M(r_1), \alpha \log r_2 + \log M(r_2) \right\}$$

$$\stackrel{\text{令}}{=} \alpha \log r_1 + \log M(r_1) = \alpha \log r_2 + \log M(r_2)$$

$$\stackrel{\text{得}}{\text{得}} \alpha = \frac{\log M(r_2) - \log M(r_1)}{\log r_1 - \log r_2}.$$

$$\Rightarrow \max_{|z|=r} g(z) = \alpha \log r + \log M(r) \leq \alpha \log r_1 + \log M(r_1).$$

$$\Rightarrow \log M(r) \leq \alpha \log r_1 + \log M(r_1) - \alpha \log r$$

= (*) 式右边.

Schwarz 引理: 设 $f(z): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 全纯, $\mathbb{D} = \{ |z| < 1 \}$, $f(0) = 0$, 则

① $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D}$

② 若对某 $z_0 \neq 0, z_0 \in \mathbb{D}$, $|f(z_0)| = |z_0|$, 则 $f(z)$ 是旋转, $f(z) = e^{i\theta} z$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

③ $|f'(0)| \leq 1$, 等号成立, 则 $f(z) = e^{i\theta} z$.

证明: ①由于 $f(z)$ 在 \mathbb{D} 中全纯, $f(0)=0$, 取

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$\text{令 } \varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & 0 < |z| < 1 \\ a_1, & z = 0 \end{cases}$$

则 $\varphi(z) = a_1 + a_2 z + \dots$ 在 $|z| < 1$ 内全纯.

由最大模原理, $|\varphi(z)| \leq \max_{|z|=r} |\varphi(z)|, \quad \forall r \in (0, 1), \forall z \in B(0, r)$.

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r}, \quad \forall z \in B(0, r)$$

$$\text{令 } r \rightarrow 1^-, \text{ 则 } |f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

② 由假设, $|\varphi(z)|$ 在 $|z| < 1$ 内某点 z_0 达到最大值 1, 则 $|\varphi(z)|$ 恒为常数 1,
故 $\varphi(z)$ 为常数 c . 且 $|c| = 1$, 故 $c = e^{i\theta}$. 从而 $f(z) = e^{i\theta} z$. ($\forall z \in B(0,1)$)

③ 由于 $|\varphi(z)| \leq 1$, 故 $|\varphi(0)| \leq 1$. 从而 $|f'(0)| = |a_1| = |\varphi'(0)| \leq 1$.

若 $|f'(0)| = 1$, 则 $|\varphi(z)|$ 在 $z=0$ 取到最大值 1. 从而 $\varphi(z)$ 为常数.

故 $f(z) = e^{i\theta} z$, $\forall z \in B(0,1)$.

Schwarz 引理应用:

定义: ① 若 $f: U \rightarrow V$ 是全纯双射, 则称 f 为共形映射.

此时 U 与 V 称为共形等价, 或双全纯等价.

(由反函数定理知此时 $f^{-1}: V \rightarrow U$ 为全纯双射).

② 区域 $\Omega \rightarrow \Omega$ 的共形映射, 称为 Ω 的自同构.

$\text{Aut}(\Omega)$ 表示所有 Ω 的自同构集合

定理: ① $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b \mid a \neq 0\}$

② $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}}) = \{\text{分式线性变换}\}$.

证: ①: 若 $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, 则 f 为 \mathbb{C} 上整函数.

若 ∞ 为可去奇点, 则 f 为常数, 不可能.

若 ∞ 为本性奇点, 则 $\exists z_n \rightarrow \infty, f(z_n) \rightarrow A \in \mathbb{C}$.

取 $z_n = f^{-1}(f(z_n)) \rightarrow f^{-1}(A) \in \mathbb{C}$, 与 $z_n \rightarrow \infty$ 矛盾.

故 ∞ 为 f 的极点, 故 f 为 \mathbb{C} 上多项式.

f 单叶, 故 f 为一次多项式.

② 设 $f \in \text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$

若 $f(\infty) = \infty$, 则由①知 f 为一次多项式.

若 $f(\infty) = a \in \mathbb{C}$, 令 $\varphi: a \rightarrow \infty$ 为分式线性映射, 即 $\varphi = \frac{1}{z-a}$

$$\begin{array}{ccccc} \text{则} & \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\varphi} & \bar{\mathbb{C}} \\ & \infty & \rightarrow & a & \rightarrow & \infty \end{array}$$

故 $\varphi \circ f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ 从而 $\varphi \circ f = cz + d, (c \neq 0)$

$$\text{即} \quad \frac{1}{f-a} = cz + d, \quad f = a + \frac{1}{cz + d}, (c \neq 0)$$

定理: 若 f 为 \mathbb{D} 上自同构, 则存在 $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{D}$, 使 $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$.

$$\text{即 } \text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \mid \theta \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1 \right\}.$$

证: ① 令 $\alpha = f(0)$, 则存在分式 $\varphi_\alpha: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$,
 $0 \rightarrow 0$

$$\text{则有: } 0 \xrightarrow{f} \alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} 0$$

令 $g = \varphi_\alpha \circ f$, 则 $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 且 $g(0) = 0$, g 全纯, 双射.

故 $|g'(0)| \leq 1$.

② 设 g 的逆映射为 $h = g^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, h 全纯双射.
 $0 \rightarrow 0$

故 $|h'(0)| \leq 1$

$$\textcircled{3} \quad h(g(z)) = z$$

$$h'(0) g'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad |g'(0)| = |h'(0)| = 1$$

$$\Rightarrow g(z) = e^{i\theta} z \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$$\textcircled{4} \quad \mathbb{C}_\alpha \circ f(z) = e^{i\theta} z$$

$$\parallel$$
$$\frac{f(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha} f(z)} = e^{i\theta} z$$

$$f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z + e^{-i\theta} \alpha}{1 + e^{i\theta} \bar{\alpha} z}$$

问题: 求 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 的所有全纯自同构

想法:
$$H \xrightarrow{\varphi} \mathbb{D}$$
$$z_0 \longrightarrow 0.$$
 令
$$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

则:
$$H \xrightarrow{f} H$$
$$\begin{array}{ccc} \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{D} \end{array}$$

若 $f: H \rightarrow H$ 为自同构, 则 $\bar{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 为 \mathbb{D} 的自同构, 故 $\operatorname{Aut}(H)$ 与 $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ 为一一对应.

定义: $SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$

对 $\forall M \in SL_2(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 定义 $f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

定理: $Aut(\mathbb{H}) = \left\{ f_M \mid M \in SL_2(\mathbb{R}) \right\}$.

证明: 设 $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, $f(\beta) = i$, 要证存在 $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$, 使 $f = f_M$.

① 构造 f_N , 使 $f_N(i) = \beta$. 则

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{f_N} & \mathbb{H} & \xrightarrow{f} & \mathbb{H} \\ i & \rightarrow & \beta & \rightarrow & i \end{array}$$

令 $g = f \circ f_N: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$
 $i \rightarrow i$.

② 令 $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ 为分式线性映射. 则:
 $i \rightarrow 0$

$h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, $h(0) = 0$, 故

$$h(z) = e^{i\theta} z, \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$$h = F \circ g \circ F^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{g} & \mathbb{H} & & i \rightarrow i \\ F \downarrow & & \downarrow F & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{h} & \mathbb{D} & & 0 \rightarrow 0 \end{array}$$

③. 构造 $M_\theta \in SL_2(\mathbb{R})$, 使 f_{M_θ} 满足:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{f_{M_\theta}} & \mathbb{H} \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{h} & \mathbb{D} \\ & & h = e^{i\theta} z \end{array}$$

$$F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}(z) = h(z) = e^{i\theta} z$$

④ 取 \hat{A} $F \circ g \circ F^{-1}(z) = h(z) = e^{i\theta} z = F \circ f_{M_\theta} \circ F(z)$.

$$\text{取 } g = f_{M_\theta}$$

$$\text{由定义 } f \circ f_N = f_{M_\theta} \Rightarrow f = f_{M_\theta} \circ f_N^{-1} = f_{M_\theta N^{-1}}.$$

详细证明: ① $\forall M \in SL_2(\mathbb{R})$, f_M 将 \mathbb{H} 映为 \mathbb{H} .

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_M(z) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \right) \\ &= \frac{(ad-bc) \operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0. \end{aligned}$$

② 若 $M, M' \in SL_2(\mathbb{R})$, 则 $f_M \circ f_{M'} = f_{M \cdot M'}$
及 $(f_M)^{-1} = f_{M^{-1}}$.

$$\text{即 } f_M \circ f_{M^{-1}} = f_{M \cdot M^{-1}} = f_{I}(z) = z.$$

③ 对任何 $z_1, w_1 \in \mathbb{H}$, 存在 $M \in SL_2(\mathbb{R})$, 使 $f_M(z_1) = w_1$.

只需对 $w_1 = i$ 证明即可. 即求 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 使

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = i \quad (*)$$

令 $z_1 = x_1 + iy_1$, 则

$$(*) \Leftrightarrow a(x_1 + iy_1) + b = i(c(x_1 + iy_1) + d).$$

$$\Leftrightarrow (ax_1 + b) + ay_1 i = -cy_1 + (cx_1 + d)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + b = -cy_1 \\ ay_1 = cx_1 + d \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

$$\text{取 } d=0, \quad c = \sqrt{\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}}, \quad b = -\frac{1}{c}, \quad a = \frac{cx_1}{y_1}$$

由于 $z_1 \in \mathbb{H}$, 则 $y_1 > 0$. 故上式有意义.

从而对任意 $\beta \in \mathbb{H}$, 有 $f_M(\beta) = i$, $f_M^{-1}(i) = \beta$.

故 $f_M^{-1}(i) = \beta$.

④ 设 $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ $i \rightarrow 0$. $\bar{F}(z) = -\frac{z-i}{z+i}$

存在 $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, 使

$$F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}(z) = e^{i\theta} z.$$

⑤

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{H} & \xrightarrow{f_N} & \mathbb{H} & \xrightarrow{f} & \mathbb{H} & , & i & \xrightarrow{f_N} & \beta & \xrightarrow{f} & i \\
 & & \searrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & & & \mathbb{D} & & 0 & & & & 0 \\
 & & & & \xrightarrow{h=e^{i\theta}z} & & \xrightarrow{h} & & & &
 \end{array}$$

$$F \circ g \circ F^{-1}(z) = e^{i\theta} z = F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}(z)$$

故 $g = f_{M_\theta}$, $f \circ f_N = f_{M_\theta}$

$$f = f_{M_\theta} \circ f_N^{-1} = f_{M_\theta \cdot N^{-1}}$$

Schwarz 引理应用:

例: 设 $W = f(z)$, $D \rightarrow D$ 全纯, 则

$$\textcircled{1} \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|, \quad \forall z \in D.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad \forall z \in D.$$

f

例: 设 $w = f(z)$, $D \rightarrow D$ 全纯, 则

$$(1) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|, \quad \forall z \in D.$$

$$(2) \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad \forall z \in D.$$

证: (1)
$$\begin{array}{ccc} z_0 & \xrightarrow{f} & f(z_0) \\ \downarrow \varphi_{z_0} & & \downarrow \varphi_{f(z_0)} \\ 0 & \xrightarrow{F} & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ \downarrow \varphi_{z_0} & & \downarrow \varphi_{f(z_0)} \\ D & \xrightarrow{F} & D \end{array}, \quad \varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

则
$$F = \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{z_0}^{-1}: D \rightarrow D$$

$$0 \rightarrow 0$$

故 $|F(w)| \leq |w|.$

取 $| \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{z_0}^{-1}(w) | \leq |w|.$ 令 $z = \varphi_{z_0}^{-1}(w)$, 则

$$| \varphi_{f(z_0)} \circ f(z) | \leq | \varphi_{z_0}(z) |.$$

故
$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|, \quad (\forall z \in D)$$

② 利用 $|f'(0)| \leq 1$ 或者:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \frac{|1 - \overline{f(z_0)} f(z)|}{|1 - \overline{z_0} z|}$$

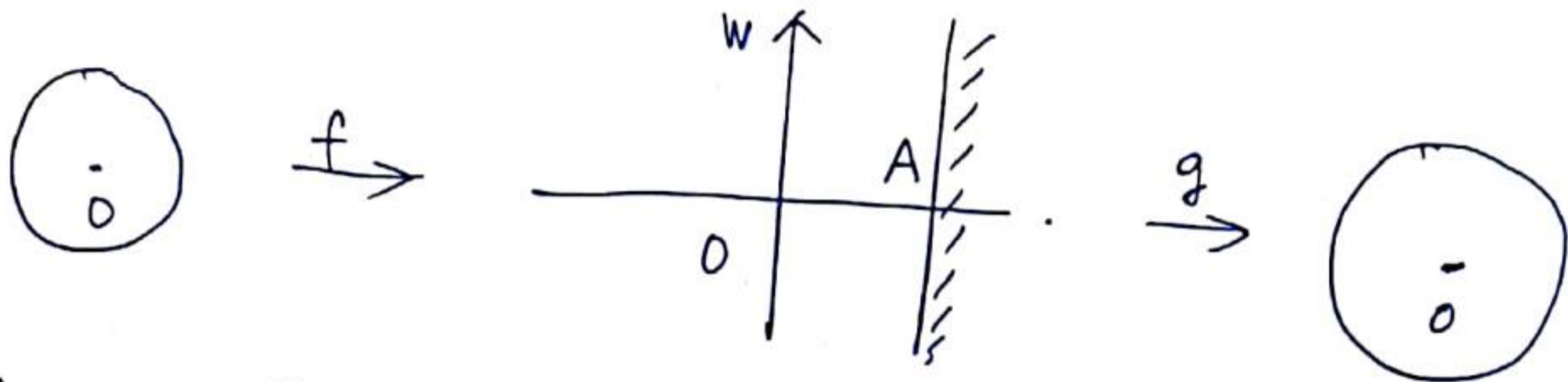
令 $z \rightarrow z_0$.

$$|f'(z_0)| \leq \frac{|1 - |f(z_0)|^2|}{1 - |z_0|^2} \quad (\forall z_0 \in \mathbb{D})$$

例: 设 $f(z)$ 在 $D = \{z \mid |z| < 1\}$ 上全纯, $f(0) = 0$, $\operatorname{Re} f(z) \leq A$ ($A > 0$).

证明: $|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1-|z|}$, $\forall z \in D$.

证:



构造: $g: \{ \operatorname{Re} w < A \} \rightarrow D$

$$0 \rightarrow 0$$

$$2A \rightarrow \infty$$

$$\text{令 } g(w) = \frac{w}{w-2A}, \quad \forall w \quad g \circ f: D \rightarrow D$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$\text{则 } |g \circ f(z)| \leq |z|$$

$$\text{则 } |g \circ f(z)| \leq |z|$$

$$\text{即 } \left| \frac{f(z)}{f(z) - 2A} \right| \leq |z|.$$

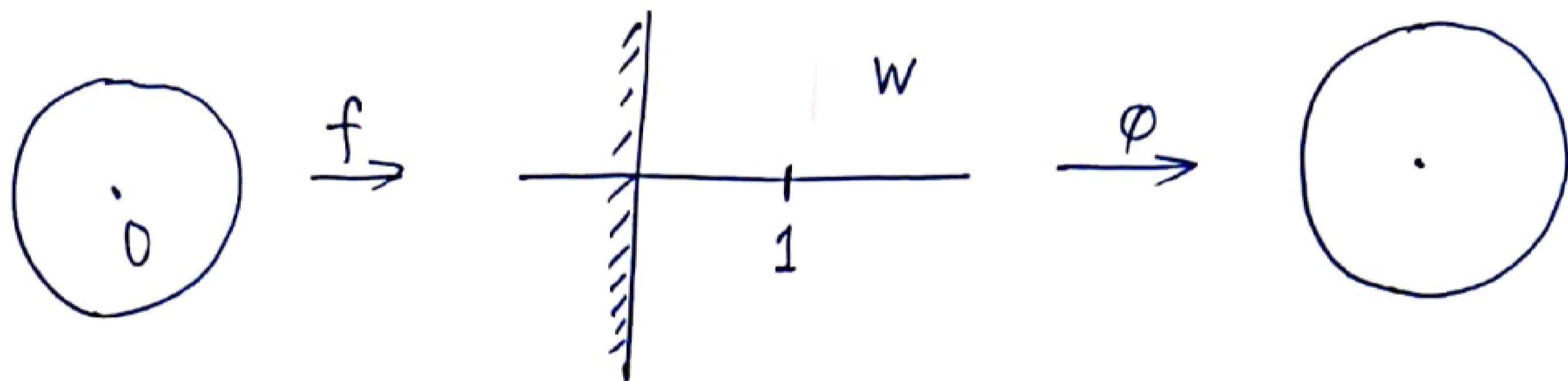
$$\text{令 } t = \frac{f(z)}{f(z) - 2A}, \quad tf - 2At = f, \quad f = \frac{-2At}{1-t}$$

$$\text{则 } |f| = \left| \frac{-2At}{1-t} \right| \leq \frac{2A|t|}{1-|t|} \leq \frac{2A|z|}{1-|z|}.$$

例: 设 f 在 \mathbb{D} 内全纯, $\operatorname{Re} f(z) > 0$, $f(0) = 1$

则
$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

证:



取 $\varphi(z) = \frac{z-1}{z+1}$, 则 $\varphi: \{ \operatorname{Re} z > 0 \} \rightarrow \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \varphi \circ f: \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D} \\ 0 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$|\varphi \circ f(z)| \leq |z|$$

$$\left| \frac{f(z)-1}{f(z)+1} \right| \leq |z|$$

$$\sqrt{\frac{f-1}{f+1}}, \quad \text{则} \quad f-1 = wf + w, \quad |w| \leq |z|$$
$$f = \frac{1+w}{1-w}.$$

$$\text{则} \quad |f| = \left| \frac{w+1}{w-1} \right| \leq \frac{1+|w|}{1-|w|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

$$|f| \geq \frac{1-|w|}{1+|w|} \geq \frac{1-|z|}{1+|z|}.$$

例: 设 f 在 $|z| < R$ 上全纯, 在 $|z| \leq R$ 上连续, 设

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z), \quad \forall r \in (0, R) \text{ 时}$$

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|. \quad (*)$$

证: ① $f(z) \equiv C$ 为常数.

$$(*) \text{ 右边} = \frac{2r}{R-r} \operatorname{Re} C + \frac{R+r}{R-r} |C|$$

$$\geq \frac{R+r}{R-r} |C| - \frac{2r}{R-r} |C| = \frac{R-r}{R-r} |C| = |C| = \text{左边}.$$

② 若 $f(z)$ 不为常数, 且 $f(0) = 0$.

② 若 $f(z)$ 不为常数, $f(0)=0$.

引理: 设 $f(z)$ 在 \mathbb{D} 上全纯, $f(0)=0$, $\operatorname{Re} f(z) \leq A$, ($A > 0$).

$$\text{则 } |f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1-|z|}, \quad (|z| < 1)$$

故令 $F(z) = f(Rz)$, 则 $F(0)=0$

$$\text{且 } \operatorname{Re} F(z) = \operatorname{Re} f(Rz) \leq \max_{|z|=1} \operatorname{Re} f(Rz) = A(R), \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

$$\text{故 } |F(z)| \leq \frac{2A(R)|z|}{1-|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$
$$\parallel$$
$$|f(Rz)|$$

$$\text{令 } Rz = u, \text{ 则 } |f(u)| \leq \frac{2A(R) \frac{|u|}{R}}{1 - \frac{|u|}{R}} = \frac{2A(R)|u|}{R-|u|}$$

$$\text{故 } M(r) = \max_{|u|=r} |f(u)| \leq \frac{2A(R)r}{R-r}.$$

$$\textcircled{3} \frac{r}{R} f(0) \neq 0, \quad \forall z \quad g(z) = f(z) - f(0). \quad |z|$$

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re} g(z)$$

$$= \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}(f(z) - f(0))$$

这里是 不是 = $\frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{2r}{R-r} |f(0)|$

$$\text{从而} \quad \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \left(\frac{2r}{R-r} + 1 \right) |f(0)|$$

$$= \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

例: 设 f 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上全纯, 在 0 与 ∞ 都是 f 的本性奇点, 证明: 若

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad \text{则}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log A(r)}{\log r} = \infty \quad (*) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log A(r)}{\log \frac{1}{r}} = \infty \quad (**).$$

证明:

① 若 $(*)$ 成立, 则 $(**)$ 成立.

$$\text{令 } F(r) = f\left(\frac{1}{r}\right). \quad \text{则}$$

$$A_F(r) = \max_{|w|=r} \operatorname{Re} F(w) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f\left(\frac{1}{z}\right) = \max_{\frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}} \operatorname{Re} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= A_f\left(\frac{1}{r}\right).$$

$$\text{于是 } \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log A_f(p)}{\log \frac{1}{p}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log A_F(r)}{\log r} \stackrel{(*)}{=} \infty$$

(2) 只需对 \mathbb{C} 上全纯函数证明(*)即可.

若 f 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上全纯, 则有 Laurent 级数

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n}_g + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}_\varphi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

由于 $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0$, 故当 $|z|$ 大时 $|g(z)| < \varepsilon$.
这里是趋于无穷

$$\begin{aligned} \text{从而} \quad A_f(r) &= \max_{|z|=r} \operatorname{Re}(g + \varphi) \leq \cancel{\max_{|z|=r} \operatorname{Re} g(z)} + \max_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi \\ &\geq \max_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi(z) - \varepsilon \quad (\text{当 } |z| \text{ 大时}). \end{aligned}$$

$$\text{从而} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log A_f(r)}{\log r} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log A_\varphi(r) - \varepsilon}{\log r} = \infty. \quad (\text{对于 } \varphi \text{ 在 } \mathbb{C} \text{ 上全纯})$$

③. 下对 \mathbb{C} 上全体函数 $f(z)$ 证明 (*).

令 $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, 则当 $0 < r < R$ 时有

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|. \quad (*3)$$

则有 $M(r)$ 是 r 的增函数 (由最大模原理) A

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \infty \quad (\text{本性奇点性质!})$$

④ 存在 $N > 0$, 当 $r > N$ 时 $A(r) > 0$.

由 (*) 知 $A(r) \geq \frac{R-r}{2r} \left(M(r) - \frac{R+r}{R-r} |f_{(0)}| \right) > 0$ (当 $R > r$ 都充分大时)

取 $r = \frac{R}{2}$, 则

$$A(r) \geq \frac{1}{2} \left(M\left(\frac{R}{2}\right) - 3|f_{(0)}| \right) > 0.$$

故 $\log A(r)$ 当 r 大时可定义.

$$\textcircled{5} \quad \text{令 } M_n(r) = \max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)|$$

由于 ∞ 为 f 的本性奇点, 则 ∞ 为 $f^{(n)}(z)$ 的本性奇点. 故

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M_n(r) = +\infty.$$

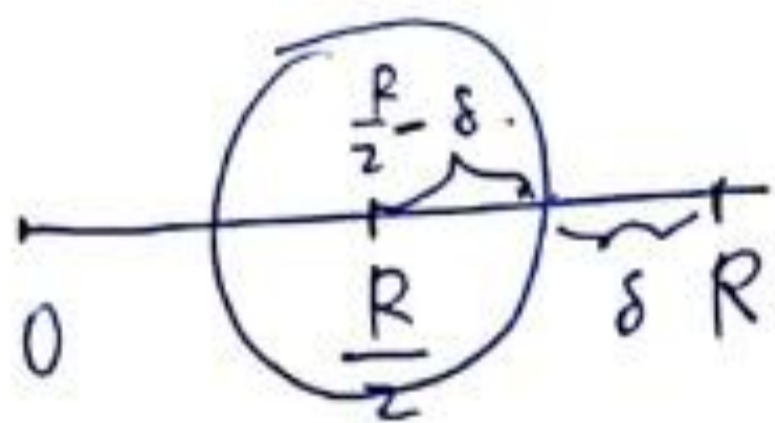
下证: 存在常数 $C(n)$, 使得

$$M_n\left(\frac{R}{2}\right) \leq \frac{C(n)}{R^n} \left(A(R) + |f^{(0)}| \right). \quad (*)4$$

(*4)证明: 设 z 满足 $|z| = \frac{R}{2}$, 由于

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$$

$C_\delta: |\xi-z| = \frac{R}{2} - \delta, \delta$ 待定



这里没有 2π

$$|f^{(n)}(z)| \leq C \cdot \frac{2\pi(\frac{R}{2} - \delta)}{(\frac{R}{2} - \delta)^{n+1}} \max_{C_\delta} |f(\xi)|$$

$$\leq \frac{C}{(\frac{R}{2} - \delta)^n} \max_{|\xi| \leq R - \delta} |f(\xi)|$$

$$\leq \frac{C}{(\frac{R}{2} - \delta)^n} M(R - \delta).$$

$$\text{于是 } |f^{(n)}(z)| \leq \frac{C}{(\frac{R}{2} - \delta)^n} \left[\frac{2(R-\delta)}{\delta} A(R) + \frac{2R-\delta}{\delta} |f^{(0)}| \right]$$

$$\leq \frac{C \cdot 2R}{\delta \cdot (\frac{R}{2} - \delta)^n} (A(R) + |f^{(0)}|)$$

$$\text{令 } \delta = \frac{1}{4}R, \quad |z|$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{C(n)}{R^n} (A(R) + |f(0)|)$$

$$\text{从而 } M_n\left(\frac{R}{2}\right) \leq \frac{C(n)}{R^n} (A(R) + |f(0)|)$$

$$\text{从而 } A(R) \geq \frac{R^n}{C(n)} (M_n\left(\frac{R}{2}\right) - |f(0)|)$$

$$\frac{\log A(R)}{\log R} \geq \frac{n \log R + \log(M_n\left(\frac{R}{2}\right) - |f(0)|) - \log C(n)}{\log R}$$

$$\geq n \quad (\text{当 } R \text{ 充分大时})$$

$$\text{从而 } \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log A(R)}{\log R} = +\infty.$$

另外证明: 只要证, $\forall n > 0, \exists r_n, \forall r \geq r_n$ 时 $M(r) \geq r^n$.

证: 令 $f(z) = \frac{f_1(z)}{z^n}$, $f_1(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上全纯, 且在 ∞ 点为本性奇点.

取定 $\varepsilon > 0$, 令 $M = \max_{|z|=\varepsilon} |g_1(z)|$, 由于 ∞ 点为 $f_1(z)$ 的本性奇点.

故存在 r_n , 使得

$$\max_{|z|=r_n} |g_1(z)| \geq M + 1$$

对 $\forall r > r_n$, 在区域 $\{ \varepsilon < |z| < r \}$ 上, $|g(z)|$ 的最大值只能在边界 $|z|=r$ 上达到. 故

$$\begin{aligned} \max_{|z|=r} |g(z)| &\geq \max_{|z|=r_n} |g(z)| \geq M+1 \\ &\parallel \\ \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^n} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \forall r \geq r_n, \max_{|z|=r} |f(z)| \geq (M+1)r^n$$

$$\text{故 } \log M(r) \geq n \log r + \log(M+1) > n \log r$$

$$\text{故 } \frac{\log M(r)}{\log r} \geq n.$$

$$\text{故 由 (4) 知 } \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{A(R)}{\log R} = +\infty.$$

高角原理.

设 f 在 $z=0$ 处为极点或零点, 则

$$f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

若 $m \geq 1$, 则 0 为 f 的零点.

若 $m < 0$, 则 0 为 f 的极点.

定义: 记上述 m 为 $\text{ord}_0 f$, 即 $\text{ord}_0 f = m$,

一般地, 若 $f(z) = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1} (z-z_0)^{m+1} + \dots$

则记 $\text{ord}_{z_0} f = m$.

設在 $B(0, \delta)$ 中, $f(z) = a_m z^m (1+h(z))$, $a_m \neq 0$, $h(z)$ 在 0 处全纯.

$$\text{则 } f'(z) = m a_m z^{m-1} (1+h(z)) + a_m z^m \cdot h'(z)$$

$$\text{故 } \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m a_m z^{m-1} (1+h(z)) + a_m z^m h'(z)}{a_m z^m (1+h(z))}$$

$$= \frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1+h(z)}$$

\rightarrow 全纯.

$$\text{故 } \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m = \text{ord}_0 f$$

定理: 若 f 在 D 内亚纯, γ 是 D 内简单闭曲线, f 在 γ 上无零点, 无极点,

则
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \text{ 在 } \gamma \text{ 内部}} \text{ord}_z f$$

$$= \gamma \text{ 内零点重数之和} - \gamma \text{ 内极点阶数之和.}$$

$$= N(f, \gamma) - P(f, \gamma).$$

证明: 若 z_0 不是 f 的零点或极点, 则 $\frac{f'}{f}$ 在 z_0 点全纯.

设 $f(z)$ 在 γ 内所有零点和极点为 $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$.

则由多连通域 Cauchy 定理知:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_k|=\epsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \text{ord}_{z_k} f$$

辐角 (环绕指数, 圈数).

设 γ 是闭曲线 (不一定简单). 设

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad z(t) = \rho(t) e^{i\theta(t)}, \quad z(a) = z(b).$$

$$\begin{aligned} \text{则} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} &= \int_a^b \frac{1}{\rho(t) e^{i\theta(t)}} (\rho(t) e^{i\theta(t)})' dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\rho(t) e^{i\theta(t)}} (\rho'(t) e^{i\theta(t)} + \rho(t) i e^{i\theta(t)} \theta'(t)) dt \\ &= \int_a^b \frac{\rho'(t) dt}{\rho(t)} + i \int_a^b \theta'(t) dt \\ &= \log \rho(b) - \log \rho(a) + i(\theta(b) - \theta(a)) \\ &= i \Delta_{\gamma} \text{Arg } z \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } z$$

= 曲线 γ 绕原点的圈数.

证 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } z$

= (曲线 γ 绕原点的圈数).

证 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{df(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } f(z).$

证 $N(f, \gamma) - P(f, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } f(z)$ 幅角原理.

例: $f(z) = (z-1)(z-2)^3(z-4)$, $\gamma: |z|=3$.

γ 内零点数 $N = 1+3=4$

极点个数 $P = 0$

$$\Delta_\gamma \text{Arg} f(z) = \Delta_\gamma \text{Arg} (z-1) + 3 \Delta_\gamma \text{Arg} (z-2) + \Delta_\gamma \text{Arg} (z-4)$$

$$= 2\pi + 3 \cdot 2\pi = 8\pi$$

故 $N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \text{Arg} f(z)$.

定理: 设 $f(z)$, $g(z)$ 在 D 内全纯, 在 γ 上 $|g(z)| < |f(z)|$

则 $f(z)$ 与 $f(z) \pm g(z)$ 在 γ 内有相同的零点... 指零点个数相同

证: 在 γ 上 $|g(z)| < |f(z)|$, 故 $f(z)$ 与 $f \pm g$ 在 γ 上无零点.

$$N(f, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } f(z)$$

$$N(f+g, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } (f+g)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } f(z) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)$$

只需证 $\Delta_{\gamma} \text{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0$.

注意: $\Delta_{\gamma} \text{Arg } z = 0 \Leftrightarrow 0$ 在 γ 外

$\Delta_{\gamma} \text{Arg } w(z) = 0 \Leftrightarrow 0$ 在曲线 $w(\gamma(t))$ 外.

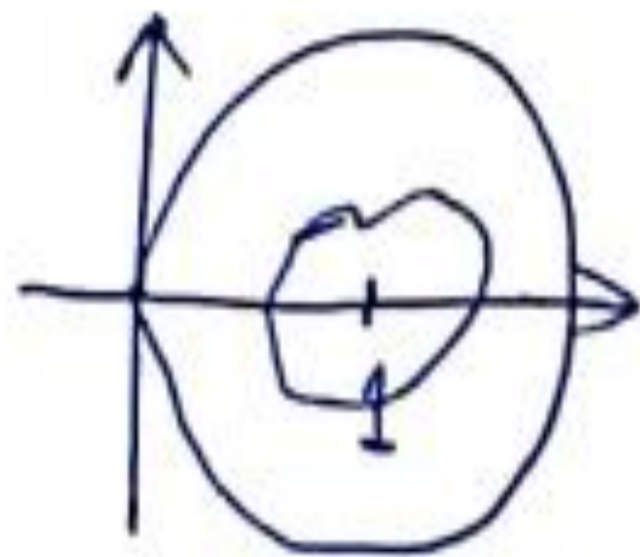
注意. $\Delta_\gamma \text{Arg } z = 0 \Leftrightarrow 0$ 在 γ 外
 $\Delta_\gamma \text{Arg } w(z) = 0 \Leftrightarrow 0$ 在曲线 $w(\gamma(t))$ 外.

令 $w(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$, 对于 $z \in \gamma$, $|g(z)| < |f(z)|$,

故 $|w-1| < 1$

$\Rightarrow 0$ 在 $w(z)$, $z \in \gamma$ 外

$\Rightarrow \Delta_\gamma \text{Arg } w(z) = 0. \Rightarrow \Delta_\gamma \text{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0.$



定理: 若 $f(z), g(z)$ 在 D 中全纯, 在 γ 上 $|g(z)| < |f(z)| + |f+g|$,
 则 f 与 $f+g$ 在 γ 内部有相同零数.

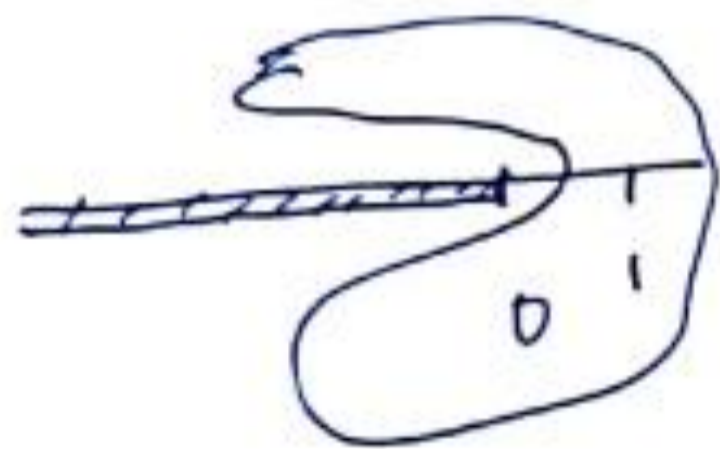
证明: 由假设, f 与 $f+g$ 在 γ 上无零点. 由前定理不证明, 且

$$\text{要证 } \Delta_{\gamma} \text{Arg} \left(1 + \frac{g}{f} \right) = 0$$

$$\text{在 } \gamma \text{ 上: } |g(z)| < |f(z)| + |f(z) + g(z)|$$

$$\text{令 } w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}, \text{ 则在 } \gamma \text{ 上, } |(w-1)f| < |f| + |fw|$$

$$\text{则在 } \gamma \text{ 上 } |w-1| < 1+|w|$$



$$\Rightarrow w \notin \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

$\Rightarrow w(\gamma)$ 不能绕着零点转.

$$\text{从而 } \Delta_{\gamma} \text{Arg } w(z) = 0$$

$$\text{即 } \Delta_{\gamma} \text{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0$$

总结: 要验证 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 γ 内部有相同 m 零点, 只需验证

下面条件之一:

$$\textcircled{1} \quad |F(z) - G(z)| < |F(z)|, \quad \forall z \in \gamma$$

$$\textcircled{2} \quad |F(z) - G(z)| < |F(z)| + |G(z)|, \quad \forall z \in \gamma$$

注意将 "-" 换为 "+" 号也可以.

例: 求方程 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在圆 $|z| < 1$ 与 $1 < |z| < 2$ 内根两个数.

证: ① 当 $|z| = 1$ 时, 令 $G(z) = z^4 - 6z + 3$, $F(z) = -6z$

在上: $|F - G| = |z^4 + 3| \leq 4 < 6 = |F(z)|$.

故 G 在 $|z| < 1$ 内有 1 根.

② 当 $|z| = 2$ 时, 令 $G(z) = z^4 - 6z + 3$, $F(z) = z^4$

在上: $|F - G| = |6z - 3| \leq 15 < 16 = 2^4 = |F(z)|$

故 $|F - G| < |F(z)|$

故 G 在 $|z| < 2$ 内有 4 根.

综合①, G 在 $1 < |z| < 2$ 内有 3 根.

例: 代数基本定理: n 次方程 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ ($a_n \neq 0$)
在 \mathbb{C} 上恰有 n 个根.

证: 令 $G(z) = P(z)$, $F(z) = a_n z^n$

$$|F - G| = |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| < |a_n z^n| = |F(z)|, \quad \forall |z| = R, R \text{ 大.}$$

故 $P(z)$ 与 $a_n z^n$ 在 $|z| < R$ 中根的个数相同

$\Rightarrow P(z)$ 在 \mathbb{C} 上有 n 个根.

定理 (开映射定理). 若 f 在 Ω 内全纯, 非常值, 则 f 将开集映为开集.

只需证开球映为开球

证明: 即证: 若 $w_0 = f(z_0)$, 若 w_1 满足 $|w_1 - w_0| < \varepsilon$, 则存在 $z_1 \in \Omega$,

$|z_1 - z_0| < \delta$, 使 $f(z_1) = w_1$.



只需证 $F(z) = f(z) - w_0$ 与 $G(z) = f(z) - w_1$

在 $|z - z_0| < \delta$ 中根的个数相同.

$$\text{在 } |z - z_0| = \delta \text{ 上, } |F - G| = |w_1 - w_0|$$

$$|F| = |f(z) - w_0|$$

$$\text{令 } \varepsilon_0 = \min_{|z - z_0| = \delta} |f(z) - w_0| > 0, \text{ 取 } w_1: |w_1 - w_0| < \varepsilon_0, \text{ 则}$$

$$\text{在 } |z - z_0| = \delta \text{ 上: } |F - G| = |w_1 - w_0| < \varepsilon_0 < |f(z) - w_0| = |F|$$

故 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 中根的个数相同.

由于 $F(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 中有根 z_0 , 故 $G(z) = f(z) - w_1$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 中

至少有一个根, 设为 z_1 , 故 $f(z_1) = w_1$.

最大模原理: 设 $f(z)$ 在区域 Ω 中全纯, 非常值, 则 $|f(z)|$ 在 Ω 内部不能达到最大值.

证明: 设 f 在 Ω 中达到最大模 M , $z_0 \in \Omega$, $|f(z_0)| = M$.

则 $f(B(z_0, \delta))$ 是开集, 且包含 $f(z_0)$. 故存在 $z_1 \in B(z_0, \delta)$, 使

$|f(z_1)| > |f(z_0)|$, 矛盾.

例: 求证: $p(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10 = 0$ 在每一象限中恰有一根.

证: ① $p(x) = (x^2 - 1)(x + 1)^2 + 11$

$|x| \geq 1$ 时 $p(x) \geq 11$

$|x| < 1$ 时 $p(x) \geq 11 - (1+1)^2 = 7$ 故 $p(z) = 0$ 无实根.

② $p(x)$ 无虚根: 令 $z = iy$ ($y \neq 0$)

$p(iy) = y^4 + 10 - 2iy(y^2 + 1) \neq 0$, 故 $p(z) = 0$ 无纯虚根.

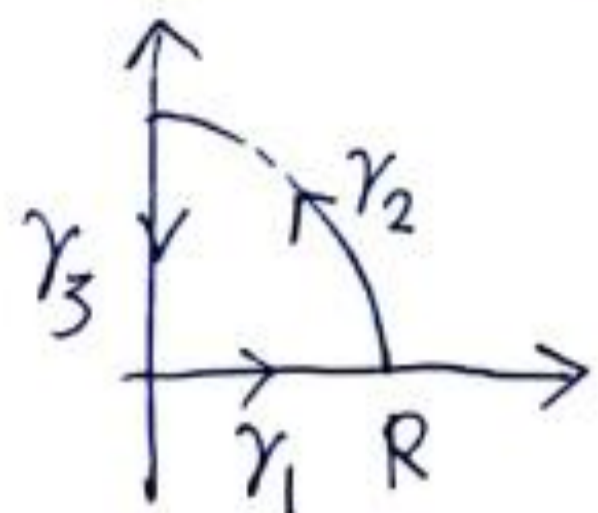
③ 若 $p(z)$ 在第一象限中只有一根, 则在其它三象限中各有一个零点.

原因: 若 z_0 为 $p(z)$ 在第一象限的根, 则 $p(\bar{z}_0) = 0$.

故 \bar{z}_0 为 $p(z)$ 在第四象限的根. 由于 $p(z)$ 在 \mathbb{C} 上有 4 根.

故另外两根在第一、三象限. 两根共轭, 故在第一、三象限各有一根.

④ 下证在右半平面仅有一根。



$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } P(z).$$

$$\Delta_{\gamma_1} \text{Arg } P(z) = 0$$

$$\Delta_{\gamma_2} \text{Arg } P(z) = \Delta_{\gamma_2} \text{Arg } z^4 \cdot \left(1 + \frac{2z^3 - 2z + 10}{z^4} \right)$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{2} + E(R) = 2\pi + E(R).$$

其中 $\lim_{R \rightarrow \infty} E(R) = 0.$

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma_3} \text{Arg } P(z) &= \text{Arg } P(0) - \text{Arg } P(iR) \\ &= \text{Arg } P(0) - \text{Arg} (R^4 + 10 - 2iR(R^2 + 1)) \\ &= \text{Arg } P(0) - \text{Arg} \left(1 - 2i \frac{R(R^2 + 1)}{R^4 + 10} \right) \\ &= E(R). \end{aligned}$$

故 $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } P(z) = 1 + E(R).$ 由于 $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } P(z)$ 为整数, 故为 1.

例: 设 $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$. 求证:

$$a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + a_n \cos n\theta$$

在 $(0, 2\pi)$ 中有 $2n$ 个不同的零点.

证: ① 多项式 $p_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ 的全部零点在 $|z| < 1$ 内,
且无正实根.

由于 $(1-z) p_n(z)$

$$= (1-z)(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n)$$

$$= a_0 + (a_1 - a_0)z + \dots + (a_n - a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1}$$

若 $z_0 = x \geq 0$, 则 z_0 不是 $p_n(z)$ 的零点. 故若 z_0 是 $p_n(z)$ 的零点,

则 z_0 不是非负实数.

$$0 = (1 - z_0) P_n(z_0)$$

$$= a_0 + (a_1 - a_0)z_0 + \dots + (a_n - a_{n-1})z_0^n - a_n z_0^{n+1}$$

由于 z_0 不是非负实数, 故 $a_0, (a_1 - a_0)z_0, \dots, (a_n - a_{n-1})z_0^n$

幅角不可能全相等, 故

$$a_n |z_0|^{n+1} = |a_n z_0^{n+1}| = |a_0 + (a_1 - a_0)z_0 + \dots + (a_n - a_{n-1})z_0^n|$$

$$< |a_0| + (a_1 - a_0)|z_0| + \dots + (a_n - a_{n-1})|z_0|^n$$

$$\text{故 } a_n(|z_0|^{n+1} - |z_0|^n) + a_{n-1}(|z_0|^n - |z_0|^{n-1}) + \dots + a_0(|z_0| - 1) < 0$$

若 $|z_0| \geq 1$, 则上式左边 > 0 , 相矛盾. 从而 $|z_0| < 1$.

② 设 $C: |z|=1$, $N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \text{Arg } P_n(z)$.

令 $w = P_n(z)$, $\Gamma = P_n(C)$, 则曲线 Γ 绕 0 点 n 圈. 故 Γ 与虚轴至少相交 $2n$ 次. 由于每交点对应一个幅角, 故至少有 $2n$ 个 θ , 使 $P_n(z) = P_n(e^{i\theta})$ 在虚轴上. 故至少有 $2n$ 个不同 θ , 使 $\text{Re}(P_n(e^{i\theta})) = 0$.

$$\textcircled{3} \cdot \sum_{k=0}^n a_k \cos k\theta, \quad \cos k\theta = \frac{z^k + z^{-k}}{2}$$

$$\text{故} \sum_{k=0}^n a_k \cos k\theta = a_0 + \frac{1}{2} a_1 \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} a_2 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} z^{-n} \left(a_n + a_{n-1} z + \dots + 2a_0 z^n + a_1 z^{n+1} \right. \\ \left. + \dots + a_n z^{2n} \right)$$

右边至多有 $2n$ 个根 z_j ($1 \leq j \leq 2n$). 故在 $(0, 2\pi)$ 内至多只有 $2n$ 个实数 θ_j ($1 \leq j \leq 2n$) 满足 $e^{i\theta} = z_j$ ($1 \leq j \leq 2n$)

故 $\operatorname{Re}(P(e^{i\theta})) = 0$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有 $2n$ 个不同的实根, 无虚根.

单叶函数

回忆: 辐角原理: 若 f 在 γ 上无零点和极点, 则

$$N(f, \gamma) - P(f, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg} f(z)$$

Rouché 定理: 若 F 与 G 在 γ 上满足

$$|F \pm G| < |F|$$

则 F 与 G 在 γ 内部有相同的零点数.

定理: 设 $f(z)$ 在 D 中全纯, $f(0) = 0$, 且 0 是 $f(z)$ 的 m 级零点, 则对任意充分小的 $\rho > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |w_0| < \delta$ 时, $f(z) - w_0$ 在 $|z| < \rho$ 中有 m 个不同的零点.

证明: ① 由于 $f(z), f'(z)$ 为非常值全纯函数, 故对任意充分小的 ρ ,

$f(z)$ 与 $f'(z)$ 在 $0 < |z| < \rho$ 上无零点.

原因: $f(z) = a_m z^m (1 + h_1(z))$

$$\begin{aligned} f'(z) &= m a_m z^{m-1} (1 + h_1(z)) + a_m z^m h_1'(z) \\ &= a_m z^{m-1} \left[z h_1'(z) + m(1 + h_1(z)) \right] \\ &= m a_m z^{m-1} \left[1 + h_1(z) + \frac{1}{m} z h_1'(z) \right] \end{aligned}$$

② 证明 $F(z) = f(z)$, $G(z) = f(z) - w_0$ 在 $|z| < \rho$ 内零点个数相同

令 $\delta = \min_{|z|=\rho} |f(z)| > 0$, 当 $0 < |w_0| < \delta$ 时.

$$|F - G| = |w_0| < |f(z)| = |F|, \quad \forall z \in \{|z| = \rho\}$$

故 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 $|z| < \rho$ 内具有相同零点...

③ $f(z) - w_0$ 在 $|z| < \rho$ 中无根, 这是因为 $f'(z)$ 在 $|z| < \rho$ 中无零点.

推论: 若 f 在 D 中全纯, 非常数, $f(z_0) = w_0$, 则对充分小的 $\rho > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(w_0, \delta) \subset f(B(z_0, \rho))$.

证: 由上定理, $\forall w \in B(w_0, \delta)$, 存在 $z \in B(z_0, \rho)$ 使得 $f(z) = w$. 故 $B(w_0, \delta) \subset f(B(z_0, \rho))$.

推论: 若 $f(z)$ 为 D 上 全纯函数, 且非常数, 则

① 若 D 为开集, 则 $f(D)$ 为开集 (开映射定理).

② 若 D 为区域, 则 $f(D)$ 为区域. (保域性定理).

证: ① 设 $w_0 \in f(D)$, 则 $\exists z_0 \in D$, $f(z_0) = w_0$. 由上推论.

$B(w_0, \delta) \subset f(B(z_0, \rho))$, 故 $f(D)$ 为开.

② 若 $w_1, w_2 \in f(D)$, 则存在 $z_1, z_2 \in D$, $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$.

由 D 连通, 故存在 $\gamma \stackrel{CD}{\curvearrowright}$ 连接 z_1, z_2 , 则 $f(\gamma)$ 连接 w_1, w_2 .

故 $f(D)$ 连通.

说明: $w = f(z)$ 在 z_0 点连续.

$$\Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists \rho > 0, \forall z: |z - z_0| < \rho, \Rightarrow |w - w_0| < \delta.$$

$$\Leftrightarrow \forall B(w_0, \delta), \exists B(z_0, \rho), \text{ 使 } f(B(z_0, \rho)) \subset B(w_0, \delta).$$

定理: 若 $f(z)$ 在 D 中单叶, 则 $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$.

充分非必要

证: 若存在 $z_0 \in D, f'(z_0) = 0$. 则 $f(z) - f(z_0)$ 以 z_0 为 $m \geq 2$ 阶零点.

取 $\delta > 0$, 当 $|w_1 - w_0| < \delta$ 时, $f(z) - w_1$ 在 $|z - z_0| < \rho$ 中有 $m \geq 2$ 个不同零点.

故 f 不单叶. 矛盾.

例: $f(z) = e^z, (e^z)' \neq 0$, 但 f 在 \mathbb{C} 上不单叶.

定理: 若 $f(z)$ 在 D 中全纯, $f'(z_0) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon > 0$, f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 上单叶.

证明:

① 设 $w_0 = f(z_0)$, 当 $w_1 \in B(w_0, \delta)$ 时, $f(z) - w_1$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中共有一个零点 (因为 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的 m -阶零点).

② f 连续, 故 $\exists \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \rho$, 使 $f(B(z_0, \varepsilon_1)) \subset B(w_0, \delta)$.

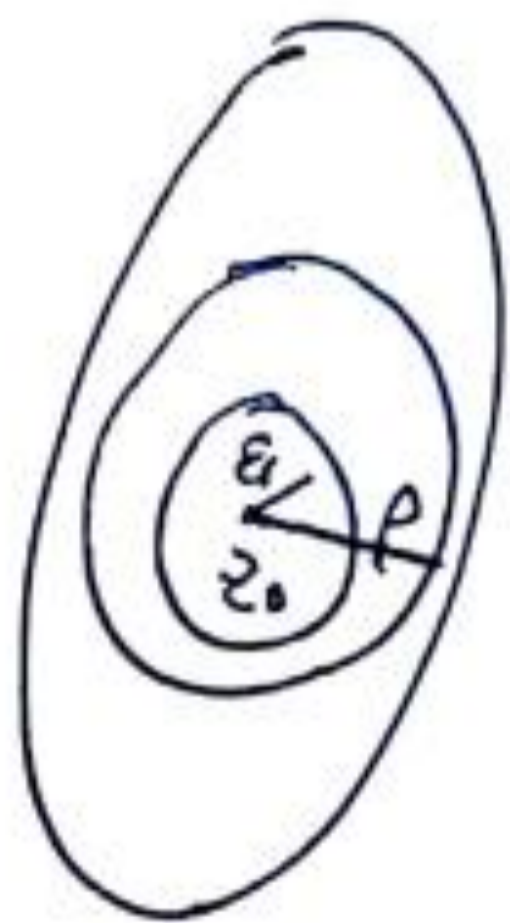
③ 由①②知, $f(z)$ 在 $B(z_0, \varepsilon_1)$ 上单叶.

原因. 若 $z_1, z_2 \in B(z_0, \varepsilon)$, $f(z_1) = f(z_2)$. 令 $w_1 = f(z_1) = f(z_2)$.

则由②知 $w_1 \in B(w_0, \delta)$. 由①知 $f(z) - w_1$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中

只有一个零点。由于 $B(z_0, \rho) \supset B(z_0, \varepsilon)$, 故 $f(z) - w_1$ 在 $B(z_0, \varepsilon)$

中至多只有一个零点。这与 $z_1, z_2 \in B(z_0, \varepsilon)$ 矛盾。



$f \rightarrow$



证=：直接证明. 设 $z_0=0$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$.

$$a_1 = f'(0) \neq 0.$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots + na_nz^{n-1} + \dots, \quad |z| < R$$

$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|p^{n-1}$ 收敛, 当 $p \rightarrow 0$ 时趋于 0. ($p < R$)

故 $\exists \delta > 0$, $\delta < R$, 当 $p \in (0, \delta)$ 时.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|p^{n-1} < \frac{|a_1|}{2}$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1^n - z_2^n) \right|$$

$$= \left| a_1(z_1 - z_2) + a_2(z_1^2 - z_2^2) + a_3(z_1^3 - z_2^3) + \dots \right|$$

$$= \left| (z_1 - z_2) \left(a_1 + a_2(z_1 + z_2) + a_3(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2) + \dots \right) \right|$$

$$= |z_1 - z_2| \cdot \left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^{n-1} + \dots + z_2^{n-1}) \right|$$

$$\geq |z_1 - z_2| \cdot \left(|a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \rho^{n-1} \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} |a_1| \cdot |z_1 - z_2|.$$

$$|z_1| < \rho$$

$$|z_2| < \rho$$

$$\rho \in (0, \delta).$$

故 $z_1 \neq z_2$ 时, $f(z_1) \neq f(z_2)$.

反函数定理: 若 $w = f(z)$ 在 D 上单叶, 全纯, $G = f(D)$, 则反函数 $z = g(w)$

在 G 上单叶全纯, 且 $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$.

证: ① $g(w)$ 在 G 中连续.

原因: f 为开映射, 故 $B(w_0, \delta) \subset f(B(z_0, \rho))$.

$$\text{从而 } g(B(w_0, \delta)) \subset g \circ f(B(z_0, \rho)) \\ = B(z_0, \rho).$$

上式表明 g 在 w_0 处连续.

② $g(w)$ 在 G 中可导.

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{1}{\frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{1}{\frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}}$$

当 $w \rightarrow w_0$ 时 $g(w) \rightarrow g(w_0)$. 令 $z_0 = g(w_0)$, $z = g(w)$. 当 $w \rightarrow w_0$ 时 $z \rightarrow z_0$.

$$\text{上式} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

留数

定义: 设 f 在 $0 < |z-a| < r$ 上全纯, 定义留数为

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=p} f(z) dz, \quad 0 < p < r, \text{ 与 } p \text{ 的选取无关.}$$

计算方法: ① 若 f 级数为 $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$

$$\int_{|z-a|=p} f(z) dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \int_{|z-a|=p} (z-a)^n = 2\pi i C_{-1}$$

故 $C_{-1} = \operatorname{Res}(f, a)$.

② 若 a 是可去奇点, 则 $\operatorname{Res}(f, a) = 0$

③ 若 a 是 f 的 m -阶极点, 则

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) &= \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \left(\frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \dots \right) \\ &= C_{-1} = \text{Res}f, a). \end{aligned}$$

④ 若 $f = \frac{\varphi}{\psi}$, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$

$$\text{Res}f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

⑤ 若 a 是 f 的 m -阶极点, 则

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, \quad g(a) \neq 0.$$

$$\text{Res}f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{g(z)}{(z-a)^m} dz = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a).$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \left. \left((z-a)^m f(z) \right)^{(m-1)} \right|_{z=a}$$

例: 设 $f(z) = \sin \frac{1}{z}$, 求 $\text{Res}(f, 0)$.

解: $\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \dots$

$$\text{Res}(f, 0) = 1.$$

例: 求 $f(z) = \frac{\sin z}{z^4 - 1}$. 求 $\text{Res}(f, 1)$.

解: $\text{Res}(f, 1) = \frac{\sin z}{(z^4 - 1)'} \Big|_{z=1} = \frac{\sin 1}{4}$

定理. (留数定理). 设 $f(z)$ 在 γ 内部 D 有 z_1, \dots, z_n 个极点, 且在

$\bar{D} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ 上连续, 则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

证: Cauchy 定理:



$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

$\bigcup \gamma_k$ 中 $|z - z_k| = \epsilon$. ϵ 充分小.

例:
$$I = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^7 - 1} dz.$$

解: 设 $z_k = e^{\frac{i}{7} \cdot 2k\pi}$, $k=0, 1, 2, \dots, 6.$

则
$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^7 \operatorname{Res}(f, z_k) = \dots$$

∞ 点留数.

定义: 若 f 在 $|z| > R$ 上全纯, 则

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=p} f(z) dz, \quad (p > R). \quad (\text{注意积分方向})$$

设 f 在 $z = \infty$ 处的展式, 则

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n z^n, \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=p} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

则 $\operatorname{Res}(f, \infty) = -C_{-1}.$

定理: 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 上全纯, 则所有孤立奇点留数之和为 0.

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

证明: 设 $\gamma: |z| = R$, R 充分大.



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) - \operatorname{Res}(f, \infty).$$

例: 计算 $I = \int_{|z|=2} \frac{z^5}{1+z^6} dz.$

方法一: $1+z^6=0$ 的根为 $z_k = e^{\frac{\pi i}{6} + \frac{2k\pi}{6}} = e^{\frac{2k+1}{6}i}, k=0,1,2,\dots,5.$

故 $I = 2\pi i \sum_{k=0}^5 \text{Res}(f, z_k) = \dots$

方法二:
$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^5 \operatorname{Res}(f, z_k)$$
$$= -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty).$$

$\frac{z^5}{1+z^6}$ 在 ∞ 处展开:

$$\begin{aligned} \frac{z^5}{1+z^6} &= \frac{z^5}{z^6} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^6}} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{z^6} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^7} + \dots \end{aligned}$$

故 $\operatorname{Res}(f, \infty) = -1$.

从而 $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i$.

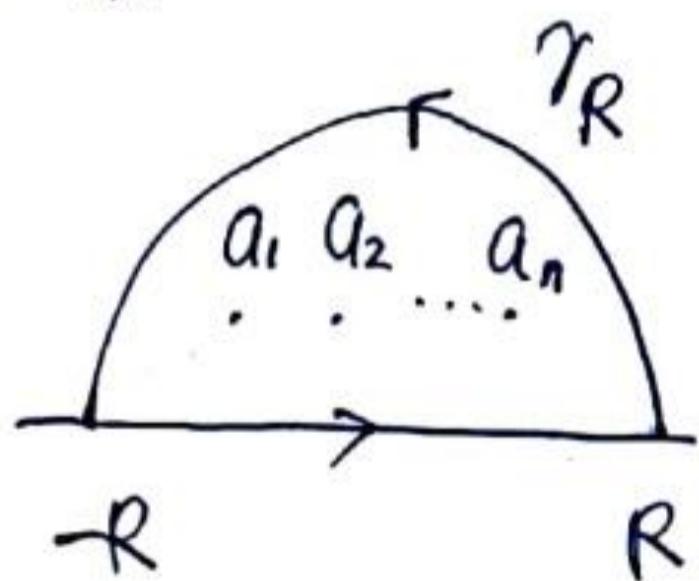
实积分计算

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

定理: 设 $f(z)$ 在 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ 全纯, 在 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$

连续. 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k)$.

证明:



$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k)$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \max_{\gamma_R} |f(z)| \cdot \pi R = \max_{\gamma_R} |z f(z)| \cdot \pi \rightarrow 0.$$

于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k)$.

推论: $\frac{P}{Q} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q 无公因式, Q 无实根, $\deg Q - \deg P \geq 2$.

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, a_k \right)$, a_k 为 $Q(z)$ 在上半平面中的根.

例: 计算: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$

解 $a=i$,

$$I = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}, i \right)$$

$$= 2\pi i \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{(z+i)^{n+1}} \right)^{(n)} \Big|_{z=i} = 2\pi \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2}$$

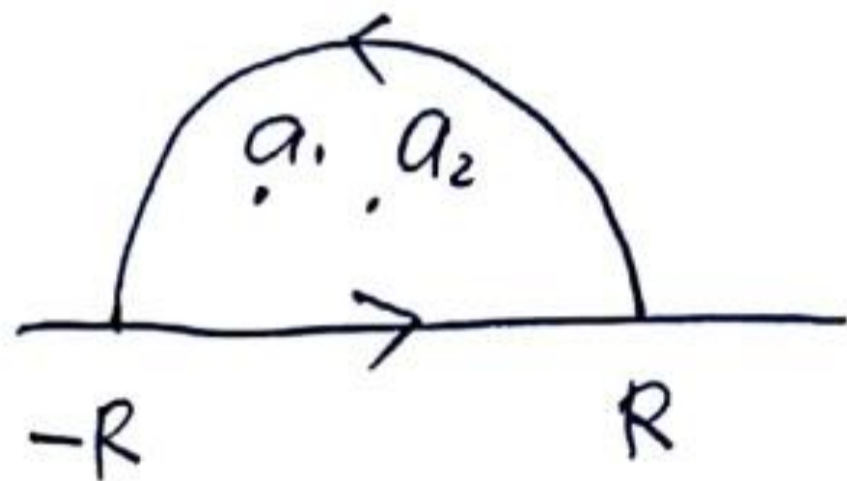
$$\text{II: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \sin \alpha x dx$$

定理: 设 $f(z)$ 在 $\{ \operatorname{Im} z > 0 \} \setminus \{ a_1, \dots, a_k \}$ 上全纯, 在 $\{ \operatorname{Im} z \geq 0 \} \setminus \{ a_1, \dots, a_k \}$

上连续, 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 则对 $\forall \alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_K \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), a_k),$$

证:



$$\int_{-R}^R e^{i\alpha x} f(x) dx + \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz$$

$$= 2\pi i \sum_K \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), a_k). \quad (*)$$

引理: 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, $\alpha > 0$, 则 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0$.

$$\text{证: } \lim_{R \rightarrow \infty} M_R = \max_{|z|=R} |f(z)| \rightarrow 0.$$

$$|\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz| = \left| \int_0^{2\pi} e^{i\alpha R(\cos\theta + i\sin\theta)} f(Re^{i\theta}) Ri e^{i\theta} d\theta \right|$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} e^{-\alpha R \sin\theta + i\alpha R \cos\theta} f(Re^{i\theta}) \cdot Ri e^{i\theta} d\theta \right|$$

$$\leq R \cdot M_R \cdot \int_0^{2\pi} e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta$$

$$\leq R \cdot M_R \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta. \quad (*)$$

当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$.

$$\begin{aligned} \text{故 } (*) &\leq R \cdot M_R \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \\ &\leq R \cdot M_R \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi} \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$= 2 R M_R \cdot \frac{\pi}{2\alpha R} \cdot (1 - e^{-\alpha R})$$

$$= M_R \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

在 (*) 中令 $R \rightarrow \infty$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} (e^{i\alpha z} f(z), a_k).$$

在(*)中令 $R \rightarrow \infty$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}(e^{i\alpha z} f(z), a_k).$$

故取实部和虚部知:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx = 2\pi \text{Re} \left(i \sum_k \text{Res}(e^{i\alpha z} f(z), a_k) \right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx = 2\pi \text{Im} \left(i \sum_k \text{Res}(e^{i\alpha z} f(z), a_k) \right).$$

例: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{b^2+x^2} dx \quad a > 0, b > 0$

证: 令 $f(z) = \frac{1}{b^2+z^2}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ib)$

$$I = \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{b^2+z^2}, ib \right) \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left(2\pi i \cdot \frac{e^{ta2}}{z+bi} \Big|_{z=bi} \right)$$

$$= \frac{\pi}{b} e^{-ab}$$

(III): $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有奇点...

例: 计算 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

解: ① $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(II) $\left(\int_{-R}^{-p} - \int_{\gamma_p} + \int_p^R + \int_{\gamma_R} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$

由上述引理 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$

下求 $\lim_{p \rightarrow 0} \int_{\gamma_p} \frac{e^{iz}}{z} dz$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{z} = \rho e^{i\theta}, \quad \theta: 0 \rightarrow \pi.$$

$$\int_{\gamma_p} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\rho e^{i\theta}}}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^\pi e^{i\rho e^{i\theta}} \cdot i d\theta \rightarrow \pi i \quad (\rho \rightarrow 0).$$

$$\text{故} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$$

$$\text{故} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

例: 计算 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$

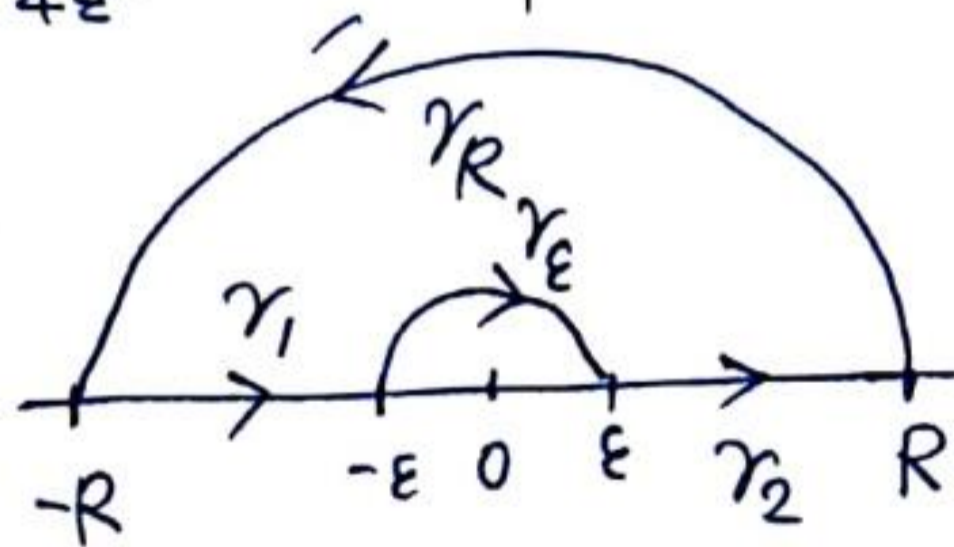
解: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \frac{1}{x^3} dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8ix^3} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3} dx$$

令 $f(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3iz}}{4z^3}$ $\Re f(x) = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3}$

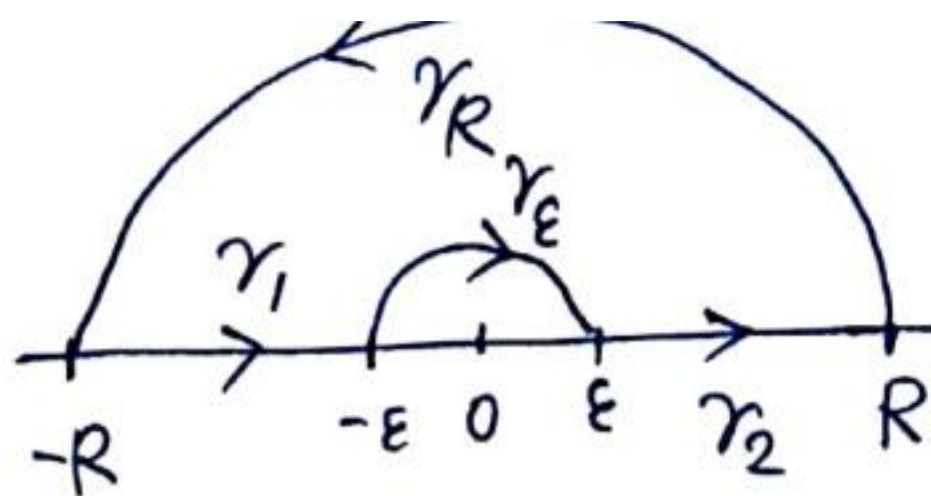
取积分曲线:



取 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_\epsilon \cup \gamma_2 \cup \gamma_R$, 则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

取积分曲线:



取 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, 则

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 0$$

注意 $\left| \int_{\gamma_R} F(z) dz \right| \rightarrow 0$.

$$\int_{\gamma_2} F(z) dz \rightarrow \int_0^{+\infty} F(x) dx$$

$$\int_{\gamma_1} F(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^0 F(x) dx$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^R f(z) dz \\
&= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{3e^{ix} - e^{3xi}}{4x^3} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{3e^{ix} - e^{3xi}}{4x^3} dx \\
&= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{3\cos x - \cos 3x}{4x^3} dx + i \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3} dx \\
&\quad + \int_{\varepsilon}^R \frac{3\cos x - \cos 3x}{4x^3} dx + i \int_{\varepsilon}^R \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3} dx \\
&= i \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3} dx \rightarrow i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3} dx
\end{aligned}$$

下求 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} F(z) dz.$

首先求 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} z^k dz. (k \in \mathbb{Z}).$

令 $z = \varepsilon e^{i\theta}, \theta: \pi \rightarrow 0.$ 则

$$\int_{\gamma_\varepsilon} z^k dz = \int_{\pi}^0 \varepsilon^k e^{ik\theta} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = - \int_0^\pi i \varepsilon^{k+1} e^{i(k+1)\theta} d\theta. \quad (*)$$

若 $k = -1$, 则 $(*) = -\pi i$

若 $k \neq -1$, 则 $(*) = -i \varepsilon^{k+1} \int_0^\pi e^{i(k+1)\theta} d\theta$

$$= -\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1} \left((-1)^{k+1} - 1 \right) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{若 } k \geq 0 \text{ 或者 } k \text{ 为 } \leq -2 \\ & \text{的奇整数} \end{cases}$$

不存在, 若 k 为 ≤ -2 的偶整数.

下求 $f(z)$ 的展式.

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots$$

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}iz^3 + \dots$$

$$e^{3zi} = 1 + 3zi - \frac{9}{2}z^2 - \frac{27}{6}iz^3 + \dots$$

$$3e^{iz} - e^{3zi} = 2 + 3z^2 + 4iz^3 + \dots$$

$$f(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3zi}}{4z^3} = \frac{2 + 3z^2 + 4iz^3}{4z^3} = \frac{1}{2} \frac{1}{z^3} + \frac{3}{4} \frac{1}{z} + 4i + \dots$$

$$\text{故 } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = -\frac{3}{4} \pi i.$$

$$\text{从而 } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4x^3} dx = \frac{3}{4} \pi$$

$$(4). \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta.$$

$$\begin{aligned} \text{令 } z = e^{i\theta}, \quad \cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

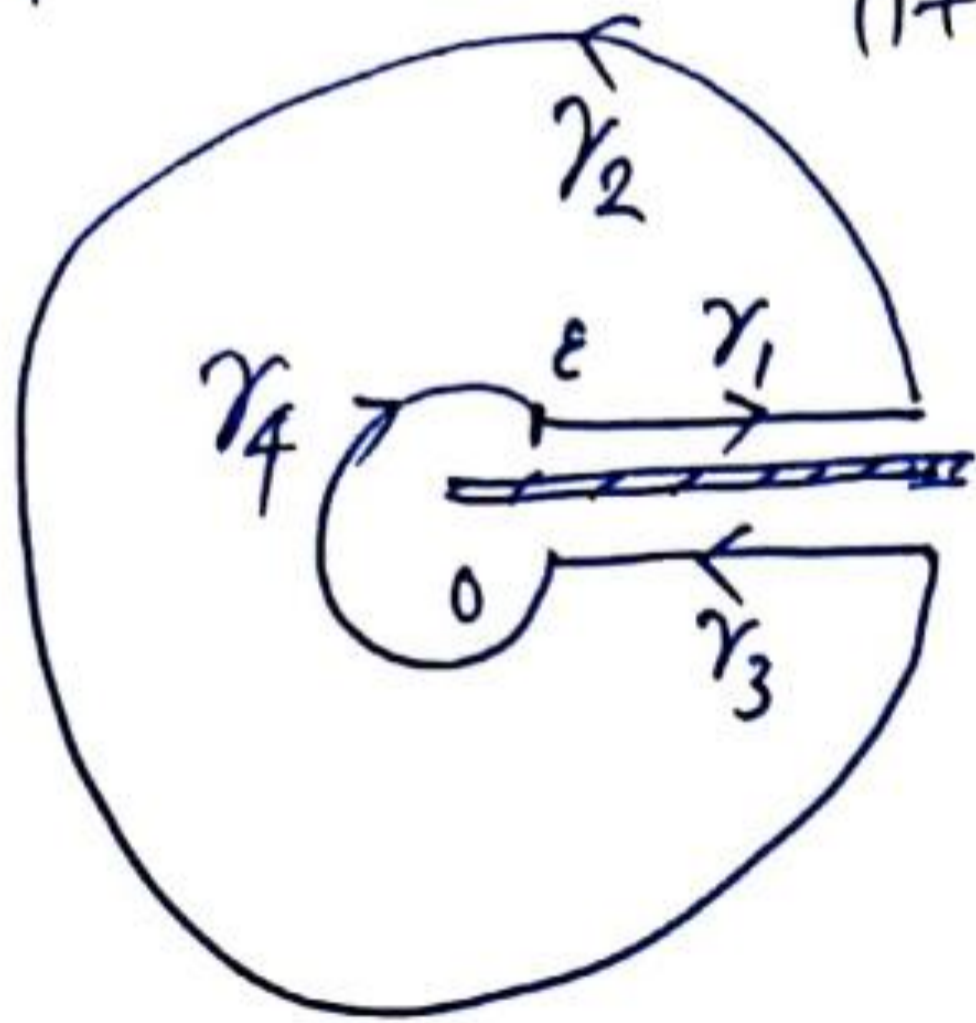
$$\frac{d}{d\theta} z = e^{i\theta}, \quad dz = i e^{i\theta} d\theta = iz d\theta, \quad \text{故 } d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

$$\begin{aligned} \text{例: } \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta + 2\sin\theta} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

(5) 多值函数的相关积分.

例: 计算 $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

解: ① 考虑 $F(z) = \frac{1}{(1+z)z^\alpha}$, z^α 支点 $0, \infty$.



设 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$F(z)$ 在 γ 内部有奇点 $z = -1$.

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F(z), -1).$$

$$\textcircled{2} \int_{\gamma_1} F(z) dz = \int_{\epsilon}^R \frac{dx}{(1+x)x^\alpha} \rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^\alpha}, \quad (\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty)$$

$$\textcircled{3} \int_{\gamma_3} F(z) dz = \int_R^\epsilon \frac{1}{(1+x)z^\alpha} \Big|_{z=x_F}$$

$$\begin{aligned} z^\alpha \Big|_{z=x_F} &= |x|^\alpha e^{i\alpha \text{Arg } x_F} = |x|^\alpha e^{i\alpha (\text{Arg } x_\pm + \Delta_c \text{Arg } z)} \\ &= |x|^\alpha e^{i\alpha (0 + 2\pi)} = |x|^\alpha e^{i\alpha \cdot 2\pi} \end{aligned}$$

$$\text{故} \int_{\gamma_3} F(z) dz = \int_R^\epsilon \frac{1}{(1+x)x^\alpha e^{2\pi\alpha i}} \rightarrow -e^{-2\pi\alpha i} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^\alpha}$$

$$\textcircled{4} \left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(1+z)z^\alpha} \right| \lesssim \int_{\gamma_2} \frac{|dz|}{|1+z| |z|^\alpha} \lesssim \frac{2\pi R}{R^\alpha \cdot (R-1)} \sim R^{-\alpha} \rightarrow 0.$$

($R \rightarrow +\infty$).

$$\textcircled{5} \left| \int_{\gamma_4} \frac{dz}{(1+z)z^\alpha} \right| \lesssim \int_{\gamma_4} \frac{|dz|}{|z|^\alpha \cdot |1+z|} \sim \frac{2\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon)\varepsilon^\alpha} \sim \varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow 0$$

($\varepsilon \rightarrow 0$).

$$\textcircled{6} \operatorname{Res}(F, -1) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z)^{2\alpha}}, -1\right)$$

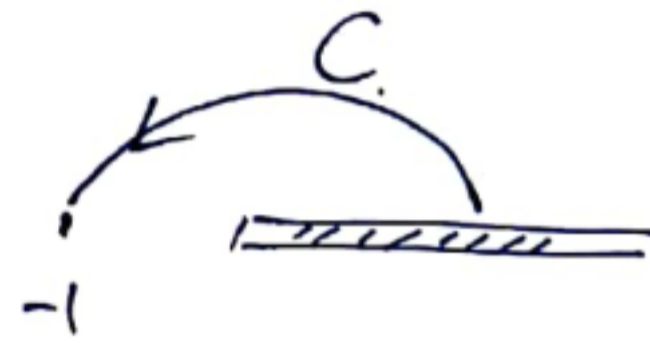
$$= \frac{1}{z^{2\alpha}} \Big|_{z=-1}$$

$$z^{2\alpha} \Big|_{z=-1} = |z|^{2\alpha} e^{i\alpha \operatorname{Arg} z} \Big|_{z=-1}$$

$$= (|z|^{2\alpha} e^{i\alpha (0 + \Delta_C \operatorname{Arg} z)}) \Big|_{z=-1}$$

$$= e^{i\alpha \pi}$$

$$\text{故 } \operatorname{Res}(F, -1) = e^{-\pi\alpha i}$$



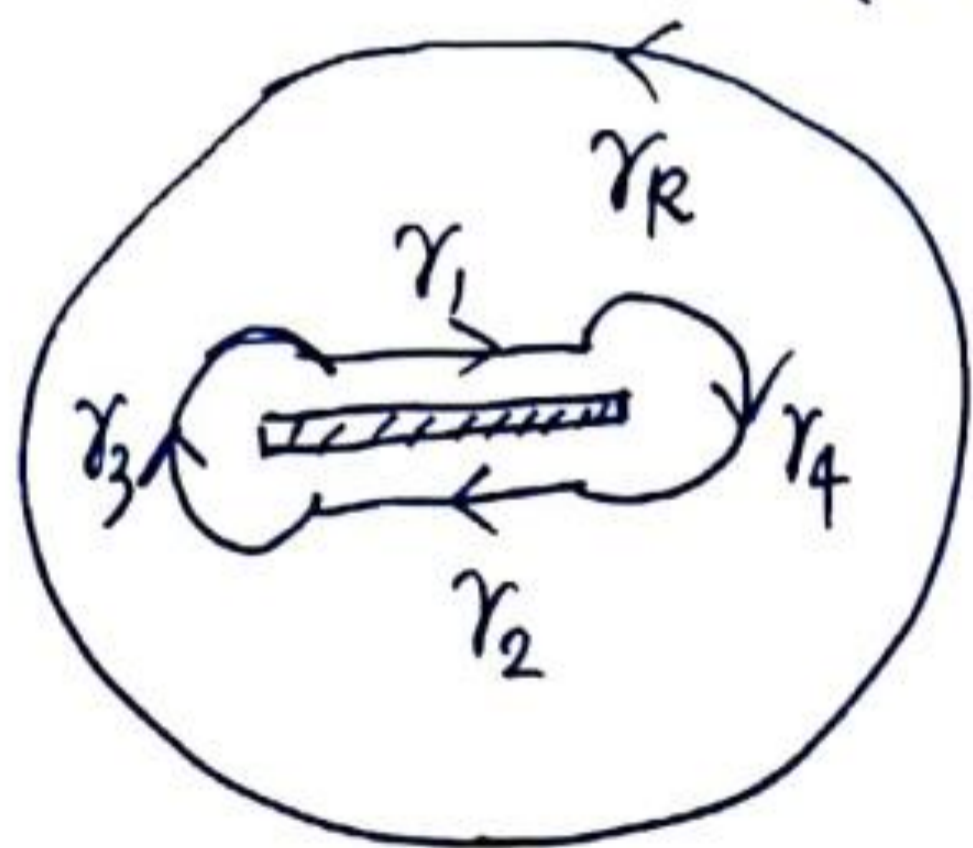
⑦ 同上:

$$(1 - e^{-2\pi\alpha i}) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^{2\alpha}} = 2\pi i e^{-i\alpha\pi}$$

$$\text{故 } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{2\pi i e^{-i\alpha\pi}}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

例: $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3} dx$

解: ①令 $F(z) = \frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(1+z)^3}$ 令 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_R$



则在 γ 内部, F 只有一个极点 $z = -1$.

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F, -1)$$

② $\gamma_3: |z| = \varepsilon.$

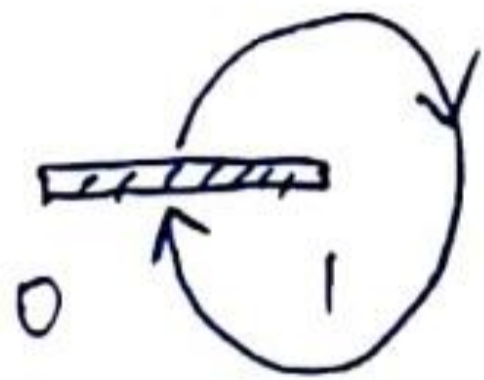
$$\left| \int_{\gamma_3} F(z) dz \right| \leq \int_0^1 \frac{|z|^{\frac{2}{3}} |1-z|^{\frac{1}{3}}}{|1+z|^3} |dz| \leq C \cdot \varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot 2\pi \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

③ $\gamma_4: |z-1| = \varepsilon.$

$$\left| \int_{\gamma_4} F(z) dz \right| \leq \int_0^1 \frac{|z|^{\frac{2}{3}} |1-z|^{\frac{1}{3}}}{|1+z|^3} |dz| \leq C \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}} \cdot 2\pi \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

④ $\int_{\gamma_1} F(z) dz \rightarrow \int_0^1 F(x) dx \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$

$$\textcircled{5} \int_{\gamma_2} F(z) dz \rightarrow \int_1^0 F(x) e^{i \text{Arg } F(z)} \Big|_{z=x_F} dx.$$



$$\begin{aligned} \text{Arg } F(z) \Big|_{z=x_F} &= \text{Arg } F(z) \Big|_{z=x_E} + \Delta_C \text{Arg } F(z) \\ &= \frac{1}{3} (2 \Delta_C \text{Arg } z + \Delta_C \text{Arg } (z-1)) \\ &= \frac{1}{3} (2 \cdot 0 + (-2\pi)) = -\frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_2} F(z) dz \rightarrow \int_1^0 F(x) e^{-\frac{2}{3}\pi i} dx = - \int_0^1 F(x) dx \cdot e^{\frac{4}{3}\pi i}$$

$$\textcircled{6} \left| \int_{\gamma_R} F(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{|z|^{\frac{2}{3}} \cdot |1-z|^{\frac{1}{3}}}{|1+z|^3} |dz| \sim \frac{R^{\frac{2}{3}} \cdot R^{\frac{1}{3}}}{R^3} \cdot 2\pi R \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0.$$

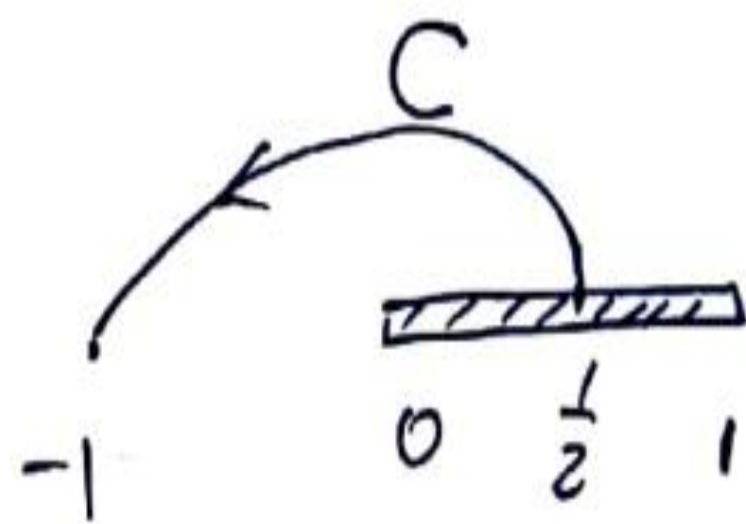
得: $(1 - e^{\frac{4}{3}\pi i}) \int_0^1 f(x) dx = 2\pi i \operatorname{Res}(F, -1)$.

下求 $\operatorname{Res}(F, -1)$

$$F(z) = \frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(1+z)^3}$$

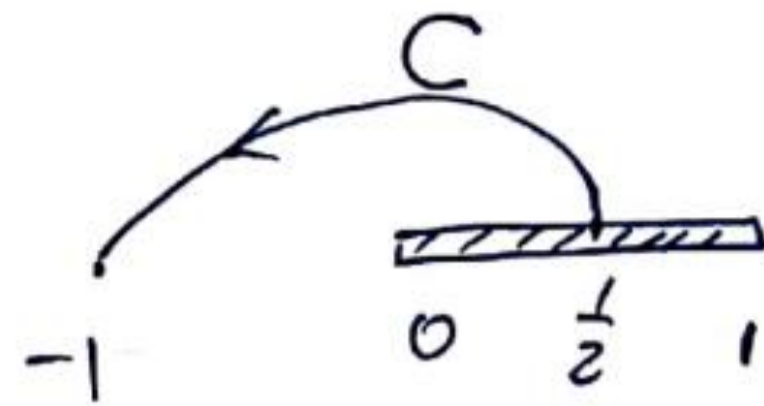
故 $\operatorname{Res}(F, -1) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{z^2(1-z)} \right)' \Big|_{z=-1}$.

令 $G(z) = \sqrt[3]{R(z)}$, $R(z) = z^2(1-z)$.



$$\text{Res}(F, -1) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{z^2(z-2)} \right)'' \Big|_{z=-1}$$

$$\text{令 } G(z) = \sqrt[3]{R(z)}, \quad R(z) = z^2(z-2)$$



$$\text{Pr} | \quad G(-1) = |R(-1)|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} \text{Arg} R(z)} \Big|_{z=-1}$$

$$= |R(-1)|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} (\text{Arg} R(\frac{1}{2}) + \Delta_C \text{Arg} R(z))}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} \cdot (2\Delta_C \text{Arg} z + \Delta_C \text{Arg}(z-1))}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} (2 \cdot \pi + 0)} = 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

$$G'(z) = \frac{1}{3} R(z)^{\frac{1}{3}-1} (R(z))' = \frac{1}{3} R(z)^{-\frac{2}{3}} (R(z))' = \frac{1}{3} G(z)^{-2} \cdot (R(z))'$$

$$G''(z) = \frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot G(z)^{-3} \cdot G'(z) (R(z))' + \frac{1}{3} G(z)^{-2} (R(z))''$$

$$= -\frac{2}{3} G(z)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3} G(z)^{-2} (R(z))' \right) R'(z) + \frac{1}{3} G(z)^{-2} (R(z))''$$

$$= -\frac{2}{9} G(z)^{-5} (R'(z))^2 + \frac{1}{3} G(z)^{-2} (R(z))''$$

对于 $R(z) = z^2(1-z)$, 极

$$R'(z) = 2z(1-z) + z^2 \cdot (-1) = 2z - 3z^2, \quad R'(-1) = -5$$

$$R''(z) = 2 - 6z, \quad R''(-1) = 8.$$

注意. $G(-1) = 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i}$ 极

$$G''(-1) = -\frac{2}{9} \left(2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^{-5} \cdot 25 + \frac{1}{3} \cdot \left(2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^{-2} \cdot 8$$

$$= -\frac{50}{9} 2^{-\frac{5}{3}} e^{-\frac{10}{3}\pi i} + \frac{8}{3} 2^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}\pi i}$$

$$= -\frac{50}{9} 2^{-\frac{5}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i} + \frac{8}{3} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

$$= \left(-\frac{50}{9} 2^{-\frac{5}{3}} + \frac{8}{3} 2^{-\frac{2}{3}}\right) e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

$$= -\frac{1}{18} 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

設 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{2\pi i \operatorname{Res}(F, -1)}{1 - e^{\frac{4}{3}\pi i}}$

$$= \frac{2\pi i}{1 - e^{\frac{4}{3}\pi i}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{18} 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i} \right)$$

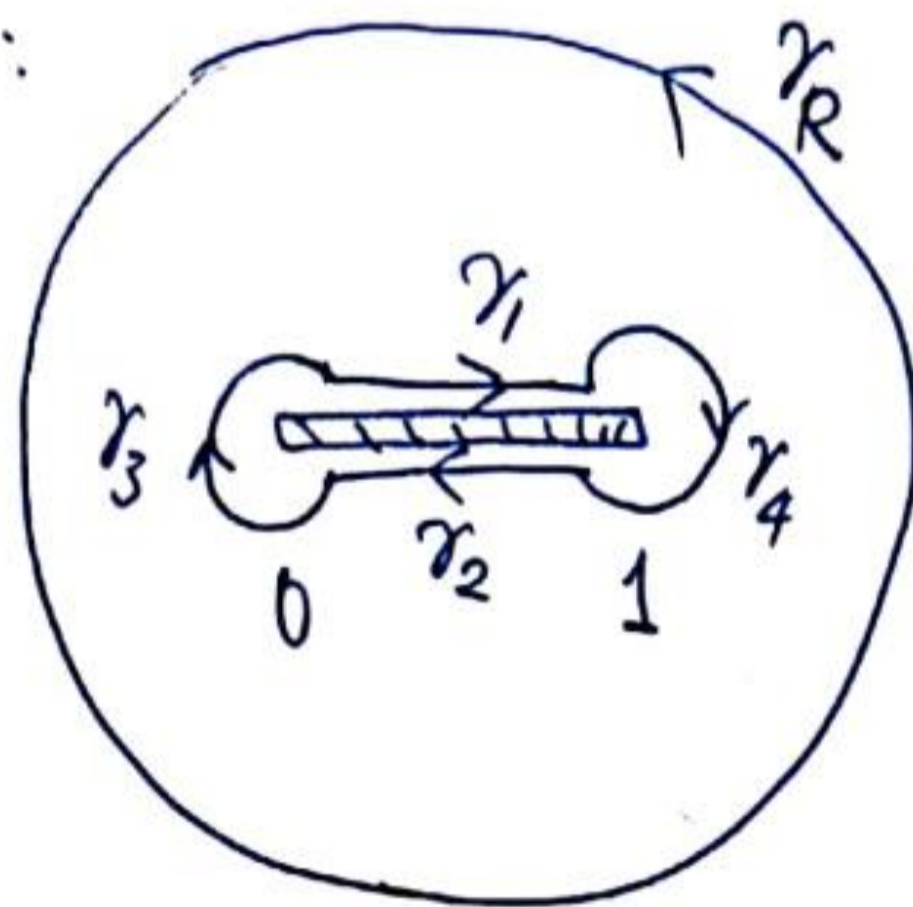
$$= \frac{\sqrt[3]{2} \pi}{18\sqrt{3}}$$

例: 求 $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}} dx$

解: 令 $F(z) = \frac{1}{(1+z)^2} \sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}$ / 支点 $0, 1$
 ∞ 不是支点

故取单值域 $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.

取积分曲线:



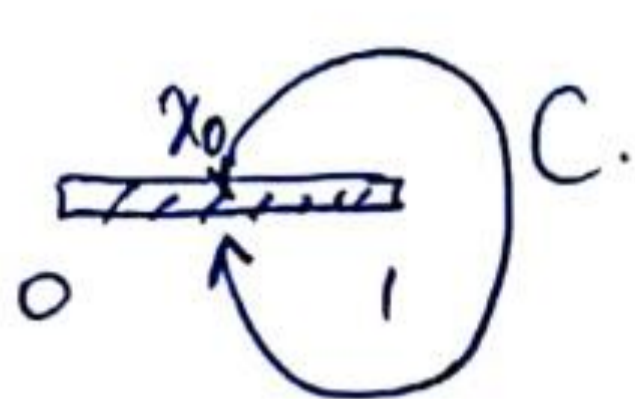
$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_R$$

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(F(z), -1).$$

$$\textcircled{1} \left| \int_{\gamma_3} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_3} |1-z|^{-\frac{3}{2}} |z|^{-\frac{1}{2}} |dz| \approx C \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon^1 \rightarrow 0$$

$$\textcircled{2} \left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_4} |1-z|^{\frac{3}{2}} |z|^{-\frac{1}{2}} |dz| \approx C \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}} \cdot \varepsilon^1 \rightarrow 0.$$

$$\textcircled{3} \int_{\gamma_1} f(z) dz \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$$



$$\sqrt{\frac{1}{2}} R(z) = \frac{(z-1)^3}{z}$$

$$\sqrt{R(z)} = |R(z)|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \text{Arg} R(z)}$$

$$\begin{aligned} \text{Arg} R(z) &= \text{Arg} R(z) \Big|_{z=x_0 \pm} + \Delta_C \cdot \text{Arg} R(z) \\ &= 3 \Delta_C \text{Arg}(z-1) - \Delta_C \text{Arg} z. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} z = x_{0F} \text{ 时}$$

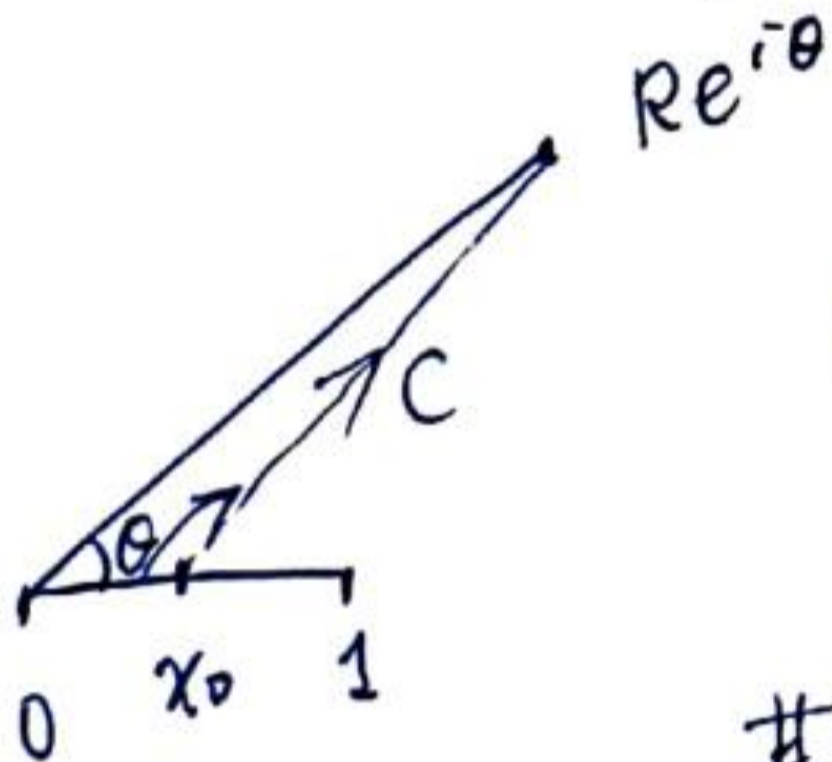
$$\text{Arg} R(z) \Big|_{z=x_{0F}} = 3 \cdot (-2\pi - 0) = -6\pi$$

$$\text{故} \quad \sqrt{R(z)} = |R(z)|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(-6\pi)} = -|R(z)|^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{LHP} \quad \int_{\gamma_2} F(z) dz = \int_1^0 -F(x) dx = \int_0^1 F(x) dx$$

⑤ 求 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz$.

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^2} \sqrt{\tilde{R}(z)}; \quad \tilde{R}(z) = \frac{(1-z)^3}{z}$$



$$\begin{aligned} \text{Arg } R(z) \Big|_{z=Re^{i\theta}} &= 3 \Delta_C \text{Arg}(z-1) - \Delta_C \text{Arg } z \\ &\Rightarrow 3 \alpha_R(\theta) - \theta \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \lim_{R \rightarrow \infty} \alpha_R(\theta) = -(\pi - \theta).$$

$$\text{故 } \text{Arg } R(z) \Big|_{z=Re^{i\theta}} \rightarrow -3(\pi - \theta) - \theta = 2\theta - 3\pi.$$

$$F(z) \Big|_{z=Re^{i\theta}} = \frac{1}{(1+Re^{i\theta})^2} \cdot |\tilde{R}(Re^{i\theta})|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{(0-\frac{3}{2}\pi)i}$$

$$\text{故} \int_{\gamma_R} F(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+Re^{i\theta})^2} R \cdot e^{i(\theta-\frac{3}{2}\pi)} \cdot Rie^{i\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2i\theta}} \cdot e^{i(\theta-\frac{3}{2}\pi)} \cdot ie^{i\theta} d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{-\frac{3}{2}\pi i} d\theta = - \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi.$$

$$\textcircled{6} \quad \text{Res}(F, -1) = (\sqrt{R(z)})' \Big|_{z=-1}, \quad R(z) = \frac{(1-z)^3}{z}.$$

$$\sqrt{z} \quad G(z) = \sqrt{R(z)}.$$

$$G(-1) = |R(-1)|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \text{Arg} R(z) \Big|_{z=-1}}.$$

$$\text{Arg} R(-1) = 3 \cdot 0 - \pi = -\pi, \quad R(-1) = -8.$$

$$G(-1) = \sqrt{8} \cdot e^{-\frac{1}{2}\pi} = -2i\sqrt{2}$$

$$G(z) = \sqrt{R(z)},$$

$$G'(z) = \frac{1}{2\sqrt{R(z)}} R'(z) = \frac{1}{2G} R'(z).$$

$$R'(-1) = 4, \quad \text{故 } G'(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} i, \quad \text{故 } \text{Res}(F, -1) = \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

⑨ 得上:

$$2 \int_0^1 f(x) dx - 2\pi = 2\pi i \operatorname{Res}(F, -1) = 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i = -\sqrt{2}\pi$$

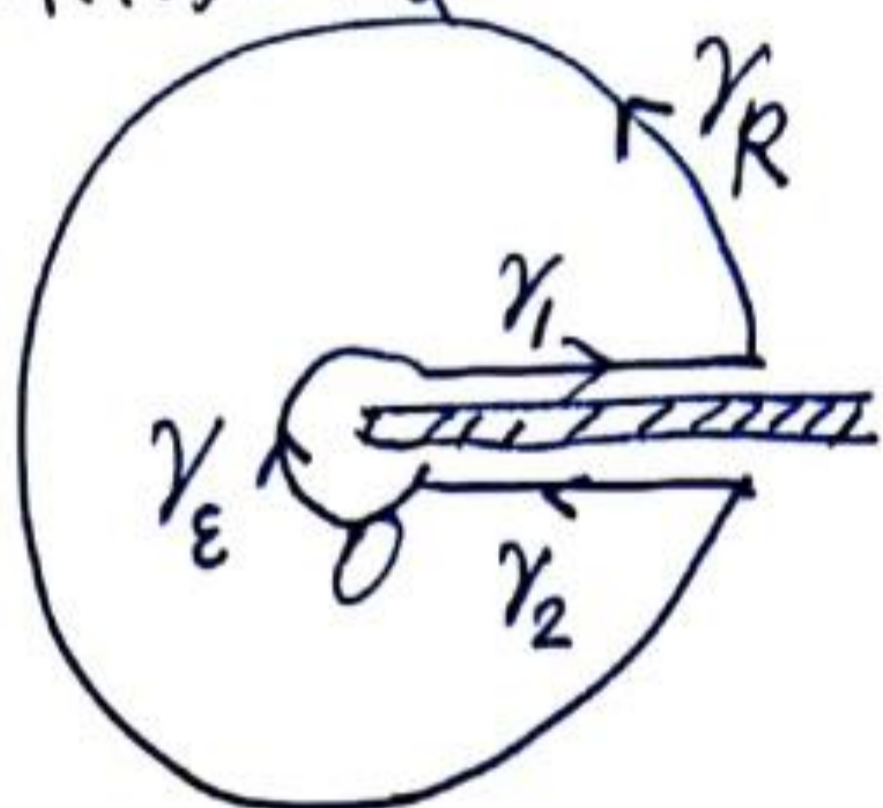
$$\text{故 } \int_0^1 f(x) dx = \pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

例: 计算 $I = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx.$

支点 $0, \infty$ 取积分曲线:

$$F(z) = \frac{\text{Log } z}{(1+z^2)^2}$$

(*)



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_\epsilon \cup \gamma_R$ 则

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(F, i) + \text{Res}(F, -i)).$$

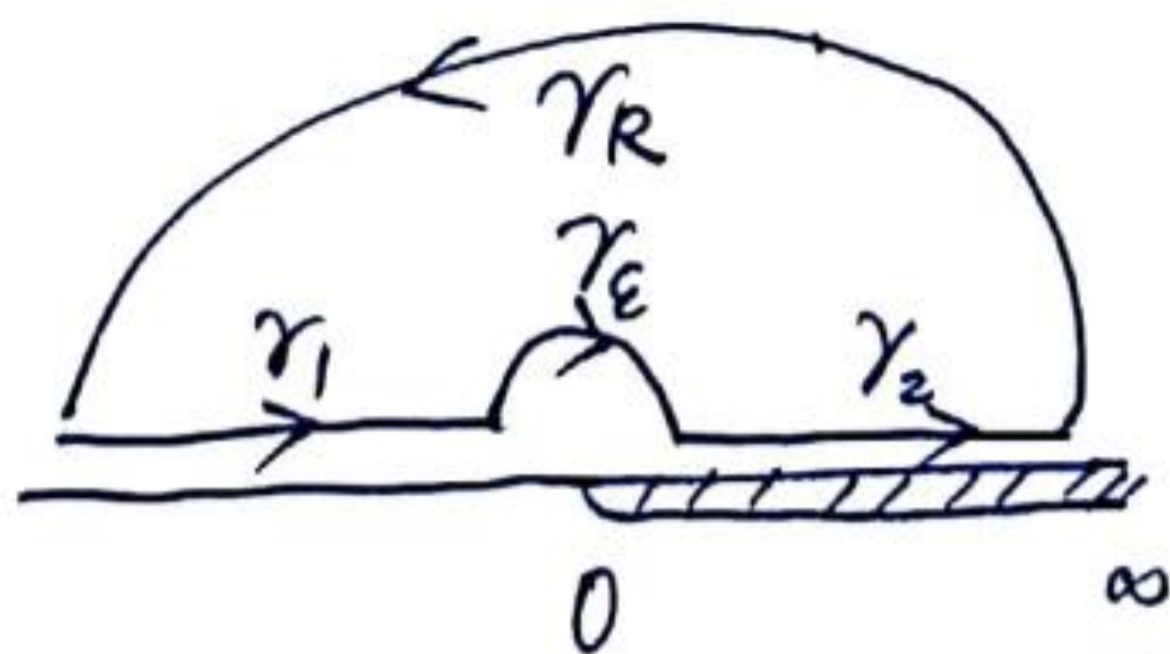
$$\int_{\gamma_1} F(z) dz \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\int_{\gamma_2} F(z) dz \rightarrow \int_{+\infty}^0 \frac{\text{Log } z|_{z=x\tau}}{(1+x^2)^2} dx = - \int_0^{\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{(1+x^2)^2} dx$$

故 $(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}) F(z) dz \rightarrow - \int_0^{\infty} \frac{2\pi i}{(1+x^2)^2} dx$ 算不出 I.

表达式与 I 无关

解: 取曲线:



$$F(z) = \frac{\text{Log } z}{(1+z^2)^2}$$

故 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_\epsilon \cup \gamma_R$

$$\int_{\gamma_1} F(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Log } z|_{z=x}}{(1+x^2)^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\log |x| + \pi i}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\log x + \pi i}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} F(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|\operatorname{Log} z|}{|1+z^2|^2} |dz| \leq \frac{|\operatorname{Log} \varepsilon| + \pi}{C} \pi \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\left| \int_{\gamma_R} F(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{\log R + \pi}{|1+z^2|^2} |dz| \sim \frac{\log R + \pi}{R^4} \cdot 2\pi R \rightarrow 0.$$

$$\int_{\gamma_2} F(z) dz \rightarrow \int_0^\infty F(x) dx$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty F(x) dx + \pi i \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}(F, i) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i \end{aligned}$$

$$\text{Hence } \int_0^\infty F(x) dx = -\frac{\pi}{4}.$$

说明: 若设 $F(z) = \frac{(\text{Log} z)^2}{(1+z^2)^2}$, 取积分曲线(*)可算得 I 值.

在积分曲线(*)下:

$$\int_{\gamma_1} F(z) dz \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F(z) dz &= \int_R^{\varepsilon} \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(1+x^2)^2} dx \rightarrow - \int_0^{\infty} \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(1+x^2)^2} dx \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2 + 4\pi i \log x - 4\pi^2}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned}$$

相加:

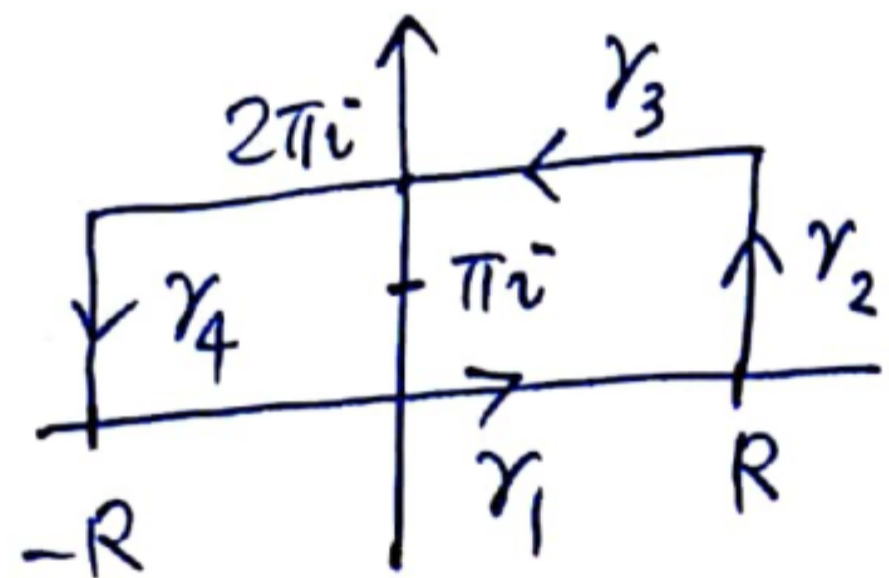
$$-4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} + 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i (\operatorname{Res}(F, i) + \operatorname{Res}(F, -i)) \\ = \pi^3 + \pi^2 i$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi^3}{4\pi^2} = \frac{\pi}{4}$$

例: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, (0 < a < 1)$

解: 令 $F(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$, 则 $F(z)$ 有奇点 $z = \pi i + 2k\pi i$
 $= (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$.



$$\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \right) F(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F(z), \pi i)$$

① $\int_{\gamma_1} F(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \left| \int_{\gamma_2} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}} i dt \right| \\
 &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR} e^{iat}}{1+e^{R+it}} i dt \right| \\
 &\leq C \cdot e^{(a-1)R} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$\gamma_2: z = R+it, \quad t: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad \left| \int_{\gamma_4} F(z) dz \right| &= \left| \int_{2\pi}^0 \frac{e^{a(-R+it)}}{1+e^{-R+it}} i dt \right| \\
 &\leq C e^{-aR} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_4: z = -R+it, \\
 t: 2\pi \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(t+2\pi i)}}{1+e^{t+2\pi i}} dt.$$

$$\gamma_3: z = t + 2\pi i,$$
$$t: R \rightarrow -R$$

$$= -e^{2\pi ai} \int_R^{-R} \frac{e^{at}}{1+e^t} dt \rightarrow -e^{2\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t} dt$$

得: $(1 - e^{2\pi ia}) \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = 2\pi i \operatorname{Res}(F(z), \pi i)$
 $= 2\pi i \cdot (-e^{\pi ai})$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = -\frac{2\pi i e^{\pi ai}}{1 - e^{2\pi ia}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$

例: $\int_0^\pi \log \sin x \, dx = -\pi \log 2.$

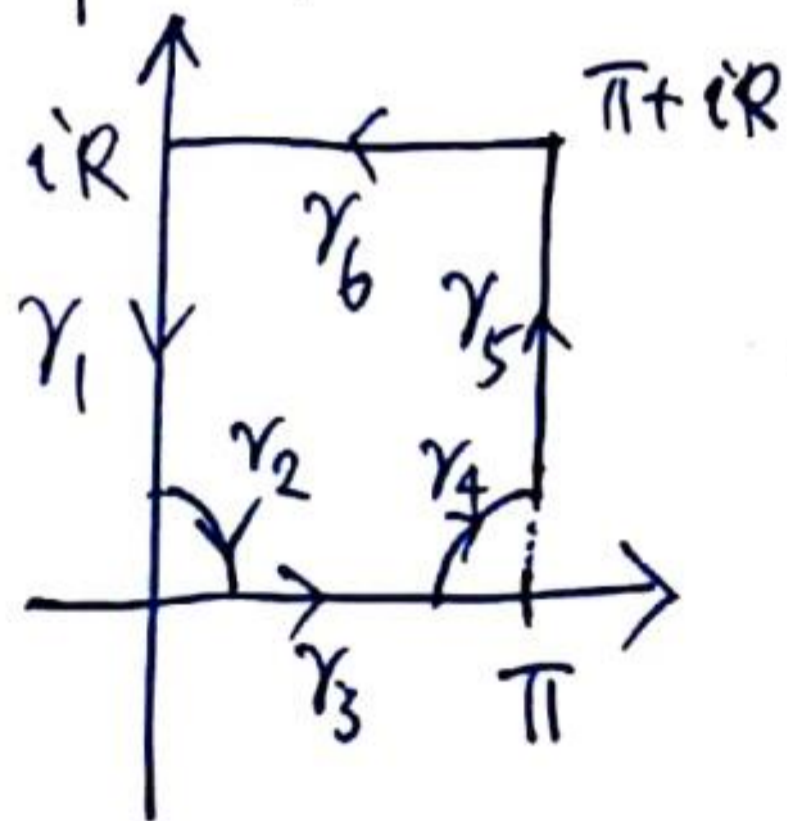
证: ① 积分有限: 当 $x \sim 0$ 时, $\log \sin x \sim \log x$ 可积.

② $\sin z$ 在 \mathbb{C} 上零点为 $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1$$

$$\Leftrightarrow z = k\pi.$$

作曲线:



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6.$$

γ 所围区域为 D .

$\log \sin z$ 在 D 中全纯. 故

$$\int_{\partial D} \log \sin z \, dz = 0.$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{3} \sin(x+iy) \\
&= \frac{1}{2i} \left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(e^{-y} (\cos x + i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x) \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left((e^{-y} - e^y) \cos x + i (e^{-y} + e^y) \sin x \right) \\
&= \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y) \sin x + \frac{1}{2} i (e^y - e^{-y}) \cos x.
\end{aligned}$$

$\forall \frac{\pi}{2} < x < \pi, y > 0, \operatorname{Re}(\sin(x+iy)) \geq 0,$

$$\begin{aligned}
|\sin(x+iy)| &\leq \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) + \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \\
&= e^{-y} + e^y.
\end{aligned}$$

$$\forall \log |\sin(x+iy)| \leq c|y|.$$

$$\textcircled{4} \quad \gamma_2: \quad z = \varepsilon e^{i\theta}, \quad \theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0, \quad dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} \log \sin z \, dz \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left| \log \sin(\varepsilon e^{i\theta}) \right| d\theta \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \cdot \varepsilon \, d\theta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \quad \gamma_4: \quad z = \pi + \varepsilon e^{i\theta}, \quad \theta: \pi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_4} \log \sin z \, dz \right| &\leq \left| \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin(\pi + \varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| \log \sin(\pi + \varepsilon e^{i\theta}) \right| d\theta \\ &\leq C \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$\simeq \pi + \varepsilon \cos \theta + i \varepsilon \sin \theta.$

$$\textcircled{b} \quad \gamma_3: z = t, \quad t: \varepsilon \rightarrow \pi - \varepsilon$$

$$\int_{\gamma_3} \log \sin z \, dz = \int_{\varepsilon}^{\pi - \varepsilon} \log \sin x \, dx \rightarrow \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx.$$

$$\textcircled{7} \quad \gamma_b: z = t + iR, \quad t: \pi \rightarrow 0.$$

$$\int_{\gamma_b} \log \sin z \, dz = \int_{\pi}^0 \log \sin (t + iR) \, dt \quad (*)$$

$$\sin(t + iR) = \frac{1}{2}(e^{-R} + e^R) \sin t + i \cdot \frac{1}{2}(e^R - e^{-R}) \cos t$$

$$\begin{aligned} |\sin(t + iR)|^2 &= \frac{1}{4}(e^{-R} + e^R)^2 \sin^2 t + \frac{1}{4}(e^R - e^{-R})^2 \cos^2 t \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{2R} (\sin^2 t + \cos^2 t) + \sinh^2 t - \cos^2 t + \dots \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{2R} (1 + \mu(R)), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \mu(R) = 0. \end{aligned}$$

$$\log |\sin(t + iR)|^2 = \log \left(\frac{1}{4} e^{2R} \right) + \log (1 + \mu(R)).$$

$$\rightarrow 2R - 2 \log 2.$$

从 Γ_R

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma_R} \log \sin z \, dz = - \int_0^\pi \log |\sin(t + iR)| \, dt \quad (\text{由} (*)).$$

Γ_R

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} (2R - 2 \log 2) \cdot \pi$$

$$\Rightarrow -\pi R + \pi \log 2. \quad (\text{当 } R \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

$$\textcircled{8} \quad \gamma_1: \quad z = it, \quad t: R \rightarrow \varepsilon.$$

$$\operatorname{Im} z = \sin(it) = \frac{1}{2}i(e^t - e^{-t}).$$

$$\text{tho } \arg \sin(iy) = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \log \sin z \, dz &= \operatorname{Re} \int_R^\varepsilon \log \sin(it) \, i dt = - \operatorname{Re} \int_\varepsilon^R i \log \sin(it) \, dt \\ &= \int_\varepsilon^R \operatorname{Im} \log \sin(it) \, dt = \frac{\pi}{2} (R - \varepsilon). \end{aligned}$$

$$\textcircled{9} \int_{\gamma_5} \quad \gamma_5: z = \pi + it, \quad t: \varepsilon \rightarrow R.$$

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(\pi + it) = \frac{1}{2}i(e^t - e^{-t}) \cos \pi \\ &= -\frac{1}{2}i(e^t - e^{-t}). \end{aligned}$$

$$\arg \sin(\pi + it) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\gamma_5} \log \sin z \, dz &= \operatorname{Re} \int_{\varepsilon}^R \log \sin(\pi + it) \cdot i \, dt \\ &= - \int_{\varepsilon}^R \operatorname{Im}(\log \sin(\pi + it)) \, dt \\ &= + \frac{\pi}{2} (R - \varepsilon). \end{aligned}$$

⑩ 综上: 由 $\operatorname{Re} \int_{\partial D} \log \sin z dz = 0$ 知:

$$\int_0^\pi \log \sin x dx + (-\pi R + \pi \log 2 + \varepsilon(R)) + \pi(R - \varepsilon) = 0.$$

$$\text{故 } \int_0^\pi \log \sin x dx = -\pi \log 2 + \varepsilon(R) + \pi \varepsilon \rightarrow \underline{-\pi \log 2}.$$

全纯开拓

定义: 设 f 在区域 D 上全纯, 若存在比 D 大的区域 G , $D \subsetneq G$, 及 G 上全纯函数 F , 使 $F(z)|_D = f(z)$, 则称 F 为 f 在 G 上的全纯开拓.

例: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $D = \{ |z| < 1 \}$

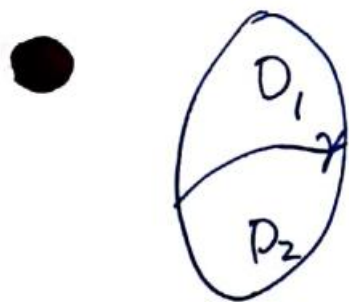
$$F(z) = \frac{1}{1-z}, \quad G = \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

则 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在 G 上全纯开拓.

问题: 全纯函数在哪些情况下可开拓?

定理 (Painlevé 原理). 设 Ω 被 γ 分为两个区域 Ω_1, Ω_2 , f 在 Ω 内连续, 在 D_1, D_2 内全纯, 则 f 在 Ω 上全纯.

证: 只要证对任何闭 $l \subset D$, $\int_l f(z) dz = 0$.



① 若 $l \subset D_1 \cup \gamma$ 或 $l \subset D_2 \cup \gamma$, 则由 Cauchy 定理知

$$\int_l f(z) dz = 0$$



$$\textcircled{2} \int_l f(z) dz = \int_{l_1 \cup \gamma_1} f(z) dz + \int_{l_2 \cup \gamma_1^{-1}} f(z) dz = 0.$$

由 Morera 定理知 f 在 Ω 上全纯.

推论: 若 f_1, f_2 分别在 D_1, D_2 上 全纯, ^{分别} 在 $D_1 \cup L, D_2 \cup L$ 上 连续.

且 $f_1|_L = f_2|_L$, 则

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & \forall z \in D_1 \cup L \\ f_2(z), & \forall z \in D_2 \end{cases}$$

是 $D = D_1 \cup L \cup D_2$ 上 全纯函数.

定理: (Schwarz 对称原理),

设 D 关于实轴对称, f 满足:

① f 在 $D \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 上全纯

② f 在 $D \cap \{ \operatorname{Im} z \geq 0 \}$ 连续.

③ f 在 $D \cap \{ \operatorname{Im} z = 0 \}$ 上取实值.

则

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \forall z \in D \cap \{ \operatorname{Im} z \geq 0 \} \\ \overline{f(\bar{z})} & \forall z \in D \cap \{ \operatorname{Im} z < 0 \}. \end{cases}$$

是 f 在 D 上全纯开拓.

证: ① F 在 $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ 上全纯, 设 $z \in D \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$.

则 $w = \bar{z} \in D \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{f(z)} = \overline{\frac{\partial}{\partial z} f(z)} = \overline{\frac{\partial}{\partial w} f(w)} = 0.$$

用第一章的定义去验证即可

② F 在 D 上连续, 即证 $F(z)$ 在 $D \cap \{\operatorname{Im} z = 0\}$ 上连续.

设 $z \in D \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$, $x_0 \in D \cap \{\operatorname{Im} z = 0\}$ 是实数.

$$\lim_{\bar{z} \rightarrow x_0} F(z) = \lim_{\bar{z} \rightarrow x_0} \overline{f(z)} = \lim_{\substack{w \rightarrow x_0 \\ w \in D^+}} \overline{f(w)} = \overline{f(x_0)} = F(x_0)$$

定理: 设 ① Ω 与 Ω' 关于圆 $|z|=r$ 对称

② $f(z)$ 在 Ω 内全纯, 在 $\Omega \cup S$ 上连续

③ $f(S)$ 为一段圆弧 Γ

④ Γ 的圆心 $b \in \text{int} f(\Omega)$

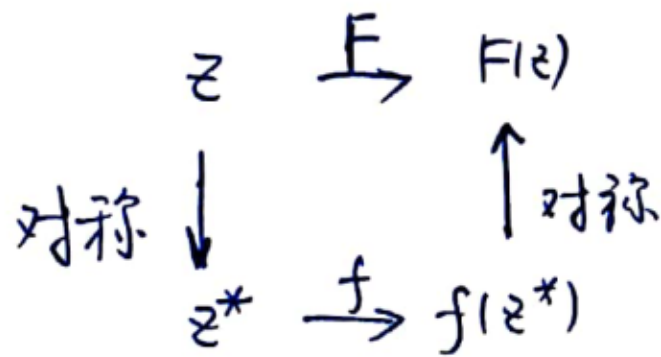
则 $f(z)$ 可全纯开拓到 $\Omega \cup S \cup \Omega'$.



回忆对称点: 点 z 关于 $|z-a|=R$ 的对称点为

$$z^* = a + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}$$

证: ① 设 $z \in \Omega'$, 则其对称点 $z^* \in \Omega$, 定义 $F(z)$ 的值为 z^* 的像点的对称点.



$$F(z) = f(z^*) \text{ 的对称点}$$

$$= (f(z^*))^*$$

$$= b + \frac{R^2}{\overline{f(z^*) - b}}$$

$$= b + \frac{R^2}{\overline{f\left(a + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}\right) - b}}, \quad (z \in \Omega')$$

② 下证 (a) $F(z)$ 在 S 附近连续

(b) $F(z)$ 在 Ω' 内全纯.

证(a): 即证 若 $z' \in \Omega'$, $z_0 \in S$, 则 $\lim_{z' \rightarrow z_0} F(z') = F(z_0) = f(z_0)$.

$$\text{由于 } z' \rightarrow z_0, \text{ 故 } z'^* = a + \frac{r^2}{\bar{z}' - \bar{a}} \rightarrow a + \frac{r^2}{\bar{z}_0 - \bar{a}} = z_0 \in S$$

$$F(z') \rightarrow b + \frac{R^2}{\overline{f(z_0)} - \bar{b}} = \cancel{f(z_0)} = F(z_0) \in \Gamma$$

⑥ 若 $z \in \Omega'$, 则 $z^* \in \Omega$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z) &= R^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\overline{f(z^*) - b}} \right) \\ &= R^2 \left(-\frac{1}{(\bar{f} - \bar{b})^2} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{f(z^*)} \\ &= -\frac{R^2}{(\bar{f} - \bar{b})^2} \overline{\frac{\partial}{\partial z} f(z^*)}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z^*) = f'(z^*) \cdot \frac{\partial}{\partial z} z^* = f'(z^*) \cdot 0 = 0.$$

$$\text{这是因为 } \frac{\partial}{\partial z} z^* = \frac{\partial}{\partial z} \left(a + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} \right) = 0.$$

故 F 在 Ω' 内全纯.

四种 Schwarz 原理:

① 直线 \rightarrow 直线

② 圆 \rightarrow 圆

③ 直线 \rightarrow 圆

④ 圆 \rightarrow 直线.

幂级数全纯开拓

设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, 收敛半径为 R , 则 f 在 $D = \{ |z| < R \}$ 上全纯.

定义: ① 正则点: 若 $\xi_0 \in \partial D$, 存在 ξ_0 的邻域 $B(\xi_0, \delta)$ 及其上的全纯函数 $g(z)$, 使得 $f(z) = g(z), \forall z \in D \cap B(\xi_0, \delta)$.

② 奇异点: 若 $\xi_0 \in \partial D$, ξ_0 不是 f 的正则点, 则称 ξ_0 为奇异点.

③ 若 f 在 D_1 中全纯, g 在 D_2 中全纯, 且 $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$,

$g|_{D_1 \cap D_2} = f|_{D_1 \cap D_2}$, 则记 $(f, D_1) \sim (g, D_2)$.

定理: 在单级数的收敛圆周上至少有一个奇点,

证明: 若 $C_R: |z|=R$ 每点都是正则点, 则存在有限个点 $z_i \in C_R$

使
$$C_R \subset \bigcup_{k=1}^m B(z_k, \delta_k)$$

与单值函数 $f_i(z)$, 使得

$$(f_i, D) \sim (f_i, B(z_i, \delta_i)), \quad D_i = B(z_i, \delta_i).$$

若 $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, 由于 $D_i \cap D_j \cap D$ 有公共部分, 则

$$(f_i, D_i) \sim (f_j, D_j)$$

定义:
$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \forall z \in D \\ f_k(z), & \forall z \in D_k. \end{cases}$$

则 $g(z)$ 是 $\Omega = D \cup D_1 \cup D_2 \cdots \cup D_m$ 上的单值函数.

由于 $\bar{D} = \{ |z| \leq R \} \subset \Omega$, Ω 开集.

则 $g(z)$ 是 $\Omega = D \cup D_1 \cup D_2 \cdots \cup D_m$ 上的全纯函数.

由于 $\bar{D} = \{ |z| \leq R \} \subset \Omega$, Ω 开集.

故存在 $\varepsilon > 0$, $\{ |z| < R + \varepsilon \} \subset \Omega$.

故 $g(z)$ 在 $|z| < R + \varepsilon$ 可展开成幂级数, 与 R 是收敛半径矛盾.

问题: 如何求幂级数在 $|z|=R$ 上奇异点?

① 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, 则 z_0 是奇异点.

② 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \neq \infty$, 如何判断?

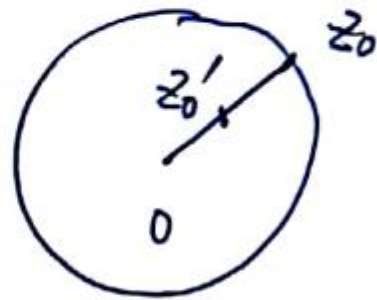
将 $f(z) = \sum a_n z^n$ 在 z_0' 处展开,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0')}{n!} (z - z_0')^n$$

则收敛半径 $\rho \geq R - |z_0'|$.

若 $\rho > R - |z_0'|$, 则 $f(z)$ 在 z_0 处可全纯开拓.

若 $\rho = R - |z_0'|$, 则 z_0 是 $f(z)$ 的奇异点.



原因: 若 z_0 是 $f(z) = \sum a_n z^n$ 的正则点, 则存在 $B(z_0, \delta)$,
及函数 $g(z)$, 使

$$\text{在 } (f(z), B(0, R)) \sim (g(z), B(z_0, \delta)).$$

$$\text{对于 } \left(\sum a_n z^n \Big|_{B(z_0', \rho)} = \sum a_n' (z - z_0')^n \Big|_{B(z_0', \rho)}. \quad a_n' = \frac{f^{(n)}(z_0')}{n!} \right. \\ \left. \rho = R - |z_0'| \right.$$

$$\text{故 } \left(\sum a_n' (z - z_0')^n, B(z_0', \rho) \right) \sim (g(z), B(z_0, \delta)). \quad (*)$$

另一方面, $\sum a_n' (z - z_0')^n$ 在 $|z - z_0'| = \rho$ 上至少有一个奇点, 而

$\partial B(z_0', \rho) \setminus \{z_0'\}$ 上任何点都是正则点, 故 z_0 是 $\sum a_n' (z - z_0')^n$ 的奇点,

这与(*)矛盾.

③ $f(z)$ 与 $f'(z)$ 在 $|z|=R$ 上有相同的正则点与奇异点.

④ $f(z)$ 在 $|z|=R$ 上收敛/发散与正则/奇异无必然关系.

例: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, 在 $z=1$ 处发散, 但 $z=-1$ 是正则点.

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ 在 $z=1$ 处收敛, 但 $z=1$ 是正则点.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $z=1$ 处发散, $z=1$ 是奇异点.

$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$, 在 $z=1$ 处收敛, 且 $z=1$ 是奇异点.

例: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ 在 $|z|=1$ 上每点都是奇异点.

证: ① $z=1$ 是奇异点, 只要证 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$.

$$f(x) = x^2 + x^4 + x^8 + \dots + x^{2^n} \rightarrow x^2 + x^4 + \dots + x^{2^n} \rightarrow n$$

n 任意, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$.

$$\begin{aligned} \text{② } f(z) &= z^2 + ((z^2)^2 + (z^2)^4 + (z^2)^8 + \dots) \\ &= z^2 + f(z^2) \end{aligned}$$

则 $z^2=1$ 的根是奇异点.

$$\text{③ } f(z) = z^4 + z^8 + f(z^4)$$

则 $z^4=1$ 的根是奇异点.

类似地, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^{2^n}=1$ 的根都是奇异点, 故 f 的奇异点集合在 $|z|=1$ 上稠密.

④ 若 $|z|=1$ 上有正则点, 设为 z_0 , 则存在 δ , $\partial B(0,1) \cap B(z_0, \delta)$ 中的点都是正则点, 与奇异点稠密矛盾.

例: 设 $f(z) = \sum a_n z^n$ 的收敛半径为 R , $0 < R < \infty$. 若 $a_n \geq 0$, 则 $z=R$ 是奇点.

证: ① 若 $z=R$ 不是奇点, 则 f 在 $\frac{R}{2}$ 处展开的收敛半径 $\rho > \frac{R}{2}$

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(\frac{R}{2})}{n!} (z - \frac{R}{2})^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(\frac{R}{2})|}{n!}} = \frac{1}{\rho} < \frac{2}{R}$$

$$f^{(n)}(\frac{R}{2}) = \sum_{m \geq n} m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1) a_m \cdot (\frac{R}{2})^{m-n}$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots$$

$$\text{故 } f^{(n)}(\frac{R}{2}) \geq 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \left| f^{(n)}\left(\frac{1}{2}Re^{i\theta}\right) \right| = \left| \sum_{m \geq n} m(m-1)\cdots(m-n+1) a_m \cdot \left(\frac{1}{2}e^{i\theta}R\right)^{m-n} \right|$$

$$\leq f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right).$$

故 f 在 $\frac{1}{2}e^{i\theta}R$ 处展成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}Re^{i\theta}\right)}{n!} \left(z - \frac{1}{2}e^{i\theta}R\right)^n$$

的收敛半径.

$$\rho' = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}\left(\frac{R}{2}e^{i\theta}\right)|}{n!}}} \geq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}R\right)}{n!}}} = \rho > \frac{R}{2}.$$

故 $\partial B(0, R)$ 上任何点都是正则点, 矛盾.

例: 设 $f(z)$ 在 Ω 上全纯, $\Omega = \{ |z| < 1 \}$, $|z_0| = 1$. 设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点. 求证: 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是 $f(z)$ 在 $\{ |z| < 1 \}$ 的展式, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

证: ① z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 故 $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, $g(z_0) \neq 0$, g 在 Ω 上全纯.

将 $g(z)$ 在 z_0 处展式成幂级数, 故

$$f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(z-z_0)^k} + h(z), \quad A_m \neq 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

且 $h(z)$ 在 Ω 上全纯. 设 $h(z)$ 在 $z=0$ 处展式

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \forall z \in D, \quad D = \{ |z| < 1 \}.$$

② 求 $\frac{1}{(z-z_0)^k}$ 在 $z=0$ 处展式中 z^n 的系数 C_k

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{-1}{z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha}$$

两边求 $k-1$ 次导数:

$$\begin{aligned} (-1)(-2)\cdots(-k+1) \frac{1}{(z-z_0)^k} &= -\frac{1}{z_0} \sum \underbrace{\frac{\alpha}{z_0} \cdot \frac{\alpha-1}{z_0} \cdots \frac{\alpha-(k-2)}{z_0}}_{k-1 \uparrow} \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha-(k-1)} \\ &= -\frac{1}{z_0} \sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-2))}{z_0^{k-1}} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha-k+1} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\alpha-k+1}_{=n}, \quad \alpha = n+k-1.$$

故 z^n 的系数为 C_k :

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{(-1)(-2)\cdots(-k+1)} \cdot \left(-\frac{1}{z_0}\right) \cdot (n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+k-1-k+2) \cdot \frac{1}{z_0^{n+k-1}} \\ &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \cdot \frac{(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)}{z_0^{n+k}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad a_n = \sum_{k=1}^m A_k C_k + b_n$$

$$= b_n + \sum_{k=1}^m A_k \cdot (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)}{(k-1)! z_0^{n+k}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + \sum_{k=1}^m A_k \cdot (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)}{(k-1)! z_0^{n+k}}}{b_{n+1} + \sum_{k=1}^m A_k \cdot (-1)^k \cdot \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)}{(k-1)! z_0^{n+k+1}}} \quad (*)$$

设 $m=1$.

$$(*) \text{式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - A_1 \frac{1}{z_0^{n+1}}}{b_n - A_1 \frac{1}{z_0^{n+2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n z_0^n - \frac{A_1}{z_0}}{b_n z_0^n - \frac{A_1}{z_0^2}}$$

分母是 b_{n+1}

由于 $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 在 z_0 处收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n z_0^n = 0$.

故 $(*) \text{式} = z_0$.

黎曼映照

问题: 当开集 Ω 满足什么条件时, 存在共形 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{ |z| < 1 \}$?

例: 若 $\Omega = \mathbb{C}$, 则不存在共形 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$.

定理 (Hurwitz)

设 ① $f_n(z)$ 在区域 D 中全纯, 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$, $f(z)$ 不恒为 0.

② γ 闭, 不经过 $f(z)$ 的零点.

则存在 N , 当 $n \geq N$ 时, f_n 与 f 在 γ 内部零点个数相同.

定理 (Hurwitz)

设① $f_n(z)$ 在区域 D 中全纯, 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$, $f(z)$ 不恒为 0.

② γ 闭, 不经过 $f(z)$ 的零点.

则存在 N , 当 $n \geq N$ 时, f_n 与 f 在 γ 内部零点个数相同.

证: 由② $\delta := \min_{\gamma} |f(z)| > 0$.

当 n 充分大时 $\max_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| < \delta$.

故 $\forall z \in \gamma$, 有 $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$

由 Rouché 定理知 f_n 与 f 在 γ 内部零点个数相同.

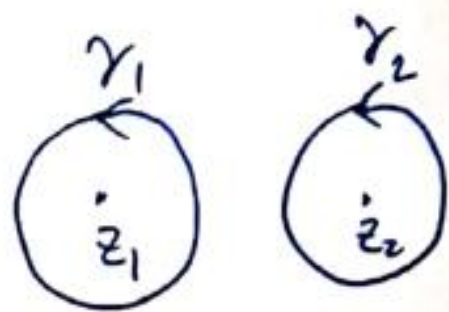
定理: 若 ① f_n 在区域 D 中全纯单叶.

② f_n 内闭一致收敛到 $f(z)$, $f(z)$ 非常数.

则 $f(z)$ 在 D 中全纯单叶.

证: $f(z)$ 全纯显然. 下证 $f(z)$ 单叶.

若 $w_0 = f(z_1) = f(z_2)$, 则当 n 大时, 在 γ_1 与 γ_2 内部



$f_n(z) - w_0$ 与 $f_0(z) - w_0$ 的零点个数相同, 即存在

z_1' 在 γ_1 内部, z_2' 在 γ_2 内部, 使

$$f_n(z_1') = w_0, \quad f_n(z_2') = w_0$$

与 f_n 单叶矛盾.

问题: 全纯函数“有界” \Rightarrow “子列收敛”? (Montel定理)

定义: 设 $F = \{f_n\}$ 为 D 上-簇函数列.

① F 称为内闭一致有界, 若对任何紧 $K \subset D$, $\exists M = M(K) > 0$,

使 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in K$, 有 $|f_n(z)| \leq M$.

② F 称为内闭等度连续, 若对任何紧 $K \subset D$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$

使当 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时, 有 $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon$.

Arzela-Ascoli: 设 $K \subset \mathbb{C}$ 是紧集, 若 $\{f_n\}$ 在 K 上一致有界, 且等度连续, 则 $\{f_n\}$ 在 K 上有子列一致收敛 (连续函数的闭包).

Montel定理: 设 $\{f_n\}$ 在区域 D 中全纯, 且在 D 中内闭一致有界, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 中内闭一致收敛.

证明: ① 设 $K \subset D$ 为 D 中紧集, 则 $\{f_n\}$ 在 K 中一致收敛.

下证 $\{f_n\}$ 在 K 上均匀连续.

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f_n(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z_1} - \frac{1}{\xi - z_2} \right) d\xi \right|$$

$$= \left| \frac{z_1 - z_2}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)} d\xi \right|$$

$$\leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \cdot \frac{M}{r \cdot r} \cdot C \cdot r \leq \frac{C}{r} M |z_1 - z_2|. \quad (*)$$

设 $r > 0$ 满足 $B(z, 3r) \subset \Omega, \forall z \in K$.

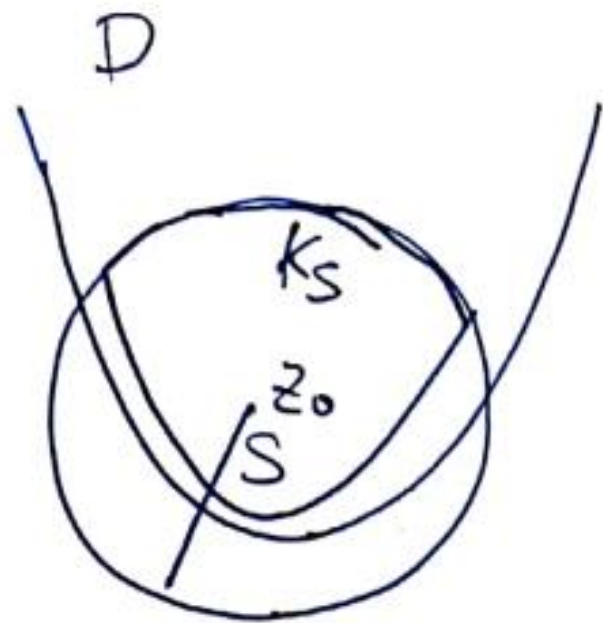
故由 (*) 知 f 在 K 上均匀连续.

(2) 下证: 存在一列紧集 $\{K_s\}_{s=1}^{\infty}$ 使得 $K_s \subseteq K_{s+1}$ 且 $D = \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s$.

证: 固定 $z_0 \in K$, 令

$$K_s = \left\{ z \in D \cap \overline{B(z_0, s)} \mid d(z, \partial D) \geq \frac{1}{s} \right\}.$$

则 $K_s \subset K_{s+1} \subset \dots$ 且 D 中任何紧集都包含在某一个 K_s 上.



③ 定理证明:

$\{f_n\}$ 在 K_1 上一致收敛 \Rightarrow 存在子列 $\{f_{n,1}(z)\}$ 在 K_1 上一致收敛.

$\{f_{n,1}(z)\}$ 在 K_2 上一致收敛 \Rightarrow 存在子列 $\{f_{n,2}(z)\}$ 在 K_2 上一致收敛.

$\{f_{n,2}(z)\}$ 在 K_3 上一致收敛 \Rightarrow 存在子列 $\{f_{n,3}(z)\}$ 在 K_3 上一致收敛.

...

根据构造: ③.1 $\{f_{n,s}\}$ 在 K_s 上一致收敛.

③.2 $\{f_{n,s+1}\}$ 是 $\{f_{n,s}\}$ 的子列. 即 $\{f_{n,s+1}\} \subseteq \{f_{n,s}\}, \forall s$.

③.3 $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 去掉有限项 $\{f_{1,1}, f_{2,2}, \dots, f_{s-1,s-1}\}$ 后是 $\{f_{n,s}\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列.

故 $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 在任何 K_s 上一致收敛, 即在 D 上内闭一致收敛.

黎曼映照定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$, 且单连通, 则 Ω 与 \mathbb{D} 全纯同构, 即对任何 $z_0 \in \Omega$,

存在唯一的共形映射, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, 使得

$$F(z_0) = 0, \quad F'(z_0) > 0$$

推论: 若 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$, Ω_1, Ω_2 单连通, 则 Ω_1, Ω_2 共形等价。

定理证明思路:

① 考虑集合 $F = \{ \text{全纯 } f: \Omega \rightarrow \mathbb{D} \mid f(z_0) = 0, f \text{ 单叶} \}$

则 F 非空, 一必有界。

② 存在 F 中元素 \tilde{f} , 使 $|\tilde{f}'(z_0)|$ 取到最大, 则 \tilde{f} 是 $\Omega \rightarrow \mathbb{D}$ 的全纯同构。

定理证明:

① 要证: 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 单连通, 则存在 $G \subseteq \mathbb{D}$, $0 \in G$, 使得 G 与 Ω 全纯同构, 且将 $z \rightarrow 0$.

证明: 设 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \Omega$, 令 $g(z) = \log(z - \alpha)$, 则 g 在 Ω 上有单值分支.

①.1 g 在 Ω 上单叶: 若 $z_1, z_2 \in \Omega$, $g(z_1) = g(z_2)$, 则

$$e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)} \Rightarrow z_1 - \alpha = z_2 - \alpha$$

$$\text{故 } z_1 = z_2.$$

①.2 令 $w_0 = g(z_0)$, 则 $w_0 + 2\pi i \notin g(\Omega)$.

令 $\tilde{w}_0 = w_0 + 2\pi i$, 若 $\tilde{w}_0 \in g(\Omega)$, 则存在 $\tilde{z}_0 \in \Omega$, 使 $g(\tilde{z}_0) = \tilde{w}_0$.

从而 $g(\tilde{z}_0) = w_0 + 2\pi i = g(z_0) + 2\pi i$,

$$e^{g(\tilde{z}_0)} = e^{g(z_0)} \Rightarrow \tilde{z}_0 = z_0 \text{ 矛盾.}$$

①.3 存在 $\delta > 0$, $B(\tilde{w}_0, \delta)$ 不在 g 的值域中, 即 $B(\tilde{w}_0, \delta) \cap g(\Omega) = \emptyset$.

否则存在 $z_n \in \Omega$, $g(z_n) \rightarrow \tilde{w}_0$.

$$z_n - \alpha = g(g(z_n)) \rightarrow e^{\tilde{w}_0} = e^{w_0} = z_0 - \alpha$$

故 $z_n \rightarrow z_0$, 从而 $g(z_n) \rightarrow g(z_0) = w_0 \neq \tilde{w}_0$ 矛盾.

①.4 令 $f_1(z) = \frac{1}{g(z) - \tilde{w}_0}$, 因为 $|g(z) - \tilde{w}_0| \geq \delta$, ($\forall z \in \Omega$)

故 $f_1(z)$ 在 Ω 上有界, 定义 $\hat{f}(z) = f_1(z) - f_1(z_0)$, 则 $\hat{f}(z_0) = 0$.

且 $|\hat{f}(z)| \leq C$, $\forall z \in \Omega$.

令 $h(z) = \frac{1}{2C} \hat{f}(z)$, 则 $h(z_0) = 0$, $|h(z)| < 1$, $\forall z \in \Omega$.

故 $h(z)$ 满足要求.

② 由①, 只要考虑 $0 \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{D}$ 中情形. 定义:

$$\mathcal{F} = \{ \text{单叶全纯 } f: \Omega \rightarrow \mathbb{D} \mid f(0) = 0 \}$$

则 \mathcal{F} 非空 (由① 恒等映射)

\mathcal{F} -族有界.

②.1 $\forall f \in \mathcal{F}$, $|f'(0)|$ 有一致上界.

证: 由于 $0 \in \Omega$, 存在 $\delta > 0$, 使 $B(0, \delta) \subset \Omega$.

由 Cauchy 不等式, $|f'(0)| \leq \frac{1}{\delta}$, $\forall f \in \mathcal{F}$

②.2 设 $\lambda = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z)|$, 则存在 $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n'(z)| = \lambda$.

由 Montel 定理, $\{f_n\}$ 有子列内闭一致收敛到 f_∞ , 全纯.

• f_∞ 不为常数, 因为 $|f_\infty'(z)| = \lambda \neq 0$, $f_\infty(z_0) = 0$.

• $|f_\infty(z)| < 1, \forall z \in \Omega$. 这是因为 $|f_n(z)| \leq 1$.

由最大模原理, 若 $\exists z_1 \in \Omega, |f_\infty(z_1)| = 1$, 则 f_∞ 为常数.

• $f_\infty(z)$ 为单叶函数, 这是因为 f_n 单叶, 内闭一致收敛到 f_∞ .

故 $f_\infty(z)$ 为 $G \rightarrow f_\infty(G)$ 的全纯同构, 且 $f_\infty \in \mathcal{F}$.

②.3 下证 $f_\infty(G) = \mathbb{D}$.

(想法: 若 $f_\infty(G) \neq \mathbb{D}$, 要构造 $F \in \mathcal{F}$, 使 $|F'(z)| > |f_\infty'(z)|$ 矛盾)

证: 若 $f_\infty(G) \neq \mathbb{D}$, 则存在 $\alpha \in \mathbb{D}$, $\alpha \notin f_\infty(G)$.

$$\text{令 } \gamma_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$\alpha \rightarrow 0$

则 $\gamma_\alpha \circ f_\infty: G \rightarrow \gamma_\alpha \circ f_\infty(G)$ 是同构, 且满足

① $\gamma_\alpha \circ f_\infty(G)$ 是单连通的

② $\gamma_\alpha \circ f_\infty(G)$ 不包含 0.

定义: $R(z) = \sqrt{\gamma_\alpha \circ f_\infty(z)}$, $\forall z \in G$.

由于①, ② 故 $R(z)$ 在 G 上有单值分支, 且在 G 上单叶.

单叶原因: 若 $R(z_1) = R(z_2)$, 则 $f_\infty(z_1) = f_\infty(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.

$$\text{令 } \beta = \sqrt{\alpha}, \quad \gamma_{\beta}(z) = \frac{\beta - z}{1 - \beta z}, \quad \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$\beta \rightarrow 0.$$

$$\text{证: } \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{R} & \mathbb{D} & \xrightarrow{\gamma_{\beta}} & \mathbb{D} \\ & & 0 & \rightarrow & \beta & \rightarrow & 0 \end{array}$$

$$\text{令 } F(z) = \gamma_{\beta} \circ R(z): G \rightarrow \mathbb{D} \text{ 单叶, 全纯.}$$

$$= \gamma_{\beta} \circ S \circ \gamma_{\alpha} \circ f_{\alpha}(z).$$

其中 $S(w) = \bar{w}$,

$$\text{则 } f_{\alpha}(z) = \underbrace{\gamma_{\alpha}^{-1} \circ S^{-1} \circ \gamma_{\beta}^{-1}}_T \circ F(z) = T \circ F(z)$$

$$\text{故 } f_{\infty}(z) = \underbrace{\gamma_{\alpha}^{-1} \circ S^{-1} \circ \gamma_{\beta}^{-1}}_T \circ F(z) = T \circ F(z)$$

注意, $S^{-1}(z) = z^2: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 是合流函数, 故 T 合流.

$T: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 合流, 在 \mathbb{D} 上不是单叶函数, 且 $T(0) = 0$.

由 Schwarz 定理, $|T'(0)| < 1$. 从而

$$\lambda = |f'_{\infty}(0)| = |T'(0)| \cdot |F'(0)| < |F'(0)|.$$

与 λ 的定义矛盾.

③ 设 $G' \subset \mathbb{C}$ 为一般单连通, $K: G' \rightarrow G \subset \mathbb{D}$ 为 \mathbb{D} 中所构造的

共形映射, 则

$$G' \xrightarrow{K} G \xrightarrow{f_\infty} \mathbb{D}$$

则 $f_\infty \circ K: G' \rightarrow \mathbb{D}$ 为 G' 到 \mathbb{D} 的共形映射, 且 $f_\infty \circ K(z_0) = 0$.

令 $F = f_\infty \circ K$. $F'(z_0) = r_0 e^{i\theta_0}$, 则令 $f(z) = e^{-i\theta_0} F(z)$,

则 $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$. 满足定理条件.

④ 唯一性: 若 $f: G \rightarrow \mathbb{D}$ 是全纯同构, 且 $f'(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$,
则 f 是唯一.

证: 若 $f_1, f_2: G \rightarrow \mathbb{D}$ 都满足上述条件.

$$\text{令 } F(w) = f_2 \circ f_1^{-1}(w): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$
$$0 \rightarrow 0$$

则 $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 全纯, 且 $F(0) = 0$, 故 $|F(w)| \leq |w|, |F'(0)| \leq 1$.

又因为 $F^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 故 $|((F^{-1})'(0))| \leq 1$.

从而 $|F'(0)| = 1, F(w) = e^{i\theta} w. (w \in \mathbb{D}).$

从而 $f_2(z) = e^{i\theta} f_1(z).$

由初始条件知 $\theta = 0$, 从而 $f_1(z) = f_2(z), (\forall z \in \mathbb{D}).$

说明: 若 U, V 同形, 且 U 单连通, 则 V 单连通.

若 U 单连通, 且 f 在 U 上全纯, 则 $f(U)$ 不一定单连通.

例: $H = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$, $f(z) = e^{2\pi i z}$

$$\text{则 } f(z) = e^{2\pi i(x+iy)} = e^{-2\pi y} e^{2\pi i x}$$

$$\text{从而 } \begin{cases} r = e^{-2\pi y}, & y > 0 \\ \theta = \text{arg} z = 2\pi x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

即 $f(H) = \{ (r, \theta) \mid \theta \in \mathbb{R}, 0 < r < 1 \}$ 不是单连通的.

边界对应.

定理: 设 $F: D \rightarrow P$ (P 为一闭多边形) 是共形映射, 则

① F 可连续延拓到边界, 成为 $\bar{D} \rightarrow \bar{P}$ 的双射

② F 为 $\partial D \rightarrow \partial P$ 的双射.

证: ① 若 $f: U \rightarrow f(U)$ 为共形, 则 $\text{Area}(f(U)) = \iint_U |f'(z)|^2 dx dy$

证明: 令 $f: (x, y) \rightarrow (u, v)$

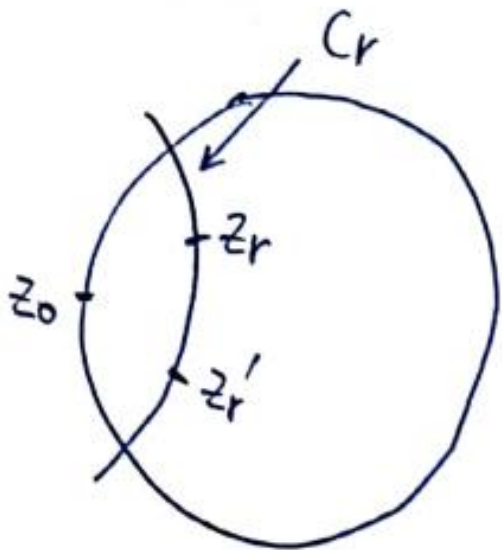
则面积
$$\text{Area}(f(U)) = \iint_{f(U)} du dv = \iint_U \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 &= \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right|^2 \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}$$

(2) 设 $\rho(r) = \sup_{z, w \in C_r} |f(z) - f(w)|$, 则存在 $r_n \rightarrow 0$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(r_n) = 0, \quad \text{其中 } C_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}, \quad z_0 \in \partial D$$



证: 否则, 存在 $\varepsilon_0 > 0, R > 0$, 使 $\rho(r) \geq \varepsilon_0 > 0$

$$\begin{aligned} & |f(z_r) - f(z_r')| \\ &= \left| \int_{\gamma} f'(s) ds \right|, \quad s = z_0 + re^{i\theta} \\ &\leq \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z_0 + re^{i\theta})| r d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \rho(r) &\leq \left| \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)| r d\theta \right| \\ &\leq \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)|^2 r d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\rho(r)^2}{r} \leq 2\pi \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)|^2 r d\theta$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 \int_0^R \frac{dr}{r} &\leq \int_0^R \frac{\rho(r)^2}{r} dr \leq 2\pi \int_0^R \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)|^2 r d\theta dr \\ &= 2\pi \iint_D |f'(z)|^2 dx dy \\ &= 2\pi \text{Area}(f(D)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但左边} &= \varepsilon_0^2 (\log R - \log 0) \\ &= +\infty \text{ 矛盾.} \end{aligned}$$

③ 设 $z_0 \in \partial D$, 则 $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} f(z)$ 存在.

证: ^{③1} 否则, 取 $z_i \rightarrow z_0$, $z_i' \rightarrow z_0$, 使 $f(z_i) \rightarrow \xi$, $f(z_i') \rightarrow \xi'$, ($\xi \neq \xi'$)

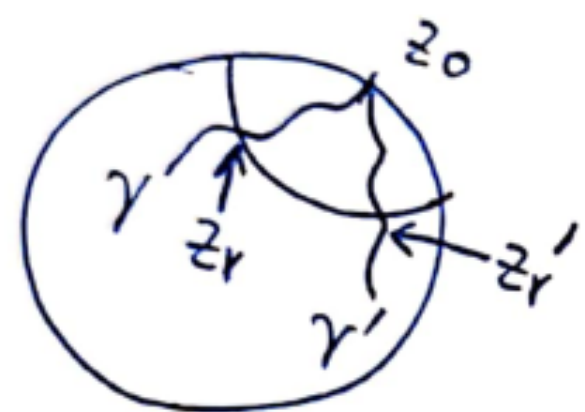
则 $\xi, \xi' \in \partial P$.

原因: 若 ξ 在 P 内部, 由 $f(z_i) \rightarrow \xi \in P$, f 共形, 故

$$z_i = f^{-1}(f(z_i)) \rightarrow f^{-1}(\xi) \in D$$

即 $z_i \rightarrow f^{-1}(\xi) \in D$, 与 $z_0 \in \partial D$ 矛盾.

(3.2) 令 $d = |\xi - \xi'|$. 取 δ 小, 使 $B(\xi, \delta) \cap B(\xi', \delta) = \emptyset$.

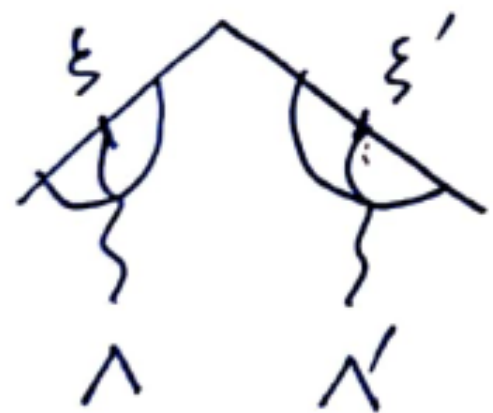


取连续曲线 Λ, Λ' , 使 $f(z_i) \in \Lambda, f(z_i') \in \Lambda'$ (当 n 大时)

令 $\gamma = f^{-1}(\Lambda), \gamma' = f^{-1}(\Lambda')$

由于 $z_i \in \gamma, z_i \rightarrow z_0$

$z_i' \in \gamma', z_i' \rightarrow z_0$



对 δ 小, C_r 与 γ, γ' 都相交, 设交点为 z_r, z_r'

由②知 $|f(z_r) - f(z_r')| \rightarrow 0$.

但 $f(z_r) \in \Lambda, f(z_r') \in \Lambda', \Lambda$ 与 Λ' 不交, 矛盾.

④ $f: \bar{D} \rightarrow \bar{P}$ 连续.

证: 定义: $\forall z_0 \in \partial D, \quad f(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} f(z).$

只要证: 若 $z'_0 \in \partial D, \quad |z_0 - z'_0| < \delta, \quad \forall \epsilon$

$$|f(z'_0) - f(z_0)| < \epsilon.$$

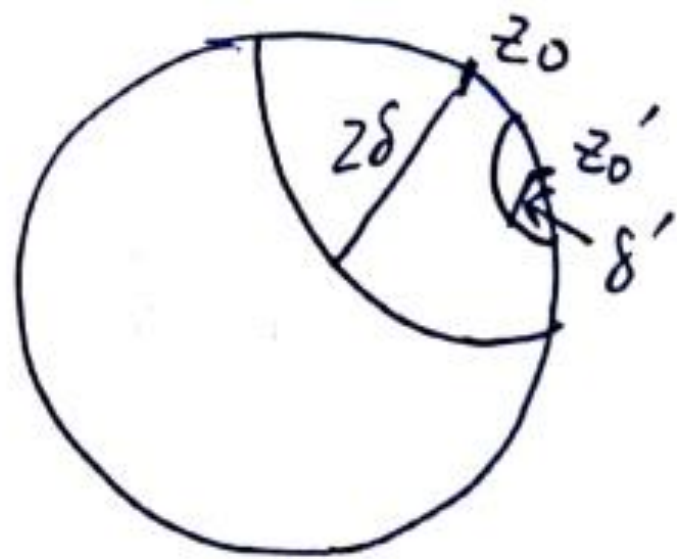
由定义, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D \cap B(z_0, \delta), |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$

若 $z_0' \in \partial D$, $|z_0' - z_0| < \delta$, 则存在 $\delta' > 0$, 使 $\forall z \in D \cap B(z_0', \delta')$

有 $|f(z) - f(z_0')| < \varepsilon$.

故取 $w \in (B(z_0', \delta') \cap D) \subset (B(z_0, 2\delta) \cap D)$ 有

$$\begin{aligned} |f(z_0') - f(z_0)| &\leq |f(z_0') - f(w)| + |f(w) - f(z_0)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$



⑤ 设 $f: D \rightarrow P$ 的反函数为 $g: P \rightarrow D$, 则 g 可延拓为 $\bar{P} \rightarrow \bar{D}$ 的连续函数.

下证: f 与 g 延拓后仍为反函数. 即证 $\forall z \in \bar{D}, g(f(z)) = z$.

原因: 设 $z_0 \in \bar{D}, z_k \rightarrow z_0, z_k \in D$.

$$g(f(z_k)) = z_k$$

令 $k \rightarrow \infty$, 由 g 与 f 的连续性知 $g(f(z_0)) = z_0$.

同理可证 $\forall w \in \bar{P}, f(g(w)) = w$.

说明: 上述定理可推广到 $f: D \rightarrow \Omega$ 情形, 其中 Ω 是单连通的,
且边界满足条件:

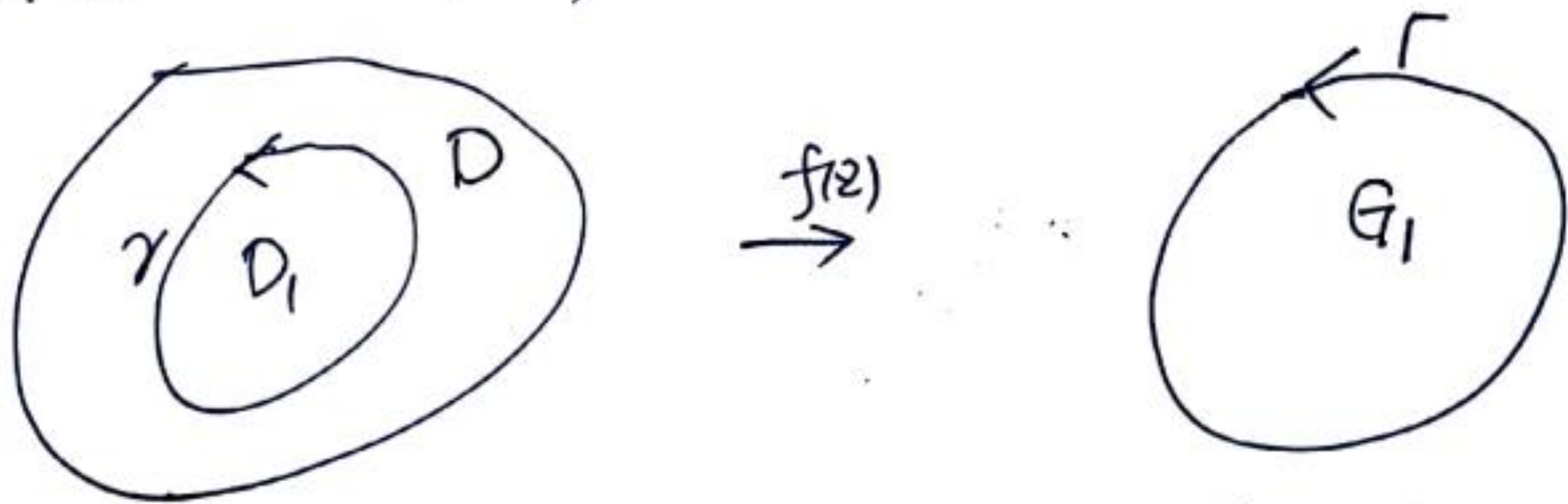
$\forall \alpha \in \partial\Omega$, 任何给定 $z_n \in \Omega, z_n \rightarrow \alpha$, 存在连续曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$,
使 $\gamma(b) = \alpha, \gamma(t) \in \Omega (t \neq b)$, 且 $\exists t_n \in [a, b]$, 使 $\gamma(t_n) = z_n$,
 $a < t_1 < t_2 < \dots < b, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$.

例: $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times \left(0, \frac{1}{2} \right] \right)$

单连通, 但不满足上述条件.

例: $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{x \mid 0 \leq x < 1\}$ 的边界点 $\{0 \leq x \leq 1\}$
不满足条件.

定理: 设简单闭 $\gamma \subset D$, γ 内部 $D_1 \subset D$. 若 $f(z)$ 在 D 上全纯,
且将 γ 双方单值映为简单闭 Γ , 则 $f(z)$ 在 D_1 内单叶, 且将
 D_1 映为 Γ 的内部 G_1 , 将 γ 的正定向映为 Γ 的正定向.



证明: 由辐角原理, $\forall w_0 \notin \Gamma$, $f(z) - w_0$ 的零点个数为

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg}(f(z) - w_0).$$

若 w_0 在 Γ 外, 则 $N=0$, 即 $f(z) = w_0$ 在 γ 内无解

若 w_0 在 Γ 内部, 则 $N = \pm 1 \Rightarrow N=1$. 故 f 将 γ 正定向映为 Γ 正定向.

故 $G_1 \subseteq f(D_1)$.

若 $w_0 \in \Gamma$, 若 $f(z) = w_0$ 在 γ 内部有根 $z_0 \in D_1$,

由于 f 是开映射, $f(z)$ 将 z_0 的邻域映为 w_0 的邻域 V .

但 V 有一部分在 Γ 外, 这与 Γ 外无像点矛盾.

故 $f(D_1) \subseteq G_1$.

综上 $f(D_1) = G_1$.

调和函数.

调和函数: $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$

平均值公式: 若 u 在 $B(z_0, R)$ 内调和, 则

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Jensen 公式:

定理: 设 ①: $\Omega = \overline{B(0, R)} = \{z \mid |z| \leq R\}$, f 在 Ω 中全纯, $f(0) \neq 0$.
 f 在 $\{ |z| = R \}$ 上无零点.

② f 在 $B(0, R)$ 内的零点为 z_1, \dots, z_N . (可重复)

则 $\log |f(0)| = \sum_{k=1}^N \log \frac{|z_k|}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta.$

证明: ① 若定理对 f_1, f_2 成立, 则对 $f_1 f_2$ 成立.

② 令 $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)\dots(z-z_N)}$, 则 g 在 $B(0, R)$ 内无零点, 且全纯.

由①, 只要证对 $g(z)$ 与 $z-z_i$ 成立即可.

③ $g(z)$ 在 $\overline{B(0, R)}$ 全纯, 且无零点, 故有

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(e^{i\theta} R)| d\theta \quad (*)$$

原因: $h(z) = \log g(z)$ 在 $\Omega' \supset B(0, R)$ 中全纯,

故 $\operatorname{Re} h(z) = \log |g(z)|$ 在 Ω' 中调和, 故 (*) 成立.

④ 固定 $w \in B(0, R)$, 则 $|f(z)| = z-w$ 满足.

$$\log |w| = \log \frac{|w|}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Re^{i\theta} - w| d\theta \quad (**)$$

证: $(**) \Leftrightarrow \log |w| = \log |w| - \log R + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - \frac{w}{R}| d\theta$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - \frac{w}{R}| d\theta = 0 \quad + \log R$$

故只要证对 $|a| < 1$ 时有

$$\int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - a| d\theta = 0, \quad (***)$$

$$\text{左边} = \int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{-i\theta}| d\theta$$

$$\stackrel{\theta \rightarrow -\theta}{=} \int_0^{-2\pi} \log |1 - a e^{i\theta}| d\theta$$

$$\stackrel{\theta \rightarrow \theta + 2\pi}{=} \int_{2\pi}^0 \log |1 - a e^{i\theta}| d\theta$$

故 $(***) \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{i\theta}| d\theta = 0.$

$$\text{证 (***)} \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \log |1 - ae^{i\theta}| d\theta = 0.$$

令 $F(z) = 1 - az$, 则 $F(z)$ 在 $\overline{B(0,1)}$ 上全纯, 且无零点, 故

$$\log |F(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(e^{i\theta})| d\theta$$

即 $0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - ae^{i\theta}| d\theta.$

证明 2: 设 $a \in \mathbb{D}$, 定义:

$$B_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

例 ① 当 $|z|=1$ 时, $|B_a(z)|=1$.

② $B_a(z)$ 在 \mathbb{D} 中有唯一 $n=1$ 阶零点 $z=a$.

$$\text{令 } g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^k B_{\frac{z_j}{R}}\left(\frac{z}{R}\right)}$$

例 $g(z)$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 中全纯, 且无零点.

当 $z=z_j$ 时, $B_{\frac{z_j}{R}}\left(\frac{z_j}{R}\right)=0$

当 $|z|=R$ 时, $|B_{\frac{z_j}{R}}\left(\frac{z}{R}\right)|=1$.

代入 $\log |g(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(Re^{i\theta})| d\theta$.

得 $\log \left| \frac{|f(z)|}{\prod_{j=1}^k \left(-\frac{z_j}{R}\right)} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta$.

定义: $n(r)$: 为函数 $f(z)$ 在 $B(0, r)$ 中的零点个数 (包含重数).

引理: 在上述定理条件下, 若 z_1, \dots, z_N 为 f 在 $B(0, R)$ 内的根, 则

$$\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^N \log \frac{R}{|z_k|}$$

推论: 在上述定理条件下, 有

$$\log |f(0)| = - \int_0^R n(r) \frac{dr}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

引理: 定义 $n_k(r) = \begin{cases} 1, & \text{若 } r > |z_k| \\ 0, & \text{若 } r \leq |z_k|. \end{cases}$

若 $B(0, r)$ 包含 z_k , 则 $n_k(r)$ 取值为 1. 若 $B(0, r)$ 不包含 z_k , 则 $n_k(r)$ 取值为 0. 故 $B(0, r)$ 中 f 的零点个数为 $\sum_{k=1}^N n_k(r) = n(r)$.

注意. $\int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} = \int_0^R n_k(r) \frac{dr}{r}$.

$$\sum_{k=1}^N \int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^N \int_0^R \gamma_k(r) \frac{dr}{r}$$

$$\sum_{k=1}^N \log \frac{R}{|z_k|} \stackrel{||}{=} \int_0^R \sum_{k=1}^N \gamma_k(r) \frac{dr}{r} = \int_0^R n(r) \frac{dr}{r}$$

$$- \sum_{k=1}^N \log \frac{|z_k|}{R}.$$

$$\text{故} \int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = - \log |f(0)| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta \geq 0.$$

定义: 设 f 是一个整函数, 若存在 $\rho, A, B > 0$, 使得

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

则称 f 的 m 增长次数 $\leq \rho$, 定义 $\rho_f = \inf \rho$.

例: e^{e^z} , $\rho_f = +\infty$

e^{z^m} , $\rho_f = m$.

定理: 设 f 为整函数, 增长次数 $\leq p$, 则

① $n(r) \leq Cr^p$, (当 r 大时)

② 若 f 的零点为 $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$, 所有 $z_k \neq 0$, 则 $\forall s > p$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < +\infty$$

证明: ① 可设 $f(0) \neq 0$, 否则令 0 为 f 的 N 阶零点, 令 $g(z) = \frac{f(z)}{z^N}$

则 $g(z)$ 为整函数, 且 $n_g(r) = n_f(r) - N$ 相差一常数的.

设 $f(0) \neq 0$, $\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|$

$$\text{令 } R=2r,$$

$$\int_r^{2r} n(x) \frac{dx}{x} \geq n(r) \int_r^{2r} \frac{dx}{x} = n(r) (\log(2r) - \log r) \\ = \log 2 \cdot n(r)$$

$$\int_r^{2r} n(x) \frac{dx}{x} \leq \int_0^{2r} n(x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - C.$$

对于 f 有 ρ 次型 $\leq \rho$, 故 $|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho}$.

$$\text{故 } \log 2 \cdot n(r) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |A e^{B r^\rho}| d\theta - C \\ \leq C \cdot r^\rho - C.$$

$$\Rightarrow n(r) \leq C \cdot r^\rho, \quad (r \text{ 大时})$$

$$\textcircled{2} \sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{2^j \leq |z_k| < 2^{j+1}} |z_k|^{-s} \right)$$

$$\ll \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} n(2^{j+1})$$

$$\ll c \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} \cdot 2^{(j+1)p}$$

$$\ll c \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (2^{ps})^j < +\infty$$

$$\frac{p}{2} < s.$$

定理: 设 f 是 $D = \{ |z| < 1 \}$ 中非常值有界全纯函数, 零点为 a_1, a_2, \dots (可重复), 则 $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|) < \infty$.

证明: 设 $f(0) \neq 0$, 取 $r < 1$ 接近于 1, 但 $|a_j| \neq r$, 在 $\overline{B(0, r)}$ 上用 Jensen 公式有

$$\log |f(0)| + \sum_{j=1}^{n(r)} \log \frac{r}{|a_j|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

令 $r \rightarrow 1^-$, 有:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log \frac{1}{|a_j|} \leq \log M - \log |f(0)|.$$

$\forall \alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{\alpha} &= -\log \alpha = -\log(1 - (1-\alpha)) \\ &= (1-\alpha) + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 + \frac{1}{3}(1-\alpha)^3 + \dots \\ &> 1-\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|) < +\infty.$$

说明: 若 f 在 $|z|=R$ 上有零点, 则 Jensen 公式仍成立.

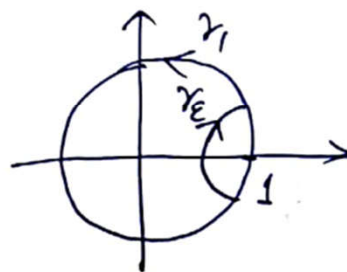
只要证: 若 $|a|=1$, 则 $\int_0^{2\pi} \log |1 - ae^{i\theta}| d\theta = 0$.

设 $a = e^{i\alpha}$, 则上式 $\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i(\theta+\alpha)}| d\theta = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0$.

$$\text{对于 } \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = \operatorname{Re} \left(\int_{\partial D} \log(1-z) \frac{dz}{iz} \right)$$

当 $\operatorname{Re} z < 1$ 时, $\frac{\log(1-z)}{iz}$ 全纯. 故



$$\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_\epsilon} \right) \frac{\log(1-z)}{iz} dz = 0.$$

$$\gamma_\epsilon: z = 1 + \epsilon e^{i\theta}, \quad \theta: \frac{3}{2}\pi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\log(1-z)}{iz} dz \right| \leq \left| \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\log(-\epsilon e^{i\theta})|}{i(1 + \epsilon e^{i\theta})} \cdot \epsilon i e^{i\theta} d\theta \right|$$

$$\leq C \cdot \epsilon (|\log \epsilon| + C) \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

$$\text{故 } \int_{|z|=1} \frac{\log(1-z)}{iz} dz = 0.$$

说明: 整函数 f_f 可以不是整函数.

$$\cos(z^{\frac{1}{2}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}$$

$$|\cos(z^{\frac{1}{2}})| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(2n)!} \leq e^{|z|^{\frac{1}{2}}}$$

故 $f_f \leq \frac{1}{2}$ 不是整函数.

例: $f(z) = \sin \pi z, \quad f(z) = \frac{1}{2i} (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})$

$$|f(z)| \leq e^{\pi|z|} \quad \rho_f = 1.$$

$$z = ix, \quad f(ix) = \frac{1}{2i} (e^{-\pi x} - e^{\pi x}) \quad \text{知 } \rho_f = 1.$$

$f(z)$ 的零点为 $z_n = n$, 故 $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^s} < \infty$, 当 $s > 1$ 时.

$$\sum_{n \neq 0}$$

无穷乘积.

定义: 设复数 $\{u_n\}$, 若 $P_n = \prod_{j=1}^n (1+u_j)$ 有极限, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \in \mathbb{C}$.

例称 $\prod_{j=1}^{\infty} (1+u_j)$ 收敛.

例: 若 $u_i = -1$, 则任何 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ 都收敛.

命题: 若 $\sum |a_n| < \infty$, 则 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 收敛, 且收敛到 0 当且仅当
某 $a_i = 0$.

证明: 若 $\sum |a_n| < +\infty$, 则当 n 大时 $|a_n| < \frac{1}{2}$.

$$\prod_{n=1}^N (1+a_n) = \prod_{n=1}^N e^{\log(1+a_n)} = e^{B_N}$$

其中 $B_N = \sum_{n=1}^N b_n$, $b_n = \log(1+a_n)$.

由于 $|\log(1+z)| \leq 2|z|$, 若 $|z| < \frac{1}{2}$

故 $|b_n| \leq 2|a_n|$. 由于 $\sum |a_n|$ 收敛, 故 $\sum b_n$ 收敛.

故 $\lim_{N \rightarrow \infty} B_N = B \in \mathbb{C}$. 从而 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) = e^B$.

命题: 设 $\{F_n\}$ 是 Ω 上一列全纯函数, 若存在 $C_n > 0$ 使得

$$\sum C_n < \infty, \quad |F_n| \leq C_n, \quad (\forall z \in \Omega)$$

则 ① $\prod_{h=1}^{\infty} F_n(z)$ 在 Ω 上一致收敛到全纯函数 $F(z)$

② $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z) \neq 0, \forall z$, 则
$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}$$

证明: ① $f_n(z) = 1 + a_n(z)$, $|a_n(z)| \leq C_n$,

由 $\sum C_n < +\infty$ 知 $\prod (1 + a_n(z))$ 一致收敛.

由一致收敛性知 极限 $F(z)$ 为全纯函数.

② 设 K 是 Ω 中紧集, 令

$$G_N(z) = \prod_{n=1}^N f_n(z)$$

由于 $G_N(z)$ 在 K 上一致收敛, 且 $G_N'(z)$ 在 K 上一致收敛到 $F'(z)$.

由于 $f_n(z) \neq 0, (\forall n)$, 故 $F(z) \neq 0$. 故.

$$\frac{G_N'(z)}{G_N(z)} \rightarrow \frac{F'}{F} \text{ on } K.$$

$$\text{左式} = \sum_{n=1}^N \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

例:
$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

证: ① 设 $F(z) = \pi \cot \pi z$, 则 $F(z)$ 满足如下:

(a) $F(z+1) = F(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{Z}.$

(b) $F(z) = \frac{1}{z} + f_0(z), \quad f_0(z)$ 在 $z=0$ 处全纯.

(c) $F(z)$ 在任意的 $z \in \mathbb{Z}$ 上是单极点, 且无其它奇点.

$$\textcircled{2} \text{ 设 } G(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

$$\text{则 } G(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n}$$

将 $z \rightarrow z+1$, 则

$$\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+1+n} = \frac{1}{z+1+N} + \left(\frac{1}{z+N} + \dots + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} \right. \\ \left. + \frac{1}{z-1} + \dots + \frac{1}{(z+1)-(N+1)} + \frac{1}{z+1-N} \right)$$

$$\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n} = \left(\frac{1}{z+N} + \frac{1}{z+N-1} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{z-(N+1)} \right) + \frac{1}{z-N}$$

$$\text{故 } \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+1+n} = \frac{1}{z+1+N} - \frac{1}{z-N} + \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n}$$

令 $N \rightarrow +\infty$, 故 $G(z+1) = G(z)$. 故 $G(z)$ 满足 (a).

$$\text{故 } \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n} = \frac{1}{z+N} - \frac{1}{z-N} + \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n}$$

令 $N \rightarrow +\infty$, 故 $G(z+1) = G(z)$. 故 $G(z)$ 满足 (a).

$$\text{当 } |z| \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } |z^2 - n^2| \geq n^2 - \frac{1}{4}.$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{z^2 - n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$$

故绝对收敛, 且收敛.

和项为全纯函数. 故 $G(z)$ 满足 (b)

③ 定义 $\Delta(z) = F(z) - G(z)$,

则 $\Delta(z+1) = \Delta(z)$. 且 $\Delta(z)$ 在 $z=0$ 处可去奇点.

由周期性, $\Delta(z)$ 在任一列整数点处均为可去奇点.

故 $\Delta(z)$ 为整函数.

④ $\Delta(z)$ 在 \mathbb{C} 上有界.

由周期性, 只需证 $\Delta(z)$ 在 $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$ 有界.

(原因: 设 $z \in \mathbb{C}$, 则存在 $z' \in \Omega = \{|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}\}$, 使 $z - z' \in \mathbb{Z}$.)

由于 Δ 在 \mathbb{C} 上全纯, 则 Δ 在 $\Omega \cap \{|z| \leq 1\}$ 有界.

设 $z = x + iy$, $|x| \leq \frac{1}{2}$, $|y| > 1$.

$$\begin{aligned} \text{则 } \operatorname{Im} \pi z &= i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i \frac{e^{\pi i(x+iy)} - e^{-i\pi(x+iy)}}{e^{i\pi(x+iy)} - e^{-i\pi(x+iy)}} \\ &= i \frac{e^{-2\pi y} + e^{-2\pi i x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2\pi i x}}. \end{aligned}$$

证 $y > 1, |x| \leq \frac{1}{2}$ 时 $\cot \pi z$ 有界.

$$\text{注意 } \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{x+iy} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x+iy)}{x^2 - y^2 - n^2 + 2ixy}$$

若 $y > 1$, 则

$$\left| \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq C + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} \quad \text{收敛}$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} &\sim \int_1^{\infty} \frac{y dx}{y^2 + x^2} = \int_1^{\infty} \frac{d(\frac{x}{y})}{1 + (\frac{x}{y})^2} = \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &\leq \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} < +\infty. \end{aligned}$$

若 $y < -1$ 可类似证明

综上 $\Delta(z) = F(z) - G(z)$ 在 ~~中~~ \mathbb{C} 上 ~~非~~ 恒为 0.

$$|x^2 - y^2 - n^2 + 2ixy| \geq y^2 + n^2 - x^2 \geq y^2 + n^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}(y^2 + n^2)$$

$$|2(x+iy)| \leq 1 + 2y \leq 3y.$$

(5) $\Delta(z)$ 为常数. 由于 $\Delta(z)$ 为奇函数故 $\Delta(z)$ 恒为 0.
从而 $F(z) = G(z). (\forall z \in \mathbb{C}).$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}, \quad P(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

由于 $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, 则 $P(z)$ 收敛. 且

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad \forall z \notin \mathbb{Z}.$$

$$\text{又 } \frac{A'(z)}{A(z)} = \pi \cot \pi z = \frac{P'(z)}{P(z)}, \quad \text{故}$$

$$\left(\frac{P(z)}{A(z)}\right)' = \frac{P'}{A} - \frac{1}{A^2} P A' = \frac{P}{A} \left[\frac{P'}{P} - \frac{A'}{A}\right] = 0.$$

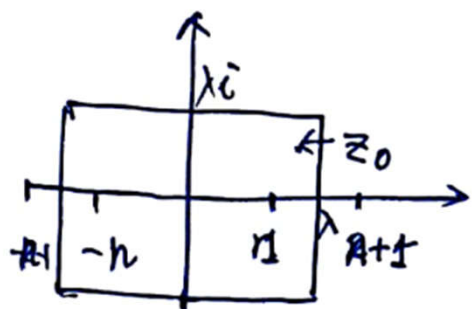
$$\text{故 } P(z) = C \cdot A(z).$$

$$\frac{P(z)}{z} = C \cdot \frac{A(z)}{z} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z \rightarrow 0 \text{ 有 } 1 = C, \text{ 故 } P(z) = A(z). \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

例: $\operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right], z \in \mathbb{C}$

证明: $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, 固定 z_0 , γ_n 为 $|z| \leq n + \frac{1}{2}$, $|y| \leq \lambda$ 边界.

且 γ_n 包含 z_0 .



$z = n \in \mathbb{Z}$ 和 z_0 为 $\operatorname{ctg} \pi z$ m -级极点.

留数: $\operatorname{Res} \left(\frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z - z_0}, z_0 \right) = \operatorname{ctg} \pi z_0$.

$$\operatorname{Res} \left(\frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z - z_0}, n \right) = \frac{1}{\pi(n - z_0)}$$

$$\int_{\gamma_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z - z_0} dz = 2\pi i \left[\sum_{k=-n}^n \frac{1}{\pi(k - z_0)} + \operatorname{ctg} \pi z_0 \right]$$

$$= 2\pi i \left[\operatorname{ctg} \pi z_0 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z_0} + \sum_{k=1}^n \frac{2z_0}{z_0^2 - k^2} \right) \right] \quad (*)$$

上式左边:

$$\begin{aligned} |\cot \pi(\lambda + iy)|^2 &= \left| \frac{\cos \pi(\lambda + iy)}{\sin \pi(\lambda + iy)} \right|^2 \\ &= \left| \frac{e^{i\pi(\lambda + iy)} + e^{-i\pi(\lambda + iy)}}{e^{i\pi(\lambda + iy)} - e^{-i\pi(\lambda + iy)}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{e^{2\pi i(\lambda + iy)} + e^{-2\pi i(\lambda + iy)} + 2}{e^{2\pi i(\lambda + iy)} + e^{-2\pi i(\lambda + iy)} - 2} \right|^2 \\ e^{2\pi i\lambda} &= e^{2\pi i(n + \frac{1}{2})} \\ &= -1 \\ &= \frac{+e^{-2\pi y} + e^{2\pi y} - 2}{e^{-2\pi y} - e^{2\pi y} + 2} \leq 1. \end{aligned}$$

同样: $|\cot \pi(-\lambda + iy)|^2 \leq 1.$

注意 $\lambda = n + \frac{1}{2} \rightarrow +\infty$, 故

$$|\operatorname{ctg} \pi(x + \lambda i)|^2 \leq \frac{e^{2\pi\lambda} + e^{-2\pi\lambda} + 2}{e^{2\pi\lambda} + e^{-2\pi\lambda} - 2} \rightarrow 1.$$

故当 n 充分大时, 在 γ_n 上有 $|\operatorname{ctg} \pi z| \leq 2$.

由于
$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z(z - z_0)}$$

故
$$\int_{\gamma_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z} dz + \int_{\gamma_n} \frac{z_0 \operatorname{ctg} \pi z}{z(z - z_0)} dz.$$

第一个积分: $\int_{\gamma_n} \frac{\cot \pi z}{z} dz = 2\pi i \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{1}{\pi k} = 0.$

第二个积分:

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{z_0 \cot \pi z}{z(z-z_0)} dz \right| \leq \frac{2|z_0|}{\lambda(\lambda-|z_0|)} \cdot \delta \lambda \rightarrow 0.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_n} \frac{\cot \pi z}{z-z_0} dz = 0.$

代(*)中:

$$\cot \pi z_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z_0} + \sum_{k=1}^n \frac{z z_0}{z_0^2 - k^2} \right).$$

引理: 若 $f(z)$ 为 \mathbb{C} 上整函数, 且没有零点, 则存在整函数 $g(z)$ 使 $f(z) = e^{g(z)}$.

证明: 由于 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上无零点, 故 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 \mathbb{C} 上全纯.

$$\text{定义 } g(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + c_0, \quad e^{c_0} = f(z_0).$$

则 $g(z)$ 为 \mathbb{C} 上单值函数, 且 $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

$$\begin{aligned} (f e^{-g})' &= f' e^{-g} - f g' e^{-g} \\ &= (f' - f g') e^{-g} = 0 \end{aligned}$$

故 $f e^{-g}$ 在 \mathbb{C} 上为常数. 又 $f(z_0) e^{-g(z_0)} = e^{c_0} \cdot e^{-c_0} = 1$.

$$\text{故 } f e^{-g} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow f = e^g, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

定理: 给定复数 $\{a_n\}$, $|a_n| \rightarrow +\infty$, 则存在整函数恰含 $\{a_n\}$ 为零点, 所有这些整函数可写为 $f(z) e^{g(z)}$, g 为整函数.

证明: ① 若 f_1, f_2 满足恰含 $\{a_n\}$ 为零点, 则 $\frac{f_1}{f_2}$ 在 \mathbb{C} 上整, 且无零点, 故 $\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = e^{g(z)}$.

② 构造 f : 注意 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_n})$ 可能不收敛.

令 $E_0(z) = 1 - z$, $E_k(z) = (1 - z) e^{z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{k}z^k}$, ($k \geq 1$)

引理: 若 $|z| \leq \frac{1}{2}$, 则 $|1 - E_k(z)| \leq C|z|^{k+1}$.

引理: 若 $|z| \leq \frac{1}{2}$, 则 $|1 - E_k(z)| \leq C|z|^{k+1}$.

证:
$$E_k(z) = e^{\log(1-z) + z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{k}z^k}$$

$$= e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n}z^n}$$

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \right| \leq |z|^{k+1} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n} |z|^{n-k-1} \right|$$

$$\leq |z|^{k+1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq C \cdot |z|^{k+1}, \quad (|z| \leq \frac{1}{2})$$

故 $|1 - E_k(z)| \leq |(1 - e^w)| \leq C \cdot |w| \leq C \cdot |z|^{k+1}$.

③ 定义 $f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$, m 为 0 的零点的重数.

设 $z \in \mathbb{C}$, 则 $|z| < R$ (对充分大 R). 当 $|a_n| > 2R$ 时, $\left|\frac{z}{a_n}\right| < \frac{1}{2}$.

故 $\prod_{|a_n| > 2R} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ 收敛到一有限函数.

(原因: $|1 - E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)| \leq C \cdot \left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1} \leq \frac{C}{2^{n+1}}$

故 $f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ 在 \mathbb{C} 上收敛.

定理 (Hadamard 分解定理).

设 ① f 是整函数, 增长次数 ρ ,

② $z=0$ 是 f 的 m 阶零点.

③ $\{a_n\}$ 是 f 的非零零点.

$$k = [\rho], \quad (k \leq \rho < k+1, k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{则 } f(z) = e^{p(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

$$\deg p(z) \leq k.$$

Hadamard 定理应用:

例: 设 $f(z)$ 为整函数, 增长速度有限, 则 $f(z)$ 可取到每个有穷复数, 至多可能除一个例外值.

证: 假设有两个 $\alpha \neq \beta$, $f(z) \neq \alpha$, $f(z) \neq \beta$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

则 $f(z) - \alpha = e^{g(z)}$, $g(z)$ 为整函数. 由 Hadamard 定理,

$\deg g(z) \leq \rho_f < +\infty$. 但 $e^{g(z)}$ 不取值 $\beta - \alpha$, 故 $g(z) = \log(\beta - \alpha)$

在 \mathbb{C} 上无解, 与代数基本定理矛盾.

例: 若 $f(z)$ 为整函数, $\rho_f \in \mathbb{Z}$ 且有限, 则 f 有无穷多个零点.

证: 否则, 若 $f(z)$ 的零点只有有限多个, a_1, a_2, \dots, a_n , 则

$$f(z) = e^{g(z)} (z - a_1) \cdots (z - a_n)$$

$m = \deg g(z) \leq \rho_f < +\infty$, f 的增长速度与 e^g 阶数相同, 故

$\rho_f = m \in \mathbb{Z}$, 与 $\rho_f \notin \mathbb{Z}$ 矛盾.

例: 将 $f(z) = \sin \pi z$ 展成乘积.

解: ① 求 ρ_f : $\sin \pi z = \frac{1}{2i} (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})$

$$\text{故 } |\sin \pi z| \leq \frac{1}{2} (e^{\pi|z|} + e^{\pi|z|}) \leq e^{\pi|z|}$$

$$\text{故 } \rho_f \leq 1.$$

$$\text{令 } z = iy, \quad |\sin \pi iy| = \left| \frac{1}{2i} (e^{-\pi y} - e^{\pi y}) \right| \sim e^{\pi y}$$

$$\text{故 } \rho_f \geq 1.$$

$$\text{综上 } \rho_f = 1.$$

② 求 $\sin \pi z$ 的零级极点. $z=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{cases} a_0=0, a_1=1, a_2=-1, a_3=2, a_4=-2, \dots, a_{2n-1}=n, \\ a_{2n}=-n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sin \pi z &= z \cdot e^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \\ &= z e^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z \rightarrow -z, \text{ 则} \end{cases}$$

$$-\sin \pi z = -z e^{-Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{故 } A=0.$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{z} = e^B \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\begin{cases} z \rightarrow 0, \pi = e^B. \end{cases} \quad \text{故 } \sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Hadamard 分解定理:

定理: 设 f 为整函数, 增长次数 ρ , 设 $k = [\rho]$, 若 a_1, a_2, \dots 为 f 的非零零点, 则 $f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$, $\deg P \leq k$.

证: 想法: 令 $E(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$,

(a) 证 $E(z)$ 为 \mathbb{C} 上整函数

(b) $\frac{f}{E(z)} = e^{g(z)}$, $g(z)$ 为 \mathbb{C} 上整函数.

(c) g 是次数 $\leq k$ 的多项式.

引理1: 若 $|z| \leq \frac{1}{2}$, 则 $|E_k(z)| \geq e^{-c|z|^{k+1}}$
 若 $|z| > \frac{1}{2}$, 则 $|E_k(z)| \geq |1-z| e^{-c'|z|^k}$.

证: 若 $|z| \leq \frac{1}{2}$, 则

$$E_k(z) = (1-z) e^{z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{k}z^k}$$

$$= e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}} = e^w, \quad w = -\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

注意 $|e^w| \geq e^{-|w|}$, $|w| \leq c|z|^{k+1}$

(原因: 令 $w = u + iv$,

$$|e^w| = e^u \geq e^{-|w|}$$

$$|w| = |z|^{k+1} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^{n-k-1}}{n} \right| \leq |z|^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq c \cdot |z|^{k+1})$$

故 $|E_k(z)| \geq e^{-|w|} \geq e^{-c|z|^{k+1}}$.

若 $|z| \geq \frac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned} |e^{z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{k}z^k}| &\geq e^{-|z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{k}z^k|} \\ &\geq e^{-(|z| + \frac{1}{2}|z|^2 + \dots + \frac{1}{k}|z|^k)} \\ &\geq e^{-C'|z|^k} \end{aligned}$$

$$\text{故 } |E_k(z)| \geq |1-z| e^{-C'|z|^k}$$

(这里, 由于 $|z| \geq \frac{1}{2}$, 故 $2^{k-1}|z|^{k-1} \geq 1$
 $2^{k-1}|z|^k \geq |z|$.)

引理 2. 对任何 s , $\rho_0 < s < k+1$, $\prod_{n=1}^{\infty} |z - a_n| \geq \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$,

$$\text{则} \left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \geq e^{-c|z|^s}$$

证明:

$$\textcircled{1} \prod_{n=1}^{\infty} E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) = \prod_{|a_n| \leq 2|z|} E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \cdot \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k \left(\frac{z}{a_n} \right)$$

$$\begin{aligned} \left| \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| &\geq \prod_{|a_n| > 2|z|} e^{-c \left| \frac{z}{a_n} \right|^{k+1}} \\ &\geq e^{-c|z|^{k+1} \sum_{|a_n| > 2|z|} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}} \end{aligned}$$

对于 $|a_n| > 2|z|$, 故 $\frac{1}{|a_n|} < c \cdot \frac{1}{|z|}$.

$$\frac{1}{|a_n|^{k+1}} = \frac{1}{|a_n|^s} \cdot \frac{1}{|a_n|^{k+1-s}} \leq \frac{1}{|a_n|^s} \cdot \frac{c}{|z|^{k+1-s}}$$

$$\text{故} \left| \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \geq e^{-c|z|^{k+1} \cdot \frac{c}{|z|^{k+1-s}} \cdot \sum_{|a_n| > 2|z|} \frac{1}{|a_n|^s}} \geq e^{-c|z|^s}$$

$$\textcircled{2} \left| \prod_{|a_n| \leq 2r} E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \geq \prod_{|a_n| \leq 2r} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \cdot \prod_{|a_n| \leq 2r} e^{-c' \left| \frac{z}{a_n} \right|^k}$$

$$= \prod_{|a_n| \leq 2r} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \cdot e^{-c' |z|^k \cdot \sum_{|a_n| \leq 2r} \frac{1}{|a_n|^k}}$$

注意 $\frac{1}{|a_n|^k} = \frac{1}{|a_n|^s} \cdot \frac{1}{|a_n|^{k-s}} \leq c \cdot \frac{1}{|a_n|^s} \cdot |z|^{s-k}, \quad (s > k)$

故 $\left| \prod_{|a_n| \leq 2r} E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \geq \prod_{|a_n| \leq 2r} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \cdot e^{-c' |z|^k \cdot |z|^{sk} \cdot \sum_{|a_n| \leq 2r} \frac{1}{|a_n|^s}}$

注意:

$$\prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| = \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| \frac{a_n - z}{a_n} \right| \quad \left(\text{条件 } |z - a_n| \geq \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \right)$$

$$\geq \prod_{|a_n| \leq 2|z|} |a_n|^{-k-1} \cdot \frac{1}{|a_n|}$$

$$= \prod_{|a_n| \leq 2|z|} |a_n|^{-k-2} = A.$$

$$(3) \quad \log A = -(k+2) \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \log |a_n|$$

$$\geq -(k+2) \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \log(2|z|)$$

$$\geq -(k+2) \log(2|z|) \cdot n(2|z|)$$

$$\geq -(k+1) \log(2|z|) \cdot c \cdot |z|^s$$

$$\geq -c' |z|^{s'} \quad (s' > s)$$

$$\text{故 } A \geq e^{-c' |z|^{s'}}.$$

$$\textcircled{4} \text{ 综上: } \left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^s - c'|z|^{s'}} \\ \geq e^{-c'|z|^{s'}}, \quad (\forall s' > s).$$

引理3: 存在半径 $r_1, r_2, \dots, r_m \rightarrow \infty$, 使得

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^s}, \quad |z| = r_m.$$

证: 由于 $\sum |a_n|^{-k-1} < \infty$, 故 $\exists N$,

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |a_n|^{-k-1} < \frac{1}{10}.$$

$$\text{令 } I_n = \left[|a_n| - \frac{1}{|a_n|^{k+1}}, \quad |a_n| + \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \right].$$

$$\text{则 } |I_n| \text{ 长度 } \frac{2}{|a_n|^{k+1}}.$$

设 L 为正整数, 当 L 充分大时, $\bigcup_{n=N}^{+\infty} I_n$ 不能覆盖 $[L, L+1]$.

因为 $\bigcup_{n=N}^{+\infty} I_n$ 的长度和 $= 2 \cdot \sum_{n=N}^{+\infty} |a_n|^{-k-1} < \frac{1}{5}$.

故当存在 $r_m \rightarrow +\infty$, 使得

$$\{ |z| = r_m \} \cap \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} I_n \right) = \emptyset$$

又当 r_m 大时, 有 $\{ |z| = r_m \} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N-1} I_n \right) = \emptyset$.

故 $\{ |z| = r_m \} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) = \emptyset$.

由引理 2 知 结论成立.

引理4: 设 g 是整函数, $u = \operatorname{Re}(g)$, 且当 $r_m \rightarrow +\infty$,

$$u(z) \in C r_m^s \quad \forall |z| = r_m \rightarrow +\infty.$$

则 g 是次数 $\leq s$ 的多项式.

证明: 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\text{则 } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\theta} \right) e^{-in\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta$$

$$= \begin{cases} a_n r^n, & \forall n \geq 0 \\ 0 & \forall n < 0. \end{cases} \quad (*)$$

若 $n > 0$:
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(re^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = 0, (n > 0)$$

故 $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\overline{g(re^{i\theta})} + g(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, (n > 0)$$

若 $n = 0$, 则 $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta$ (17.12.2)

故 $2 \operatorname{Re} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$

故 $a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - c \cdot r^s) e^{-in\theta} d\theta, (n > 0)$

故 $|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} (c r^s - u(re^{i\theta})) |e^{-in\theta}| d\theta.$

$$\leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} (c r_m^s - u(r_m e^{i\theta})) d\theta, \quad \frac{\pi}{2} r = r_n \rightarrow +\infty.$$

$$\text{th } |a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} (c r^s - u(re^{i\theta}) |e^{-in\theta}|) d\theta.$$

$$\leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} (c r_m^s - u(r_m e^{i\theta})) d\theta, \quad \frac{\pi}{2} r = r_m \rightarrow +\infty.$$

$$\leq 2c r_m^{s-n} - 2 \operatorname{Re}(\alpha_0) r_m^{-n}$$

If $n > s$, $|a_n| = 0$. $\text{th } \deg g \leq s$.

证明 2: $g(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_n z^n$.

由 Cauchy 不等式:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) \right| \leq \frac{1}{n!} \frac{n!}{r^n} \max_{|z|=r} |g(z)|$$

$$\triangleq M(r) = \max_{|z|=r} |g(z)|, \quad A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} g(z).$$

由 $r < R$ 时

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |g(0)|.$$

令 $R=2r$, 由

$$M(r) \leq 2 \cdot A(2r) + 3 |g(0)|$$

由 $r = \frac{1}{2} r^m$ 时,

$$M\left(\frac{1}{2} r^m\right) \leq 2 A(r_m) + 3 |g(0)| \leq C \cdot r_m^s + C.$$

$$\text{故 } |a_n| \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{2} r_m\right)^n} \cdot (C \cdot r_m^s + C) = C \cdot r_m^{s-n} + C \cdot r_m^{-n} \rightarrow 0.$$

(由 $n > s$ 时).

Hadamard 定理证明:

$$\sum_k E_k(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right), \quad \text{则 } E_k \text{ 为整函数.}$$

$$\text{(原因: } |E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1| \leq c \cdot \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1}, \quad \rho_0 < \sigma < k+1, \\ \text{且 } \sum \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \text{ 收敛.)}$$

$$\text{从而 } \frac{f(z)}{E_k(z)} = e^{g(z)}, \quad g(z) \text{ 整函数.}$$

$$\text{注意 } |f(z)| \leq c \cdot e^{c|z|^s}$$

$$\text{且当 } |z|=r_m \text{ 时, } |E_k(z)| \geq e^{-c r_m^s}$$

$$\text{故 } e^{\operatorname{Re} g(z)} = \left| \frac{f(z)}{E_k(z)} \right| \leq c \cdot e^{c|z|^s} \cdot e^{c|z|^s}, \quad (|z|=r_m)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} g(z) \leq c \cdot |z|^s, \quad (|z|=r_m)$$

故 $g(z)$ 为次数 $\leq s$ 的多项式.

调和函数.

全纯函数

$f(z)$

Cauchy '引理'

平均值性质

最大模原理

可去奇点

调和函数

$$u|z| = \operatorname{Re} f(z)$$

Poisson '引理'

平均值性质

极值原理.

可去奇点

Dirichlet 问题.

Harnack 不等式.

定义: 设 $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 + \partial y^2} = 0$.

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

称为调和函数.

平均值性质: 若 u 在 $|z| < R$ 上调和, 则

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta, \quad (0 < r < R).$$

证: u 调和, $|z| < R$ 单连通, $u = \operatorname{Re} f$, f 全纯.

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

取实部: $u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta$.

证明二:

引理: $\iint_D \Delta u \, dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$, \vec{n} 为 ∂D 的外法向量

设引理成立, 令 $G(r) = \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) \, d\theta$.

$$G'(r) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \, d\theta.$$

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \nabla u \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{证 } G'(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} d\theta. \\
 &= \frac{1}{r} \int_{|z|=r} \frac{\partial u}{\partial n} ds. = \frac{1}{r} \iint_D \Delta u dx dy = 0.
 \end{aligned}$$

证 $G(r)$ 是常数. 从而

$$G(r) = \lim_{r \rightarrow 0} G(r) = u(0) \cdot 2\pi$$

$$\text{证 } u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

推论: 若 u 调和, 非常值, 则在区域内部达不到最大值与最小值.

定理 (Schwarz' 公式). 设 $f = u + iv$ 在 $|z| < R$ 内全纯, 在 $|z| = R$ 连续,

$$\text{则 } f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi+z}{\xi-z} u(\xi) d\theta + i \operatorname{Im} f(0), \quad \xi = Re^{i\theta}.$$

证明: 由 $\xi = Re^{i\theta}$, $d\xi = Ri e^{i\theta} d\theta = i\xi d\theta$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi f(\xi)}{\xi-z} d\theta. \quad \textcircled{1}$$

对于 $|z| < R$ 时, $|\frac{R^2}{\bar{z}}| > R$, 故 $\frac{f(\xi)}{\xi - \frac{R^2}{\bar{z}}}$ 是 \bar{z} 的 ^{在 $|z| < R$ 中} 全纯函数.

故 $\int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - \frac{R^2}{\bar{z}}} d\xi = 0.$

即 $\int_{|\xi|=R} \frac{\bar{z} f(\xi)}{\xi \bar{z} - R^2} i\xi d\theta = 0.$

对于 $\bar{\xi}\xi = R^2$, 故 $\int_{|\xi|=R} \frac{\bar{z} f(\xi)}{\bar{z} - \bar{\xi}} d\theta = 0$

取共轭: $\int_{|\xi|=R} \frac{z \overline{f(\xi)}}{z - \xi} d\theta = 0$

(2).

① 与 ② 相加.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi f(\xi) + z \overline{f(\xi)}}{\xi - z} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{(\xi + z) u(\xi) + i(\xi - z) v(\xi)}{\xi - z} d\theta. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} u(\xi) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_{|\xi|=R} v(\xi) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} u(\xi) d\theta + i \operatorname{Im} f(0). \end{aligned}$$

推论. 设 $u(z)$ 在 $|z| < R$ 调和, 则 $\forall |z| < r < R$ 时.

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=r} \frac{r^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} u(\xi) d\theta, \quad \xi = re^{i\theta}.$$

证:
$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=r} \left(\operatorname{Re} \frac{\xi + z}{\xi - z} \right) u(\xi) d\theta.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\xi + z}{\xi - z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\xi + z}{\xi - z} + \frac{\bar{\xi} + \bar{z}}{\bar{\xi} - \bar{z}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\xi + z)(\bar{\xi} - \bar{z}) + (\xi - z)(\bar{\xi} + \bar{z})}{(\xi - z)(\bar{\xi} - \bar{z})} \\ &= \frac{|\xi|^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} = \frac{r^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \end{aligned}$$

故结论成立.

引理: 令 $u(z) \equiv 1$, 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=r} \frac{r^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} d\theta = 1, \quad \xi = re^{i\theta}, \quad \forall r > 0.$$

定理 (Poisson's int). 设函数 $u(z)$ 在 $|z| < R$ 内调和, 在 $|z| = R$ 上连续, 则当 $|z| < R$ 时,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} u(\xi) d\theta, \quad \xi = Re^{i\theta}.$$

证: $\forall r \in (0, 1)$, $u(rz)$ 在 $|z| < \frac{R}{r} = R_1$ 调和, $R_1 > R$.

故当 $|z| < R$ 时

$$u(rz) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{\xi - z} u(r\xi) d\theta, \quad \xi = Re^{i\theta}.$$

取极限 $r \rightarrow 1^-$: 固定 z :

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \leq \frac{R^2 - |z|^2}{(R - |z|)^2} = \frac{R + |z|}{R - |z|} \quad \text{— 有界}$$

$$u(r\xi) \rightarrow u(\xi).$$

故

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{|\xi|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} u(r\xi) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} u(\xi) d\theta. \end{aligned}$$

说明: 当 $|z| < R$ 换成 $|z-a| < R$ 时.

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi-a|=R} \frac{R^2 - |z-a|^2}{|\xi-z|^2} u(\xi) d\theta, \quad \xi = a + Re^{i\theta}.$$

说明: 当 $z = re^{i\theta}$, $\xi = e^{i\psi}$,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} u(\xi) d\psi.$$

$$\begin{aligned} \frac{1-|z|^2}{|\xi z|^2} &= \frac{1-r^2}{|e^{i\psi} - re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{(\cos\psi - r\cos\theta)^2 + (\sin\psi - r\sin\theta)^2} \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\psi-\theta)}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\psi-\theta)} \cdot u(e^{i\psi}) d\psi.$$

定理: 设函数 $u(\xi)$ 在 $|\xi|=1$ 上逐段连续, 则函数

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} u(\xi) d\theta, \quad \xi = e^{i\theta}.$$

在 $|z|<1$ 内调和, 在 $u(\xi)$ 的连续点 ξ_0 有

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow \xi_0 \\ |z|<1}} G(z) = u(\xi_0).$$

证: ① $G(z)$ 在 $|z|<1$ 时可积.

$G(z)$ 调和:

$$G(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi+z}{\xi-z} u(\xi) d\theta \right), \quad d\theta = \frac{d\xi}{i\xi}$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi+z}{\xi-z} u(\xi) \frac{d\xi}{i\xi} \right).$$

$$\text{由于 } \frac{\xi+z}{\xi(\xi-z)} = \frac{1}{\xi-z} + \frac{z}{\xi(\xi-z)}.$$

$$\text{故 } G(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{u(\xi) d\xi}{\xi-z} + \frac{z}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{u(\xi)/\xi}{\xi-z} d\xi \right)$$

由于 $u(\xi)$, $u(\xi)/\xi$ 在 $|\xi|=1$ 上^{分段}连续, 故积分全纯. 故 $G(z)$ 调和.

② 设 $|\xi_0|=1$,

$$G(z) - u(\xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} (u(\xi) - u(\xi_0)) d\theta$$

$$= \left(\int_{C_S} + \int_{C \setminus C_S} \right) \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} (u(\xi) - u(\xi_0)) d\theta.$$

$$= I_1 + I_2.$$

估计 I_1 : 由于 u 在 ξ_0 点连续, 当 δ 很小时.

$$|u(\xi) - u(\xi_0)| < \varepsilon, \quad \forall \xi \in C_\delta \cap \{|z|=1\}.$$

$$\text{故 } |I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} \cdot \varepsilon \, d\theta \leq \varepsilon.$$

估计 I_2 : 由于 $z \rightarrow \xi_0$, 故设 $|z - \xi_0| \leq \frac{\delta}{2}$.

$$\text{当 } \xi \in C \setminus C_\delta \text{ 时, } |\xi - z| \geq \frac{1}{2}\delta.$$

$$\text{令 } M = \max_{|z|=1} |u(z)|$$

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C \setminus C_\delta} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} \cdot 2M \, d\theta = \frac{M}{\pi} \int_{C \setminus C_\delta} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} \, d\theta$$

$$\leq \frac{M}{\pi \cdot (\frac{\delta}{2})^2} \cdot \int_{C \setminus C_\delta} (1-|z|^2) \, d\theta \leq \frac{M}{\pi \cdot (\frac{\delta}{2})^2} \cdot 2M \cdot (1-|z|^2) \rightarrow 0$$

当 $z \rightarrow \xi_0$.

定义①(平均值性质) 设 $u(z)$ 在区域 D 上连续, $\forall z_0 \in D$,

存在 $B(z_0, \delta) \subset D$, 使

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad (0 < r < \delta)$$

②(极值原理). 若 $u(z)$ 在 D 中不是常数, 且在 D 中取不到最大, 最小值, 则称 $u(z)$ 在 D 中满足最大, 最小值原理.

定理：设 $u(z)$ 在 D 中连续，下面将证明：

① u 在 D 中调和。

② u 在 D 中满足平均值性质。

③ $\forall \Omega \subset D$ ， Ω 中任一调和函数 $h(z)$ ，函数 $u(z) - h(z)$

在 Ω 中满足最大、最小值原理。

证明：① \Rightarrow ② \checkmark

② \Rightarrow ③ \checkmark

(3) \Rightarrow ①: 只要证 $u(z)$ 在 D 中每点每点邻域中调和.

$\forall z_0 \in D, \overline{B(z_0, \delta)} \subset D$. 构造

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{\delta^2 - |z - z_0|^2}{|\xi - z|^2} u(\xi) d\theta, \quad \xi = z_0 + \delta e^{i\theta}.$$

则 $h(z)$ 在 $|\xi - z_0| < \delta$ 中调和, 在 $|\xi - z_0| = \delta$ 上连续.

且 $h(z) = u(z), \forall z \in \partial B(z_0, \delta)$.

由③, $u(z) - h(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 中满足最大值原理.

故 $u(z) - h(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 中恒为 0. 即 $u(z) = h(z), \forall z \in B(z_0, \delta)$.

即 $u(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 中调和.

Harnack 原理.

定理. 设 $u \geq 0$, 在 $B(0, R)$ 上调和, 且在 $\overline{B(0, R)}$ 上连续.

$$\frac{R-|z|}{R+|z|} u(0) \leq u(z) \leq \frac{R+|z|}{R-|z|} u(0).$$

证明:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2} u(\xi) d\theta, \quad \forall z \in B(0, R).$$

$$\frac{R^2-|z|^2}{(R+|z|)^2} \leq \frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2} \leq \frac{R^2-|z|^2}{(R-|z|)^2} = \frac{R+|z|}{R-|z|}, \quad \forall |\xi|=R.$$

||

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}.$$

故

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{R+|z|}{R-|z|} u(\xi) d\theta = \frac{R+|z|}{R-|z|} u(0).$$

$$u(z) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{R-|z|}{R+|z|} u(\xi) d\theta = \frac{R-|z|}{R+|z|} u(0).$$

推论: 设 $u(z) \geq 0$, 在 $B(z_0, R)$ 上调和, 在 $\overline{B(z_0, R)}$ 上连续.

$$\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|} u(z_0).$$

定理: 设函数 $u_n(z)$ ($n=1, 2, \dots$) 在圆 $B(z_0, R)$ 内调和, 且在圆内满足 $u_n(z) \leq u_{n+1}(z)$, ($n=1, 2, \dots$), 则 $\{u_n(z)\}$ 在 $B(z_0, R)$ 内闭一致趋于 $+\infty$, 或内闭一致收敛到调和函数 $u(z)$.

证: $\forall n > m$, $u_n(z) - u_m(z)$ 是调和函数, 且 $u_n(z) - u_m(z) \geq 0$.

故 $\forall r < R$, 由 Harnack 不等式. 当 $|z - z_0| \leq r < \rho < R$ 时

$$\begin{aligned} \frac{\rho - r}{\rho + r} (u_n(z_0) - u_m(z_0)) &\leq u_n(z) - u_m(z) \\ &\leq \frac{\rho + r}{\rho - r} (u_n(z_0) - u_m(z_0)) \end{aligned}$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(z) = +\infty$, 固定 m , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n(z) - U_m(z)) = +\infty$.

从而当 $|z - z_0| \leq r$ 时, $U_n(z) - U_m(z)$ 一致趋于 $+\infty$.

由于 m 固定, $U_m(z)$ 在 $|z - z_0| \leq r$ 上有界, 故 $U_n(z)$ 一致趋于 $+\infty$.

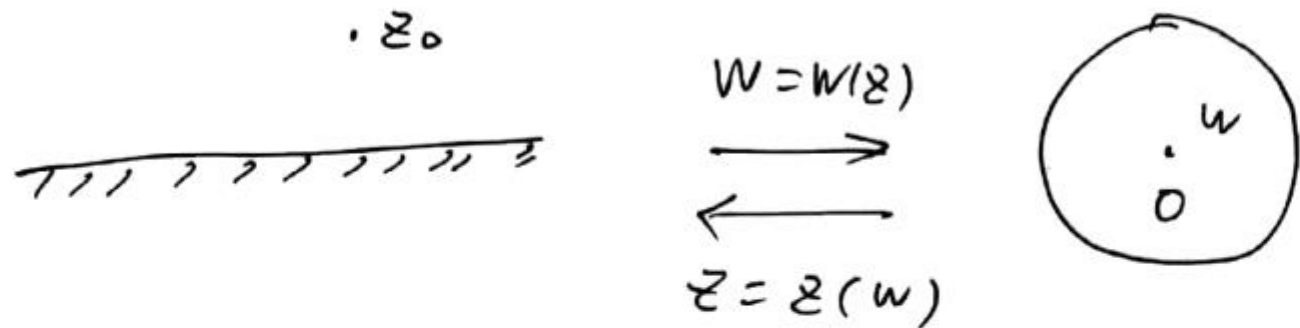
若 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(z) < +\infty$, 则由 Cauchy 准则知 $\{U_n(z)\}$ 在 $|z - z_0| \leq r$

上一致收敛到连续函数 $u(z)$. 由于 $\{U_n(z)\}$ 满足平均值性质,

故 $u(z)$ 满足平均值性质, 故 $u(z)$ 为调和函数。

问题: 给定 \mathbb{R} 上只有有限个点不连续的有界函数 $u(t)$,

找上半平面的调和 $u(z)$ 使得当 $u(t)$ 连续点处有 $\lim_{z \rightarrow t} u(z) = u(t)$?



设 $w(z_0) = 0$, 令 $w(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$.

函数 $u(z)$ 变为 $\tilde{u}(w) = u(z(w))$.

$z \xrightarrow{w(z)} w$

$u(z)$ 关于 z 调和 $\Rightarrow \tilde{u}(w)$ 关于 w 调和. u调和, f连续, 则u(f(z))调和

故 $\tilde{u}(w)$ 是 $|w| < 1$ 的调和函数.

$$\tilde{u}(i0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\xi) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \tilde{u}(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\text{令 } \xi = \frac{t - z_0}{t - \bar{z}_0}, \quad \text{则 } |\xi|=1 \text{ 与 } \mathbb{R} \text{ 对应.}$$

$$d\xi = \frac{t - \bar{z}_0 - (t - z_0)}{(t - \bar{z}_0)^2} dt = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(t - \bar{z}_0)^2} dt.$$

$$\tilde{u}(i0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t \in \mathbb{R}} u(t) \cdot \frac{t - \bar{z}_0}{t - z_0} \cdot \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(t - \bar{z}_0)^2} dt.$$

$$\text{即 } u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t \in \mathbb{R}} u(t) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{|t - z_0|^2} dt.$$

$$\text{令 } z_0 = x_0 + iy_0, \quad z_0 - \bar{z}_0 = 2iy_0.$$

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{2y_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2} u(t) dt.$$

例: 设 $u(t)$ 在 (a, b) 上取值 1, 在实轴 $\mathbb{R} \setminus (a, b)$ 上取值 0, 求上半平面
全纯 $f(z)$, 使在 $u(t)$ 连续点有 $\lim_{z \rightarrow t} \operatorname{Re} f(z) = u(t)$.

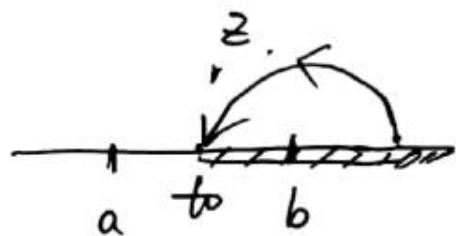
解:
$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{1}{t-z} dt + iC$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{dt}{t-z} + iC = \frac{1}{\pi i} \log \frac{b-z}{a-z} + iC,$$

取某个单值分支, 当 $z > b$ 时实值

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arg} \frac{b-z}{a-z} \left(\operatorname{arg} \in [0, 2\pi) \right).$$

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arg} \frac{b-z}{a-z} \left(\operatorname{arg} \in [0, 2\pi) \right).$$



$\frac{\pi}{2} < t_0 \in (a, b)$, 则

$$\lim_{z \rightarrow t_0} u(z) = \frac{1}{\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} \frac{b-z}{a-z}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\Delta_C \operatorname{Arg}(b-z) - \Delta_C \operatorname{Arg}(a-z) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} (\pi - 0) = 1.$$

$\frac{\pi}{2} < t_0 < a$,

$$\lim_{z \rightarrow t_0} u(z) = \frac{1}{\pi} \left(\Delta_C \operatorname{Arg}(b-z) - \Delta_C \operatorname{Arg}(a-z) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} (\pi - \pi) = 0.$$



(3) 则若 $t_0 > b$, 则 $\lim_{z \rightarrow t_0} u(z) = 0$.

问题, 设 $u(t)$ 是 \mathbb{R} 上分段连续有界的实函数, 找上半平面解析函数 $f(z)$,

$$\text{在 } u(t) \text{ 的连续点有 } \lim_{z \rightarrow \xi} \operatorname{Re} f(z) = u(\xi).$$

由于在上半平面,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{z - \bar{z}}{|t - z|^2} dt$$

注意 $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{i(t-z)} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t-\bar{z}} \right) = \frac{1}{2i} \frac{z - \bar{z}}{|t-z|^2}$

故

$$u(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{1}{t-z} dt \right) + i c$$

右式积分收敛, 则 $u(t)$ 需要满足 $u(t) = O\left(\frac{1}{|t|^\alpha}\right), \alpha > 0$.

衰减条件 $u(t) = O\left(\frac{1}{|t|^\alpha}\right)$:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{|t - z_0|^2} dt.$$

$$u(z) - u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \left(\frac{z - \bar{z}}{|t - z|^2} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{|t - z_0|^2} \right) dt.$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i(t - z)} - \frac{1}{i(t - \bar{z}_0)} \right) dt$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{z - z_0}{(t - z_0)(t - z)} dt \right)$$

故只要 $u(t)$ 有界, $f(z)$ 可写为

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{z - z_0}{(t - z_0)(t - z)} dt + u(z_0) + iC.$$

右边积分收敛.

定义: 设 u 在 D 中 ^{连续} 次调和且取。
① 称 u 在区域 D 中满足最大值原理, 若 u 在 D 中内部取不到最大值, 或为常数。

② 称 u 在 D 中有平均值性质, 若对 $\forall z_0 \in D, \exists B(z_0, \delta) \subset D,$

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < r < \delta.$$

引理: 设 $u(z)$ 在区域 D 上连续, 则下面各行:

① u 满足次平均值性质

② $\forall \Omega \subset D, \Omega$ 上任一调和 $h(z), u(z) - h(z)$ 在 Ω 上满足最大值原理。

证明:

① \Rightarrow ②. $\forall \Omega \subset D$, h 在 Ω 上调和,

$$u(z_0) - h(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(z_0 + re^{i\theta}) - h(z_0 + re^{i\theta})) d\theta.$$

若 $u-h$ 在 z_0 处达到最大值 M , 则在某个 $B(z_0, \varepsilon)$ 上, $u-h$ 恒为常数. 故 $\{z \in \Omega \mid u-h = M\}$ 为开集 $\Rightarrow u-h$ 在 Ω 上恒为常数.

② \Rightarrow ①. 取 $\overline{B(z_0, \delta)} \subset D$. 定义:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi-z|=r} u(\xi) \frac{r^2 - |z-z_0|^2}{|z-\xi|^2} d\theta, \quad (r < \delta)$$

$\xi = z_0 + re^{i\theta}$.

则 $h(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 中调和, 且 $u-h|_{\partial B(z_0, r)} = 0$

由于 $u(z) - h(z)$ 在 Ω 上满足最大值原理, 故 $u-h \leq 0, \forall z \in B(z_0, \delta)$.

$$\text{故 } u(z) \leq h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi-z|=r} u(\xi) \frac{r^2}{|z_0-\xi|^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi-z|=r} u(\xi) d\theta.$$

故 u 满足平均值性质.

若 U_1, U_2 次调和, 则 U_1+U_2 次调和, $\max\{U_1, U_2\}$ 次调和.

证明: $\max\{U_1(z), U_2(z)\}$

$$\leq \max\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_1(z+re^{i\theta}) d\theta, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_2(z+re^{i\theta}) d\theta\right\}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max\{U_1(z+re^{i\theta}), U_2(z+re^{i\theta})\} d\theta.$$

引理: 设 $u(z)$ 次调和, $\overline{B(z_0, r)} \subset D$. 则

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} P_V(z), & z \in \overline{B(z_0, r)} \\ u(z), & z \in D \setminus \overline{B(z_0, r)} \end{cases}$$

为 D 内次调和函数.

证明: $\tilde{u}(z)$ 连续, 只需证 $\forall z' \in D, \exists \delta$, 使

$$\tilde{u}(z') \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(z' + re^{i\theta}) d\theta, \quad \forall r \in (0, \delta)$$

若 $z' \in B(z_0, r)$, 则 $\tilde{u}(z') = P_V(z)$ 次调和.

若 $z' \notin \overline{B(z_0, r)}$, 则 $\tilde{u}(z') = u(z)$ 次调和.

若 $z' \in \partial B(z_0, r)$, $u(z) - P_V(z)$ 在 $B(z_0, r)$ 满足极大值原理,

故 $v(z) \leq P_V(z), \forall z \in B(z_0, r)$.

$$\tilde{u}(z') = u(z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z' + re^{i\theta}) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} u(z' + re^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} u(z' + re^{i\theta}) d\theta.$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \tilde{u}(z' + re^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \tilde{u}(z' + re^{i\theta}) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(z' + re^{i\theta}) d\theta \quad \Rightarrow \tilde{u} \text{ 次调和函数.}$$

例: $u(z) = \begin{cases} |z|, & 1 < |z| < R \\ 1, & |z| \leq 1 \end{cases}$ 是次调和函数.

定理: 设 $u \in C^2(\Omega)$, 则 u 次调和 $\Leftrightarrow \Delta u \geq 0$.

证明:

\Leftarrow : 先设 $\Delta v > 0$. 对 $\forall \Omega' \subset \Omega$, Ω' 上任一调和函数 $h(z)$.

$$\Delta(v-h) > 0$$

若 $v-h$ 在 Ω' 中取到最大值, 则 $\exists z_0 \in \Omega$, $v-h$ 在 z_0 处达到最大.

$$\text{故 } \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v-h)(z_0) \leq 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(v-h)(z_0) \leq 0.$$

故 $\Delta(v-h)(z_0) \leq 0$, 矛盾. 故 $v-h$ 满足平均值性质.

v 为次调和函数.

设 $\Delta v \geq 0$. 令 $U_\varepsilon(z) = v(z) + \varepsilon|z|^2$, $\Delta U_\varepsilon > 0$.

U_ε 为次调和, 故满足次平均值性质, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$

U_ε 内任一被 u 包于 $v(z)$. 故 $v(z)$ 也具有次平均值性质.

$\Rightarrow: \frac{\epsilon}{2} \Delta V(z_0) < 0$, 故 $\exists B(z_0, r)$, $\Delta V|_{B(z_0, r)} < 0$

故 $-V$ 在 $B(z_0, r)$ 上为调和. 故

$$-V(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -V(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta$$

又 V 为调和. 故

$$V(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

从而 $V(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta$, V 在 $B(z_0, r)$ 为调和.

$\Rightarrow \Delta V = 0$. 与 $\Delta V(z_0) < 0$ 矛盾.

Dirichlet 问题

问题: 给定区域 D 边界 ∂D 上的函数, 是否存在调和函数 $u(z)$, 使

$$u(z)|_{\partial D} = f(z)?$$

例: 设 $\Omega = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$, 定义

$$f(z) = \begin{cases} 0, & |z|=1 \\ 1, & z=0 \end{cases}$$

则不存在 Ω 上调和 u , 使 $u|_{\partial\Omega} = f$.

(原因: 若存在, 则 0 为 u 的可去奇点, 从而 u 为 $\{|z| < 1\}$ 上调和函数, 与最大值原理矛盾).

定义: 设 $f(\xi)$ 是有界 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的 ^{逐段连续} 函数, 且 $f(\xi) \leq M$.
满足下列条件的函数记为 $B(f)$:

① $u(z)$ 在 Ω 内次调和

② 对 $\forall \xi \in \partial\Omega$, 有 $\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) \leq f(\xi)$.

性质: ① $B(f)$ 非空. ($-M \in B(f)$)

② 若 $u_1, u_2 \in B(f)$, 则 $\max\{u_1, u_2\} \in B(f)$.

③ 若 $u \in B(f)$, 则 $\tilde{u}(z) \in B(f)$, 其中

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z), & \forall z \in \Omega \setminus B(z_0, r) \\ P_r u(z), & \forall z \in B(z_0, r) \end{cases}$$

④ 若 $u \in B(f)$, 则 $u(z) \leq M$.

定理: 令 $u(z) = \sup \{ u_i(z) \mid u_i(z) \in B(f) \}$, 则 u 在 Ω 中调和.

证: 只要证 $\forall z_0 \in \Omega$, $\exists B(z_0, r) \subset \Omega$, $u(z)$ 在 $B(z_0, r)$ 中调和.

① 由定义 $\exists u_n \in B(f)$, 使 $u_n(z_0) \rightarrow u(z_0)$.

令 $\phi_n = \max \{ u_1, u_2, \dots, u_n \}$, 则 ϕ_n 递增, 次调和.

$$\tilde{\phi}_n = \begin{cases} \phi_n(z), & \forall z \in \Omega \setminus B(z_0, r) \\ P_{\phi_n}(z), & \forall z \in B(z_0, r). \end{cases}$$

则 $\tilde{\phi}_n$ 在 Ω 上次调和, 在 $B(z_0, r)$ 上调和.

由调和函数最大值原理, $\{ \tilde{\phi}_n \}$ 递增, 且有界. 且 $\{ \tilde{\phi}_n(z_0) \}$ 收敛.

由Harnack原理, $\tilde{\phi}_n(z)$ 在 $B(z_0, r)$ 上内闭一致收敛于调和函数 $\tilde{\phi}(z)$.

$$\text{由于 } u_n \leq \phi_n \leq \tilde{\phi}_n \leq u$$

且 $u_n(z_0) \rightarrow u(z_0)$. 故 $\tilde{\phi}(z_0) = u(z_0)$.

$$(2) \quad \overline{\exists} \tilde{u}(z) = \tilde{\Phi}(z), \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

$$\forall p \in B(z_0, r), \quad \exists \{W_n \in B(f), \quad W_n(p) \rightarrow u(p).$$

$$\text{令 } W_n' = \max \{W_n, \tilde{\Phi}_n\}. \quad \text{次调和和.}$$

$$\text{定义: } \psi_n = \max \{w_1', w_2', \dots, w_n'\}$$

$$\tilde{\psi}_n = \begin{cases} \psi_n, & \forall z \in \Omega \setminus B(z_0, r) \\ P_{\psi_n}, & \forall z \in B(z_0, r) \end{cases}$$

$$\text{证} \quad \tilde{\psi}_n(z) \rightarrow \tilde{\psi}(z), \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

$$\underline{\text{A}} \quad W_n(z) \leq W_n'(z) \leq \psi_n(z) \leq \psi_n'(z) \leq u(z)$$

$$\text{令 } z=p, \quad n \rightarrow +\infty. \quad \text{知 } \tilde{\psi}(p) = u(p).$$

由定义 $\tilde{\phi}_n \leq u_n' \leq \psi_n \leq \tilde{\psi}_n \leq u$.

令 $n \rightarrow +\infty$ $\tilde{\phi} \leq \tilde{\psi} \leq u$, $\tilde{\phi}(z_0) = u(z_0) = \tilde{\psi}(z_0)$.

在 $B(z_0, r)$ 上 $\tilde{\phi} - \tilde{\psi}$ 在内点 z_0 取到最大值, 故 $\tilde{\phi} = \tilde{\psi}$, $\forall z \in B(z_0, r)$.

由于 $\tilde{\phi} \stackrel{(p)}{=} \tilde{\psi}(p) = u(p)$, 由于 p 为 $B(z_0, r)$ 中任一点, 故

$$\tilde{\phi}(z) = u(z), \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

由于 $\tilde{\phi}$ 在 $B(z_0, r)$ 上调和, 故 $u(z)$ 在 $B(z_0, r)$ 上调和.

定义: 设区域 D 有界, 若存在 $w(z)$, 在 D 上调和, 在 \bar{D} 上连续,

且 $w(\xi_0) = 0$, $\xi_0 \in \partial D$, $w(z) > 0$, $\forall z \in \bar{D} \setminus \{\xi_0\}$.

则称 $w(z)$ 为 ξ_0 点的一个调函数.

定理: 若 D 有界, $\xi_0 \in \partial D$ 有调函数, 且 f 在 ∂D 上有界, 在 ξ_0 点连续,

则上述定理中 $u(z)$ 满足
$$\lim_{\substack{z \in D \\ z \rightarrow \xi_0}} u(z) = f(\xi_0).$$

证明. 只需证

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u(z) \leq f(\xi_0),$$

$$\underline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u(z) \geq f(\xi_0).$$

下证第一式:

① f 在 ξ_0 点连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \xi \in B(\xi_0, \delta) \cap \partial D,$
 $|f(\xi) - f(\xi_0)| < \varepsilon.$

② 构造调和函数 $w(z)$, 满足

(a) $\forall \xi \in \partial D, w(\xi) \geq f(\xi)$

(b) $w(\xi_0) = f(\xi_0) + \varepsilon.$

若 $W(x)$ 存在, 则由 (1) 知 $\forall v \in B(f), \forall \xi \in \Omega$.

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) \leq f(\xi) \leq W(\xi).$$

由于 $v(z) - W(z)$ 次调和, 故 $u(z) \leq W(z), \forall z \in \Omega$.

$$\text{故 } u(z) = \sup_{v \in B(f)} v(z) \leq W(z). \quad \forall z \in \Omega.$$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u(z) \leq \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} W(z) = f(\xi_0) + \varepsilon.$$

$$\text{由 } \varepsilon \text{ 任意小, } \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u(z) \leq f(\xi_0).$$

(3) $W(z)$ 构造:

$$W(z) = f(z_0) + \varepsilon + \frac{\omega(z)}{\omega_0} (M - f(z_0)).$$

其中 $\omega(z)$ 为 z_0 点调函数, M 为 $|f|$ 的上界,
 ω_0 为 $\omega(z)$ 在 $\bar{\Omega} \setminus B(z_0, \delta)$ 的正的下确界

证 $W(z)$ 满足 (a)(b):

(b) $\omega(z_0) = 0$, 故 $W(z_0) = f(z_0) + \varepsilon$.

(a): 若 $\xi \in \partial\Omega \cap B(z_0, \delta)$ 时

$$W(\xi) \geq f(z_0) + \varepsilon \geq f(\xi).$$

若 $\xi \in \partial\Omega \setminus B(z_0, \delta)$ 时

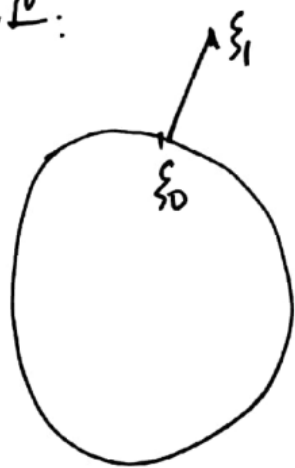
$$W(\xi) \geq f(z_0) + \varepsilon + M - f(z_0) = M + \varepsilon \geq f(\xi)$$

此时用引 $W(z) \geq \omega_0$, $\forall z \in \partial\Omega \setminus B(z_0, \delta)$.

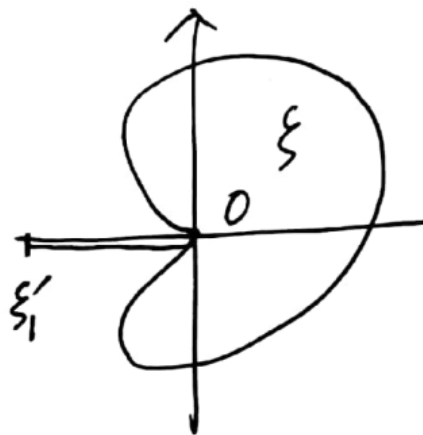
问题: 什么时候开函数存在?

引理: 设 D 有界, $\xi_0 \in \partial D$, 若存在以 ξ_0 为端点的线段 $[\xi_0, \xi_1]$ 落在 \bar{D} 外部, 则 ξ_0 开函数存在.

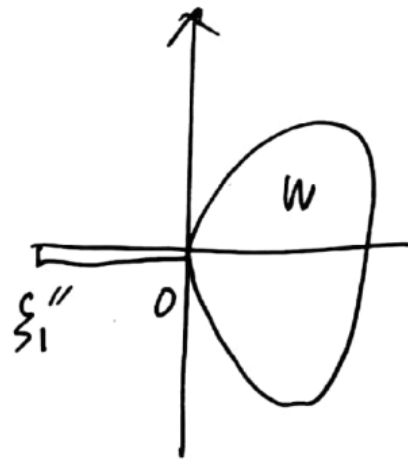
证:



$$\xi = \frac{z - \xi_0}{z - \xi_1}$$



$$w = \sqrt{\xi}$$



$$\xi_t = t\xi_0 + (1-t)\xi_1, \quad 0 < t \leq 1.$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_t - \xi_0}{\xi_t - \xi_1} = -\frac{1-t}{t} < 0, \quad t \in (0, 1)$$

$$\xi_t = t\xi_0 + (1-t)\xi_1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_t - \xi_0}{\xi_t - \xi_1} = -\frac{1-t}{t} < 0, \quad t \in (0, 1)$$

取 $w = \sqrt{\xi}$ 将 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 映为右半平面分支.

则此时 $u(z) = \operatorname{Re} w(z) \geq 0, \quad \forall z \in D.$

$$u(\xi_0) = 0.$$

故 $u(z)$ 为调函数.

例: 设 $\Omega = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$, 定义

$$f(z) = \begin{cases} 0, & |z|=1 \\ 1, & z=0 \end{cases}$$

则不存在 Ω 上调和函数 u , 使 $u|_{\partial\Omega} = f$.

证: ① 若存在 u , 则 u 是径向对称的, 即 $u(z) = u(e^{i\theta}z)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

u 只与 r 有关, 与 θ 无关.

因为若 u 调和, $u(e^{i\theta}z)$ 也调和, 且 $u(z) - u(e^{i\theta}z)|_{\partial\Omega} = 0$.

由极值原理 $u(z) = u(e^{i\theta}z)$, $\forall z \in \Omega$.

$$\textcircled{2} \cdot u = u(r): \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) u = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0.$$

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = C, \quad u = C \log r + C'$$

$$\text{当 } r=1 \text{ 时, } C' = 0 \quad \text{故 } u = C \log r$$

当 $r \rightarrow 0$ 时 $u = 1$, 相矛盾. 从而 u 不存在.

期末复习

第一章:

复数概念(辐角定义), 可导, 可微, 全纯, 实可微,
调和, 共轭调和,

多值函数(对数函数, 幂函数, 支点, 单值域而求法.)

分式线性变换, 特殊区域间的共形映射而构造.

第二章:

Cauchy 定理, Cauchy '引理', Cauchy 公式.

复积分的计算 (用定义, Cauchy '引理', 无界区域方法, 留数定理, 无界区域留数定理)

原函数, Liouville 定理, Morera 定理.

无界区域情形下的 Cauchy 定理, Cauchy '引理'.

第三章:

级数的级, 幂级数的收敛域, Abel定理,

连续函数的幂级数展开, 零点的孤立性.

Laurent 展开, 孤立奇点的性质(可去, 极点, 本性).

无穷远奇点, 亚纯函数.

第四章:

实变函数的最大模原理 (有界, 无界).

调和函数的极值原理.

Schwarz 引理, 特殊区域的自同构, 特殊区域间的不变式

幅角原理, Rouché 定理, 零点个数判断.

单叶函数的性质 (开映射, 反函数).

第五章: 留数的计算, 无穷远留数,
复积分的计算
实积分的计算 (常见类型)

第六章: 全纯开拓, Schwarz 对称 (四种类型).
幂级数全纯开拓, 奇点亚纯点的判断.

第七章:

Montel 定理.

黎曼映照定理.

边界对应定理 (两种).

第八章:

黎曼积分, Jensen 公式及应用.

无穷乘积收敛判断.

Weierstrass 黎曼积分构造.

Hadamard 分解定理及应用 (引理 4.6 证明).

第九章: 调和函数.

平均值'引理', Schwarz '引理', Poisson '引理'. (圆, 上半平面).

极值原理, Harnack 不等式.

次调和函数.

Dirichlet 问题

可去奇点 (P306; 14, 18).