数学分析 A2

作者：原生生物 QQ：3257527639
*资料来源为课本（为主）与谢惠民（为辅）

一、点集拓扑基础

1、极限

定义：n 维欧氏空间、向量的范数与夹角、*矩阵范数、球、有界、点列极限

基本性质：点列收敛等价于按分量收敛。

实数性质可推广：柯西收敛准则、有界存收敛子列、闭集套定理、有限开覆盖定理（后两个推广的证明需运用点集的性质）。

其他可推广数列极限性质：极限唯一、有界性、局部保序性（此处可指平面某侧等）。

*不可直接推广：单调有界定理、确界原理（序关系问题）。

证明极限技巧：一般可以仿制数列极限的证明方法（如取出收敛的子列、利用保序等）。

2、点集

定义：开集、闭集、内点、外点、凝聚点、孤立点、导集、闭包、边界、*直径、*距离（在 8.7 习题中）

一些公式（出现的+号实际表示无交并）：

内点+边界+外点=全空间；内点+边界=导集+孤立点=与点集距离为 0 的点=闭包；

有界=直径有限

*注意开集闭集互为补集的原始定义。

*集合序关系的定义（书上未具体写出）：

在一些集合中，某集合**极大**指其不被其他任何集合真包含，**最大**指其包含其他所有集合；**极小**指其不真包含其他任何集合，**最大**指其被其他所有集合包含。

例如，E的内点是包含于E的最大开集即是说，一切包含于E的开集都是E的内点的子集。

证明最大的其中一个常见方法是，证明此集合为所有这些集合的并。

证明开闭集：虽然有多个等价定义，实际应用时绝大部分情况需写出定义证明。

补集相关：注意对偶法则的使用。

*推导时需特别注意条件是否真的等价（例如，某点任作开球，一定有 A 或 B 中的点，无法直接推出其属于 A 的闭包或 B 的闭包，事实上这一步反证较方便说明）。

3、有界闭集&连通性

定义：列紧、紧致、连通、道路连通、连续曲线、区域

列紧和紧致类似实数中有界闭区间的性质

开集/实数中，连通与道路连通等价；一般情况下，道路连通可推出连通

*既开又闭只能是全空间或空集，这提供了证明不存在的一个思路

*有界闭集不交等价于距离大于 0，而对无界闭集（考虑渐近线）与开集，未必如此

列紧和紧致有关问题：可以考虑直接由定义出发，亦可等价为有界闭集处理，一般后者会使问题简化。

证明连通性：对开集一般使用非空开分割的等价定义，其他情况除定义外可以考虑从集合中取出一个点，得到所有与它连通的点，再证明这个集合即是原来的点集。

*若想说明不连通，得到满足条件的分割后不要忘了证明AB非空（问题 8.5-1 答案就犯了这个错误，答案事实上说明了E一定被A或B包含（不妨设为A），必须补充一步，此时A的闭包即为E的闭包，故B为空，矛盾）。

证明道路连通：构造出对应的曲线，注意曲两条头尾重合的连续曲线可得新的连续曲线。

证明不道路连通：可以考虑连续曲线段是有界闭集，利用极限等性质说明。

构造性问题：经常需要考虑利用距离的性质（最关键：距离函数是利普西茨连续函数）。

4、连续函数&连续映射

定义：重极限、连续、一致连续、*利普西茨连续（类似单变量函数定义）

重极限存在需严格按照定义，而累次极限则与单变量相同。

连续函数处有很多原本有界闭区间上连续函数性质在紧集上的推广，如介值性等，而连续映射时推广会受更严格的限制。

*注意海涅归结原理仍可使用

证明重极限存在：定义说明，有时转化为极坐标更方便说明。

证明重极限不存在：找到两个不同的逼近方式值不同（或不存在）即可。

*注意分次叠加的思路：$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\big(f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)\big)+\big(f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\big)$（这个思路在偏导相关命题时也非常有意义）。

证明连续性：仿照单变量时的思路，或直接定义出发。

证明不连续：由归结原理构造两列点得反例。

*注意连续映射的等价定义（开集原像开、闭集原象闭、闭包的像含于像的闭包）

*证明不存在连续双射：可考虑从介值性出发得到反例。

二、偏导数

1、导数与微分

定义：方向导数、偏导数、全微分、雅可比矩阵

各偏导存在连续（事实上某一个不连续亦可，利用分次叠加证明）知全微分存在；全微分存在可知各方向导数存在、函数连续。

*记忆经典反例的构造

*当固定多变量的一些值得到单变量情况时，中值定理等单变量结论可直接使用

计算方向导数：可微时利用雅可比矩阵和方向内积，否则按照定义计算。

证明全微分存在：偏导若存在连续可直接得，否则依靠重积分计算。

证明全微分不存在：一般证明不连续或方向导数不存在，有时需依靠重极限。

*映射的微分相关：可考虑按分量化为函数微分问题说明，或直接计算矩阵。

2、求导方法

内容：复合求导、隐映射求导、逆映射求导、高阶导数

*主要掌握计算，尽量熟悉证明

*选取求导对象十分重要

复合求导：利用矩阵乘积运算，注意每个函数中代入的值（类似单变量复合时需代入中间变量u而不是直接x）

证明：利用可微写出雅可比矩阵，复合后估算误差大小得重极限结果。

*复合求导常用于变量代换的情况，需注意视何为自变量何为因变量

*基本处理思路为，不含导数的等式求导得到新等式，含导数的等式代换得到新等式

证明隐映射存在：套用定理条件验证即可。

隐函数存在性定理证明：局部单调性说明至多一解，再由介值得存在解。

*隐映射定理中存在性部分依靠归纳分步说明存在。

隐映射求导：先将方程组化为函数形式，再选取自变量因变量（注意个数限制）得到雅可比矩阵，套用公式计算（注意负号）。

隐函数可导性：直接利用定义可计算出导数。

*隐映射定理中可导性部分利用复合求导公式进行归纳运算。

逆映射求导：直接计算逆矩阵即可。

局部逆映射定理：通过隐映射定理得到局部存在逆映射。

逆映射定理：利用整体行列式不为 0，从而将解扩展至整体性质。

*一点处雅可比矩阵可逆⇒这点附近存在逆映射

开集上点点可逆⇒开映射

点点可逆+单射⇒存在整体逆映射

高阶求导：核心为注意与复合混合时不要漏项（二元函数求偏导后仍为二元函数）。

*注意混合求导记法为从右到左

*当各导数都连续时混合求导结果与次序无关

证明：利用分次叠加后微分中值定理将结果收缩于一点。

*证明微分方程时可利用代换简化，如证明$u(x,y)=f(x)g(y)$只需说明$\frac{\partial \ln u}{\partial x\,\partial y}=0$

3、曲线/曲面

曲线切线方向：参数方程表示则直接求导，*平面交点表示则使用雅可比行列式（谢惠民拓展内容，可由切平面交点证明）。

曲线切线：切线方向结合过点的坐标。

曲面法线方向：一般方程表示则直接求导，参数方程表示则使用雅可比行列式。

曲面切平面：法线方向结合过点的坐标。

证明：切线由定义说明，推导得出曲面上一点处曲线的切线共面并计算一般方程时的情况。再由链式法则得出参数方程时情况。

*这揭示了曲线与曲面的某种对偶性

*注意方向向量可以放缩，不影响表示的方向

曲线弧长：见下方第一型曲线积分。

曲线曲率：代入公式即可。

证明：先得到曲线以弧长表示的参数方程，再结合定义计算。

曲面基本量：按照参数方程对应计算。

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

单位法向量：利用$r_u\times r_v$为法向量得到方向，基本量$\sqrt{EG-F^2}$控制模长。

证明：利用外积性质可直接计算。

4、泰勒展开&极值

定义：泰勒展开与余项、Hesse 方阵、极值

*由于泰勒展开式的形状，雅可比方阵对应一阶导数，Hesse 方阵对应二阶导数，正定负定对应原有的正负，可迁移一些结论（如凸函数性质等）。

泰勒展开（拉格朗日余项）：按公式计算即可，但仍可以像单变量时一样运用复合等技巧。

证明：将差量定义为单变量函数，利用一元函数泰勒展开得到结果。

*利用估算大小可得到皮亚诺余项

中值定理的推广：

利用差量定义单变量可证明拟微分平均值定理，为其中一种推广方式，其他推广基本均可化为单变量而得出。

*使用中值定理证明的结论，也常可以化为单变量分步解决。

极值：可导处先解驻点，再用 Hesse 方阵判断，必要时结合其他判断方法；注意讨论不可导处的点的情况。

证明：利用泰勒展开写出展开式，并取足够小区间忽略余项。

最值：将所有极值点取出讨论即可。

条件极值：由拉格朗日乘数法公式得出点的情况，再结合 Hesse 方阵判断。

证明：对辅助函数利用隐映射定理，并结合极值条件。接着与之前类似泰勒展开。

*注意此时在 Hesse 矩阵不定时仍可能取极值。

*证明不等式时应选取方便计算的条件与值

*集合内最值：由一般极值方法得到内部的最值，再对边界采用条件极值的方式分析，最后综合两部分的最值。

三、重积分

1、可积性

定义：黎曼和、上下积分、零测集、零面积集、有面积、累次积分

*注意零测集包含零面积集，零面积集是有面积的，有面积等价于边界零面积

*注意熟悉闭矩形与有界集合上可积的条件

*保证有界时，改变一零面积集上的值不改变可积性/积分结果

*熟悉累次积分相关的经典反例

证明可积：由定义上下积分估算，或直接通过勒贝格定理考虑不连续点集。
高重数可积性：仿照二维定义零体积集等、零测集，定义与勒贝格定理均仍可以使用。

2、二重积分计算

核心步骤：先通过换元调整积分区域，再选择合适积分次序进行运算

*注意换元要求一一映射（否则只能拆分区域），且对应雅可比行列式除孤立点外非 0

*注意极坐标换元的使用（当区域为圆形/椭圆形）

*注意正交换元的使用（当式子中有较多关于xy的一次关系）

*注意使用对称性简化运算（尤其是旋转对称性，有时可直接规避正交换元）

求某些面积（对多重则为体积等）：看作区域内对 1 的积分，并换元调整区域。

3、n 重积分计算

核心步骤：通过换元、调整次序等，化为更低阶情形进行运算

*仍注意换元要求，并熟悉与二重积分类似推广的换元方式

*注意极坐标换元时角度的对应含义（记忆换元方式与行列式值以提升速度）

*利用等值面剖分等其他切割技巧（实质为巧用正交换元将对称性旋转为理想方向）

*注意换元后符号的检查

*不要忘了单变量积分时的对称、换元、分部等计算技巧！

*切记区分某段的变量与参数！

四、曲线积分

*此处以平面为例以更好与 Green 公式对照，空间的计算直接增添一个分量即可

1、第一型曲线积分

基本操作：$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\, dt = \sqrt{1 + y'^2}dx$

*不需要定向

*注意对称性在简化运算时的作用

2、第二型曲面积分

基本操作：$Pdx + Qdy = \left(P\frac{\partial x}{\partial t} + Q\frac{\partial y}{\partial t}\right) dt = (P + Qy')dx$

定向：t增加的方向为正，否则为负

与第一型联系：$Pdx + Qdy = (P\cos(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{i}) + Q\cos(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{j}))ds = (P, Q) \cdot \boldsymbol{t}ds$

*$\boldsymbol{t}$为参数增加方向的切向量，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$为$x, y$轴的方向向量

事实上，如果$\boldsymbol{t}$为单位向量，有$\cos(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{i}) = t_x$，$\cos(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{j}) = t_y$为其两个分量

3、Green 公式

基本操作：$Pdx + Qdy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$

另一种表述：$(P, Q) \cdot \boldsymbol{n}ds = \left(Pcos(n, i) + Qcos(n, j)\right)ds = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) d\sigma$

定向：沿线绕转区域在左手边为正（最外圈为逆时针）

*$\boldsymbol{n}$为平面封闭曲线的外法向量，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$为$x,y$轴的方向向量

事实上，如果$\boldsymbol{n}$为单位向量，有$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})=n_x$，$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})=n_y$为其两个分量

由此有，若$\boldsymbol{t}$为逆时针绕转的切向量有$t_x=-n_y,t_y=n_x$（两种表述转化）

面积计算：$\sigma(D)=\int_{\partial D}xdy=-\int_{\partial D}ydx=\frac{1}{2}\int_{\partial D}xdy-ydx$

*当$y=f(t)x$时$\mathrm{xdy}-\mathrm{ydx}=x^2\mathrm{df}(t)=x^2\mathrm{f}'(t)\mathrm{dt}$，因此最后一个式子更常用

*注意连续性条件（若某点处不连续，可考虑对挖去这点的多连通区域使用）

*积分与路径无关的条件（注意和三维空间的势函数对照）

单连通区域：闭曲线为 0⇔积分与路径无关（保守场）⇔合要求函数存在（有势场）⇔Green 为 0（无旋场）

多连通区域：闭曲线为 0⇔积分与路径无关⇔合要求函数存在⇒Green 为 0

*只有有限点不连续时，封闭曲线积分（不触及不连续点）的值只与曲线中包围哪些点有关，积分与路径必无关（可以绕开），由此可以取包围点区域的极限

五、曲面积分

1、第一型曲面积分

基本操作：$d\sigma=||r_u\times r_v||dudv=\sqrt{EG-F^2}dudv=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

*不需要定向

*注意选取容易计算的参数（仍常见球坐标换元）

2、第二型曲面积分

基本操作：$\mathrm{Pdydz}=\mathrm{P}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{dudv}$，其余两分量同理（此处$u,v$也可取$x,y$等）

定向：法向量方向决定

*取u,v为y,z可知当$x=f(y,z)$时$Pdydz$积分结果与yz平面上投影中$P(f(y,z),y,z)dydz$相同或异号

与第一型联系：$Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=(P,Q,R)\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$

*$\boldsymbol{n}$为积分定向对应的法向量

*注意此处对称性与第一型的不同情况（如：球面上$zd\sigma$积分为 0，而$zdxdy$积分非 0）

3、Gauss 公式

基本操作：$Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\mu$

定向：封闭曲面指向外为正

*由于与第一型联系中$\boldsymbol{n}$已经为法向量，此处不像平面会有符号和求导对象的相反

*注意增补曲面使其封闭，Gauss 后再减去（Green 也可如此操作，但不常用）

4、Stokes 公式

基本操作：$Pdx+Qdy+Rdz=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

定向：曲线与曲面协调（面朝法向对应逆时针）

*三维空间积分与路径无关的条件见势函数

*可由行列式形式方便记忆

***构造技巧**

由于$f\frac{\partial f}{\partial x}$对$x$的偏导为$\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+\mathrm{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，利用 Gauss 公式等可联系二阶导与导数平方，从而进行构造，可用于通过边界对内部大小估算等。

例题：Ω为R^3中的有界区域，$\partial\Omega$光滑，u为单位向量，$c\geq\frac{1}{4}$为实数；

已知f在含Ω某开集上二次连续可导，且有$\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{\partial f}{\partial u}+cf,f(\partial\Omega)=0$，求证$f(\Omega)=0$。

解法：设$u=(p,q,r)$，边界上$f\sum_{i=1}^3\frac{\partial f}{\partial x_i}$恒为 0，因此积分为 0，利用 Gauss 公式可得在Ω上

$\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2+\mathrm{f}\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_i^2}=\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2+f\frac{\partial f}{\partial u}+cf^2$积分为 0。配方可发现此式即为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+pf\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}+qf\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}+rf\right)^2+\left(c-\frac{1}{4}\right)f^2\geq 0$$

由于积分为 0 且连续，只能每点处均为 0，将f在某条线上看作x_1的函数，则由$\frac{\partial f}{\partial x_1}+pf=0$知其为$e^{-px_1}+C$，因此单调，但由于在有界区域边界上为 0，因此恒为 0，由此类似推得f恒为 0。

5、外微分

定义：微分形式、外微分运算

*Green、Gauss、Stokes 均可写作外微分形式

（事实上梯度、旋度、散度也可看作 0 到 1、1 到 2、2 到 3 阶外微分）

六、场

1、梯度、散度、旋度

定义：梯度、散度、旋度、Nabla 算子、Laplace 算子

*注意有心场（即练习题 13.1 中$f(\boldsymbol{p})$）梯散旋的结果

*注意可以简化运算的公式

*注意三者的物理意义

***调和函数**

*问题 11.3 与 13.2 有二维和三维调和函数的主要性质

*注意二维与三维中调和函数的不同构造

2、势函数

定义：有势场、保守场、无旋场、空间单/多连通、曲面单连通、势函数、势能、恰当微分

曲面单连通区域：保守场⇔有势场⇔无旋场

*势函数唯一性：可加减常数

构造势函数：由保守场可以沿方便计算的路径积分

恰当微分方程解法：类似势函数构造

3、 向量势函数

定义：无源场、旋度场、星形区域、向量势函数

星形区域：无源场⇔旋度场

*向量势函数唯一性：可加减梯度

构造向量势函数：仿照例题直接代入公式，或由唯一性可设某个分量为 0

感谢阅读！