习题 14.1

2. 求下列级数的和:

（1）$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$;

证明. 原式 $=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$ □

（3）$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$;

证明. 原式 $=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots\right)=\frac{1}{3}$ □

3. 证明下列等式:

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$;

证明. 左边 $=(1-2\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{3}-2\sqrt{4}+\sqrt{5})+\cdots$
$=(1-\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots$
$=1+\sqrt{2}$ □

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$;

证明. 左边 $=\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$ □

8. 设数列 $\{na_n\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 都收敛。证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛。

证明. $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}na_n-na_{n+1}=$
$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}na_n-(n-1)a_n-Na_{N+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{N\to\infty}Na_{N+1}$,

由于 na_{n+1} 和 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 都收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛。 □

问题 14.1

3. 求证：$12 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10^6} < 15.$

证明. 由不等式 $\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1}$，$\ln 10 \approx 2.3$。

$$\sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{10^6}\ln\frac{n+1}{n} = \ln(10^6+1) > 6\ln 10 \approx 13.8 > 12;$$

$$\sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{n} < 1 + \sum_{n=2}^{10^6}\ln\frac{n}{n-1} = 1 + 6\ln 10 \approx 14.8 < 15。$$ □

5. 证明：存在正常数 K，使得不等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 对任何正数列 $\{a_n\}$ 成立。

证明. 由 Cauchy 不等式得：$\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$。

于是有：$\frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n}a_k} \leqslant \frac{4(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$，对该式从 $n=1$ 到 ∞ 求和得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n}a_k} \leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}，所以 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}a_k} < \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n}a_k} \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}。$$ □

习题 14.2

2. 用比较判别法讨论下列级数的敛散性：

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$；

证明. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$，原级数收敛。 □

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$；

证明. $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$ $(n\to\infty)$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，因此原级数也收敛。 □

（8）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$；

证明. $n\ln\dfrac{2n+1}{2n-1}-1\sim n\left(\dfrac{2}{2n-1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)-1=-\dfrac{1}{(2n-1)^2}$，由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛，因此原级数也收敛。 □

9. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个收敛的正项级数。证明：对任何 $\delta>0$，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(1+\delta)/2}\sqrt{a_n}<+\infty$。当 $\delta=0$ 时情况如何？

证明. 由均值不等式得：$n^{-(1+\delta)/2}\sqrt{a_n}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}+a_n\right)$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 均收敛，因此原级数收敛。$\delta=0$ 时，则原级数可能收敛也可能发散，例如：$a_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 时，原级数发散。 □

11. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个发散的正项级数。试证：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛。

证明. 若 $\{a_n\}$ 有上界 M，则 $\dfrac{a_n}{1+a_n}\geqslant\dfrac{a_n}{1+M}$，由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 也发散；若 $\{a_n\}$ 没有上界，则存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $a_{n_k}\to\infty$，此时有 $\dfrac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}\to 1$，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散。$\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}<\dfrac{1}{n^2}$，由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 也收敛。 □

习题 14.3

1. 讨论下列级数的敛散性：

（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$；

证明. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3^n}}=\dfrac{1}{3}<1$，由 Cauchy 判别法知原级数收敛。 □

（4） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+1/n)^n}$；

证明. $\dfrac{n^2}{(1+1/n)^n}>\dfrac{n^2}{e}\to\infty\ (n\to\infty)$，显然原级数发散。 □

（6） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x\geqslant 0)$；

证明. $\dfrac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}=\dfrac{x}{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$，由 D'Alembert 判别法知原级数收敛。 □

2. 利用 Raabe 判别法，讨论下列级数的敛散性：

（1） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})+\cdots+(a+\sqrt{n})}\ (a>0)$；

证明. 设 $a_n=\dfrac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})+\cdots+(a+\sqrt{n})}$，则有

$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\dfrac{a+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)=\dfrac{na}{\sqrt{n+1}}\to\infty\ (n\to\infty)$，

由 Raabe 判别法知原级数收敛。 □

5. 利用 Gauss 判别法，判别 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性。

证明. 设 $a_n=\dfrac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\dfrac{1}{n^p}$，则有 $n\ln n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1-\dfrac{1}{n}\right)=$
$n\ln n\left(\dfrac{(n+1)^{p+1}}{(p+n)n^p}-1-\dfrac{1}{n}\right)=n\ln n\dfrac{(n+1)^{p+1}-(p+n)n^p-(p+n)n^{p-1}}{(p+n)n^p}$
$\to\lambda\dfrac{\ln n}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，由 Gauss 判别法知原级数发散。 □

习题 14.4

1. 利用 Cauchy 收敛原理，讨论下列级数的敛散性：

(2)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$；

证明. $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin k}{2^k}\right|<\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2^n}\to 0$，该级数收敛。 □

4. 在交错级数的 Lebniz 判别法中，如果去掉 $\{a_n\}$ 递减这个条件，结论可能不成立。试以下例说明之：

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{[\frac{n+1}{2}]+(-1)^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$$

证明. 设级数的部分和为 S_n，$S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}$，由于 S_{2n} 发散，因此原级数也发散。 □

5. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$；

证明. $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 单调递减趋于 0，由 Lebniz 判别法知原级数收敛。 □

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$；

证明. $\sin\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0，由 Lebniz 判别法知原级数收敛。 □

8. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$。

证明. 由 Abel 求和公式，$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=nS_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$，其中 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$。而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，不妨设收敛于 S，那么 $\frac{S_1+\cdots+S_{n-1}}{n}$ 也收敛于 S。于是我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\frac{S_1+\cdots+S_{n-1}}{n}=0$ □

9. 证明：如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛，那么对任意的 $\beta>\alpha$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}$ 也收敛。

证明. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$，其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛，$\left\{\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\right\}$ 单调递减有界，由 Abel 判别法知该级数收敛。 □

10. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项递减趋于 0，p 是任意固定的正整数。证明：级数 $a_1+\cdots+a_p-a_{p+1}-a_{p+2}-\cdots-a_{2p}+a_{2p+1}+\cdots+a_{3p}-\cdots$ 收敛的。

证明. 设 $A_n=\sum_{k=(n-1)p+1}^{np} a_k$，则 A_n 也递减趋于 0，由 Lebniz 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛。存在 N 使得原级数的部分和 $<\sum_{n=1}^{N} A_n$，因此该级数收敛。 □

12. 设 $a_n>0$。证明：$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$，那么交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛。

证明. 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^{\lambda/2}-1}{1/n}=\frac{\lambda}{2}<\lambda$，因此 $\exists N$，使得当 $n>N$ 时有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lambda/2}<1+\frac{\lambda}{n}\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\lambda}{n}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\lambda/2}$，由此可以得到 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}a_N<\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\cdots\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\frac{\lambda}{2}}a_N=\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{\lambda}{2}}a_N\to 0$ □

习题 14.5

1. 在下列级数中，哪些是绝对收敛的？哪些是条件收敛的？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}(\alpha>1)$；

证明. $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，因此原级数绝对收敛。 □

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx$；

证明. $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$，该级数绝对收敛。 □

2. 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性：

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}$；

证明. 当 $p \leqslant 0$ 时，$(-1)^n \dfrac{\cos 2n}{n^p} \nrightarrow 0$，因此原级数发散；

当 $0 < p \leqslant 1$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos 2n}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(2+\pi)}{n}$，其中 $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos n(2+\pi)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{n+\pi}{2}|}$，$\dfrac{1}{n^p}$ 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原级数收敛。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{\cos 2n}{n^p}\right| > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 2n}{n^p} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \frac{\cos 4n}{n^p}$，由 Dirichlet 判别法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{n^p}$ 收敛，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散，因此该级数发散，也就说原级数条件收敛。

当 $p > 1$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{\cos 2n}{n^p}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，因此原级数绝对收敛。 □

（4）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{1/n}-1)$；

证明. $n^{1/n}-1$ 从 $n=2$ 开始单调递减趋于 0，由 Lebniz 判别法知该级数收敛。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(n^{1/n}-1)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)$，而 $n^{1/n}-1 \sim e^{\ln n/n}-1 \sim \dfrac{\ln n}{n}$，由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 发散，因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)$ 发散，原级数条件收敛。 □

4. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛。

（1）证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$，其逆命题是否也成立？

证明. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 收敛，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ a_n\ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 发散。若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 收敛，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 也收敛，但他们的和发散，矛盾，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 发散，同理 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 也发散。逆命题显然不成立，例如 $a_n = (-1)^n$。 □

（2）证明：记 $\displaystyle S_N^+ = \sum_{n=1}^{N} a_n^+$，$\displaystyle S_N^- = \sum_{n=1}^{N} a_n^-$，那么 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_N^+}{S_N^-} = 1$。

证明. 记 $S_N = S_N^+ + S_N^-$，$\lim_{n\to\infty}\frac{S_N^+}{S_N^-} = \lim_{n\to\infty}\frac{S_N+S_N^-}{S_N^-} = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{S_N}{S_N^-} = 1$ □

5. 把级数 $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots$ $(0<\alpha<1)$ 的项重新安排如下：先依次取 p 个正项，接着依次取 q 个负项，再接着依次取 p 个正项，如此继续下去。证明：所得的新级数收敛的充分必要条件为 $p=q$；当 $p>q$ 时，新级数发散到 $+\infty$，当 $p<q$ 时，新级数发散到 $-\infty$。

证明. 设重排之后的新级数为 a_n。$\forall N$，记 $m=[N/(p+q)]$，则当 $N\to\infty$ 时，$m\to\infty$，且 $m(p+q)\leqslant N<(m+1)(p+q)$。将新级数的部分和写成 $\sum_{n=1}^{N}a_n = \sum_{n=1}^{m(p+q)}a_n + \sum_{n=m(p+q)+1}^{N}a_n$，$\left|\sum_{n=m(p+q)+1}^{N}a_n\right| \leqslant \frac{p+q}{[m(p+q)]^\alpha}\to 0$。$\sum_{n=1}^{m(p+q)}a_n = \sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{(2n)^\alpha}$，根据 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} = \frac{n^{1-p}}{1-p}+\beta+O(\frac{1}{n^p})$（上册练习题 7.3 第 5 题，P308），$\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{(2n)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{(mq)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta+O\left(\frac{1}{(mq)^\alpha}\right)\right)$，$\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{(2n-1)^\alpha} = \sum_{n=1}^{2mp}\frac{1}{n^\alpha} - \sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{(2n)^\alpha} = \frac{(2mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta+O\left(\frac{1}{(2mp)^\alpha}\right) - \frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{(mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta+O\left(\frac{1}{(mp)^\alpha}\right)\right)$，将它们相加后得到：

$$\sum_{n=1}^{m(p+q)}a_n = \frac{p^{1-\alpha}-q^{1-\alpha}}{2^\alpha(1-\alpha)}m^{1-\alpha} + (1-\frac{1}{2^{1-\alpha}})\beta \to \begin{cases} -\infty & p<q \\ (1-\frac{1}{2^{1-\alpha}})\beta & p=q \\ +\infty & p>q \end{cases}$$ □

习题 15.1

求下列函数项级数的收敛点集：

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$；

证明. 当 $x\leqslant 0$ 时，$ne^{-nx}\nrightarrow 0$，该级数发散；当 $x>0$ 时，我们有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{ne^{-nx}} = e^{-x}<1$，由 Cauchy 判别法知该级数收敛。 □

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$；

证明. 当 $x=\pm1$ 时，该级数发散；当 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 收敛，因此原级数也收敛；当 $|x|>1$ 时，我们有
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ 收敛，因此原级数也收敛。 □

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}(x>0,y>0)$；

证明. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{y^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$，当 $0<x<1$ 时，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 收敛，因此原级数也收敛；同理，$0<y<1$ 时，原级数收敛。若 $x,y\geqslant1$，不妨设 $x\geqslant y$，此时有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}\geqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{2x^n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}y^n$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y^n$ 发散，因此原级数也发散。 □

习题 15.2

1. 研究下列函数列在指定区间上的一致收敛性：
(1) $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$：
(a) $0<x<+\infty$；

证明. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=0$
$\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\geqslant\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=\frac{1}{2}$，因此函数列不一致收敛。 □

(b) $0<\lambda<x<+\infty$；

证明. $|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{1+nx}<\frac{1}{nx}<\frac{1}{n\lambda}\to0$，因此函数列一致收敛。 □

(3) $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$；
(a) $-l<x<l(l>0)$；

证明. $|f_n(x)-f(x)|=e^{-(x-n)^2}<e^{-(l-n)^2}\to0$，因此函数列一致收敛。 □

(b) $-\infty<x<+\infty$；

证明. $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\geqslant|f_n(n)-0|=1$，因此函数列不一致收敛。 □

2. 研究下列级数在指定区间上的一致收敛性：

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, (0,+\infty)$；

证明. $\displaystyle\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}<\frac{1}{n^2}$，因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛。 □

（3）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}), [-3,-1/3]\cup[1/3,3]$；

证明. $\displaystyle\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})<\frac{2n^2 3^n}{\sqrt{n!}}\sim\frac{2n^2 3^n}{\sqrt{(n/e)^n}}$，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n^2 3^n}{\sqrt{(n/e)^n}}}=0$，由 Cauchy 判别法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2 3^n}{\sqrt{(n/e)^n}}$ 收敛，再由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛。 □

5. 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对且一致收敛，但 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上并不一致收敛。

证明. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 一致有界，$x^n(1-x)$ 关于 n 单调递减且一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 一致收敛。设 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ 的部分和为 $S_n(x)$，则 $\displaystyle S_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x^k(1-x)=1-x^n$，由于 x^n 在 $[0,1]$ 上收敛但不一致收敛，所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 绝对收敛，但 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ 不一致收敛。 □

8. 设 $a_n\geqslant 0$。证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$。

证明. 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 一致收敛，取 $x=0$ 可得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；$|a_n\cos nx|\leqslant a_n$，若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 一致收敛。 □

9. 证明：级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$ 在 $(0,\pi]$ 上不一致收敛。

证明. 若 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$ 在 $(0,\pi]$ 上一致收敛，由于 $\frac{\cos nx}{n\ln n}$ 连续，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$ 在 $[0,\pi]$ 上也一致收敛，特别地，当 $x=0$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 也收敛，矛盾。 □

11. 证明：函数列 $f_n(x)=xn^{-x}(\ln n)^{\alpha}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\alpha<1$。

证明. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0, f_n'(x)=(1-x\ln n)n^{-x}(\ln n)^{\alpha}=0\Rightarrow x=\frac{1}{\ln n}$
$f_n(x)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\frac{1}{\ln n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^{\alpha-1}n}{e}=0\Leftrightarrow\alpha<1$ □

习题 15.3

1. 确定下列函数的存在域，并研究它们的连续性：

（1）$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$；

证明. 当 $|x|<1$ 时，$\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|}=|x|<1$，由 Cauchy 判别法知原级数收敛；当 $|x|\geqslant 1$ 时，$(x+\frac{1}{n})^n\nrightarrow 0$，原级数发散。所以 $f(x)$ 的存在域为 $(-1,1)$，$\forall x\in[-1+\delta,1-\delta]\subset(-1,1)$，当 $n>\left[\frac{2}{\delta}\right]$ 时，我们有 $\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|<(1-\frac{2}{\delta})^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{2}{\delta})^n$ 收敛，由 Cauchy 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 一致收敛，即在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛，因此连续。 □

3. 证明：Riemann ζ 函数 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是连续的，并在此区间内有各阶连续导函数。

证明. $\forall x \in [a,b] \subset (1,+\infty)$，$\dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^a}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^a}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续。$\left(\dfrac{1}{n^x}\right)^{(k)} = \dfrac{(-1)^k \ln^k n}{n^x}$，$\left|\dfrac{(-1)^k \ln^k n}{n^x}\right| \leqslant \dfrac{\ln^k n}{n^a}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^k n}{n^a}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \ln^k n}{n^x}$ 在 $[a,b]$ 收敛，即在 $(1,+\infty)$ 内闭一致收敛，所以 $\zeta(x)$ 在此区间内有各阶连续导函数。 □

4. 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} (x > 0)$，计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$。

证明. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} -e^{-nx}\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ □

8. 证明：$\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$。

证明. $\left|\dfrac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}\right| = \dfrac{x^n}{n} \dfrac{1}{(1+x+\cdots+x^{2n-1})} \geqslant \dfrac{x^n}{n} \dfrac{1}{2n\sqrt[2n]{1\cdot x \cdots x^{2n-1}}}$
$= \dfrac{\sqrt{x}}{2n^2}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2n^2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}$ 一致收敛，所以 $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$。 □

习题 15.4

1. 求下列幂级数的收敛半径，并研究它们在收敛区间端点处的性质：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$；

证明. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}} = e \Rightarrow R = \dfrac{1}{e}$，$x = \pm\dfrac{1}{e}$ 时级数发散。 □

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a^n}{n} + \dfrac{b^n}{n^2}\right) x^n (a > 0, b > 0)$；

证明. $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)}=\max\{a,b\}$

当 $a\geqslant b$ 时：$R=\dfrac{1}{a}$，$x=\dfrac{1}{a}$ 时级数发散，$x=-\dfrac{1}{a}$ 时级数收敛。

当 $a<b$ 时：$R=\dfrac{1}{b}$，$x=\pm\dfrac{1}{b}$ 时级数收敛。 □

4. 求下列级数在区间 $(-1,1)$ 上的和：

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$；

证明. $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{1}{1-x^2}$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\displaystyle\int\dfrac{1}{1-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

□

5. 证明下列等式在区间 $(-1,1)$ 内成立：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3x^n=\dfrac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$；

证明. 对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$ 两边求导可得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，再次对两边求导可得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}\Rightarrow$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$，最后对两边求导可得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3x^{n-1}=\dfrac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}\Rightarrow$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3x^n=\dfrac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$，得证。 □

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)x^n=\dfrac{1}{(1-x)^4}$；

证明. 对 $1+x+x^2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+3}=\dfrac{1}{1-x}$ 两边连续求导三次可得：
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n=\dfrac{3!}{(1-x)^4}$，两边除以 3! 即可得证。 □

习题 15.5

1. 利用已知的初等函数展开式，写出下列函数的幂级数展开式：

（1）e^{x^2}；

证明．$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ □

（3）$\frac{x^{12}}{1-x}$；

证明．$\frac{x^{12}}{1-x} = x^{12} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+12}$ □

2. 求下列函数的幂级数展开式：

（1）$(1+x)\ln(1+x)$；

证明．$(1+x)\ln(1+x) = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1}$ □

（3）$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$；

证明．$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+x}$

其中 $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$

$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1+(-1)^n}{4} x^n$ □

5. 把函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 按 $\frac{x}{1+x}$ 的正整数幂展开成幂级数。

证明．令 $t = \frac{x}{1+x}$，则 $x = \frac{t}{1-t}$。

$f(x) = \frac{t}{\sqrt{1-t}} = t\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}$ □

习题 15.6

1. 证明 Bernstein 多项式的保形性质：

（1）$B_n(f;0)=f(0)$，$B_n(f;1)=f(1)$；

证明. $B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}$，代入即可得证。 □

（2）如果 $f\geqslant 0$，那么 $B_n(f)\geqslant 0$，如果 $f\leqslant 0$，那么 $B_n(f)\leqslant 0$；

证明. $B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x)$，由 $B_i^n(x)\geqslant 0$ 可立即得证。 □

（3）如果 f 递增（减），那么 $B_n(f)$ 也递增（减）；

证明. $B_n'(f;x)=n\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(\frac{i+1}{n})-f(\frac{i}{n})\right)B_i^{n-1}(x)$

f 递增 $\Rightarrow f(\frac{i+1}{n})>f(\frac{i}{n})\Rightarrow B_n'(f;x)>0\Rightarrow B_n(f)$ 递增，

f 递减 $\Rightarrow f(\frac{i+1}{n})<f(\frac{i}{n})\Rightarrow B_n'(f;x)<0\Rightarrow B_n(f)$ 递减。 □

（4）如果 f 是凸函数，那么 $B_n(f)$ 也是凸函数。

证明. $B_n''(f;x)=n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}\left(f(\frac{i+2}{n})-2f(\frac{i+1}{n})+f(\frac{i}{n})\right)B_i^{n-2}(x)$

f 凸 $\Rightarrow f(\frac{i+2}{n})-2f(\frac{i+1}{n})+f(\frac{i}{n})>0\Rightarrow B_n''(f;x)>0\Rightarrow B_n(f)$ 凸。 □

2. 设 $f\in C[a,b]$。

（1）如果 $\int_a^b f(x)x^n dx=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，那么 $f(x)\equiv 0$；

证明. 在 $[a,b]$ 上，存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 一致逼近 $f(x)$，于是我们有
$\int_a^b f^2(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)P_n(x)dx=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$ □

（2）如果存在正整数 N，使得 $\int_a^b f(x)x^n dx=0\ (n\geqslant N)$，那么 $f(x)\equiv 0$。

证明. $\int_a^b f(x)x^N x^{n-N}dx=0$，由（1）知：$f(x)x^N\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$。 □

3. 设 $f\in C[0,1]$。如果存在正整数 k，使得 $\int_0^1 f(x)x^{kn}dx=0\ (n=1,2,\cdots)$，证明：$f(x)\equiv 0$。

证明. 令 $t=x^k$，则有 $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^{kn}dx=\frac{1}{k}\int_0^1 f(t^{\frac{1}{k}})t^{\frac{1}{k}-1}t^n dt=0$。
于是有 $f(t^{\frac{1}{k}})t^{\frac{1}{k}-1}\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$。 □

4. 设 $f\in C[-1,1]$。证明:
(1) 如果 $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n+1}f(x)dx=0\ (n=0,1,\cdots)$，那么 f 是偶函数;

证明. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n+1}f(x)dx=\int_0^1 x^{2n+1}(f(x)-f(-x))dx=0\Rightarrow f(x)=f(-x)$ □

(2) 如果 $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n}f(x)dx=0\ (n=0,1,\cdots)$，那么 f 是奇函数;

证明. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n}f(x)dx=\int_0^1 x^{2n}(f(x)+f(-x))dx=0\Rightarrow f(x)=-f(-x)$ □

习题 15.8

证明：空间连续曲线 $\begin{cases} x(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(3^{3n-3}t)}{2^n}, \\ y(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(3^{3n-2}t)}{2^n} \\ z(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(3^{3n-1}t)}{2^n} \end{cases}$，$(0\leqslant t\leqslant 1)$ 能填满整个立方体 $[0,1]^3$，其中 $\varphi(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,\frac{1}{3}), \\ 3t-1, & t\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}), \\ 1, & t\in[\frac{2}{3},1). \end{cases}$

证明. 只要证 $\forall(a,b,c)\in[0,1]^3$，$\exists t_0\in[0,1]$ 使得 $x(t_0)=a$，$y(t_0)=b$，$z(t_0)=c$。把 a,b,c 用二进制小数表示为 $a=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}, b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n}, c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}$，这里 a_n,b_n,c_n 都只取 $0,1$ 中的某一个值。把 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 交错排列为 $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,\cdots,a_n,b_n,c_n,\cdots$ 并重新记为 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_{3n-2},\eta_{3n-1},\eta_{3n}$ 其中 $\eta_{3n-2}=a_n,\eta_{3n-1}=b_n,\eta_{3n}=c_n$。定义 $t_0=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\eta_n}{3^n}$，$\varphi(3^kt_0)=\eta_{k+1}$，于是有 $x(t_0)=a$，$y(t_0)=b$，$z(t_0)=c$。 □

习题 17.1

2. 设 f 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数。证明：

（1）如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，那么 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$；

证明. $a_{2n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2n-1)xdx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+\pi)\cos(2n-1)(x+\pi)d(x+\pi)+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2n-1)xdx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x)-f(x+\pi))\cos(2n-1)xdx=0$
$b_{2n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2n-1)xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)xdx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+\pi)\sin(2n-1)(x+\pi)d(x+\pi)+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)xdx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x)-f(x+\pi))\sin(2n-1)xdx=0$ □

（2）如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，那么 $a_{2n}=b_{2n}=0$。

证明. $a_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos 2nxdx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+\pi)\cos 2n(x+\pi)d(x+\pi)+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos 2nxdx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+\pi)+f(x))\cos 2nxdx=0$
$b_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin 2nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin 2nxdx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+\pi)\sin 2n(x+\pi)d(x+\pi)+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin 2nxdx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+\pi)+f(x))\sin 2nxdx=0$ □

3. 设 a_n,b_n 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数 f 的 Fourier 系数。证明平移函数的 Fourier 系数是 $\widetilde{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh$，$\widetilde{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$。

证明. $\widetilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx(x-h)dx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\cos nx\cos nh+\sin nx\sin nh\right)dx=a_n\cos nh+b_n\sin nh$
$\widetilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx(x-h)dx$
$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\sin nx\cos nh-\cos nx\sin nh\right)dx=b_n\cos nh+a_n\sin nh$ □

习题 17.2

1. 把函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x\ (-\pi < x < \pi)$ 展开为 Fourier 级数；证明：当 $0 < x < \pi$ 时，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$，并求级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和。

证明. $f(x)$ 为奇函数,$b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}(\cos nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$,

$a_n = 0$，$f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$。

当 $0 < x < \pi$ 时，$\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$。

特别地，当 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$。 □

2. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上把下列函数展开为 Fourier 级数：

（1）$|x|$；

证明. $|x|$ 为偶函数，$b_n = 0$，$a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi} = \pi$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{x}{n} + \sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$$

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$$ □

（2）$\sin ax\ (a \notin \mathbb{Z})$；

证明. $\sin ax$ 为奇函数，$a_n = 0$，

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos(n-a)x - \cos(n+a)x dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-a}\sin(n-a)x - \frac{1}{n+a}\sin(n+a)x\right)\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{a-n}\sin a\pi - \frac{(-1)^n}{a+n}\sin a\pi\right) = \frac{2}{\pi}\frac{n(-1)^n}{a^2-n^2}\sin a\pi \end{aligned}$$

$$\sin ax \sim \frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{a^2-n^2}\sin nx$$ □

（3）$x\sin x$。

证明. $x\sin x$ 为偶函数，$b_n=0$，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin xdx=\frac{2}{\pi}(\sin x-x\cos x)\Big|_0^{\pi}=2$$
$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos xdx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{x}{2}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2}$$
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)dx\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}+\frac{x\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_0^{\pi}\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\pi}{n+1}-\frac{(-1)^n}{n-1}\pi\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\end{aligned}$$
$$x\sin x\sim 1-\frac{1}{2}\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$$ □

3. 把 $f(x)=x-[x]$ 在 $[0,1]$ 上展开为 Fourier 级数。

证明. $a_0=2\int_0^1 x-[x]dx=x^2\big|_0^1=1$

$$a_n=2\int_0^1(x-[x])\cos 2n\pi x=2\left(\frac{1}{4n^2\pi}\cos 2n\pi x+\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right)\Big|_0^1=0$$
$$b_n=2\int_0^1(x-[x])\sin 2n\pi x=2\left(\frac{1}{4n^2\pi}\sin 2n\pi x-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{n\pi}$$
$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin 2n\pi x$$ □

4. 在区间 $(-l,l)$ 上把下列函数展开为 Fourier 级数：

（1）x；

证明. x 为奇函数，$a_n=0$，

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\left(\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l=\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}$$
$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{l}$$ □

（2）$x+|x|$；

证明. 对偶函数 $|x|$ 进行展开，$b_n=0$，$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l xdx=\frac{2}{l}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^l=l$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\left(\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l=\frac{2l((-1)^n-1)}{n\pi}$$

$$x+|x| \sim \frac{l}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{l}+\frac{2l}{n^2\pi^2}((-1)^n-1) \cos \frac{n\pi x}{l} \qquad \square$$

5. 利用 $\cos ax$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式，证明：

（1）$\cot x=\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ $(x \neq k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；

证明. $\cos ax=\dfrac{\sin a\pi}{\pi}\left(\dfrac{1}{a}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2} \cos nx\right)$

取 $x=\pi$ 得：$\cos a\pi=\dfrac{\sin a\pi}{\pi}+\left(\dfrac{1}{a}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-n^2}\right)$

$\Rightarrow \cot a\pi=\dfrac{1}{a\pi}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a\pi}{a^2\pi^2-n^2\pi^2} \Rightarrow \cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ □

习题 17.3

1. 求下列级数的 Cesàro 和：

（1）$1+0-1+1+0-1+\cdots$；

证明. $S_{3n}=0, S_{3n+1}=1, S_{3n+2}=1$，$\sigma_{3n}=\dfrac{2n}{3n}=\dfrac{2}{3}$，
$\sigma_{3n+1}=\dfrac{2n+1}{3n+1} \rightarrow \dfrac{2}{3}$，$\sigma_{3n+2}=\dfrac{2n+2}{3n+2} \rightarrow \dfrac{2}{3}$，$\sigma=\dfrac{2}{3}$。 □

（2）$\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+\cdots(0<x<2\pi)$；

证明. $S_n=\dfrac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$，$\sigma_n=\dfrac{\sin^2(nx/2)}{n\sin x/2} \rightarrow 0$，$\sigma=0$。 □

2. 证明：$[0,\pi]$ 上的连续函数可用余弦多项式一直逼近。

证明. $[0,\pi]$ 上的函数可先偶延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，由 Weierstrass 逼近定理知该函数可以用三角多项式一致逼近，而该函数为偶函数，因此三角多项式都是余弦多项式。 □

3. 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以用 Cesàro 求和的必要条件是 $a_n=o(n)$。

证明. $\displaystyle\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{a_n}{n}=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{n\sigma_n-2(n-1)\sigma_{n-1}+(n-2)\sigma_{n-2}}{n}=0$ □

4. 试由 Weierstrass 的关于三角多项式的逼近定理，导出关于代数多项式的逼近定理。

证明. 由 Weierstrass 逼近定理，先将函数用三角多项式一致逼近，再把三角多项式展开为幂级数，就可得到代数多项式的一致逼近。 □

习题 17.4

2. 写出函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\alpha\\ 0, & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$ 的 Parseval 等式,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$ 的和。

证明. $f(x)$ 为偶函数，$b_n=0$，$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}dx=\dfrac{2\alpha}{\pi}$,

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{a}\cos nxdx=\dfrac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\alpha}=\dfrac{2\sin n\alpha}{n\pi}$

Parsavel 等式: $\dfrac{2\alpha^2}{\pi^2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\sin^2 n\alpha}{n^2\pi^2}=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\dfrac{2\alpha}{\pi}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\dfrac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n\alpha}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\sin^2 n\alpha}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$

□

3. 对展开式 $x=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$ $(-\pi<x<\pi)$ 逐项积分，求函数 x^2,x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 展开式，并证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}=\dfrac{\pi^6}{945}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^8}=\dfrac{\pi^8}{9450}$。

证明. $x^2=4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\int\sin nxdx=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

$x^3=\pi^2x+12\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\int\cos nxdx=2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}(6-\pi^2n^2)\sin nx$

$x^4=8\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}(6-\pi^2n^2)\int\sin nxdx=\dfrac{\pi^4}{5}+8\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4}(\pi^2n^2-6)\cos nx$

由 Parsavel 等式: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(12-2\pi^2n^2)^2}{n^6}=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^6dx=\dfrac{2\pi^6}{7}$ 得到:

$\dfrac{2\pi^6}{7}=144\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}-48\pi^2\dfrac{\pi^4}{90}+4\pi^4\dfrac{\pi^2}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}=\dfrac{\pi^6}{945}$

由 Parsavel 等式：$\dfrac{\pi^8}{50}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(8\pi^2n^2-48)^2}{n^8}=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^8dx=\dfrac{2\pi^8}{9}$ 得到：

$$\frac{2\pi^8}{9}=\frac{\pi^2}{50}+64\pi^2\frac{\pi^4}{90}-768\pi^2\frac{\pi^6}{945}+2304\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450}\qquad\square$$

6. 设 a_n,b_n 是 $f\in\mathbb{R}^2[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 系数。证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 收敛。

证明. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}\leqslant\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2+\dfrac{1}{n^2}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\dfrac{\pi^2}{6}\right)$

$=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\dfrac{\pi^2}{12}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 收敛。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}\leqslant\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2+\dfrac{1}{n^2}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\dfrac{\pi^2}{6}\right)$

$=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\dfrac{\pi^2}{12}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 收敛。 $\square$

7. 证明：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 整数倍的区间上一致收敛，但它不是 $\mathbb{R}^2[-\pi,\pi]$ 中任意一个函数的 Fourier 级数。

证明. $\left|\sum\limits_{n=2}^{N}\sin nx\right|$ 一致有界，$\dfrac{1}{\ln n}$ 关于 n 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知该级数一致收敛。若它是函数 f 的 Fourier 级数，由 Parsavel 等式得：$\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}=+\infty$，矛盾。 $\square$

习题 17.5

1. 用 Fourier 积分表示下列函数：

（1） $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\,x, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

证明. 由于 $f(x)$ 为奇函数，$a(u)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut dt=0$，

$b(u)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut dt=\dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\sin ut dt=-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\cos ut}{u}\Big|_0^1=\dfrac{2(1-\cos u)}{\pi u}$。

$f(x)\sim\int_0^{+\infty}\dfrac{2(1-\cos u)}{\pi u}\sin ux du$。 $\square$

（3）$f(x) = e^{-a|x|}(a > 0)$。

证明. 由于 $f(x)$ 为偶函数，$b(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin utdt = 0$，
$a(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos utdt = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\sin utdt = \dfrac{2a}{\pi(a^2+u^2)}$。
$f(x) \sim \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \dfrac{2a}{\pi(a^2+u^2)}\cos uxdu$。 □

2. 求下列积分方程的解：
（1）$\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\sin xtdt = e^{-x}(x > 0)$；

证明. $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin txdx = \dfrac{2t}{\pi(1+t^2)}$ □

（2）$\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\cos xtdt = \dfrac{1}{1+x^2}$

证明. $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2}\cos txdx = e^{-|x|}$ □

3. 证明：$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xtdt = \begin{cases} 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

证明. 考虑偶函数 $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$，对其作 Fourier 变换得：
$a(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos utdt = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 (1-t)\cos utdt = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1-\cos u}{u^2}$，
$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1-\cos u}{u^2}\cos uxdu \overset{u=2t}{=\!=\!=} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xtdt$ □

4. 求函数 $F(u) = ue^{-\beta|u|}(\beta > 0)$ 的 Fourier 反变换。

证明. $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-\beta|u|}e^{iux}du = \displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{(-\beta+ix)u}du + \displaystyle\int_{-\infty}^{0} ue^{(\beta+ix)u}du$
$= \dfrac{1}{(-\beta+ix)^2} - \dfrac{1}{(\beta+ix)^2} = \dfrac{4i\beta x}{(\beta^2+x^2)^2}$ □

习题 18.1

3. 计算下列函数的导函数：

（1）$f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{(1+t)^2}dt$；

证明. $f'(x)=-\sin x\cdot e^{1+\cos^2 x}-\cos x\cdot e^{1+\sin^2 x}$ □

（2）$f(x)=\int_{x}^{x^2}e^{-x^2u^2}du$；

证明. $f'(x)=\int_{x}^{x^2}-2xe^{-x^2u^2}du+2xe^{-x^6}-e^{-x^4}$ □

（3）$f(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xt}{t}dt$；

证明. $f'(x)=\int_{a+x}^{b+x}\cos xtdt+\frac{\sin x(b+x)}{b+x}-\frac{\sin x(a+x)}{a+x}$ □

（4）$f(u)=\int_{0}^{u}g(x+u,x-u)dx$。

证明. $f'(u)=\int_{0}^{u}g_1-g_2dx+g(2u,0)$。 □

4. 设 φ,ψ 可以分别微分两次和一次。证明：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

满足弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

证明. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(-a\varphi'(x-at)+a\varphi'(x+at)\right)+\frac{1}{2}\left(\psi(x+at)+\psi(x-at)\right)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\left(a^2\varphi''(x-at)+a^2\varphi''(x+at)\right)+\frac{1}{2}\left(a\psi'(x+at)-a\psi'(x-at)\right)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\varphi'(x-at)+\varphi'(x+at)\right)+\frac{1}{2a}\left(\psi(x+at)-\psi(x-at)\right)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\varphi''(x-at)+\varphi''(x+at)\right)+\frac{1}{2a}\left(\psi'(x+at)-\psi'(x-at)\right)$ □

5. 设 f 在闭区间 $[0,a]$ 上连续，且当 $t\in[0,a]$ 时，$(x-t)^2+y^2+z^2\neq 0$。证明：

$$u(x,y,z)=\int_0^a\frac{f(t)dt}{\sqrt{(x-t)^2+y^2+z^2}}$$

满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

证明. 令 $r=\sqrt{(x-t)^2+y^2+z^2}$，则 $u=\displaystyle\int_0^a \frac{f(t)}{r}dt$，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\displaystyle\int_0^a -\frac{(x-t)}{r^3}f(t)dt$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\displaystyle\int_0^a \frac{3r(x-t)^2-r^3}{r^6}f(t)dt$。

同理可得：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\displaystyle\int_0^a \frac{3ry^2-r^3}{r^6}f(t)dt$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\displaystyle\int_0^a \frac{3rz^2-r^3}{r^6}f(t)dt$。相加后得到：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\displaystyle\int_0^a \frac{3r((x-t)^2+y^2+z^2)-3r^3}{r^6}f(t)dt=0$ □

7. 在区间 $[1,3]$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似代替函数 $f(x)=x^2$。试选取 a,b，使得 $\displaystyle\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$ 取最小值。

证明. 记 $f=\displaystyle\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial a}=\displaystyle\int_1^3 2(a+bx-x^2)dx=2ax+bx^2-\frac{2}{3}x^3\Big|_1^3=4a+8b-\frac{52}{3}\\ \dfrac{\partial f}{\partial b}=\displaystyle\int_1^3 2x(a+bx-x^2)dx=ax^2+\frac{2}{3}bx^3-\frac{1}{2}x^4\Big|_1^3=8a+\frac{52}{3}b-40\end{cases},$$

f 取最小值 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial a}=0,\dfrac{\partial f}{\partial b}=0\Rightarrow a=-\dfrac{11}{3},b=4$ □

习题 18.2

1. 研究下列反常积分在指定区间上的一致收敛性：

（1）$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ux}\sin x dx, 0<u_0\leqslant u<+\infty$；

证明. $\left|\displaystyle\int_0^A\sin xdx\right|=|\cos A-\cos 0|\leqslant 2$ 一致有界，e^{-ux} 关于 x 单调递减且关于 u 一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原积分一致收敛。 □

（3）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x+u)^2}, 0\leqslant u<+\infty$；

证明. $\dfrac{1}{1+(x+u)^2}\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知原积分一致收敛。 □

2. 证明：积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin ux}{x}dx$ 在任何不包含 $u=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛，在包含 $u=0$ 的区间上不一致收敛。

证明. 若 $0 \notin [a,b]$，$\left|\int_0^A \sin uxdx\right| = \left|\frac{\cos uA - \cos 1}{u}\right| \leqslant \frac{2}{|u|} \leqslant \frac{2}{\min\{|a|,|b|\}}$ 一致有界，$\frac{1}{x}$ 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知积分一致收敛。

若 $0 \in [a,b]$，$\sup\left|\int_A^\infty \frac{\sin ux}{x}dx\right| = \sup\left|\int_{Au}^\infty \frac{\sin t}{t}dt\right| \geqslant \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$，因此积分不一致收敛。 □

习题 18.3

1. 研究下列函数在指定区间上的连续性：

（1）$f(x) = \int_0^\infty \frac{t}{2+t^x}dt, x \in (2,+\infty)$；

证明. 注意到 0 不是 $f(x)$ 的瑕点，只需判断 $\int_1^\infty \frac{t}{2+t^x}dt$ 是否一致收敛。$\frac{t}{2+t^x} \leqslant \frac{1}{t^{x-1}}$，而 $\int_1^\infty \frac{1}{t^{x-1}}dt$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知 $f(x)$ 一致收敛，因此连续。 □

（3）$f(\alpha) = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \alpha \in (0,+\infty)$。

证明. $\left|\int_1^A \sin xdx\right| = |\cos A - \cos 1| \leqslant 2$ 一致有界，$\frac{1}{x^\alpha}$ 关于 x 单调递减且关于 α 一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $f(\alpha)$ 一致收敛，因此连续。 □

2. 利用公式 $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}(\alpha > 0)$，计算积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^m dx$，其中 m 为正整数。

证明. 对该积分不断使用分部积分得：$\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^m dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 (\ln x)^m dx^\alpha$

$$= \frac{1}{\alpha}x^\alpha(\ln x)^m\Big|_0^1 - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 x^\alpha d(\ln x)^m dx = -\frac{m}{\alpha}\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^{m-1}dx = \cdots$$

$$= (-1)^m\frac{m!}{\alpha^m}\int_0^1 x^{\alpha-1}dx = (-1)^m\frac{m!}{\alpha^{m+1}}$$ □

4. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx(\beta \neq 0)$。

证明. 不妨设 $\alpha \geqslant 0, \beta > 0$，记 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$，对 $I(\alpha)$ 求导得：

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}dx=\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2+x^2}-\frac{1}{\beta^2+x^2}dx$$
$$=\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{x}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\arctan\frac{x}{\beta}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\beta(\alpha+\beta)}$$

再对 $I'(\alpha)$ 积分得：$I(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta)+C(\beta)$，由于

$I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x^2}{\beta^2+x^2}dx\xlongequal{x=\beta\tan t}\frac{2}{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\beta+\ln\tan t dt=\frac{\pi}{\beta}\ln\beta$，于是有

$C(\beta)=I(0)-\frac{\pi}{\beta}\ln\beta=0\Rightarrow I(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta)$。 □

习题 18.4

3. 利用 Γ 函数，计算下列积分：

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}dx$;

证明. $\int_0^1\sqrt{x-x^2}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=B(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}$

$=\frac{(\Gamma(1/2)/2)^2}{2}=\frac{\pi}{8}$ □

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$;

证明. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-2/3}}{1+t}dt=\frac{1}{3}B(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ □

4. 证明：$\ln B(p,q)$ 关于变量 p 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数。

证明. 只要证明：$\ln B(\lambda_1p_1+\lambda_2p_2,q)\leqslant\lambda_1\ln B(p_1,q)+\lambda_2\ln B(p_2,q)$

$\Leftrightarrow B(\lambda_1p_1+\lambda_2p_2)\leqslant B(p_1,q)^{\lambda_1}\cdot B(p_2,q)^{\lambda_2}$，其中 $\lambda_1+\lambda_2=1$。

$$\begin{aligned}B(\lambda_1p_1+\lambda_2p_2)&=\int_0^1 t^{\lambda_1p_1+\lambda_2p_2-1}(1-t)^{q-1}dt\\&=\int_0^1\left(t^{\lambda_1(p_1-1)}(1-t)^{\lambda_1(q-1)}\right)\left(t^{\lambda_2(p_2-1)}(1-t)^{\lambda_2(q-1)}\right)dt\\&\leqslant\left(\int_0^1 t^{p_1-1}(1-t)^{q-1}dt\right)^{\lambda_1}\left(\int_0^1 t^{p_2-1}(1-t)^{q-1}dt\right)^{\lambda_2}\\&=B(p_1,q)^{\lambda_1}\cdot B(p_2,q)^{\lambda_2}\end{aligned}$$

□

7. 设 $a > 0$，$ac - b^2 > 0$，$a > \frac{1}{2}$。证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^\alpha} = \frac{(ac - b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{a^{1-\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\pi}$$

证明. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(a(x + \frac{b}{a})^2 + c - \frac{b^2}{a}\right)^\alpha}$

$\displaystyle= \frac{a^\alpha}{(ac - b^2)^\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(\frac{a^2}{ac-b^2}(x + \frac{b}{a})^2 + 1\right)^\alpha}$（令 $\displaystyle t = \frac{a^2}{ac - b^2}(x + \frac{b}{a})^2$

$\displaystyle= \frac{a^{\alpha-1}}{(ac - b^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1 + t)^\alpha} dt = \frac{a^{\alpha-1}}{(ac - b^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}} B(\frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2})$

$\displaystyle= \frac{a^{\alpha-1}}{(ac - b^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(ac - b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{a^{1-\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\pi}$ □

第一次习题课

定义 1：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛是指其部分和序列收敛

性质：(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) 线性性：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ 收敛，

且有：$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

(iii) 结合性：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛级数，在不改变次序的情况下对项进行任意结合，得到的新级数仍然收敛

正项级数的判别法（以下总设 $a_n > 0$）

① 单调有界：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界

② 比较判别法：若从某一项开始 $a_n \le b_n$

则有：
$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

极限形式：$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$，则有：

- $0 < l < \infty$：相同敛散性
- $l = 0$：$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- $l = \infty$：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

③ Cauchy 积分判别：$x \ge 1$ 时，$f(x) \ge 0$，递减，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sim \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

④ Cauchy 开方判别：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 正项级数，若 $q<1$，当 $n \gg 1$ 时，$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。若有无穷个 n，$\sqrt[n]{a_n} \ge 1$，则有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

极限形式：设 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$，则有：

- $q<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- $q>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
- $q=1$ 时，不能确定

⑤ D'Alembert 判别法：设 $a_n>0$，若 $0<q<1$，$\exists N\in N_+$.

- $n\geq N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- $n\geq N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

极限形式：设 $a_n>0$，则有

- $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q<1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
- $q=1$ 或 $p=1$ 不能确定

⑥ Raabe 判别法 ~~(极限形式)~~：$a_n>0$，有

- $\exists r>1$，s.t. $n>N$ 时，$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq r$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- $n>>1$ 时，有 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

极限形式：$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = l$.

或者 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{l}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty)$

则有 $l>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；$l<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；$l=1$ 无法确定

⑦ Gauss 判别法：设 $a_n>0$ 满足：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n\to\infty)$$

$\beta>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；$\beta<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

补充习题：

1. 假定正项级数 $\{a_n\}$ 发散，判断以下三个级数的敛散性：① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$

证：① 收敛：$\frac{a_n}{1+n^2a_n}<\frac{1}{n^2}$ 收敛

② 既可能收敛也可能发散

取 $a_n=1$，发散

取 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & n=k^2,\ k\in N\\ 0 & n\neq k^2\end{cases}$ 收敛

③ 发散．令 $c_n=\frac{a_n}{1+a_n}<1$，则 $a_n=\frac{c_n}{1-c_n}$

反证：若 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛．则 $n>>1$ 时，$c_n<\frac{1}{2}$

从而 $a_n<2c_n$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，矛盾．

2. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$ 的收敛性

证：由 Taylor 展开 $n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1=\frac{\ln n}{n^2+1}+o\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)$

n 充分大时，注意到 $\ln n<n^{\frac{1}{2}}$ 故 $\frac{\ln n}{n^2+1}<n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛．

3. 分析 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{(\ln n)^p}$ 的敛散性

证：由 Taylor 展开：$n^{\frac{1}{n}}=1+\frac{\ln n}{n}+o(\frac{1}{n})$ $(n\to\infty)$

故 $\frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{(\ln n)^p}=\frac{1}{n(\ln n)^{p-1}}+o\left(\frac{1}{n(\ln n)^p}\right)$

$p>2$ 时收敛 $p\leq 2$ 时发散

4. （教材 P180，问题 14.3 T3）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛正项级数，试作一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

证：设 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$\beta_n = S - S_n \downarrow$

$b_n = \sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_{n+1}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

5. （Kronecker 引理）设 $a_n \downarrow 0$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛，

则有：$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) b_n = 0$

证：$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_n\right| \le \left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_n\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k b_n\right|$

而 $\left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k b_n\right| < \left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k b_k \cdot \frac{b_n}{b_k}\right|$

由 Cauchy 收敛原理：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in N_+$，当 $n > N_1$ 时

$\left|\sum_{k=N_1+1}^{n} a_k b_k\right| < \varepsilon/3$ （不妨设 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1} \neq 0$）

则 $\exists N_2 > N_1$，$n > N_2$ 时，有：$b_n < \varepsilon / 3|a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}|$

故 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_n\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{k=N_1+1}^{n} a_k b_k \frac{b_n}{b_k}\right|$

Abel $\le \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=N_1+1}^{n-1} |S_k| \left(\frac{1}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k}\right) b_n + |S_n|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{b_n}{b_n} - \frac{b_n}{b_{N_1+1}}\right) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

其中 $S_k = \sum_{l=N_1+1}^{k} a_l b_l$

6. 设 $b_n \uparrow \infty$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，试证：$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{b_n} = 0$

证：令 $x_n = a_n b_n$，$y_n = \frac{1}{b_n}$，则 $y_n \downarrow 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛. 由 Kronecker引理即证

7. 设 $a_n>0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. $p>1$. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} < \infty$

证: $\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p}$

对 x^{1-p} 在 $[a,b]$ 上用 Lagrange 中值定理: $(a>0)$

$$\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{b^{p-1}} = \frac{(p-1)}{\xi^p}(b-a) > (p-1)\frac{b-a}{b^p}$$

令 $a=S_{n-1}$, $b=S_n$. 代入:

$$\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_n^{p-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k^p} = \frac{1}{a_1^{p-1}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{S_k^p} < \frac{1}{a_1^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_{k-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_k^{p-1}}\right)$$

$$< \frac{1}{a_1^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{a_1^{p-1}} = \frac{p}{p-1}\cdot\frac{1}{a_1^{p-1}} < \infty$$

RMK: $p>1$ 必要. 否则取 $a_n=\frac{1}{n}$, $S_n = \ln n + r$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n} = \infty$

8. (Frick 判别法) $a_n>0$. 若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \lambda$ 存在.

则 $\lambda < e^{-1}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. $\lambda > e^{-1}$ 时级数发散.

证: 取对数: $n\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ln\lambda$

$\lambda<e^{-1}$ 时 $\quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \geq n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} > -\ln\lambda - \varepsilon/2 > 1$

由 Raabe 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

$\lambda>e^{-1}$ 时 $\quad n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\ln\lambda \in (0,1)$. $\quad a_n\downarrow$ $\left(n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}>0\right)$

又 $n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$, $n>>1$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} > e^{-\frac{1}{n}}$

$a_n > c e^{-\ln n + r} \Rightarrow a_n > c'\cdot\frac{1}{n}$ $\;c'$ 为常数 (与n无关) 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 ~~a_n 发散~~

RMK: $\lambda = e^{-1}$ 时 无法判断.

令 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$. 则 $\lambda = e^{-1}$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 散 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收

二、习题

1. (教材 P_{232} T_6)

(1) 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛，知 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，

$\forall n>N$，$p>0$ 有：$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_n(x)\right| < \varepsilon/2$

又 $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$，故 $\exists \delta_n>0$，

s.t. $|u_n(x)-a_n| < \varepsilon/2(p+1)$ $x\in B_{\delta_n}(x_0)\cap E$

令 $\delta = \min\{\delta_n, \delta_{n+1}, \cdots, \delta_{n+p}\}$

则 $x\in B_\delta(x_0)\cap E$，$n>N$，$p>0$ 时

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_n\right| < \left|\sum_{k=n}^{n+p}a_n-\sum_{k=n}^{n+p}u_n(x)+\sum_{k=n}^{n+p}u_n(x)\right|$$

$$\le\left|\sum_{k=n}^{n+p}(a_n-u_n(x))\right|+\left|\sum_{k=n}^{n+p}u_n(x)\right|$$

$$\le\sum_{k=n}^{n+p}|u_n(x)-a_n|+\varepsilon/2$$

$$<(p+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(p+1)}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 （Cauchy 准则）

(2)（类比 Abel 第二定理）

证明可类比定理 15.3.1，此处不再赘述。

2.（P_{224} 中问题 15.2 T_5）设函数 f 在 $x=0$ 的邻域内有二阶连续导函数，且 $f(0)=0$，$0<f'(0)<1$，记 f_n 为 f 的 n 次复合，则 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内一致收敛。

证：由于 $f(x)=f'(0)x+o(x)\quad x\to0$

故可找到 $\delta>0$，$0<q<1$，s.t. $|f(x)|\le q|x|\ \forall x$

则 $|f_n(x)|\le q^n|x|<q^n\delta$

$\Rightarrow$ ~~由~~ $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $x=0$ 的邻域 $B_\delta(0)$ 内一致收敛。

3.（教材 P_{233} 问题 15.3 T_2）设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足

(a) $\int_a^{+\infty}u_n(x)dx\quad(n=1,2,\cdots)$ 收敛

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，$\forall b>a$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛，$f_n(x)=\int_a^x u_n(t)dt$

证明：$\int_a^{+\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x))\,dx$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty}u_n(x)\,dx$ 都收敛，

且 $\int_a^{+\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x))\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty}u_n(x)\,dx$

证：$\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^{x}u_n(x)\,dx=\int_a^{+\infty}u_n(x)\,dx:=a_n$.

且 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 E 上一致收敛，这里 $E=[a,+\infty)$

且 $+\infty$ 为 E 的极限点。

从而由 T1：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty}u_n(x)\,dx$ 收敛

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty}u_n(x)\,dx$ $(*)$

$$LHS=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{x}u_n(x)\,dx$$

$$\xlongequal{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\text{在}[a,+\infty)\text{上内闭一致收敛}}\lim_{x\to+\infty}\int_a^{x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,dx$$

$$=\int_a^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,dx$$ （由 $(*)$ 保证该积分存在）

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty}u_n(x)\,dx=\int_a^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,dx$.

4. （教材 P_{233} 问题 15.3 T_6）

证：$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\,2^{n+1}}{(2n+1)!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n+1}x}{2^n}\,dx$$

$$\xlongequal{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2n+1}x}{2^n}\text{一致收敛}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2n+1}x}{2^n}\,dx=\pi.$$

5. DCT 与一致收敛

DCT：设 $\{f_n\}$ 可积，且 $\exists g$，s.t. $|f_n| \le g$，$\forall x \in I$，g 为可积函数，且有 $f_n \to f$，则 $\int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx$.

一致收敛时，由一致收敛性，可找到 $M>0$，

s.t. $|f_n| \le |f| + M$ $\forall x \in I$. 而 f 一定可积，故可由 DCT 得出 $\int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx$

注：极限与积分号交换的充要条件由 U.I. 给出.（Vitali 收敛定理）

6. 连续性方面的充要条件.

Def：称函数列 $\{S_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上为准一致收敛，如果该函数列于 $[a,b]$ 上收敛于极限函数 $S(x)$，且 $\forall \varepsilon>0$，$\forall N \in N_+$，$\exists N'>N$. s.t. $\forall x \in [a,b]$，$\exists n_x \in [N,N']$ 满足 $|S_{n_x}(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Prop 2（Arzela-Borel 定理）在 $[a,b]$ 上的连续函数列的极限函数在 $[a,b]$ 上连续的充要条件是函数列在 $[a,b]$ 上准一致收敛.

证明：设 $\{S_n\}$ 连续函数列 on $[a,b]$ with $S_n \to S$ on $[a,b]$

必要性：$\forall x_0 \in [a,b]$，~~$\forall \varepsilon>0, \exists N \in N_+$~~

$\forall \varepsilon>0$，$N \in N_+$，$\exists n_0 > N$，s.t. $|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$

利用 $S_{n_0}(x)$ 和 $S(x)$ 的连续性. $\exists \delta_0>0$，s.t. 当 $x \in B_{\delta_0}(x)\cap[a,b]$

有：$|S_{n_0}(x) - S(x)| < \varepsilon$

即 $|S_{n_0}(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in B_{\delta_0}(x) \cap [a,b]$

由有限覆盖定理．可找到 $n_1, n_2, \cdots, n_k \in N_+$．

取 $N' = \max\limits_{1\le i\le k} n_i$．则可验证 $\{S_n\}$ 准一致收敛到 S．

充分性：$|S(x) - S(x_0)| \le |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)|$

$+ |S_n(x_0) - S(x_0)| := I_1 + I_2 + I_3$

由于 $S_n(x_0) \to S(x_0)$．故 $\exists N$，$n \ge N$ 时 $I_3 < \varepsilon/3$．

由准一致收敛条件，对于 N 与 $\varepsilon/3$，$\exists$ 满足条件的 N'．由于 $[N, N']$ 中只有有限个正整数．故 $\exists \delta > 0$，s.t. $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $x \in [a,b]$ 时，$I_2 < \varepsilon/3 \quad \forall n \in [N, N']$

又 $\forall x$，只要 $0 < |x - x_0| < \delta$，$x \in [a,b]$．则 $\exists n_x \in [N, N']$ s.t. $n = n_x$ 时 $I_1 < \varepsilon/3$，此时 $I_2 < \varepsilon/3$，$I_3 < \varepsilon/3$

取这样的 n_x．则有：$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$

即 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 关于 x_0 连续．

7. 设具有相同单调性的单调函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于 $f \in C[a,b]$，则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛．

证：不妨设 $\{f_n\}$ 均为单增函数．

$\forall x_0 \in [a,b]$，由 f 的连续性：

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_{x_0} = \delta(x_0, \varepsilon)$，s.t. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3 \quad \forall x \in B_{\delta_{x_0}}(x_0) \cap [a,$

注意到由单调性：$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \max\{f_n(x_0 + \delta_{x_0}) - f(x_0), f_n(x_0) - f_n(x_0 - \delta$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(x_0)) = f(x) - f(x_0)$（绝对值小于 $\varepsilon/3$）

由上知：$\exists\ N_{x_0}^1 = N(x_0, \varepsilon)$, s.t $n > N_{x_0}^1$ 时

$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3 \quad \forall x \in B_{\delta_{x_0}}(x_0) \cap [a,b]$

又由收敛性 $(f_n(x_0) \to f(x_0))$ $\exists\ N_{x_0}^2 = N(x_0, \varepsilon)$, s.t $n > N_{x_0}^2$ 时

$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$. 取 $N_{x_0} = \max\{N_{x_0}^1, N_{x_0}^2\}$. 则 $n > N_{x_0}$ 时

从而：$|f_n(x) - f(x)| < |f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0) + f(x_0) - f(x)|$

$\leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall x \in B_{\delta_{x_0}}(x_0) \cap [a,b]$

由有限覆盖定理知可取出 $x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n$

s.t. $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_{x_0^i}}(x_0^i)$

从而令 $N = \max_{1 \leq i \leq n} N_{x_0^i} = N(\varepsilon)$ (只与 ε 有关)

则 $n > N$ 时

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$ 成立

这即 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

即将非法积分转化成...

习题

· 教材 P284 问题 16.2 T2

$$t\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = -e^{-tx}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow \left| t\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)\,dx - a \right| = \left| t\int_0^{+\infty} e^{-tx}(f(x)-a)\,dx \right| \quad (*)$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$，知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M$，$x > M$ 时 $|f(x)-a| < \varepsilon/2$

又知 $|f(x)-a| < N$ 有界，取 t，s.t. $|t| < \varepsilon/2NM$

从而 $(*) = \left| t\left(\int_0^{M} e^{-tx}(f(x)-a)\,dx + \int_M^{+\infty} e^{-tx}(f(x)-a)\,dx\right)\right|$

$$\le \left| t\int_0^{M} e^{-tx} N\,dx + t\int_M^{+\infty} e^{-tx}\cdot \varepsilon/2\,dx \right| < \varepsilon.$$

$f(x)dx$. 即 $\lim\limits_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)\,dx = a$

证：(教材 P291 问题 16.3 T1)

(1) $\int_{\varepsilon}^{A} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_{\varepsilon}^{A}\frac{f(ax)}{x}dx - \int_{\varepsilon}^{A}\frac{f(bx)}{x}dx$

$= \int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(t)}{t}dt - \int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt$

$= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(t)}{t}dt - \int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt \quad (*)$

$\underset{\text{积分中值}}{=} f(\xi)\ln\frac{b}{a} - f(\eta)\ln\frac{b}{a} \qquad \xi\in(a\varepsilon, b\varepsilon),\ \eta\in(aA, bA)$

$\xrightarrow[A\to+\infty]{\varepsilon\to 0} (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}$

(2) 在(*)中，由 $\int_{1}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛

知第二项 $\xrightarrow{A\to\infty} 0$

即 $\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}$

(3) 在(*)中，由 $\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛

知第一项 $\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\cancel{A\to\infty}} 0$

即 $\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$

3. (教材 P291 问题 16.3 T2)

$\int_{0}^{1-\frac{1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$

令 $n\to\infty$，即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{0}^{1} f(x)dx$

P61

1. 易知 $\dfrac{\partial (G(F(x^1,x^2,\cdots,x^m))_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial G_i(F(x^1,x^2,\cdots,x^m))}{\partial x^j}$

$= \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial G_i}{\partial y_k} \dfrac{\partial y_k}{\partial x^j}$ （这里 $y_k = F_k(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ ）

$= \left(DG(y_0)\cdot DF(x_0)\right)_{ij}$

即 $D(G\circ F)(x_0) = DG(y_0)\cdot DF(x_0)$

2. 由反函数定理：F 存在唯一反函数 F^{-1}，且 $(F^{-1})'(y) = \dfrac{1}{F'(x)}$

又 $F'(x)\neq 0$ for $x\in(a,b)$. 故由 F' 连续性知 ~~存在~~ $F'(x)>0$ 或 $F'(x)<0$

从而 F 和 F' 在 (a,b) 上严格单调

3. (1) F 值域为 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

(2) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{vmatrix} = e^{2x}\neq 0$ （且恒大于0）

故 F 在 $\mathbb{R}^2$ 的任一点有 C^∞ 局部逆映射．由于 F 显然不是 $\mathbb{R}^2$ 上单射，故不是整体一一的

(3) $x=x_0$： $F(x_0,y) = (e^{x_0}\cos y,\ e^{x_0}\sin y)$ 半径为 e^{x_0} 的圆

$y=y_0$： $F(x,y_0) = (e^x\cos y_0,\ e^x\sin y_0)$ 从 ~~原~~ 点出发的（不包含0）的方向为 $(\cos y_0,\sin y_0)$ 的射线

(4) $\begin{cases} e^x\cos y = s \\ e^x\sin y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln\sqrt{s^2+t^2} \\ y = \arctan\frac{t}{s} \end{cases}$ $G(s,t) = (\frac{1}{2}\ln\sqrt{s^2+t^2},\ \arctan\frac{t}{s})$

4. 记 $\Delta x=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_m)$ $\quad \Delta x = x-x_0$.

$$\cancel{\| G(F(x)) - G(F(x_0)) - DG(F(x_0))\Delta x\|}$$

$$= \| G(F(x)) - G(F(x_0)) - DG(y_0)\cdot DF(x_0)\Delta x\|$$

$$\overset{G可微}{=} \| DG(y_0)(F(x)-F(x_0)) - DG(y_0)DF(x_0)\Delta x + \Delta_1(F(x)-F(x_0))\| \quad (*)$$

这里 $\|\Delta_1(F(x)-F(x_0))\| = o(\|F(x)-F(x_0)\|) = o(\|DF(x_0)\Delta x\|) = o(\|\Delta x\|)$

$$(*) \le \| DG(y_0)(F(x)-F(x_0)) - DG(y_0)DF(x_0)\Delta x\| + o(\|\Delta x\|)$$

$$\overset{F可微}{=} \| DG(y_0)DF(x_0)\Delta x - DG(y_0)DF(x_0)\Delta x + \Delta_2(\Delta x)\| + o(\|\Delta x\|)$$

由F可微知 $\|\Delta_2(\Delta x)\| = o(\|\Delta x\|)$

$$\Rightarrow \| G(F(x)) - G(F(x_0)) - DG(y_0)DF(x_0)\Delta x\|$$

$$\le o(\|\Delta x\|)$$

亦即 $G\circ F$ 可微且 $D(G\circ F)(x_0) = DG(y_0)DF(x_0)$

5. 若可微，由 T_4: $DF^{-1}(y_0)DF(x_0) = I_n$.

与 $\det DF(x_0)=0$ 矛盾.

6. (1) 此为开映射定理（由题：F^{-1} 存在，利用反函数定理结论即可

(2) 由F双射知整体逆映射存在，利用反函数定理结论.

7. $F'(x) = \frac{1}{2} + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad x \ne 0$

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+x\sin\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \ne 0$$

易知 $F'(x)$ 在 0 不连续.

注意到 $F\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{1}{4n\pi}$, $F'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2} < 0$

$$F\left(\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}\right) = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}\right) > F\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$$

故 $\exists\ \xi_n \in \left(\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right)$，有 $F(\xi_n)=\frac{1}{4n\pi}$.

即 $\forall n\in N_+$，$F(x)=\frac{1}{4n\pi}$ 总有至少两个解

从而 $F(x)$ 在 0 无局部反函数.

8. (1)

$$y''=\frac{dy'}{dx}=-\frac{-F''_{xy}F'_y+F''_{y}F'_x}{F_y'^2}$$

$$=\frac{2F_x'F_y'F''_{xy}-F_y'^2F''_{xx}-F_x'^2F''_{yy}}{F_y''^3}$$

(2) $\frac{\partial y}{\partial x_j}=-\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}$ $j=1,2,\cdots,m$

(3) 由隐映射定理

9. (1) (2) 见数分第一册教材

10. 证推广情形：$F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ $(n<m)$ C^1 映射. 若F一一映射

令 $G:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\mapsto(F(x_1,x_2,\cdots,x_m),x_{n+1},\cdots,x_m)$

则 $\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right)_{m\times m}=\cancel{\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{m\times m} & 0\\ & I\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{n\times m}\\ 0 \quad I\end{pmatrix}$

由于 $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{n\times m}$ 满秩（F一一映射），则 $\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right)_{m\times m}$ 满秩.

有局部逆映射 g, s.t. $g\circ G=I_{\mathbb{R}^m}$

考虑 $\{x_1=x_2=\cdots=x_n=0\}$ 的 G-原像 S. 知 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in S$,

$F(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0$. ~~由n<m，知~~ 由F一一 知 S 仅有一个元素.

但这与 $n<m$ 矛盾. 故F不是一一映射.

11. 令 $\varphi(t)=(F(b)-F(a))\cdot F(t)$

$\varphi'(t)=(F(b)-F(a))\cdot DF(t)$ $\varphi\in C^1(a,b)$

由中值定理：$\exists\, \xi\in(a,b)$, s.t. $\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a)$

即 $\|F(b)-F(a)\|^2=\varphi'(\xi)(b-a)$

$=(b-a)\ (F(b)-F(a))\cdot DF(\xi)$

$\le(b-a)\|F(b)-F(a)\|\,\|DF(\xi)\|$

$\Rightarrow \|F(b)-F(a)\|\le\|DF(\xi)\|(b-a)$

12. 令 $g(t)=F(a+t(b-a))$

$g'(t)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)(b-a)^T$

$\|g(1)-g(0)\|=\|F(b)-F(a)\|\overset{T_{11}}{\le}\|Dg(\xi)\|\le M\|b-a\|$

13. (1) 由 $\lambda\ne0$，知 $\|A\|\ne0$

故 $\varphi(x)=x\Leftrightarrow A^{-1}(y-F(x))=0\Leftrightarrow F(x)=y$

(2) $\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\|=\|x_1-x_2-A^{-1}(F(x_1)-F(x_2))\|$

$\le\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$

(3) 由压缩映射定理

(4) 由开映射定理.

(5) 由 T8 (1) (取 $y=F(x)$) 及归纳即证

14. 由反函数定理，$\forall\, y_0\in F(A)$，有 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，有 $x_0=F^{-1}(y_0)$

且 $F^{-1}(B_\varepsilon(y_0))=B_\delta(x_0)$ F^{-1} 为局部反函数 $F^{-1}\in C^1$

由 $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}C(x_i,\delta_i)$，知 $F(A)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}C(y_i,\varepsilon_i)$

由 $m(A)=0$ 知 $m(F(A))=0$

15. 利用 T14 结论即可

2.1

13. 定义 $T(m,\mathbb{R}^n)$ 中的距离 d.

设 $x,y \in T(m,\mathbb{R}^n)$ $\quad x=(x_1,\cdots,x_m)^T \quad y=(y_1,\cdots,y_m)^T$

$x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, 且 $\{x_i\}$ 线性无关 $\{y_i\}$ 线性无关

此时可视 x,y 为 $m\times n$ 的矩阵. 由线性无关, 知 $x,y \in M(m,n;m)$

故 $\rho(x,y) = \max\limits_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} |x_{ij}-y_{ij}|$ $\quad x_{ij}$ 为 x_i 的 j 分量. (易验证为距离)

则显然 度量空间 $(T(m,\mathbb{R}^n), \rho)$ 与 $M(m,n;m)$ (配备以例8的距离) 同构. 自然有相同拓扑结构.

而 $M(m,n;m)$ 是 mn 维 C^∞ 流形. 可类似定义例8中的映射 φ (构成一组基), 进而张成微分构造, 即

$T(m,\mathbb{R}^n)$ 为 mn 维 C^∞ 流形.

$\lambda: M(n,n+k;n) \twoheadrightarrow G(n,k)$ 商拓扑.

14. (1) 考虑 λ 的拉回：$\bar{\lambda}: G(n,k) \to M(n, n+k; n)$

$\lambda(y)=x \quad y=(I_n, Q)$

即对每一个 $x \in G(n,k)$，取 $y \in M(n,n+k;n)$，有 ~~$\bar{\lambda}(x)=y$ ($\lambda(y)=x$)~~

$\{(U,\varphi)\}$ 是 $M(n, n+k; n)$ 的 C^∞ 微分构造

验证 $\{(\lambda(U), \varphi\circ\bar{\lambda})\}$ 是 $G(n,k)$ 的 C^∞ 微分构造.

(2) 引入 $M(n, n+k; n)$ 中拓扑，类似可证（视为其子拓扑）

(3) $G_{k,n}$ 是 r 维线性空间 $(r \le n+k)$

则取基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$

则 $\{ r_i e_j \mid r_i \in \mathbb{Q},\ 1 \le j \le r \}$ 是 $G_{k,n}$ 稠密子集.

(4) 设 $\bigcup U_\alpha$ 是 $G_{k,n}$ 的一个开覆盖

$U_{r_i e_j}$ 为包含 $r_i e_j$ 的开集（可以相同）

容易验证 $G_{k,n}$ 自列紧，而其完备，自然是紧致的

2.2.2

(1) $F_2 \circ F_1 : M_1 \to M_3$

取 M_1 上、M_2，M_3 的坐标邻域 (U_1, φ_1)，(U_2, φ_2)，(U_3, φ_3)

则 $\varphi_2 \circ F_1 \circ \varphi_1^{-1} \in C^k$，$\varphi_3 \circ F_2 \circ \varphi_2^{-1} \in C^k$

$\Rightarrow \varphi_3 \circ F_2 \circ F_1 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_3 \circ F_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ F_1 \circ \varphi_1^{-1} \in C^k$

即 $F_2 \circ F_1$ 是 C^k 映射.

(2) 而 $D(\varphi_3 \circ F_2 \circ F_1 \circ \varphi_1^{-1})\big|_{\varphi_1(p)} = D(\varphi_3 \circ F_2 \circ \varphi_2^{-1})\big|_{\varphi_2(p)} D(\varphi_2 \circ F_1 \circ \varphi_1^{-1})\big|_{\varphi_1(p)}$

$\Rightarrow (\mathrm{rank}\, F_2 \circ F_1)_p \le \cancel{\mathrm{rank}}\ \max\{(\mathrm{rank}\, F_2)_p, (\mathrm{rank}\, F_1)_p\}$

(3) 设 $A = \varphi_3 \circ F_2 \circ \varphi_2^{-1}$ $B = \varphi_2 \circ F_1 \circ \varphi_1^{-1}$ $AB = 0$

即可取 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 线性 $\mathrm{rank}\, \mathrm{Im} A = m$ $0 < m < n$

$B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 线性 $\mathrm{Im} B = \ker A$ 则 A, B 的 rank 均不为 0.

且 A, B 是 C^k 的，故 $AB = 0$

(4) 由 (1) 知 $F_2 \circ F_1$ 是 C^k 的 由(2)

$\mathrm{rank}(F_2 \circ F_1)_p \le \max\{(\mathrm{rank}\, F_2)_p, (\mathrm{rank}\, F_1)_p\} \le m < n.$

即 $F_2 \circ F_1$ 是浸入

$F_i : M_i \to F(M_i)$ 同胚 $i = 1, 2$.

故 $F_2 \circ F_1 : M_1 \to F_2 \circ F_1(M_1)$ 是同胚. 进而是嵌入.

~~2.2.1~~

2.2.8 ~~$x\in V$~~ $\varphi_1: V\to\mathbb{R}^n \quad x\longmapsto \tan\frac{\pi}{2}\|x\|\, x$

是 C^∞ 微分同胚.

作平移 $\varphi_2: \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n \quad x\longmapsto x-\varphi_1(p)+\varphi_1(q)$

C^∞ 微分同胚

则 $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2\circ\varphi_1: V\to V$ 是 C^∞ 微分同胚.

且 $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2\circ\varphi_1(p)=\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2(\varphi_1(p))=\varphi_1^{-1}\circ\varphi_1(q)=q$.

故 $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2\circ\varphi_1$ 是这个同胚.

2.2.19、证：由~~$M_1 = M_2$~~ (M_1, D_1), (M_2, D_2) 是 A_2 空间可知

12 它们均有可数稠密子集

$\exists$ 存在可数 $X_1 \subset M_1$, $X_2 \subset M_2$ s.t. $\overline{X_1} = M_1$, $\overline{X_2} = M_2$

由 $meas(A) = 0$ 可知.

$M_1 \setminus A$ 必满足 $\overline{M_1 \setminus A} = M_1$

而由 F 为 C^1, $F(M_1) \subset M_2$, 要证 $G(F(M_1) \setminus F(A)) = G(F(M_1))$, $(G \in D_2)$

$\exists$ $F(M_1) \setminus F(A) \subset F(M_1)$

$G(F(M_1) \setminus F(A)) = G(F(\overline{M_1 \setminus A}) \setminus F(A))$

$\supset G(F(\overline{M_1 \setminus A})) \setminus G(F(A))$

$\supset G(F(M_1)) \setminus G(F(A))$

$\supset G(F(M_1 \setminus A)) \cup G(F(A)) \setminus G(F(A))$

$\supset G(F(M_1 \setminus A))$

又 $F(M_1) \setminus F(A) \subset F(M_1 \setminus A)$

$\therefore G(F(M_1) \setminus F(A)) = G(F(M_1 \setminus A))$

对内取闭 $G(\overline{F(M_1) \setminus F(A)}) = G(\overline{F(M_1 \setminus A)}) \overset{F \in C^1}{=} G(F(M_1))$

$\therefore meas(F(A)) = 0$ □

4.1.1. 证：要证 $T_p(M)$ 是向量空间，只需证它满足线性性质且封闭

任取 u, v 为 p 点的 M 切向量，则 $u, v \in T_p(M)$

任取 $\vec{n_p}$ 垂直于切平面 $T_p(M)$，则 $u \cdot \vec{n_p} = 0$，$v \cdot \vec{n_p} = 0$

$\Rightarrow$ ~~对~~ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$，$(\alpha u + \beta v) \cdot \vec{n_p} = \alpha(u \cdot \vec{n_p}) + \beta(v \cdot \vec{n_p}) = 0 \in T_p(M)$

$(\alpha u + \beta v) \in T_p(M)$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$，$\lambda u \cdot \vec{n_p} = \lambda(u \cdot \vec{n_p}) = 0 \in T_p(M)$ $\Rightarrow \lambda u \cdot \vec{n_p} \in T_p(M)$

$\Rightarrow T_p(M)$ 满足线性：对加法和数乘封闭

$\Rightarrow T_p(M)$ 是向量空间，由 Thm 1，它是 n 维的。 □

4.1.2. 证：Step 1：def 2 $\Leftrightarrow$ def 2'：

① $X_p(f+g) = X_p(\{f\} + \{g\}) = X_p\{f\} + X_p\{g\} = X_p(f) + X_p(g)$

② $X_p(cf) = X_p(\{cf\}) = X_p(\{c \cdot \{f\}\}) = cX_p\{f\} = cX_p(f)$

③ $X_p(f \cdot g) = X_p(\{f \cdot g\}) = X_p(\{f\} \cdot \{g\}) = \{g\}_p X_p\{f\} + \{f\}_p X_p\{g\}$

$= g(p) \cdot X_p f + f(p) \cdot X_p g$

由 $X_p(f) = X_p(\{f\})$，$f = \{f\}$ 可知，反之亦然，即 def 2 和 def 2' 等价 □

Step 2：def 2 $\to$ def 2''：

若 X_p 满足 def 2 中 1°、2°、3°

$(M, 1)$ 1 维流形这时取 $n=1$，定义 2'' 的形式简化为 $X_p(\{x\}) = \alpha$，$X_p(\{y\}) = \beta$，$\beta = \frac{\partial y}{\partial x}\alpha$，$\forall x$

则称 X_p 为 p 点处一个切向量

由 X_p 的线性和导性知

$\beta = X_p(\{y\}) = X_p(\{\frac{\partial y}{\partial x} \cdot x\}) = \{x\}_p \cdot X_p\{\frac{\partial y}{\partial x}\} + \{\frac{\partial y}{\partial x}\}_p \cdot X_p\{x\}$

局部坐标系以 p 为原点 $\Rightarrow \{x\}_p = \{0\}$　x, y 是基底 $\Rightarrow \{\frac{\partial y}{\partial x}\}_p = 1$

因此 $\beta = X_p\{x\} = \alpha$ □

Step3: ~~证~~ def 2'' $\Leftrightarrow$ def 2'''

若 $\sigma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是 C^∞ 映射，$\sigma(0)=p$.

则 $(x^i\circ\sigma)$ 当是将局部坐标系映射到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^∞ 映射

只需证明两种定义下的等价关系相对应.

$(p,\sigma)\sim(p',\sigma')\Leftrightarrow p=p'$ 且 $\frac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}\big|_{t=0}=\frac{d(x^i\circ\sigma')}{dt}\big|_{t=0}$

其中 $(x^i\circ\sigma)$, $(x^i\circ\sigma')$ 是 H 上两不同映射

$\Leftrightarrow (x^i\circ\sigma)$, $(x^i\circ\sigma')$ 是同一等价类

即 $\{x^i\circ\sigma\}=\{\frac{dx^i\circ\sigma}{dx^i\circ\sigma'}\cdot x^i\circ\sigma'\}$

$=\{\frac{dx^i\circ\sigma}{dt}\cdot\frac{dt}{dx^i\circ\sigma'}\cdot x^i\circ\sigma'\}$

$=\{x^i\circ\sigma'\}$

即 def 2'' 与 def 2''' 等价.

Step4: def 2'' $\to$ def 2'

取 $n=1$. X_p 为 p 点处切向量. $\{x^i\}$, $\{y^i\}$ 为任意基底

有 $X_p(\{x^i\})\sim X_p(\{y^i\})$. $\Rightarrow X_p\{x\}\sim X_p\{y\}\Rightarrow X_p\{y\}=\frac{\partial y}{\partial x}X_p\{x\}$

$\{x\},\{y\}\in F_p/\sim$

验证: 1°. 2°. 由 $X_p\{y\}=\frac{\partial y}{\partial x}X_p\{x\}$ 可知. X_p 为线性映射.

3°. $X_p(\{f\cdot g\})=X_p(\{f\cdot g\cdot x^i\})$

$=X_p(\frac{\partial fg}{\partial x^i})X_p\{(x^i)\}$

$=(f(\frac{\partial g}{\partial x^i})+g\frac{\partial f}{\partial x^i})X_p\{(x^i)\}$

$=X_p\{f\}(\frac{\partial g}{\partial x^i})+X_p\{g\}(\frac{\partial f}{\partial x^i})$

$=\cancel{\ }g(p)X_pf+f(p)X_pg$

3. (1) (2) 见习题课讲义

(3) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{**}(dx^j) = (dx^j)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_i^j$

(4) 由习题课结论，θ有基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s} \;\middle|\; \begin{array}{l}1\le i_1\cdots i_r\le n\\ 1\le j_1\cdots j_s\le n\end{array}\right\}$

而θ在每个分量上的坐标为 $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$

故 $\theta = \sum_{\substack{i_1\cdots i_r=1\\ j_1\cdots j_s=1}}^{n} \theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$

(5) 只须注意到 $\frac{\partial}{\partial y^{i_m}} = \sum_{l_m=1}^{n}\frac{\partial x^{l_m}}{\partial y^{i_m}}\frac{\partial}{\partial x^{l_m}} \quad 1\le m\le r$

$$dy^{i_t} = \sum_{k_t=1}^{n}\frac{\partial y^{i_t}}{\partial x^{k_t}}dx^{k_t} \quad 1\le t\le s$$

结合张量的多线性即得证

4. (1) (2) 由定义

(3) 由定义 $(\theta\otimes\eta)_{j_1\cdots j_{r+s}} = \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_r}}\right)\cdot\eta\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{r+s}}}\right)$

$= \theta_{j_1\cdots j_r}\cdot\eta_{j_{r+1}\cdots j_{r+s}}$

5. 设 $\tilde\theta_{ij} = \theta(e_i,\bar e_j)$ $\quad \tilde A = (\tilde\theta_{ij})$

则 由 $\bar\theta_{ij} = \theta(\bar e_i,\bar e_j)$，$= \sum_{l=1}^{n} c_{il}e_l$ 知

$\bar A = C\tilde A$

而 $\tilde\theta_{ij} = \theta(e_i,\bar e_j) = \sum_{l=1}^{n} c_{jl}e_l \Rightarrow \tilde A = AC^T$

$\Rightarrow \bar A = CAC^T$

6. "⇒" 取 $X_i = \frac{\partial}{\partial x^{j_i}}$ $\quad 1\le i\le s$ (对逆变同理，取 $X_i = dx^{j_i}$ $1\le i\le s$ 即可)

则 $\theta_{j_{\pi(1)}\cdots j_{\pi(s)}} = \theta(X_{\pi(1)}\cdots X_{\pi(s)}) = \theta(X_1\cdots X_s) = \theta_{j_1\cdots j_s}$

"⇐" 由于 $X_i\in T_p(M)$，则 $X_i = \sum_{i_l=1}^{n} C_{i_l}\frac{\partial}{\partial x^{i_l}}$ $\quad 1\le i\le s$.

$$\cancel{\Rightarrow \theta(X_{\pi(1)}\cdots X_{\pi(s)}) = \sum_{i_{\pi(1)}=1}^{n}\cdots\sum_{i_{\pi(s)}=1}^{n} C_{i_{\pi(1)}}\cdots C_{i_{\pi(s)}}\frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(1)}}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(s)}}} = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum}$$

$$\Rightarrow \theta(X_{\pi(1)}\cdots X_{\pi(s)}) = \sum_{i_{\pi(1)}=1}^{n}\cdots\sum_{i_{\pi(s)}=1}^{n} C_{i_{\pi(1)}}\cdots C_{i_{\pi(s)}}\,\theta_{i_{\pi(1)}i_{\pi(2)}\cdots i_{\pi(s)}}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_s=1}^{n} C_{i_1}\cdots C_{i_s}\,\theta_{i_1\cdots i_s} = \theta(X_1,\cdots X_s)$$

13. (1) 显然、直接验证即可

(2) $F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) = \sum_{j_k=1}^{n}\left(\frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_k}}\right)_p \frac{\partial}{\partial y^{j_k}}$ $\quad 1\le k\le s$

$$\Rightarrow F_p^*\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right) = \sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_s=1}^{n}\left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}\right)_p \theta\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y^{j_s}}\right)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_s=1}^{n}\left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}\right)_p \theta_{j_1\cdots j_s}$$

(3) ① 线性映射?

$$F_*(\lambda\theta_1+\mu\theta_2)(w_1,\cdots,w_r) = (\lambda\theta_1+\mu\theta_2)(F_p^*w_1,\cdots F_p^*w_r)$$

$$= \lambda\theta_1(F_p^*w_1,\cdots,F_p^*w_r)+\mu\theta_2(F_p^*w_1,\cdots,F_p^*w_r)$$

$$= \lambda F_*(\theta_1)(w_1\cdots w_r)+\mu F_*(\theta_2)(w_1\cdots w_r)$$

② $F_{*p}(\theta_1\otimes\theta_2)(w_1,\cdots,w_{r+s}) = (\theta_1\otimes\theta_2)(F_p^*w_1,\cdots,F_p^*w_{r+s})$

$$= \theta_1(F_p^*w_1,\cdots,w_r)\cdot\theta_2(F_p^*w_{r+1},\cdots,F_p^*w_{r+s})$$

$$= F_{*p}\theta_1(w_1,\cdots,w_r)\cdot F_{*p}\theta_2(w_{r+1},\cdots,w_{r+s}) = F_{*p}\theta_1\otimes F_{*p}\theta_2(w_1,\cdots$$

$$\cancel{③\ F_*\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p\frac{\partial}{\partial y^j}}$$ ~~(映射的微分的性质)~~

~~同定理4证明，亦有~~

$$\cancel{F_*\theta = \sum_{i_1\cdots i_s=1}^{m}\left(\sum_{j_1\cdots j_s=1}^{n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_s}}{\partial y^{j_s}}\theta_{j_1\cdots j_s}\right)}$$

③ $F_* \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p \frac{\partial}{\partial y^j}$ (映射微分的性质)

$$F_*\theta = \sum_{j_1\cdots j_s=1}^{n} \sum_{i_1\cdots i_s=1}^{m} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots\cdots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}} \theta^{i_1\cdots i_s} \frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{j_s}}$$

$$\Rightarrow \eta^{j_1\cdots j_s} = F_*\theta(dy^{j_1},\cdots,dy^{j_s}) = \sum_{i_1\cdots i_s=1}^{m} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots\cdots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}} \theta^{i_1\cdots i_s}$$

(4)(5) 可以讨论定理4的问题（结论均是类似的）

但不能讨论定理5（由习题课讲义：F_{*p} 不把逆变向量场映为逆变向量场）

14. (1) $\varphi^*: U^* \to \varphi^*(U^*)$ 显然是连续的

且显然是双射. 进一步 φ^* 是开映射，进而是同胚.

又 $\bigcup U^* = \bigcup \pi_1^{-1}(U) = \pi_1^{-1}(M) = T^{r,s}(M)$

相容性：设 $(U_\alpha^*, \varphi_\alpha^*), (U_\beta^*, \varphi_\beta^*) \in \{(U^*, \varphi^*)\}$, $U_\alpha^* \cap U_\beta^* \neq \phi$

则 $\varphi_\alpha^* \circ \varphi_\beta^{*-1}(\varphi_\beta(p), \pi_2(\theta_p)) = (\varphi_\alpha(p), \pi_2(\theta_p))$

但 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 是 C^∞ 的，恒等映射也是 C^∞ 的

从而 $\varphi_\alpha^* \circ \varphi_\beta^{*-1} \in C^\infty$. 进而 $\{(U^*, \varphi^*)\}$ 确定了 $T^{r,s}(M)$ 上的一个 C^∞ 微分构造 D^*

(2) M 的局部坐标 $\{x^i, \varphi\}$，$T^{r,s}(M)$ 的局部坐标 $\{y^j, \psi\}$

θ 是 M 上的 C^∞ (r,s) 型张量场 $\Leftrightarrow$ $\theta = \sum_{\substack{i_1\cdots i_r=1 \\ j_1\cdots j_s=1}}^{n} \theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes\cdots\otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$

且 $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 是 $\{x^i\}$ 的 C^∞ 函数

进而 $\psi\circ\theta\circ\varphi^{-1}$ 是 C^∞ 的，即 $\theta: M\to T^{r,s}(M)$ 的 C^∞ 映射

~~(3) 在 $r=0$ 的条件下才能推广~~

~~(因为 F^* 不把向量场映为(逆变)向量场)~~

(3) 不能. 当 $s=0$ 或 $s\neq 0, r=0$ 时 F 是 C^∞ 微分同胚时才能推广.

$s=0$ 时，是 §4.2 习题 10 (3) 的直接推广.

$s\neq 0$ 时，我们仅证 $s=1$, $r=0$ 的情形. (其余情形容易推广)

此时，$F^*: T^*(M_2)\to T^*(M_1)$

由流形基的性质，可取坐标邻域 $\{\{x^i\},\varphi\}$, $\{\{y^j\},\psi\}$

而 $\forall\ Y\in T^*(M_2)$, $Y=\sum \alpha^j dy^j$ $\{\{u^*,\varphi\}\}$

$$\Rightarrow F^*Y=(\alpha^1\cdots\alpha^n)\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^m\end{pmatrix}$$

$$\text{则 } (\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha^1\cdots\alpha^n)\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}$$

是 $\{y^j\}$ 的 C^∞ 函数 $\Leftrightarrow$ F 是 C^∞ 微分同胚.

当 $r\neq 0$, $s\neq 0$ 时，由于 $F_*: T(M_1)\to T(M_2)$ $F^*: T^*(M_2)\to T^*(M_1)$

不能统一成同一个张量空间.

扫描全能王 创建

4. $(U,\varphi) \xrightarrow{F} (V,\psi)$ $\{x^i\} \to \{y^i\}$ (F同胚，基映为基)

$(U',\varphi') \xrightarrow{F} (V',\psi')$ $\{x'^i\} \to \{y'^i\}$

若(M,D_1)可定向

则 $$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(y'^1,\cdots,y'^n)} = \frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)} \cdot \frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(x'^1,\cdots,x'^n)} \cdot \frac{\partial(x'^1,\cdots,x'^n)}{\partial(y'^1,\cdots,y'^n)} > 0. \quad (*)$$

对于不定向类似

5. 利用(*)即得

7. 由连续，可找邻域覆盖 $[0,1]$ 且为有限覆盖，结合(*)

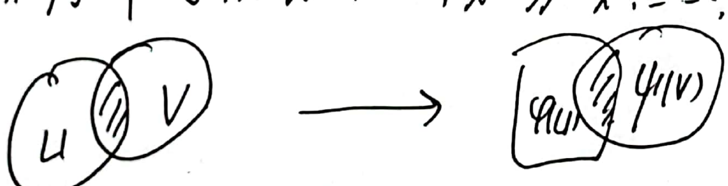
~~8. 由例5知 $\forall i$. $F_i(x^1,\cdots,x^n)=C_i$ $1\le i\le n-k$ 可定向~~

~~即 $\forall (U,\varphi)$, $\{x^i\}$, (V,ψ), $\{y^i\}$~~

~~而M是 $F_i(x^1,\cdots,x^n)=C_i$ 的交. 可视为子流形~~

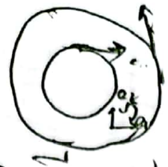
8. 由 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x^n} \end{pmatrix} = n-k$

在局部上可视 $x^{k+1},\cdots,x^n$ 为 $x^1,\cdots,x^k$ 的 C^∞ 函数 $\to$ in $\mathbb{R}^k$.



结合(*)即得证.

2. (1)

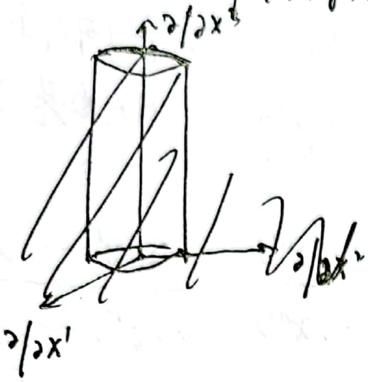


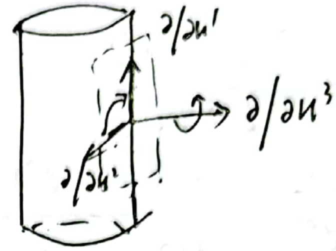
$(-1)^2[\vec{e_1}] = [\vec{e_1}]$

(2) 图6]已经标明

$(-1)^3[\overrightarrow{e_1,e_2,e_3}] = -[\overrightarrow{e_1,e_2}]$

(3) $\partial M = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1\}$





$(-1)^3[\overrightarrow{e_1,e_2,e_3}] = -[\overrightarrow{e_1,e_3}]$

(4) $\partial M = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ z=0$ 或 $z=1\}$

与(3)类似，注意底面的定向即可

(5) $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(0)$，可视为 $\mathbb{R}^{n-1}$ (?)

3. 在 $x^2+y^2=1$ 附近不可定向.

5. 按定理展开即可

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega=\int_M\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

6. $$d\left(v\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial u}{\partial x^j}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n\right)$$

$$=v\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial {x^j}^2}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial v}{\partial x^j}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=(v\Delta u+\nabla v\cdot\nabla u)\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

7. 即证若 $u\in C^\infty$, $\Delta u=0$, $u|_{\partial M}=0$, 则 $u|_M=0$

$$\cancel{\varphi(r):=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\,dS(y)=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\,dS(z)}$$

由在6中取 $v=u$, 有 $\int_M\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x^j}\right)^2dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\int_{\partial M}u\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial u}{\partial x^j}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n$

$\underline{u|_{\partial M}=0}$ 0 $\Rightarrow$ $\nabla u=0$ on M

故 u 在 M 上取常值由连续性知 $u\equiv 0$

$$\sum_j d\begin{vmatrix} u & v\\ \frac{\partial u}{\partial x^j} & \frac{\partial v}{\partial x^j}\end{vmatrix}(-1)^{j-1}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_j\left(\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial v}{\partial x^j}+u\frac{\partial^2 v}{\partial {x^j}^2}-\frac{\partial v}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^j}-v\frac{\partial^2 u}{\partial {x^j}^2}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\begin{vmatrix} u & v\\ \nabla^2 u & \nabla^2 v\end{vmatrix}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

9. $\int_{S^n} \omega = \int_{B^n} d\omega \overset{d\omega=0}{=\!=} 0$

$\to$ n维单位球

10. $\int_{\partial M} \omega = (\int_{C^1} - \int_{C^2}) \omega$

$$\begin{aligned} &\int_{\partial M} \omega = \left(\int_{C^1} - \int_{C^2}\right)\omega \\ &\quad \| \\ &\int_M d\omega \overset{d\omega=0}{=\!=} 0 \end{aligned} \Rightarrow \int_{C^1}\omega = \int_{C^2}\omega$$

11. "$\Rightarrow$" 由 Stokes

"$\Leftarrow$" 由 σ-紧可用开集覆盖，每个开集上可定义出满足 Stokes 条件的 M, ∂M. 由 Stokes 定理知 $d\omega=0$ on M. 由此得出结论.

流形概念总结

- (M, D) 称为 C^r 流形若：

① (M, τ) 是 T_2 拓扑空间

② $D = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid U_\alpha \subset M$ 开集，$\varphi_\alpha: U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ ($\mathbb{R}^n$ 中开集) 是同胚$\}$

满足条件：

(i) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ (ii) 若 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in D$，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$，则 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^r$ (相容性)

(iii) 若 $U \subset M$ 开集，$\varphi: U \to \varphi(U)$ 同胚，且 (U, φ) 与 D 中所有元素相容，则必有 $(U, \varphi) \in D$ (最大性)

注：流形的基

- ~~设 M，N 为~~ (M_1, D_1)，(M_2, D_2) 分别为 m 维和 n 维 C^r 流形

映射 $F: M_1 \to M_2$ 称为是 C^k 的 $(k \leq r)$ 若：

$\forall p_0 \in M_1$ 和 $F(p_0) = q_0$ 的任意局部坐标系 $(V_\beta, \psi_\beta) \in D_2$，有 p_0 的适当局部坐标系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in D_1$，s.t. $F(U_\alpha) \subset V_\beta$

且 $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \psi_\beta(V_\beta)$ 是 C^k 的

注：$V = \mathbb{R}^1$ 时，称 F 为 C^k 函数

- C^k 映射 $F: M_1 \to M_2$ 的秩是指 (在 p 点) (局部)

$(\mathrm{rank} F)_p = \mathrm{rank} D(\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}$

C^k 浸入、嵌入、微分同胚

$F: M_1 \to M_2$ C^k 映射 M_1, M_2 分别为 m 维、n 维微分流形

(1) 若 $\forall p \in M_1$, $(\mathrm{rank} F)_p = m \ (m \le n)$, 则称 F 为 C^k 浸入

(2) 若 F 为 C^k 浸入, 且 $F: M_1 \to F(M_1) \subset M_2$ 同胚, 则 F 为 C^k 嵌入

(3) 若 F 为 C^k 浸入, 且 $F: M_1 \to M_2$ 同胚, 则 F 为 C^k 微分同胚

切向量/切空间

先介绍域上代数的概念 (下设 F 为域)

称 A 为 F 上的代数若:

① A 是环

② $\exists$ 映射 $\alpha: F \to A$, s.t. $\alpha(F)$ (也记为 $\mathrm{Im}\,\alpha$) $\subseteq Z(A)$

这里 $Z(A) = \{a \in A \mid ar = ra, \forall r \in A\}$ 为 A 的中心

注: 定义数乘 $ka \ (k \in F, a \in A) \triangleq \alpha(k) \cdot a$ → A 中乘法

则显然 A 是 F-线性空间.

芽: 设 (M, D) 是 n 维 C^∞ 流形

$F_p = \{(f, G_f) \mid p \in G_f \subset M, G_f$ 是 M 开集, $f: G_f \to \mathbb{R}$ 是 C^∞ 的$\}$

定义 F_p 中等价关系 ~: 称 $(f_1, G_{f_1}) \sim (f_2, G_{f_2})$ ~~若~~:

若 $\exists\ p \in G \subset G_{f_1} \cap G_{f_2}$, s.t. $f_1|_G \equiv f_2|_G$

等价类 $\{f\} = \{(f_1, G_{f_1}) \mid (f_1, G_{f_1}) \sim (f, G_f)\}$ 称为 f 在 p 点的芽

记 $F_p/\sim$ 为 p 点芽的全体. 可验证 $F_p/\sim$ 为 $\mathbb{R}$-代数

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

· (逆变)切向量 $X_p: F_p/\sim \to \mathbb{R}^1$ $\{f\} \to X_p\{f\}$

满足: (1) $X_p(\{f\}+\{g\}) = X_p(\{f\}) + X_p(\{g\})$

(2) $X_p(c\{f\}) = c X_p(\{f\})$

(3) $X_p(\{f\}\cdot\{g\}) = \{g\}_p \cdot X_p\{f\} + \{f\}_p X_p\{g\} = g(p)\cdot X_p\{f\} + f(p) X_p\{f\}$

· 切空间 $T_p(M) = \{X_p \mid X_p$ 为 p 点的切向量$\}$

容易验证 $T_p(M)$ 是 n 维线性空间.

若设局部坐标系为 (U,φ), $\{x^i \mid i=1,2,\cdots,n\}$

定义坐标向量 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_p(M)$, 这里 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : F_p/\sim \to \mathbb{R}^1$ $f \mapsto \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}$

check1: $\frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial}{\partial x^i} f'$ 若 $(f, G_f) \sim (f', G_{f'})$

check2: $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right| i=1,2,\cdots,n\right\}$ 是 $T_p(M)$ 的一组基.

注: ① $T_p(M)$ 不是 $F_p/\sim$ 的对偶空间. 事实上, $T_p(M) \subsetneq (F_p/\sim)^*$
因为 $T_p(M)$ 中的元素总是 $F_p/\sim$ 上的线性泛函. 但这些元素多满足 (3) (导性)条件.

② $\dim T_p(M)=n$, 但 $\dim(F_p/\sim) = +\infty$.

这是因为 $\{1, \cancel{x^1, x^2, \cdots}, (x^1)^{i_1}(x^2)^{i_2}\cdots(x^n)^{i_n} \mid i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbb{N}\}$ 线性无关

这里 x^i 是指 $x^i: M\to\mathbb{R}^1$, $x\mapsto \varphi(x)_i$

进一步, 若 M 是 C^ω 的(实解析), 则 N 即为 $F_p/\sim$ 的基.

特别地，当线性空间 X 满足 $\dim X = \infty$ 时，X 与 X^* 不同构.

（泛函分析：$X \simeq X^* \Leftrightarrow \dim X < +\infty$）

Fact: $X \subset X^{**} (\triangleq (X^*)^*)$ $\forall x \in X$，定义 $x^{**}: X^* \to \mathbb{R}$ $f \mapsto f(x)$

则 x^{**} 是 X^* 上的泛函，进而 $x^{**} \in X^{**}$

即有嵌入 $X \subset X^{**}$. $X = X^{**}$ 时，称 X 自反空间.

- 坐标基的变换

有两个局部坐标系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. $\{x^i\}$ (U_β, φ_β) $\{y^i\}$

则有基变换公式（$T_p(M)$ 上）

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

坐标变换公式 $X_p = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$(\beta_1 \cdots \beta_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n} \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\beta_1 \cdots \beta_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

其中 $\{\alpha^i\}$，$\{\beta^i\}$ 分别称为切向量 X_p 关于局部坐标系的分量.

- C^∞ 映射~~微分~~的微分 F_*

设 (M_1, D_1) 和 (M_2, D_2) 分别是 m 维和 n 维 C^∞ 流形 $F: M_1 \to M_2$ 是 C^∞ 映射. 则 F 在 p 点的微分是映射:

$F_*: T_p(M_1) \to T_p(M_2)$ $\quad F_*(X_p)f = X_p(f\circ F)$ $\quad f$ 为 $F(p)$ 附近 C^∞ 函数, $X_p \in T_p(M_1)$

check: $F_*(X_p) \in T_p(M_2)$ 且 F_* 是线性映射.

~~且~~ 在 (U,φ), $\{x^i\}$ 和 (V,ψ), $\{y^i\}$ 是 p 和 $F(p)$ 的局部坐标系

$T_p(M_1)$ 有基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} \,\middle|\, 1\le i\le m\right\}$、$T_p(M_2)$ 有基 $\left\{\frac{\partial}{\partial y^j} \,\middle|\, 1\le j\le n\right\}$

则 F_* 在基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} \,\middle|\, 1\le i\le m\right\}$ 与基 $\left\{\frac{\partial}{\partial y^j} \,\middle|\, 1\le j\le n\right\}$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^m} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \quad \text{即 } F_* \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^m} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

$$X_p = \sum_{i=1}^m \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad F_{*p}(X_p) = \sum_{j=1}^n \beta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{pmatrix}$$

· 例（积流形的切向量空间）

(M_1, D_1) 和 (M_2, D_2) 分别是 m 维和 n 维 C^∞ 流形

$D' \; \cancel{D_1 \times D_2} \triangleq \{ (U_\alpha \times V_\beta, h_{\alpha\beta}) \mid \cancel{U_\alpha} (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in D_1, (V_\beta, \psi_\beta) \in D_2 \}$

这里 $h_{\alpha\beta}: U_\alpha \times V_\beta \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$

$$h_{\alpha\beta}(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q))$$

则 D' 是基，可确定 $M_1 \times M_2$ 上的 C^∞ 微分构造 $D \triangleq D_1 \times D_2$

$(M_1 \times M_2, D_1 \times D_2)$ 为积流形.

投影映射 $\begin{cases} \pi_1: M_1 \times M_2 \to M_1, \; \pi(q_1, q_2) = q_1 \\ \pi_2: M_1 \times M_2 \to M_2, \; \pi(q_1, q_2) = q_2 \end{cases}$ 都是 C^∞ 映射

从而诱导出 C^∞ 映射微分

$$(\pi_1)_*: T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \longrightarrow T_{p_1}(M_1)$$

$$(\pi_2)_*: T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \longrightarrow T_{p_2}(M_2)$$

这里 $\{x^1, \cdots, x^m\}$；$\{y^1, \cdots, y^n\}$ 分别为 $p_1 \in M_1$ 和 $p_2 \in M_2$ 的局部坐标系

从而 $\{x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n\}$ 为 $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ 的局部坐标系.

可以定义 $((\pi_1)_*, (\pi_2)_*): T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \to T_{p_1}(M_1) \times T_{p_2}(M_2)$

$((\pi_1)_*, (\pi_2)_*) X = ((\pi_1)_* X, (\pi_2)_* X)$ 显然是线性的.

下证 $((\pi_1)_*, (\pi_2)_*)$ 是同构. 设 $X_1 \in T_{p_1}M_1$, $X_2 \in T_{p_2}M_2$

$X \in T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2)$ 关于局部坐标系分量为 $(\alpha^1, \cdots, \alpha^m)$,

$(\beta^1, \cdots, \beta^n)$, $(\alpha^1, \cdots, \alpha^m, \beta^1, \cdots, \beta^n)$ 则 $(\pi_1)_* X = X_1$, $(\pi_2)_* X = X_2$

$\Rightarrow ((\pi_1)_* X, (\pi_2)_* X) = (X_1, X_2)$ 即 $((\pi_1)_*, (\pi_2)_*)$ 是双射

$\Rightarrow T_{p_1}(M_1) \times T_{p_2}(M_2) \cong T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2)$

· 向量场　(M,D) 是 n 维 C^∞ 流形，$A\subset M$．所谓在集合 A 上的一个（逆变）向量场 X 是映射，~~X: A→T~~ $\forall p\in A$，$\exists\, X_p\in T_p(M)$.

由于 $X=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}$　（(U,φ)，$\{x^i\}$ 是 p 的局部坐标系）

α^i 是 U 上 C^r 函数，则称 X 是 C^r 向量场

· C^r 曲线　(M,D) 是 n 维 C^∞ 流形，若 $W\subset \mathbb{R}^1$ 是开集，则称 C^r 映射（不是映射的象集）$\sigma: W\to M$ 为 M 中的一条 C^r 曲线

沿 σ 的切向量．$T_\sigma(t)=\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$　$(\sigma\in C^\infty)$

这里视 $T_\sigma(t)$ 为 $\mathbb{R}^1$ 中切向量 $\frac{d}{dt}$ 在 C^∞ 映射的微分的像．

· C^∞ 映射的微分的几何解释：$F: M_1\to M_2$

σ 是 M_1 上的 C^∞ 曲线，则 $F\circ\sigma$ 是 M_2 上的 C^∞ 曲线．

且　$T_{F\circ\sigma}(t)=F_*(T_\sigma(t))$

积分曲线　设 X 是 n 维 C^∞ 流形 (M,D) 的某个开集上的 C^∞ 向量场，若 C^∞ 曲线 σ 的像在 X 的定义域中，且 $T_\sigma(t)=X_{\sigma(t)}$．则称 σ 为 X 的积分曲线．

注：（积分曲线的局部存在性）设 X 是 n 维 C^∞ 流形 (M,D) 的某开集上的 C^∞ 向量场，p 是 X 定义域中任一点，$\forall b\in\mathbb{R}$，$\exists\, \varepsilon>0$ 和唯一

的 C^∞ 曲线 $\sigma:(b-r,b+r)\to M$, s.t. $\sigma(b)=p$ 和 σ 是 X 的积分曲线.

· 向量场的变换 设 (M_1,D_1) 和 (M_2,D_2) 分别是 m 维和 n 维 C^∞ 流形. $F:M_1\to M_2$ 是 C^∞ ~~向量场~~ 映射. X 和 Y 分别是 M_1, M_2 的 C^∞ 向量场.

若 $F_{*p}(X_p)=Y_{F(p)}$. 则称 X 和 Y F-相关的. 记成 $F_*(X)=Y$

注1: 设 X 是向量场, $F_*(X)$ 不一定仍是向量场.

如取 $M_1=\mathbb{R}^2$, $M_2=\mathbb{R}^1$, $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ $u=F(x,y)=x$. 向量 $X=y\frac{\partial}{\partial x}$

设 $p=(0,0)$, $q=(0,1)$. 则 $F(p)=F(q)=0$ 且

$F_*(X_q)=F_{*q}(\frac{\partial}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial u}\neq 0=F_*(X_p)$

但若 F 是微分同胚, 则 $F_*(X)$ 仍是向量场. 且若 F 是 C^r 的, 则 $F_*(X)$ 也是 C^r 的.

注2: 设 X 是协变向量 (即 $X_{F(p)}\in T^*_{F(p)}(M_2)$), 则 $F_p^*(X_{F(p)})\in T_p^*(M_1)$ 仍是协变向量

这里 $F_p^*(X_p)=X_p\circ F_{p*}\in T_p^*(M_1)$ (check!)

$\forall Y_1,Y_2\in T_p(M_1)$, 有 $F_p^*(X_p)(Y_1+Y_2)=X_p\circ F_{p*}(Y_1+Y_2)=X_p\circ F_{p*}(Y_1)+X_p\circ F_{p*}(Y_2)=F_p^*(X_p)(Y_1)+F_p^*(X_p)(Y_2)$

$\forall Y\in T_p(M_1)$, $c\in\mathbb{R}$, $F_p^*(X_p)(cY)=X_p\circ F_{p*}(cY)=cX_p\circ F_p(Y)=cF_p^*(X_p)(Y)$

$\Rightarrow F_p^*(X_p)\in T_p^*(M_1)$ 协变向量场.

证明: $F:M_1\to M_2$ X 是 M_1 上 C^r 向量场. $X=\sum\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 则 $\alpha^i\in C^r$ (关于 $\{x^i\}$)

$\Rightarrow F_*(X)=\sum\beta^j\frac{\partial}{\partial y^j}$ $\{\beta^j\}$ 由前面 F_* 结论给出, 由 F 同胚

故 $\beta^j\in C^r$ (关于 $\{y^j\}$), 从而 $F_*(X)$ 是 C^r 的.

注2: 设 X 是 M_2 上的协变向量场 (C^r 的), $F: M_1\to M_2$ C^r 映射

则 $F^*(X)$ 也是 ~~协变~~ M_1 上 C^r 协变向量场.

这里 $F^*(X)\triangleq X\circ F$ (check: $F^*(X_{F(p)})\in(T_p(M_1))^*$)

证明：~~设~~定义 $dx^i \in T_p^*(M_1)$，$dx^i: T_p(M_1) \to \mathbb{R}$ $\quad dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_{ij}$.

则易知 $\{dx^i \mid 1\le i\le n\}$ 是 $T_p^*(M_1)$ 的一组基.

故可设 $X=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i dy^i$，对于 dy^i 同样有：

$$\begin{pmatrix} F_p^* dy^1 \\ \vdots \\ F_p^* dy^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F^*(X)=\sum_{j=1}^{m}\beta^j dx^j$ 　这里 β^j 为 $\{x^j\}$ 的函数，且是 C^r 的.

从而 $F^*(X)$ 是 M_1 上的 C^r 协变向量场.

补充（张量的代数定义）. 设 K 域. U, V 都是 K-线性空间.

U 与 V 的张量 $U\otimes V$ 是指这样的线性空间：

① 有双线性映射 $\varphi: U\times V \to U\otimes V \quad (u,v)\mapsto u\otimes v$

② （泛性质）若对于任意 K-线性空间 L，及任意双线性映射 $\psi: U\times V\to L$ 均存在唯一线性映射 $\bar\psi: U\otimes V\to L$

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & U\otimes V \arrow[dl, "\bar\psi"] \\ L \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \end{tikzcd}$$

使左图交换 i.e. $\bar\psi\circ\varphi=\psi$

称 $(U\otimes V, \varphi)$ 为 U, V 的张量积 (tensor product)

张量的简单性质

① 若 U 有基 $\{u_i \mid i\in I\}$，V 有基 $\{v_j \mid j\in J\}$

则 $\{u_i\otimes v_j \mid i\in I, j\in J\}$ 是 $U\otimes V$ 的基.

② 若 U, V 均是有限维的，则 $U^*\otimes V \simeq \mathrm{Hom}_k(U,V)$

③ 可诱导映射的张量积

设 $f: U_1 \to V_1 \quad g: U_2\to V_2$ 线性映射

由张量积泛性质，$\exists!\ f\otimes g: U_1\otimes U_2 \to V_1\otimes V_2$

s.t. $f\otimes g\,(u\otimes v) = f(u)\otimes g(v) \quad \forall u\in U_1,\ v\in U_2$.

由泛性质知 $f\otimes g$ 也是线性映射.

④ $(U\otimes V)\otimes W \simeq U\otimes(V\otimes W)$

⑤ $U\otimes k \simeq U \simeq k\otimes U$

⑥ $U\otimes V \simeq V\otimes U \quad (u\otimes v \mapsto v\otimes u)$

SARD'S THEOREM

ALEX WRIGHT

Abstract. A proof of Sard's Theorem is presented, and applications to the Whitney Embedding and Immersion Theorems, the existence of Morse functions, and the General Position Lemma are given.

Suppose $f : M^m \to N^n$ is a map from a m-dimensional manifold M to an n-dimensional manifold N. (All manifolds and maps are assumed to be smooth.) A *critical point* pf f is an $x \in M$ such that $(df_x)(T_xM) \neq T_{f(x)}N$. A *critical value* is the image of a critical point.

Theorem (Sard's Theorem)**.** *The set of critical values of f is null.*

We say that a set $S \subset N$ is null if its image in $\mathbb{R}^n$ under every chart is null. If $m < n$ there is a simple proof of Sard's Theorem, and if $n = m$ a relatively short proof can be found in M. Spivak's *Calculus on Manifolds* ([5], p.72). Here we make no assumption on m and n, and we benefit from this extra power in two of the three applications bellow. The following proof is from V. Guillemin and A. Pollack's *Differential Topology* ([1], p.205-207), which in turn cites [3] as its source.

Proof of Sard's Theorem. By passing to charts, and using the fact that there is a countable sub-collection of charts that cover M, we can assume $M = U \subset \mathbb{R}^m$, U open, and $N = \mathbb{R}^n$ (so $f : U \to \mathbb{R}^n$).

To begin, we break up C, the set of critical points of f, into a sequence of nested subsets $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$, where C_1 is the set of all $x \in U$ such that $df_x = 0$, and C_i $(i \geq 1)$ is the set of all x such that all partial derivatives of order at most i vanish at x. We then proceed by induction on m and prove three lemmas. Lemmas 1 and 2 give that $f(C - C_1)$ and $f(C_i - C_{i+1})$ are null. These two lemmas use the inductive hypothesis and the fact that $\mathbb{R}^m$ is second countable (that is to say: if $\{U_\alpha\}$ is set of open sets in $\mathbb{R}^m$, there there is a countable sub-collection $\{U_{\alpha_k}\}$ so that $\cup_\alpha U_\alpha = \cup_k U_{\alpha_k}$). Lemma 1 makes use of Tonelli's Theorem, a variant of Fubini's Theorem. Lemma 3 uses Taylor's Theorem to show that if i is sufficiently big, then $f(C_i)$ is null. These lemmas clearly combine to give Sard's Theorem.

Date: February 2008.

We assume Sard's Theorem is true for $m-1$, and prove the three lemmas. The base case of $m=0$ is trivial, since $\mathbb{R}^0$ is a point.

Lemma (1). *$f(C-C_1)$ is null.*

Proof. Around each $x \in C - C_1$ we will find an open set V_x such that $f(V_x \cap C)$ is null. Since $\mathbb{R}^m$ is second countable, we will then be able to find a countable sub-collection $V_{x_1}, V_{x_2}, \cdots$, that covers $C - C_1$, and we will conclude

$$m(f(C-C_1)) \leq \sum_i m(f(V_{x_i} \cap (C - C_1))) \leq \sum_i m(f(V_{x_i} \cap C)) = 0,$$

where m is Lebesgue measure. So if we fix $x \in U$ it suffices to prove that we can find an open set V containing x with $f(V \cap C)$ null.

Since $x \notin C_1$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$ has some partial, say $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, which does not vanish at x. Define $h : U \to \mathbb{R}^m$ (recall $U \subset \mathbb{R}^m$) by

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \cdots, x_m).$$

Now dh_x is non singular, so by the Inverse Function Theorem, h maps some neighbourhood V of x diffeomorphically onto an open set $V' \subset \mathbb{R}^m$. The composition $g = f \circ h^{-1`} : V' \to \mathbb{R}^n$ will then have the same critical values as $f|_V$ (f restricted to V). So we want to show that the set of critical values of g restricted to V' is null. Note that the first coordinates of h and f are the same, so $g = f \circ h^{-1}$ leaves the first coordinate unchanged. Therefore, for each t, g induces a map $g_t : (t \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^n$. Since dg has the form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & (\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}) \end{pmatrix}$$

a point $(t, z) \in (t \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V'$ is a critical point of g if and only if z is a critical point for g^t. By induction, the set V^t of critical values of g^t is null for each t. The set of critical points of g is closed, so its image under g, the set V of critical values of g, is Borel. Thus χ_V (the indicator function of V), is measurable, and Tonelli's Theorem gives

$$m(V) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_V = \int_t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{V^t} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0 = 0.$$

Thus V is null and the proof of Lemma 1 is complete. $\square$

Lemma (2). *$f(C_k - C_{k+1})$ is null if $k \geq 1$.*

Proof. This is a similar argument, but easier. For each $x \in C_k - C_{k+1}$, there is some $(k+t)$st partial of f that is not zero at x. Thus we can find a kth partial of f, say ρ, that has a first partial, say $\frac{\partial \rho}{\partial x_1}$, that is non-zero at x. Then the map $h : U \to \mathbb{R}^m$ defined by

$$h(x) = (\rho(x), x_2, \cdots, x_m)$$

maps a neighbourhood V of x diffeomorphically onto an open set $V' \subset \mathbb{R}^m$. Since all kth partials vanish on C_k, and ρ is a kth partial, h carries $C_k \cap V$ into the hyperplane $0 \times \mathbb{R}^{m-1}$.

Define $g = f \circ h^{-1`} : V' \to \mathbb{R}^n$. Of course $f|_V$ and $g|_{V'}$ have the same critical values. As in Lemma 1, it suffices to show that the set of critical values of $g|_{V'}$ is null. But these values all come from points in $0 \times \mathbb{R}^{m-1}$. Let $\tilde{g} : (0 \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^n$ be the restriction of g. If x is a critical point of g, then $(d\tilde{g})_x(T_x\mathbb{R}^{m-1}) \subset (dg)_x(T_x\mathbb{R}^m) \neq T_{g(x)}\mathbb{R}^n$, so x is also a critical value for $\tilde{g}$. By induction, the set of critical values of $\tilde{g}$ is null, so Lemma 2 is proved. □

Lemma (3)**.** *For $k > m/n - 1$, $f(C_k)$ is null.*

Proof. Fix such a k. Let $S \subset U$ be a cube with sides of length δ. We will show that $f(C_k \cap S)$ is null. Since U is covered by a countable number of such cubes, this will prove that $f(C_k)$ is null. From Taylor's Theorem, the compactness of S, and the definition of C_k, we see that

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h)$$

where $|R(x,h)| < a|h|^{k+1}$ for $x \in C_k \cap S$. Here a is a constant that depends only on f and S. Now subdivide S into r^m cubes whose sides are of length δ/m. Let S_1 be a cube of the subdivision that contains a point x of C_k. Then any point of S_1 can be written as $x+h$ with $|h| < \sqrt{m}(\frac{\delta}{m})$.. Now if $x + h \in S_1$, then

$$|f(x+h) - f(x)| = |R(x+h)| < a(\sqrt{m}\frac{\delta}{m})^{k+1} = b/r^{k+1}$$

where b is a constant. So $f(S_1)$ lies in a cube of side length at most b'/r^{k+1} centered at $f(x)$ (b' a new constant). Hence $f(C_k \cap S)$ is contained in the union of at most r^m cubes having total volume at most

$$r^m(b')^m r^{m-(k+1)n}.$$

If $m - (k+1)n < 0$, (that is $k > m/n - 1$) then letting $r \to 0$ gives that $f(C_k \cap S)$ is null. □

This completes the proof of Sard's Theorem. □

We proceed to our first application.

Theorem. *Every manifold M^m admits an injective immersion into $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Note that if M is compact, then an injective immersion is an embedding, so this theorem comes very close to the Whitney Embedding Theorem, which says: Every manifold M^m can be embedded into R^{2m}. An injective immersion can be turned into an embedding with extra work (see [1], p.53), but the reduction from $2m+1$ to $2m$ is very difficult, and the author knows of no friendly exposition of this $2m$ Whitney Embedding Theorem.

Proof. We assume M can be embedded into some $\mathbb{R}^n$. For compact manifolds, this can be proved using partitions of unity ([2], p.23). If $n = 2m+1$, we're done, so we assume $n > 2m+1$. For $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, let π_a be the projection of $\mathbb{R}^n$ onto the perp space of a. By iteration, it suffices to show that $\pi_a : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ is an injective immersion for at least one a. We will in fact use Sard's Theorem to show that it is true for a.e. a! Define

$$\begin{aligned}
&g : M \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\
&g(x, y, t) = t(x - y) \\
&h : TM \to \mathbb{R}^n \\
&h((p, v)) = v
\end{aligned}$$

where $(p, v) \in TM$ represents the tangent vector $v \in \mathbb{R}^n$ at the point $p \in M$. (Note immediately that the domain of g has dimension $2m+1$.) Now, if $\pi_a : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ is not injective, then we have some $x, y \in M, t \in \mathbb{R}$ so that $x \neq y$ and $x - y = ta$. That is to say, $g(x, y, 1/t) = a$. Furthermore, if π_a is not an immersion, then there is some $(p, v) \in TM$ such that $v = sa$ for some a. Since M is immersed into $\mathbb{R}^n$, we must have $s \neq 0$, so $h(v/s) = a$.

Now it is clear that if a is in neither the range of g or the range of h, then π_a is the desired injective immersion. Since the dimensions of the domains of g and h are $2m+1$ and $2m$ respectively, and $n > 2m+1$, every point in the range of these functions is a critical value! Thus we can pick almost any $a \in \mathbb{R}^n$ and get that $\pi_a : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ is an injective immersion. $\square$

We leave it as an exercise to the reader to modify this proof to get that every M^m can be immersed into $\mathbb{R}^{2m}$ (with the same starting assumption that it can be immersed into some R^n). This essentially comes from the fact that we can drop g, and the domain of h has dimension $2m$ instead of $2m+1$.

Our next application of Sard's Theorem will be the existence of Morse functions. Given a function $f : M \to \mathbb{R}$, a critical point $x \in M$ is called *non-degenerate* if the Hessian of f at x, $\mathrm{Hess}(f)_x = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$

is non-singular in local coordinates. See [1] p.42 or compute using the chain rule to see that this does not depend on local coordinates. Such critical points turn out to be very important because f is locally quadratic at these points. (This is known as the Morse Lemma.) If all of f's critical points are non-degenerate, f is called a Morse function: such functions say a great deal about the topology of M. If $M \in \mathbb{R}^3$, and $f(x, y, z) = z$ is a Morse function, we think of filling up $\mathbb{R}^3$ with water up to the level z. The the topology of the part underwater, $f^{-1}((-\infty, z))$, changes only with the water covers a mountain top (of M), fills a valley (saddle point), or meets a bowl (local minimum).:These events correspond to the water level reaching a non-degenerate critical point, and this intuitive picture is used to think of all Morse functions.

Theorem. *There are lots of Morse functions: Given $M \subset \mathbb{R}^n$, and $f : M \to \mathbb{R}$, then $f_a = f + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ is a Morse function for almost every $a \in \mathbb{R}^n$.*

Proof. Define $g = df = (\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n})$ on M. Note that $df_a = g + a$, and $\mathrm{Hess}(f_a) = \mathrm{Hess}(f) = dg$. Pick any a so that $-a$ is a regular value for g. Then if x is a critical point of f_a, $g(x) = -a$ so $\mathrm{Hess}(f_a)_x = dg_x$ is non-singular. Thus f_a is a Morse function. □

The reader who wants to learn more about Morse theory is urged to consult J. Milnor's *Morse Theory* ([4]). Our final application is the General Position Lemma. Recall that manifolds $M, N \subset \mathbb{R}^n$ are said to be transverse (written $M \pitchfork N$) if $T_pM + T_pN = T_p\mathbb{R}^n$ for all $p \in M \cap N$. Tranverse manifolds are said to be in general position.

Theorem (General Position Lemma)**.** *For almost every $a \in \mathbb{R}^n$, $(M + a) \pitchfork N$.*

Note that if $\dim M + \dim N < n$, and $p \in M \cap N$, then $T_pM + T_pN \neq T_p\mathbb{R}^n$ (the dimension of the left hand side is too small). So in this case M and N are transverse if and only if they are disjoint, and the General Position Lemma has a marvelous consequence: We can budge M a bit so that it is disjoint from N.

Proof. Consider $g : M \times N \to \mathbb{R}^n$ defined by $g(x, y) = x - y$. Pick any $a \in \mathbb{R}^n$ that is a regular value of g. We claim $(M + a) \pitchfork N$. If not, then there would be an $x \in M, y \in N$ such that $y = x + a$ and $T_xM + T_yN \neq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ is the tangent space $T_y\mathbb{R}^n$). Then $g(x, y) = a$ and $dg_{(x,y)}(T_{(x,y)}M \times N) = T_xM + T_yN$, which since $T_xM + T_yN \neq \mathbb{R}^n$ contradicts the fact that a is a regular value. Thus, it must be that $(M + a) \pitchfork N$. □

References

[1] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*. Prentice Hall, 1974.
[2] M. Hirsch, *Differential Topology*. Springer, GTM No. 33, 1976.
[3] J. Milnor, *Topology from a Differential Viewpoint*. University of Virginia Press, 1965.
[4] J. Milnor, *Morse Theory*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, No. 51, 1963.
[5] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*. Addison-Wesley, 1965.

E-mail address: `alexonlinemail@gmail.com`