中国科学技术大学数学科学学院
2021～2022 学年第 1 学期考试试卷
A 卷

课程名称： 线性代数(A2)　　课程代码： MATH1005

开课院系： 数学科学学院　　考试形式： 闭卷

姓名：__________学号：__________专业：__________

题号	一（50 分）	二（20 分）	三（30 分）	总分
得分				

说明：解答需写在试卷上，可以写在试卷背面，写在草稿纸上无效。需给出详细解答过程，结果需化简。可以引用课本上的定理和例题的结论，不可以使用习题或其它参考书中的结论。禁止使用计算器等电子设备。

（装订线内不要答题）

一、设$V=\mathbb{C}^{2\times 2}$是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，$\rho(X,Y)=\operatorname{tr}\left(\overline{X^T}Y+X\overline{Y^T}\right)$，$X,Y\in V$。

（1）证明：ρ是V上的内积。并求内积空间(V,ρ)的一组标准正交基。

（2）证明：$\mathcal{A}(X)=2\overline{X}+3X^T$是$V$上的可逆线性变换。并求$\mathcal{A}^{-1}(X)$的表达式。

（3）求$\mathcal{A}$在内积空间(V,ρ)上的伴随变换$\mathcal{A}^*$。

（4）求$\mathcal{A}$的所有特征值及其所有特征向量。并求$\mathcal{A}$的最小多项式。

（5）把V分解成一些$\mathcal{A}$-循环子空间的直和$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$，使得$k$最小。

（装订线内不要答题）

二、设$\mathcal{A}$是n维实内积空间V上的任意线性变换。证明：

（1）$\mathcal{A}$可以表示成V上两个规范变换的乘积。

（2）$\mathcal{A}$可以表示成V上三个自伴变换的乘积。

三、设$G=\left\{A\in\mathbb{R}^{3\times 3}\ \middle|\ \det(Au,v,w)=\det(u,Av,w)，\forall u,v,w\in\mathbb{R}^3\right\}$。

（1）证明：若$A\in G$，则$\det(Au,v,w)=\det(u,v,Aw)$，$\forall u,v,w\in\mathbb{R}^3$。

（2）证明：若$A,B\in G$，则$BA=AB\in G$。

（3）求所有$A\in G$。

参考答案与评分标准

一、（1）验证ρ满足双线性、对称性、正定性，过程略。从而ρ是内积。（6 分）

V的一组标准正交基$T=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}E_{11},\frac{1}{\sqrt{2}}E_{12},\frac{1}{\sqrt{2}}E_{21},\frac{1}{\sqrt{2}}E_{22},\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}E_{11},\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}E_{12},\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}E_{21},\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}E_{22}\right\}$。（4 分）

（2）验证$\mathcal{A}$保加法和数乘，过程略。从而$\mathcal{A}$是线性变换。（4 分）

设$\mathcal{A}^{-1}(X)=a\overline{X}+bX^T$。由$\begin{cases}2a+3b=1\\3a+2b=0\end{cases}$解得$a=-\frac{2}{5}$，$b=\frac{3}{5}$。（6 分）

（3）$\mathcal{A}$在T下的矩阵$A=\mathrm{diag}\left(5,\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix},5,1,\begin{pmatrix}-2&3\\3&-2\end{pmatrix},1\right)$。（5 分）

由于A是对称方阵，故$\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$。（5 分）

（4）A与$\mathrm{diag}(5,5,5,1,1,1,-1,-5)$相似，故$\mathcal{A}$的特征值为$5,1,-1,-5$。（4 分）

5的特征向量$\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$，$1$的特征向量$\begin{pmatrix}\mathrm{i}a&\mathrm{i}b\\-\mathrm{i}b&\mathrm{i}c\end{pmatrix}$，其中$a,b,c\in\mathbb{R}$不全为 0。

-1的特征向量$\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$，$-5$的特征向量$\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}b\\-\mathrm{i}b&0\end{pmatrix}$，其中$b\in\mathbb{R}$不为 0。（4 分）

$d_{\mathcal{A}}(x)=(x-5)(x-1)(x+1)(x+5)=x^4-26x^2+25$。（2 分）

（5）设V_i由X_i生成。$d_{\mathcal{A}}(x)$无重根$\Rightarrow d_{\mathcal{A},X_i}(x)$无重根$\Rightarrow k\geq 3$。（5 分）

$X_1=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}&1+\mathrm{i}\\-1-\mathrm{i}&0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}0&1+\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}&0\end{pmatrix}$，$X_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1+\mathrm{i}\end{pmatrix}$满足要求。（5 分）

二、任取V的一组标准正交基$T=\{e_1,\cdots,e_n\}$，设$\mathcal{A}$在T下的矩阵是A。

（1）根据奇异值分解定理，存在正交方阵U,V和对角阵Σ，使得$A=U\Sigma V$。（5 分）

设线性变换$\mathcal{B},\mathcal{C}$在T下的矩阵分别是$B=U\Sigma U^{-1}$和$C=UV$。由$A=BC$，B是对称方阵，C是正交方阵，得$\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{C}$，$\mathcal{B}$是自伴变换，$\mathcal{C}$是正交变换，$\mathcal{B},\mathcal{C}$都是规范变换。（5 分）

（2）根据正交相似标准形定理，存在正交方阵P，使得

$$P^{-1}CP=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\cos\theta_1&-\sin\theta_1\\\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\theta_s&-\sin\theta_s\\\sin\theta_s&\cos\theta_s\end{pmatrix},I,-I\right)$$（5 分）

$=S_1S_2$，其中$S_1=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}-\sin\theta_1&\cos\theta_1\\\cos\theta_1&\sin\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-\sin\theta_s&\cos\theta_s\\\cos\theta_s&\sin\theta_s\end{pmatrix},I,-I\right)$和

$S_2=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},I\right)$都是对称方阵。设线性变换$\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$在$T$下的矩阵分别是

$C_1=PS_1P^{-1}$，$C_2=PS_2P^{-1}$。由$C=C_1C_2$，C_1,C_2都是对称方阵，得$\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$，$\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$都是自伴变换。故$\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$。（5 分）

三、（1）$\det(Au,v,w)=-\det(Au,w,v)=-\det(u,Aw,v)=\det(u,v,Aw)$。（5 分）

（2）根据（1），$\det(ABu,v,w)=\det(Bu,v,Aw)=\det(u,Bv,Aw)=-\det(Bv,u,Aw)$
$=-\det(ABv,u,w)=\det(u,ABv,w)$。故$AB\in G$。（5 分）

$\det(BAu,v,w)=\det(Au,Bv,w)=\det(u,ABv,w)=\det(ABu,v,w)\Rightarrow BA=AB$。（5 分）

（3）注意到$\det(u,v,w)=$

$$w_1u^T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}v+w_2u^T\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}v+w_3u^T\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}v。$$（5 分）

由$\det(Au,v,w)=\det(u,Av,w)$，可得$A^TP_i=P_iA$，$\forall i=1,2,3$。（5 分）

其中$P_1=E_{23}-E_{32}$，$P_2=E_{31}-E_{13}$，$P_3=E_{12}-E_{21}$。解得$A=aI_3$，$a\in\mathbb{R}$。（5 分）