复分析 H 作业解答

原生生物

* 对应教材为史济怀、刘太顺《复变函数》与 Stein《复分析》。

目录

1 第一次作业

1. (1.3 节定理、1.3.5)

   (1) 设 $z=x+iy$，与 N 点连线为 $(tx,ty,1-t),t\in\mathbb{R}$，与球面交点满足 $t^2x^2+t^2y^2+(1-t)^2=1$，除 $t=0$ 外解为 $t=\frac{2}{x^2+y^2+1}=\frac{2}{|z|^2+1}$，带入得交点为 $(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1},\frac{z-\bar{z}}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})$。

   (2) 由 (1) 直接计算验证，$\frac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3}=\frac{z+\bar{z}+z-\bar{z}}{|z|^2+1-(|z|^2-1)}=z$，由此得证。

   (3) 过 N 点圆对应直线：过 N 圆周与 N 连直线组成平面，与复平面的交为直线，而 N 与复平面直线确定平面，与球面交为过 N 点圆。

   不过 N 点圆对应圆：由旋转对称，不妨设复平面上圆为 $(x-a)^2+y^2=r^2$，由 (1) 可知对径点 $(a-r,0),(a-r,0)$ 在球面上对应点的中点为

   $$\left(\frac{a-r}{1+(a-r)^2}+\frac{a+r}{1+(a+r)^2},0,\frac{1}{2}\left(\frac{(a-r)^2-1}{1+(a-r)^2}+\frac{(a+r)^2-1}{1+(a+r)^2}\right)\right)$$

   而圆上一点 $(a+r\cos\theta,r\sin\theta)$ 对应点为

   $$\left(\frac{2(a+r\cos\theta)}{1+a^2+r^2+2r\cos\theta},\frac{2r\sin\theta}{1+a^2+r^2+2r\cos\theta},\frac{-1+a^2+r^2+2r\cos\theta}{1+a^2+r^2+2r\cos\theta}\right)$$

   计算知两者距离为 $2r\sqrt{\frac{1}{(1+(a+r)^2)(1+(a-r)^2)}}$，与 θ 无关，因此对应的点为一个球与单位球的交点，即为圆，由此得证。

2. (1.2.14)

   (1) 此时 $\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0$，设 $\beta=m+n\mathrm{i},z=x+y\mathrm{i}$，可得 $2mx+2ny+d=0$，从而为直线。

   (2) 此时可化为 $(az+\beta)(a\bar{z}+\bar{\beta})=\beta\bar{\beta}-ad$，即 $|az+\beta|=\sqrt{|\beta|^2-ad}$，圆心为 $-\frac{\beta}{a}$，半径 $\frac{\sqrt{|\beta|^2-ad}}{a}$。

3. (2.2.2)

   * 以下设 $f=u+\mathrm{i}v$，且 u_x 代表 $\frac{\partial u}{\partial x}$

   (1) 由于 $u=C$，由 CR 方程知 $v_x=v_y=0$，从而 $v=C'$，由此得证。

   (2) 与 (1) 同理知 $u_x=u_y=0$，由此得证。

   (3) 由题意 $u^2+v^2=C$，求偏导得 $\begin{cases}uu_x+vv_x=0\\uu_y+vv_y=0\end{cases}$，代入 CR 方程知 $\begin{cases}uv_y-vu_y=0\\uu_y+vv_y=0\end{cases}$，从而 $(u^2+v^2)v_y=0$，分析知 $v_y=0$，同理 $u_x=u_y=v_x=0$，由此得证。

   (4) $v=0$ 时由 (2) 知结果，否则有 $u=Cv$，求偏导代入 CR 方程得 $\begin{cases}v_y=-Cu_y\\u_y=Cv_y\end{cases}$，解得 $u_y=v_y=0$，同理 $u_x=v_x=0$，由此得证。

   (5) 对 $u=v^2$ 求偏导代入 CR 方程得 $\begin{cases}v_y=-2vu_y\\u_y=2vv_y\end{cases}$，从而 $(4v^2+1)u_y=0$，同理 $u_x=v_x=v_y=0$，由此得证。

4. (2.2.3)

   设 $f=u+\mathrm{i}v$，则 $u=\sqrt{xy},v=0$，$u_x=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$，0 处偏导为从 x 方向趋于 0，由此为 0，同理 $u_y(0)=0$，因此满足 CR 方程。

   由于 f 只有 $xy\geq 0$ 时有意义，0 不为定义域内点，因此不实可微，从而不可微。

5. (2.2.11)

   设 $f=u+\mathrm{i}v$，则 $\log|f(z)|=\frac{1}{2}\log(u^2+v^2)$，对 x 求两次偏导得

$$\frac{(u^2+v^2)(uu_{xx}+vv_{xx})-u^2u_x^2-v^2v_x^2+u^2v_x^2+v^2u_x^2-4uvu_xv_x}{(u_2+v_2)^2}$$

   对 y 求两次偏导即为把此式中 x 替换为 y，由 CR 方程，$u_xv_x=-u_yv_y, u_x^2=v_y^2, u_y^2=v_x^2$，对两偏导可消去除第一项外的全部项，再由 u,v 调和消去第一项，可知 $\log|f(z)|$ 调和。

   $\arg f(z)$ 可以为 $\arctan\frac{v}{u}$(正半轴上为 0)、$\arctan\frac{v}{u}\pm\pi$。由于定义域不包含负半轴，在各交界处连续变化，因此只需要考察 $\arctan\frac{v}{u}$ 是否调和。对 x 求两阶偏导得

$$\frac{u^3v_{xx}-v^3u_{xx}-u^2vu_{xx}+uv^2v_{xx}+(v^2-u^2)u_xv_x+uv(u_x^2-v_x^2)}{(u^2+v^2)^2}$$

   仍类似上一种情况求和可消去，由此调和。

   对 $|f(z)|$，记 $g(z)=\log|f(z)|$，则 $|f(z)|=\mathrm{e}^{g(z)}$，因此 $\Delta|f(z)|=\mathrm{e}^g(g_{xx}+g_{yy}+g_x^2+g_y^2)$，由 g 调和知其为 $\mathrm{e}^g(g_x^2+g_y^2)$，由此 $|f(z)|$ 调和只能 g 为常数，即 $|f(z)|$ 为常数，由 2.2.2(3) 知 f 为常数，矛盾。

6. (2.2.15)

   令 $u(z)=\ln|z|$，计算知其调和。若存在共轭调和函数 v，由 CR 方程知 $v_y=\frac{x}{x^2+y^2}, v_x=-\frac{y}{x^2+y^2}$，积分得 $v=\arctan\frac{y}{x}+C$。即 v 在每一点必须为 $\operatorname{Arg}z+\{0,\pi\}$ 中元素加上某共同的 C，分析知无论如何选择也不能连续，矛盾。

7. (2.3.3)

   若 $f'(1)\neq 0$ 且 $\arg f'(1)\neq 0$，设其为 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，由对称不妨设 $\theta\in(0,\pi]$。由导数连续，

$$\forall\varepsilon,\exists\delta,|z|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(z+1)-1}{z}-r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\right|<\varepsilon$$

   由此 $|f(z+1)|>|1+rz(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)|-\varepsilon|z|$。

   当 $\theta\leq\frac{\pi}{2}$ 时，取 $\arg z=\frac{3\pi}{2}-\theta$，否则取 $\arg z=0$，再令 $\varepsilon<\min(\frac{r}{4},\frac{r^2}{4})$，即有 $|z+1|<1, |f(z+1)|>1$，矛盾。

8. (2.2.4)

   令 $g(z)=\frac{f(z_0z)}{f(z_0)}$，则其满足 2.2.3 条件，由此 $g'(1)=\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}>0$，即得证。

2 第二次作业

1. (2.4.6)

   * 设主支辐角范围为 $(0,2\pi)$

   由于 $\log z=\log|z|+\mathrm{i}\arg z$，$\operatorname{Re}\log z^2=2\log|z|, \operatorname{Im}\log z^2=\arg z^2=\begin{cases}2\arg z & \arg z<\pi\\ 2\arg z-2\pi & \arg z\geq\pi\end{cases}$。

2. (2.4.23)

   记 $\Delta_c\operatorname{Log}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$ 为简单闭曲线 C 绕一圈的变化量，由于 $f(z)=\log\left|\frac{z^2-1}{z}\right|+\mathrm{i}\operatorname{Arg}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$

$$\Delta_cf(z)=\mathrm{i}(\Delta_c\operatorname{Arg}(z+1)+\Delta_c\operatorname{Arg}(z-1)-\Delta_c\operatorname{Arg}z)$$

由此，$f(z)$ 支点为 $-1,0,1$，所给域中的简单闭曲线或不包含支点，或包含 $0,1$ 两个支点，第二种情况 $\Delta_c=0+2\pi-2\pi=0$，由此可分出单值分支。

3. (2.4.11)

   $\mu=\frac{1}{2}$ 时，$(z^\mu)^2$ 与 $z^{2\mu}$ 为单值函数，$(z^2)^\mu$ 为多值函数，由此与前两者不同。

   设 $\mu=a+b\mathrm{i}$ 由于 $z^\mu=\mathrm{e}^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(b\log|z|+a(\arg z+2k\pi))}$，且 z^2 为单值函数，$(z^\mu)^2$ 的实部与虚部指数分别对应乘 2，因此即为 $\mathrm{e}^{2a\log|z|-2b(\arg z+2k\pi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2b\log|z|+2a(\arg z+2k\pi))}$，此即 $z^{2\mu}$，因此前两者相等。

4. (2.4.22)

   $f(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^p$，多值部分为 $\left(\frac{z}{1-z}\right)^p$，但 $\operatorname{Arg}\frac{z}{1-z}=\operatorname{Arg}z-\operatorname{Arg}(1-z)$，在所给域中，任何简单闭曲线或不包含 $0,1$，或均包含，绕一周后 $\operatorname{Arg}\frac{z}{1-z}$ 不变，由此可分出单值分支。

5. (2.4.26)

   由于此函数支点为 $\{-1,1\}$，而挖去线段后域中任何简单闭曲线不可能围绕支点，由此可分出单值分支。

   $f(z)=\log|1-z^2|+\mathrm{i}\operatorname{Arg}(1-z^2)$，考虑 z 沿 $|z-1|=1$ 的下半圆从 0 连续变化到 2，则 $\operatorname{Arg}(1-z)$ 增大 π，$\operatorname{Arg}(1+z)$ 不变，由此最终结果为 $f(2)=\log 3+\mathrm{i}\pi$。

6. (2.4.27)

   由定理 2.4.7 可知其可分出单值分支，由于

   $$f(z)=|1-z|^{3/4}|1+z|^{1/4}\exp\left(\mathrm{i}(\frac{3}{4}\operatorname{Arg}(1-z)+\frac{1}{4}\operatorname{Arg}(1+z))\right)$$

   i 从 $[-1,1]$ 的左侧变化到 $-\mathrm{i}$，$\operatorname{Arg}(1-z)$ 增大 $\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{Arg}(1+z)$ 增大 $\frac{3\pi}{2}$，因此 $f(-\mathrm{i})=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{8}\mathrm{i}}$。

3 第三次作业

1. (P73 命题 2.5.7)

   构造分式线性变换 $f(z)=(z,z_2,z_3,z_4)$，计算知 $f(z_2)=1,f(z_3)=0,f(z_4)=\infty$。

   当 $\operatorname{Im}(z_1,z_2,z_3,z_4)=0$ 时，由于分式线性变换不改变交比，而变换后的交比为 $f(z_1)$，因此 $f(z_1)$ 为实数，即变换后成为圆周。由于 L^{-1} 亦为分式线性变换，因此 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆。

   当 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆时，变换后 $L(z_1)$ 与 $0,1,\infty$ 共圆，必在实轴上，因此 $\operatorname{Im}(z_1,z_2,z_3,z_4)=0$。

2. (2.5.3)

   充分：记 $z=x+y\mathrm{i}$。当 $\operatorname{Im}z\geq 0$ 时，$\operatorname{Im}w(z)=\operatorname{Im}\dfrac{(ax+b+ay\mathrm{i})(cx+d-cy\mathrm{i})}{(cx+d)^2+c^2y^2}$，分子虚部即为 $ay(cx+d)-cy(ax+b)=(ad-bc)y\geq 0$，由此得证。

   必要：考虑边界可知其必然把实轴映射到实轴，代入 $0,\infty$ 可知 $\frac{a}{c},\frac{b}{d}\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$。由于 c,d 不全为 0，不妨设 $c=1$，此时若 $b,d\notin\mathbb{R}$，代入 1 可推出 $ad=bc$，矛盾，因此 a,b,c,d 的比例为实数。由于 $\operatorname{Im}w(\mathrm{i})>0$，可知 $\operatorname{Im}(a\mathrm{i}+b)(d-c\mathrm{i})=ad-bc>0$，由此得证。

3. (2.5.4)

   (i) $\begin{cases}a+b=\mathrm{i}(c+d)\\ b-a\mathrm{i}=0\\ b-a=-\mathrm{i}(d-c)\end{cases}$，不妨设 $a=1$ 可解得 $w=\dfrac{z+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}z+1}$。

(ii) $\begin{cases} b - a\mathrm{i} = \mathrm{i}(d - c\mathrm{i}) \\ b + a\mathrm{i} = 0 \\ b + a = -\mathrm{i}(d + c) \end{cases}$，不妨设 $a = 1$ 可解得 $w = \dfrac{z - \mathrm{i}}{(2 - \mathrm{i})z + 2\mathrm{i} - 1}$。

4. (2.5.5)

   由命题 2.5.7 证明过程可直接写出其为 $(z, x_2, x_1, x_3) = \dfrac{z - x_1}{z - x_3} \cdot \dfrac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2}$。

5. (2.4.15)

   设 $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$，化简得 $\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}(z_1 z_2 - 1) = 0$，若 $z_1 \neq z_2$，则只能 $z_1 z_2 = 1$。

   (i) 两复数乘积为 1 时辐角关于 x 轴对称，因此上半平面必然为单叶性域。

   (ii) 与 (i) 同理得结论。

   (iii) 两复数模均小于 1，积的模仍小于 1，因此无心单位圆盘内部必然为单叶性域。

   (iv) 两复数模均大于 1，积的模仍大于 1，因此单位圆盘外部必然为单叶性域。

6. (2.4.16)

   考虑对每点解方程可知前两问的像为复平面去除 $(-\infty, -1] \cup [+1, \infty)$，后两问的像为复平面去除 $[-1, 1]$。

7. (2.5.16)

   先作变换 $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$，可变为半圆 $\{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$。为利用 Rokovsky 函数，作 $z_2 = -\mathrm{i}z_1$ 将其旋转至下半平面，再作 $z_3 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$ 即可验证成立。复合 z_1, z_2, z_3 后可发现所需变换即为 $\sin z$。

8. (2.5.18)

   先将月牙域变为角状域，将 -1 移至 0，1 移至 ∞，由此构造分式线性变换 $z_1 = \frac{z+1}{z-1}$，像为 $\{z : \arg z \in (-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2})\}$，再放大、旋转 $z_2 = z_1^3, z_3 = \mathrm{i}z_2$，即得整个上半平面。再做分式线性变换 $z_4 = \frac{z_3 - \mathrm{i}}{-\mathrm{i}z_3 + 1}$ 可得结果。复合后变换为 $\frac{3z^2+1}{z^3+3z}\mathrm{i}$。

9. (2.5.21)

   (题目表述有歧义，根据例 6.1.6，ρ 由所给域唯一确定，而不能任意给定)

   先求公共对称点。设对直线的对称点为 $-x, x$，由对圆对称可知 $(a - x)(a + x) = r^2$，从而对称点为 $\pm\sqrt{a^2 - r^2}$，从而类似理 2.5.17 可构造 $w(z) = \lambda \frac{z + \sqrt{a^2 - r^2}}{z - \sqrt{a^2 - r^2}}$，取 $z = 0$ 可知 $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，由此得变换。

4 第四次作业

1. (3.1.5)

   设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，可得原积分化为

$$\mathrm{i}r^{n+k+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(n-k+1)} \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & n - k + 1 \neq 0 \\ 2\pi\mathrm{i} & n - k + 1 = 0 \end{cases}$$

2. (3.1.9)

   由 Green 公式，

$$\frac{1}{2\mathrm{i}} \int_\gamma \bar{z} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_\gamma (x - y\mathrm{i})\mathrm{d}x + (y + x\mathrm{i})\mathrm{d}y = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_\Omega 2\mathrm{i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   即为面积。

3. (3.1.11)

(i) 由连续，$\forall\varepsilon,\exists\delta,\forall|z-z_0|<\delta,|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，从而 $r<\delta$ 时 $|f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-f(z_0)|<\varepsilon$，故

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta-f(z_0)\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}|f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-f(z_0)|\mathrm{d}\theta<\varepsilon$$

从而得证。

(ii) 令 $z=z_0+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，左式即化为 (i) 的形式。

4. (3.1.12)

(i) 在 3.1.11(i) 中，将 θ 积分限换为 θ_0 与 $\theta_0+\alpha$，过程不变，结论仍然成立，从而换元仍可得到 3.1.11(ii) 中式子。令 $g(z)=(z-a)f(z)$，则由极限补充 a 点定义可知 $g(z)$ 可在 D 上连续，利用 3.1.12(ii) 知左侧等于 $\mathrm{i}(\theta_0+\alpha-\theta_0)g(a)=\mathrm{i}\alpha A$。

(ii) 仍令 $g(z)=(z-a)f(z)$，并换元 $z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，可化为类似 3.1.11(i) 形式，类似估算得成立。

5. (3.2.1)

(ii) 原式 $=\int_{|z|=2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\int_{|z|=2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z=4\pi\mathrm{i}$

(iv) 原式 $=\int_{|z-a\mathrm{i}|=\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-a\mathrm{i})(z+a\mathrm{i})}\mathrm{d}z+\int_{|z+a\mathrm{i}|=\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-a\mathrm{i})(z+a\mathrm{i})}\mathrm{d}z$

令 ε 足够小并趋于 0，左侧为 $\frac{\mathrm{e}^{a\mathrm{i}}}{a\mathrm{i}+a\mathrm{i}}\int_{|z-a\mathrm{i}|=\varepsilon}\frac{1}{z-a\mathrm{i}}\mathrm{d}z=\frac{\pi\mathrm{e}^{a\mathrm{i}}}{a}$，同理右侧为 $\frac{\pi\mathrm{e}^{-a\mathrm{i}}}{-a}$，从而和为 $\frac{2\pi\mathrm{i}}{a}\sin a$。

6. (3.2.2)

由全纯可知对任何 R 积分结果不变，再由习题 3.1.12(ii) 知结论。

7. (3.2.4)

(i) 由全纯可知对任何 r 积分结果不变，再由习题 3.1.11(i) 知结论。

(ii) 由 (i)，

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z|<r}f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z|<r}Rf(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r Rf(0)\mathrm{d}R=f(0)$$

8. (3.3.4)

从 1 到 0 的线段上原积分的结果为 $\arctan x\big|_1^0=-\frac{\pi}{4}$，将 γ 添上此线段成为闭曲线。

由原式 $=\frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\int_\gamma\frac{1}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z+\int_\gamma\frac{1}{z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z\big)$，任何闭曲线上的积分结果根据绕转不同只能为 $\frac{k\cdot2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=k\pi,k\in\mathbb{Z}$。

由此，题中积分加上 $-\frac{\pi}{4}$ 后为 $k\pi$，故为 $\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$。

9. (3.3.5)

对不同的两点 z_1,z_2，$f(z_2)-f(z_1)=\int_{z_1}^{z_2}f'(z)\mathrm{d}z$。由于 z 为凸域，可考虑直接连接两点的线段上的积分，即 $\int_0^1 f'(z_1+t(z_2-z_1))(z_2-z_1)\mathrm{d}t$。由于 $f'(z)$ 实部大于 0，$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}$ 的实部亦大于 0，故两者不等，原命题得证。

5 第五次作业

1. (3.4.5)

(i)

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=1}\left(2+\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)f(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)(\zeta+1)^2\mathrm{d}\zeta}{\zeta^2}=(f(\zeta)(\zeta+1)^2)'|_{\zeta=0}=f(0)+2f'(0)$$

代换 $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 即可得原式。

(ii) 类似 (i)，考虑 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|\zeta|=1}\left(2-\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)f(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$ 知结论。

2. (3.4.6)

由 (i) 左右相等，其实部相等，而左侧积分内实部 ≥ 0，从而 $\mathrm{Re}(2f(0)+f'(0))\geq 0$，同理 $\mathrm{Re}(2f(0)-f'(0))\geq 0$，由此得结论。

3. (3.4.7)

令 $D=\{z:\mathrm{Re}\,z\in[a,b]\}$，$f|_{D\cap G}$ 由对称原理可全纯开拓到 $\{z:\arg z\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}),\mathrm{Re}\,z\in[a,b]\}$，再由唯一性定理可推出 $f|_{D\cap G}=0$，再次利用得 $f(z)=0$。

4. (3.4.9)

记 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则右侧积分为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{2u(z)}{z^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^2}\mathrm{d}z=f'(0)+\overline{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{\overline{z}^2}\mathrm{d}z}$$

而 $\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{\overline{z}^2}\mathrm{d}z=\int_{|z|=r}\frac{z^2f(z)}{r^4}\mathrm{d}z$，由 $z^2f(z)$ 全纯知为 0，从而得证。

5. (3.5.2)

由条件知 $\forall a,\exists C,\forall z\in B(a,R),|f(z)|\leq CR^{\alpha}$，取 $n=[a]+1$ 可知 $|f^{(n)}(a)|\leq n!R^{\alpha-n}$，令 $R\to\infty$ 知 $|f^{(n)}(a)|=0$，从而 f 是不超过 $[\alpha]$ 次的多项式。

6. (3.5.4)

令 $g(z)=\frac{f(z)-\mathrm{i}}{f(z)+\mathrm{i}}$，将 $f(z)$ 值域变换到 $B(0,1)$，且不改变紧性，由有界知为常值，故 f 为常值。

7. (3.5.6)

由导数定义可知连续，而由 Cauchy 积分公式知对任何不通过 z_0 的闭曲线 γ 有 $\int_\gamma\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z=(f(z)-f(z_0))|_{z=z_0}=0$，通过 z_0 时利用极限逼近可知为 0，由此得证。

8. (4.1.12)

引理：对区域 D 内的任何有界闭集 U，存在 r 使得以 $\forall x\in U,B(x,r)\subset D$。若否，存在一列点 $x_n\in D$ 使得 $B(x_n,\frac{1}{n})\not\subseteq D$，由紧性知 x_n 有聚点 x，设 $B(x,\varepsilon)\subset D$，考虑充分大的 N 使得 $n>N$ 时 $x_n\in B(x,\frac{\varepsilon}{2})\subset D$。再使 $n>\frac{\varepsilon}{2}$ 即知矛盾。

记 $f_n=u_n+\mathrm{i}v_n$，若 v_n 处处发散已得证，否则不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(z_0)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z_0)$ 收敛。

由 3.4.9，对其中有界闭集 U，$\forall z\in U$，取对应的 $B(z,r)$，并取 r 更小使所有 $B(z,r)$ 并的闭包在 D 中，记为 $\overline{U_r}$，则有 $f_n'(z)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}u_n(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$。由柯西判别准则知 $\forall\varepsilon,\exists N,\forall n,m>N,\forall z\in\overline{U_r},|\sum_{k=n}^{m}u_k(z)|<\varepsilon$，从而 $|\sum_{k=n}^{m}f_k'(z)|\leq\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}|\sum_{k=n}^{m}u_m(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta<\frac{2\varepsilon}{r}$，由柯西判别准则即知 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(z)$ 在 D 中内闭一致收敛。

利用定理 4.1.5，由于 $f_n(z)$ 为 $f_n'(z)$ 从 z_0 到 z 道路上的积分，由一点收敛可知逐点收敛。在任意连通紧集 $U\subset D$ 中，以每点为半径作闭包包含于 D 的开圆，再利用有限覆盖取出有限个，并取这有限个开圆并的闭包，所得集合包含 U，且任何两点间存在不超过这些开圆直径之和 (记为 L) 的道路，再由长大不等式即知 $|\sum_{k=n}^{m}f_k(z)|\leq|\sum_{k=n}^{m}f_k(z')|+L\sup_{z\in U}|\sum_{k=n}^{m}f_k'(z)|$，$z'$ 为 U 中任意一点，从而由柯西判别准则知一致收敛。对不连通的紧集，先类似上方取有限开覆盖闭包成为有限个不连通紧集，再在每个连通分支间添加道路即成为连通紧集，由此知 $\sum_{n=1}^{\infty}f(z)$ 内闭一致收敛。

9. (4.1.13)

记 $d_n(z)=f_n(z)-f_{n-1}(z),f_0(z)=0$，由定理 4.1.9 知结论。

10. (4.1.14)

(i) 考虑 $D=\{z:\operatorname{Re}z\geq x_0+\varepsilon\},\varepsilon>0$，由于 $\sum_{n=1}^\infty a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n z_0}$ 收敛，可知 $|a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n z_0}|$ 趋于 0，从而有界，$\forall z\in D,\forall n,|a_n\mathrm{e}^{\lambda_n(z_0-z_n)}|\leq|a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n\varepsilon}|=|a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n z_0}||\mathrm{e}^{\lambda_n(z_0-\varepsilon)}|\leq|a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n z_0}||\mathrm{e}^{\lambda_1(z_0-\varepsilon)}|$ 有界，由 Abel 判别法可知 $\sum_{n=1}^\infty a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n z}$ 在 D 内一致收敛。利用 4.1.12 中证明的引理，半平面里任何紧集必然包含在某个 D 中，从而得证。

(ii) 半平面里 $|a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n z}|\leq|a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n z_0}|$，由 Weierstrass 判别法可知绝对一致收敛。

11. (定理 4.2.9)

改变 a_0 的值可不妨设 $S=0$。记 $S_n=\sum_{k=0}^n a_n$，则 $\lim_{n\to\infty}S_n=0$，于是

$$\sum_{n=0}^\infty a_n z^n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}S_n(z^n-z^{n+1})+S_Nt^N=(1-z)\sum_{n=0}^\infty S_n z^n$$

$\forall\varepsilon$，分段估计知 $\exists N,\forall n>N,p,|\sum_{k=n}^{n+p}a_kz^k|<\varepsilon(1+\frac{|1-z|}{1-|z|})$。当 $z\in S_\alpha(1)$，估算可知 $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ 在 $B(1,t)$ 内可确定上界，从而可知极限存在为 0。

12. (例 4.2.10)

由例 4.2.7 收敛半径为 1，求导后和为 $\frac{1}{1-z}$，其原函数为 $-\operatorname{Log}(1-z)+z_0$，考虑 0 点值知结果为 $-\log(1-z)$。

6 第六次作业

1. (4.2.2)

(ii) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^{n^2}}}=\dfrac{1}{2^n}$，$n\to\infty$ 时为 0，由此收敛半径为无穷，

(iv) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}=\mathrm{e}$，由此收敛半径为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$。

2. (4.2.4)

(i) $|z|<1$ 时 $\sum_{n=0}^\infty|a_nz^n|<\sum_{n=0}^\infty a_0|z^n|=\frac{a_0}{1-|z|}$，由此绝对收敛，故收敛，从而 $R\geq1$。

(ii) *$R>1$ 时有反例。如令 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{(k+1)4^n} & n=4k\\ \frac{1}{(k+1)4^{n+1}} & n=4k+1,4k+2,4k+3\end{cases}$，可发现收敛半径为 4，但在 $z=4\mathrm{i}$ 不收敛。

当 $R=1,z\neq1$ 时，由于 $|\sum_{n=0}^A z^n|=\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|\leq\frac{2}{|1-z|}$ 对 A 有界，a_n 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知收敛。

3. (4.2.7)

由一致收敛，$\forall0<r<1,\int_{|z|=r}f(z)\overline{f(z)}\mathrm{d}z=2\pi\sum_{n=0}^\infty a_nr^n\cdot\overline{a_n}r^n=2\pi\sum_{n=0}^\infty|a_n|^2r^{2n}$。由 f 有界 M，此式对 $0<r<1$ 有上界 $2\pi M^2$。由此，$\sum_{n=0}^\infty|a_n|^2$ 的任意部分和由极限可知不超过 M^2，从而根据单调有界知收敛，即得证。

4. (4.2.8)

(i) 由定义 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<\infty$，而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0$，由此知收敛半径为无穷，即为整函数。

(ii) * 区域应为 $|z|\leq r<R$，且将不等式中 R 换为 r。

由 $\sum_{n=0}^\infty a_nr^n$ 收敛，可知 $|a_nr^n|$ 有上界 M。

$$|\varphi^{(k)}(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+k}}{n!}z^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a_{n+k}}{n!}\right||z|^n \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{r^k}\frac{|z|^n}{r^n n!} = \frac{M}{r^k}\mathrm{e}^{\frac{|z|}{r}}$$

5. (4.3.1) 令 $g(z)=(z-a)f(z)$，定义 $g(a)=0$。由 f 全纯可知 g 在 $B\backslash\{a\}$ 全纯，又利用连续由 Cauchy 积分定理可知在 B 上全纯，因此 a 至少为 1 阶零点，从而由命题 4.3.4 知 f 在 a 点全纯。

6. (4.3.4)

   (i)

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R} f(\zeta)\frac{\zeta^{n+1}-z^{n+1}}{(\zeta-z)\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R} f(\zeta)\frac{z^k}{\zeta^{z+1}}\mathrm{d}\zeta = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{z+1}}\mathrm{d}\zeta$$

   由 Cauchy 积分公式知即为左式。

   (ii) 由 $f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$ 减去第一问即得结果。

7. (4.3.6)

   (i) 由定义 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，记 $\mathrm{Re}\,f(z)=u(z)$，与习题 3.4.9 类似得结果。

   (ii)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\big(u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-A(r)\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\big|u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-A(r)\big|\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\big(A(r)-u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big)\mathrm{d}\theta = 2A(r)-2u(0)$$

   最后一步利用 Cauchy 积分公式取实部。

8. (4.3.7)

   (i) 记 $\mathrm{Re}\,f(z)=u(z)$，由习题 4.3.6(i)，$|a_n| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = 2u(0)=2$。

   (ii) 第一个不等号：取 $|z|<r<1$，由习题 3.4.8 知

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+z}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}\right)u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z|^2}u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$
$$\ge \frac{r-|z|}{r+|z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{r-|z|}{r+|z|}$$

   令 $r\to 1^-$ 可知成立。

   第二个不等号：由模定义可知结果。

   第三个不等号：$|f(z)| \le 1+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n z^n| \le 1+\sum_{n=1}^{\infty}2|z|^n = \frac{1+|z|}{1-|z|}$。

   (iii) 由 (ii) 知 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 也满足题设条件，考虑其二次、三次项利用 (i) 得结果。

9. (4.3.14)

   (i) $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)z^n$ 收敛半径至少为 1，由习题 4.2.8(i) 知结论。

   (ii) $\mathbb{C}$ 上的紧集不妨设包含在 $B(a,R)$ 中。则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f^{(k)}(a)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z-a)^m}{m!}f^{(k+m)}(a)\right|$$
$$= \left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z-a)^m}{m!}\sum_{k=0}^{p-1}f^{(k+m)}(a)\right| \le \sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{(z-a)^m}{m!}\right|\left|\sum_{k=m}^{m+p-1}f^{(k)}(a)\right|$$

由于收敛，可取 n 足够大使 $\left|\sum_{k=m}^{m+p-1} f^{(k)}(a)\right| < \varepsilon$，此时原式不超过

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{(z-a)^m}{m!}\right|\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|z-a|^m}{m!}\varepsilon = \mathrm{e}^{|z-a|}\varepsilon \le \mathrm{e}^R\varepsilon$$

由此即有内闭一致收敛。

7 第七次作业

1. (5.1.2)

   (i) $-\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)(1-z)^n$

   (iii) 原式为 $\mathrm{Log}(1-\frac{1}{z}) - \mathrm{Log}(1-\frac{2}{z})$，即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{n}z^{-n}$。

   (iv) 分别展开后相乘可知结果为 $\pm\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n 2^k \binom{\frac{1}{2}}{n-k}\binom{\frac{1}{2}}{k} z^{-n+1}$

2. (5.2.6)

   由有一列零点逼近 z_0 可知 z_0 不为极点，若其为可去奇点，由唯一性定理知 f 恒为 0，矛盾，从而得证。

3. (5.2.7)

   $A=\infty$ 直接取极点逼近即可。假设对所有有限的 A，都有收敛于 z_0 的点列 z_n 满足 $f(z_n)=A$，结论成立，否则设某 A 不满足此条件，即存在 r 使得 $f(z)\neq A, \forall z\in B(z_0,r)\backslash z_0$，考虑 $B(z_0,r)\backslash z_0$ 中的 $\frac{1}{f(z)-A}$，由习题 5.2.6 可知 z_0 为 $\frac{1}{f(z)-A}$ 的本性奇点，计算知 $\frac{1}{f(z)-A}$ 收敛到 $\mathbb{C}_\infty$ 中任何数可得 f 亦有此性质，从而得证。

4. (5.2.8)

   由于 $\mathrm{Re}\, f(z)>0$，不可能存在子列收敛到实部小于 0 的数，从而不为本性奇点。由实部不为 0 可知 $\frac{1}{f}$ 亦在此区域全纯，且计算得其非零处实部大于 0。利用习题 3.2.5 可知 $\frac{1}{f}$ 在零点处实部大于 0，因此不为 0，从而得证。

5. (5.3.5)

   (i) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 考虑 $g(z)=\frac{f(z)+f(-z)}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^{2n}$，由于 0 为 $\mathbb{R}, \mathrm{i}\mathbb{R}$ 的交可知 $a_0=0$，从而 $h(z)=\frac{g(z)}{z^2}$ 仍为整函数且满足 $h(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}, h(\mathrm{i}\mathbb{R})\subset \mathrm{i}\mathbb{R}$，由此归纳可知 $g=0$，即得证。

   (ii) 记 $f_0(z)=zf(z)$，满足上问条件，因此为奇函数，从而考虑展开式可知 $f(z)$ 为偶函数。

6. (5.3.6)

   由定理 5.3.3 知 f 为有理函数。因此其为 $z^2+z+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{5}{4}$。

8 第八次作业

1. (补充题)

   定义 $F_\varepsilon(z)=F(z)\mathrm{e}^{-\varepsilon z^\alpha}, 1<\alpha<2$，则其在 S 上全纯，$\overline{S}$ 上连续。当 $\arg z=\pm\frac{\pi}{4}$ 时，考虑辐角可知 $|F_\varepsilon(z)|=|f(z)|\mathrm{e}^{-\varepsilon|z|^2\cos\frac{\pi\alpha}{4}}\le 1$，且类似得 $\lim_{z\to\infty}F_\varepsilon(z)=0$，因此将区域分为两部分后由最大模原理知 $|F_\varepsilon(z)|\le 1$，令 $\varepsilon\to 0$ 即得结果。

2. (4.5.4) 若否，不妨设 $M(r_0)>M(r_1), r_0<r_1$，则 $B(0,r_1)$ 上的最大模不在边界取到，矛盾。

3. (4.5.5) 若某不为常数的多项式 $P(z)$ 无根，则考虑 $\frac{1}{P(z)}$ 可发现其无穷远处趋于 0，且无零点。但利用习题 4.5.4 可知 $M(r)$ 在 $[0,\infty)$ 上递增，与存在 R 使 $|z|>R$ 时 $\left|\frac{1}{P(z)}\right|<\left|\frac{1}{P(0)}\right|$ 矛盾。

4. (4.5.6) 设 $g(z)=f\left(\frac{R^2}{z}\right)$，由 $\lim_{z\to\infty}f(z)$ 存在知 0 是 g 的可去奇点，从而可使 $g\in H(B(0,R))\cup C(\overline{B(0,R)})$，利用习题 4.5.4 知 $\max_{z=r}|g(z)|$ 随 r 增加单调增，由非常数可知严格递增，从而 $M(r)$ 严格减。

5. (4.5.9)

   当 $M(r_1)=0$ 或 $M(r_2)=0$ 时，类似习题 3.4.7 使用 Schwarz 对称原理可知 f 恒为 0，否则记 $g(z)=M(r_1)^{\frac{\log r_2/z}{\log r_2/r_1}}M(r_2)^{\frac{\log z/r_1}{\log r_2/r_1}}$，有 $|g(z)|=M(r_1)^{\frac{\log r_2/|z|}{\log r_2/r_1}}M(r_2)^{\frac{\log |z|/r_1}{\log r_2/r_1}}$，由此知边界上有 $|f(z)|\le|g(z)|$，对 $\frac{f}{g}$ 运用最大模原理可知 $\overline{\Omega}$ 中 $|f(z)|\le|g(z)|$，从而 $M(r)\le M(r_1)^{\frac{\log r_2/r}{\log r_2/r_1}}M(r_2)^{\frac{\log r/r_1}{\log r_2/r_1}}$，两边取 log 即得结论。

6. (4.4.1)

   在每个点附近作充分小圆盘，利用 Cauchy 积分定理知只需考虑一个零点处。设某零点 z_0 附近 $f(z)=(z-z_0)^k h(z)$，$h(z_0)\ne 0$，则去掉全纯部分 $\frac{h'(z)}{h(z)}$ 后积分即为 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{B(z_0,\varepsilon)}\frac{g(z)k}{z-z_0}=kg(z_0)$，因此得证。

7. (4.4.3)

   由介值定理可知其有正实根，由于右半平面 $|\mathrm{e}^{-z}|<1$，根一定落在 $|z-\lambda|=1$ 内，而记 $g(z)=z-\lambda$，利用 Rouché 定理可知 $f(z)$ 在此内的根个数与 $g(z)$ 相同，即得证。

8. (4.4.4)

   先说明 $P(z)=\sum_{k=0}^n a_kz^k$ 零点都在 $B(0,1)$ 中。其显然无正实根，而若 z_0 为零点，考虑 $(1-z_0)P(z_0)$ 可知 $a_nz_0^{n+1}=a_0+\sum_{k=1}^n(a_k-a_{k-1})z_0^k$，若 $|z_0|\ge 1$，利用无正实根可估算得左侧模大于右侧，矛盾。

   利用其有 n 个零点，可知 z 绕 $|z|=1$ 转一圈时 $P(z)$ 转了 n 圈，从而与虚轴有 $2n$ 个交点，即至少有 $2n$ 个不同的 θ 使得 $\operatorname{Re}P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 为 0，即题目中的式子至少有 $2n$ 个不同零点。

   另一方面，记 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则所求式子乘 z^n 后为 z 的 $2n$ 次多项式，因此至多有 $2n$ 个不同零点，即得证。

9. (4.4.6)

   由于此级数在 $B(0,1)$ 收敛于 $\frac{1}{(1-z)^2}$，且幂级数的收敛满足内闭一致收敛，利用 Hurwitz 定理得证。

10. (4.4.7)

    由于此级数在复平面上收敛于 e^z，且幂级数的收敛满足内闭一致收敛，利用 Hurwitz 定理得证。

11. (4.4.11)

    (ii) $|z|=1$ 时 $|2z^5-z^3+3z^2-z|\le 2+1+3+1<8$，不存在零点。

    (iv) $|z|=1$ 时 $|\mathrm{e}^z+1|\le|\mathrm{e}+1|<4$，因此其零点个数与 $-4z^n$ 相同，为 n 个。

9 第九次作业

1. (4.4.12)

   由于 $|f(z)|<|z|$ 在边界成立，由 Rouché 定理知 $z-f(z)$ 与 z 在 $B(0,1)$ 内解个数相同，即得证。

2. (4.4.13)

   (i) 由习题 1.1.5 知 $|z|=1$ 时 $|f(z)|=1$，从而由 Rouché 定理知 $f(z)-b$ 与 $f(z)$ 在 $B(0,1)$ 内零点个数相同，可验证 $f(z)$ 零点恰为 $a_1,\dots,a_n$，均在 $B(0,1)$ 中，从而得证。

(ii) 类似 (i) 由 Rouché 定理知 $b-f(z)$ 与 b 在 $B(0,1)$ 内零点个数相同，即 $B(0,1)$ 内无零点，而边界上 $|f(z)|=1$ 因此无零点，从而只需说明 $f(z)$ 有 n 个零点。$f(z)-b$ 的分子为关于 z 的 n 次多项式 $\prod_{k=1}^n(a_k-z)-b\prod_{k=1}^n(1-\overline{a_k}z)$，当后半部分为 0 时 $|z|>1$，因此前半部分不为 0，由此此多项式的根不可能使后半部分为 0，也即分母不为 0，因此均为整个分式的根，从而得证。

3. (4.4.14)

利用辐角原理知 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=R}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=N$，令 $z=Re^{\mathrm{i}\theta}$ 可得 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}z\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\theta=N$，取实部即可知实部最大值 $\geq N$。

4. (4.4.17)

由定理 4.4.6 与连续性可知 $f(D)=G$，于是对任何 $f(z_0), z_0\in D$，有 $f(z_0)\notin\Gamma$。$f(z)-f(z_0)$ 在 D 中根的个数为 (不妨设两曲线定向相同)$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{w}{w-f(z_0)}\mathrm{d}w$，而后者即为 $z=f(z_0)$ 在 G 中根的个数，因此为 1，从而得证。

5. (4.5.12)

当 f 为常数时，直接估算知成立。

当 f 不为常数且 $f(0)=0$ 时，由习题 4.5.11 知 $|f(Rz)|\leq\frac{2A(R)|z|}{1-|z|}$，再由最大模原理知结论 (由于 $\operatorname{Re}f(z)$ 为调和函数，其最大值在边界取到)。

当 $f(0)\neq 0$ 时，令 $g(z)=f(z)-f(0)$，则 $|f(z)|\leq|g(z)|+|f(0)|$，再利用上一种情况可知

$$M(r)\leq\frac{2r}{R-r}\max_{|z|=R}g(z)+|f(0)|\leq\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{2r}{R-r}|f(0)|+|f(0)|$$

化简得结论。

6. (4.5.13)

(i) 令 $\varphi(z)=\frac{z-1}{z+1}$，其将右半平面映射到 $B(0,1)$，且 1 映射到 0，因此对 $w=\varphi\circ f$ 利用 Schwarz 引理知 $|w(z)|\leq|z|$，此时 $f(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}$。

第一个不等号：计算知 $\operatorname{Re}f(z)=\operatorname{Re}\frac{1+w(z)}{1-w(z)}=\frac{1-|w(z)|^2}{|1-w(z)|^2}\geq\frac{1-|w(z)|}{1+|w(z)|}\geq\frac{1-|z|}{1+|z|}$。

第二个不等号：由实部与模定义知结论。

第三个不等号：计算知 $|f(z)|\leq\frac{1+|w(z)|}{1-|w(z)|}\leq\frac{1+|z|}{1-|z|}$。

(ii) 由 z_0 处等号成立可推出 $|w(z_0)|=|z_0|$，从而 $w(z)=e^{\mathrm{i}\theta}z$，代入即得证。

7. (4.5.15)

由于 $\overline{B(0,1)}$ 为紧集，若其中有无穷多零点则存在聚点，因此 f 恒为 0，矛盾。由其有有限多零点，类似习题 4.5.17 右侧 g$g(z)$，令 $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$，其在 $|z|=1$ 时模为 1，且 $h(B(0,1))\subset B(0,1)\backslash\{0\}$，考虑 h 与 $\frac{1}{h}$ 可知 $|h(z)|=1$，由习题 2.2.2 可知 $h(z)$ 只能为常数，由模为 1 设其为 $e^{\mathrm{i}\theta}$，则 $f(z)=e^{\mathrm{i}\theta}g(z)$。由 $f(z)$ 为整函数，若有非零根，会导致 $g(z)$ 在某处趋于无穷，矛盾，因此只能 $f(z)=e^{\mathrm{i}\theta}z^n$。

8. (4.5.17)

当 f 零点总重数为 1 时，设 $f(z_1)=0$，利用定理 4.5.6 直接知结论，利用归纳法，下假设 f 零点总重数为 $k-1$ 时结论成立。

当 f 零点总重数为 k 时，设 $f(z_1)$ 为 k_1 重零点，可设 $f(z)=(z-z_1)^{k_1}g(z)$，$g(z)$ 其他零点与 $f(z)$ 相同，但 z_1 不为零点，考虑 $h(z)=f(z)\frac{1-\overline{z_1}z}{z_1-z}=(z-z_1)^{k_1-1}g(z)(1-\overline{z_1}z)$，由于 $1-\overline{z_1}z$ 在 $B(0,1)$ 中无零点，$h(z)$ 只有 z_1 的零点重数比 $f(z)$ 少一重，从而零点总重数为 $k-1$。利用归纳假设后两侧同乘 $\left|\frac{z_1-z}{1-\overline{z_1}z}\right|$ 即得证。

9. (4.5.20)

记 $h(z)=\frac{f(z_1)-f(z)}{1-\overline{f(z_1)}f(z)}\frac{1-\overline{z_1}z}{z_1-z}\frac{1-\overline{z_2}z}{z_2-z}$，由 z_1,z_2 均为 $f(z_1)-f(z)$ 零点可知 $h(z)\in H(B(0,1))$。$|z|=1$ 时 $|h(z)|=\left|\frac{f(z_1)-f(z)}{1-\overline{f(z_1)}f(z)}\right|$，由 $f(B(0,1))\subset B(0,1)$ 知模不超过 1，从而由最大模原理 $h(B(0,1))\subset\overline{B(0,1)}$，由此 $|h(0)|\le 1$，代入得证。

10. (4.5.24)

记 $w(z)=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$，其为上半平面到 $B(0,1)$ 的全纯同构，由此构造 $\varphi:\mathrm{Aut}(B(0,1))\to\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^+)$，$\varphi(f)=w^{-1}\circ f\circ w$，可知 φ 为群同构，由此可知 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^+)$ 即为所有 $w^{-1}\circ f\circ w$，其中 $f\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$。

10 第十次作业

1. (4.5.18)

* 题目有误，左侧分母应为 $|f(0)|-|z|$。

左：由 Schwarz-Pick 定理可知 $\left|\frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|\le|z|$，由习题 1.1.6(iii) 可知 $\frac{|f(0)|-|f(z)|}{1-|f(0)f(z)|}\le\left|\frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|$，从而 $\frac{|f(0)|-|f(z)|}{1-|f(0)f(z)|}\le\left|\frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|\le|z|$，变形即得证。

右：由习题 1.1.6(iii) 可知 $\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(0)f(z)|}\le\left|\frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|$，从而 $\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(0)f(z)|}\le|z|$，变形即得证。

2. (4.5.21)

利用 4.5.18，记 $g(z)=\frac{f(z)}{z}$，又由 $g(0)=f'(0)$ 可去奇点即得证。

3. (4.5.22)

利用 Schwarz-Pick 定理可知 $\left|\frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|\le|z|$，记 $g(z)=\frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}f(z)}$，利用 $g(z)$ 替换 $f(z)$ 知要证的式子可化为 $|f(0)|z|^2-g(z)|\le|z||1-\overline{f(0)}g(z)|$，同平方后可进一步化为 $(|z|^2-|g(z)|^2)(1-|z|^2|f(0)|^2)\ge 0$，从而成立。

4. (4.5.29)

通过平移可不妨设 $z_0=0$，在闭包在 D 中的某邻域 $B(0,r)$ 展开为 Taylor 级数 $z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$。考虑使得 $a_n\ne 0$ 的大于 1 的最小的 n，记其为 m。记 $f_k(z)$ 为 $f(z)$ 迭代 k 次的函数，可发现 $f_k(z)$ 可在邻域中展开为 $z+Na_mz^m+\dots$。由 D 有界可设 $f_k(z)$ 有上界 M，考虑 $\overline{B(0,r)}$ 上的积分可知 $|Na_mr^m|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_N(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\mathrm{d}\theta\right|$，由长大不等式知 $|Na_mr^m|<M$ 对任何 N 成立，与 $a_m\ne 0$ 矛盾。

5. (4.5.30)

记 $g(z)=\tan\frac{\pi f(z)}{4}$，可发现 $g(z)\in B(0,1)$ 且 $g(0)=0$，从而 $|g(z)|\le|z|$。

$|\tan w|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}+1}\right|$，由于 $\frac{|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}|-1}{|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}|+1}\le\left|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}+1}\right|$，代入 $w=\frac{\pi}{4}f(z)$ 后化简可得第二问的式子。

另一方面，利用 $|\tan w|=\left|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}+1}\right|$ 可知 $\tan|\mathrm{Re}\,w|\le|\tan w|$，代入化简可得第一问的式子。

6. (补充题)

记 $f(z)=\frac{\sin z}{z^7-1}$，在 $z=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{7}}$ 时利用命题 5.4.5 知 $\mathrm{Res}(f,z)=7\mathrm{e}^{\frac{12k\pi\mathrm{i}}{7}}\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{7}}\right)$，从而所求积分为 $14\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{6}\mathrm{e}^{\frac{12k\pi\mathrm{i}}{7}}\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{7}}\right)$。

7. (5.5.1)

(1) $f(z)=\frac{z^2+1}{z^4+1}$ 为偶函数，可直接考虑 $(-\infty,\infty)$ 上积分的值，利用推论 5.5.2 可知其为

$$2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}})+2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}})=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\mathrm{i}}+\frac{1}{2\sqrt{2}\mathrm{i}}\right)=\sqrt{2}\pi$$

从而所求积分为其一半，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$。

(7) 被积函数为偶函数，因此可考虑实轴上积分。记 $f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2+b^2}$，利用正实轴上方充分大半圆围道，其上积分值为 $2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,b\mathrm{i})=\pi\mathrm{e}^{-ab}$，而由 Jordan 引理可知半圆部分在无穷远处积分趋于 0，从而此即为实轴上积分，由此所求结果为 $\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ab}$。

11 第十一次作业

1. (5.5.1)

   *f 表示题目中的被积函数

   (14) 考虑 $\operatorname{Im} z\in(0,2\pi),|\operatorname{Re} z|<t$ 的矩形区域边界，区域中只有 $\pi\mathrm{i}$ 处不全纯，且 $t\to\infty$ 时左右边界积分趋于 0，而上边界积分为下边界的 $-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p}$ 倍，由此设积分结果为 I 可知 $(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p})I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,\pi\mathrm{i})$，因此 $I=\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p}}(-\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}p})=\frac{\pi}{\sin p\pi}$。

   (15) 可发现 $\operatorname{Res}(f,\mathrm{i})=\frac{(-\mathrm{i}-1)^p}{2},\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i})=\frac{(\mathrm{i}-1)^p}{2}$，由定理 5.5.14 取 $r=1-p,s=p$ 可知结论。

   (17) 可发现 $\operatorname{Res}(f,\mathrm{i})=\frac{\sqrt[4]{-4\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}},\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i})=-\frac{\sqrt[4]{4\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}$，由定理 5.5.14 取 $r=\frac{3}{4},s=\frac{1}{4}$ 可知结论。

   (21) 图示曲线上积分为 0，而类似例 5.5.12 可知弧线上取极限积分为 0，从而实轴积分与虚轴积分相等，取实部知所求积分为 $\operatorname{Re}\left(\int_0^\infty \frac{\log x+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}{-x^2-1}\mathrm{d}(x\mathrm{i})\right)=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}$。

   (29) 类似例 5.5.12 知 $z=1$ 处先绕开再逼近结果不改变，因此 $\int_{|z|=1}\frac{\log(z-1)}{z}\mathrm{d}z=\log(z-1)\big|_{z=0}=\pi\mathrm{i}$，令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 后取实部可知 $\int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta=0$，由对称性可知 $\int_0^\pi\log|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta=0$，而 $|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=2\sin\frac{\theta}{2}$，代入换元即可知结论。

2. (6.1.2)

   不妨设 $z_0\in B(a,r)$，由于亚纯性，可取关于边界对称的域 $D'\subset D$ 使得其在 $B(a,r)$ 内除了 z_0 外不包含其他 $f(z)=A$ 的点或极点。在其中记 $g(z)=\frac{z-w_0}{z-z_0}(f(z)-A)$，可发现 $g(D'\cap\partial B(a,r))\subset\partial B(0,R)$ 且在其中全纯，从而利用 Schwarz 对称原理可延拓。由去掉极点后连续性可知在域中零点有极限点的亚纯函数亦只能为 0，在 D' 在 $B(a,r)$ 外的部分仍有 $g(z)=\frac{z-w_0}{z-z_0}(f(z)-A)$，由 $g(w_0)$ 与 $g(z_0)$ 关于 $\partial B(0,R)$ 对称可知 $g(w_0)$ 为非零实数，因此只能 w_0 为 f 的一阶极点。由于 $f(z)=A+\frac{z-z_0}{z-w_0}g(z)$，$g(z)$ 在 D' 上全纯，可知 $f'(z_0)=\frac{g(z_0)}{z_0-w_0}$，$\operatorname{Res}(f,w_0)=(w_0-z_0)g(w_0)$，又由 $g(z_0)$ 与 $g(w_0)$ 关于 $\partial B(0,R)$ 对称可知结论。

3. (6.1.3)

   若 f 不恒为 0，可取关于 $\partial B(0,r)$ 对称的 D 使得 f 在 $D\cap B(0,R)\backslash\overline{B(0,r)}$ 上恒不为 0，由此利用 Schwarz 对称原理可将 f 延拓至 D 上，但此时利用唯一性定理可知 f 恒为 0，矛盾。

4. (6.1.4)

   与习题 6.1.3 证明相同。

5. (6.2.3)

   不妨设 $z_0=1$，否则考虑级数 $\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{z^n}{z_0^n}$ 即可。

   类似定理 6.2.3 证明可将幂级数延拓为 $B(0,\delta),\delta>1$ 上的亚纯函数 $f(z)$，可设其在 1 处的 Laurent 展开为 $\frac{b}{z-1}+\sum_{n=0}^\infty b_n(z-1)^n$，记 $g(z)=f(z)-\frac{b}{z-1}$，可发现其在 $B(0,\delta)$ 全纯。而其在 0 处的展开为 $\sum_{n=0}^\infty(a_n+b)z^n$，由收敛半径大于 1 考虑 1 处可知 $\lim_{n\to\infty}a_n+b=0$，从而 $\lim_{n\to\infty}a_n=-b$，因此两项之比极限为 1。

6. (6.2.9)

类似习题 6.2.3 知存在 $b_1,\dots,b_m$ 使 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{z_k-z}$ 收敛，展开后取 $z=1$ 可知 $\lim_{n\to\infty}a_n-\sum_{k=1}^{m}b_kz_k^{-n-1}=0$，从而 $\lim_{n\to\infty}|a_n|\le\sum_{k=1}^{m}|b_k|$，由此可知有界。

7. (6.2.10)

此题过于复杂，疑似没有范围内的合理方法。

12 第十二次作业

1. (7.1.3)

由 Montel 定理知 f_n 有内闭一致收敛子列，设其收敛至 f，记 $g_n=f_n-f$，则 $\lim_{n\to\infty}g_n(z_k)=0,\forall k$。在任何紧集 K 上，若 g_n 不一致收敛于 0，由于其仍为正规族，存在一致收敛且收敛结果不为 0 的子列，假设收敛到 h，由 $h(z_k)=0,\forall k$ 即与唯一性定理矛盾，从而得证。

2. (7.1.4)

类似习题 4.1.12，对 D 中任何紧集 K，可扩张至紧集 K' 使得其包含 z_0 且其中任意两点存在长度不超过 M 的道路。取 r 使得 K' 中每点 z 作 $\overline{B(z,r)}$ 取并后仍在 D 中，利用习题 3.4.9 可知 $f'(z)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}(z+re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$，取模可得 $|f'(z)|\le\frac{2}{r}\mathrm{Re}\,f(z)\le\frac{2}{r}|f(z)|$。从而利用微分方程得 K' 中任何 $f(z)$ 的模不超过 $|f(z_0)|e^{2M/r}$，因此内闭一致有界，由 Montel 定理知为正规族。

第二条不成立的反例为 $f_n(z)=n$。

3. (7.1.6)

由 D 有界可知取 $M_0=\frac{M+m(D)}{2}$ 即有 D 上 $|f(z)|\le\frac{|f(z)|^2+1}{2}$ 的积分不超过 M_0。对 D 中任何紧集 K，类似习题 4.1.12 可取 r 使得 K 中每点 z 作 $\overline{B(z,r)}$ 取并后仍在 D 中，利用平均值原理可知

$$|f(z)|=\frac{1}{\pi r^2}\left|\iint_{B(z,r)}f(w)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(z,r)}|f(w)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{M_0}{\pi r^2}$$

从而内闭一致有界，由 Montel 定理知为正规族。

4. (7.2.1)

记 φ 将 D 双全纯映射至 $B(0,1)$，则 $\varphi\circ f$ 为有界整函数，从而为常值，由 φ 为单射知 f 为常值。

5. (7.2.2)

由平移不妨设 $a=0$，记题中不等式左右分别为 r,R。

考虑 $\varphi:B(0,1)\to D,\varphi(z)=rz$，可发现 $f\circ\varphi$ 为保持原点的 $B(0,1)\to B(0,1)$ 映射，利用 Schwarz 引理可知 $(f\circ\varphi)'(0)\le 1$，即 $rf'(a)\le 1$，从而不等式左半边得证。

考虑 $\psi:D\to B(0,1),\psi(z)=\frac{z}{R}$，可发现 $\psi\circ f^{-1}$ 为保持原点的 $B(0,1)\to B(0,1)$ 映射，利用 Schwarz 引理可知 $(\psi\circ f^{-1})'(0)\le 1$，即 $\frac{(f^{-1})'(0)}{R}\le 1$，由 $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}$ 可知得不等式右半边。

6. (7.2.3)

记 $\varphi(z)=\frac{z-f(p)}{1-\overline{f(p)}z}$，考虑 $\varphi\circ f\circ g^{-1}$，可发现其为 0 映射到 0 的 $B(0,1)$ 自同构，从而其为 $e^{\mathrm{i}\theta}z$，从而代换 z 为 $g(z)$ 可知 $\varphi(f(z))=e^{\mathrm{i}\theta}g(z)$。取 $z=a$ 后两边求导得 $f'(a)|f(p)|^2=e^{\mathrm{i}\theta}g'(a)$，由 $f'(a)>0$ 可知 $e^{\mathrm{i}\theta}$ 与 $g'(a)$ 方向相反，从而 $g(z)=e^{-\mathrm{i}\theta}\varphi(f(z))=\frac{g'(a)}{|g'(a)|}\varphi(f(z))$，即为欲证的式子。

13 第十三次作业

1. (Stein 习题 4.1)

   * 设中度连续条件对应的界为 C，即 $|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$

   (a) $A(\zeta) - B(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta(x-t)}\mathrm{d}x = \hat{f}(\zeta)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\zeta t} = 0$

   (b) 由于其在上半、下面平面皆全纯，且交界处连续，由 6.1 节 Painlevé 原理可知其为整函数。而上半平面注意到 e 的指数的实部必定小于 0，因此 $F(z) \leq \int_{-\infty}^{t} |f(x)|\mathrm{d}x \leq C\pi$，类似可知下半平面有界，从而整体有界，由整函数知为常数。由于积分不超过 $\int_{-\infty}^{t} |\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta(x-t)}|\mathrm{d}x$，$\zeta$ 从虚轴趋于无穷时为 0，因此其恒为 0。

   (c) 取 $\zeta = 0$ 即可知积分恒为 0，从而其在任何区间积分为 0，由连续性知恒 0。

2. (Stein 习题 4.3)

   利用书推论 5.5.7，类似例 5.5.8 可知第一个积分结果。在正半轴上第二个积分为 $\frac{1}{2\pi a - 2\pi\mathrm{i}x}$，负半轴上为 $\frac{1}{2\pi a + 2\pi\mathrm{i}x}$，从而得结论。

3. (Stein 习题 4.6)

   由 Stein 习题 4.3 计算结果，利用 Stein 定理 2.4 可得结论。

4. (Stein 习题 4.8)

   由 $\tilde{f}$ 只在 $[-M, M]$ 不为 0 知反变换存在，从而 $f(x) = \int_{-M}^{M} \hat{f}(\zeta)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\zeta}\mathrm{d}\zeta$，由于有限区间积分可与求导交换，

   $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(2\pi\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-M}^{M} \hat{f}(\zeta)\zeta^n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\zeta}\mathrm{d}\zeta\big|_{x=0} = \frac{(2\pi\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-M}^{M} \hat{f}(\zeta)\zeta^n\mathrm{d}\zeta$$

   对另一边，由条件知 $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$，从而收敛半径为无穷，因此为整函数。由极限定义知充分大的 a_n 满足 $|a_n| \leq \frac{(M+\frac{\varepsilon}{2})^n}{n!}$，再对前面的项估算即可取出充分大 A_ε。

5. (Stein 习题 4.10)

   先说明在 x 轴上 $\hat{f}(\xi) = O(\mathrm{e}^{-a'\xi^2})$。由于其为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x$，将 x 换元为 $x - y\mathrm{i}$ 可得

   $$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y\mathrm{i})|\mathrm{e}^{-2\pi y\xi}\mathrm{d}x = O(\mathrm{e}^{-2\pi y\xi + by^2})$$

   令 $y = d\xi$，再取 d 充分小使 $-2\pi d\xi + bd^2 < 0$，即知存在 a' 使 $\hat{f}(\xi) = O(\mathrm{e}^{-a'\xi^2})$。

   而 $\hat{f}(\xi + \mathrm{i}\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{2\pi x\eta}\mathrm{d}x$，记 $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{2\pi x\eta}$，则 $|g(x + \mathrm{i}y)| \leq c\mathrm{e}^{-ax^2+by^2+2\pi x\eta}$，由于 $2\pi x\eta \leq \frac{ax^2}{2} + \frac{2}{a}\pi^2\eta^2$，记 $t = \frac{2}{a}\pi^2, a_0 = \frac{a}{2}$ 可知 $|g(x + \mathrm{i}y)| \leq c\mathrm{e}^{t\eta^2}\mathrm{e}^{-a_0x^2+by^2}$，从而 $\frac{\hat{f}(\xi+\mathrm{i}\eta)}{\mathrm{e}^{t\eta^2}} = \frac{\hat{g}(\xi)}{\mathrm{e}^{t\eta^2}} = O(\mathrm{e}^{-a'\xi^2})$，由此即得证。

6. (Stein 习题 4.11)

   当 $x^2 \leq y^2$ 时，$|z|^2 \leq 2c_1y^2$，从而 $|f(z)| = O(\mathrm{e}^{2c_1y^2 - x^2})$，只需在 $x^2 > y^2$ 时证明可找到后取系数的最大值/最小值即可，利用对称性，只需证明 $\arg z \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 时结论成立，记此区域为 D。

   利用无界区域的最大模原理，设 $g(z)$ 在 D 上全纯且边界连续，$|g(z)| \leq C_1\mathrm{e}^{C_2z^2}$，则边界上 $g(z) \leq M$ 可推出区域中 $g(z) \leq M$。若假设区域中 $|g(z)| \leq C_1\mathrm{e}^{C_2z^2}$ 且 $|g(x)| \leq C\mathrm{e}^{-Ax^2}, |g(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})| \leq C\mathrm{e}^{Bx^2}, x > 0$，记 $g_\delta(z) = g(z)\mathrm{e}^{(A-\delta+\mathrm{i}(B+\delta))z^2}$，利用无界区域的最大模原理可知 $g_\delta(z) \leq C|\mathrm{e}^{(A-\delta+\mathrm{i}(B+\delta))z^2}|$，令 $\delta \to 0$ 可得 $|g(z)| \leq C\mathrm{e}^{-A(x^2-y^2)+2Bxy}$，从而利用 $2Bxy \leq \frac{Ax^2}{2} + \frac{2B^2y^2}{A}$ 类似 Stein 习题 4.10 即得到 $|f(z)|$ 的估计。

14 第十四次作业

1. (Stein 习题 5.3)

   设 $t = \mathrm{Im}(\tau)$，由提示可知

$$\Theta(z) \le \sum_{|n| < \frac{4|z|}{t}} \exp(-\pi n^2 t + 2\pi n|z|) + \sum_{|n| \ge \frac{4|z|}{t}} \exp(-\pi n^2 \frac{t}{2}) \le \frac{8|z|}{t} \exp(2\pi \frac{4|z|^2}{t}) + M$$

   从而其阶不超过 2。

2. (Stein 习题 5.4)

   (a) 见提示，考虑 $n < c|z|$ 与 $n \ge c|z|$ 时类似 Stein 习题 5.3 拆分估算即可，再利用 Stein 定理 2.1 由 (b) 中证明不收敛的部分可得阶恰好为 2。

   (b) 由于 $\arctan x \sim x$，有

$$\sum \frac{1}{|z_n|^2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2t^2 + m^2} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{n^2t^2 + x^2} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nt} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{nt} \right) = \infty$$

   从而 $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ 不收敛，而利用 Stein 定理 2.1 可知指数为 $2 + \varepsilon, \varepsilon > 0$ 时收敛，从而得证。

3. (Stein 习题 5.5)

   见提示，对 $|t|$ 求导可知不等式左侧的极值，从而得不等式成立，将积分分为 $|t| \le (A|z|)^{1/(\alpha-1)}$ 与 $|t| > (A|z|)^{1/(\alpha-1)}$ 两段类似 Stein 习题 5.3 估算即可。另一方面，取 $z = -x\mathrm{i}, x \in \mathbb{R}$ 可知阶不低于 $\frac{\alpha}{\alpha-1}$，从而恰好为 $\frac{\alpha}{\alpha-1}$。

15 第十五次作业

1. (Stein 习题 5.10)

   (a) $\rho = 1$，零点为 $2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$，由 0 为一阶零点可知

$$\mathrm{e}^z - 1 = z\mathrm{e}^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2n\pi\mathrm{i}}\right)\left(1 + \frac{z}{2n\pi\mathrm{i}}\right) = z\mathrm{e}^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)$$

   考虑 $\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}$，令 $z \to 0$ 可知 $B = 0$，再由 $\frac{\mathrm{e}^z-1}{\mathrm{e}^{z/2}}$ 为奇函数可知 $A = \frac{1}{2}$，从而分解为 $z\mathrm{e}^{z/2} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2})$。

   (b) $\rho = 1$，零点为 $k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$，从而类似上方配对可知

$$\cos \pi z = \mathrm{e}^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)$$

   令 $z \to 0$ 可知 $B = 0$，再由其为偶函数可知 $A = 0$，从而分解为 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2})$。

2. (Stein 习题 5.11)

   若 $f(z) \ne a$，则由 Hadamard 分解定理可知 $f(z) - a = \mathrm{e}^{g(z)}$，且 $g(z)$ 为多项式，若其为 0 次，则 $f(z)$ 为常数，符合要求，否则对任何 b，$g(z) = \log(b - a)$ 有解，因此 $f(z) = b$ 有解，矛盾。

3. (Stein 习题 5.12)

   由于 $f(z) \ne 0$，由 Hadamard 分解定理可知 $f(z) = \mathrm{e}^{p(z)}$，p 为多项式，若 $p(z)$ 超出一次，$f'(z) = p'(z)\mathrm{e}^{p(z)}$ 必有零点，矛盾，因此只能为至多一次的多项式，从而为 $az + b$。

4. (Stein 习题 5.13)

   由于 $\mathrm{e}^z - z$ 为一阶整函数，其若有有限多零点，由 Hadamard 分解定理可分解为 $\mathrm{e}^{Az+B}p(z)$，其中 p 为多项式。右侧在除以 e^{Az} 后在无穷远处极限为常数或无穷，而原式不可能满足这点，故矛盾。

5. (Stein 习题 5.14)

   若否，其由 Hadamard 分解定理可分解为 $\mathrm{e}^{p(z)}q(z)$，其中 p, q 为多项式，但此式阶与 p 的次数相同，为整数，因此矛盾。