中国科学技术大学数学科学学院
2020～2021 学年第 2 学期考试试卷 A 卷

课程名称：线性代数 A1　　课程代码：MATH1004

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓名：＿＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿＿　专业：＿＿＿＿＿＿

题号	1~6	7	8	9	10	总分
得分						

说明：1．若某题有 a、b 两个版本，则选择其中 1 个版本，多做不得分．
　　　2．不得使用计算器等电子设备．

一、简答题．每小题 6 分，共 36 分．需简要说明理由或举出例子，结果需化简．

1．写出一个 2 阶实方阵A，满足$A^4-A^2+I=O$．

2．已知复方阵A的特征多项式为x^4+x^3+1．写出A^3的特征多项式．

3．已知复方阵A的 Jordan 标准形为$J_{2021}(0)$．写出A^{100}的 Jordan 标准形．

4．对于任意复方阵A，是否一定存在复方阵B，使得$B^2=A$?

5．若n阶复方阵A,B都可以相似成对角阵，则AB是否一定可以相似成对角阵？

6．若n阶复方阵A,B满足对于任意$x\in\mathbb{C}$和$k\in\mathbb{N}$都有$\operatorname{rank}(xI-A^k)=\operatorname{rank}(xI-B^k)$，则$A$与$B$是否一定相似？

（装订线内不要答题）

二、解答题．每小题 16 分，共 64 分．需给出详细解答和证明过程．

7．设复方阵A,B的特征多项式都等于其最小多项式，即$\varphi_A = d_A$，$\varphi_B = d_B$．证明：当且仅当φ_B整除φ_A时，存在列满秩矩阵P使得$AP = PB$．

8．设m,n是正整数，映射$f:\mathbb{C}^{m\times m}\to\mathbb{C}^{n\times n}$满足：对于任意$X,Y\in\mathbb{C}^{m\times m}$和$\lambda\in\mathbb{C}$，有$f(X+Y)=f(X)+f(Y)$，$f(\lambda X)=\lambda f(X)$，$f(XY)=f(X)f(Y)$，$f(I_m)=I_n$．证明：$f$是单射并且$m$整除$n$．

9a. (1) 把实方阵$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}$表示成$A=QR$的形式，其中$Q$是正交方阵，$R$是上三角方阵，$R$的对角元素都是正数. (2) 证明上述表示方式是唯一的.

9b. 设m,n是正整数，$f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-u_i)$和$g(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-v_j)$是给定的复系数多项式，$V$是次数$\leq m+n-1$的复系数多项式全体构成的复线性空间，$V$上的线性变换$\rho$：$x^i\mapsto x^i g(x)$，$x^{m+j}\mapsto x^j f(x)$，$\forall i=0,1,\cdots,m-1$，$j=0,1,\cdots,n-1$.
(1) 求ρ在V的基$x^{m+n-1},\cdots,x,1$下的矩阵A. (2) 证明：$\det(A)=\prod_{i,j}(u_i-v_j)$.

（装订线内不要答题）

10a．设实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+ax_2x_3$.
(1)求$a=0$时Q的相合标准形．(2)求所有实数a使得Q是正定的.

10b．设$\mathcal{A}$是线性空间V上的线性变换，U_1,U_2,U_3分别是$\alpha,\beta,\alpha+\beta\in V$生成的$\mathcal{A}$循环子空间．证明：若$\alpha,\beta$相对于$\mathcal{A}$的最小多项式$d_\alpha,d_\beta$互素，则$U_3=U_1\oplus U_2$.

参考答案与评分标准

1．$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$　　2．$x^4+(x+1)^3$　　3．$\mathrm{diag}\left(\underbrace{J_{21}(0),\cdots,J_{21}(0)}_{21\text{个}}\underbrace{J_{20}(0),\cdots,J_{20}(0)}_{79\text{个}}\right)$

4．不一定．例如：$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$不是任何矩阵的平方．

5．不一定．例如：$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$不可相似成对角．

6．不一定．例如：$A=\mathrm{diag}(J_3(1),1)$与$B=\mathrm{diag}\big(J_2(1),J_2(1)\big)$不相似．设$k\geq 1$．
A^k与A相似，B^k与B相似．当$x\neq 1$时，$\mathrm{rank}(xI-A^k)=\mathrm{rank}(xI-B^k)=4$．
当$x=1$时，$\mathrm{rank}(xI-A^k)=\mathrm{rank}(xI-B^k)=2$．

7．充分性：设α使得$d_{A,\alpha}=d_A=\varphi_A$，则$\beta=\frac{\varphi_A}{\varphi_B}(A)\alpha$满足$d_{A,\beta}=\varphi_B$．（4 分）
设$P_1=(\beta,A\beta,\cdots,A^{k-1}\beta)$，$k=\deg(\varphi_B)$，则$\mathrm{rank}(P_1)=k$，$AP_1=P_1C$，（4 分）
其中C是φ_B的友方阵．设$B=P_2CP_2^{-1}$，则$P=P_1P_2^{-1}$满足要求．（4 分）
必要性：设可逆方阵$Q=(P\ *)$．由$AQ=Q\begin{pmatrix} B & * \\ O & C \end{pmatrix}$，得$\varphi_B$整除$\varphi_A=\varphi_B\varphi_C$．（4 分）

8．设$A_{ij}=f\big(E_{ij}\big)$．由所有E_{ij}相抵，得所有A_{ij}相抵，记$r=\mathrm{rank}\big(A_{ij}\big)$．（4 分）
由所有E_{ii}相似、幂等、两两乘积可交换、$\sum A_{ii}=I_n$，得$n=\sum\mathrm{tr}(A_{ii})=mr$，（4 分）
并且存在可逆方阵P使$P^{-1}A_{ii}P=E_{ii}\otimes I_r$．（4 分）
当$i\neq j$时，由$A_{ij}=A_{ii}A_{ij}A_{jj}$，得$P^{-1}A_{ij}P=E_{ij}\otimes B_{ij}$，$B_{ij}$是$r$阶可逆方阵．故$f$是单射．（4 分）

9a．(1) 计算过程略．得$Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$，$R=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{3\sqrt{6}}{2} & \sqrt{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{14}}{2} & \frac{2\sqrt{14}}{7} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{21}}{7} \end{pmatrix}$．（12 分）
(2) 若$A=Q_1R_1=Q_2R_2$，则$Q_2^{-1}Q_1=R_2R_1^{-1}$是上三角的正交阵，进而是单位阵．（4 分）

9b．(1) 设$f(x)=\sum_{i=0}^m a_ix^i$，$g(x)=\sum_{j=0}^n b_jx^j$，则$A=\begin{pmatrix} a_m & & & b_n & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & a_m & \vdots & \ddots & b_n \\ a_0 & \ddots & \vdots & b_0 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_0 & & & b_0 \end{pmatrix}$．（6 分）
(2) $WA=\begin{pmatrix} O & U \\ V & O \end{pmatrix}$，其中$U=\begin{pmatrix} g(u_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(u_m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{m-1} & \cdots & u_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ u_m^{m-1} & \cdots & u_m & 1 \end{pmatrix}$，

$$V=\begin{pmatrix} f(v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(v_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{n-1} & \cdots & v_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ v_n^{n-1} & \cdots & v_n & 1 \end{pmatrix},\ W=\begin{pmatrix} u_1^{m+n-1} & \cdots & u_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ u_m^{m+n-1} & \cdots & u_m & 1 \\ v_1^{m+n-1} & \cdots & v_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ v_n^{m+n-1} & \cdots & v_n & 1 \end{pmatrix}.$$ (6 分)

$$\det(A)=\frac{(-1)^{mn}\det(U)\det(V)}{\det(W)}=\frac{\prod_i g(u_i)\prod_j f(v_j)\prod_{i<j}(u_j-u_i)\prod_{i<j}(v_j-v_i)}{\prod_{i<j}(u_j-u_i)\prod_{i,j}(v_j-u_i)\prod_{i<j}(v_j-v_i)}=\prod_{i,j}(u_i-v_j).$$ (4 分)

10a．(1) $Q=x_2^2+x_3^2+x_1(x_2+x_3)=(\frac{1}{2}x_1+x_2)^2+(\frac{1}{2}x_1+x_3)^2-\frac{1}{2}x_1^2=y_1^2+y_2^2-y_3^2$. (6 分)

(2) $Q=x^TAx$，其中$A=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}$．$Q$是正定的$\Leftrightarrow\begin{cases} a>0 \\ a-\frac{1}{4}>0 \\ -\frac{1}{4}a^3+\frac{5}{4}a-\frac{1}{2}>0 \end{cases}$ (6 分)

解得$\sqrt{2}-1<a<2$. (4 分)

10b．根据 Bezout 定理，存在多项式u,v使得$ud_\alpha+vd_\beta=\gcd(d_\alpha,d_\beta)=1$. (4 分)

设 $\gamma\in U_1\cap U_2$，则$d_\alpha(\mathcal{A})\gamma=d_\beta(\mathcal{A})\gamma=0$，得$\gamma=0$. (4 分)

由$\alpha=v(\mathcal{A})d_\beta(\mathcal{A})\alpha=v(\mathcal{A})d_\beta(\mathcal{A})(\alpha+\beta)\in U_3$，得$U_1\subset U_3$．同理$U_2\subset U_3$. (4 分)

显然，$U_3\subset U_1+U_2$．综上，$U_3=U_1\oplus U_2$. (4 分)