线性代数 A2 期中考试

2021 年 11 月 24 日 9:45—11:45，地点 5104

姓名________________ 学号______________________ 得分___________

1.（10 分）设实线性空间 V 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，$n \geqslant 3$，求向量组 $S = \{\alpha_i - \alpha_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ 的秩.

2.（15 分）设 $A = \begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$. (1) 证明：$V = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AX = XA^T\}$ 在矩阵的加法和数乘运算下构成实线性空间. (2) 求 V 的维数和一组基.

3.（20 分）设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$r = \operatorname{rank}(A)$，$U$ 是 A 的行向量组生成的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，V 是 A 的列向量组生成的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明：

(1) $\dim U = \dim V = r$.

(2) $U = V$ 当且仅当存在可逆方阵 P, Q 使得 $PAP^T = \begin{pmatrix} Q & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

4.（10 分）设 V_1, V_2 都是 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的子空间，$W = V_1 \cap V_2$. 证明：

$$(V_1 + V_2)/W = (V_1/W) \oplus (V_2/W).$$

5.（10 分）设实线性空间 $V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$，$x$ 是变元，$\mathcal{A} \in L(V)$ 分别把 $(x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2$ 映射成 $(x-3)^2, (x-2)^2, (x-1)^2$. 求 $\mathcal{A}$ 在 V 的基 $x^2, x, 1$ 下的矩阵表示.

6.（15 分）设实线性空间 $V = \{f(x)\,\mathrm{e}^{-x} \mid f \in \mathbb{R}[x], \deg f \leqslant n\}$，$x$ 是变元，
$S = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是 V 的基，$\alpha_k = x^k\,\mathrm{e}^{-x}, \forall k$，$S^*$ 是 S 的对偶基，
$\mathcal{A} \in L(V) : g(x) \mapsto g'(x)$，$\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随映射，$\sigma \in V^* : g \mapsto \int_0^{+\infty} g(x)dx$.

(1) 证明：$\mathcal{A}$ 是可逆变换. (2) 求 σ 在 S^* 下的坐标. (3) 求 $\mathcal{A}^*(\sigma)$.

7.（20 分）设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathcal{A} \in L(V)$. 证明：$V = \operatorname{Im}\mathcal{A} \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 在 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 上的限制映射是一一映射.

参考答案

1. 一方面，$\alpha_i-\alpha_j=(\alpha_1-\alpha_j)-(\alpha_1-\alpha_i)$. 另一方面，若 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)+\cdots+\lambda_n(\alpha_1-\alpha_n)=(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\alpha_1-\lambda_2\alpha_2-\cdots-\lambda_n\alpha_n=\mathbf{0}$，则 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 故 $\alpha_1-\alpha_2,\cdots,\alpha_1-\alpha_n$ 是 S 的极大线性无关组. 因此，$\operatorname{rank}(S)=n-1$.

2. (1) 略. (2) $V=\{X\mid x_{i+1,j}=x_{i,j+1},\ \forall i,j\}$，$X=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_2 & \cdots & t_n & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ t_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. $\dim V=n$.

3. (1) 设 $A=\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_r^T\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 U 的基，$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 V 的基.

   (2) $(\Rightarrow)$ 若 $U=V$，则存在可逆方阵 $Q\in\mathbb{R}^{r\times r}$ 使得 $\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_r\end{pmatrix}Q$. 把 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_r\end{pmatrix}$ 扩充为可逆方阵 P^{-1}，则 $PAP^T=\begin{pmatrix}Q & O \\ O & O\end{pmatrix}$.

   $(\Leftarrow)$ 设 $P^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_n\end{pmatrix}$. 由 $A=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_r\end{pmatrix}Q\begin{pmatrix}\gamma_1^T \\ \vdots \\ \gamma_r^T\end{pmatrix}$，得 $U=V=\operatorname{Span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)$.

4. (i) V_1/W 和 V_2/W 都是 $(V_1+V_2)/W$ 的子空间. (ii) $\forall\alpha\in V_1+V_2$，$\alpha=v_1+v_2\Rightarrow[\alpha]=[v_1]+[v_2]$，其中 $v_i\in V_i$. 即 $(V_1+V_2)/W\subset(V_1/W)+(V_2/W)$. (iii) $[\alpha]\in(V_1/W)\cap(V_2/W)\Rightarrow\alpha\in V_1\cap V_2\Rightarrow[\alpha]=\mathbf{0}$. 即 $(V_1/W)\cap(V_2/W)=\{\mathbf{0}\}$.

5. $\mathcal{A}:f(x)\mapsto f(x-4)$. 故 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 16 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

6. (1) 由 $\mathcal{A}:f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\mapsto(f'(x)-f(x))\,\mathrm{e}^{-x}$，得 $\mathcal{A}+\mathcal{I}:f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\mapsto f'(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   因此，$(\mathcal{A}+\mathcal{I})^n=\mathcal{O}$，$\mathcal{A}^{-1}=-\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\mathcal{A}^{k-1}$.

   (2) σ 在 S^* 下坐标 $=(\sigma(\alpha_0),\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n))=(0!,1!,\cdots,n!)$.

   (3) $\mathcal{A}^*(\sigma):f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\mapsto\sigma(\mathcal{A}(f(x)\,\mathrm{e}^{-x}))=-f(0)$.

7. 记 $U=\operatorname{Im}\mathcal{A}$，$W=\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

   $(\Rightarrow)$ (i) $\alpha\in U$ 使得 $\mathcal{A}\alpha=0\Rightarrow\alpha\in U\cap W=\{\mathbf{0}\}$. 故 $\mathcal{A}|_U$ 是单射.
   (ii) $\forall\alpha\in\operatorname{Im}U$，存在 $u\in U,\ w\in W$ 使得 $\alpha=\mathcal{A}(u+w)=\mathcal{A}u$. 故 $\mathcal{A}|_U$ 是满射.

   $(\Leftarrow)$ (i) $\forall\alpha\in V$，存在 $u\in U$ 使得 $\mathcal{A}\alpha=\mathcal{A}u\Rightarrow\alpha-u\in W$. 故 $V=U+W$.
   (ii) $\forall\alpha\in U\cap W$，由 $\mathcal{A}|_U$ 可逆，$\mathcal{A}\alpha=\mathbf{0}\Rightarrow\alpha=\mathbf{0}$. 即 $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$.