《几何学基础》

时间：2020年秋季学期

授课人：盛茂

纲要：(1) 几何与公理化

(2) 三维欧氏空间

(3) 刚体变换

(4) 几何与对称

(5) 射影平面

(6) 射影变换

(7) 拓扑变换

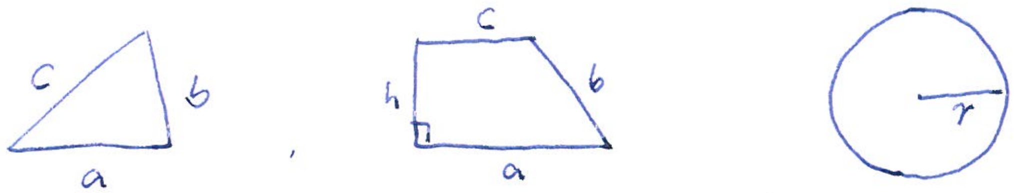
(8)* 几何与应用

一、几何与公理化

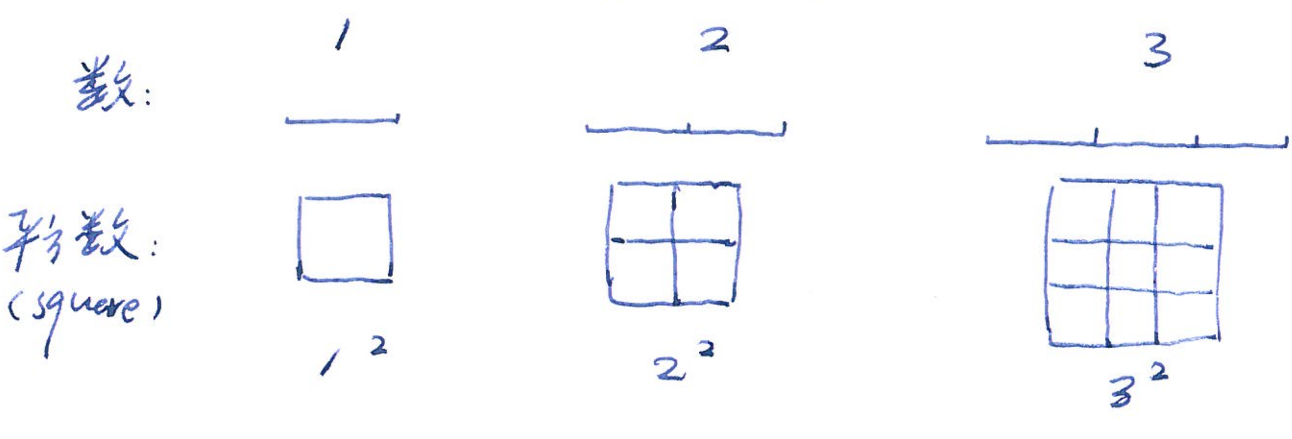
(1) 几何学的简短历史

(i) 《几何原本》之前

几何学是一门非常古老的学问。出于人类实际生活的需要和好奇心，人类对生活中见到的物体进行比较和测量。在古埃及，由于尼罗河定期的泛滥，河水经常冲走已经划好的土地。所以，国王需要派人去调查，并通过测量确定准确的损失程度。这就会产生诸多几何问题。典型的比如：

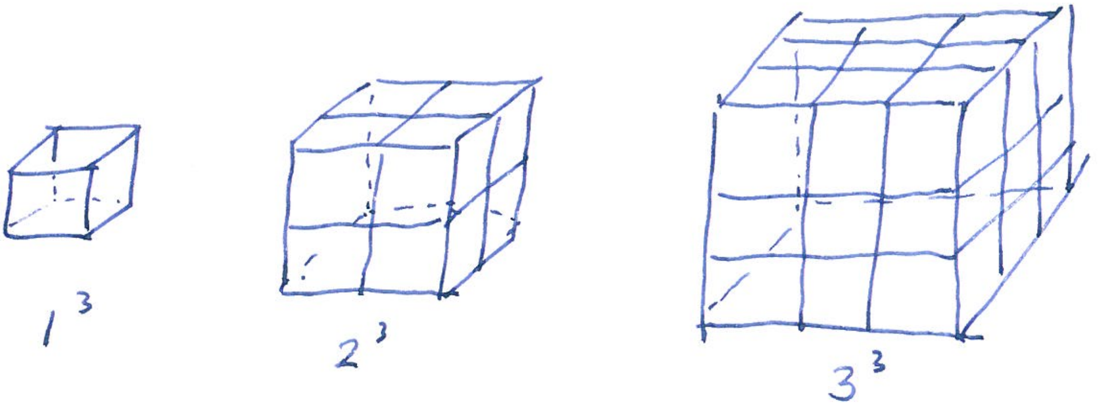


已知长度求面积；长度是容易测量的，常常绳子即可。几何学的起源也与一些脱离生产者（比如祭司等神职人员）致力于设计庙宇、金字塔等等新的几何物体有密切关系。几何学的起源与发展与数论的起源与发展紧密联系。比如



立方数

(cubic)



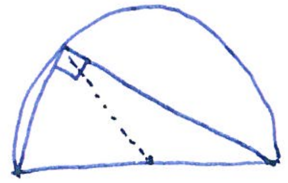
《几何原本》由欧几里德在大约公元前3世纪完成，开启了希腊数学的黄金时代。这是一本承上启下的书。我们先讲讲《几何原本》之前一些古希腊数学的著名人物。他们的学问对《几何原本》的形成有着重大的影响。

在几何学在古埃及与古巴比伦发展后，于公元前8世纪左右进入了古希腊。数学(包括几何学)在古希腊得到迅猛地发展。与古埃及，古巴比伦时期的功利主义不同，古希腊时期的科学(包括数学)根植于高度的好奇心，对自然法则认知的渴望。比如：用尺规作图，化圆为方，立方体倍方(给定立方体，尺规作图出另一立方体其体积是原来的2倍。注意正方形倍方是容易的)；三等分角，是当时的大著名难题。这种精神与我们中国传统文化中的实用主义相悖。举个例子：《九章算术》作者刘徽(225-295)利用割圆术(正n边形逼近圆)得出π的值近似于3.14159。祖冲之(430-501)π的值介于3.1415926与3.1415927之间。但中国古代数学家从未得出π是无理数的结论，即无论如何精确地用有理

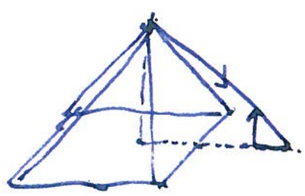
数去表达 π，都只能是近似的。π值的精确度，更多地是一个计算耐力的问题，而不是理论研究的问题。这是一个典型的技术与科学的区别。在工业革命时期，瓦特的蒸汽车发明和牛顿的三大力学定律与万有引力理论也有着类似的比较。

泰勒斯（公元前624 — 公元前548）

名言：首要问题不是我们知道什么，而是如何知道。他为几何学引进逻辑推理做出了贡献。比如：在古巴比伦时期，已经总结出了不同的泰勒斯定理：半圆的内接角是直角。



据说，泰勒斯还测量了金字塔的高度，他的方法是垂直一根棍子，在它的影子和它的长度相等的一刻，测量金字塔影子的长度。

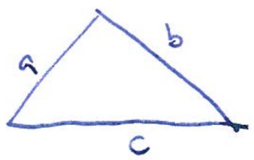


泰勒斯被称为第一位数学家。

毕达哥拉斯（约前570 – 约前495）

毕达哥拉斯建立了毕达哥拉斯学派。其格言是："万物皆数"。他们认为"一切可知的事物都有数字；因为，如果没有数字，任何事物都不可能被构想，也不可能被理解"。

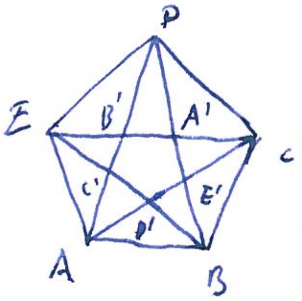
毕达哥拉斯定理：直角三角形三边有平方和关系：



$$c^2 = a^2 + b^2$$

在《周髀算经》中有勾三股四弦五的记载。在中国，毕氏定理被称为勾股定理。

黄金分割：



$$\frac{AD}{C'D} = \frac{C'D}{AC'}$$

注：黄金分割的最大特性是其自相似性：

取 A_2，使得 $\dfrac{A_0A_1}{A_0A_2} = \dfrac{A_0A_2}{A_2A_1}$

取 A_3，使得 $A_0A_3 = A_2A_1$，则有

$$\frac{A_0A_2}{A_0A_3} = \frac{A_0A_3}{A_3A_2}$$

如此往复。

柏拉图（公元前427～公元前347）

柏拉图在雅典建了一个学校，其大门写着："不懂几何者不得入内"。

柏拉图多面体：有且只有五个正多面体。它们是：

立方体，正四面体，正八面体，正十二面体和正二十面体。

柏拉图与其老师苏格拉底不同，他特别推崇数学。他的学校培养出他的时代最为优秀的老师和研究者，其中包括欧多克索斯和亚里士多德。

欧多克索斯（公元前395－公元前342）

毕达哥拉斯学派有一个著名的"可公度性的普遍存在"：

任意两个线段其长度一定是某一线段的整数倍。

即若给长度为a，b的线段，则存在长度为c的线段，使之等

$$\begin{aligned} a &= mc \\ b &= nc \end{aligned}, \quad m, n \text{ 为整数}.$$

希帕索斯的发现：

(1) 辗转丈量法求c

不妨设 $a>b$。不然 $a=b$，则令 $c=a$.

则有 $a=n_1 b+a_1$，n_1 整数，$0\leq a_1<b$

若 $a_1=0$. 则令 $c=b$.

不然我们得 $(a>)b>a_1$，即 $(a,b)\leadsto(b,a_1)$

重复上述操作，得

$b=n_2 a_1+b_1$，n_2 为整数，$0\leq b_1<a_1$

若 $b_1=0$，则令 $c=a_1$，有 $\begin{cases} b=n_2 c \\ a=n_1 b+a_1=(n_1 n_2+1)c \end{cases}$

若 $b_1\neq 0$，则 $a>b>a_1>b_1$

对 (a_1,b_1) 重复上述操作（辗转相除），一直到某 $a_n=0$ 或 $b_n=0$.

假定存在 c，使得 $a=mc$，$b=nc$，m,n 整，且 $a>b$.

得到严格递降数列

$m>n>m_1>n_1>\cdots$ 其中 m_k，n_k 均为正整数.

那么必然得到 $m_k=0$ 或 $n_k=0$。对 k 充分大的时候.

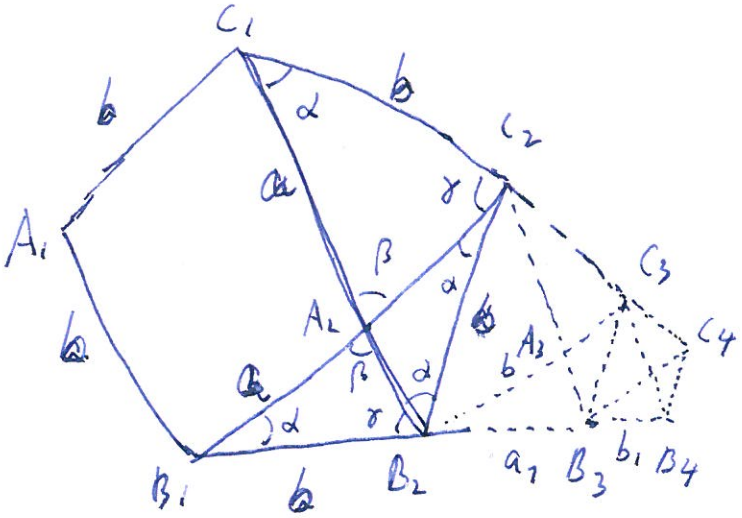
注：辗转相除法为欧几里德计算两整除的最大公约数的欧几里德辗转相除法的几何等价形式.

但问题是：数列

$a > b > a_1 > b_1 > \cdots$

一定会终止于 0 吗？

(2) 不可公度性的发现



断言：$B_1B_2 = B_1A_2$

证明：
$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= \pi \\ 2\alpha-\beta &= 0 \\ \alpha+\gamma &= \tfrac{3}{5}\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{\pi}{5} \\ \beta &= \tfrac{2\pi}{5} = \gamma \end{aligned}$$

所以 $\triangle A_2B_1B_2$ 等腰三角形，证毕。

断言 $\Rightarrow$ $a - b = B_1C_2 - B_1B_2 = B_1C_2 - B_1A_2 = A_2C_2 = a_1$.

延长 C_1C_2 线至 C_3，使得 $C_2C_3 = C_2A_2 = a_1$

B_1B_2 线至 B_3，$B_2B_3 = a_1$

不难看出，$A_2B_2B_3C_3C_2$ 是以 a_1 为边长的正五边形。

由上述论证，可得

$$b - a_1 = B_2C_2 - B_2B_3 = B_2C_3 - B_2B_3$$
$$= B_2C_3 - B_2A_3$$
$$= A_3C_3 = b_1$$

而 A_3C_3 为正五边形 $A_3B_2B_4C_4C_3$ 的一边。

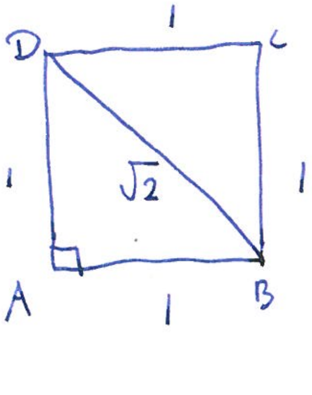
但正五边形以此作图可以不断进行下去！

这说明序列 $\overset{对角}{a} > \underset{对角}{\overset{边长}{b}} > \underset{对角}{\overset{边长}{a_1}} > \underset{对角}{\overset{边长}{b_1}} > \cdots$ 是永远不会停止下来的。

结合(1)，线段 a 和 b，即正五边形的对角和边长是不可公度的。

阿基米德的注记：

注意到线段 a, b 可公度的本质问题是 a : b 是否为有理数。历史上，阿基米德证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.



$\sqrt{2}$ 是指 BD 的长度，若 $\underbrace{AB = AD}_{假定}$ 长度为 1.

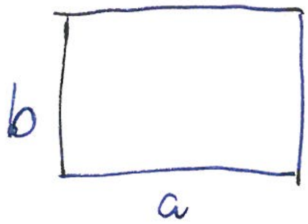
即 $\underset{\|}{(BD)^2} = (AB)^2 + (AD)^2$

$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

所以，阿基米德证明了正四边形的对角线与边长不可公度.

欧多克索斯（公元前395－公元前342）

由于希帕索斯的发现，毕达哥拉斯学派建立起来的几何大厦在根本上出现了问题，因为他们得到的很多命题是假定了"可公度性的普适性"的。比如矩阵面积



$$S_{\square_a^b} = a\cdot b$$

：矩形面积公式的本质意义是

$$S_{\square_a^b} : S_{\square_c^c} = (b:c)\cdot(a:c)。$$

欧多克索斯创立了逼近法，重建了毕氏定量几何的基础。欧多克索斯的方法后来为阿基米德计算出球面面积和球体体积。这是积分学的雏形。

(ii)《几何原本》

《几何原本》的作者欧几里德生平不详，大约活动在托勒密一世（公元前306－公元前283）。欧几里德曾对国王托勒密说过：不存在通向几何学的王室大道。可见，几何学在欧几里德心中是普适的。它不因人而异，这也是科学的特征。事实上，《几何原本》的公理化体系对科学思维的影响是巨大的。牛顿的巨著《自然哲学的数学原理》

就是按照《几何原本》的公理化体系而写。

《几何原本》共十三卷，前一到六卷平面几何，七到九卷数论，第十卷数与几何结合的内容（包括形如 $a\pm\sqrt{b}$，$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ 等数的几何分类）这是一种对不可公度量（即无理数）的继续探索。第十一到十三卷立体几何。

《几何原本》的一些特点：

(a)显公设与公理。

在第一卷中，开篇就列了23个定义，比如"点没有组成部分"，"线只有长度没有宽度"，"面只有长度和宽度"等等。紧接着这些定义，欧几里德列了5个公设与5个公理。

公设：

1. 由任意一点到另外任意一点可作直线。

2. 一条有限直线可以继续延长。

3. 以任一点为圆心，任一距离为半径可作圆。

4. 所有直角相等。

5. 若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。

公理：

1. 与同一量相等的量彼此相等。

2. 等量加等量，其和仍相等.

3. 等量减等量，其差仍相等.

4. 彼此能重合的物是全等的.

5. 整体大于部分.

欧几里德将其后的命题的证明都归结于定义、公设和公理. 虽然用现代数学的观点看，欧几里德的证明并非"完全严格". 但是，在欧几里德的那个时代，这是严格的。更为周到，细致严密的表述，要在希尔伯特的《几何学基础》(1898-1902)相关论述中出现。欧几里德在《几何原本》中所展现的"定义→假设→命题"的几何学逻辑体系是人类理性思维的光辉。

(6) 几何与代数的统一性

《几何原本》不仅仅是包含几何学的内容. 第2卷，第5卷，第7.8.9卷都是关于代数的内容. 比如著名的"欧几里德算法"；"有无穷个素数"均出现在该书中. 让我们看一下在第9卷中的

命题：素数有无穷多个。

首先素数是指一个正整数，它只能被1和它自身整除。一个正整数如(它的本身≠1)若不是素数，则称为合数.

证明：用反证法，我们假定

(*)：$P_1 \cdots P_n$ 为所有的素数

我们考察正整数

$$N = P_1 \cdots P_n + 1$$

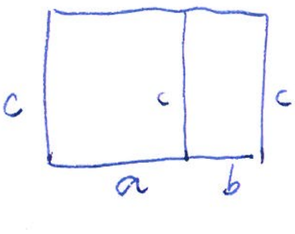
因为 $N > P_i$，对任意的 i，所以 N 是一个合数。因此 N 有不同于 1 和自身的因子（即该正整数可以整除 N），我们记之为 P。因为 P 必为某个 P_i，所以 P 必将整除

$$1 = N - P_1 \cdots P_n。$$

但这是不可能的。故命题(*)为假。从而存在无穷多个素数。证毕。

几何与代数的统一性其实已经表现在"可公度性"与"不可公度性"的讨论中。事实上，无理数（例如 $\sqrt{2}$）的发现是代数学的里程碑事件。用现代的话说：有理系数方程 $x^2-2=0$ 在有理数域中无解，从而产生有理数域的扩张——新的"数"产生了。

在《几何原本》中，数的乘法是用矩形面积来理解的。加法分配律 $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ 则变成《几何原本》中如下命题：



如果矩形的一边被截成 n 段，那么原来矩形的面积是各分段和未截线段构成的矩形面积之和。

几何与代数的统一性在现代代数几何学中得到充分的体现。但这只是数学统一性的一个缩影

(iii) 《几何原本》之后的一些重要的几何学发展

解析几何：笛卡尔(1596-1650)在其哲学著作《方法论》的附录里包含一篇《几何学》。这篇论文通常被认为解析几何学的开端。笛卡尔把几何作图问题与代数方程求解联系起来，同时，他讨论了代数与几何的优劣。他认为几何太过多地依赖于图示，以致毫无必要地使人的想象力疲劳不堪；但同时也指出代数是混乱与含糊的艺术，使人的头脑陷入困惑。因此，他认为(1)通过代数过程把几何从图示的使用中解放出来；(2)通过几何解释赋予代数运算以意义。具体的，笛卡尔在《几何学》中的过程就是从一个几何问题开始，把它转变为代数方程的语言，然后，尽可能地简化这个方程，用几何的办法解出这个方程。与笛卡尔不同，同时代的费马(1601-1665)更着重于不定方程解法的图示。费马所著的《轨迹导论》方法使用直角坐标，他的解析几何更接近于我们现在学的解析几何。费马在笛卡尔《几何学》出版的一年之前，就有如下的陈述：

每当最终方程中的两个未知量被求出的时候，我们就有了一条轨迹，该轨迹描述了一条线，直线或曲线。

非欧几何：《几何原本》中的第5条公设等价于如下的

平行公设：过直线外一点，存在唯一的直线过该点且平行于给定直线.

该公设也等价于命题：任意三角形其内角和为两直角~~之~~和。在非欧几何产生之前，几何学家们致力于证明平行公设是其它公设的推论。

当然非欧几何的存在说明这样的努力是徒劳的. 值得一说的是，与欧拉同时代的一位数学家 朗伯（1728-1777）。他也许是最接近于发现真相，却实际上未发现非欧几何的人。他曾经写到：

欧几里得公设证明可以发展到这样一种程度，即表面上只剩下了一点微不足道的东西。但仔细分析表明，在这点微不足道的东西里面，潜藏着问题症结：通常，它要么包含了那个在证明的命题，要么包含了一个相当于这个命题的假设。

朗伯是最早证明π是无理数的数学家.

非欧几何的发现一般归功于三人：罗巴切夫斯基（1793-1856），波约（1802-1860）和高斯（1777-1855）. 高斯应该是第一个清楚明白证明平行公设是徒劳的. 但他毕生未公开发表过或支持过这样的观点. 高斯于1825，1827年发表了经典著作《曲面的一般研究》. 在该著作中，高斯曲率被第一次引入并加以研究。高斯证明了高斯曲率仅依赖于曲面上的度量性质有关，而与曲面的形状无关（比如平面与圆柱面度量性质相同但形状不同），并指出了研究了仅仅与度量相关

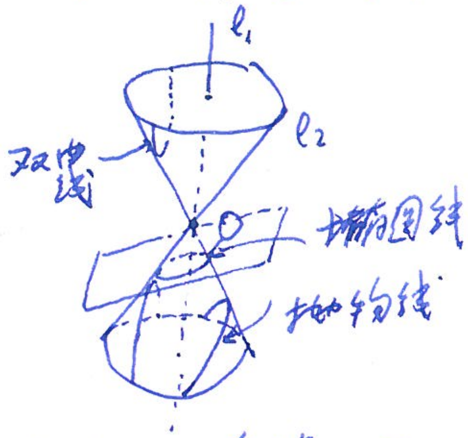
的新几何的可能性。

罗巴切夫斯基被认为"几何学的哥白尼"。他在1829年发表了论文《论几何学原理》，公布了一种新几何学，其赖以建立的基础是一个与平行公设背道而驰的假设：过直线AB外一点C，可以做一条以上的直线不与AB相交。用这个新的公设，他推导出了一个和谐的几何结构，没有任何内在的逻辑矛盾。罗巴切夫斯基完全认识到了他发现的新几何具有重要意义。他为此先后写了三部专著，详尽地介绍新几何。

鲍约与其父亲都毕生致力于平行公设的研究。他在其父亲于1832年正式出版的一本书《试论》的附录里发表了《绝对空间的科学》的论文。鲍约的绝对空间几何学就是在欧氏几何的公理体系中除去了平行公设。他精辟地分析了绝对几何学的公理体系的逻辑推论，建立起一系列深刻的定理，它们对于欧氏几何与非欧几何同样成立。

罗巴切夫斯基与鲍约的工作在他们生前~~都~~没有被人们所重视。直到后来1868年贝尔特拉米发表论文《非欧几何解释的尝试》，证明了非欧平面几何实现于普通欧氏空间中，作为某负常数高斯曲率的内在几何存在。非欧几何才慢慢为几何学家所接受。

射影几何　射影几何的形成也许最早可追溯到古希腊时期对圆锥曲线的研究。其中出名的著作有阿波罗尼奥斯的



《圆锥曲线论》。射影几何的先驱是与笛卡尔同时的德沙格(1591-1661)。他本人的职业是一位建筑师和军事工程师，但他有着非凡的想象力。受文艺复兴时期艺术中的透视画法的启发，他写下著作《试图处理一个圆锥曲线体与一个平面相交之结果的草稿》。其基本结果就是通过射影的方法统一地处理圆锥曲线，使貌似不同种类的圆锥曲线合而为一。德沙格的弟子帕斯卡(1623-1662)可惜未有把~~射影~~德沙格的理论发扬光大，因为他过早得放弃了数学，而改投到神学。

射影几何的奠基者是蓬斯莱(1788-1867)，和沙勒(1798-1880)。蓬斯莱使用德沙格的中心投影和无穷远点的概念来建立复射影平面的概念。他还发现了对偶性原理。这原理具有广泛的几何意义。它的一个具体形式是平面几何的一些命题把点和线的位置互换，命题仍然成立。如：

一个六边形，它的六$\left\{\begin{matrix}\text{个顶点落在}\\ \text{条边相切于}\end{matrix}\right.$某一圆锥曲线上，当且仅当它的三对相对的$\left\{\begin{matrix}\text{边}\\ \text{顶点}\end{matrix}\right.$所共有的三$\left\{\begin{matrix}\text{个点}\\ \text{条线}\end{matrix}\right.$共于一$\left\{\begin{matrix}\text{条线}\\ \text{个点}\end{matrix}\right.$。沙勒接续了蓬斯莱的工作，强调交比及其在射影变换不变性在射影几何中的重要性；他开创了枚举几何学的研究，后来这种研究成为代数几何学的一个分支。

射影几何的发展与壮大也许要归功于普吕克（1801－1868）及他的学生克莱因（1849－1925）。普吕克引入了齐次坐标系。利用齐次坐标系，对偶原理由代数形式上的对称性清楚显示：

$$ax+by+cz=0$$

把 (a,b,c) 看成参数，则上述方程表达射影平面中的一条直线，把 (a,b,c) 看成变量，则上述方程表述所有过 (a,b,c) 这一点的直线。而对偶原理恰恰把射影平面中的一条直线与对偶射影平面中的过一点的所有直线对应起来。

克莱因把代数学中群的概念理解几何，提出了著名的埃尔朗根纲领。这个纲领把几何学描述为研究那些在某个特定变换群之下依然保持不变的图形的性质。例如，欧氏平面几何研究的是在刚体变换群之下保持不变的性质，比如长度，角度，面积。而比欧氏几何更为一般的几何为射影几何，因为射影几何研究在射

影变换下不变的性质。而射影变换群是包括刚体变换群，是一个更大的变换群。那么，在射影几何中，长度与面积等几何量不再保持不变。但比如曲线的次数，与四个点所形成的交比仍保持不变。简言之，克莱因认为几何学就是研究图形在某类变换下不变的性质。因为克莱因的观点，射影几何学被明确的定义出来。

黎曼几何　黎曼几何以黎曼（1826-1866）的论文《论几何学基础的假设》而诞生。在该论文中，他提出了流形的观念，认为几何学中最重要的法则是求出无穷靠近的任意两点之间的距离的法则。黎曼的几何学是更加一般意义上的非欧几何学，使罗巴切夫斯基、波约的非欧几何学成为特例。黎曼几何学后来成为爱因斯坦广义相对论的数学基础。黎曼的几何学观点在宇宙的研究中得到了体现。

代数几何与拓扑学　是形成较晚的几何学分支，在此我们暂时先不叙述。

(2) 希尔伯特的几何学公理体系

建立几何学公理体系的实质就是要把我们的空间直观加以

逻辑的分析。希尔伯特(1862-1943)在其著名的工作《几何学基础》一书中，把《几何原本》中的定义，公设和公理加以精选，补充和逻辑加工，建立了一个完善的公理系统，使《几何原本》中的缺点全部得到修正，从而使欧氏几何获得了牢固的基础。

希尔伯特公理体系分以下五组：(点用 $A, B, C \cdots$ 表示；直线用 $a, b, c \cdots$ 表示；平面用 $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ 表示)

(I). 关联公理

(I1) 对于两点A和B，恒有一直线a，它同A和B相关联。

(I2) 对于两点A和B，至多有一直线，它同A和B相关联。

(I3) 一直线上恒至少有两点；至少有三点不在同一直线上。

(I4) 对于不在同一直线上的任意三点A，B和C，恒有一平面 α，它同A，B和C这三点的每一点相关联。对于任一平面，恒有一点同这平面相关联。

(I5) 对于不在同一直线上的三点A，B，C，至多有一平面，它同A，B，C这三点的每一点相关联。

(I6) 若一直线a的两点A和B在一平面 α 上，则a的每一点都在平面 α 上。

(I7) 若两平面 α 和 β 有一公共点A，则它们至少还有一公共点B.

(I8) 至少有四点不在同一平面上。

(I1-I3) 称为第一组公理中的平面公理；(I4-I8) 称为第一组公理中的空间公理。

(II) 次序公理

定义：直线上的点有一定的相互关系，我们用在……之间来描述。

(II1) 若一点B在一点A和一点C之间，则A和B和C是一直线上的不同的三点。这时，B也在C和A之间。

(II2) 对于两点A和C，直线AC上恒有一点B，使得C在A和B之间

(II3) 一直线的任意三点中，至少有一点在其他两点之间。

定义. 我们考虑一直线a上的两点A和B；我们把这一对点A和B所成的点组叫做一条线段，用AB或BA表示。在A和B之间的点叫做线段AB的点，或线段AB内部的点；A和B叫做线段AB的端点，直线a上的其他的点叫做线段AB外部的点。

(II4) 设A，B和C是不在同一直线上的三点。设a是平面ABC的一直线，但不通过A，B，C这三点中的任一点，若直线a

通过线段AB的一点，则它必定也通过线段AC的一点、或线段BC的一点。

III：合同公理

(III 1) 设A和B是一直线a上的两点，A′是该直线或另一直线a′上的一点，而且给定了直线a′上A′的一侧，则在直线a′上A′的这一侧，恒有一点B′，使得线段AB和线段A′B′合同。用记号表示 $AB \equiv A'B'$。

(III 2) 若两线段A′B′和A″B″都和另一线段AB合同，则这两线段A′B′和A″B″也合同。

(III 3) 设两线段AB和BC在同一直线a上，无公共点，而且两线段A′B′和B′C′在这直线或另一直线a′上亦无公共点。若 $AB \equiv A'B'$，$BC \equiv B'C'$，则 $AC \equiv A'C'$。

定义：设α是一平面，而且直线h和k是α上的，直线，从一点O起始的，不属于同一直线的两条射线，我们把这一对射线h和k所组成的线组叫做一个角，用∠(h,k)或∠(k,h)表示。点O称为这个角的顶点，射线h和k叫做这个角的边。

(III 4) 设给定了一平面α上的一个角∠(h,k)，一平面α′上的一直线a′和在α′上a′的一侧。设h′是a′上的，从点O′起始的一条

射线，则平面α'上恰有一条射线k'，使$\angle(h,k)$与$\angle(h',k')$合同，而且使$\angle(h',k')$的内部在α'的这给定了的一侧。用记号表示，即

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$$

(III5) 若两个三角形ABC和$A'B'C'$有下列合同式

$$AB \equiv A'B',\quad AC \equiv A'C',\quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

则有合同式

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

(IV)：平行公理（又称欧几里德公理）

设a是任一直线，A是a外的任一点，在a和A所决定的平面上，至多有一条直线通过A，而且不和a相交

V：连续公理

(V1)（阿基米德公理）若AB和CD是任意两线段，则必存在一个数n使得沿A到B的射线上，自A作首尾相接的n个线段CD，必将越过B点。

(V2)（直线完备公理）一直线上的点集连同其次序关系与合同关系不可能再这样地扩充，使得这直线上原来元素之间所具有

的关系，从公理I～III所推出的直线次序与合同的基本性质以及公理(VI)都仍旧保持。

的关系，从公理Ⅰ～Ⅲ所推出的直线次序与合同的基本性质以及公理(Ⅵ)都仍旧保持。

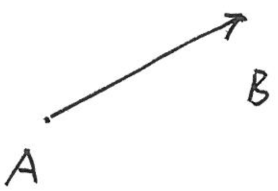
二、三维欧氏空间

本章的基本目标是利用中学的(平面几何和)立体几何知识建立基本的线性代数的基本对象：(二维及)三维欧氏空间。

(1) 向量几何和向量代数

(i) 位移向量

设A、B为空间中两点，位移向量$\overrightarrow{AB}$只记住线段AB的长度和方向。换句话说：若有点A′、B′使得线段$\overline{A'B'}$与$\overline{AB}$等长且方向一致，我们就认为$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.



定义1：若空间中的一个变换τ满足条件

$\overrightarrow{P\tau(P)}$ 和 $\overrightarrow{Q\tau(Q)}$ 恒为同向平行且等长，

即：$\overrightarrow{P\tau(P)} = \overrightarrow{Q\tau(Q)}$

则称τ为空间的一个平移。

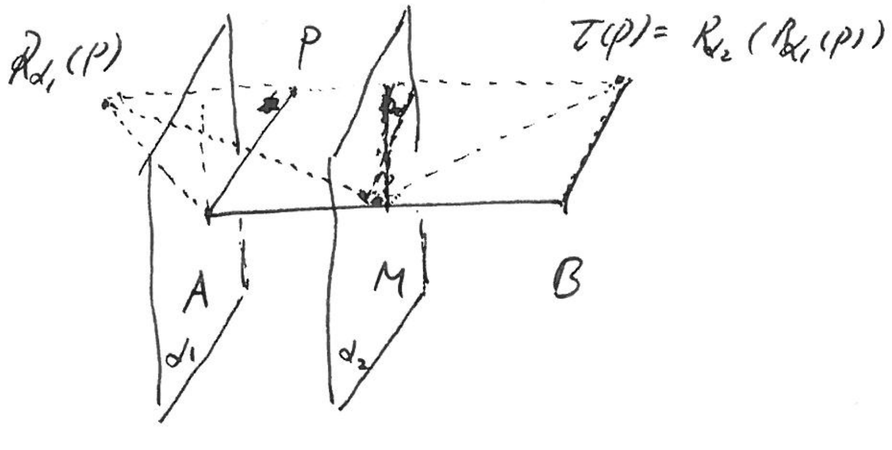
定理2：设A、B为空间任给两点，则存在唯一的平移τ使得$\tau(A)=B$.

证明：(存在性). 若 $A=B$, 则恒等变换即满足条件.

若 $A\neq B$, 我们可利用反射:

令 α_1, α_2 分别为和直线段 $\overline{AB}$ 正交于 A 和 M (AB 中点) 的平面. 则令 R_{α_i}, $i=1,2$ 为以平面 α_i 为反射平面的反射.

则复合 $R_{\alpha_2}\circ R_{\alpha_1}$ 即为所求. (习题: 验证 $R_{\alpha_2}\circ R_{\alpha_1}$ 为平移)



(唯一性) 设 P 为空间任意一点, τ 是上述所作平移, 而 τ' 为另一将 A 映到 B 的平移. 我们要证:

$$\tau'(P) = \tau(P)$$

由所设 $\overline{P\tau'(P)}$, $\overline{P\tau(P)}$ 都与 $\overline{AB}$ 同向平行且等长。由于过 P 点作与 $\overline{AB}$ 平行的直线是唯一存在的.

所以 $\tau'(p)=\tau(p)$。由于 p 任意，所以 τ' 和 τ 是同一变换。

#

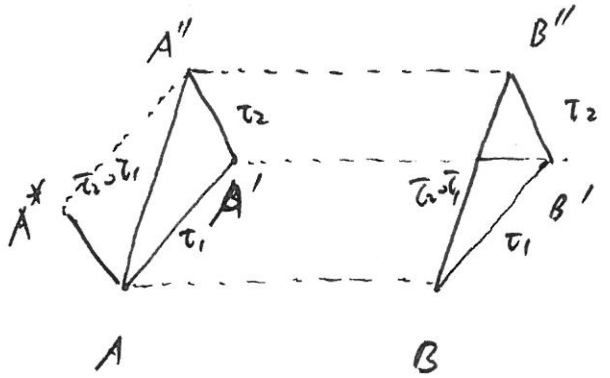
定理3：设 τ_1, τ_2 为空间的两个平移，则 $\tau_2\circ\tau_1$ 也是一个平移，而且

$$\tau_2\circ\tau_1=\tau_1\circ\tau_2.$$

证明：设 A, B 为空间中任给二点。记号：$\tau_1(A)$ 为 A'，$\tau_2(\tau_1(A))=\tau_2(A')$ 为 A''。

由所设：$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{A'A''}=\overrightarrow{B'B''}$

要证 $\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{BB''}$，（其中 B', B'' 按记号定义）



由图知 ▱$ABB'A'$，▱$A'B'B''A''$ 为平行四边形，

所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A''B''}$.

故 ▱$ABB''A''$ 亦为平行四边形，故 $\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{BB''}$.

下面证：$\tau_2\circ\tau_1=\tau_1\circ\tau_2$

令 $A^* = \tau_2(A)$，则有 $\overrightarrow{AA^*} = \overrightarrow{A'A''}$

故 □ $AA'A''A^*$ 为平行四边形。则有

$$\overrightarrow{A^*A''} = \overrightarrow{AA'}.$$

所以

$$\tau_1 \circ \tau_2(A) = \tau_1(A^*) = A'' = \tau_2 \circ \tau_1(A).$$

由于 A 为空间中任意一点，所以

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2.$$

#

我们考虑以下两个集合：

集合 $V = \{$空间中所有的位移向量 $\overrightarrow{AB}\}$

集合 $T = \{$空间上所有的平移 $\tau\}$

定理4：存在集合 T 到集合 V 的一个自然双射 Φ

$\Phi: T \longrightarrow V$，使之得

(i) Φ(恒等映射) $= \vec{0}$

$\quad\quad Id \quad\quad\quad\quad \overrightarrow{AA}$，$A$ 任意，即长度为0的线段。

设

(ii) $\Phi(\tau) = \overrightarrow{AB}$，则

$\Phi(\tau$ 的逆$) = \overrightarrow{BA}$

证明：设 τ 为空间上的一个平移.

任取空间上一点 A，我们令

$$\Psi(\tau) = \overrightarrow{A\tau(A)}$$

需要说明 $\Psi(\tau)$ 不依赖 A 的选取. 但这恰恰是平移的定义。

我们定义

$$\Phi: V \longrightarrow T$$

设 $\overrightarrow{AB}$ 是 V 中一元素，即某一位移向量.

由定理2，存在唯一的平移 τ 使得

$$\tau(A) = B.$$

令 $\Phi(\overrightarrow{AB}) = \tau$.

需要验证 $\Psi \circ \Phi = Id_V$. 即复合为恒等映射.

$\Phi \circ \Psi = Id_T$ 证略.

(留作课后习题).

#

我们在集合 V 上引入运算：

记号：$\overrightarrow{AB}$ 记为 $v, w, u, \cdots$

定义 $u + v \triangleq \Psi \circ (\Phi(u) \circ \Phi(v))$

由于定理3，这是良好定义的。这是因为平移的复合是平移。还是由于定理3，我们有上述运算的

$\boxed{\text{交换律}}$： $u+v=v+u$，对任意 $u,v\in V$.

由于映射的复合是有结合律，我们当然也有上述运算的

$\boxed{\text{结合律}}$： $(u+v)+w=u+(v+w)$ 对任意 $u,v,w\in V$.

我们有一特别的元素 $\vec{O}$，我们将之记为 0. 则有

$\boxed{\text{中心元}}$

$$u+0=0+u=u,\ \text{对任意}\ u\in V$$

以及 设 $u=\overrightarrow{AB}$，则令 $\overrightarrow{BA}$ 为 $-u\in V$.

$\boxed{\text{逆元存在}}$

$$u+(-u)=(-u)+u=0$$

通过研究相似三角形，我们还可以在集合 V 上引入一个新的运算，我们称之为数乘（或倍积）：

若 λ 为一正实数，$u=\overrightarrow{AB}$ 为任意一位移向量.

则令 $\lambda \cdot u$ 为方向与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向，但长度为 $\overrightarrow{AB}$ 长度的 λ 倍的位移向量。

若 λ 为 0，则令 $0 \cdot u \triangleq 0$。

若 λ 为一负实数，则令

$$\lambda \cdot u = -((-\lambda) \cdot u)$$

注意括号外的负号是指向量 $(-\lambda) \cdot u$ 的逆向量（或逆元）

定理 5. 上述位移向量的运算

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto u+v$$

和运算

$$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(\lambda, u) \longmapsto \lambda \cdot u$$

满足以下三条法则：

$\boxed{\text{数乘结合律}}$：

$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$. 其中 λ, μ 为任意两实数，u 为任意一位移向量。

$\boxed{\text{向量加法数乘分配律}}$

(I)

$$\lambda\cdot u+\mu\cdot u=(\lambda+\mu)\cdot u$$

其中: $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $u\in V$.

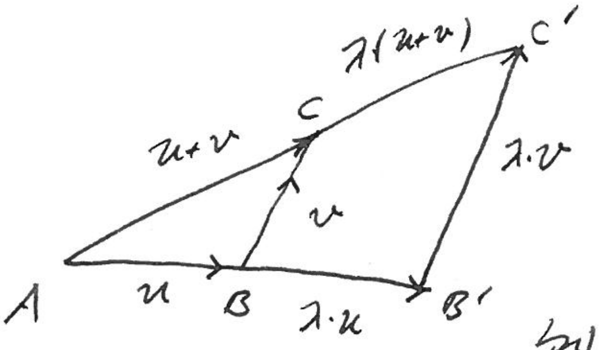
(II)

$$\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}$, $u,v\in V$.

证明: 数乘结合律与分配律(I)可以通过分情况讨论 λ,μ 的符号来得到. 而当 λ,μ 均为正实数时, 该命题是由定义直接导出。

值得注意的是分配律(II)。不妨设 $\lambda>0$. 则



设 $u=\overrightarrow{AB}$

$v=\overrightarrow{BC}$

$\lambda\cdot u=\overrightarrow{AB'}$

$\lambda\cdot v=\overrightarrow{B'C'}$.

则由于 $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\lambda=\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$

$\triangle ABC\overset{\text{相似}}{\sim}\triangle AB'C'$. 故有

$\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}=\lambda$. 即 $\overrightarrow{AC'}=\lambda\cdot\overrightarrow{AC}$

由于 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = u+v$.

即得 $$\underbrace{\lambda\cdot(u+v)}_{\overrightarrow{AC'}} = \underbrace{\lambda\cdot u + \lambda\cdot v}_{\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C'}}.$$

#

接下来，我们说明勾股定理将赋予集合 V 一个非常重要的结构：内积。我们对任意 $v\in V$，记

$|v|$ 为位移向量 $v=\overrightarrow{AB}$ 的长度 $|\overrightarrow{AB}|$.

即有函数

$$\begin{aligned} |\ |: V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto |v| \end{aligned}$$

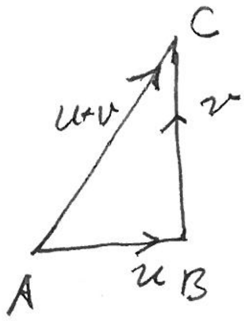
容易验证函数 $|\ |$ 的如下性质：

(i) $|v| \geq 0$，$|v|=0 \iff v=0$

(ii) $|\lambda\cdot v| = |\lambda|\cdot|v|$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $v\in V$

(iii) $|u+v| \leq |u|+|v|$ $\forall u, v\in V$
(三角不等式)

勾股定理告诉我们一个重要的恒等关系：



若 $u\perp v$（即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$），则有

$$|u+v|^2 = |u|^2+|v|^2$$

非常重要的是考察如下函数：

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto f(u,v) \triangleq \frac{1}{2}\{|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2\}$$

$\frac{1}{2}$ 的原因是: $f(u,u) = \frac{1}{2}\{|2u|^2 - 2|u|^2\} = |u|^2$。

或 $|u| = \sqrt{|f(u,u)|}$。

关于函数 f，我们有如下美妙的性质：

定理6. f 满足如下法则:

(i) $f(u,v) = f(v,u)$ $\qquad u, v \in V$.

(ii) $f(u, v+w) = f(u,v) + f(u,w)$, $\qquad u, v, w \in V$

(iii) $f(\lambda u, v) = f(u, \lambda v) = \lambda \cdot f(u,v)$

$\lambda \in \mathbb{R}, \quad u, v \in V$

证明: (i) 由交换律,

$$f(v,u) = \frac{1}{2}\{|v+u|^2 - |v|^2 - |u|^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\{|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2\}$$

$$= f(u,v)。$$

~~我们先记(~~[illegible]~~)~~

(ii) 我们先证 (ii) 的一个特例

(广义勾股定理)

$(*)$: $$|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$$

为什么说是特例呢？如果 (i) 成立，则有

$$|u+v|^2=f(u+v,u+v)=|u|^2+|v|^2+f(u,v)+f(v,u)$$

$$|u-v|^2=f(u-v,u-v)=|u|^2+|v|^2-f(u,v)-f(v,u)$$

上式两式相加之得 广义勾股定理。

更为神奇的是，我们可利用该特例证明一般情形。推导如下：

注意 (ii) 的等式等价于

$(**)$ $$|u+v+w|^2-|u+v|^2-|v+w|^2-|w+u|^2+|u|^2+|v|^2+|w|^2=0$$

现在 $(*)$ 中令 $u=a+b$, $v=c$ 即有

$$|a+b+c|^2+|a+b-c|^2-2|a+b|^2-2|c|^2=0$$

令 $u=a$, $v=b-c$, 即有

$$-|a+b-c|^2-|a-b+c|^2+2|a|^2+2|b-c|^2=0$$

令 $u=a+c$, $v=b$, 即有

$$|a-b+c|^2+|a+b+c|^2-2|a+c|^2-2|b|^2=0$$

令 $u=b$, $v=c$, 即有

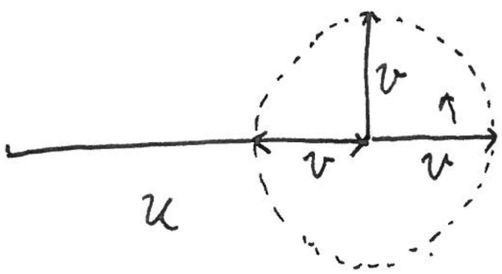
$$-2|b+c|^2-2|b-c|^2+4|b|^2+4|c|^2=0$$

将上述四个等式相加，得

$$2|a+b+c|^2 - 2|a+b|^2 - 2|b+c|^2 - 2|c+a|^2 + 2|a|^2 + 2|b|^2 + 2|c|^2 = 0$$

令 $a=u$，$b=v$，$c=w$，再除以 $\frac{1}{2}$，即得所求等式(*)。

对于等式(*)，我们有如下特例：



(a) u 与 v 同向，即夹角为 0。

则 $|u \pm v| = \big||u| \pm |v|\big|$

故

$$|u+v|^2+|u-v|^2 = (|u|+|v|)^2+(|u|-|v|)^2$$
$$= 2|u|^2+2|v|^2$$

(b) $u \perp v$，即夹角为 $\pi/2$。

则 $|u+v|^2+|u-v|^2 = |u|^2+|v|^2+|u|^2+|v|^2$

由勾股定理，$= 2|u|^2+2|v|^2$

(c) u 与 v 反向，即夹角为 π.

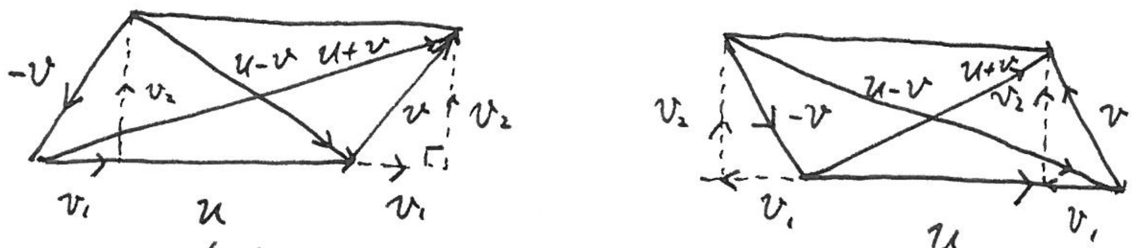
则 $|u \pm v| = \big||u| \mp |v|\big|$，

故

$$|u+v|^2+|u-v|^2 = (|u|-|v|)^2+(|u|+|v|)^2$$

$$= 2|u|^2+2|v|^2.$$

对于(k)的一般情形，我们可以化归为上述(a)-(c)的情形。



(一) (二)

把 v 在 u 所在直线上作垂直投影，得位移向量的分解

$$v = v_1 + v_2$$

其中 v_2 与 u 垂直，v_1 与 u 同向(图一) 或反向(图二)

由勾股定理及其上述推导(a)-(c)，立得：

$$|u+v|^2 = |u+v_1|^2+|v_2|^2$$

$$|u-v|^2 = |u-v_1|^2+|v_2|^2$$

故 $|u+v|^2+|u-v|^2 = |u+v_1|^2+|u-v_1|^2+2|v_2|^2$

$$= 2|u|^2 + 2|v_1|^2 + 2|v_2|^2$$

$$= 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

命题得证.

#

(iii) 我们按照 λ 为整数, 有理数, 实数分级来证明.

(a) λ 为整数.

(a1) λ 为非负整数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

k 为零和一时, 命题平凡成立. 对一般正整数 k, 我们用归纳法证明。设命题对正整数 $k-1$ 成立. 则

$$f(k \cdot u, v) = f(u + (k-1)u, v)$$

$$\overset{(ii)}{=} f(u, v) + f((k-1)\cdot u, v)$$

由归纳假设

$$= f(u, v) + f(u, (k-1)\cdot v)$$

$$\overset{(ii)}{=} f(u, v + (k-1)\cdot v)$$

$$= f(u, k \cdot v).$$

同理可证 $f(k \cdot u, v) = k \cdot f(u, v)$。

(a2) 对~~于~~负整数 $k \in \mathbb{Z}_{<0}$

首先 由向量加法与数乘的分配律知：对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 = \lambda \cdot (a + (-a)) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot (-a),$$

故 $(-\lambda) \cdot a = -(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot (-a)$

另一方面：对任意 $u, v \in V$

$$(*): \quad f(-u, -v) = \frac{1}{2}\{|-u-v|^2 - |-u|^2 - |-v|^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\{|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2\}$$

$$= f(u, v)$$

故 $f(k \cdot a, b) = f((-k) \cdot (-a), b)$

$$\overset{(a1)}{=} f(-a, (-k) \cdot b)$$

$$= f(-a, -(k \cdot b))$$

$$\overset{(*)}{=} f(a, k \cdot b)$$

再者：$f(k \cdot u, v) = f((-k) \cdot (-u), v)$

$$\overset{(ii)}{=} (-k) \cdot f(-u, v)$$

(iii). [illegible] $\overset{}{=\!=}$ $k \cdot f(u, v)$.

(b) λ 为有理数

将 λ 写为 $\lambda = \frac{m}{n}$, $(m, n) = 1$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$= m \cdot \left(\frac{1}{n}\right)。$$

由(a),

~~所以~~ 我们只需对 $\lambda = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 证明命题.

由(a), 我们又知

$$n f\left(\frac{1}{n} \cdot u, v\right) = f\left(n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot u\right), v\right)$$

$$\overset{\text{数乘结合律}}{=} f\left(\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot u, v\right)$$

$$= f(u, v)$$

故得 $f\left(\frac{1}{n} \cdot u, v\right) = \frac{1}{n} f(u, v)$。

同理, $n f\left(u, \frac{1}{n} \cdot v\right) = f(u, v)$

所以 $n \cdot f\left(\frac{1}{n} u, v\right) = n \cdot f\left(u, \frac{1}{n} \cdot v\right)$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n} u, v\right) = f\left(u, \frac{1}{n} v\right)$$

(b) 得证。

(c) λ为实数.

不妨设λ为无理数. 由阿基米德的夹逼原理:

对任意正整数n, 存在整数m, 使得

$$\frac{m}{n}<\lambda<\frac{m+1}{n}$$

我们计算

$$|f(\lambda\cdot u,v)-\lambda\cdot f(u,v)|$$

$$\overset{(ii)}{=} \Big|f\Big(\frac{m}{n}\cdot u,v\Big)-\frac{m}{n}f(u,v)$$

$$+f\Big(\Big(\lambda-\frac{m}{n}\Big)\cdot u,v\Big)-\Big(\lambda-\frac{m}{n}\Big)f(u,v)\Big|$$

$$\overset{(b)}{=} \Big|f\Big(\Big(\lambda-\frac{m}{n}\Big)\cdot u,v\Big)-\Big(\lambda-\frac{m}{n}\Big)\cdot f(u,v)\Big|$$

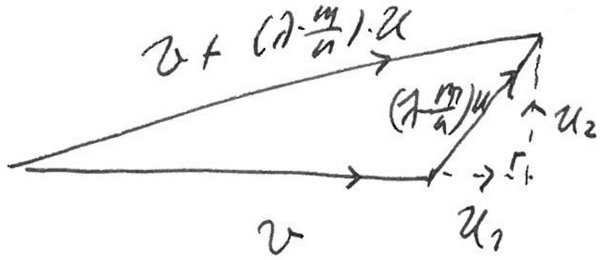
$$\leq \Big|f\Big(\Big(\lambda-\frac{m}{n}\Big)\cdot u,v\Big)\Big|+\Big|\lambda-\frac{m}{n}\Big||f(u,v)|$$

$$=\frac{1}{2}\Big|\Big|\Big(\lambda-\frac{m}{n}\Big)\cdot u+v\Big|^2-|v|^2-\Big|\Big(\lambda-\frac{m}{n}\Big)u\Big|^2\Big|+\Big(\lambda-\frac{m}{n}\Big)|f(u,v)|$$

$$\leq \frac{1}{2}\underbrace{\Big|\Big|\Big(\lambda-\frac{m}{n}\Big)u+v\Big|^2-|v|^2\Big|}_{=\,\mathrm{I}}+\underbrace{\frac{1}{n^2}|u|^2}_{=\,\mathrm{II}}+\frac{1}{n}\underbrace{|f(u,v)|}_{=\,\mathrm{III}}$$

注意到 II, III 是随着n增大而变得任意小的.

我们对 I 做一个简单的估计：



将 $(\lambda-\frac{m}{n})u$ 在 v 方向作垂直投影，得

$$(\lambda-\frac{m}{n})u = u_1 + u_2$$

由勾股定理，知

$$|v+(\lambda-\frac{m}{n})u|^2-|v|^2 = |v+u_1|^2-|v|^2+|u_2|^2$$

由于 $|u_1|^2+|u_2|^2=|(\lambda-\frac{m}{n})u|^2$，我们得

$$\left|\,|v+(\lambda-\frac{m}{n})u|^2-|v|^2\right| = \left|\,|(\lambda-\frac{m}{n})u|^2+2|u_1|\cdot|v|\right|$$

$$\leq \frac{1}{n^2}|u|^2+\frac{1}{n}(2|u|\cdot|v|).$$

因此 I 在随着 n 增大而可以变得任意小。

综上所述，$|f(\lambda u, v)-\lambda f(u,v)|$ 是任意小的一个数。

故 $f(\lambda u, v)=\lambda f(u,v)$

同理可证：$f(u, \lambda\cdot v) = \lambda\cdot f(u,v)$

故 $f(\lambda\cdot u, v) = f(u, \lambda\cdot v) = \lambda\cdot f(u,v)$。

命题(iii)得证。

#

模仿实数上的乘法，我们将定理6中的函数 f 写成一个乘法形式

$$V \times V \xrightarrow{\ \cdot\ } \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto u\cdot v \triangleq f(u,v)$$

则运算·满足

(i) $u\cdot v = v\cdot u$, $u,v\in V$

(ii) $u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w$, $u,v,w\in V$

(iii) $(\lambda\cdot u)\cdot v = \lambda\cdot(u\cdot v) = u\cdot(\lambda\cdot v)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $u,v\in V$.

注意(iii)中有两种不同意义的·。我们把上述·称为 V 上的内积。

综上所述，我们利用中学的平面立体几何知识，在位移向量的集合 V 上定义了加法，数乘和内积。

内积有非常清晰的几何意义。

命题7. 设 $u, v \in V$. 则有

(i) $u \cdot u = |u|^2$;

(ii) $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$;

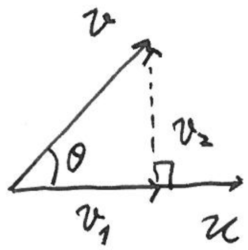
(iii) 设 u, v 夹角为 θ. 则
(余弦定理)
$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta。$$

证明: (i). 显然.

(ii). $u \perp v \xRightarrow{\text{勾股定理}} u \cdot v = 0$

另一方向由(iii)推得.

(iii). 将 v 沿着 u 做垂直投影, 得向量分解



$$v = v_1 + v_2, \text{ 其中}$$

$$v_1 \parallel u, \quad v_2 \perp u$$

$$\cos\theta = \frac{|v_1|}{|v|}, \text{故 } v_1 = |v| \cdot \cos\theta \cdot \frac{u}{|u|}$$

故 $u \cdot v = u \cdot (v_1 + v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2$

$$\overset{(ii)}{=} u \cdot v_1 = u \cdot \left(\left(\frac{|v|}{|u|} \cdot \cos\theta\right) \cdot u\right)$$

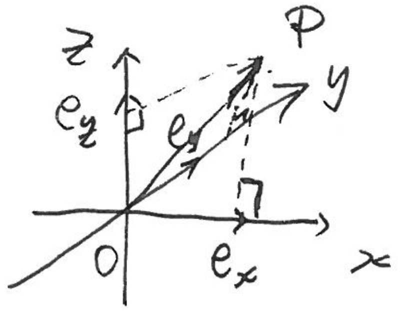
$$\overset{(i)}{=} \left(\frac{|v|}{|u|}\cdot\cos\theta\right)\cdot|u|^2 = |u|\cdot|v|\cdot\cos\theta.$$

#

总结来说，内积是向量空间几何化而成的代数结构。它可以有效地计算向量的长度和向量间的夹角。

(2) 三维欧氏空间

本节目的是利用直角坐标系将向量空间及其上的运算代数化。这是毕氏学派"万物皆数"理念的一个具体实现。



在空间上取定一点 O，称之为坐标原点。再取定三个两两垂直的，长度为单位的向量 e_x, e_y, e_z.

我们称 $\{O; e_x, e_y, e_z\}$ 为空间中一个以 O 为原点的直角坐标系.

命题8. 在空间中取定好一个直角坐标系，则得到集合间的双射:

$$\begin{aligned} c:\ V &\longrightarrow \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$}\ & \qquad\quad \rotatebox{90}{$\in$} \\ v &\longmapsto c(v) = (x(v), y(v), z(v)) \end{aligned}$$

其中 $x(v), y(v), z(v)\in\mathbb{R}$ 满足

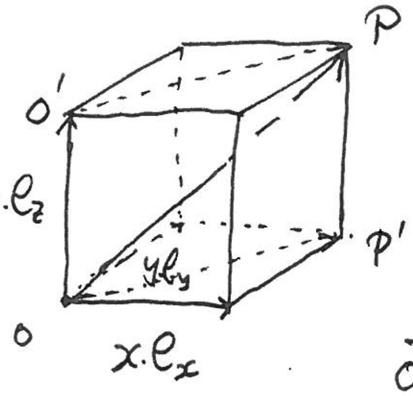
$$v = x(v)\cdot e_x + y(v)\cdot e_y + z(v)\cdot e_z.$$

我们称 $x(v)$ ($y(v)$ 或 $z(v)$) 为向量 v 的 e_x-坐标

(e_y-坐标或 e_z-坐

证明：我们将任一向量 v 平移到以 O 为出发点的向量.

设 $v = \overrightarrow{OP}$. 将 $\overrightarrow{OP}$ 往 e_x (e_y 或 e_z) 分别做垂直投影, 即得数 $\overset{x}{\overset{\parallel}{x(v)}}$ ($\overset{y}{\overset{\parallel}{y(v)}}$ 或 $\overset{z}{\overset{\parallel}{z(v)}}$).



由图示,

$$\overrightarrow{OP'} = x \cdot e_x + y \cdot e_y = \overrightarrow{O'P}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{OO'} = (x \cdot e_x + y \cdot e_y) + z \cdot e_z = x \cdot e_x + y \cdot e_y + z \cdot e_z$$

反之, 任意给定有序数组 (x, y, z), 我们得到空间中一向量 $x \cdot e_x + y \cdot e_y + z \cdot e_z$.

从而 C 建立了任给向量空间 V 和三元有序数组 $\mathbb{R}^3$ 之间的一对一的映射。

#

注记：注意到 C 的定义不依赖于 O 的选取, 但依赖于向量组

上e_x, e_y, e_z}的选取。我们将在坐标变换一节中详细讨论这种依赖性。

大家都熟悉坐标系与坐标的概念。但这个概念的好处（不仅仅是用代数记号或代数方法去理解几何）是需要大家慢慢地，不断地体会的。

首先我们将向量空间上的加法与数乘搬到$\mathbb{R}^3$上来：

定义9：对$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，(x',y',z') 及$\lambda\in\mathbb{R}$，我们定义

$$(x,y,z)+(x',y',z') \triangleq (x+x', y+y', z+z')$$

$$\lambda\cdot(x,y,z) \triangleq (\lambda\cdot x, \lambda\cdot y, \lambda\cdot z)$$

显然，由于这是由C诱导的结构搬运(transportation of structure)，上述+，·满足加法的结合律，交换律，加法零元（此为(0,0,0)）及逆元的存在，加法与数乘之间满足分配律，及数乘满足结合律。但更为重要的是下述习题是极其简单的（几何考量完全~~消失~~失去必要性！）

习题四：直接利用定义9中的"+"，"·"的定义验证上述运算法则。

其次，我们将内积也搬到$\mathbb{R}^3$上来：

定义10：对(x,y,z)，$(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$，我们定义

$$(x, y, z)\cdot(x', y', z') \triangleq x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'$$

命题 11: 我们有对任意 $u, v \in V$,

$$c(u)\cdot c(v) = u\cdot v$$

证明: 不妨设 $c(u) = (x, y, z)$, $c(v) = (x', y', z')$.

则 $u = x\cdot e_x + y\cdot e_y + z\cdot e_z$, $v = x'\cdot e_x + y'\cdot e_y + z'\cdot e_z$.

由42页内积的运算法则及命题7得:

$$
\begin{aligned}
u\cdot v &= (x\cdot e_x + y\cdot e_y + z\cdot e_z)\cdot(x'\cdot e_x + y'\cdot e_y + z'\cdot e_z) \\
&\overset{\text{见42(ii)}}{=} (x\cdot e_x)\cdot(x'\cdot e_x) + (x\cdot e_x)\cdot(y'\cdot e_y) + (x\cdot e_x)\cdot(z'\cdot e_z) \\
&\quad + (y\cdot e_y)\cdot(x'\cdot e_x) + (y\cdot e_y)\cdot(y'\cdot e_y) + (y\cdot e_y)\cdot(z'\cdot e_z) \\
&\quad + (z\cdot e_z)\cdot(x'\cdot e_x) + (z\cdot e_z)\cdot(y'\cdot e_y) + (z\cdot e_z)\cdot(z'\cdot e_z) \\
&\overset{\text{见42(iii)}}{=} (x\cdot x')(e_x\cdot e_x) + (x\cdot y')(e_x\cdot e_y) + (x\cdot z')(e_x\cdot e_z) \\
&\quad + (y\cdot x')(e_y\cdot e_x) + (y\cdot y')(e_y\cdot e_y) + (y\cdot z')(e_y\cdot e_z) \\
&\quad + (z\cdot x')(e_z\cdot e_x) + (z\cdot y')(e_z\cdot e_y) + (z\cdot z')(e_z\cdot e_z) \\
&\overset{\text{命题7(iii)}}{=} (x\cdot x')|e_x|^2 + 0 + 0 \\
&\quad + 0 + (y\cdot y')|e_y|^2 + 0 \\
&\quad + 0 + 0 + z\cdot z'\cdot|e_z|^2
\end{aligned}
$$

$$= x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$$

#

如同上一个习题一样，请验证直接

习题：在定义10中引进的$\mathbb{R}^3$上的运算满足~~如~~以下法则：

(i)（正定性） $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)\cdot(x,y,z) \geq 0.$$

$$= 0 \quad \text{当且仅当} \quad (x,y,z) = (0,0,0).$$

(ii)（对称性） $\forall (x,y,z),\ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = (x',y',z')\cdot(x,y,z)$$

(iii)（双线性性） $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(x,y,z),\ (x',y',z'),\ (x'',y'',z'') \in \mathbb{R}^3.$$

$$(\lambda\cdot(x,y,z) + \mu\cdot(x',y',z'))\cdot(x'',y'',z'')$$

$$= \lambda\cdot((x,y,z)\cdot(x'',y'',z'')) + \mu\cdot((x',y',z')\cdot(x'',y'',z''))$$

定义11：三维欧氏空间是指向量空间V，其上拥有加法、数乘及内积运算。我们再将上述$\mathbb{R}^3$上~~的~~有加法、数乘及内积运算的空间称为三维欧氏空间。记之为E^3.

那么我们自然会问~~是~~一维、二维欧氏空间为何？是否存在高维欧

氏空间？

(3) n维欧氏空间简介

从 $n=3$ 受启发，我们不妨考虑对任意自然数 n

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{R}\}$$

作为集合：$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$，$n\geq 1$.

注：$\mathbb{R}^0 \overset{\Delta}{=} \{0\}$ 单元素的集合.

形式上，我们可以定义：

(i) 加法

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

(ii) 数乘

$$\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

(iii) 内积

$$(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

命题 1.2 (i) 集合 $\mathbb{R}^n$ 上加法运算满足阿贝尔群的四条法则，即结合律，交换律，中心元存在，逆元存在．（中心元为 $0=(0,\dots,0)$）

(ii) 集合 $\mathbb{R}^n$ 上加法与数乘满足以下四条法则：

零化条件 (ii) 0. $\quad 0\cdot v = \vec{0}, \quad v\in\mathbb{R}^n$.

数乘的结合律 (ii) 2. $\quad (\lambda\cdot\mu)\cdot v = \lambda\cdot(\mu\cdot v), \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ v\in\mathbb{R}^n$

加法与数乘的分配律

(ii) 3. $\quad \lambda\cdot(v+u) = \lambda\cdot v + \lambda\cdot u, \quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\ v,u\in\mathbb{R}^n$

(ii) 4. $\quad (\lambda+\mu)\cdot v = \lambda\cdot v + \mu\cdot v. \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ v\in\mathbb{R}^n$

我们把 (i) 和 (ii) 放在一起称 $\mathbb{R}^n$ 关于上述加法与数乘构成一个 n 维实向量空间或实线性空间.

(iii) 集合上 $\mathbb{R}^n$ 上内积满足如下三条法则:

正定性 (iii) 1. $\quad v\cdot v \geq 0, \quad v\cdot v = 0 \Leftrightarrow v=0, \quad \forall v\in\mathbb{R}^n$

对称性 (iii) 2. $\quad v\cdot u = u\cdot v, \quad \forall u,v\in\mathbb{R}^n$

双线性性 (iii) 3.

$$(\lambda\cdot u+\mu\cdot v)\cdot w = \lambda\cdot(u\cdot w) + \mu\cdot(v\cdot w)$$

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ u,v,w\in\mathbb{R}^n$$

我们把 (i), (ii), (iii) 放在一起称为一个 n 维欧氏空间, 记为 E^n.

注: 为了避免内积与数乘在记号上的混乱, 我们将内积记为

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \langle u,v\rangle \triangleq u\cdot v.$$

故 E^n = "$\mathbb{R}^n$" + "+" + "$\cdot$" + "$\langle\cdot,\cdot\rangle$".

我们将 $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$ 称为 E^n 中的一个向量(或一个点)

x_i 为第 i 个坐标.

将 $\left\{\begin{array}{l} e_1=(1,0,\cdots,0), \\ e_2=(0,1,\cdots,0), \\ \vdots \\ e_n=(0,\cdots,1) \end{array}\right\}$ 称为 E^n 的标准正交基(或坐标系)

将 $\overset{x}{\overset{\parallel}{(x_1,\cdots,x_n)}} = x_1\cdot(1,\cdots,0)+x_2(0,1,\cdots,0)+\cdots+x_n(0,\cdots,1)$

$$= x_1\cdot e_1 + x_2\cdot e_2+\cdots+x_n\cdot e_n$$

称为向量x关于标准正交基(或坐标系)的分解。
(或点x) (投

注意到 $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ (Kronecker记号)

则有 $x_1=\langle x,e_1\rangle,\ \cdots,\ x_n=\langle x,e_n\rangle$

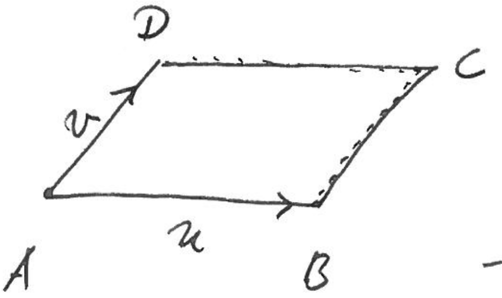
即 $x=\langle x,e_1\rangle\cdot e_1+\cdots+\langle x,e_n\rangle e_n$

$$=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$$

(4) 外积.

空间E^3中有一线段. 则它有长度, 并且通过指定起点与终点, 可以给线段一个方向, 我们称之为有向线段. 但将向量视为有向线段. 那么对空间E^3中一平行四边形, 我们是否可以

对其进行一个基于有向线段的操作呢？



记 $u=\overrightarrow{AB}$

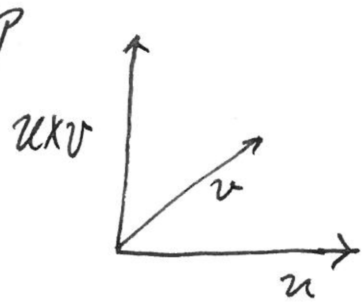
$v=\overrightarrow{AD}$

我们定义一个向量 $u\times v$，其

~~$|u\times v|$~~ 长度 为 平行四边形 ABCD 的面积

方向为垂直于 ABCD 平面，利用右手螺旋法则得到的方向。

即



由定义，我们得到一个基本性质：

$$u\times v=-(v\times u)=(-v)\times u=v\times(-u).$$

定义 13. 上述定义的向量 $u\times v$ 称为 u,v 的外积。注意 v,u 的外积与 u,v 的外积反向。

定理 14：运算 $V\times V\longrightarrow V$, $(u,v)\longmapsto u\times v$

满足以下法则：

(i) $v\times u=-(u\times v)$ $\quad\forall\, u,v\in V$

(ii) $(u\times v)\times w \neq u\times(v\times w)$，事实上

(*) $(u\times v)\times w - u\times(v\times w) = (u\cdot v)\cdot w - (v\cdot w)\cdot u$

$\forall u, v, w \in V$

(iii) $u\times(v_1+v_2) = u\times v_1 + u\times v_2 \quad \forall u, v_1, v_2 \in V$

(iv) $(\lambda\cdot u)\times v = u\times(\lambda\cdot v) = \lambda(u\times v)$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$
$\forall u, v\in V$

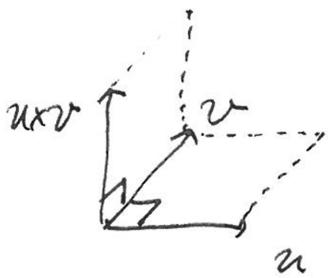
证明. (i) 已经证明。有(i)性质的运算称为反对称性。

作为一个推论是：$\forall u\in V$

$$u\times u = 0$$

所以容易说明 (ii) 中 $(u\times v)\times w \neq u\times(v\times w)$

例如取 $w=v$. 则
$u\perp v$
$u, v, w\neq 0$



$$(u\times v)\times v = \lambda\cdot u, \quad \lambda<0$$

但 $u\times(v\times u) = u\times 0 = 0$

(iii), (iv) 容易由定义直接推出（留作习题）。

如何证明 (ii) 中的 (*) 式？

我们试图利用直角坐标系来解决这个问题.

取 $\{O; e_x, e_y, e_z\}$ 为过原点O的直角坐标系.

我们有 $u = a e_x + b e_y + c e_z$

$$v = a' e_x + b' e_y + c' e_z$$

利用(ii),(iii),(iv), 我们有

$$u \times v = (a e_x + b e_y + c e_z) \times (a' e_x + b' e_y + c' e_z)$$

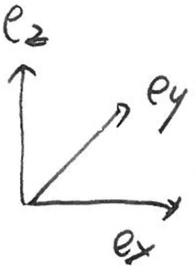
$$= aa' \overbrace{e_x \times e_x}^{=0} + ab' e_x \times e_y + ac' e_x \times e_z$$

$$+ ba' e_y \times e_x + bb' \overbrace{e_y \times e_y}^{=0} + bc' e_y \times e_z$$

$$+ ca' e_z \times e_x + cb' e_z \times e_y + cc' \overbrace{e_z \times e_z}^{=0}$$

$$= (ab' - ba') e_x \times e_y + (ac' - ca') e_x \times e_z$$

$$+ (bc' - cb') e_y \times e_z$$



$$\overset{\text{定义}}{=} (ab' - ba') e_z - (ac' - ca') e_y + (bc' - cb') e_x$$

$$= (bc' - cb') e_x - (ac' - ca') e_y + (ab' - ba') e_z$$

所以我们得一公式 外积的坐标描述.

我们引进一些记号以便于我们使用上述公式：

首先：我们引入 $\mathbb{R}^3$ 上 $\times$（叉乘或外积）

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}^3$$

$$((a,b,c),(a',b',c')) \longmapsto (a,b,c)\times(a',b',c')$$

$$\parallel\!\Delta$$

$$(bc'-cb',\ -(ac'-ca'),\ ab'-ba')$$

其次：我们对 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，规定

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad-bc$$

（我们称之为矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式）

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \triangleq \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} e_x - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} e_y + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot e_z$$

由上述记号规定，我们得到 V 上 $\times$ 的简便记号。

现我们令 $w = a''e_x + b''e_y + c''e_z$.

计算 $(u\times v)\times w = ?$

$(u\times v)\times w$

$$= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\cdot c'' - b''\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right) e_x$$

$$- \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\cdot c'' - a''\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right) e_y$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\cdot b'' + a''\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\right) e_z$$

$$= (-ac'c'' + a'cc'' - ab'b'' + a'bb'')\, e_x$$

$$+ (-bc'c'' + b'cc'' + aa''b' - a'a''b)\, e_y$$

$$+ (bb''c' - b'b''c + aa''c' - a'a''c)\, e_z$$

交换 u, v, w 的顺序，得 $u\times(v\times w) = -(v\times w)\times u$

$$= (a'c''c - a''c'c + a'b''b - a''b'b)\, e_x$$

$$+ (b'c''c - b''c'c - a'ab'' + a''ab')\, e_y$$

$$+ (-b'bc'' + b''bc' - a'ac'' + a''ac')\, e_z$$

故得 $(u \times v) \times w - u \times (v \times w)$

$$= (a''c'c - ac'c'' + a''b'b - ab'b'')\, e_x$$

$$+ (b''c'c - bc'c'' + a'ab'' - a'a''b)\, e_y$$

$$+ (b'bc'' - b'b''c + a'ac'' - a'a''c)\, e_z$$

另一方面:

$(u \cdot v) \cdot w - (v \cdot w) \cdot u$

$$= (aa' + bb' + cc')(a''e_x + b''e_y + c''e_z)$$

$$- (a'a'' + b'b'' + c'c'')(ae_x + be_y + ce_z)$$

$$= (a''bb' - ab'b'' + a''cc' - ac'c'')\, e_x$$

$$+ (aa'b'' - a'a''b + b''cc' - bc'c'')\, e_y$$

$$+ (aa'c'' - a'a''c + bb'c'' - b'b''c)\, e_z$$

两式相比较，得到(ii).

#

注记15：(二重外积展开式). 相较于(i)(*)更本(但思路简明)的计算，下列公式更为有用：

(**) $$u\times(v\times w) = (u\cdot w)\cdot v - (u\cdot v)\cdot w$$

其证明留作习题。根据(**)我们立即有

由 $(u\times v)\times w - u\times(v\times w)$

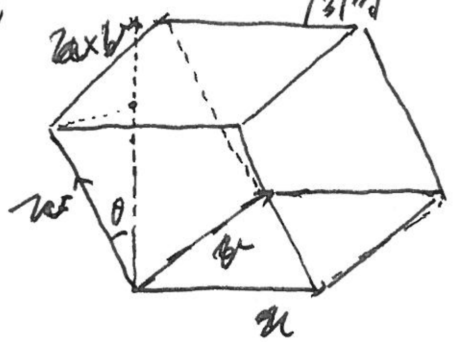
$$= -w\times(u\times v) - u\times(v\times w)$$

$$= -(w\cdot v)u + \underbrace{(w\cdot u)\cdot v - (u\cdot w)\cdot v}_{=0} + (u\cdot v)w$$

$$= (u\cdot v)\cdot w - (v\cdot w)\cdot u$$

体积

我们可以利用内积衡量角度与线段的长度．所以平面几何中的度量实解决了。那么立体几何中的体积呢？原则上也由内积决定．但是在三维欧氏空间中，我们可以同时利用外积与内积，给出平行六面体的体积表达：



定义由有序向量三元组 (u,v,w) 构成的平行六面体的有向体积是

$$V(u,v,w) \triangleq (u\times v)\cdot w$$

容易验证

$$\begin{aligned}|V(u,v,w)| &= |u\times v|\cdot|w|\cdot\cos\theta\\ &= \text{底面面积}\cdot\text{高}\\ &= \text{体积}.\end{aligned}$$

注记16：在立体几何中，我们并不强调体积的"方向"。但在电磁学中的高斯定律，有向体积是必不可少的概念。

我们回顾考察一下 $V(u,v,w)$ 的坐标表达：

$$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3) \longmapsto \big((x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)\big)\cdot(x_3,y_3,z_3) = ?$$

利用上面外积（叉乘）的坐标表达，不难验证到

$$? = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1.$$

所以我们一旦知道向量 u, v, w 的坐标，我们即可取上式的绝对值从而得到体积公式。但这个表达式具有更一般的意义。其意义比外积更为普遍.

定义17：我们将上述映射

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \longmapsto x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + x_3 y_1 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1$$

称为三阶行列式. 记号为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + x_3 y_1 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1$$

$$= x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

而对于 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$$

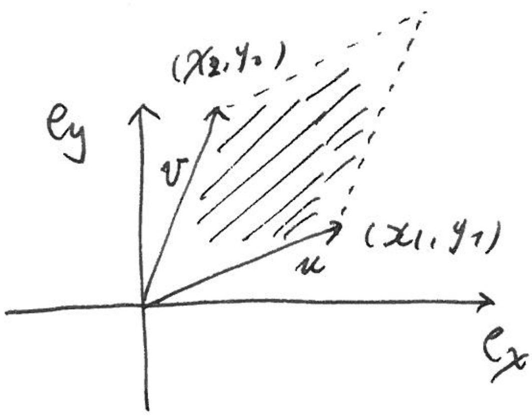
记号 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$ 称为二阶行列式.

其几何意义恰为二维欧氏空间中向量

$$u = x_1 e_x + y_1 e_y \quad 与$$

$$v = x_2 e_x + y_2 e_y$$

组成的平行四边形的有向面积。(习题：验证 $|x_1y_2 - x_2y_1|$ 为 u 与 v 围成的平行四边形面积。)



注记 18：我们将在线性代数中引入 n 阶行列式，n 为任意自然数。n 阶行列式的几何意义是 n 维欧氏空间中平行 $2n$ 面体的有向体积。

注记 19. 令 E^n 为 n 维欧氏空间. 问是否存在运算

$$E^n \times E^n \xrightarrow{\times} E^n \quad 满足$$

(1) (双线性) 即 $\forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\begin{matrix} u_1, u_2 \\ v_1, v_2 \end{matrix} \in V$,

有 $(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) \times (\mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2) =$

$$\lambda_1\mu_1 (u_1 \times v_1) + \lambda_1\mu_2 (u_1 \times v_2) + \lambda_2\mu_1 (u_2 \times v_1) + \lambda_2\mu_2 (u_2 \times v_2)$$

(ii) (垂直性). $(u\times v)\cdot u = (u\times v)\cdot v = 0 \quad \forall u,v\in E^n$

(iii) (平行四边形面积公式)

$$|u\times v|^2 = |u|^2\cdot|v|^2 - \langle u, v\rangle^2, \quad \forall u,v\in E^n.$$

则 $n=3, 7$.

这事实的证明与 $\mathbb{R}$ 上的有限维可除代数分类定理 (A. Hurwitz. 1898) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 有关。注意到，这代数分类定理的证明是拓扑学的。类比于高斯关于代数学基本定理(即复系数多项式必有 n 个复根)的分析(拓扑)证明。这恰恰说明了代数，几何，分析是相通的：任一分支无法自给于其它分支而发展。

(5) 应用实例

我们通过一些具体的实例来检验我们学到的这些向量运算与其坐标对应物如何使得中学学的平面/立体几何知识有更为清晰的逻辑结构。

(5.1) 二维欧氏空间与希尔伯特平面几何公理化体系.

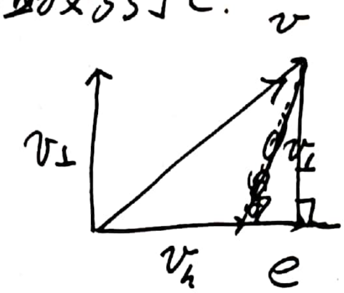
我们解释二维欧氏空间(即 E^2)如何满足希氏的平面几何公理化体系。从而为希氏的平面几何提供一个代数化的几何模型。

(iii) 验证如下:

由(iv), 我们可以不妨设 u 是单位向量. 记 $u=e$

令 v 为某一向量. 我们将 v 投影于 e.

得到向量分解



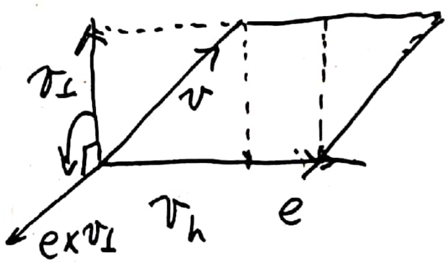
$$v = v_\parallel + v_\perp.$$ 其中

$v_\parallel \parallel e$, $v_\perp \perp e$.

由定义知

$$e\times v = e\times v_\perp$$

且其向量为将 $v_\perp$ (绕e) 旋转$90°$.



现有向量 v_1, v_2, 我们分别得

$$v_1 = v_{1,\parallel} + v_{1,\perp} \qquad v_2 = v_{2,\parallel} + v_{2,\perp}$$

$$v_1+v_2 = (v_{1,\parallel}+v_{2,\parallel}) + (v_{1,\perp}+v_{2,\perp})$$

显然, $(v_1+v_2)_\perp = v_{1,\perp} + v_{2,\perp}$

故我们只需证明: $e\times(v_{1,\perp}+v_{2,\perp}) = e\times v_{1,\perp} + e\times v_{2,\perp}$

但是旋转$90°$与向量加法显然是交换的(也可用坐标写出),

所以上式是成立的.

定义20：(1) 点集合.

E^3中的任一元素称为一个点P. 的点集合记为 $E^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

(2) 直线集合

E^3中的一条直线l定义为满足下列一次方程组的解集

$$\begin{cases} A_1\cdot x + B_1\cdot y + C_1\cdot z + D_1 = 0 \\ A_2\cdot x + B_2\cdot y + C_1\cdot z + D_2 = 0 \end{cases}$$

其中 $\{A_i, B_i, C_i, D_i,\ i=1,2\}\subset\mathbb{R}$，且满足条件

$(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)\neq 0$，即

$\left\{ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \right\}$ 三者至少有一个数不为零。

(3) 平面集合

E^3中的一个平面α定为满足下列一次方程的解集

$$A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$$

其中 $\{A,B,C,D\}\subset\mathbb{R}$，且满足条件

$(A,B,C)\neq 0$，即

$\{A,B,C\}$ 中至少有一数不为零。

关联性的验证：

命题21：设点 $P=(x_1,y_1,z_1)$，$Q=(x_2,y_2,z_2)$，$P\neq Q$.

则存在唯一一条直线 l，使得 $P, Q \in l$ （我们称点 P 与线 l 相联，若 $P \in l$）。

在证明上述命题之前，我们对直线做一个讨论。我们注意到直线的定义线性方程组并非是唯一的：

若线 l 由
$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}$$
给出。

那么，$\forall \lambda \in \mathbb{R}$，
$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ (A_2 + \lambda \cdot A_1) x + (B_2 + \lambda \cdot B_1) \cdot y + (C_2 + \lambda \cdot C_1) \cdot z + (D_2 + \lambda \cdot D_1) = 0 \end{cases}$$

定义相同的直线 l。更为显然的是，$\forall \lambda \neq 0$，
$$\begin{cases} (\lambda A_1) x + (\lambda \cdot B_1) \cdot y + (\lambda \cdot C_1) z + \lambda \cdot D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}$$

亦定义 l。所以我们希望知道直线 l 是否具有"最佳"的定义方程组呢？为此，我们介绍一点高斯消元法与直线的参数方程。

高斯消元法：由条件假定 $(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) \neq 0$.

我们不妨设 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

那么必有 $A_1\neq 0$ 或 $A_2\neq 0$。不妨设 $A_1\neq 0$.

则方程组可变为

$$\begin{cases} x+\left(\dfrac{B_1}{A_1}\right)\cdot y+\left(\dfrac{C_1}{A_1}\right)z+\left(\dfrac{D_1}{A_1}\right)=0 & (1)\\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0 & (2)\end{cases}$$

我们将 $(-A_2)\times(1)$ 加到 (2)，得

$$\begin{cases} x+\left(\dfrac{B_1}{A_1}\right)\cdot y+\left(\dfrac{C_1}{A_1}\right)\cdot z+\left(\dfrac{D_1}{A_1}\right)=0 & (1)\\ 0+\left(B_2-\dfrac{B_1A_2}{A_1}\right)\cdot y+\left(C_2-\dfrac{C_1A_2}{A_1}\right)z+\left(D_2-\dfrac{D_1A_2}{A_1}\right)=0 & (2)\end{cases}$$

注意到 $B_2-\dfrac{B_1A_2}{A_1}=\dfrac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}{A_1}\neq 0$。我们还可以进一步化简，得

$$\begin{cases} x+\left(\dfrac{B_1}{A_1}\right)\cdot y+\left(\dfrac{C_1}{A_1}\right)\cdot z+\left(\dfrac{D_1}{A_1}\right)=0 & (1)\\ 0+y+\left(\dfrac{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\right)\cdot z+\left(\dfrac{\begin{vmatrix}A_1 & D_1\\ A_2 & D_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\right)=0 & (2)\end{cases}$$

我们再将 $\left(-\dfrac{B_1}{A_1}\right)\times(2)$ 加到 (1)，得

$$(\mathrm{I}).\quad\begin{cases} x+0+\left(\dfrac{C_1\cdot\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}-B_1\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{A_1\cdot\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\right)z+\left(\dfrac{D_1\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}-B_1\begin{vmatrix}A_1 & D_1\\ A_2 & D_2\end{vmatrix}}{A_1\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\right)=0\\ 0+y+\left(\dfrac{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\right)\cdot z+\left(\dfrac{\begin{vmatrix}A_1 & D_1\\ A_2 & D_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\right)=0\end{cases}$$

我们如下的观察：设直线 l_i，$i=1,2$ 由

$$\begin{cases} x + a_i z + b_i = 0 \\ y + c_i z + d_i = 0 \end{cases}$$

给出。

则 $l_1 = l_2$ 当且仅当 $a_1 = a_2$，$b_1 = b_2$，$c_1 = c_2$，$d_1 = d_2$.

证明：分别令 $z=0$ 和 1 即可得结论。细节留作习题。 #

上述观察表明我们不可以进一步化简方程组的参数了！如同分数的约分一样，我们把直线 l（在假定 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时）化成了一个既约形式。该既约形式中的 z 之前系数和常数项唯一地确定了直线。我们不难推理（两自由变量的时候类似处理）。

当 $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$，方程组的既约形式形如

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} x + a y + b = 0 \\ z + c y + d = 0 \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

当 $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$，方程组的既约形式为

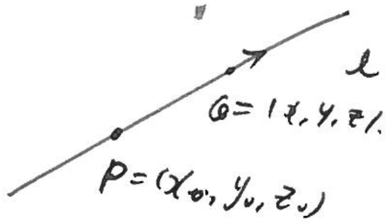
$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} y + a x + b = 0 \\ z + c x + d = 0 \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

另一方面，我们从几何上知道，直线由其上一点和直线方向唯一确定。具体什么意思呢？

设直线 l 经过点 $P=(x_0,y_0,z_0)$，方向为 (a,b,c)

则任一点 $Q\in l$，若其坐标为 (x,y,z)，则满足

$$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\ //\ (a,b,c)$$



即存在实数 t，使得有向量等式：

$$\begin{aligned}(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0) &= t\cdot(a,b,c)\\ &= (t\cdot a,\ t\cdot b,\ t\cdot c)\end{aligned}$$

写成分量形式：

$$\begin{cases} x-x_0 = t\cdot a \\ y-y_0 = t\cdot b \\ z-z_0 = t\cdot c \end{cases},\qquad t\in\mathbb{R}$$

反之，若点 (x,y,z) 满足上述关系式，则必落在直线 l 上。上述方程组称为直线 l 的参数方程。这里 t 为参数或参量，t 取所有可能的实数值。那么直线线性方程组的即约形式和参数方程是怎样联系的呢？

即约形式 $\Longrightarrow$ 参数方程

若l的形式为

$$\begin{cases} x + az + b = 0 \\ y + cz + d = 0. \end{cases}$$ 则其等价于如下参数方程，其参数为t：

$$\begin{cases} x + b = t(-a) \\ y + d = t\cdot(-c) \\ z + 0 = t\cdot(1) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

同理，若l的形式为

$$\begin{cases} x + ay + b = 0 \\ z + cy + d = 0 \end{cases}$$，则有参数方程

$$\begin{cases} x + b = t(-a) \\ y = t \\ z + d = t\cdot(-c) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

若l的形式为

$$\begin{cases} y + ax + b = 0 \\ z + cx + d = 0 \end{cases}$$，则有参数方程

$$\begin{cases} x = t \\ y + b = t\cdot(-a) \\ z + d = t\cdot(-c) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

参数方程 $\Rightarrow$ 即约形式

依赖于 $a \neq 0$，或 $b \neq 0$，或 $c \neq 0$，我们可将参数方程化成某一即约形式。不妨设 $a \neq 0$. 则

令 $t' = a \cdot t + x_0$ 为新的参量.

有 $t = \frac{1}{a}(t' - x_0)$ 为反变换. 代入~~某全之式~~参数方程得

$$\begin{cases} x = t' \\ y - y_0 = \frac{1}{a}(t' - x_0) \cdot b \\ z - z_0 = \frac{1}{a}(t' - x_0) \cdot c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + (-\frac{b}{a})x + (\frac{b}{a}x_0 - y_0) = 0 \\ z + (-\frac{a}{c})x + (\frac{c}{a}x_0 - z_0) = 0 \end{cases}$$

上式为即约形式. 对于 $b \neq 0$ 或 $c \neq 0$ 情形, 其对应即约形式留给习题.

习题22: 3 之讨论 $a \neq 0 \Leftrightarrow$ III, $b \neq 0 \Leftrightarrow$ II, $c \neq 0 \Leftrightarrow$ I.

有了关于直线即约形式和参数方程的讨论, 我们很容易证明命题21:

证明: (存在性)

令 $(a, b, c) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

定义直线 l 如下:

$$\begin{cases} x - x_1 = t \cdot a \\ y - y_1 = t \cdot b, \quad t \in \mathbb{R} \\ y - z_1 = t \cdot c \end{cases}$$

令 $t=0, 1$，则我们得到点 P, Q. 即 $P, Q \in \ell$.

(唯一性) 假设另有一直线 ℓ' 也经过点 P 与 Q. 我们需证

$\ell' = \ell$.

首先注意在 ℓ 的定义中，由于 $P \neq Q$，故必有

$a \neq 0$ 或 $b \neq 0$ 或 $c \neq 0$.

根据上述情形中的一种，我们将 ℓ 的参数方程写成即约形式.

另一方面，我们也总是可以将 ℓ' 的定义线性方程组约化成某一即约形式。我们说明无论如何，我们都可将 ℓ 与 ℓ' 约化成同一种类型（即 I, II, III 中的一种）。

- 如果 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$，那么先将 ℓ' 约化成某一类型，后将 ℓ 化为同 ℓ' 同型的即约形式.

- 如果 $a \neq 0, b \neq 0, C = 0$. 那么 ℓ 可化为 II ~~或~~ III 型.

设 ℓ' 的定义方程组为

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0. \end{cases}$$

因为 $P, Q \in \ell'$，所以

$$\begin{cases} A_1\cdot a + B_1\cdot b + C_1\cdot c = 0 \\ A_2\cdot a + B_2\cdot b + C_2\cdot c = 0 \end{cases}$$

$c=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} A_1\cdot a + B_1 b = 0 \\ A_2\cdot a + B_2 b = 0 \end{cases}$$

$a\neq 0$, ~~结论~~ $\Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1\cdot B_2 - A_2\cdot B_1$

$$= -\frac{b}{a}B_1\cdot B_2 + \frac{b}{a}B_2\cdot B_1$$

$$= 0$$

由假定直线定义方程组的条件知. 必有

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad 或 \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

故 l' 可约化成 II 或 III 型

- 如果 $a\neq 0$, $b=c=0$, 那么 l 只可约化为 III 型.

但上述讨论告诉我们 $A_1=A_2=0$. 所以

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad 故\ l' 可约化为 III 型.$$

由字母的对称性, 其余情形可化归为上述某一情形. 现在我们不妨设 l 与 l' 均约化成即约形式 I 型. 即

l与l'由

$$\begin{cases} x \qquad + a_i z + b_i = 0 \\ \qquad y + c_i z + d_i = 0 \end{cases}, \quad i=1,2$$

由习题22知，$c \neq 0$. 故

$$a + a_i \cdot c = 0 \Rightarrow a_i = -\frac{a}{c}, \quad i=1,2$$

$$b + c_i \cdot c = 0 \Rightarrow c_i = -\frac{b}{c}, \quad i=1,2$$

故 $a_1 = a_2$, $\quad c_1 = c_2$

又 $\quad b_i = -(x + a_i \cdot z) = -(x_1 + a_i z_1)$

$$d_i = -(y + c_i z) = -(y_1 + c_i \cdot z_1)$$

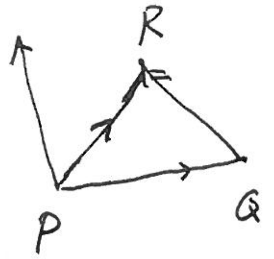
故 $b_1 = b_2$, $\quad d_1 = d_2$。

所以方程 l与l'完全相同，故 $l = l'$，证毕。

#

命题23. 给定点 $P=(x_1, y_1, z_1)$, $Q=(x_2, y_2, z_2)$, $R=(x_3, y_3, z_3)$. 若P, Q, R不在同一直线上，则存在唯一一个平面包含P, Q, R.

证明：(存在性).



因为 P, Q, R 不在一直线上，

$\overrightarrow{PQ} \nparallel \overrightarrow{PR}$.

故得非零向量 $\vec{PQ}\times\vec{PR}$，其坐标表达为

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

即 $$\left(\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \right)$$

我们要找的平面方程形如

$$\begin{vmatrix} y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\cdot x - \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & z_3-z_1 \end{vmatrix}\cdot y + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\cdot z$$

$$+ D = 0$$

将 P, Q, R 中任一点坐标代入上式，得 D 的表达式.

即 $$D = -\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\cdot x_i + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & z_3-z_1 \end{vmatrix}\cdot y_i -$$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\cdot z_i, \qquad i\in\{1,2,3\}.$$

比如我们用 $i=1$ 代入，需验证 Q, R 亦满足上述方程（习题）.

（唯一性）假设另有平面 α'，$P, Q, R\in\alpha'$，需证

$$\alpha=\alpha'.$$

首先，容易得到关于平面的标准形式与参数方程：

按照 $A\neq 0$，或 $B\neq 0$，或 $C\neq 0$ 分类。

若 $A\neq 0$，则

$Ax+By+Cz+D=0$ 的标准形式为

$$x+\left(\frac{B}{A}\right)y+\left(\frac{C}{A}\right)z+\left(\frac{D}{A}\right)=0$$ （平面标准化后者，是由其法向与过一点唯一确定的）

其对应参数方程为

$$\begin{cases} x+\frac{D}{A}=t_1\left(-\frac{B}{A}\right)+t_2\left(-\frac{C}{A}\right) \\ y+0=t_1 1+t_2 0 \\ z+0=t_1 0+t_2 1 \end{cases},\quad t_1,t_2\in\mathbb{R} \;\text{即}\; (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$$

即平面的参数方程有两个自由参量。

（习题）讨论 $B\neq 0$ 和 $C\neq 0$ 情形下的标准形式与相对应的参数方程。

其次，基于命题21证明中的讨论，我们不妨假定平面 α 与 α'

都由标准形式给出：

$$x+a_i y+b_i z+c_i=0 \qquad i=1,2.$$

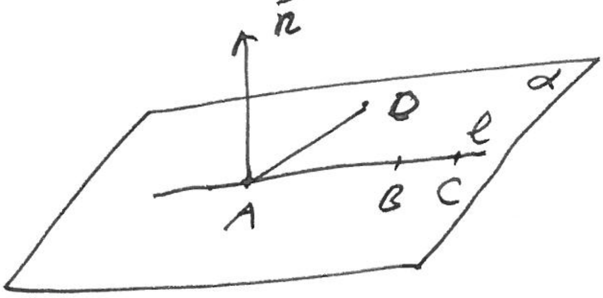
基于命题21中的处理，可先证得

$(1,a_1,b_1)=(1,a_2,b_2)$ 即 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$

然后得 $c_1=c_2$。故 $\alpha=\alpha'$。

#

命题24：若直线l上两点P与Q均落在平面α上，则直线l包含于平面α.



证明：

设 $A=(x_1,y_1,z_1)$

$B=(x_2,y_2,z_2)$

则得向量 $v=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ $(=\overrightarrow{AB})$

则直线l上的任一点 C (x,y,z) 可用向量方程表达

$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=t(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),\ t\in\mathbb{R}$$

（即用分量表达而得直线l的参数方程）.

我们也可以写上述方程为

$$C-A = t(B-A)$$

$$(\Leftrightarrow\ C = t(B-A)+A\ )$$

平面α上的任一点$D=(x,y,z)$亦可用向量方程表达，

$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\cdot\vec{n}=0,$$ 其中

$\vec{n}$为平面α的法向. 也可写成

$$(D-A)\cdot\vec{n}=0 \qquad (*)$$

由于 $A, B \in \alpha$，故

$$(B-A)\cdot\vec{n}=0 \qquad (**)$$

那么我们将 $C=t\cdot(B-A)+A,\ t\in\mathbb{R}$ 代入 $(*)$ 式左边。

得 $$\big((t\cdot(B-A)+A)-A\big)\cdot\vec{n}$$

$$=\big(t\cdot(B-A)\big)\cdot\vec{n}=t\big((B-A)\cdot\vec{n}\big)\overset{(**)}{=\!=}0.$$

故 $l\subset\alpha$.

#

命题25. 若两平面α, β有一个共点P，则它们至少还有一个共点Q.

证明：设 α 和 β 方程分别由一阶方程：

$$A_i\cdot x+B_i\cdot y+C_i\cdot z+D_i=0,\qquad i=1,2$$

给出。联立方程组得一阶线性方程组：

$$(*)\ \begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0\\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0.\end{cases}$$

由条件知，上述方程有公共解 $P=(x_1,y_1,z_1)$.

$(*)$式定义某一直线 l.

由于直线l必含有另一点Q，且 $l=\alpha\cap\beta$，故 $Q\in\alpha\cap\beta$.

我们用反证法证明断言。即假定

$$(A_1, B_1, C_1)\times(A_2, B_2, C_2) = 0 .$$

通过 (A_2, B_2, C_2) 作为 (A_1, B_1, C_1) 的垂直向量解释，我们知。

上式等价于，$\exists$ λ 非零，使得

$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda\cdot(A_1, B_1, C_1)$$

显然 $\lambda\neq 0$.（否则 $(A_2, B_2, C_2)=0$，则无法定义平面的方程）

代入 $(*)$ 式得.

$$(*)'\quad\begin{cases} A_1\cdot x + B_1\cdot y + C_1\cdot y + D_1 = 0 \\ A_1\cdot x + B_1 y + C_1\cdot z + \dfrac{D_2}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

将 (x_1, y_1, z_1) 代入 $(*)'$，并将上下两式相减，得

$$D_1 = \frac{D_2}{\lambda}\quad 故得\ \alpha=\beta.\quad 矛盾。$$

命题得证。

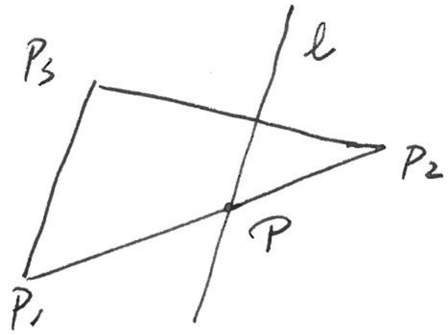
注：关联公理~~平行~~公理（见 I_3, I_8）的证明可由直线与平面的参数方程得到.（细节留作习题）#

顺序公理的验证：

$II_1 - II_3$ 的验证可由直线的参数方程得到。其本质是 $\mathbb{R}$（实数域）上的序结构.

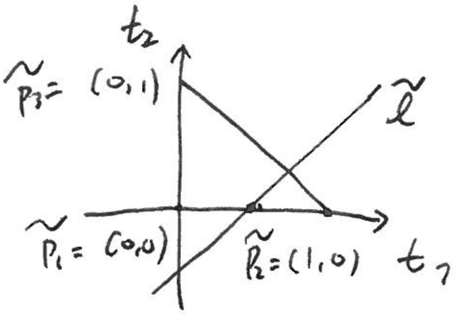
证明留作习题. 我们验证 II_4

命题26. 设平面α上有三点P_1, P_2, P_3不共线. 若该平面上直线l经过线段P_1P_2上的一点, 则l必定通过线段P_1P_3或线段P_2P_3上的一点。



证明: 我们先考察 E^2 上的如下

问题: 在坐标为 t_1, t_2 的平面上,



直线 l 由方程

$$\begin{cases} t_1 = t & 0 < t < 1, \quad (\mathrm{I}) \\ \text{或} \\ t_2 = k(t_1 - t), & 0 < t < 1. \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

给出.

我们证明l必与$\tilde{P}_2\tilde{P}_3$或$\tilde{P}_1\tilde{P}_3$交于一点.

不妨设 l 与$\tilde{P}_1\tilde{P}_3$不交于一点, 则方程组

$$\begin{cases} t_2 = k(t_1 - t) \ (\mathrm{II}) \\ t_1 = 0 \end{cases}, \quad \text{或} \quad \begin{cases} t_1 = t \\ t_1 = 0 \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

在 $0 \le t_2 \le 1$ 上无解.

在情形(I) 方程组无解. 但直线l交于$\tilde{P}_2\tilde{P}_3$于点$(t, 1-t)$.

在情形(II) 我们得到 $-kt < 0$ 或 $-kt > 1$

即 $k > 0$ 或 $k < \frac{-1}{t}$

计算 $\begin{cases} t_2 = k(t_1 - t) \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$，得解为

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1+kt}{1+k} \\ t_2 = \dfrac{k(1-t)}{1+k} \end{cases}$$

若 $k>0$，则 $0 < 1+kt < 1+k$，($\because 0<t<1$)

故 $0<t_1<1$

若 $k< -\frac{1}{t}$，则仍然有

$$0 > 1+kt > 1+k$$

但 $0<t<1$，故 $1+k<0$. 故仍然有

$$0 < t_1 = \frac{1+kt}{1+k} < 1$$

所有在情形(I)与(II)，直线 l 与线段 $\widetilde{P_1P_3}$ 或 $\widetilde{P_2P_3}$ 必交于一点。

现在我们设 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$，$i=1,2,3$. 落在平面 α 上，

其上直线 l 经过 P_1P_2 内某一点 P。

我们的想法通过构造从 E^2 到 E^3 的某一仿射映射，将上述一般情形化归为一开始已经证明的特殊情形.（前此较平面的参数方程）

$$\phi:\ E^2 \longrightarrow E^3$$

$$(t_1,t_2) \longmapsto (x(t_1,t_2),\ y(t_1,t_2),\ z(t_1,t_2))$$

$$x_1(t_1,t_2) = a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + b_1$$

$$y\,\cancel{x_2}(t_1,t_2) = a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + b_2$$

$$z\,\cancel{x_3}(t_1,t_2) = a_{13}t_1 + a_{23}t_2 + b_3$$

在线性代数中，我们将之写为 "矩阵乘法"

$$(x_1, \overset{y}{\cancel{x_2}}, \overset{z}{\cancel{x_3}}) = (t_1,t_2)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} + (b_1,b_2,b_3)$$

$$= (t_1,t_2)\cdot A + b$$

要求 ϕ 满足条件：

$$\begin{cases} \phi(0,0) = (x_1,y_1,z_1);\ \phi(1,0) = (x_2,y_2,z_2). \\ \phi(0,1) = (x_3,y_3,z_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b_1,b_2,b_3) = (x_1,y_1,z_1);\quad \cancel{a_{11} = x_2 - x_1} \\ (a_{11}\ a_{21}\ a_{31}) = (x_2,y_2,z_2) - (x_1,y_1,z_1) = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1) \\ (a_{12}\ a_{22}\ a_{32}) = (x_3,y_3,z_3) - (x_1,y_1,z_1) = (x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1) \end{cases}$$

所以 ϕ 是唯一确定的。注意到 ϕ 满足以下的性质：

(i) ϕ 的像 $im(\phi) = \alpha$

(ii) $\phi:\ E^2 \to \alpha$ 是双射　　　　$1\le i<j\le 3$

(iv) ϕ 把 E^2 中 $\triangle \tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{P}_3$ 映射到 α 中 $\triangle P_1P_2P_3$，线段 $\tilde{P}_i\tilde{P}_j$ 到 P_iP_j

(iii) ϕ 把 E^2 中的直线映射成平面 α 上的直线。

证 我们先假定 (i) − (iv) 的成立。那么，我们即可知道 l 在 E^2 中的原像为过线段 $\tilde{P}_1\tilde{P}_2$ 上某一点的直线，记之为 $\tilde{l}$。我们关于 E^2 上 $\triangle\tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{P}_3$ 及直线 $\tilde{l}$ 的讨论知 $\tilde{l}$ 必经过 $\tilde{P}_1\tilde{P}_3$ 或 $\tilde{P}_2\tilde{P}_3$ 上某一点。所以，我们推得 l 必经过 P_1P_3 或 P_2P_3 上某一点。

(i)：记 $u = (\cancel{x_1}-b_1, \cancel{x_2}-b_2, \cancel{x_3}-b_3)$

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$$

$$v_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

则 我们有

$$u = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

因为假定 P_1, P_2, P_3 不在一直线上，故

$$v_1 \times v_2 \neq 0$$

所以得到一平面 $\tilde{\alpha}$ 方程（此向量形式可请同学们自行展成坐标形式）

$$u \cdot (v_1 \times v_2) = 0$$

因为对任意 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$，我们有

$$(t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2) \cdot (v_1 \times v_2) = t_1 \cdot (v_1 \cdot (v_1 \times v_2)) + t_2 \cdot (v_2 \cdot (v_1 \times v_2))$$
$$= 0 + 0 = 0$$

所以 $\mathrm{im}(\phi)$ 含于平面 $\tilde{\alpha}$。由我们关于平面的参数方程的讨论，知，$u = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2$，$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 即为平面

$$u \cdot (v_1 \times v_2) = 0$$

的一个参数方程，故

$$\mathrm{im}(\phi) = \tilde{\alpha}.$$

再由 ϕ 的构造，$\{P_1, P_2, P_3\} \subset \mathrm{im}(\phi) = \tilde{\alpha}$，由命题2.3知，

$$\tilde{\alpha} = \alpha.$$

(ii) 我们还需验证 ϕ 是单射。

设 (t_1, t_2) 与 $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) \in E^2$ 满足

$$\phi(t_1, t_2) = \phi(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$$

要证：$(t_1, t_2) = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$，即 $\tilde{t}_i = t_i$，$i = 1, 2$

现 $\phi(t_1, t_2) = \phi(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) \Longleftrightarrow$

$$t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 = \tilde{t}_1 \cdot v_1 + \tilde{t}_2 \cdot v_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad (t_1 - \tilde{t}_1) \cdot v_1 + (t_2 - \tilde{t}_2) \cdot v_2 = 0$$

由于 $v_1 \times v_2 \neq 0$，~~故~~ v_1 与 v_2 不同向（线性代数中称之为线性无关）

故 $t_1 = \tilde{t}_1$，$t_2 = \tilde{t}_2$。得证。

~~(iii)~~ (iii). E^2 中任意一直线可表为参数方程

$$\begin{cases} t_1 = a_1 \cdot t + c_1 \\ t_2 = a_2 \cdot t + c_2 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$a_i, c_i \in \mathbb{R}$, 且 $(a_1, a_2) \neq (0,0)$.

将上式代入 $u = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2$ 即得

$$u = (a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2) \cdot t + (c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2)$$

$$t \in \mathbb{R}$$

此为 E^3 中某一直线的参数方程.

(iv) 留作习题.

#

合同公理的验证:

设有线段 AB 与 $A'B'$, 我们规定

$$AB \equiv A'B',$$

若 $|AB| = |A'B'|$. 写成坐标, 即

$$A = (x_0, y_0, z_0), \quad B = (x_1, y_1, z_1)$$
$$A' = (x_0', y_0', z_0'), \quad B' = (x_1', y_1', z_1')$$

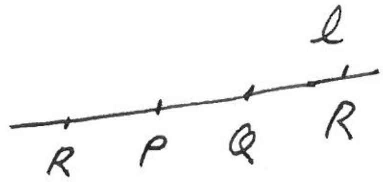
则 $AB \equiv A'B' \iff |(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)| = |(x_1' - x_0', y_1' - y_0', z_1' - z_0')|$

$$\iff (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = (x_1' - x_0')^2 + (y_1' - y_0')^2 + (z_1' - z_0')^2.$$

我们先讨论一下有关"侧"的概念：

(1) 设有直线 l 及 l 上一点 P. 则点 P 将 l 分成两侧，其精确定义可由如下陈述给出：任取 l 上一点 $Q \neq P$. 则对于直线 l 不同于 P 的点 R 必满足且只满足以下两种可能之一：

(a) $\overrightarrow{PR} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$, $\lambda > 0$,



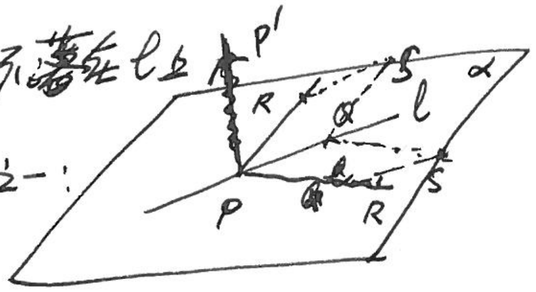
(b) $\overrightarrow{PR} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$, $\lambda < 0$。

我们将分别满足(a)或(b)的点集称为 l 关于 P 的一侧。P 与其中一侧构成一射线。

~~不难验证以上关于P点两侧的定义不依赖于点Q的选取。~~

(2) 设有平面 α 及 α 上一直线 l. 则直线 l 将 α 分为两侧：

任取 $P \neq Q \in l$. 则对于平面 α 上不落在 l 上的点 R 必满足且只满足以下两种可能之一：



(a) 有向平行四边形 ▱PQSR 有向面积取正号；

(b) 有向平行四边形 ▱PQSR 有向面积取负号。

如果平面 α 由方程 $z=0$ 定义，则我们可利用二阶行列式来判断有向面积的符号：

设 $P=(x_0,y_0,0)$, $Q=(x_1,y_1,0)$, $R=(x_2,y_2,0)$

则 $\square PQSR$ 的有向面积为

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0, & y_1-y_0 \\ x_2-x_0, & y_2-y_0 \end{vmatrix}.$$

若在一般情形, 我们可借助于平面 α 外一个点 P', 通过计算向量 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PP'}$ 构成的平行六面体的有向体积来判断。

此时我们需计算一个三阶行列式:

设 $P=(x_0,y_0,z_0)$, $Q=(x_1,y_1,z_1)$, $R=(x_2,y_2,z_2)$

$P'=(x_3,y_3,z_3)$

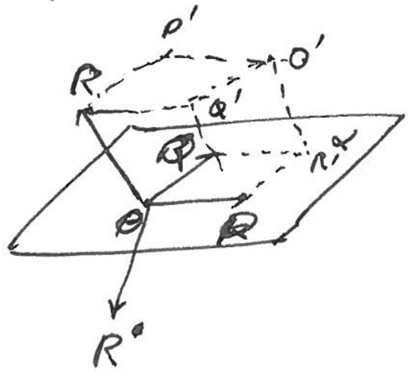
则我们计算 $(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\cdot\overrightarrow{PP'}$

$$=\begin{vmatrix} x_1-x_0, & y_1-y_0, & z_1-z_0 \\ x_2-x_0, & y_2-y_0, & z_2-z_0 \\ x_3-x_0, & y_3-y_0, & z_3-z_0 \end{vmatrix}.$$

及α外任一点, 如 $\overrightarrow{PP'}\perp\alpha$, 我们通过判断 $\{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PP'}\}$ 是构成右手螺旋系, 还是左手螺旋系 来定点在平面 α 上的两侧.

(3) 设有平面 α(在 E^3 中) 则平面 α 把 E^3 中不落在 α 上的点分为两侧:

任意取定 α 上不共线三点 O,P,Q. 则平面外一点 R 必满足且只满足以下两者之一:



(a) 有向平行六面体的有向体积

$$V(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR})$$
$$=(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OR}$$

取正号;

(b) 有向平行六面体的有向体积

$V(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR})$ 取负号.

现在我们考察直线 l_0 由 $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 定义。我们有自然的映射

$$\phi:\ E^1 \longrightarrow E^3$$
$$t \longmapsto (t,0,0)$$

ϕ 可以理解为 l_0 的参数化. 总之 ϕ 诱导了双射

$$\phi:\ E^1 \xrightarrow{\sim} l_0 .$$

且 ϕ 保持长度(在 E^1 上我们有自然的内积), 所以我们可以等同 E^1 与 l_0。关于线段迁移公理的验证, 我们只需证明如下

命题27: 设 ℓ 上线段 AB, 及 ℓ_0 关于点 $O=(0,0,0)$ 的一侧. 必存在唯一直线 ℓ_0 上一点 P, 使得

$$AB \equiv OP.$$

证明: ℓ_0 关于 O 的两侧可由 $\phi^{-1}(\mathbb{R})$ 的正负号来判定。

若取的一侧为正号, 则定义

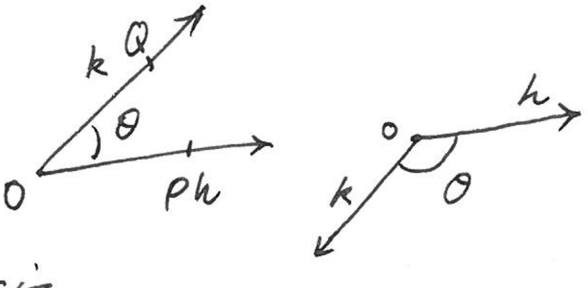
$$P=\phi(|AB|), 否$$

反之, 则定义 $P=\phi(-|AB|)$. 根据合同的定义, 及 ϕ 的保距性质, P 是唯一的.

#

习题: 利用合同的定义及命题27 验证 III 1-3. (线段迁移公理).

现在我们处理角的迁移公理。首先角是指一个点 O 及 O 点为端点不在同一直线上的两个射线组成的二元组 $\angle(h,k)$。注意这是无序二元组. 即 $\angle(h,k)=\angle(k,h)$。



首先我们任意的一个这样二元组 $\angle(h,k)$, 我们有一个唯一的实数 $\in(0,1)$ 对应于它:

任取射线 h 上一点 P, 及 k 上一点 Q. 则数

$$\frac{\vec{OP}\cdot\vec{OQ}}{|\vec{OP}|\cdot|\vec{OQ}|}$$ 不依赖于 P 与 Q 的选取. (习题) 亦不依赖于 P 与 Q 的顺序.

(这就是我们熟悉角的余弦)

现设有角 $\angle(h,k)$ 与角 $\angle(h',k')$，若有上述两角的余弦相等，我们规定

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k'),$$

即两角合同。

考察

$$\begin{array}{ccc} \psi: E^2 & \xrightarrow{\sim} & \alpha_0 = \{z=0\} \subset E^3 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (t_1,t_2) & \longmapsto & (t_1,t_2,0) \end{array}$$

ψ 保持内积：$\forall (t_1,t_2),\ (s_1,s_2) \in E^2$

则有 $\langle (t_1,t_2),(s_1,s_2)\rangle = \langle \psi(t_1,t_2), \psi(s_1,s_2)\rangle$.

命题28. 设有 α 平面一角 $\angle(h,k)$，以及平面 α_0 上关于直线 $l_0 = \{y=z=0\}$ 的一侧，则存在唯一一条过 O 的射线 k^0 落在关于 l_0 给定的一侧，使得 k^0 同以 O 为顶点的另一给定射线 $h^0 = \{(x,0,0) \mid x>0\}$ 构成的角

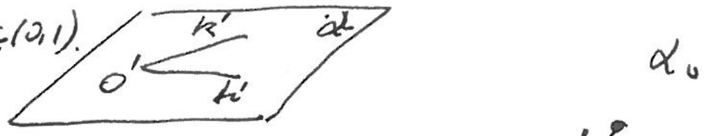
$$\angle(h^0,k^0) \equiv \angle(h,k).$$

证明：根据关于平面上给定直线的侧的讨论，我们知道 α_0 关于 l_0 的两侧可以由

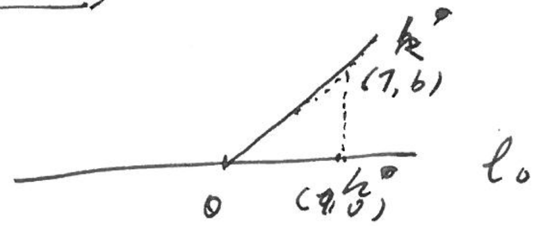
$$\{(x,y,0) \mid y>0\} \text{ 和 } \{(x,y,0) \mid y<0\}$$

给出。不妨设 $y>0$，关于 $y<0$ 一侧的讨论完全类似。

设 $\angle(h',k')$ 的余弦为 $a\in(0,1)$.



则 容易计算射线



$$k' = \{(t,\ b\cdot t,\ 0)\ |\ t>0\}.$$

$$b=\sqrt{-1+\frac{1}{a^2}} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} > 0.$$

与h'构成的角 $\angle(h',k')$ 其余弦正好为 a. 故

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')。$$

另一方面. 若射线 $\tilde{k}$ 其顶点为O, 且落在k同侧, 且

$$\angle(h,\tilde{k}) \equiv \angle(h',k'),$$

任取点 $P=(x,y,0)\in\tilde{k}$. 则

$$\frac{(1,0,0)\cdot(x,y,0)}{|(1,0,0)|\cdot|(x,y,0)|} = a$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1-a^2}\,x = \pm a y,\\ x>0\end{cases}$$

因为线段法定 $\tilde{k}$与k同侧. 故 $y>0$. 故

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1-a^2}\,x = a y,\\ x>0.\end{cases}$$

故点$P\in k$. 由于P任意, $\tilde{k}\subset k$. 故$\tilde{k}=k$. 唯一性得证.

#

习题: 利用角合同的定义与命题2.8验证III4. 注意角内部的定义和在组中的要求.

命题29. 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有下列合同式:

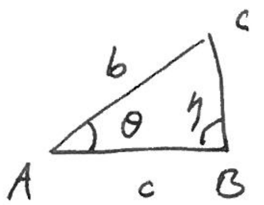
$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'.$$

则也必有合同式

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

证明: 该问题等价于说给定 $\triangle ABC$ 的两边之长及夹角的余弦.

计算另外(任意一角)的余弦.



首先我们确定 $\overline{BC}$ 的长度.

设 $|\overrightarrow{AB}| = c$, $|\overrightarrow{AC}| = b$, 以及

$$\cancel{\cos\theta =} \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \cos\theta \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \cos\theta \cdot b \cdot c$$

则 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= c^2 + b^2 - 2 b \cdot c \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

故 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{b^2 - 2bc \cdot \cos\theta + c^2}$

其次确定 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= c^2 - b \cdot c \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

综合起来, 得角的余弦为 $\dfrac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \dfrac{c^2 - b \cdot c \cdot \cos\theta}{c \cdot \sqrt{b^2 - 2bc\cos\theta + c^2}}$

$$= \frac{c - b\cos\theta}{\sqrt{b^2 - 2bc\cos\theta + c^2}}$$

这公式推得命题.

#

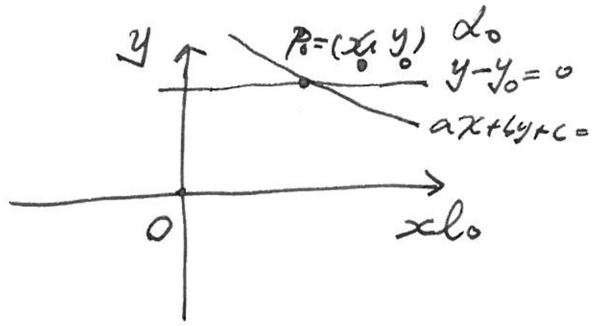
<u>平行公理的验证:</u>

命题30. 设 l 为任一直线, P 为直线 l 外任一点. 则在 l 与 P 确定的平面上, 存在唯一一条直线 l' 过 A 且与 l 不相交.

注: 由命题23,24知 l 与 P 确定一个平面 α, 使得 $P \in \alpha$, $l \subset \alpha$.

证明: 首先我们证明 $\alpha = \alpha_0$ 情形.

即先考虑 E^2, 以及 $l_0 = \{(x,0) \mid x \in R\} \subseteq E^2$.



设 $P_0 = (x_0, y_0)$ 为其坐标.

则过点 P_0 所有的直线方程由

$$ax + by + c = 0 \quad \text{其中}$$

a, b, c 满足 $ax_0 + by_0 + c = 0$, $(y_0 \neq 0)$
且 a, b, c 不同时为0.

考虑联立方程组

$$\begin{cases} y = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

得知: 当且仅当 $a = 0$ 方程组无解. 即 直线 $\{y - y_0 = 0\}$ 为唯一与 l_0 不相交且过 P_0 的直线.

对于一般情形，我们仿照命题26的证法，构造线性映射

$$\phi:\ E^2 \xrightarrow{\sim} \alpha \subset E^3$$

使得 $\begin{cases} \phi(P_0) = P \\ \phi(l_0) = l \end{cases}$

由在E^2上的关于 l_0 及 P_0 的讨论，我们可推得存在唯一过P的直线落在α上，且与l不相交。细节留作习题。

#

连续公理的验证：

由上述的讨论知(特别是命题27)，关于线段的讨论可化归为 $l_0 \cong E^1$ 上的讨论。此时V1(即阿基米德公理)成立是由于实数的阿基米德性质：对任意给定的 $a>0, b>0$，$\exists$正整数 n，使得

(*) $$na > b.$$

注意到存在不满足阿基米德性质的全序数系。比如希尔伯特在其著作《几何基础》第二章12节中给出了这样的一个例子。

为了说明V2(直线完备公理)，我们需要下面的代数

引理3. 设$\bar{R}$为一阿贝尔群，满足以下条件：

(i). $\bar{R}$上具有全序结构$>$，且与加法相容(**)，并满足阿基米德性质(*)，

(**). $a>b \Rightarrow a+c > b+c,\ \forall\, a,b,c \in \bar{R}$.

(ii). $\mathbb{R}$ 作为阿氏半序群含于 $\overline{\mathbb{R}}$，且 $\overline{\mathbb{R}}$ 的序结构诱导 $\mathbb{R}$ 上原来的序结构。可记为 $(\mathbb{R},+,<) \lneq (\overline{\mathbb{R}},+,<)$。

则 $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$.

证明：反证．设存在 $a\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\mathbb{R}$。显然 $a\neq 0$.

若 $a<0$，则 a 的加法逆，即

$$-a>0.\quad (\text{如果 } -a\leq 0,\ \text{则 } \overset{0}{\overset{\|}{a+(-a)}} \leq 0+0=0 \text{ 矛盾})$$

（由(**)）

故我们不妨假定 $a>0$．我们考察

$\mathbb{N}(\subset\mathbb{R}\subset\overline{\mathbb{R}})$ 和子集 $\{n\cdot a\triangleq \underbrace{a+\cdots+a}_{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$

的大小关系．由阿基米德性质(*)得知，对任意给定 $n\geq 1$，存在唯一的 $m\in\mathbb{N}$

使得

$$m\leq n\cdot a < m+1.$$

由于 $m=\underbrace{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}_{n}$，故由(**)得

$$\frac{m}{n}\leq a<\frac{m+1}{n}.$$

由实数的构造得知 $a\in\mathbb{R}$．矛盾．

#

命题 33．直线完备公理成立．

证明：我们知道 $l_0\cong E^1=\mathbb{R}$．我们将 l_0 的扩充 $\overline{l_0}$ 诱导出

集合 R 的扩充，记为 $\bar{R}$。由于 $\bar{R}$ 仍然满足顺序公理，与合同公理，那么 $\bar{R}$ 是有加法运算，且是群；是有叠序结构。这些结构是 R 上相应结构的扩充。由于 $\bar{R}$ 仍然满足阿基米德~~性质~~公理，所以 $\bar{R}$ 上的扩充加法与序结构满足阿基米德性质。由引理引伸知，这样的扩充~~是~~只能是本身。得证。

#

命题27补：给定l_0上线段OP，以及直线l上A点及A点的一侧。必存在唯一点B在l上，使得

$$OP \equiv AB。$$

证明：设 $A=(x_0,y_0,z_0)$，以及 l 的参数方程为

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot(a,b,c),\quad t\in\mathbb{R}$$

由该参数方程，我们可得出，l 关于点A的两侧分别由 $t>0$ 和 $t<0$ 给出。

现设 $P=(d,0,0)\in l_0$，$d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，则我们要求的点B满足方程

$$|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)|=|d|$$

即 $$|t|\cdot|(a,b,c)|=|d|$$

即 $$|t|=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ 或

$$t=\pm\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

故 $$B=\left(x_0+\frac{|d|\cdot a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ y_0+\frac{|d|\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ z_0+\frac{|d|\cdot c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

或 $$=\left(x_0-\frac{|d|\cdot a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ y_0-\frac{|d|\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ z_0-\frac{|d|\cdot c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$ #

定义: 设 $S \ni 0,1 \subset \mathbb{R}$ 的非空子集. 若S在四则运算下封闭, 则称S为$\mathbb{R}$的子域.

习题: 证明$\mathbb{R}$中任一子域必包含全体有理数 $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$是$\mathbb{R}$中最小的子域.

定义: 给定平面 E^2 上点的集合, 它包括 $(0,0)$ 及 $(1,0)$. 则经下列方法得到的点、直线和圆称为可构造点、直线和圆:

(i) 连接两可构造点作直线;

(ii) 以一可构造点为圆心过另一可构造点作圆;

(iii) 可构造直线之间, 圆之间或直线与圆的交点为新可构造点.

如果 $(a,0)$ 为可构造点, 则称 a 为可构造数.

命题: $S=\{a\in\mathbb{R} \mid a \text{可构造数}\}$ 在四则运算下封闭.

命题: $\cos 20^\circ \notin S$. 故 $S \neq \mathbb{R}$.

命题: 设 $S^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z\in S\} \subset \mathbb{R}^3 = E^3$

则 S^3 满足希尔伯特公理化体系的所有公理, 但除了直线完备性公理.

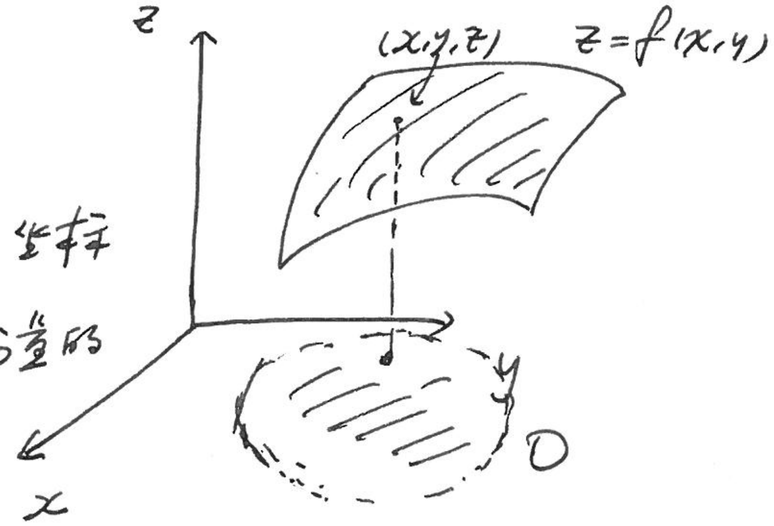
注: 直线方程和圆方程的系数均落在S中.

集合$\mathbb{R}$的扩充，记为$\bar{\mathbb{R}}$。由于E_1仍然满足顺序公理与合同公理，那么$\bar{\mathbb{R}}$具有加法运算，且是群；具有叠序结构。这些结构是$\mathbb{R}$上相应结构的扩充。由于E_1仍然满足阿基米德~~性质~~公理，所以$\bar{\mathbb{R}}$上的扩充加法与序结构满足阿基米德性质。由引理引得知，这样的扩充~~是~~只能是本身。得证。

#

(5.2) 方程和图形

我们在生活中看到的图形远不止直线与平面，很多是弯曲的。E^3这个模型为我们提供了表达曲面、曲线，进而利用更高级的数学工具研究~~曲~~这些图形的几何的机会。例如



在一个曲面(的局部)。我们把它上面的点坐标的z分量看成x,y分量的函数。即对$(x,y)\in D$，定义函数$f(x,y)$即为曲面上以(x,y)为x,y坐标的点（我们假定这样的点唯一）的z坐标值。这时，我们得一方程：

$$F(x,y,z)=0,\quad 其中\ F(x,y,z)=z-f(x,y).$$

方程和图形紧密相关。例如，$f(x,y)\equiv c$，c 为常值，则上述曲面为一平面。更一般只要 $f(x,y)$ 形如 $ax+by+c$，a,b,c 常值

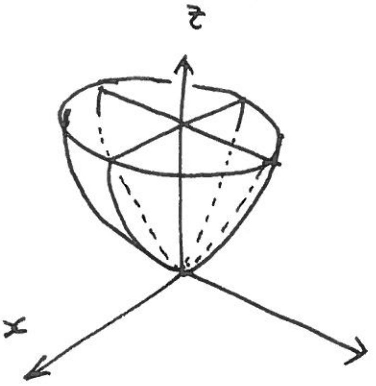
$F(x,y,z)=0$ 都定义了一平面（区域）。当

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+d\ ,\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

这个曲面就会弯曲~~了~~但其形状与 a,b,c 的取值有关。

例33. 椭圆抛物面

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ ,\qquad a,b\neq 0$$



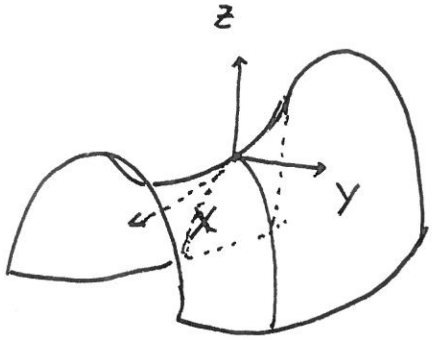
称为椭圆抛物面，是因为

(1) $z=h$，h 变动截该面得（退化的）椭圆；

(2) $x=0$ 和 $y=0$ 平面截该面得两抛物线，且开口方向一致

双曲抛物面 （马鞍面）

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\ a,b\neq 0$$



称为双曲抛物面是因为

(1) $z=h$，$h\in\mathbb{R}$ 截该面得（退化的）双曲线；

(2) $x=0$ 和 $y=0$ 截得两抛物线，且开口方向相反。

似是退化的二阶近似。当曲面由 $F(x,y,z)=0$，其中 F 为多项式，一阶近似与二阶近似可以如下得到：

设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 属于该曲面，即 $F(x_0,y_0,z_0)=0$

我们考察：$F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$。注意到 n 次多项式 $F(x,y,z)$ 变形为

$$F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=\sum_{i+j+k\le n} a_{ijk}(x-x_0)^i(y-y_0)^j(z-z_0)^k$$

$$=\sum_{i+j+k\le n} a'_{ijk}x^iy^jz^k \triangleq F'(x,y,z)$$

$F'(x,y,z)$ 仍为 n 次多项式，且 $a'_{000}=0$，即常数项为 0。所以

$$F'(x,y,z)=\underbrace{a'_{100}x+a'_{010}y+a'_{001}z}_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{II}=\begin{cases}+\,a'_{200}x^2+a'_{110}xy+a'_{101}xz+\\ a_{020}y^2+a_{011}yz+a_{002}z^2+\cancel{\text{高阶项}}\end{cases}$$

$+$ 高阶项。

那么 $\mathrm{I}=0$ 则为曲面 $F'(x,y,z)$ 在 $(0,0,0)$ 处的一阶近似。

$\mathrm{I}+\mathrm{II}=0$ 则为 $F'=0$ 在 $(0,0,0)$ 处的二阶近似。

所以 $\mathrm{I}(x+x_0,y+y_0,z+z_0)=0$ 为原曲面 $F=0$ 在 P 点的一阶近似，$(\mathrm{I}+\mathrm{II})(x+x_0,y+y_0,z+z_0)=0$ 为原曲面在 P 点的二阶近似。

定义34（多项式）

(i) 一元 n 次多项式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \ldots a_n \in R, \quad a_0 \neq 0.$$

n 称为次数.

(ii) 二元 n 次多项式

$$\sum_{i+j\leq n} a_{ij}x^iy^j, \quad a_{ij} \in R, \text{ 且存在某 } a_{ij} \neq 0, \ i+j=n.$$

(iii) 三元 n 次多项式.

$$\sum_{i+j+k\leq n} a_{ijk}x^iy^jz^k, \quad a_{ijk} \in R, \text{ 且存在 } a_{ijk} \neq 0, \ i+j+k=n$$

我们可以想象，当 $f(x,y)$ 为某一多项式且其次数在变大的时候，方程 $z=f(x,y)$ 所对应的图形会越来越复杂。注意到我们可以考察一般的多项式方程

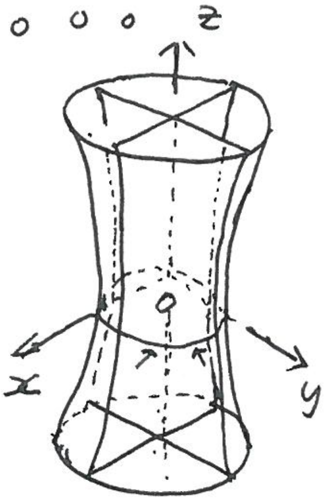
$$F(x,y,z)=0.$$

所对应的解集空间。当 $F(x,y,z)$ 为一次的时候，它所对应的图形即为平面。那么当 $F(x,y,z)$ 为二次的时候，它所对应的图形都应该是什么样子的呢？我们在例33中见过两个例子。显然这不是全部的可能性。比如球面！让我们看一下更多的例子

例35：考察

$$F_t(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - t = 0, \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, 不为0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

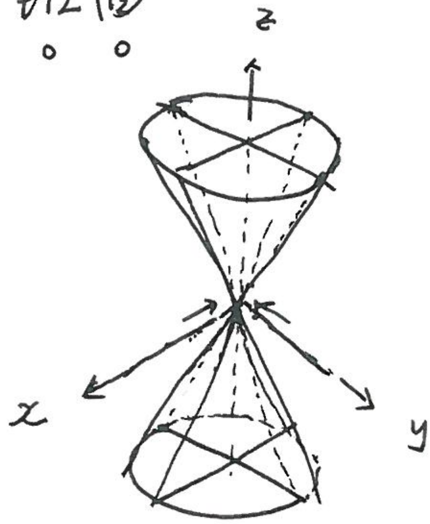
$t>0$ 单叶双曲面



$z=0 \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t$$

$t=0$ 锥面

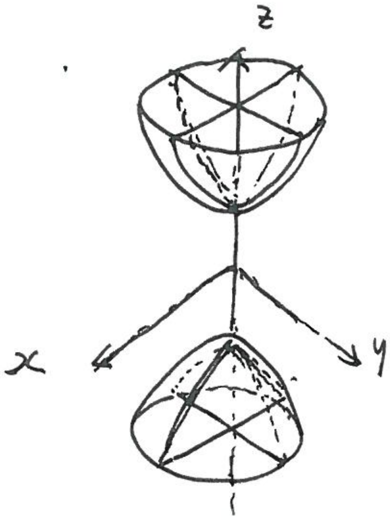


$z=0 \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$\Leftrightarrow x=y=0$

$t<0$ 双叶双曲面



$z=0 \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t < 0, \quad t \neq 0$$

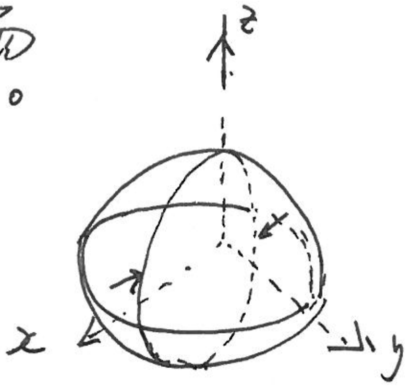
$\Rightarrow x, y$ 无解.

例36：考察

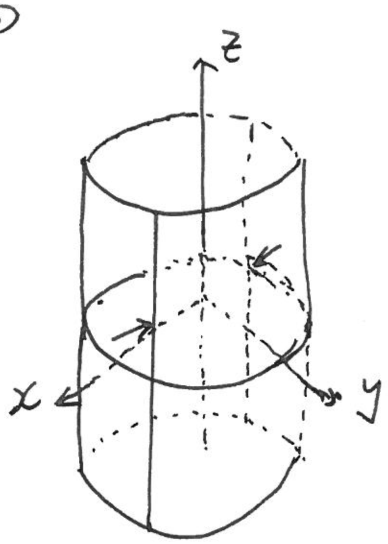
$$F_t(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+t\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ 不为0. $t\in\mathbb{R}$

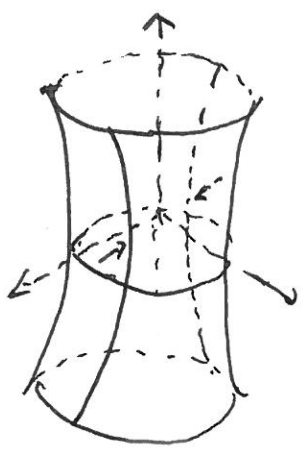
$t>0$ 椭球面



$t=0$ 椭圆柱面



$t<0$ 单叶双曲面



例37. 大家中学学过 平面二次曲线分为三类

椭圆，抛物线，双曲线.

它们的方程代表 形如

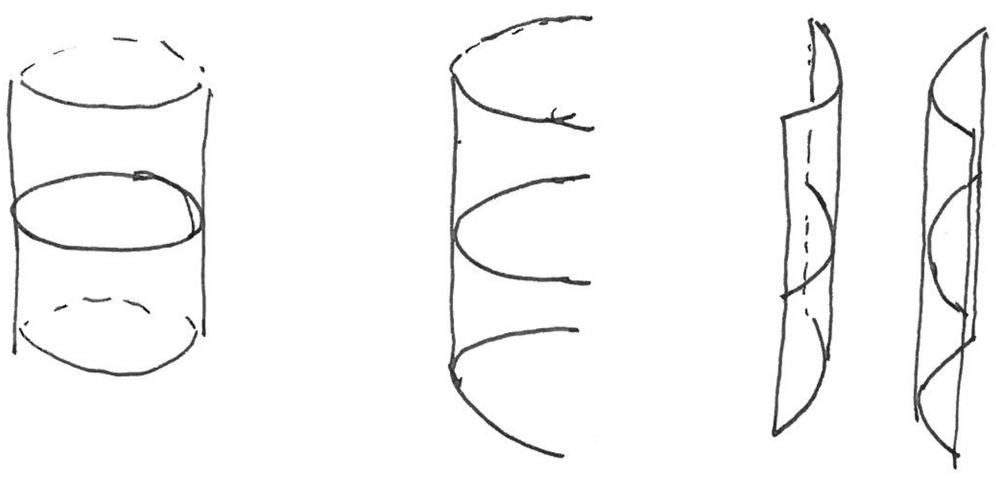
(i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $a, b\in R$, $a\neq 0$

(ii) $x^2-ay=0$ $\quad a\neq 0$

(iii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $a, b\in R$, $a\neq 0$

注意到 若把(i)-(iii)看成三元方程. 则它们分别定义了

椭圆柱面，抛物柱面和双曲柱面.

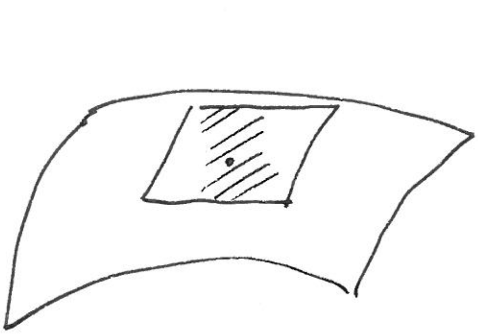


(i) (ii) (iii)

可以预见，当 $F(x,y,z)$ 的次数变大的时候，方程

$$F(x,y,z)=0$$

对应的图形会越来越复杂。研究这些图形的几何可以从局部几何性质与整体几何性质来分别研究。那什么是局部性质，什么是整体的性质呢？在上面的例子中，平面（即一次曲面）与所有二次曲面（即F次数为二次）有明显差别：因为平面在任意一点附近都是“平”的，而二次曲面任一点附近都是“弯”的。即使二次曲面是弯的，但相互间也有区别，比如椭球面处处是凸的，而双曲抛物面处处有凸有凹。精确的描述在局部上曲面各种弯曲的不同需要到微分几何中第二基本形式的学习。但我们注意到这样的事实：在曲面上任一点，当该点的邻域取得充分小时，该曲面非常接近于一平面，这是曲面在该点的切平面；切平面是曲面在该点的一阶近似（逼近）：



更近一步，我们也可考虑曲面在该点处的二阶近似，这是比一阶近似更好的近似。当然，如果曲面是平面，一阶近似即是平面本身；一阶近

曲面的整体几何性质是那些只知道一点附近得不到的几何性质。比如：椭球面与椭圆抛物面有不同的整体性质，虽然两者都是处处为凸的。椭球面是可以放进某个足够大半径的球里，（即有界）而椭圆抛物面却做不到这一点（即无界）。精确的描述需要用到《拓扑学》中的紧性的概念。又如单叶双曲面与双叶双曲面都是无界的，但是单叶双曲面上的任何两点可以通过某个曲线段连接，而双叶双曲面做不到这一点。（这也是单叶与双叶这名字的来源）这就牵涉到《拓扑学》中的连通（道路连通）的概念。从上这些内容都已大大超出《几何原本》中的几何内容。综上所述，三维欧氏空间的引入不仅使欧几里德在《几何原本》中的几何有了一个更为好用的数学模型，而且大大拓宽了几何学的内容。

很好。但是，几何学究竟是什么呢？

（三）刚体变换

空间中的图形五花八门。比如黑板下方有两个黑板擦。我们习惯上称这两个黑板擦"一样"，如果我们把其中一个移到另一个的位置上，它们能够重合。事实上，平面几何中的两个三角形全等即是我们上述意义下的一样。几何学可以说是在规定好"一样"的

前提下，对几何图形进行分类。

E^3 中的一个图形有两个基本信息：位置和形状。粗略的说：E^3 的一个刚体变换只改变图形的位置，而不改变形状。E^3 中的两个图形 A 和 B 称为合同的（或全等的），若存在 E^3 的一个刚体变换将 A 映到 B。

定义 1. 设 X 为集合。我们把集合 $X\times X$ 上的每个子集 R 称为集合 X 上的一个关系。若 $(x,y)\in R\subset X\times X$，我们称 x 和 y 有关系 R，记为

$$x\overset{R}{\sim}y.$$

我们把关系 R 称为等价关系，若它满足如下三条：

(1) 自反性：$\forall x\in X$，$x\overset{R}{\sim}x$.

(2) 对称性：$\forall x,y\in X$，若 $x\overset{R}{\sim}y$，则 $y\overset{R}{\sim}x$.

(3) 传递性：$\forall x,y,z\in X$，若 $x\overset{R}{\sim}y$，$y\overset{R}{\sim}z$，则 $x\overset{R}{\sim}z$.

现在我们令 $X=\{A\mid A\subset E^3$ 是子集$\}$。我们想要说明合同是 X 上的一个等价关系。为此，我们需要给出刚体变换准确的数学定义。

(1) 刚体变换

定义 2. 设 X 为集合。我们称函数

$$d: X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$$

为距离函数，若 d 满足如下三条：

(1) ~~非负性~~ 正定性：$d(x,y)\geq 0$，$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$

(2) 对称性：$d(x,y)=d(y,x)$，$\forall x,y\in X$

(3) 三角不等式：$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$，$\forall x,y,z\in X$.

等价关系的一些例子:

例五

(1) 整数上的同余关系:

固定自然数 n。两整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ 称为关于 n 同余, 若 $a-b$ 被 n 整除. 记为 $a \overset{n}{\sim} b$. 容易验证关于 n 同余是集合 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系.

(2) E^3 中三角形的合同关系:

$X = \{\triangle ABC \,/\, A, B, C \in E^3$ 为不同的点$\}$. 我们称

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C', \text{ 若有合同式}$$

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C'$$

$$\angle A \equiv \angle A', \quad \angle B \equiv \angle B', \quad \angle C \equiv \angle C' \quad \text{成立. (详见第二章5.1节)}$$

根据线段和角的合同公理, 三角形的合同关系为一等价关系.

(3) 设 $f: X \longrightarrow Y$ 为集合 X 和 Y 间的映射. 我们令 $x_1 \overset{f}{\sim} x_2$, $x_1, x_2 \in X$ 若 $f(x_1) = f(x_2)$ 成立. 则容易验证 $x_1 \overset{f}{\sim} x_2$ 为 X 上的一个等价关系.

(4) 设 X 为集合. $\{X_i\}_{i \in I}$ 为 X 中的子集族 (即 $\forall i \in I$, $X_i \subset X$) 满足

$$(*) \qquad X = \coprod_{i \in I} X_i. \qquad \left(\text{即 } X_i \cap X_j = \emptyset \ \ i \neq j \text{ 且 } X = \bigcup_{i \in I} X_i \right)$$

对于 $x, y \in X$, 令 $x \sim y$ 若 $\exists i$, 使得 $x, y \in X_i$。容易验证上述关系为等价关系。我们 $(*)$ 称为 X 的一个分拆.

习题: 证明集合 X 上的等价关系与 X 的分拆一一对应。我们将等价关系 R 对应的分拆中的每个子集称为关于 R 的等价类.

例4：平凡距离函数

$$d_{平}: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

定义为

$$d_{平}(x,y)=\begin{cases}0 & x=y,\\ 1 & x\neq y.\end{cases}$$

现在我们定义 E^3 上自然的距离函数.

$$d_E: E^3\times E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P_i=(x_i,\ y_i,\ z_i),\quad i=1,2$$

$$d_E(P_1,P_2) \triangleq |(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)| \qquad (=|\overrightarrow{P_2P_1}|)$$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

习题：(利用余弦公式)证明上述 d_E 是一距离函数. 如无特殊说明，我们总是取 E^3 上的距离函数 d_E.

定义5. 我们称 $\phi: E^3\longrightarrow E^3$ 为刚体变换，若 ϕ 满足以下两个条件：

(1) ϕ 保持距离 d_E. 即 $\forall P, Q\in E^3$

$$d_E(\phi(P),\phi(Q)) = d_E(P,Q)。$$

(2) ϕ 保持定向，即 ϕ 将右手螺旋系映为右手螺旋系.

从定义上容易知道 刚体变换的复合仍然是刚体变换。我们看些简单的刚体变换.

例6. (1) 平移.

任取定 E^3 中向量 $u_0=(x_0, y_0, z_0)$。定义平移

$$\begin{aligned} T_{u_0}: E^3 &\longrightarrow E^3 \\ u &\longmapsto u+u_0 \end{aligned}$$

写成坐标形式为

$$T_{u_0}(x, y, z) = (x+x_0,\ y+y_0,\ z+z_0).$$

我们要验证:

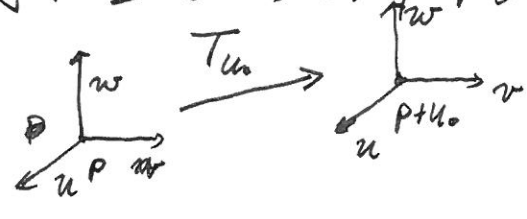
(i) $d_E(T_{u_0}(P), T_{u_0}(Q)) = d_E(P, Q)$, $\forall P, Q \in E^3$.

事实上, $d_E(T_{u_0}(P), T_{u_0}(Q)) = |\overrightarrow{T_{u_0}(Q)T_{u_0}(P)}|$

$$= |(Q+u_0)-(P+u_0)| = |Q-P| = d_E(P, Q)$$

(ii) T_{u_0} 保持定向.

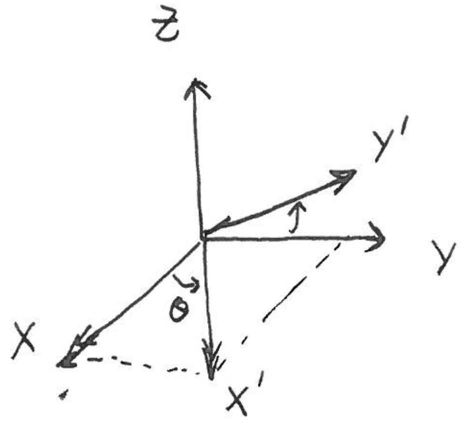
(iii) 这是显然的。T_{u_0} 把点P处的右手螺旋系送到点 $Q=P+u_0$ 处的右手螺旋系, 从另一角度来看, 右手螺旋系(或左手螺旋系)是关于向量间的性质, 而平移是不改变向量的.



(2) 旋转.

我们来看一个最容易描述的旋转：围绕 z 轴，转动 θ_0 角度。

(如图示)



$$R_{\theta_0}(x, y, z) = (\cos\theta_0 \cdot x - \sin\theta_0 \cdot y,\ \sin\theta_0 \cdot x + \cos\theta_0 \cdot y,\ z)$$

验证

(i) $$d_E(R_{\theta_0}(P), R_{\theta_0}(Q)) = d_E(P, Q)$$

事实上，$\left(d_E(R_{\theta_0}(P), R_{\theta_0}(Q))\right)^2$

$$= \langle R_{\theta_0}(Q) - R_{\theta_0}(P),\ R_{\theta_0}(Q) - R_{\theta_0}(P) \rangle$$

$$= \langle R_{\theta_0}(Q-P),\ R_{\theta_0}(Q-P) \rangle$$

$$= \left|(\cos\theta_0 (x_2-x_1) - \sin\theta_0 (y_2-y_1),\ \sin\theta_0 \cdot (x_2-x_1) + \cos\theta_0 (y_2-y_1),\ z_2-z_1)\right|^2$$

$$= \cos^2\theta_0 (x_2-x_1)^2 - 2\cos\theta_0 \sin\theta_0 (x_2-x_1)(y_2-y_1) + \sin^2\theta_0 (y_2-y_1)^2$$
$$+ \sin^2\theta_0 (x_2-x_1)^2 + 2\cos\theta_0 \cdot \sin\theta_0 (x_2-x_1)(y_2-y_1) + \cos^2\theta_0 (y_2-y_1)^2$$
$$+ (z_2-z_1)^2$$

$$= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 = \left(d_E(P, Q)\right)^2$$

因为 $d_E(R_{\theta_0}(P), R_{\theta_0}(Q))$，$d_E(P, Q) \geq 0$，所以 $d_E(R_{\theta_0}(P), R_{\theta_0}(Q)) = d_E(P, Q)$。

(ii) R_{θ_0} 保持定向.

这从几何上来看是显然的. 这里, 我们做一个简单的计算:

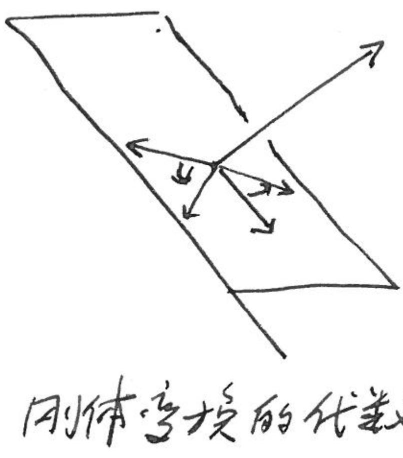
我们只需判断

$$(R_{\theta_0}(e_1) \times R_{\theta_0}(e_2)) \cdot R_{\theta_0}(e_3) > 0 \ ?$$

为此, 我们计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 & 0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0) = 1\cdot 1 > 0.$$

在例6(2), 我们观察了关于z轴的旋转, 它是一个刚体变换。大家肯定注意到我们若把旋转轴换成任意一个方向, 这样的变换也应该是刚体变换。是的, 的确是这样. 事实上, 我们将说明任一刚体变换都是某平移复合上关于某个方向的旋转. (或者也可以说旋转复合上平移)。在此之前, 我们先得到刚体变换的代数表达.



习题: 在例6中, 取 $u_0\neq 0$, $\theta_0\neq 0$, 可验证

$$T_{u_0}\circ R_{\theta_0} \neq R_{\theta_0}\circ T_{u_0}$$

令 $\phi: E^3 \longrightarrow E^3$ 为一刚体变换。设 $\phi(0) = O'$. 我们考虑

复合: $\tilde{\phi}$:
$$\begin{tikzcd} E^3 \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right] & E^3 \arrow[r, "T_{-O'}"] & E^3 \end{tikzcd}.$$

$\tilde{\phi}$ 仍然为一刚体变换, 且 $\tilde{\phi}(0) = T_{-O'} \cdot \phi(0) = T_{-O'}(O') = 0.$

故 $d_E(\tilde{\phi}(u), \tilde{\phi}(0)) = d_E(u, 0)$

$\Rightarrow \quad |\tilde{\phi}(u)| = |u|$, 其中 u 为 E^3 中任意向量.

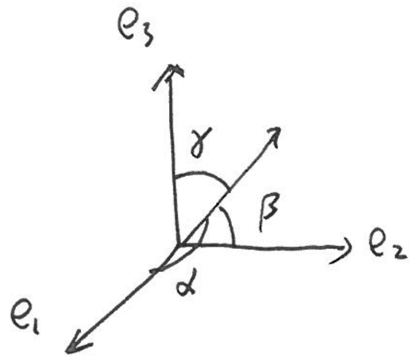
由于
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2\right)$$

所以 $\langle \tilde{\phi}(u), \tilde{\phi}(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \quad \forall\, u, v \in E^3.$

从几何上看, $\tilde{\phi}$ 即保持长度, 也保持角度。

现在, 我们观察直角坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 的变化. 我们令
$$e_i' = \tilde{\phi}(e_i), \quad i = 1, 2, 3.$$
由于 $\tilde{\phi}$ 保长度保角, 所以 $\{e_i'\}$ 仍然是单位长度, 且两两垂直. 更进一步, 由于 $\tilde{\phi}$ 保定向, 所以 $\{O; e_1', e_2', e_3'\}$ 仍然构成满足右手螺旋法则的一个直角坐标系!

更进一步, $\tilde{\phi}$ 完全由 e_1', e_2', e_3' 确定下来!



$$\begin{aligned} u &= (x, y, z) \\ &= x\cdot(1,0,0) + y\cdot(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &= \langle u, e_1\rangle\cdot e_1 + \langle u, e_2\rangle\cdot e_2 + \langle u, e_3\rangle\cdot e_3 \end{aligned}$$

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, e_1\rangle}{|u|}, \quad \cos\beta = \frac{\langle u, e_2\rangle}{|u|}, \quad \cos\gamma = \frac{\langle u, e_3\rangle}{|u|}$$

我们把 $\tilde{\varphi}(u)$ 在新的直角坐标系 $\{O; e_1', e_2', e_3'\}$ 表达，得到

$$\tilde{\varphi}(u) = \langle\tilde{\varphi}(u), e_1'\rangle\cdot e_1' + \langle\tilde{\varphi}(u), e_2'\rangle e_2' + \langle\tilde{\varphi}(u), e_3'\rangle\cdot e_3'$$

因为 $\langle\tilde{\varphi}(u), e_i'\rangle = \langle\tilde{\varphi}(u), \tilde{\varphi}(e_i)\rangle$

$$= \langle u, e_i\rangle, \quad \forall i.$$

所以
$$\boxed{\tilde{\varphi}(x, y, z) = x\cdot\tilde{\varphi}(e_1) + y\cdot\tilde{\varphi}(e_2) + z\cdot\tilde{\varphi}(e_3)}$$

其中 $\{O; \tilde{\varphi}(e_1), \tilde{\varphi}(e_2), \tilde{\varphi}(e_3)\}$ 构成直角坐标系.

据此，我们得到任一刚体变换的一个代数表达：

命题7：设 $\varphi: E^3 \to E^3$ 为一刚体变换，则存在

$$O' = (x_0, y_0, z_0)$$

$$e_1' = (x_1, y_1, z_1)$$

$$e_2' = (x_2, y_2, z_2)$$

$$e_3' = (x_3, y_3, z_3)$$

满足条件：

$$\begin{cases} x_i^2+y_i^2+z_i^2=1, \quad i=1,2,3 \\ x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j=0, 1\leq i\neq j\leq 3 \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} > 0 \end{cases}$$

使得

$$\phi(x,y,z)=x\cdot e_1'+y\cdot e_2'+z\cdot e_3'+O'.$$

证明：注意到

$$\tilde{\phi}=T_{-O'}\circ\phi \Rightarrow T_{O'}\circ\tilde{\phi}=T_{O'}\circ(T_{-O'}\circ\phi)$$

而 $T_{O'}\circ T_{-O'}=id.$

故 $\phi=T_{O'}\circ\tilde{\phi}$. 得证

#

注记8：在《线性代数》中，我们会引进矩阵及矩阵间的加法与乘法.

那么，若记 $A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$， $b=(x_0,y_0,z_0)$

则 $\phi(x,y,z)=(x,y,z)\cdot A+b$，(即 $\phi(u)=u\cdot A+b$).

且 $A\cdot A^T=I_3$, $|A|>0$. 这里

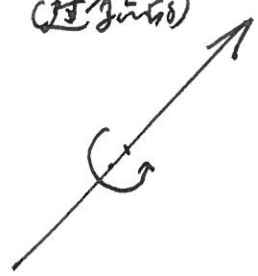
$$A^T=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$ 为 A 的转置 (Transport).

我们有了刚体变换利用坐标的代数表达式。那么，它对应的几何意义有是什么呢？接下来，我们用几何的语言来说明前文中的 $\tilde{\varphi}$ 必定是一个旋转。从而，我们有如下命题

命题9: 刚体变换是平移和旋转的复合。

证明：如前所述，我们给出的证明是几何的。一个完全代数的证明需要利用正交矩阵特征值的特点。这将在线性代数中完成。我们考察变换 $\tilde{\varphi}$:

(i) 若 $\tilde{\varphi}$ 固定一条直线（过原点的），则 $\tilde{\varphi}$ 必是围绕该直线的一个旋转



我们不妨假定 $\tilde{\varphi}$ 固定z-轴。不然，我们就更换新的直角坐标系，使 $\tilde{\varphi}$ 固定的直线为z-轴所在的直线。所以，我们有

$$\tilde{\varphi}(e_3) = e_3.$$

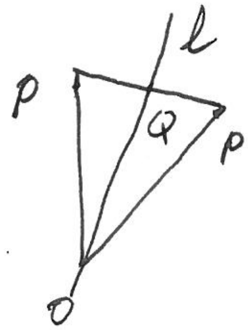
那么，$\tilde{\varphi}(e_i)$, $i=1,2$ 必然在与 e_3 垂直的平面（且过原点），即XY-平面。而且 $\tilde{\varphi}(e_1)$ 与 $\tilde{\varphi}(e_2)$ 垂直，且 $\tilde{\varphi}(e_1)$, $\tilde{\varphi}(e_2)$ 与 $\tilde{\varphi}(e_3)=e_3$ 构成右手螺旋系。所以，若 $\tilde{\varphi}(e_1)$ 相对于X轴转过了角度 θ，

绕

$\tilde\varphi(P_2)$ 必然相较于 Y轴同方向转过 θ 角度。换句话说，$\tilde\varphi$ 必然为例 6 (2) 的形式。此为第一点。

(ii) $\tilde\varphi$ 必然固定一条直线。
(过原点的)

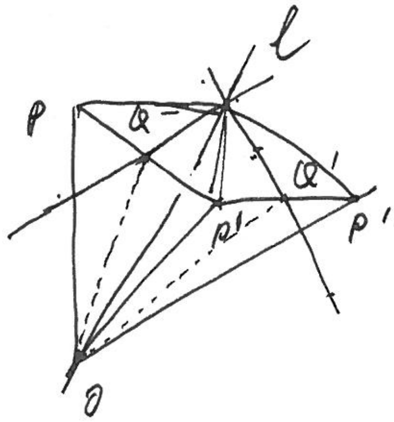
我们任取一点 $P \neq O$。若 $\tilde\varphi(P)=P$，则 $\tilde\varphi$ 必然固定连接 OP 的直线。那么(ii)得证。不然，我们有



$$\tilde\varphi(P) \triangleq P' \neq P.$$

我们继续考察 $\tilde\varphi(P')$ 的位置。若 $\tilde\varphi(P')=P$，则 $\tilde\varphi$ 必然固定 PP' 的中点 Q。从而，$\tilde\varphi$ 固定过 O 与 Q 的直线。这是因为：这时 $\tilde\varphi$ 把线段 PP' 映到线段 $P'P$（即，线段 PP' 被 $\tilde\varphi$ 保持），而中点 Q 是线段上唯一与 P 和 P' 等距的点。所以，在该情形(ii)得证。故，我们可设

$$\tilde\varphi(P') \triangleq P'' \neq P.$$



这时，我们令直线为两平面的交线（如图示）。该两平面分别为过 OQ (OQ') 且垂直于 PP' ($P'P''$) 的平面。其中 Q (Q') 为 PP' ($P'P''$) 的中点。那么 $\tilde\varphi$ 必固定上述直线，因为该直线上的点与 P, P', P'' 同时保持等距且 $\tilde\varphi$ 将直线映成直线）。

综合(i),(ii),我们证明了$\tilde{\phi}$为一旋转。从而,该命题得证。

#

回忆:$X=\{A \mid A\subset E^3$ 子集$\}$。我们定义,对 $A, B\in X$,

$A\equiv B$ (称A与B合同),若存在刚体变换 $\phi: E^3\to E^3$,

使得 $\phi(A)=B$.

推论 10. 合同关系是集合X上的等价关系.

证明:(1) 自反性:

取 $\phi=Id$, 那么 $Id(A)=A$. 所以

$$A\equiv A$$

(2) 对称性.

设 $A\equiv B$, 即 $\exists\phi$ 刚体变换, 使得 $\phi(A)=B$。为了说明 $B\equiv A$, 我们从两个角度来理解:

(a) 几何角度:

根据前面的讨论(命题9), $\phi=$ 平移 $\circ$ 旋转.

平移与旋转显然为双射, 而且平移的逆映射仍为平移;旋转的逆映射仍为旋转。故 ϕ的逆有表达式

$$\phi^{-1}=\text{旋转}\circ\text{平移}.$$

故 ϕ^{-1} 仍为刚体变换. 此时, 因为 $A=\phi^{-1}(B)$, 所以 $B\equiv A$.

(b) 代数角度.

由命题 7. 我们得到 ϕ 的代数表达

$$\phi(x,y,z) = x\cdot e_1' + y\cdot e_2' + z\cdot e_3' + O'$$

其中 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 构成一直角坐标系。

这时, 我们有如下观察:

设 $\tilde{e}_1 = (x_1, x_2, x_3)$

$\tilde{e}_2 = (y_1, y_2, y_3)$

$\tilde{e}_3 = (z_1, z_2, z_3)$

令 $\phi' = \phi - O' = T_{-O'}\circ\phi$

令 $\tilde{\phi}(x,y,z) = x\cdot\tilde{e}_1 + y\cdot\tilde{e}_2 + z\cdot\tilde{e}_3$.

验证 (1) $\{O; \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ 构成直角坐标系

(2) $\tilde{\phi}\circ\phi' = \phi'\circ\tilde{\phi} = Id$.

据此, $\phi^{-1} = \tilde{\phi}\circ T_{-O'}$. 所以 ϕ^{-1} 仍为刚体变换.

(3) 传递性.

设 $A\equiv B$, $B\equiv C$, 我们需证 $A\equiv C$.

设 ϕ, ψ 为刚体变换, 使得 $\phi(A)=B$, $\psi(B)=C$.

那么 $\psi\circ\phi$ 仍为刚体变换，且

$$(\psi\circ\phi)(A)=\psi(\phi(A))=\psi(B)=C.$$

故 $A\equiv C$.

#

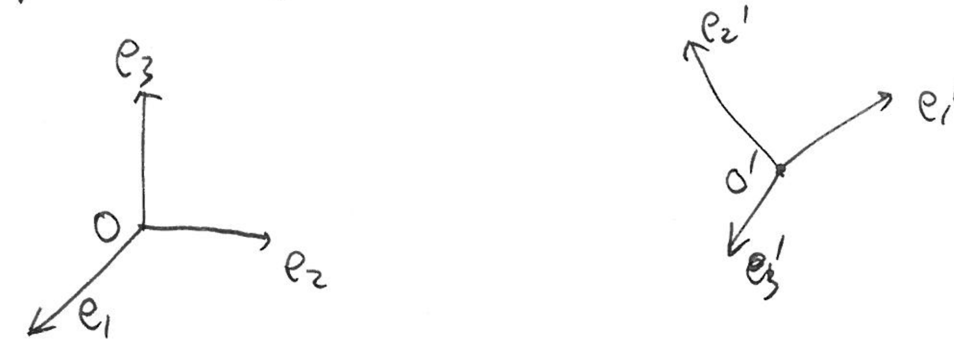
事实上，上述推论的证明等价于说如下重要的论断：

命题11：刚体变换在复合运算下构成群。我们称之为刚体变换群。

最后，我们指出几何学中的分类问题与物理学中的相对论观点的密切关系。物理学的相对论观点，通俗的话讲，就是物理学定律不依赖于参照系的选取。为了描述一个物理现象/实验，我们必须事先选定一个参照系。然而，参照系的选取完全是人为的。因为参照系选取的不同，同一个物理实验所展现的实验数据有所不同。但是，最后的物理定律应该独立于这些差异。回到几何学，比如我们研究一个球面。球面的几何性质可由其上的点到一固定点有固定的长度(即半径)。显然这个性质不依赖于直角坐标系的选取。但是该球面的方程式却随直角坐标系的选取而变化。几何性质是不依赖于直角坐标系选取的那些性质。对于球面来说，其半径为几何性质，而其在某直角坐标系下的

应的二次方程式的参数则不是几何性质。这时，我们注意到 E^3 上的刚体变换（命题7）基本上就是直角坐标系的坐标变换。

$$\{O;e_1,e_2,e_3\} \xrightarrow{\ \phi\ } \{O';e_1',e_2',e_3'\}$$



所以，我们研究几何图形在刚体变换下的分类问题基本上就是研究图形的几何性质。

(2). 二次曲面的分类

在上一节中，我们引入集合 $X=\{A \mid A\subset E^3 子集\}$ 及 X 上的合同关系。大家可以预见，若我们不对 A 加以一些限制，那么这样的分类是没有多少意义的。另一方面，如果我们对 A 加以太多的限制，这个问题同样会变得没有意义。比如：我们规定 A 是 E^3 中的一个点，则我们得到一个等价类，因为我们通过平移（刚体变换的一种）把点 O 移到任意一点。但是若我们考虑所有 $A=\{P,Q\}\subset E^3$，那么分类问题变得有趣一点。（答案如何？）更进一步，如果考虑所有 $A=\{P,Q,R\}\subset E^3$，那么分类问题就等价于三角形全等的判定问题！在这一节中，我们

试图考察所有的二次曲面的分类问题。

我们先给出二次曲面的定义。

定义12. 子集 $A \subset E^3$ 称为二次曲面，如若存在某一三元二次多项式 $F = F(x,y,z)$，使得

$$A = \{(x,y,z) \in E^3 \mid F(x,y,z) = 0\},$$

即 A 是 F 的零点集。

现令 $S \triangleq \{A \subset E^3 \mid A \text{是二次曲面}\} \subset X$。我们遇到第一个自然问题是： 集合 S 是否在刚体变换群下保持不变？

换个方式问，这个问题等价于如下问题：

任一二次曲面在任一刚体变换下的象是否仍为二次曲面？

从几何上看，这个问题"似乎"是显然成立的。但从代数上看，这并非那么显然。让我们分析一下这个问题的本质：

令 $F(x,y,z) = a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot xz + d \cdot y^2 + e \cdot yz + f \cdot z^2$
$+ g \cdot x + h \cdot y + i \cdot z + j \cdot 1$

其中 a, b, c, d, e, f 不全为零。

根据命题7.（刚体变换的代数表达式），我们本质上需要证明/证否

如下代数问题:

令 $O' = (b_1, b_2, b_3)$

$$e_1' = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$$

$$e_2' = (a_{21}\ a_{22}\ a_{23})$$

$$e_3' = (a_{31}\ a_{32}\ a_{33})$$

$\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 构成一直角坐标系。

我们有相对应的坐标变换 Φ:

$$x \longmapsto a_{11}\cdot x + a_{21}\cdot y + a_{31}\cdot z + b_1$$

$$y \longmapsto a_{12}\cdot x + a_{22}\cdot y + a_{32}\cdot z + b_2$$

$$z \longmapsto a_{13}\cdot x + a_{23}\cdot y + a_{33}\cdot z + b_3$$

问题: $F(x,y,z)$ 在上述坐标变换下是否仍为二次多项式?

我们把 F 写为(分次形式):

$$F = F_2 + F_1 + F_0$$

其中 $F_2 = a x^2 + b\cdot xy + c\cdot xz + d\cdot y^2 + e\cdot yz + f\cdot z^2$

$$F_1 = g\cdot x + h\cdot y + i\cdot z$$

$$F_0 = j$$

我们显然有 $F\circ\Phi = (F_2 + F_1 + F_0)\circ\Phi = F_2\circ\Phi + F_1\circ\Phi + F_0\circ\Phi$.

注意到 $F\circ\Phi$ 的最高次只可能在 $F_2\circ\Phi$ 中。所以,

我们的问题转为如下

问2：设 F_2 为如上形式的非零多项式，Φ 为刚体运动对应的坐标变换。那么 $F_2\circ\Phi$ 是否为非零多项式？

我们可以对问2中的 Φ 作进一步的化简。根据命题7(以及记

我们可以将 Φ 写成

$$\Phi=\Phi_1\circ\Phi_2,\quad \text{其中 } \Phi_1=T_Q, \text{ 为平移}$$
$$\Phi_2=\tilde{\varphi}, \text{ 为旋转.}$$

我们考察 $F_2\circ\Phi_1\triangleq G$。将 G 按照分次形式写成

$$G=G_2+G_1+G_0.$$

命题13：记号如上，等式

$$G_2=F_2 \quad \text{成立。}$$

证明留作习题。据此，我们的问题变为如下.

问3：设 F_2 为二次齐次非零多项式，Φ_2 为旋转对应的坐标变换。$F_2\circ\Phi_2$ 是否为非零多项式？

在问3中，我们说一个多项式是二次齐次的，是当它不含有一次和零次的项。

习题：若 $F_2\circ\Phi_2\neq 0$，则 $F_2\circ\Phi_2$ 亦为二次齐次多项式。

我们为了解决问题，引入如下强有力的代数工具：

$\boxed{\text{矩阵}}$.

矩阵是数的自然推广.

定义14：设 n, m 为正整数。一个 $n\times m$ 阶矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times m},\ a_{ij}\in\mathbb{R}$$

n 称为矩阵 A 的行数，m 称为 A 的列数。

所以 1×1 阶矩阵即为我们熟悉的数。而 1×2 阶（1×3 阶）矩阵即为 $\mathbb{R}^2$（$\mathbb{R}^3$）中的向量。2×2 阶（3×3 阶）矩阵我们已经在讲有向面积（有向体积）时遇到过。矩阵不仅是个记号，重要的是如下运算：

定义15：我们分别定义矩阵的两个运算如下：

(1) 加法

令 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$ 为两个 $n\times m$ 阶矩阵。

则定义矩阵加法：

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{n\times m}$$

(2) 乘法

令 n, m, l 为三个正整数. 令

$$A=(a_{ij})_{n\times m}, \quad B=(b_{jk})_{m\times l}$$ 分别为 $n\times m$ 阶和

$m\times l$ 阶矩阵. 定义矩阵乘法:

$$A\cdot B=(c_{ik})_{n\times l}, \quad \text{其中}$$

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}, \qquad 1\le i\le n,\ 1\le k\le l$$

注记16: (1) 矩阵加法是对两个相同规格的矩阵作运算。矩阵加法是 $\mathbb{R}^n$ 上向量加法的自然推广.

(2) 矩阵乘法中参与运算的左边矩阵的列数必须等于右边矩阵的行数. 当 A 为 1×1 阶, B 为 $1\times n$ 阶时, 那么矩阵乘法即为 $\mathbb{R}^n$ 上数与向量的数乘运算.

(3) 矩阵, 矩阵加法, 矩阵乘法的几何意义是线性空间 $\{\mathbb{R}^n\}$ 之间的线性~~变换~~映射, 线性映射的加法与线性映射的复合. 具体内容在《线性代数》中教授。

我们把

$$M_{n\times m}=\{A \mid A \text{ 为 } n\times m \text{ 阶矩阵}\}$$

记 $O_{n\times m}=(0)_{n\times m}$ 为零矩阵.

习题：证明 $M_{n\times m}$ 关于矩阵加法 $+$ 构成阿贝尔群。

对于 $A\in M_{n\times m}$，其加法逆元记为 $-A$.

当 $n=m$ 时，我们称 A 为 n 阶方阵. 记

$$I = (1)_{n\times n}$$ 为单位矩阵.

习题：(1) 证明 $M_{n\times n}$ 关于矩阵加法与乘法构成环。

(2) 当 $n\geq 2$ 时，$M_{n\times n}$ 是非交换环。

我们记 $M_n = M_{n\times n}$，$n\geq 1$.

我们知道一个环中的乘法可逆元关于乘法构成一个群。通常，我们把环 M_n 中的乘法可逆元称为可逆矩阵. 即

$$A\in M_n,\quad \exists\, B\in M_n.\ \text{s.t}$$

$$A\cdot B = B\cdot A = I.$$

我们记 $GL_n = \{ A\in M_n \mid A \text{ 为可逆矩阵} \}$.

GL_n 关于矩阵乘法构成(非交换)群. 其中幺元是 I.

当 $A\in GL_n$，其乘法逆记为 A^{-1}.

最后，我们引入矩阵转置的概念。

定义17: 对 $A\in M_{n\times m}$, 我们定义 A的转置为
$=(a_{ij})$

$$A^T = (a_{ji})_{m\times n} \in M_{m\times n}.$$

具体写开来:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & - & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & - - - & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

A^T 是 A 关于 虚线(对角线)的 45° 镜翻转.

练习: 令 $A, B\in M_{n\times m}$, $C\in M_{m\times l}$. 证明:

(1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(2) $(A\cdot C)^T = C^T\cdot A^T$

注意到 $C^T\in M_{l\times m}$, $A^T\in M_{m\times n}$, 所以 $C^T\cdot A^T$ 是恰当定义的.

有了上述准备, 刚体变换有非常简洁的矩阵表达(定理18):

$$\Phi(x,y,z)_{1\times3} = (x,y,z)_{1\times3} \cdot A_{3\times3} + b_{1\times3}$$；其中A满足

$$A \cdot A^T = I$$

$$|A| > 0$$

$$\Phi_1(x,y,z) = \underset{(x,y,z)}{\underbrace{(x,y,z) \cdot I}} + b$$

$$\Phi_2(x,y,z) = (x,y,z) \cdot A$$

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$$

对于 F_2，我们有如下重要的观察

命题18. 令 $F_2(x,y,z) = a \cdot x^2 + b \cdot xy + c\,xz + d \cdot y^2 + eyz + f \cdot z^2$

为二次齐次多项式. 则存在（唯一）3×3方阵 C

满足：(1) $C^T = C$

(2) $F_2 = (x,y,z)_{1\times3} \cdot C_{3\times3} \cdot (x,y,z)^T_{3\times1}$

$$= (x,y,z) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

证明：记 $C=(C_{ij})$.

(1) $\iff$ $C_{ij}=C_{ji}$, $\forall\ 1\le i,j\le 3$.

(2) $\iff$

$$F_2 = C_{11}\cdot x^2 + C_{12}xy + C_{13}xz + C_{21}yx + C_{22}y^2 + C_{23}yz + C_{31}zx + C_{32}\cdot z\cdot y + C_{33}\cdot z^2$$

$$= C_{11}x^2 + (C_{12}+C_{21})xy + (C_{13}+C_{31})xz + C_{22}\cdot y^2 + (C_{23}+C_{32})yz + C_{33}z^2$$

$$\overset{(1)}{=} C_{11}x^2 + 2C_{12}\cdot xy + 2C_{13}xz + C_{22}\cdot y^2 + 2C_{23}\cdot yz + C_{33}\cdot z^2$$

比较系数
故得(唯一)解 $C_{11}=a$, $C_{12}=\frac{b}{2}$, $C_{13}=\frac{c}{2}$

$C_{22}=d$, $C_{23}=\frac{e}{2}$

$C_{33}=f$.

\#

现在，我们可以回答最前开始的问题

推论19. 设 F 为二次多项式，Φ 为刚体变换，则有

$F\circ\Phi$ 仍为二次多项式。

证明：根据上述的讨论，我们不妨假设 F 为齐次二次多项式，且 Φ 为旋转。根据命题18，我们得到

$$F(x,y,z)=(x,y,z)\cdot C\cdot(x,y,z)^T，其中$$

$C\neq 0$，$C^T=C$ 为 3 阶方阵.

我们有 3 阶方阵 A，使得

$$\Phi(x,y,z)=(x,y,z)\cdot A,$$

A 满足 $A\cdot A^T=I$，且 $|A|>0$

所以
$$F\circ\Phi(x,y,z)=F((x,y,z)\cdot A)$$
$$=((x,y,z)\cdot A)\cdot C\cdot((x,y,z)\cdot A)^T$$
$$=(x,y,z)(A\cdot C\cdot A^T)(x,y,z)^T$$

假设 $A\cdot C\cdot A^T=0$，则有

$$\underset{\displaystyle (A^TA)\cdot C\cdot A^TA}{\overset{\parallel}{A^T\cdot(A\cdot C\cdot A^T)A}}=A^T\cdot 0\cdot A=0$$

另一方面. $A\cdot A^T = I$

$$\Rightarrow A^{-1}\cdot(A\cdot A^T) = A^{-1}$$

$$\overset{\|}{(A^{-1}\cdot A)\cdot A^T}$$

$$\Rightarrow A^T = A^{-1}$$

故 $A^T\cdot A = A^{-1}\cdot A = I$.

故 $C = 0$. 矛盾.

假设不成立, 即 $F\circ\Phi$ 为非零齐次二次多项式. 命题得证.

#

如同刚体变换群在集合 $X=\{A \mid A\subset E^3\}$ 上定义合同关系一样, 它也在子集 $S=\{A \mid A\subset E^3$ 二次曲面$\}$ 定义了合同关系。这是一个等价关系。我们二次曲面在刚体变换下分类的问题, 即是描述等价类集合 $S/\equiv = \{[A]\}$。本节的主要结果如下:

定理20. 令 S 为 E^3 中全体二次曲面的集合. $\equiv$ 为刚体变换群诱导的等价关系. 则等价类集合

$$S/\equiv = \coprod_{0\le i\le 14} M_i$$

（空集） $M_0 = \{ [x^2+1=0] \}$

（平面） $M_1 = \{ [x^2=0] \}$

（一对平行的平面） $M_2 = \{ [x^2-a=0] \mid a>0 \}$，且

$[x^2-a=0]=[x^2-a'=0] \iff a=a'$

（抛物柱面） $M_3 = \{ [x^2-ay=0] \mid a>0 \}$，且

$[x^2-ay=0]=[x^2-a'y=0] \iff a=a'$

（直线） $M_4 = \{ [x^2+y^2=0] \}$

（椭圆柱面） $M_5 = \{ [\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=0] \mid a \geq b>0 \}$，且

$[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=0]=[\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-1=0] \iff \{a,b\}=\{a',b'\}$

（椭圆抛物面） $M_6 = \{ [\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-z=0] \mid a \geq b>0 \}$，且

$[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}-z=0]=[\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-z=0] \iff \{a,b\}=\{a',b'\}$

（一对相交的平面） $M_7 = \{ [x^2-ay^2=0] \mid a>0 \}$，且

$[x^2-ay^2=0]=[x^2-a'y^2=0] \iff a=a'$.

（双曲柱面） $M_8 = \{ [\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+1=0] \mid a \geq b>0 \}$，且

$[\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+1=0]=[\frac{x^2}{a'}-\frac{y^2}{b'}+1=0] \iff \{a,b\}=\{a',b'\}$

（双曲抛物面）$M_9=\{[\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+z=0] \mid a\geq b>0\}$ 且

$$[\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+z=0]=[\frac{x^2}{a'}-\frac{y^2}{b'}+z=0] \iff \{a,b\}=\{a',b'\}.$$

（点） $M_{10}=\{[x^2+y^2+z^2=0]\}$

（椭球面）$M_{11}=\{[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0] \mid a\geq b\geq c>0\}$，且

$$[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0]=[\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}+\frac{z^2}{c'}-1=0] \iff$$

$$\{a,b,c\}=\{a',b',c'\}.$$

（单叶双曲面）$M_{12}=\{[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}-1=0] \mid a\geq b\geq c>0\}$，且

$$[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}-1=0]=[\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-\frac{z^2}{c'}-1=0] \iff$$

$$\{a,b,c\}=\{a',b',c'\}.$$

（二次锥面）$M_{13}=\{[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-z^2=0] \mid a\geq b>0\}$，且

$$[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-z^2=0]=[\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-z^2=0] \iff \{a,b\}=\{a',b'\}$$

（双叶双曲面）$M_{14}=\{[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}+1=0] \mid a\geq b\geq c>0\}$，且

$$[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}+1=0]=[\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-\frac{z^2}{c'}+1=0] \iff$$

$$\{a,b,c\}=\{a',b',c'\}.$$

根据上述定理，二次曲面在刚体变换下共有15类。其中类 M_0, M_1, M_4, M_{10} 只有一个元素，次类 M_2, M_3, M_7 的类由一个参量确定，次类 M_5, M_6, M_8

M_9, M_{13} 中的类由二个参量确定；大类 M_{11}, M_{12}, M_{14} 中的类由三个参量确定。我们把上述定理中给出的二次方程称为标准方程。在带参量的标准方程中，参量本质上确定了标准方程对应的二次曲面的合同类。所以标准方程，尤其是带参量的标准方程，在判定二次曲面的合同关系时，是非常重要的。定理的证明需要依赖如下《线性代数》中的结果，我们述而不证。

命题21：令 $C \in M_n(\mathbb{R})$ 为对称阵。则必存在 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 满足

(1) $A \cdot A^T = I$

(2) $|A| > 0$

(3) $A \cdot C \cdot A^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$， $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$。

注：我们将形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为对角阵。我们可将之记为 $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n\}$。

习题：证明命题21在 $n=2$ 的情形。

定理20的证明：设 $F \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ 为二次多项式，二次曲面由 $\{F=0\}$ 给出。证明的过程分为二步：第一步利用刚体变换

将F化为形如标准方程所给出的二次多项式。第二步证明标准方程在刚体变换下的本质唯一性。我们将F写为

$$F = F_2 + F_1 + F_0.$$

利用命题18，

$$F_2 = (x,y,z)\cdot C\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \qquad C^T = C.$$

由命题21得知，存在刚体变换（此为旋转）

$$\Phi(x,y,z) = (x,y,z)\cdot A,$$ 使得

$$F_2\circ\Phi = (x,y,z)\cdot A\cdot C\cdot A^T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$= (x,y,z)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2.$$

由于$C\neq 0$，故$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$必不全为零。不妨设

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq|\lambda_3|, \quad 其中 |\lambda_1|\neq 0.$$

[解释：这是因为我们总是通过一个旋转将X-，Y-，Z-轴送到X,Y,Z的任何一个排列，至多相差某一轴的符号；而符号的改变不影响平方项

举例：$X,Y,Z \longrightarrow Y,Z,X$　轮换

$\longrightarrow -Y,X,Z$　对换，此时某一轴相差一个符号]

情形1: $|\lambda_1|\neq 0$, $|\lambda_2|=|\lambda_3|=0$.

此时 ~~有~~ $\circ\Phi = \lambda_1 x^2$, $\lambda_1\neq 0$

由于 $\{F\circ\Phi=0\}=\{\lambda F=0\}$, $\forall\lambda\neq 0$, 所以

我们不妨设 $\lambda_1=1$. 考察 $F_1\circ\Phi = a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z$
通过平行 $x\to x-\frac{a}{2}$, $y\to y$, $z\to z$ 我们总是可以假定 $a=0$.
情形1.1 $a=b=c=0$.

此时我们继续考察 $F_0\circ\Phi = d$.

情形1.1.1. $d=0$.

此时得 $x^2=0$. 即平面 (M_1)

情形1.1.2. $d>0$

此时得 $x^2+d=0$. 此时为空集 (M_0)

~~我们考虑~~

情形1.1.3. $d<0$

此时得 $x^2=-d>0$, 得

$x=\pm\sqrt{-d}$, 为平行的两个平面 $(M2)$

注意到两平行平面间的距离为 $2\sqrt{-d}$。因为刚体变换不改变距离. 所以

$x^2=-d$ 与 $x^2=-d'$, $(d,d'<0)$ 合同

$\Leftrightarrow 2\sqrt{-d}=2\sqrt{-d'}$, $\Leftrightarrow d=d'$.

情形 1.2　$a=b=0,\ c\neq 0$ 或 $a=c=0,\ b\neq 0$

取旋转 $x\to -x,\ y\to z,\ z\to y$，我们可将

$a=b=0,\ c\neq 0$ 化归为 $a=c=0,\ b\neq 0$。

如需要再取旋转 $x\to -x,\ y\to -y,\ z\to z$，我们可以假设 $b>0$

故得方程

$$x^2-by+d=0,\quad b>0$$

此时再取平移 $x\to x,\ y\mapsto y+\frac{d}{b},\ z\to z$，

得

$$x^2-by=0,\quad b>0$$

现假设 $x^2-by=0$ 与 $x^2-b'y=0$，$b,b'>0$

合同。断言：$b=b'$。

事实上，若刚体变换 T 将 $\{x^2-by=0\}$ 变为 $\{x^2-b'y=0\}$，

则 T 有如下限制：

(i) T 不能在 x-，y-轴方向平移.

不然，沿着 x-轴方向平移，会产生 x 的一次项，

沿着 y-轴方向平移，会产生常数项.

所以 T 至多沿着 z-轴平移。但由于多项式 x^2-by

没有 z 项，所以我们不妨假定 T 为旋转.

(ii) $\Phi(X)=\pm X$, $\Phi(y)=y$, 且 $b'=b$.

事实上, 令 $\Phi(X) = c_1X+c_2Y+c_3Z$

$(c_1X+c_2Y+c_3Z)^2$ 是 $F\Phi$ 的最高次项. ($F=X^2-bY$.)

故 $(c_1X+c_2Y+c_3Z)^2=X^2 \Rightarrow c_2=c_3=0,\ c_1=\pm 1$

同理. 令 $\Phi(Y)=\tilde{c}_1X+\tilde{c}_2Y+\tilde{c}_3Z$. 则

$$-b(\tilde{c}_1X+\tilde{c}_2Y+\tilde{c}_3Z) = -b'Y.$$

$$\Rightarrow \tilde{c}_1=\tilde{c}_3=0,\ \tilde{c}_2=b'/b.$$

我们知道. $|(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\tilde{c}_3)|=1 \Rightarrow \left(\frac{b'}{b}\right)^2=1$

$$\Rightarrow b'=b. \text{ 即 } \tilde{c}_2=1.$$

断言得证。

情形 1.3. $a=0$, $b, c\neq 0$.
此时有方程 $X^2-bY-cZ+d=0$. 通过类似于情形 1.2 一开始的讨论, 我们不妨假设 $b\le c$, 且 $b>0$.

取旋转 $x\longrightarrow x$, $y\longrightarrow \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}y+\frac{-c}{\sqrt{b^2+c^2}}z$,

$$z\longrightarrow \frac{+c}{\sqrt{b^2+c^2}}y+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}z.$$

得新方程 $X^2-\sqrt{b^2+c^2}\,Y+d=0$.

此时又化归为情形 1.2.

情形 1. 讨论完毕.

情形2. $|\lambda_1|, |\lambda_2| \neq 0$, $|\lambda_3| = 0$.

此时 $F_2 \circ \Phi = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$

情形2.1 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.

此时不妨设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$。考察一次项

$F_1 \circ \Phi = ax + by + cz$。
通过x, y-轴的平移，我们不妨假设 $a = b = 0$
情形2.1.1 $a = b = c = 0$.
得到 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$
情形2.1.1.1, $d > 0$

此时得空集，化归为 M_0.

情形2.1.1.2, $d = 0$

此时得 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0 \iff x = y = 0$

$\iff x^2 + y^2 = 0$

化归为 $M4$.

情形2.1.1.3. $d < 0$

此时得 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$, $d < 0$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$

同时除以 $-d$，得

$\frac{x^2}{\tilde{a}} + \frac{y^2}{\tilde{b}} - 1 = 0$. 其中 $\tilde{a} \geq \tilde{b} > 0$.

化归为 $M5$.

令 $a \geq b > 0$, $a' \geq b' > 0$, 且

$$\left\{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=0\right\} \text{合同于} \left\{\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-1=0\right\}.$$

断言：$a'=a$, $b'=b$。

如同情形1.2.2的讨论，我们不妨假设 Ψ 为旋转。Ψ 有如下限制：

(i) $\Psi(x)= c_1x+c_2y+c_3z$
$\Psi(y)= \tilde{c}_1x+\tilde{c}_2y+\tilde{c}_3z$ 　，　则 $c_3=\tilde{c}_3=0$.

这是因为 $F_2\circ\Psi$ 包含 $\left(\frac{c_3^2}{a}+\frac{\tilde{c}_3^2}{b}\right)z^2$. 所以

$$\frac{c_3^2}{a}+\frac{\tilde{c}_3^2}{b}=0 \Rightarrow c_3=\tilde{c}_3=0.$$

所以我们可以假定 Ψ 为固定 z-轴的旋转.

(ii) 由于 Ψ 保持 xy-平面.

$$\left\{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=0\right\}\cap\{z=0\} \longrightarrow \left\{\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-1=0\right\}\cap\{z=0\}.$$

a 为椭圆的长轴，b 为椭圆的短轴，分别代表椭圆上的点到圆心的最长距离和最短距离. 由于 Ψ 保距，且保原点，故

$$a=a',\ b=b'. \quad \text{得证。}$$

情形2.1.2. $a=b=0$, $c\neq 0$.

得方程

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+cz+d=0,\quad \lambda_1\geq\lambda_2>0.$$

通过沿 z-轴的平移 $z\to z-\frac{d}{c}$, $x\to x$, $y\to y$.

我们假定 $d=0$.

若 $c>0$, 则通过旋转 $x\to x$, $y\to -y$, $z\to -z$.

得到 $c<0$.

两边同时除以 $-c$, 得到

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-z=0,\quad a\geq b>0.$$

故化归为 M6.

令 $\left\{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-z=0\right\}\cong\left\{\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-z=0\right\}$; $a\geq b>0$, $a'\geq b'>0$

断言: $a=a'$, $b=b'$.

类似上面的分析, Φ 必然是旋转. 且

$$\Phi(x),\ \Phi(y)\ \text{中无}\ z\text{-项},\ \text{且}\ \Phi(z)=z.$$

故 Φ 为绕 z-轴的旋转. 故 $\Phi(\{z=1\})=\{z=1\}$

即 $\Phi\left(\left\{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1\right\}\right)=\left\{\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}=1\right\}$.

利用情形 2.1.1.3 的分析, 得 $a=a'$, $b=b'$.

情形 2.2 $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$.

不妨设 $\lambda_1>0>\lambda_2$，考察一次项

$F_1\circ\Phi = ax+by+cz$

通过平移，可以假设 $a=b=0$.

情形 2.2.1. $a=b=c=0$.

得方程

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+d=0,\quad \lambda_1>0>\lambda_2,$$

情形 2.2.1.1. $d=0$

则除 λ_1，得

$$x^2-ay^2=0.\quad a>0$$

此为 M_7 中的元素，即一对相交的平面.

很显然，a 决定相交平面的夹角. 所以

$$\{x^2-ay^2=0\} \cong \{x^2-a'y^2=0\},\quad a,a'>0$$

$$\Longleftrightarrow a=a'.$$

情形 2.2.1.2. $d\neq 0$

若 $d>0$，则方程两边同时除以 d，得

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+1=0,\quad a,b>0$$

若 $d<0$，则方程两边同时除以 $-d$，且做旋转

$x\longrightarrow y,\quad y\to -x,\quad z\longrightarrow z.$ 得

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+1=0,\quad a,b>0.$$

令 $\left\{\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+1=0\right\} \cong \left\{\frac{x^2}{a'}-\frac{y^2}{b'}+1=0\right\}$

其中 $a, b, a', b' > 0$.

断言 $a=a'$, $b=b'$.

如前面讨论，我们不妨假设 Ψ 为旋转。令

$$\Psi(x) = c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

$$\Psi(y) = \tilde{c}_1 \cdot x + \tilde{c}_2 \cdot y + \tilde{c}_3 \cdot z$$

代入方程式 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+1$，得：

$$\frac{(c_1x+c_2y+c_3z)^2}{a} - \frac{(\tilde{c}_1x+\tilde{c}_2y+\tilde{c}_3z)^2}{b}+1$$

比较与 $\frac{x^2}{a'}-\frac{y^2}{b'}+1$ 的二次项系数，得关系式

$$(*)_1 \begin{cases} \frac{c_3^2}{a} = \frac{\tilde{c}_3^2}{b} \\ \frac{c_1c_2}{a} = \frac{\tilde{c}_1\cdot\tilde{c}_2}{b} \\ \frac{c_1c_3}{a} = \frac{\tilde{c}_1\cdot\tilde{c}_3}{b} \\ \frac{c_2c_3}{a} = \frac{\tilde{c}_2\cdot\tilde{c}_3}{b} \end{cases} \quad \text{和} \quad (*)_2 \begin{cases} \frac{c_1^2}{a} - \frac{\tilde{c}_1^2}{b} = \frac{1}{a'} \\ \frac{c_2^2}{a} - \frac{\tilde{c}_2^2}{b} = \frac{-1}{b'} \end{cases}$$

先考察 $(*)_1$：设 $c_3 \neq 0$. 则有

$$\frac{c_3}{\tilde{c}_3} = \frac{c_1}{\tilde{c}_1} = \frac{c_2}{\tilde{c}_2} = \lambda.$$

即 $(c_1, c_2, c_3) = \lambda(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$. $\lambda \neq 0$.

由于 Ψ 是旋转:

$$\langle (c_1, c_2, c_3), (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot (\tilde{c}_1^2 + \tilde{c}_2^2 + \tilde{c}_3^2) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{c}_3 = 0 \quad \text{矛盾.}$$

故得到: $c_3 = \tilde{c}_3 = 0$。

故得
$$\begin{cases} c_1^2 + c_2^2 = \tilde{c}_1^2 + \tilde{c}_2^2 = 1 \\ c_1\tilde{c}_1 + c_2\tilde{c}_2 = 0 \end{cases}$$

故有 $c_1 = \cos\theta$, $c_2 = \sin\theta$

$\tilde{c}_1 = -\sin\theta$, $\tilde{c}_2 = \cos\theta$

利用 $(*)_1$ 中 $\dfrac{c_1 c_2}{a} = \dfrac{\tilde{c}_1 \cdot \tilde{c}_2}{b}$, $a, b > 0$

得 $(a+b)\cos\theta\sin\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$ 或 $\sin\theta = 0$

若 $\cos\theta = 0$ 即 $c_1 = 0$, 则代入 $(*)_2$ 中的第一式得矛盾.

故 $\sin\theta = 0$, 即 $c_2 = 0$. 故有

$$c_1 = \tilde{c}_2 = 1, \quad \cancel{\tilde{c}_2} = \tilde{c}_1 = 0.$$

代入 $(*)_2$, 即得 $a = a'$, $b = b'$. 断言得证.

情形 2.2.2 $a=b=0,\ c\neq 0$

得方程

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+ cz+d=0$$

通过 z-轴平行，总是可以假定 $d=0$.

两边同时除以 c，得

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+z=0.$$

如同情形 2.2.1.2. 我们总是通过旋转，获得

$$a,\ b>0.$$

此为 M9。令

$$\left\{\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}+z=0\right\}\equiv\left\{\frac{x^2}{a'}-\frac{y^2}{b'}+z=0\right\},\ \begin{matrix}a,b>0\\ a',b'>0\end{matrix}$$

断言： $a=a',\quad b=b'$。

首先，Φ 必然是关于 z-轴的旋转。

其次，类似于情形 2.2.1.2 最后一部分的讨论，可以得出

$$a=a',\ b=b'.$$

情形 2 讨论完毕。

情形 3，$|\lambda_1|;|\lambda_2|,|\lambda_3|>0.$

此时 $F_2\circ\Phi=\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2.$

情形 3.1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同号

此时不妨设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$. 考察

$$\overline{F} \circ \Phi = a \cdot x + by + cz$$

显然, 通过平移, 我们可以假设

$$a = b = C = 0.$$

故进而, 直接考察

$\overline{F_0} \circ \Phi = d$, 即给出 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$

情形 3.1.1 $d = 0$

解 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$

得 $x = y = z = 0$.

故化归为 M_{10}.

情形 3.1.2. $d > 0$

得 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$

$\Rightarrow M_0$

情形 3.1.3. $d < 0$

两边同时除以 d, 得

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0, \quad a \geq b \geq c > 0.$$

令 $\left\{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0\right\} \equiv \left\{\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}+\frac{z^2}{c'}-1=0\right\}$

$a \geq b \geq c > 0, \qquad a' \geq b' \geq c' > 0.$

断言：$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

注意到在 X-，Y-，Z-轴上的任何平移都将改变多项式

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1$ 的常数项。所以，Φ 必然是旋转。

即 Φ 保持原点。我们先考察如下情形：

$a > b > c > 0$

此时由方程 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$ 定义的椭球面（我们记之为

A）有唯一长轴 X-轴，和有唯一短轴 Z-轴，且其轴长

（即原点到 A 的最长或最短距离）分别为 $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{c}$。因

因为 Φ 保持距离，所以由另一个方程 $\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}+\frac{z^2}{c'}=1$

定义的椭球面（我们记之为 A'）也有唯一长轴和唯一短轴

且轴长相应的分别为 $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{c}$。从这里，我们得出两个结论

(1) $a'=a$，$c'=c$

(2) Φ 必将 X-轴和 Z-轴保持。

而 (2) 推出 Φ 只能是恒等映射（习题）。所以

$b=b'.$

其次我们考察如下情形：

$$a=b=c>0$$

此时 A 为半径为 $\sqrt{a}$，球心在原点的球面。由于 Φ 保原点、又保距，那么必是 $A'=A$。所以

$$a'=b'=c'=a.$$

最后我们考察情形：

$$a=b>c>0$$

根据第一种情形的讨论，我们知道

(1) $a'=a$, $c'=c$

(2) Φ 必将保持 z-轴（因为 z-轴是唯一短轴）。

由(2)推出，Φ 必定形如：

$$\Phi(X)=\cos\theta\cdot X+\sin\theta\, Y$$

$$\Phi(Y)=-\sin\theta\cdot X+\cos\theta\, Y$$

$$\Phi(z)=z$$

代入原多项式，比较 y^2 项系数，得：

$$\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{b}=\frac{1}{b'}$$

故 $b=b'$.

断言得证。

情形 3.2，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 异号.

我们不妨假定 $\lambda_1\geq\lambda_2>0>\lambda_3$，而且 $F_1\cdot\Phi=0$（即没有一次项）。故得方程 $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+d=0$

情形 3.2.1，$d=0$

两边同时除以 $-\lambda_3$，得

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-z^2=0,\qquad a\geq b>0$$

此为 M_{13}。令

$$\left\{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-z^2=0\right\}\cong\left\{\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-z^2=0\right\}$$

$$a\geq b>0,\qquad a'\geq b'>0.$$

断言：$a=a'$，$b=b'$.

记左边方程定义的二次锥面为 A，右边的为 A'.

考虑通过原点，且交于 A 得两条交于原点的母线（直线）的平面。Φ 将 A 上两条相交的直线送到 A' 上两条相交的直线。其交点只能是 A' 的锥点，即为 O. 所以 Φ 保持原点，即 Φ 为旋转。再进一步，Φ 必然是保持 z 轴的旋转。这是因为，我们取不过原点且垂直于 z 轴的平面截 A 得一圆. 那么 Φ 必将此圆送到 A' 上的一

圆（相同半径的）。而对于锥面 A'，也只有垂直于 z-轴且不过原点的平面截 A' 得圆。所以 z-轴必然被 Φ 所保持（另一种说法是说 z-轴是锥面的开口方向）。综上，我们得 Φ 的表达式

$$\Phi(x) = \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y$$

$$\Phi(y) = -\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y$$

$$\Phi(z) = z$$

代入原方程式，并比较 x^2, y^2 项系数，得

$$a = a', \quad b = b'.$$

情形 3.2.2. $d > 0$

两边同时除以 d，得方程

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} + 1 = 0, \quad a \geq b > 0, \ c > 0$$

此为 M14。令

$$\left\{\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} + 1 = 0\right\} \equiv \left\{\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} - \frac{z^2}{c'} + 1 = 0\right\}$$

$$a \geq b > 0, \ c > 0, \qquad a' \geq b' > 0, \ c' > 0$$

断言：$a = a'$, $b = b'$, $c = c'$。

记左边双叶双曲面为 A，右边为 A'。注意到 A 的两叶的之间的最短距离由点 $\overset{P}{(0,0,\sqrt{c})}$ 和 $\overset{P}{(0,0,-\sqrt{c})}$ 实现；而 A' 的

两叶的最短距离到椭 $\underset{p}{(0,0,\sqrt{c})}$ 和 $\underset{-p}{(0,0,-\sqrt{c})}$ 实现. 由于Φ保距, 那么我们必有

(1) $c=c'$.

(2) $\Phi(p)=p'$, $\Phi(-p)=-p'$.

或 $\Phi(p)=-p'$, $\Phi(-p)=p'$.

由于Φ必把直线映到直线, 所以Φ把p和$-p$的连接直线映到p'和$-p'$的连接直线, 即Φ把z-轴映到z-轴. 在第一种情形 $\Phi(z)=z$, 在第二种情形 $\Phi(z)=-z$。所以我们可以不妨假定Φ为固定z-轴的旋转. 接下来的讨论是和情形3.2.1是一样的。故有

$$a=a',\quad b=b'.$$

情形3.2.3. $d<0$

两边同时除以$-d$, 得

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}-1=0,\quad a\geq b>0,\ c>0$$

此为M12. 令

$$\left\{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}-1=0\right\}\cong\left\{\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-\frac{z^2}{c'}-1=0\right\}$$

断言: $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$.

记左边单叶双曲面为A, 右边为A'。

我们观察平面与A(和A')的椭圆截口。从几何上，

我们容易得到结论：XY-平面与A(和A')的椭圆截口在所有的椭圆截口中长，短轴均为最小。(我们把该结论在代数上的证明留作习题)。由Φ的保距性，Φ有如下性质：

(1) ~~$\Phi(\{z=0\})=\{z=0\}$~~

(2) $\Phi\left(\left\{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1,\ z=0\right\}\right)=\left\{\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}=1,\ z=0\right\}$.

由(2)得 $a=a'$, $b=b'$. 且 $\Phi(0)=0$.

故Φ为固定z-轴的旋转. 即

$\Phi(z)=z$, 且$\Phi(x)$, $\Phi(y)$不含z-项.

代入原式，并比较z^2项系数，知

$c=c'$。

定理至此全部得证。

#

我们观察平面与A(和A')的椭圆截口。从几何上,我们容易得到结论: XY-平面与A(和A')的椭圆截口在所有的椭圆截口中长,短轴均为最小。(我们把该结论在代数上的证明留作习题)。由Φ的保距性,Φ有如下性质:

(1) ~~$\Phi(\{z=0\}) = \{z=0\}$~~

(2) $\Phi\left(\left\{\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1,\ z=0\right\}\right)=\left\{\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}=1,\ z=0\right\}$.

由(2)得 $a=a'$, $b=b'$. 且 $\Phi(0)=0$.

故Φ为固定z-轴的旋转. 即

$\Phi(z)=z$, 且 $\Phi(x)$, $\Phi(y)$ 不含z-项.

代入原方程式,并比较 z^2 项系数,知

$c=c'$。

定理至此全部得证。

#

注记3: 在上述证明中,有一个论证不甚严密的地方:即对 $i\neq j$, 任意类 M_i 中的二次曲面不会合同于某一类 M_j 中的二次曲面。为了说明"貌似显然"的命题,我们认为最简单的办法是考察平面与二次曲面的截线类型。~~由于椭球~~ 注意到这些截线其实是~~如果不是~~[illegible]

平面中的二次曲线．所以，它们可能出现的类型（在 E^2 上的刚体变换下）有：

N0) 空集
N1) 点
N2) 直线
N3) 两条平行的直线
N4) 两条相交的直线
N5) 椭圆
N6) 抛物线
N7) 双曲线。

现设 $A \subset E^3$ 为一二次曲面，$H \subset E^3$ 为一平面，$\phi: E^3 \to E^3$ 为一刚体变换．则 $A' = \phi(A)$ 为二次曲面，$H' = \phi(H)$ 为平面．

且 $\phi(A \cap H) = A' \cap H'$．

习题：记 $C = A \cap H$，$C' = A \cap H'$ 并假定 C 与 C' 为二次曲线．

(1) C 与 C' 类型相同．

(2)

A \ C	N0	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7
M0	✓							
M1	✓		✓					
M2	✓			✓				
M3	✓		✓	✓			✓	
M4	✓	✓	✓					

	N0	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7
M5	✓		✓	✓		✓		
M6	✓	✓				✓	✓	
M7		~~✓~~	✓	✓	✓			
M8	✓		✓	✓				✓
M9					✓		✓	✓
M10	✓	✓						
M11	✓	✓				✓		
M12						✓		✓
M13		✓	✓		✓	✓	✓	✓
M14	✓	✓				✓		✓
~~M15~~								

从这个问题，我们发现对于任意 $i \neq j$，M_i 与 M_j 中的二次曲面与平面相交的截线类型是不同的。所以 M_i 与 M_j 的任意二次曲面不会合同。

注记22：E^3 中的二次曲面在刚体变换下的分类是几何学中众多分类问题的一个缩影。从上面的过程来看，代数的作用（这里指线性代数）是必不可少的。

一个一般的几何学分类问题常涉及到：定义一类几何对象，规定好一个对象之间的等价关系；分类过程往往会用到代数，甚至分析的工具。

四、几何和对称

在进入下一章关于射影几何的学习之前，我们做一个总结性和前瞻性的思考：几何学是什么？在不同的历史时期，这个问题有不同的回答。在1872年，F. 克莱茵提出了Erlangen纲领。在这个纲领中，克莱茵利用变换群(对称)的思想统一了当时几个不同的几何学分支：欧氏几何，非欧几何(双曲与椭圆)与射影几何；提出几何学是研究几何对象在给定变换群作用下不变的性质；并前瞻性得预测了新几何。例如：代数几何是研究双有理变换下的不变性质；拓扑学是研究拓扑变换(即同胚)下的不变性质；辛几何学是研究辛流形在辛变换下的不变性质。

现代的几何学研究呈现出多学科交叉融合的特征。同时，很难只用一个观点去看清一些几何学分支。但就我们大学期间学习的几何学课程而言，克莱茵的观点还是非常精辟和具有指导性的。因此，在本章中，我们将以平面几何为模型来解释克莱茵关于几何和对称的观点。

我们知道 E^2 上的刚体变换在直角坐标下有表达

$$\phi(x,y)=(x,y)\cdot A+(x_0,y_0),$$

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad \theta\in\mathbb{R}$$

刚体变换由以下两条性质刻画：

(1) 保欧氏距离；

(2) 保定向。

定义1: E^n上的**正交变换**是指 $\phi: E^n\to E^n$ 满足

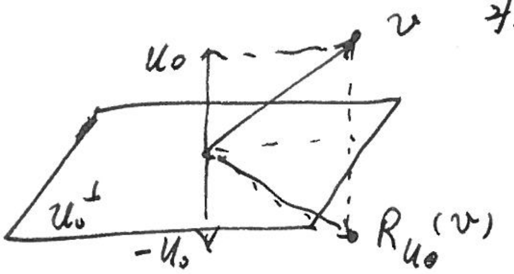
$$d_E(\phi(P),\phi(Q)) = d_E(P,Q),\quad \forall P,Q\in E^n.$$

正交变换与刚体变换的区别就在于是否保定向。

例2（反射）. 令 $u_0\in E^n$, $|u_0|=1$

定义 $R_{u_0}: E^n\longrightarrow E^n$

$$v\longmapsto v-2\langle v,u_0\rangle u_0$$



习题: R_{u_0}是正交变换，但不是刚体变换。

命题3: E^2上的正交变换在标准直角坐标系有表达式:

$$\phi(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}\cos\theta & \pm\sin\theta\\ -\sin\theta & \pm\cos\theta\end{pmatrix}+(x_0,y_0),\quad \theta\in\mathbb{R}$$

证明: 习题。

注记4: 令 $SO(2)=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\middle|\ \theta\in\mathbb{R}\right\}$

$$O(2)=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \pm\sin\theta\\ -\sin\theta & \pm\cos\theta\end{pmatrix}\middle|\ \theta\in\mathbb{R}\right\}$$

例 $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2 \mid A \cdot A^T = I,\ |A| > 0\}$

$$O_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2 \mid A \cdot A^T = I\}$$

容易验证: (1) $SO_2(\mathbb{R})$, $O_2(\mathbb{R})$ 关于矩阵乘法构成群

(2) $SO_2(\mathbb{R}) \lhd O_2(\mathbb{R})$ （正规子群）

(3) $O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \amalg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R})$

（陪集分解）

更进一步: 我们令

$$G_{刚体} = \{(A, u) \mid A \in SO_2(\mathbb{R}),\ u \in E^2\}$$

并定义乘法

$$(*) \quad (A, u) \cdot (B, v) \triangleq (B \cdot A,\ v \cdot A + u)$$

命题4: $(G_{刚体}, \cdot)$ 构成群。事实上, 存在自然同构

$$\text{刚体变换群} \simeq G_{刚体}.$$

证明: (transportation of structure). 即把刚体变换和其在标准直角坐标系下的表达式中的旋转矩阵 A 和平移向量 u 等同起来. 验证刚体变换的复合诱导集合 $G_{刚体}$ 上的乘法运算. #

同理，令

$$G_{正交}=\{(A,u)\mid A\in O_2(\mathbb{R}),\ u\in E^2\}$$

则在 $G_{正交}$ 上由(*)给出的乘法同样定义 $G_{正交}$ 的群结构。

我们有如下图表：

$$\begin{array}{ccc} \text{刚体变换群} & \simeq & G_{刚体} \\ \wedge\!\!| & & \wedge\!\!| \\ \text{正交变换群} & \simeq & G_{正交} \end{array}$$

以及如下图表：

	几何	变换(对称)	
少 ↓	保距，保定向	刚体变换	↓ 大
	保距	正交变换	

克莱因把几何定义成在变换(对称)群下保持不变的性质。

我们再来看更多的例子来理解克莱因的观点。

回忆我们在中学几何中学过相似的概念。注意到保距推出保角，而相似是保角而不保距的。事实上，我们有

$$GO_2(\mathbb{R}) = \{\lambda\cdot A \mid \lambda\in\mathbb{R}_{>0},\ A\in O_2(\mathbb{R})\}$$

对于 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$, $A\in O_2(\mathbb{R})$.

$$|\lambda\cdot A| = \left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\cdot A\right| = \left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|\cdot|A|$$

$$= \lambda^2\cdot|A| \neq 0$$

所以 $GO_2(\mathbb{R}) \subseteq GL_2(\mathbb{R})$. 又因为

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}\cdot A^T \in GO_2(\mathbb{R}).$$

$$(\lambda A)\cdot(\mu\cdot B) = (\lambda\cdot\mu)\cdot(A\cdot B) \in GO_2(\mathbb{R}),\quad \forall\ \lambda\cdot A\in GO_2(\mathbb{R}),\ \mu\cdot B\in GO_2(\mathbb{R}).$$

所以 $GO_2(\mathbb{R}) \leq GL_2(\mathbb{R})$, 而且

$$SO_2(\mathbb{R}) \lneqq O_2(\mathbb{R}) \lneqq GO_2(\mathbb{R}) \lneqq GL_2(\mathbb{R}).$$

定义(相似变换)

$\Phi: E^2\to E^2$ 称为相似变换, 如果

$$\Phi(x,y) = (x,y)\cdot A + u,\qquad A\in GO_2(\mathbb{R}),\ u\in E^2.$$

显然, 所有相似变换构成相似变换群, 它对应着群

$$G_{\text{相似}} = \{(A,u) \mid A\in GO_2(\mathbb{R}),\ u\in E^2\}.$$

命题6：相似变换群保角但不保长。即 $\forall \angle PQR \subset E^2$

$\forall\ \Phi: E^2 \to E^2$ 相似变换，

$$\angle PQR = \angle \Phi(P)\Phi(Q)\Phi(R)。$$

证明：首先说明 $G_{相似}$ 不保长。

令 $P=(x_1, y_1)$，$Q=(x_2, y_2)$，$R=(x_3, y_3)$

取 $\Phi(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$，~~]~~ $\lambda \neq 1$.

$$d_E(\Phi(P), \Phi(Q)) = d_E((\lambda x_1, \lambda y_1), (\lambda x_2, \lambda y_2))$$

$$= |(\lambda(x_1-x_2), \lambda(y_1-y_2))|$$

$$= |\lambda|\,|(x_1-x_2, y_1-y_2)|$$

$$= \lambda \cdot d_E(P, Q)$$

$$\neq d_E(P, Q).$$

进而，对任意

$$\Phi(x,y) = (x,y)\lambda A + (x_0, y_0), \quad \lambda > 0,\ A \in O_2(\mathbb{R})$$

$$\angle \Phi(P)\Phi(Q)\Phi(R) = \frac{\langle \Phi(P)-\Phi(Q), \Phi(R)-\Phi(Q)\rangle}{|\Phi(P)-\Phi(Q)|\cdot|\Phi(R)-\Phi(Q)|}$$

$$= \frac{\langle (P-Q)\lambda A, (R-Q)\lambda A\rangle}{|(P-Q)\lambda A|\cdot|(R-Q)\lambda A|}$$

$$= \frac{\lambda^2 \langle (P-Q)A, (R-Q)A \rangle}{\lambda^2 \cdot |(P-Q)A| \cdot |(R-Q)A|}$$

$$= \frac{\langle (P-Q)\cdot A, (R-Q)A \rangle}{|(P-Q)A| \cdot |(R-Q)\cdot A|}$$

$$= \frac{\langle P-Q, R-Q \rangle}{|P-Q| \cdot |R-Q|} = \angle PQR.$$

#.

习题：回忆 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，如果有两角相等。证明：存在相似变换 Φ 将 $\triangle ABC$ 映到 $\triangle A'B'C'$。并证明对应边长度比例是定值。

从 $G_{正交}$ 到 $G_{相似}$，我们得到了更大的变换群，从而相应的几何性质变少了。我们还有一种有意思的办法将 $G_{正交}$ 变为更大的变换群。

习题：注意 $A \in O_2(\mathbb{R})$，$AA^T = E \Rightarrow |A| \cdot |A^T| = 1$

$$\Rightarrow |A| = \pm 1.$$

定义 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})} = \{ A \in M_2 \mid |A| = \pm 1 \}$。

显然有

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} & & \\ & & & \rotatebox{45}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{-45}{$\subsetneq$} & \\ SO_2(\mathbb{R}) & \subsetneq & O_2(\mathbb{R}) & & & & GL_2(\mathbb{R}) \\ & & & \rotatebox{-45}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{45}{$\subsetneq$} & \\ & & & & GO_2(\mathbb{R}) & & \end{array}$$

定义 $G_{面积} = \{ (A, u) \mid A \in \widetilde{SL_2(\mathbb{R})},\ u \in E^2 \}$

证明：令 $\Phi: E^2 \to E^2$，$\Phi(x,y) = (x,y)A + u$.

$(A, u) \in G_{面积}$

(1) Φ 不保距，也不保角，

(2) Φ 保三角形的面积。

大家必然已经注意到，我们可以将 $G_{相似}$ 和 $G_{面积}$ 同时扩大到一个共同的，更大的变换群.

定义7：$G_{仿射} = \{(A, u) \mid A \in GL_2(\mathbb{R}),\ u \in E^2\}$.

其对应的变换称为仿射变换。

非常容易确认仿射变换既不保角，也不保面积。那么还有什么性质是仿射变换保持的呢？这恰恰是仿射几何的内容。我们稍微介绍：

仿射变换最大的特点是保线性。比如 P, Q, R 三点(不)共线，则在仿射变换下仍然(不)共线。进而，我们有如下命题：

命题8：令 $P, Q, R \in E^2$，$\Phi: E^2 \to E^2$ 仿射变换，令 $P' = \Phi(P)$，$Q' = \Phi(Q)$，$R' = \Phi(R)$.

则有：

(1) 若 P, Q, R 共线，则 P', Q', R' 共线，且

$$\frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{|P'R'|}{|P'Q'|}$$

(2) 若 P,Q,R 不共线，则 P',Q',R' 也不共线，且

$$\frac{S_{\triangle P'Q'R'}}{S_{\triangle PQR}} = \text{常数}，$$ 即不依赖于 P,Q,R 的选取.

证明：习题。 #

习题：（一般坐标系）.

令 $\Phi: E^2 \to E^2$ 为一仿射变换.

记 $\Phi(O)=O'$， $\tilde{\Phi} = T_{O'} \cdot \Phi$.

记 $\tilde{\Phi}(e_i) = e_i'$. $1 \le i \le 2$.

试证：对任意 $u \in E^2$，存在唯一实数 x', y'，使得

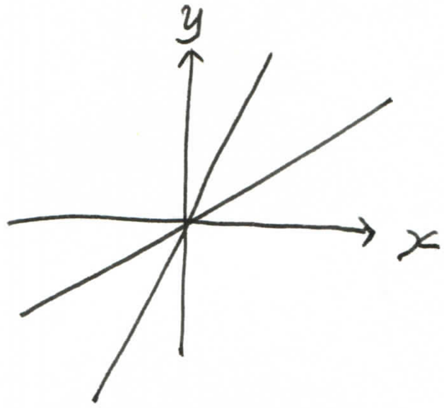
$$u = x' \cdot e_1' + y' \cdot e_2'.$$

从而 $\{O'; e_1', e_2'\}$ 可以看作 E^2 的一个新的"坐标系"：E^2 中的每点由唯一的一个数对所代表。~~这~~

克莱因关于几何和对称的思想和当时S.李发展李群的理论是契合的。事实上，我们已经看到了最基本的李群及其子群的例子。学好李群对于学好几何是非常重要的。最后提一个问题（这也是克莱因发表的1872年演讲的一个重要观点）：还有没有比仿射变换群"更大"的变换群，以及相应的仍然"有趣"的几何？这个问题，将我们引入射影几何的新世界.

五. 射影平面.

我们考察如下问题:试将平面上所有过原点的直线参数化.



我们知道这个集合为

$$\{[ax+by=0] \mid a,b\text{不同时为零}\}$$

而且 $[ax+by=0]=[a'x+b'y=0]$

$\Leftrightarrow \exists\ \lambda\neq 0$, 使得

$$a'=\lambda a\ ,\ b'=\lambda b$$

所以我们考察集合

$$\mathbb{R}^2-\{0\}=\{(a,b)\mid(a,b)\neq(0,0)\}$$

以及等价关系:

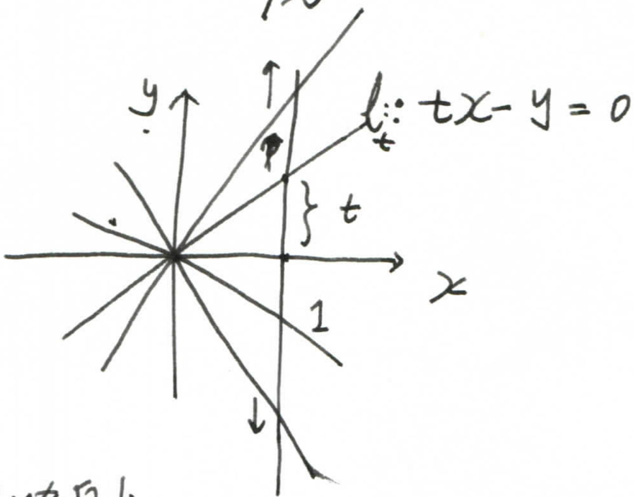
$(a,b)\sim(a',b')$, 假如存在 $\lambda\neq 0$,

使得: $a'=\lambda a$, $b'=\lambda b$, ~~成立~~.

所以 $\mathbb{R}^2-\{0\}/\sim$ 是我们开始问题的一个答案.

如何理解 $\mathbb{R}^2-\{0\}/\sim$?

记 $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R}^2-\{0\}/\sim$



我们有自然映射:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}P^1 \\ t & \longmapsto & [(t,1)] \end{array}$$

φ 是单射, 但并非满射. 因为 y-轴所对应的点,

$[(1,0)]$ 并不在 φ 的像集上. 注意到当

$t\to\infty$, 或 $t\to-\infty$ 时

$$\varphi(t)\longrightarrow[(1,0)]$$

我们把 $\mathbb{R}P^1$ 上的点 $[(1,0)]$ 称为直线的无穷远点. 所以

$\mathbb{R}P^1$ 可理解为添加无穷远点的直线.

习题: 无穷远点并非特殊点. 事实上, 我们有双射

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}P^1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ e^{i\theta} & \longmapsto & [(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})] \end{array}$$

复合映射

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^1 \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[dr] & \mathbb{R}P^1 \arrow[d, "\psi^{-1}", "\wr"'] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

验证：$\psi^{-1}\circ\varphi(\mathbb{R}^1) = S^1 \setminus \{(1,0)\}$

~~齐次坐标~~：我们称 $\mathbb{R}P^1$ 为射影直线.

显然，$\mathbb{R}^2$ 上的坐标 (x,y) 并非 $\mathbb{R}P^1$ 上好的坐标；但是我们利用记号 $(x:y)$ 来表达 $\mathbb{R}P^1$ 是恰当的：

(1) x, y 不同时为 0；

(2) $(x:y) = (x':y')$，如果 $\exists\, \lambda \neq 0$，使得：

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y.$$

我们称 $(x:y)$ 为 $\mathbb{R}P^1$ 上的齐次坐标.

接下来，我们将上述考虑推广到高一维，即射影平面.

$$\mathbb{R}P^2 \triangleq \mathbb{R}^3 - \{0\} \big/ \sim$$

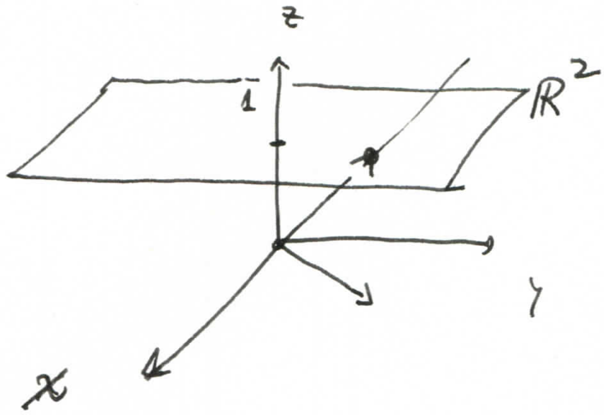
$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \iff \exists\, \lambda \neq 0,\ \text{s.t.}$$

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z.$$

齐次坐标：$(x:y:z)$

射影平面有两重身份：首先 $\mathbb{R}P^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中所有穿过原点直线

的集合；其次 $\mathbb{R}P^2$ 是我们二维平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个扩充，即所谓的 $\mathbb{R}^2$ 添加上一条无穷远直线（地平线）。



可以清楚地看到：若 $(x:y:z)$ 有 $z\neq 0$，则

直线 $\{(tx, ty, tz) \mid t\in\mathbb{R}\}$ 交 $\{z=1\}$ 平面于唯一一点，

其坐标为 $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$。若 $(x:y:z)$ 有 $z=0$，则

直线落在 xy-平面，而根据上述讨论，它们和 $\mathbb{R}P^1$ 上的

点一一对应，所以：

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \underbrace{\mathbb{R}P^1}_{\text{无穷远直线}}$$
$$= \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^1 \sqcup \mathbb{R}^0$$

当然，我们可以进一步定义 $\mathbb{R}P^n$，$\forall n\in\mathbb{N}$。但是，$\mathbb{R}P^2$，做为 $\mathbb{R}^2$ 的自然扩充，是古典射影几何讨论的主要对象。所以，我们将从 $\mathbb{R}P^2$ 为主要舞台，展开对射影几何的探讨与学习。

$\mathbb{R}P^2$ 上的点与线：

我们可以把 $(x:y:z)$ 满足 $z\neq 0$ 的点称为普通点；而把 $(x:y:0)$ 的点称为一个无穷远点。从而 $\mathbb{RP}^2$ 上的点集是普通点集合与无穷远点集合的无交并。有趣的，也是更重要的是，$\mathbb{RP}^2$ 上的每一点其实代表着 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的一条直线，因而普通与无穷并无区别。

注记：在历史上，数学家很早就注意到区分几何对象中~~对~~点的定义是没有意义的。点不仅仅是描述所谓一空间的一个位置，它其实可以是任意东西。重要的不是点是什么，而是点与点的关系是什么（即所谓几何的结构）。

定义2：$\mathbb{RP}^2$ 中的一条直线是满足某一齐次线性方程的点集：

即 $\{(x:y:z)\in\mathbb{RP}^2 \mid ax+by+cz=0,\ a,b,c \text{ 不全为 } 0\}$.

思考题：为什么我们要求线性方程是齐次的？

我们有一条"特殊"的直线，即

$$l_\infty \doteq \{z=0\}.$$

l_∞ 由所有的无穷远点构成，即称为无穷远直线。

$\mathbb{RP}^2$ 上的直线相交性质与 $\mathbb{R}^2$ 上直线相交性质有一个很大的不同：

命题3：$\mathbb{RP}^2$ 上任意两条直线必相交，且相交于一点。

证明：记

$$l_i = \{a_i x + b_i y + c_i z = 0\}, \quad i=1,2$$

为两条 $\mathbb{RP}^2$ 上不同的直线。因为 $l_1 \neq l_2$，故据定义，则有

$$(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) \neq 0.$$

所以
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

定义了 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的一条直线，亦即 $\mathbb{RP}^2$ 中的一个点。显然这个点即为 $l_1 \cap l_2 \in \mathbb{RP}^2$.

#

我们有自然的办法将 $\mathbb{R}^2$ 上的直线扩充成 $\mathbb{RP}^2$ 上的直线，这就是坐标齐次化的办法：

令 $l^0: ax + by + c = 0$，a, b 不全为0

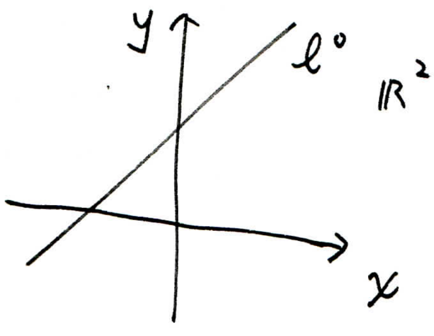
为 $\mathbb{R}^2$ 上的一条直线.

坐标齐次化是指：令 $x = \frac{X}{Z}$，$y = \frac{Y}{Z}$. 代入 l^0 的方程得

$$a\left(\frac{X}{Z}\right) + b\left(\frac{Y}{Z}\right) + c = 0.$$

两边同时乘以 Z，得

$$l: \quad aX + bY + cZ = 0$$



$l \subset \mathbb{RP}^2$ 为直线。它与 l^0 的关系如下：

$$\ell = \underset{\ell^\circ}{\underset{\|}{\ell \cap \mathbb{R}^2}} \amalg \underset{\ell^\circ \text{对应的无穷远点.}}{\underset{\|}{\ell \cap \ell_\infty}}$$

事实上 $\mathbb{R}^2 = \{(x:y:z) \in \mathbb{RP}^2 \mid z \neq 0\}$

$\ell_\infty = \{(x:y:z) \in \mathbb{RP}^2 \mid z = 0\}$

所以

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a(\tfrac{x}{z})+b(\tfrac{y}{z})+c=0$$

即 $a\cdot x + b\cdot y + c = 0$

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \ell \cap \ell_\infty = \{(-b:a:0)\}$$

我们称 ℓ 为 ℓ° 的射影化.

习题: 令 $\ell_i^\circ \subset \mathbb{R}^2$, $i=1,2$, 则有:

(1) 若 $\ell_1^\circ \nparallel \ell_2^\circ$, 则 $\ell_1 \cap \ell_2 = \ell_1^\circ \cap \ell_2^\circ \in \mathbb{R}^2 (\subset \mathbb{RP}^2)$.

(2) 若 $\ell_1^\circ \parallel \ell_2^\circ$, 则

$$\ell_1 \cap \ell_2 = \ell_1 \cap \ell_\infty = \ell_2 \cap \ell_\infty \in \ell_\infty (\subset \mathbb{RP}^2)$$

此道习题解释了"两条平行线相交于地平线"。

坐标齐次化是~~~~联结 $\mathbb{R}^2$ 上的几何与 $\mathbb{RP}^2$ 上的几何的有效办法。我们在稍后的二次曲线的讨论里还会涉及. 我们先讨论 $\mathbb{RP}^2$ 与 $\mathbb{R}^2$ 关于

点、线关联性质相同的地方：

命题4：令 $P_i \in \mathbb{R}P^2$, $i=1,2$ 为两点，则存在唯一一条直线 $l \subset \mathbb{R}P^2$，使得 $P_1 \in l$ 且 $P_2 \in l$.

证明：令 $P_i = (x_i : y_i : z_i)$, $i=1,2$

因为 $P_1 \neq P_2$，所以

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) \triangleq (a, b, c) \neq 0$$

故得 $\mathbb{R}^3$ 中过原点平面（即 $\mathbb{R}P^2$ 中过直线）方程

$$l: \quad a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z = 0.$$

容易验证：l ~~满足~~ $P_i \in l$, $i=1,2$. 且 ~~联接~~ P_1 与 P_2 的直线唯一.

#

大家注意到命题3与命题4的证明，即两直线交于一点与两点共一直线这两个不同的几何命题的证明有非常相似的理由。如果我们将命题3中的 (a_i, b_i, c_i) 写为 (x_i, y_i, z_i)，~~那么~~并定义

$$(a, b, c) = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2)$$

则 $(a : b : c) = l_1 \cap l_2$.

这里蕴含着射影平面上点与线的对偶关系：给定

$(a:b:c)$，我们可以把它看为 $\mathbb{R}P^2$ 中的一个点，同时

还也 $ax+by+cz=0$，看为 $\mathbb{R}P^2$ 中的一条直线。反之亦然。

我们记 $P=(a:b:c)$，$l_P=\{ax+by+cz=0\}$

或 $l=\{ax+by+cz=0\}$，$P_l=(a:b:c)$

命题5：设 $P\in\mathbb{R}P^2$ 为一点，$l\subset\mathbb{R}P^2$ 为一直线，则有

$$P\in l \iff l_P\ni P_l$$

证明：令 $P=(a:b:c)$

$$l=\{a'x+b'y+c'z=0\}$$

$$P\in l \iff a'\cdot a+b'\cdot b+c'\cdot c=0$$

$$\iff a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c'=0$$

$$\iff l_P\ni P_l.$$

#

习题：试证：命题5 $\Rightarrow$ 命题3，和命题4.

注意，在上述定义中，隐含着如下事实：

因为F是二次齐次的，所以：$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

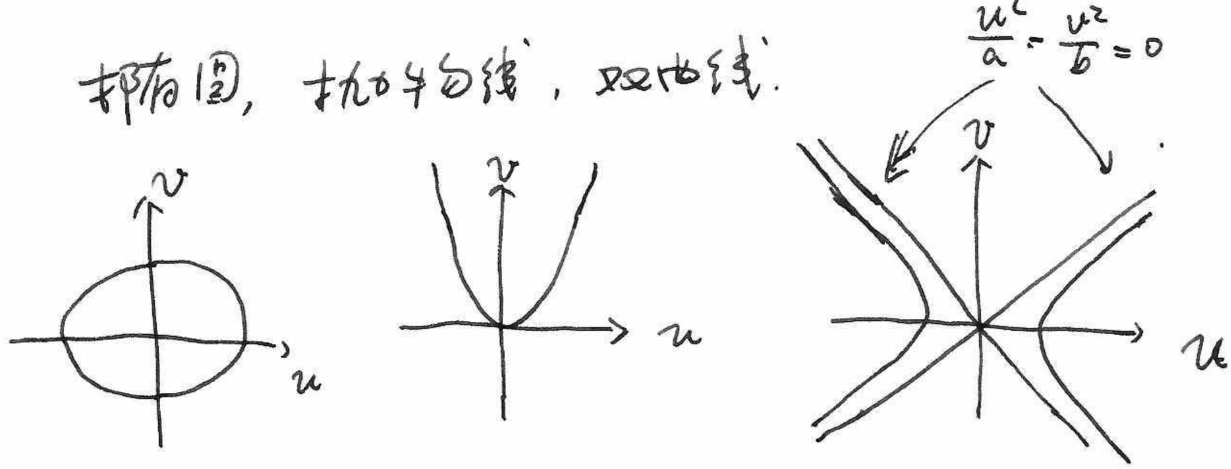
$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^2 F(x, y, z)$$

所以 $F(x,y,z)=0 \iff F(\lambda x, \lambda y, \lambda z)=0,\ \forall \lambda \neq 0.$

因为在 $\mathbb{RP}^2$ 中 $(x:y:z)=(\lambda x:\lambda y:\lambda z)$，$\lambda\neq 0$ 代表同一个点，所以 F 在 $\mathbb{RP}^2$ 中的零点集是良好定义的。

例7：我们平面中典型的(光滑)二次曲线分别为

椭圆，抛物线，双曲线.



$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} = 1$ $\quad$ $u^2 - av = 0$ $\quad$ $\frac{u^2}{a} - \frac{v^2}{b} = 1$

$a \geq b > 0$ $\quad$ $a > 0$ $\quad$ $a, b > 0$

大家看到抛物线和双曲线是无限延展的，应该与无穷远直线相交. 下面我们来看一下射影平面中它们分别对应着什么样的几何性状：为此，我们先将方程齐次化：

令 $\frac{x}{z} = u$，$\frac{y}{z} = v$. 代入并两边同时乘以 z^2，得

	$\mathbb{R}^2$		$\mathbb{RP}^2$	l_∞
椭圆	$\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}=1$ $a>b\geq 0$	$\rightsquigarrow$	$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-z^2=0$	$\emptyset$
抛物	$u^2-av=0$ $a>0$	$\rightsquigarrow$	$x^2-ayz=0$	切于一点
双曲	$\frac{u^2}{a}-\frac{v^2}{b}=1$ $a,b>0$	$\rightsquigarrow$	$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}-z^2=0$	交于两点

然后，我们分别考察 $\mathbb{RP}^2$ 中的二次曲线与 l_∞ 的相交情况：对此，

我们将 $z=0$ 代入二次齐次方程，得

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=0 \Rightarrow x=y=0,$$ 但 l_∞ 上的点要求 x,y 不可同时为0

所以 $$\left\{\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}-z^2=0\right\}\cap l_\infty=\emptyset$$

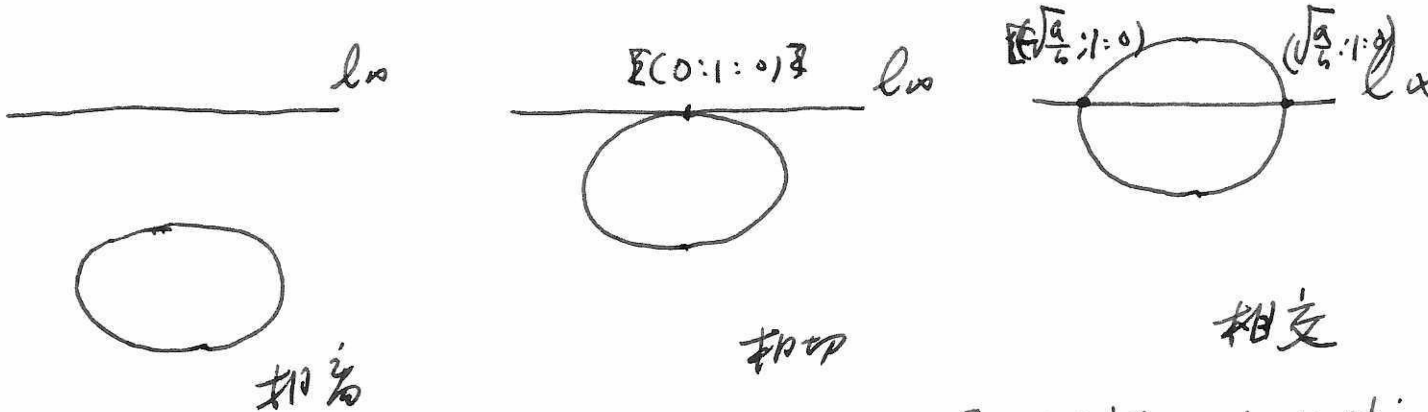
$$x^2=0 \Rightarrow x=0,$$ 得

$$\{x^2-ayz=0\}\cap l_\infty=\{(0:1:0)\}$$

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}\,y,$$ 得

$$\left\{\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}-z^2=0\right\}\cap l_\infty=\left\{\left(\pm\sqrt{\frac{a}{b}}:1:0\right)\right\}$$

如果，我们在 l_∞ 上来看它们对应的图形，应该是这样的：



所以，在射影平面里，~~平~~面上的三种不同几何性状的二次曲线得到了统一。它们**本质上**是**同一种**二次曲线，只是相对于无穷远的直线位置不同而已。在下章中，我们会引入射影变换，从而可以严格说明"本质上是同一种"的含义。事实上，我们会对 $\mathbb{RP}^2$ 上的二次曲线进行~~分~~射影变换下的分类。

注记8：我们可以考虑**高次**的射影曲线，即考虑高次三元齐次多项式的零点集。比如费马曲线：

$$x^n+y^n=z^n, \qquad n\geq 3.$$

研究它们的几何性状不是一件平凡的事情。在代数几何初步学习中，我们会研究一般的**射影曲线理论**。但是，有一个很基本的不同是，我们将考虑**复射影平面**中的射影曲线。类似于 $\mathbb{RP}^2$ 的定义，我们有

$$\mathbb{CP}^2 \triangleq \mathbb{C}^3-\{0\}/\sim$$

$(x,y,z)\sim(x',y',z')$，如果 $\exists\, 0\neq\lambda\in\mathbb{C}$，使得

$$x'=\lambda\cdot x,\quad y'=\lambda\cdot y,\quad z'=\lambda\cdot z.$$

由于 $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$，所以我们有 $\mathbb{RP}^2\subset\mathbb{CP}^2$。$\mathbb{CP}^2$ 是一个实四维的一个空间，我们无法直接想像。这也是代数几何比较抽象的一个原因。但复数的引入，事实（从代数上/几何）简化了很多事情：比如，任意次数为 n 的一元多项式总有 n 个复根（带重数计算），而次数为 n 的实系数一元多项式~~有复~~实根的个数不是确定的（总 $\leq n$，但多重情况可以发生）。又比如：在《代数几何初步》中，我们将学到一个基本~~定理~~事实：

(Bezout 定理)：一条次数 n 的复射影曲线相交于一条次数 m 的复射影曲线于 $n\cdot m$ 个复点（带重数）。

这个定理是两个直线相交于一点的高次数推广。再比如，把实射影曲线看成复射影曲线与一实射影平面在复射影平面中的截线可以帮助我们了解实射影曲线。事实上，复射影曲线的分类相较于实射影曲线的分类要容易的多！

六. 射影变换

我们首先从代数上来认识射影变换。

我们任取一 3×3 可逆方阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$. 那么,我们从第三章关于矩阵的学习知道:

$$\Phi_A: (x,y,z) \longmapsto (x,y,z)\cdot A$$

定义了 $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 的一个映射.

命题及定义1: Φ_A 诱导了射影平面到射影平面的一个映射.

我们称之为一个射影变换。

证明: 回忆:

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3-\{0\}/\sim .$$

我们记 $\mathbb{R}^3-\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^2$ 为自然映射. 我们考察

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "\Phi_A"] & \mathbb{R}^3 \\
\mathbb{R}^3-\{0\} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, dashed, "\Phi_A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^3-\{0\} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{R}P^2 \arrow[r, dashed, "\overline{\Phi}_A"] & \mathbb{R}P^2
\end{tikzcd}$$

首先, 注意到 $\Phi_A(0)=0\cdot A=0$, 且 Φ_A 是双射.

(习题: 验证 $\Phi_{A^{-1}}\circ\Phi_A$
$=\Phi_A\circ\Phi_{A^{-1}}=\Phi_I=id$)

所以, $\Phi_A(\mathbb{R}^3-\{0\})=\mathbb{R}^3-\{0\}$

即 Φ_A 限制在 $\mathbb{R}^3-\{0\}$ 上得映射 (仍记为 Φ_A)

$$\Phi_A: \mathbb{R}^3-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3-\{0\}.$$

其次，我们验证 Φ_A 把等价类映射到等价类。即

断言：$\forall \lambda \neq 0$, $\Phi_A(x,y,z) \sim \Phi_A(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

事实上，
$$\Phi_A(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)\cdot A$$
$$= \lambda\big((x,y,z)\cdot A\big)$$
$$= \lambda \cdot \Phi_A(x,y,z).$$

断言平凡成立。因此，在 $\mathbb{RP}^2$ 上构我们得到良好定义的映射：

$$\overline{\Phi}_A(x:y:z) \triangleq \pi\left(\Phi_A(x,y,z)\right).$$

#

命题2：$\mathbb{RP}^2$ 上射影变换的全体关于映射复合构成群，称为~~图体~~ $\mathbb{RP}^2$ 的射影变换群。

证明：我们验证如下事实（习题）

~~(1)~~ 对于 $A, B \in GL_3(\mathbb{R})$,
$$\overline{\Phi}_B \circ \overline{\Phi}_A = \overline{\Phi}_{AB}$$

所以射影变换关于映射复合封闭；所以 $\overline{\Phi}_I = id$ 是

单位元；所以 $(\overline{\Phi_A})^{-1} = \overline{\Phi_{A^{-1}}}$. 即逆元总存在.

#

我们记 $\mathbb{R}P^2$ 的射影变换群 的对偶群为

$$PGL_3(\mathbb{R}) = \{\overline{\Phi_A} \mid A \in GL_3(\mathbb{R})\}。$$

那么 $PGL_3(\mathbb{R})$ 是一个什么样的群？为此，我们有如下命

命题3：我们记 $\mathbb{R}^* \triangleq \{\lambda \cdot I \mid \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\} \subseteq GL_3(\mathbb{R})$

则 $\mathbb{R}^* \lhd GL_3(\mathbb{R})$，且有

$$PGL_3(\mathbb{R}) \cong \left\{\frac{GL_3(\mathbb{R})}{\mathbb{R}^*}\right\}。$$

证明：任取 $A \in GL_3(\mathbb{R})$，则有

$$A \cdot (\lambda \cdot I) \cdot A^{-1} = (\lambda \cdot I) \cdot (A \cdot A^{-1}) = \lambda \cdot I.$$

故 $\mathbb{R}^* \lhd GL_3(\mathbb{R})$.

商群 $\frac{GL_3(\mathbb{R})}{\mathbb{R}^*} = \{[A] \mid A \in GL_3(\mathbb{R})\}$.

且 $[A] = [B] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ s.t. $B = \lambda \cdot A$.

注意到 $\overline{\Phi_{\lambda A}} = \overline{\Phi_A}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. (习题)

我们有自然映射：(由于我们取了对偶群，α 为群同态)

$$\alpha: \frac{GL_3(\mathbb{R})}{\mathbb{R}^*} \longrightarrow PGL_3(\mathbb{R}), \quad [A] \longmapsto \overline{\Phi_A}.$$

根据射影变换群的定义，α是满射。我们需验证

α是单射，即 $\ker(\alpha) = \{[I]\}$。设 $\underset{(a_{ij})}{A} \in GL_3(\mathbb{R})$，

使得 $\Phi_A = id$。那么，我们有

1) $\Phi_A(1:0:0) = (1:0:0)$；2) $\Phi_A(0:1:0) = (0:1:0)$，

3) $\Phi_A(0:0:1) = (0:0:1)$，4) $\Phi_A(1:1:1) = (1:1:1)$。

那么，由1)，2)，3) 知，存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，使得

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

最后，由(4)，知 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$。故

$A = \lambda I$。得证。

#

我们现在要说明一个F.克莱因在Erlangen纲领中的一个重要观点：射影几何与平面几何相统一。那如何统一呢？

命题4（克莱因）：$\mathbb{RP}^2$上保持无穷远直线l_∞的射影变换构成 $PGL_3(\mathbb{R})$的一个子群G，且群G自然同构于$\mathbb{R}^2$上的仿射变换群（见第四章，几何与对称）。

注记5：设 X 为一集合．我们令

$$\mathrm{Aut}(X)=\{f: X\to X,\ 双射\}.$$

则 $\mathrm{Aut}(X)$ 关于映射复合构成群（习题）．当 X 元素个数很多的时候，这个群就会变得很大。（当 X 元素个数有限的时候，我们称之为置换群．它是重要的有限群例子）．在我们几何的实例子，往往会在集合 X 上加上附加结构．比如 $X=\mathbb{R}^3$，我们会在 X 上加上线性结构，使 X 成为所谓的三维实线性空间；再加上一个内积结构，就使 X 成为三维欧氏空间。这时，几何中出现的自然的变换群就需要保持这些结构的。视具体结构而定，我们就会得到 $\mathrm{Aut}(X)$ 中不同的子群．（这些子群又往往附带除群结构之外的额外结构。如李群就附带与群结构相容的流形结构）．

克莱茵在他1872年的演讲中，提出了一个与之相关的重要观点：给定一个子集族，$Y=\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，$Y_\alpha\subset X$．

那么

$$\mathrm{Aut}_Y(X)=\{f\in\mathrm{Aut}(X)\mid f(Y_\alpha)\subset Y_\alpha,\ \forall\alpha\in\Lambda\}$$

构成 $\mathrm{Aut}(X)$ 的一个子群．（习题）

命题本的证明:

令 $G = \{\phi \in PGL_3(\mathbb{R}) \mid \phi(l_\infty) \subset l_\infty\}$.

由注记5, $G \leq PGL_3(\mathbb{R})$.

回忆: $\mathbb{R}^2$上的仿射变换群

$$G_{仿射} = \{(A, u) \mid A \in GL_2(\mathbb{R}),\ u \in \mathbb{R}^2\}$$

其乘法为

$$(A, u) \cdot (B, v) = (B \cdot A,\ u + \cancel{v} \cdot A)$$

我们需证: 存在(自然)群同构

$$G \cong G_{仿射}.$$

为此, 我们构造映射

$$\beta: G_{仿射} \longrightarrow PGL_3(\mathbb{R})$$
$$(A, u) \longmapsto \overline{\Phi}_{\widetilde{(A,u)}}.$$

其中 $$\widetilde{(A, u)} = \left(\begin{array}{c|c} A_{2\times2} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline u_{1\times2} & 1 \end{array}\right)_{3\times3}.$$

首先, 我们说明

$$\beta(G_{仿射}) \subseteq G.$$

为此, 我们需说明 $\overline{\Phi}_{\widetilde{(A,u)}}$ 把 l_∞ 送到 l_∞.

l_∞ 的定义方程为 $z=0$，即

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0$$

那么 $\overline{\Phi}_{\widetilde{(A,u)}}(l_\infty)$ 的定义方程为

$$(x,y,z)\left[\left(\begin{array}{c|c}A & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\hline u & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=0$$

即 $(x,y,z)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0$. 即 $z=0$.

所以，$\forall (A,u)\in G_{仿射}$，$\beta(A,u)\in G$.

所以，得 $\beta:\ G_{仿射}\longrightarrow G$.

其次，我们说明 G 是群同态。显然，

$$\beta(I,0)=\overline{\Phi}_{\widetilde{(I,0)}}=\mathrm{id}.$$

故 β 把 $G_{仿射}$ 的中心元送到中心元. 又

$$\overline{\Phi}_{\widetilde{(A,u)}}\cdot\overline{\Phi}_{\widetilde{(B,v)}}=\overline{\Phi}_{\widetilde{(B,v)}\cdot\widetilde{(A,u)}}$$

而 $$\widetilde{(B,v)}\cdot\widetilde{(A,u)}=\left(\begin{array}{c|c}B & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\hline v & 1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c}A & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\hline u & 1\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}B\cdot A & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\hline u+v\cdot A & 1\end{array}\right)$$

故

$$\overline{\Phi}_{\widehat{(B,v)}\cdot\widehat{(A,u)}} = \overline{\Phi}_{\widehat{(B\cdot A,\ u+vA)}}$$

即 $\beta((A,u)\cdot(B,v)) = \beta(A,u)\circ\beta(B,v)$

最后，我们说明 β 既单且满.

单射的证明留作习题。我们来说明 β 是满射.

这要重复第一步的计算：

设 $P\in GL_3(\mathbb{R})$，使得

$$\overline{\Phi}_P \in G$$

那么，我们就有

$$(x,y,z)\left[P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=0$$

是 l_∞ 的定义方程 $z=0$. 所以

$$P\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\lambda\end{pmatrix},\qquad \lambda\neq 0$$

记 $P=(p_{ij})_{3\times3}$. 将上述等式展开，我们得到

$$P=\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline u & \lambda \end{array}\right), \qquad |A|\neq 0$$

由于 $\overline{\Phi}_{\lambda^{-1}P} = \overline{\Phi}_P$，而 $\lambda^{-1}P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^{-1}A & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline \lambda^{-1}u & 1 \end{array}\right)$

故得 $$\overline{\Phi}_p = \beta((\pi^{-1}A, \pi^{-1}u)) \in \mathrm{Im}(\beta).$$

命题得证.

#

习题: 我们考察如下集合:

$$G' = \{\phi \in PGL_3(\mathbb{R}) \mid \phi(p) = p, \forall p \in l_\infty\}$$

即 G' 是 $\mathbb{R}P^2$ 上保持 l_∞ 上点点不动的射影变换全体。

由注记6, 易知 $G' \leq PGL_3(\mathbb{R})$。证明:

$$G' \leq G \quad (G \text{ 是命题5证明中的 } G)$$

且在同构 β 下, 得 G' 的一个自然群同构:

$$G' \cong \mathbb{R}^2.$$

试从几何上理解上述同构。

如何从几何上来理解 $\mathbb{R}P^2$ 上的射影变换呢? 为此, 我们先来理解 $\mathbb{R}P^1$ 上的射影变换。从代数上看, $\mathbb{R}P^1$ 上的射影变换形如

$$\overline{\Phi}_A, \quad A \in GL_2(\mathbb{R}), \quad \text{由}$$

$$\Phi_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x, y).A$$

自然诱导出来. 用射影坐标写: 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则

$$\overline{\Phi}_A : (x : y) \longmapsto (ax + cy : bx + dy).$$

我们在ℝ上观察一个射影变换：

令 $t = \frac{x}{y}$，则

$$\Phi_A(t:1) = (at+c : bt+d)$$

当 $b \neq 0$，且 $t \neq -\frac{d}{b}$ 时，

$$\Phi_A(t:1) = \left(\frac{at+c}{bt+d} : 1\right).$$

我们一般地 $\varphi_A: t \longmapsto \frac{at+c}{bt+d}$ 称为ℝ的一个线性分式变换.

ℝ上的线性分式变换与 $\mathbb{R}P^1$ 上的射影变换是同一回事：

(1) $b=0$，则上述线性分式变换在ℝ上处处定义。

此时我们有自然的延拓：

$$\infty \longmapsto \frac{a\cdot\infty + c}{d} = \infty.$$

(2) $b \neq 0$，则上述线性分式变换在 $t = -\frac{d}{b}$ 没有定义。

此时，我们有自然延拓

$$-\frac{d}{b} \longmapsto \frac{a\cdot\left(-\frac{d}{b}\right) + c}{0} = \infty$$

$$\infty \longmapsto \frac{a\cdot\infty + c}{b\cdot\infty + d} = \frac{a + \frac{c}{\infty}}{b + \frac{d}{\infty}} = \frac{a}{b}$$

我们非常容易观察到，除非

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

（此时 $\phi_A(t) = t + c$），ϕ_A 不会保持 $\mathbb{R}$ 上的欧氏距离.

在射影几何中，首一重要的是：ϕ_A 保持 $\mathbb{R}$ 上的交比（交比不是距离，但可以看到 $\mathbb{R}$ 上的射影距离）.

定义6（交比）. 对 $\mathbb{R}$ 上的有序的四个实数 t_1, t_2, t_3, t_4，

我们定义其交比

$$R(t_1 t_2 ; t_3 t_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \cdot \frac{t_4 - t_2}{t_4 - t_1}$$

我们非常容易地验证以下

命题7. $\mathbb{R}$ 上的分式线性变换保持交比不变.

证明：令 $t_i' = \phi_A(t_i)$，$i = 1, 2, 3, 4$.

直接计算得到：

$$t_i' - t_j' = \frac{ad - bc}{(bt_i + d)(bt_j + d)} \cdot (t_i - t_j), \quad i \neq j$$

将此式代入交比定义，约化后即得命题.

#

注记8. 我们可以将交比定义推广到其中一点为 ∞. 做法如下：

以 $t_4=\infty$ 为例，我们定义

$$R(t_1t_2;t_3\infty)=\frac{t_3-t_1}{t_3-t_2}\cdot\frac{\infty-t_2}{\infty-t_1}$$

$$=\frac{t_3-t_1}{t_3-t_2}\cdot\frac{1-\frac{t_2}{\infty}}{1-\frac{t_1}{\infty}}$$

$$=\frac{t_3-t_1}{t_3-t_2}$$

~~类似~~对其他~~情况~~点为 ∞ 时，类似定义。另一种做法，我们可以将交比有射影坐标写出：~~取~~ $P_i=(x_i:y_i)$，$i=1,2,3,4$ 为 $\mathbb{R}P^1$ 上有序四点，则

$$R(P_1P_2;P_3P_4)\triangleq\frac{x_3y_1-x_1y_3}{x_3y_2-x_2y_3}\cdot\frac{x_4y_2-x_2y_4}{x_4y_1-x_1y_4}.$$

我们把上述定义称为射影直线上的交比。

命题7'：$\mathbb{R}P^1$ 上的射影变换保持交比不变。

证明：~~留作习~~ 可以由命题7推出，也可直接用定义计算得到。

具体过程留作习题。

#

我们有逆命题：

命题9：$\mathbb{R}P^1$ 上保持交比的双射是一射影变换。

证明：令 $\phi:\mathbb{R}P^1\longrightarrow\mathbb{R}P^1$ 为一保持交比的双射。

令 $\phi(1)=a_1$, $\phi(0)=a_2$, $\phi(\infty)=a_3$

ϕ 为双射，所以 $a_i \neq a_j$, $i \neq j$

断言：必存在（唯一）射影变换 $\overline{\Phi}_A : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$，满足

$$\overline{\Phi}_A(a_1)=1,\quad \overline{\Phi}_A(a_2)=0,\quad \overline{\Phi}_A(a_3)=\infty.$$

情形一：$\infty \notin \{a_1, a_2, a_3\}$.

考察分式线性变换 $t \longrightarrow \dfrac{at+c}{bt+d}$

$$\frac{a\cdot a_1+c}{b\cdot a_1+d}=1 \iff a\cdot a_1+c=b\cdot a_1+d$$

$$\begin{cases} \dfrac{a\cdot a_2+c}{b\cdot a_2+d}=0 \iff a\cdot a_2+c=0 \\[2ex] \dfrac{a\cdot a_3+c}{b\cdot a_3+d}=\infty \iff b\cdot a_3+d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1-a_3 & a_1-a_2 \\ a_2\cdot(a_3-a_1) & a_3(a_2-a_1) \end{pmatrix}$$

$$\lambda \neq 0$$

情形二：$\infty \in \{a_1, a_2, a_3\}$

我们只考察 $a_1=\infty$，其余二种情形留问题.

由 $\dfrac{a\cdot\infty+c}{b\cdot\infty+d}=1$，得到 $a=b$

（此条件也可通过射影坐标的写法得到）

所以，我们得到

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_2 & -a_3 \end{pmatrix},\qquad \lambda\neq 0$$

断言得证。由命题7′，我们知道复合映射

$$\begin{tikzcd} \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "\Phi_A"] & \mathbb{RP}^2 \end{tikzcd}$$

$\psi \triangleq \Phi_A\circ\phi$ 保持交比，且 $\psi(1)=1$，$\psi(0)=0$，$\psi(\infty)=\infty$

取 $t\notin\{0,1\}$，则有

$$R(\psi(t)\psi(1);\psi(0)\psi(\infty)) = R(t\,1;0\,\infty)$$

$$\parallel$$

$$R(\psi(t)\,1;0\,\infty)$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{0-\psi(t)}{0-1}\cdot 1 = \frac{0-t}{0-1}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \psi(t)=t.\quad \text{即 } \psi=id$$

故 $\phi=(\Phi_A)^{-1}=\Phi_{A^{-1}}$ 方为一射影变换。

#

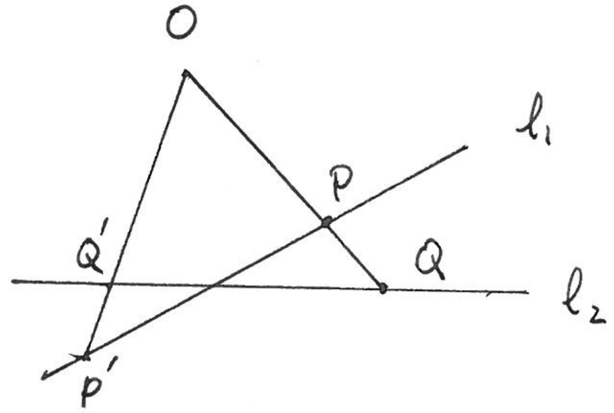
事实上，射影变换在生活中处处可见。最简单的一种是如下

定义(透视投影)

令 l_1, l_2 为 $\mathbb{R}P^2$ 中两条直线，令 $O \notin l_1$，$O \notin l_2$。以 O 为透视点，从 l_1 到 l_2 的透视投影定义为：

$\forall P \in l_1$，点 O, P 之间确定的直线交 l_2 于唯一一点 Q.

我们记 $Q = l_1 \overset{O}{\wedge} l_2 (P)$.



我们不妨设 l_1 由方程

$$y = kx + b,\quad \text{给出}.$$

以及 l_2 由 $y = 0$ 给出；O 点坐标 (x_0, y_0).

这样，对于直线 l_i，$i=1,2$，我们都可以用 x 坐标来代表其上一点。一个简单的计算表明 映射

$$l_1 \overset{O}{\wedge} l_2 : \ l_1 \longrightarrow l_2, \quad x \longrightarrow \frac{(kx_0 - y_0)x + bx_0}{k \cdot x + (b - y_0)}$$

且行列式

$$\begin{vmatrix} kx_0-y_0 & k \\ bx_0 & b-y_0 \end{vmatrix} = y_0(y_0-kx_0-b) \neq 0$$

$(\because\ 0\notin l_1,\ 0\notin l_2)$

所以，在给好 l_i 的坐标后，我们计算表明透视投影为射影变换

当然，我们还需注意到这么一个事实：直线 $l\subset \mathbb{R}P^2$ 的坐标不是唯一的。那么，我们在表达映射的时候，就有一个表达式依赖坐标系选取的问题！这个问题的另一种形式是，在某些情形，我们甚至无法同时用 x 或 y 来~~参~~同时参数化两条直线。比如 $l_1=\{x=0\}$，$l_2=\{y=0\}$。

为此，我们定义 $l\subset\mathbb{R}P^2$ 的射影坐标如下：

定义1.6 设 $l\subset\mathbb{R}P^2$ 是由方程

$$\{ax+by+cz=0\}$$

给出的直线，l 的一个射影坐标（或射影参量化），是

指一个单射

$$\varphi:\ \underset{\mathbb{R}P^1}{(u:v)} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}P^2}{(x(u,v):y(u,v):z(u,v))}$$

其中 $x(u,v)$，$y(u,v)$，$z(u,v)$ 为以 u,v 为变量的齐次一次

多项式（即形如 $\lambda\cdot u+\mu\cdot v$，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$），满足条件

$$a\cdot x(u,v)+b\cdot y(u,v)+c\cdot z(u,v)=0,\quad \forall (u:v)\in\mathbb{RP}^1$$

注记Ω：我们~~在准备展开射影坐标的讨论~~，指出如下事实：

(1) l 的射影坐标的选取是无穷多的。事实上，它的选取可以与由 $\{ax+by+cz=0\}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义的平面中过原点的一对满足 $w_1\times w_2\neq 0$ 的向量 $\{w_1,w_2\}$ 对应起来（在相差一个相同倍数的意义下）

(2) 回忆在讲过平面方程的即约形式（第二章）中，我们会得到平面的一个参数化。它给出了相应射影直线的一个自然射影坐标。我们以 $a\neq 0$ 举例：

$$x=\left(-\frac{b}{a}\right)y+\left(-\frac{c}{a}\right)z$$

令 $\varphi(u:v)=\left(-\frac{b}{a}u-\frac{c}{a}v : u : v\right)$

则 φ 是一个 l 的射影坐标。

命题13：设 $\varphi_i:(u_i:v_i)\longrightarrow(x(u_i,v_i):y(u_i,v_i):z(u_i,v_i))$

为直线 $l_i\subset\mathbb{RP}^2$，$i=1,2$ 的射影坐标，则透视投影

$l_1\underset{A}{\overset{O}{=}}l_2: l_1\to l_2$ 有代数表达式：

$$l_1 \xrightarrow[\wedge]{O} l_2 \,(u_1 : v_1) = (au_2 + cv_2 : bu_2 + dv_2)$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$.

推论1.4：设有 $l = l_1, l_2, \ldots, l_n = l' \subset \mathbb{R}P^2$ 为 n 条直线，有点 $\{O_{i\,i+1} \mid 1 \le i \le n-1\} \in \mathbb{R}P^2$，满足

$$O_{i\,i+1} \notin l_i \cup l_{i+1}$$

则对 l (l') 的任一射影坐标 $(u:v)$ ($(u':v')$)，映射复合：

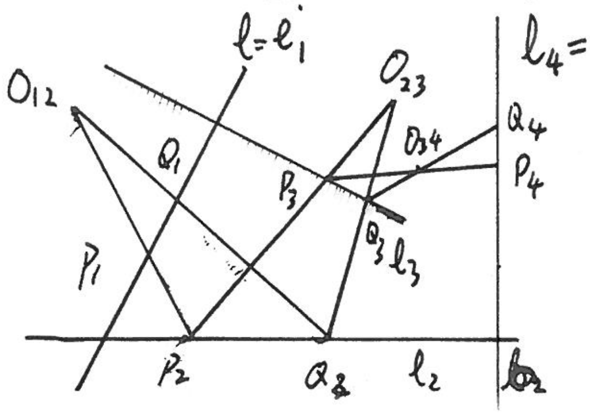
$$\Phi = l_{n-1} \xrightarrow[\wedge]{O_{n-1\,n}} l_n \circ \cdots \circ l_i \xrightarrow[\wedge]{O_{i\,i+1}} l_{i+1} \circ \cdots \circ l_1 \xrightarrow[\wedge]{O_{12}} l_2 \;:\; l \longrightarrow l'$$

有代数表达

$$\Phi(u:v) = (au' + cv' : bu' + dv')$$

其中 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$.

上述推论表明：透视投影的有限次复合均为射影变换.



命题13的证明:

不妨设 $O=(x_0:y_0:z_0)$

$l_1=\{x+\lambda_1 y+\lambda_2 z=0\}$.

$l_2=\{\lambda_3 x+y+\lambda_4 z=0\}$.

对于 l_1, (${l_2}$) 我们有自然射影坐标 $(y:z)$, ($(x:z)$).

对于 $\overset{P}{\overset{\|}{(x_1:y_1:z_1)}}\in l_1$, 经过 O, P 点的直线方程为

$$\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}\cdot x-\begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}\cdot y+\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\cdot z=0$$

它与 l_2 的交点 Q 坐标 $(x_2:y_2:z_2)$ 由以下表达式给出:

$$(\lambda_3;1,\lambda_4)\times\left(\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

即为

$$Q=\left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}+\lambda_4\begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}:\lambda_4\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}-\lambda_3\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}:\right.$$

$$\left.-\lambda_3\begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}\right)$$

我们把 $x_1=-\lambda_1 y_1-\lambda_2 z_1$ 代入上式, 得到如下表达式:

$$(x_2, z_2) = (y_1, z_1)\underbrace{\begin{pmatrix} x_0 + \lambda_1 y_0 + \lambda_1\lambda_4 z_0 & (1-\lambda_1\lambda_3) z_0 \\ \\ \lambda_4 x_0 + \lambda_2 y_0 + \lambda_2\lambda_4 z_0 & -\lambda_3 x_0 - y_0 - \lambda_2\lambda_3 z_0 \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ A}}$$

其中

$$|A| = (x_0 + \lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0)\cdot(\lambda_3 x_0 + y_0 + \lambda_4 z_0)$$
$$\neq 0.$$

以上,我们证明了在 l_1, l_2 的自然射影坐标下,命题的成立。剩下来,我们说明,如果 l_1 或 l_2 转换射影坐标,我们仍然得到命题.

我们只考虑 l_1 上的另一射影坐标转换 (l_2 的射影坐标类似讨论)

令 $\varphi : (u:v) \to (x(u,v) : y(u,v) : z(u,v))$ 为 l_1 的一射影坐标.

其中
$$x(u,v) = c_{11}\cdot u + c_{21}\cdot v$$
$$y(u,v) = c_{12}\cdot u + c_{22}\cdot v$$
$$z(u,v) = c_{13}\cdot u + c_{23}\cdot v$$

即
$$(x, y, z) = (u, v)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

φ 单射 $\Rightarrow$ $(c_{11} \ \ c_{12} \ \ c_{13}) \times (c_{21} \ \ c_{22} \ \ c_{23}) \neq 0$

$$x(u,v) + \lambda_1 \cdot y(u,v) + \lambda_2 \cdot z(u,v) = 0 \Longrightarrow$$

$$(c_{11}\ \ c_{12}\ \ c_{13}) \times (c_{21}\ \ c_{22}\ \ c_{23}) = \lambda\cdot(1,\ \lambda_1,\ \lambda_2),\quad \lambda \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow (y, z) = (u, v)\underbrace{\begin{pmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}}_{\stackrel{\triangle}{=} C},\quad \text{其中} \begin{pmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}).$$

$\Rightarrow$ $l_1 \stackrel{O}{\overline{\wedge}} l_2$ 在关于 l_1 的射影坐标 $(u:v)$ 和 l_2 的自然射影坐标 $(x:z)$ 有代数表达式:

$$(x, z) = (u, v)\cdot(C\cdot A),\quad C\cdot A \in GL_2(\mathbb{R}).$$

故命题仍然成立。

#

推论15: 交比在透视投影的有限次复合下保持不变.

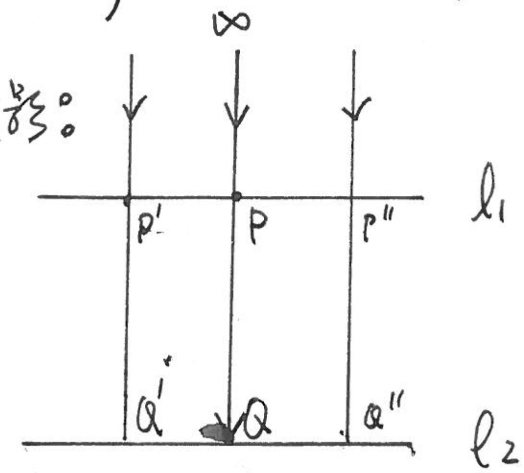
证明: 由命题7′和推论14得出。

#

注记16: 我们称透视投影的有限次复合(推论14)为射影对应.

推论14说明,在固定好直线的射影坐标后,射影对应为一个 P^1 上的

射影变换. 反之也成立, 即 $\mathbb{R}P^1$ 上的任一射影变换可实现为 $\mathbb{R}P^2$ 中两直线(关于某射影坐标)的射影对应. 其本质原因有二: 一是恒等映射为一透视投影:



二是同一直线上的不同射影坐标之间的转换 ~~也是~~ 由可逆矩阵给出; 反之, 一个可逆矩阵定义了一个坐标变换.

命题 17. 设 $\phi: \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ 为一双射. 则 ϕ 为射影变换, 当且仅当

(1) ϕ 保直线 (即 ϕ 把直线映到直线)

(2) ϕ 保交比.

证明: ($\Rightarrow$) 令 $\phi = \Phi_A$ 为一射影变换. 则 (1) 显然成立.

设 $l_1 \subset \mathbb{R}P^2$ 为一直线, $l_2 = \phi(l_1)$

任取 $\varphi: \mathbb{R}P^1 \xrightarrow{\sim} l_1 \subset \mathbb{R}P^2$ 为一射影坐标.

$$(u:v) \longmapsto (x:y:z)$$

则有

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}P^1 \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "\phi\circ\varphi"'] & l_1 \arrow[d, "\phi", "\wr"'] & \subset \mathbb{R}P^2 \arrow[d, "\phi", "\wr"'] \\
& l_2 & \subset \mathbb{R}P^2
\end{tikzcd}$$

断言：$\phi\circ\varphi:\ \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ 给出了 l_2 的一个影

$$(u:v) \longmapsto (x:y:z)$$

影坐标。

假定断言成立，则 ϕ 在 l_1 的射影坐标 φ 和 l_2 的射影坐标 $\phi\circ\varphi$ 的表达矩阵为恒等矩阵！故 ϕ 诱导 l_1 与 l_2 之间的射影变换。根据前面的讨论，ϕ 保持交比。即 $\forall\{P_i,\ i=1,2,3,4\}\subset l_1$，有等式

$$R(\phi(P_1)\phi(P_2);\phi(P_3)\phi(P_4)) = R(P_1P_2;P_3P_4).$$

我们根据推论14的证明，φ 由某一矩阵 C 给出，即

$$\underset{1\times3}{(x,y,z)} = \underset{1\times2}{(u,v)}\cdot C_{2\times3}$$

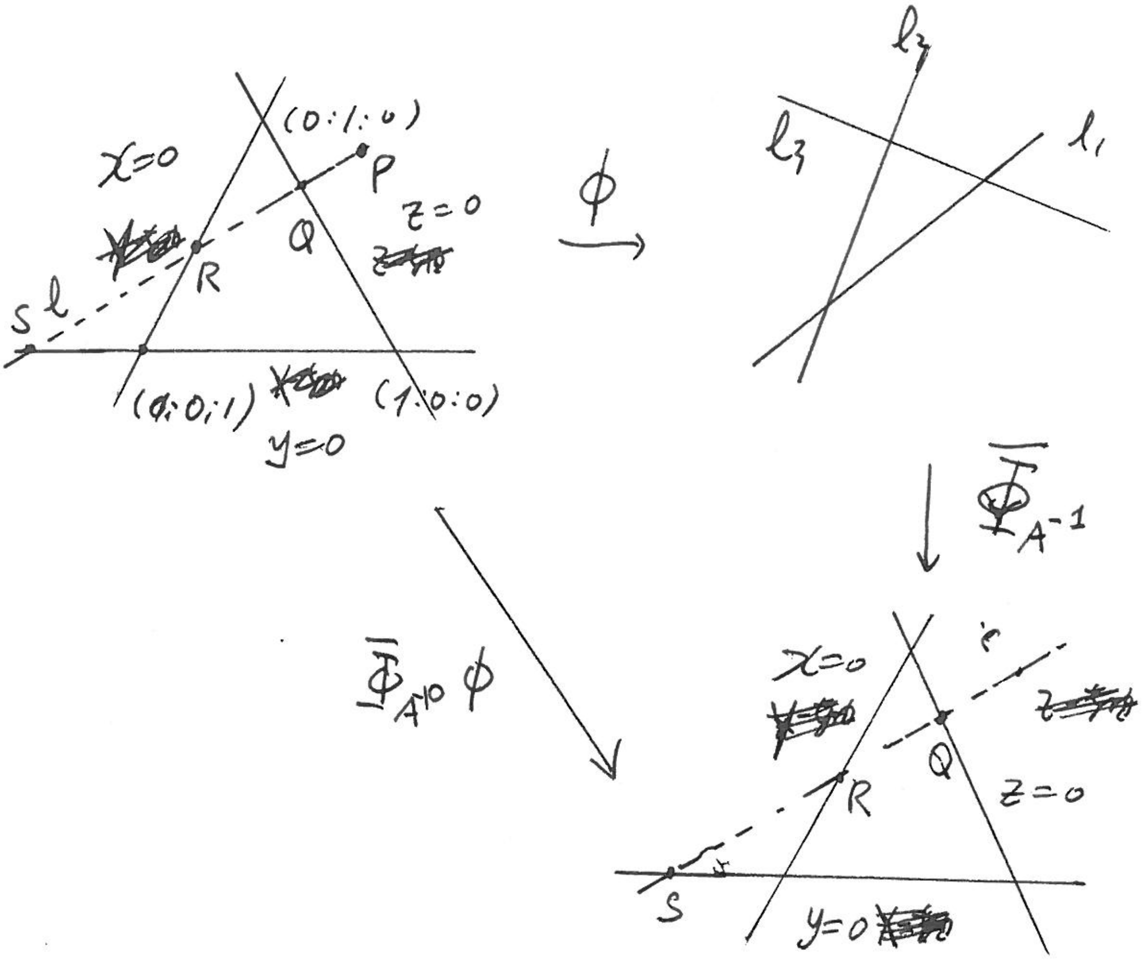
那么复合映射 $\phi\circ\varphi$ 则由

$$\overset{\parallel}{\Phi_A\circ\varphi}$$

$$(u,v) \longmapsto \underset{1\times2}{(u,v)}\cdot(C_{2\times3}\cdot A_{3\times3})$$

给出。显然，$\phi\circ\varphi$ 是单射，又其像落在 l_2 上，故满足 l_2 的定义方程。故断言成立。

$(\Leftarrow)$ 设 $\phi:\mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ 为保直线和保交比的双射。



令 $l_1 \triangleq \phi(\{x=0\})$, $l_2 \triangleq \phi(\{y=0\})$, $l_3 \triangleq \phi(\{z=0\})$

令 $l_i = \{a_i x + b_i y + c_i z = 0\}$, $1 \le i \le 3$.

令 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$。由于 ϕ 是双射,

所以 $\{l_1, l_2, l_3\}$ 两两相交于一点. 故 $A \in GL_3(\mathbb{R})$.

那么射影变换 $\Phi_{A^{-1}}$ 把 l_1 送到 $\{x=0\}$, l_2 送到 $\{y=0\}$, l_3 送到 $\{z=0\}$

事实上 $\Phi_{A^{-1}}(x,y,z) = (x,y,z)A^{-1}$.

代入即可验证这事实.

故复合映射 $\psi = \overline{\Phi}_{A^{-1}} \circ \phi$ 有如下性质

(1) 保直线

(2) 保交比

(3) ψ 固定三条直线 $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ 和 $\{z=0\}$.

任取上述三直线外一点 P. 任取过 P 点直线 l

则 l 必分别交于 $\{x=0\}$, $\{y=0\}$, $\{z=0\}$ ~~于~~ 一点; (记为 Q, R, S)

由 (1), $\psi(l) = l'$ 仍为直线.

由 (3) l' 是由 Q, R, S 确定的直线.

由 (2) $R(\psi(P), \psi(Q); \psi(R)\psi(S))$

$= R(PQ; RS)$

得 $R(\psi(P)\, Q; RS) = R(PQ; RS)$

由此, 得到 $\psi(P) = P$。由于 P 点任意, 故

$\psi = id$. 即得

$\phi = \left(\overline{\Phi}_{A^{-1}}\right)^{-1} = \overline{\Phi}_A$ 为射影变换.

#

注记18. 在命题17关于 $\mathbb{RP}^2$ 上射影变换的刻画中，我们甚至可以把保交比这条性质去掉. 证明留作习题.

我们以射影变换的几个应用来结束射影几何的学习.

(1) 射影平面中二次曲线在射影变换下的分类.

回忆（第三章）$\mathbb{RP}^2$ 中二次曲线是某一齐次三元多项式的零点集.

即

$$X = \left\{ (x:y:z) \in \mathbb{RP}^2 \;\middle|\; (x,y,z)\, C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,\quad C^T = C,\ C \neq 0 \right\}$$

记 $S = \{ X \subset \mathbb{RP}^2 \mid X \text{ 二次曲线} \}$.

定义关系 $X \sim X'$，若存在射影变换 Φ_A，使得

$$X' = \Phi_A(X)$$

由命题2，$\sim$ 是集合 S 上的等价关系。

简单计算得到 $\Phi_A(X)$ 由下列方程给出：

$$(x,y,z)\left(A^{-1} \cdot C (A^{-1})^T\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

所以，二次曲线在射影变换下的分类问题，本质上是如下（线性）代数问题：

对称矩阵 C 与 C' 称为相合，若存在可逆方阵 A，使得

$$C' = A\cdot C\cdot A^T.$$

显然，相合是对称矩阵集合上的等价关系。那么，我们如何做出分类呢？

回忆第三章，命题21：

$\forall C$ 对称阵，存在旋转矩阵 A，使得

$$A\cdot C\cdot A^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

情形一：$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中两个为0.

我们可以通过一个旋转，使得 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$，$\lambda_1 \neq 0$.

我们不妨设 $\lambda_1 > 0$. 若不然，用 $-C$ 替代 C，那么

我们总有 $\lambda_1 > 0$.

$$\because \begin{pmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

$\therefore$ 在该情形，我们找到可逆矩阵 A，使得

$$A\cdot C\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix} \quad 或 \quad A(-C)\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$$

情形二：$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中仅一个为0.

不妨设 $\lambda_3=0$. 这时，我们分

情形二.1，$\lambda_1\cdot\lambda_2>0$，即 λ_1,λ_2 同号.

那么根据情形一的推理，我们总能找到可逆矩阵A，使得

$$A\cdot C\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix} \quad 或 \quad A\cdot(-C)\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}.$$

情形二.2. $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$，即 λ_1,λ_2 异号.

我们总能找到可逆矩阵A，使得

$$A\cdot C\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix} \quad 或 \quad \cancel{A(-C)}$$

情形三：$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 全不等于0.

我们分两种情形.

情形三.1：$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 同号.

则存在可逆矩阵A，使得

$$A\cdot C\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}. \quad A(-C)\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

情形三.2，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 异号.

则存在可逆矩阵 A，使得

$$A\cdot C\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},\quad A\cdot(-C)\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

根据以上分析，我们证明如下

命题19. 设 $S=\{C\subset\mathbb{RP}^2 \mid C=二次曲线\}$

$\sim$ = 射影变换诱导的等价关系.

则 等价类集合 $S/\sim \;=\; \coprod M_i$，其中

(空集) $M_0=\{[x^2+y^2+z^2=0]\}$

(点) $M_1=\{[x^2+y^2=0]\}$

(直线) $M_2=\{[x^2=0]\}$

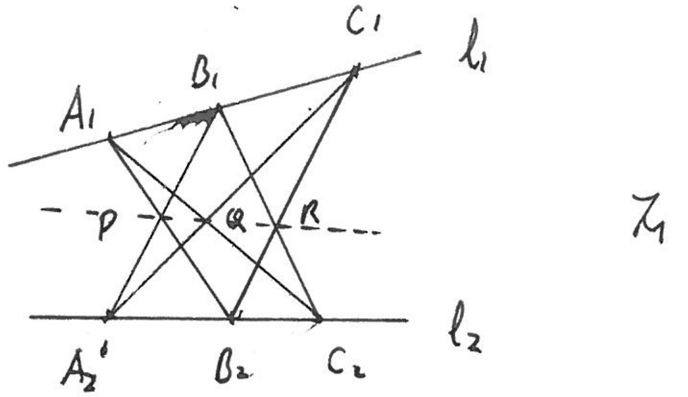
(两条相交直线) $M_3=\{[x^2-y^2=0]\}$

(圆) $M_4=\{[x^2+y^2-z^2=0]\}$

证明：由于射影变换是保直线的双射，我们得到 $M_i, M_j, i\neq j$ 之间的元素不会等价. 所以，我们只需说明任何 C 必等价于某个 M_i 中的元素. 但这恰恰是上面的分析告诉我们的. #

(2) 射影观点看欧氏几何

(2.1) Pappus 定理



$l_1, l_2 \subset \mathbb{R}^2$ 任意二条直线. $A_i, B_i, C_i \subset l_i$, $i=1,2$ 任意三点.

$P = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Q = A_1C_2 \cap A_2C_1$, $R = B_1C_2 \cap B_2C_1$

则 P, Q, R 三点必共线。

Pappus 定理有很多不太一样的证明。下面,我们讲一种利用射影变换和欧氏几何的证明. 这个证明展现了射影几何的优美.

证明: 因为射影变换有保直线的性质,我们试图通过合适的射影变换,将问题化归为一个"简单"的情形:

步骤一: 我们将上述 $\mathbb{R}^2$ 的图形看成 $\mathbb{R}P^2$ 中的图形,然后把 $\mathbb{R}P^2$ 放置在 $\mathbb{R}P^3$ 中 (就如同我们把 $\mathbb{R}P^1$ 放到 $\mathbb{R}P^2$ 中一样)。设 l_1 l_2 所在的射影平面为 π_1.

步骤二：任取投影点 $O \notin \pi_1$，则点 O, P, Q 确定一个(射影)平面，记为 π_2'。任取 π_2 为"平行于 π_2'，且不过 O 点"的射影平面。我们要考察透视投影

$$\pi_1 \underset{\wedge}{\overset{O}{-}} \pi_2 : \quad \pi_1 \longrightarrow \pi_2 .$$

根据我们关于在射影直线情形透视投影(或更为一般的射影对应)的讨论，在取定 π_1, π_2 的射影坐标后，透视投影(更为一般的射影对应)就是射影变换。

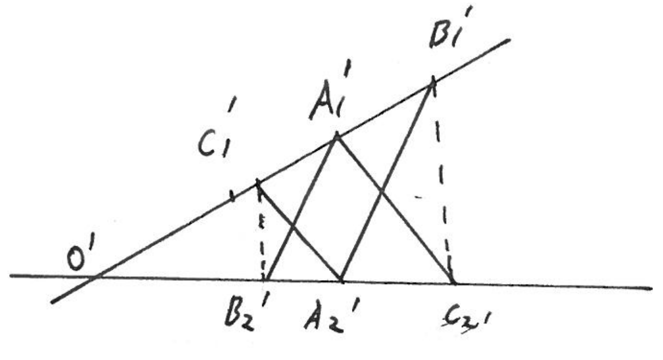
步骤三：我们考察 π_1 平面上的上述图形在 π_2 上的投影。

记 l_i'，A_i', B_i', C_i'，P', Q', R' 为 l_i，A_i, B_i, C_i，P, Q, R 的投影。$i=1,2$

那么 $A_i', B_i', C_i' \subset l_i'$，$i=1,2$。

由于 $\pi_2 \parallel \pi_2'$，那么 P 与 Q 点的投影点落在 π_2 的无穷远直线上。

换句话说：$A_1'B_2' \parallel A_2'B_1'$，$A_1'C_2' \parallel A_2'C_1'$。



π_2

而 P', Q', R' 共线，即 R' 也落在无穷远直线上 等价于

$$B_1'C_2' \parallel B_2'C_1'$$

步骤四：根据相似三角形定理：

$$\begin{cases} \dfrac{O'C_1'}{O'A_1'} = \dfrac{O'A_2'}{O'C_2'} \\[2ex] \dfrac{O'A_1'}{O'B_1'} = \dfrac{O'B_2'}{O'A_2'} \end{cases}$$

两式相乘得到：

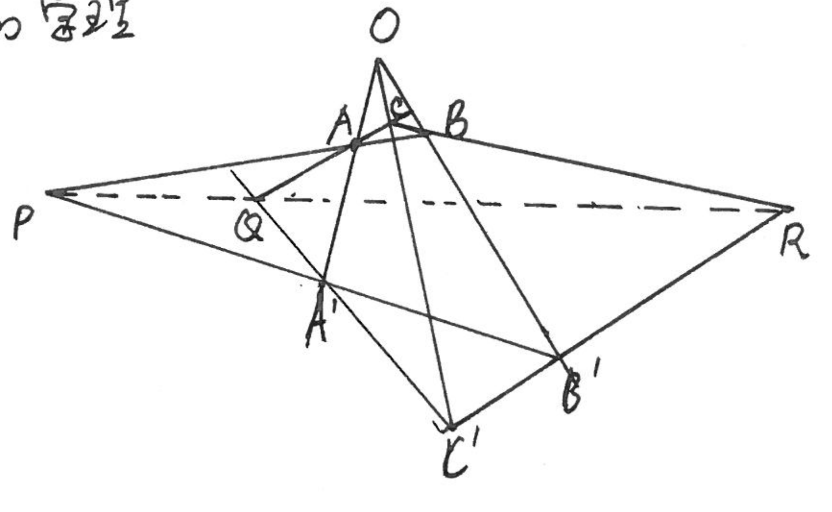
$$\frac{O'C_1'}{O'B_1'} = \frac{O'B_2'}{O'C_2'}$$

所以 $B_1'C_2' \parallel B_2'C_1'$.

命题得证.

#

(2.2) Desargues 定理



设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 其三对对应顶点连线 AA', BB', CC' 交于一点，

则三对对应边的交点必共线.

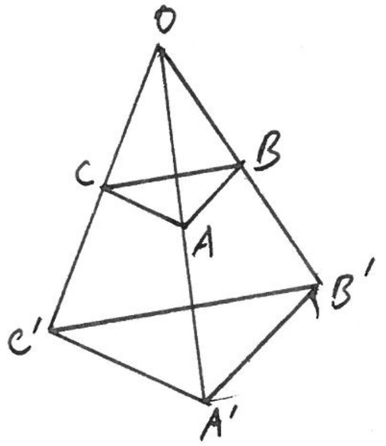
在上图中. $P = AB \cap A'B'$

$Q = AC \cap A'C'$

$R = BC \cap B'C'$

则 P, Q, R 共线.

证明：我们用类似于 Pappus 定理证明的方法. 其要点就是通过一恰当的透视投影，把 P, Q 点投到无穷远处. 则问题将化归为平行与相似三角形的性质. 即考察以下特殊情形：



已知 $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$. 证明

$BC \parallel B'C'$.

而这是显而易见的. 命题得证.

#

(2.3) Pappus 定理与 Desargues 定理的对偶定理.

我们回忆在第五章关于射影平面上点与线的对偶原理:

点 $\longleftrightarrow$ 线

两点确定一直线 $\longleftrightarrow$ 两直线交于唯一一点

三点共线 $\longleftrightarrow$ 而三线过一点.

Pappus 定理的对偶形式:

$P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ 中两点, l_i, m_i, n_i 为过 P_i 的三条直线.

设 $O_{l_1 m_2} = l_1 \cap m_2$, $O_{l_2 m_1} = l_2 \cap m_1$, 以此类推.

记直线

$u =$ 连接 $O_{l_1 m_2}$ 与 $O_{l_2 m_1}$ 的直线

$v =$ 连接 $O_{l_1 n_2}$ 与 $O_{l_2 n_1}$ 的直线

$w =$ 连接 $O_{m_1 n_2}$ 与 $O_{m_2 n_1}$ 的直线

则 u, v, w 交于一点.

如何在图形上直观地看到 Pappus 定理的对偶形式呢?

事实上, Pappus 定理的图形 (201页) 蕴含着其对偶形式!

例如：令 $P_1 = B_1$，$P_2 = B_2$

$l_1 = B_1A_2$，$m_1 = B_1C_2$，$n_1 = A_1C_1$（异于 l_1）

$l_2 = B_2C_1$，$m_2 = B_2A_1$，$n_2 = A_2C_2$（异于 l_2）

则有 $O_{l_1m_2} = P$，$O_{l_2m_1} = Q$

$O_{l_1n_2} = A_2$，$O_{l_2n_1} = C_1$

$O_{m_1n_2} = C_2$，$O_{m_2n_1} = A_1$

故 $u = PR$，$v = A_2C_1$，$w = A_1C_2$

结论为：u, v, w 交于 Q 点！

Desargues 定理的对偶形式：

设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$，其三对对应边的交点共线，则三对对应顶点的连线必交于一点。

此命题亦可看成 Desargues 定理的逆命题。

在196页中，我们断言 ψ 满足(a)三条性质，其中第(3)条 196补1.

为 ψ：固定直线 $\{x=0\}$，$\{y=0\}$，$\{z=0\}$.

其证明有不严密的地方。事实上，我们只证明了

ψ 保持三条直线不变，但并未证到点点不动.

为此，我们再做直线 $\{x+y+z=0\}$

令 $l_4 = \phi(\{x+y+z=0\})$

我们断言存在(唯一) $\overline{\Phi}_B : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$，使得

$$(*)\begin{cases} \overline{\Phi}_B(l_1) = \{x=0\} \\ \overline{\Phi}_B(l_2) = \{y=0\} \\ \overline{\Phi}_B(l_3) = \{z=0\} \\ \overline{\Phi}_B(l_4) = \{x+y+z=0\}. \end{cases}$$

如此，$\overline{\Phi}_B\circ\phi$ 必保持 $\{x=0\}$，$\{y=0\}$，$\{z=0\}$ 三条直线上点点不动。这是上述每条直线交其余三条直线(包括$\{x+y+z=0\}$)于三点，这三点是在 $\overline{\Phi}_B\circ\phi$ 映射下保持不动的。因为 $\overline{\Phi}_B\circ\phi$ 诱导上述三条直线的射影变换，而一个射影变换固定三个点，则必固定整条直线.

如何选取 B？

在195页，我们有~~系数~~方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

注意到 l_4 的一个定义方程为

$$(a_1+a_2+a_3)\cdot x+(b_1+b_2+b_3)z+(c_1+c_2+c_3)z=0$$

所以，B 需满足（条件(*)！）

$$B\cdot\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1+a_2+a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$\lambda_i\neq 0$

这时，我们只需令

$$B=\lambda\cdot A^{-1},\quad \lambda\neq 0.$$

则有

$$B\cdot\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}=\lambda\cdot I=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$B\cdot\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}=B\cdot\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\lambda\cdot I\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

特别得，取 $\lambda=1$，即得

$\overline{\Phi}_{A^{-1}}$ 即为我们所求.

七. 拓扑变换

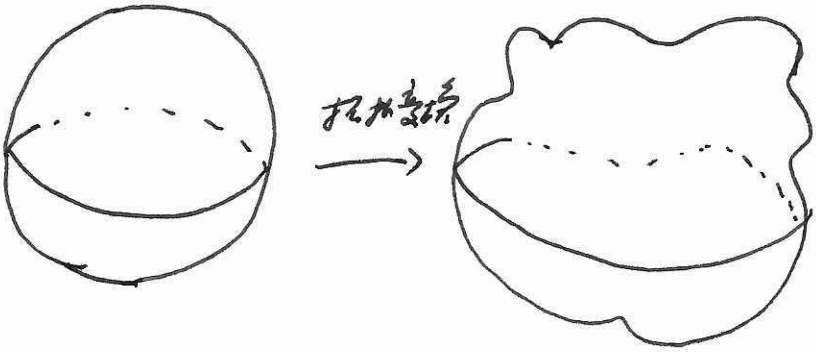
Sylvester（英国数学家, 1814-1897）曾经说过这么一段话。其大意是："如果有人要我说出数学中的一个概念，其重要性堪比北极星之于星空，我一定会说，那就是空间的连续性。是的，就是它！"

空间由点构成的集合，每个点代表一个位置。但它绝不仅仅是一堆点的集合，更重要的是，每个点有"邻域"，邻域中的点与该点是"相近"的点。确切的数学语言表达"邻域"就是开集的概念。空间的连续性是从定义好"开集"开始的。从这里出发，我们就会到达空间的"拓扑结构"的概念，以及两个拓扑空间"连续映射"的概念。拓扑学研究拓扑空间与它们之间的连续映射。

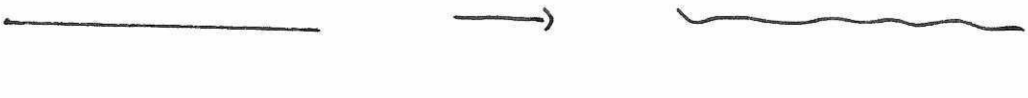
拓扑学是一门非常基础的科学，它在几何与代数之间架起一座新的桥梁。它的理念在几乎所有近代数学中扮演着关键角色：比如微分方程、力学、复分析、代数几何、泛函分析、量子物理、表示论、甚至数论、组合学与计算复杂性理论。

在本章中，我们以一种直观的角度来介绍拓扑学，为我们后续的学习做一些铺垫。

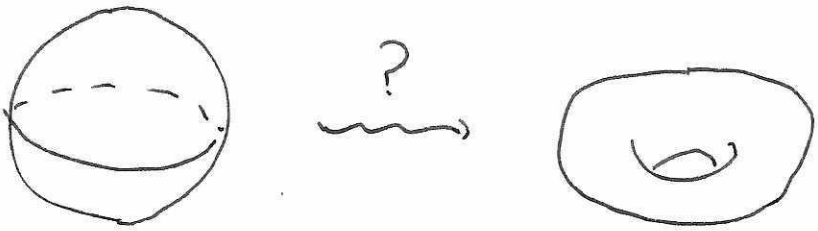
在刚体变换的学习中，我们研究的对象是刚体，可以想象是由坚硬的物质构成，在运动中只改变位置，而不改变形状。现在，我们要把刚体换成由橡皮构成的物体，它能够做微小的形变，比如，它可以拉伸，压缩或弯曲。在拓扑学中，我们也研究球面，但这时，我们不再只考虑由二次方程定义的球面，更好的模型是一只篮球：首先它表面没那么光滑，其次它可以做在挤压下作出微小的形变。这篮球的表面和形变后的表面都是我们在拓扑学意义下的球面：在拓扑意义下，它们是等价的。



在欧氏几何和射影几何中，直线是非常基本的几何对象，在坐标系中它由一次线性方程(组)给出。在拓扑学中，我们的直线不再是"直"的，而是"差不多"直的线：

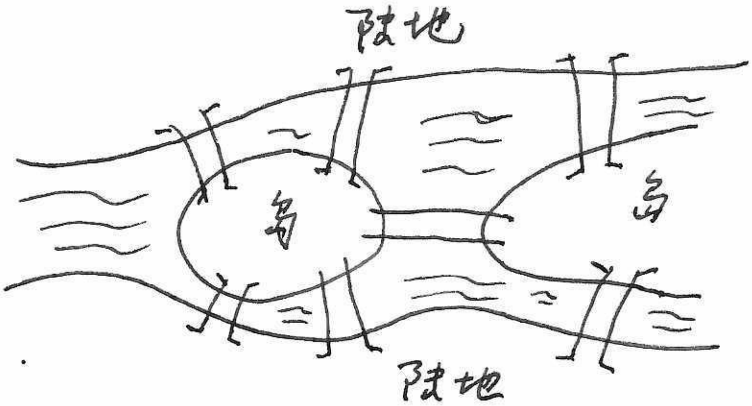


"拓扑变换"通俗的说是把几何对象做一个形变，但不能撕裂它（增加点），也不能~~粘~~接它不同的点（减少点）。在拓扑学中，一个有名的问题是：我们能否通过拓扑变换，把一个篮球面变成轮胎面？



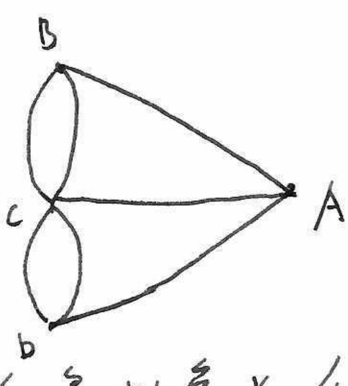
为此，我们采用欧拉的观点。

拓扑学上最早的命题之一是哥尼斯堡七桥问题：



问题：一个人能否不重复走遍七座桥？

欧拉把它抽象为一笔画问题：

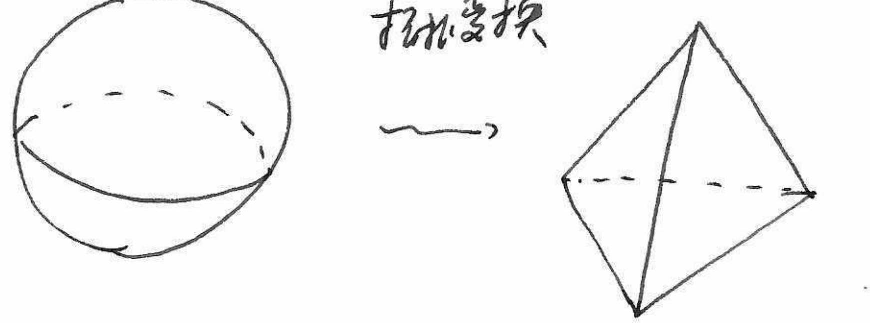


他把陆地和岛抽象为4个点，把桥抽象为7条边。

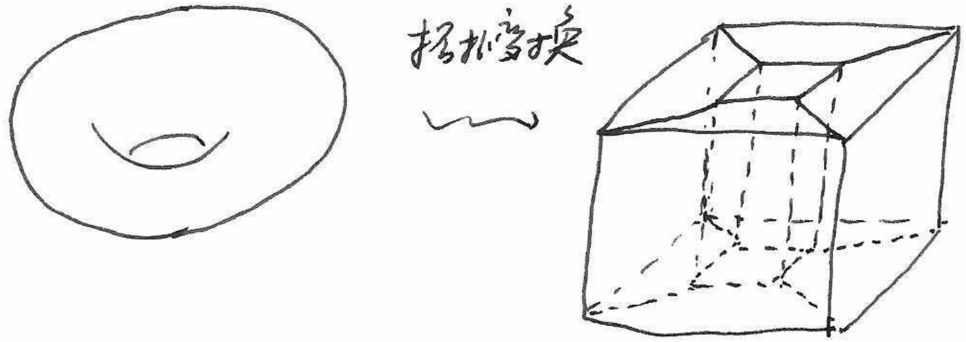
命题1：一个连通图可以一笔画 当且仅当 是有奇数条边经过的点的个数是0或2.

证明：习题.

对于二维的图形，我们有类似的操作：大家观察



(1)



(2)

欧拉考察了多面体的这么一个值：

$$v - e + f$$

v = 点的个数

e = 边的个数

f = 面的个数

在上图中,

图(1): $v-e+f = 4-6+4=2$

图(2): $v-e+f = 16-32+16=0$

上面的量称为欧拉数. 在拓扑学中, 我们可以通过欧拉数不同来判定球面不能通过拓扑变换变成轮胎面. 欧拉数的重要性首先由如下定理给出:

欧拉公式: 任意凸多面体的欧拉数恒为2.

欧拉公式是一个真正意义上的拓扑学结果: 任何两个凸多面体都是拓扑等价的, 即可以用拓扑变换从一个变为另一个. 事实上, 有

命题: 凸多面体与标准球面拓扑等价.

证明: 我们给一个直观的证明. 所谓标准球面是指单位球面. 但我们很容易看到不同半径, 不同球心的球面之间是相互拓扑等价的. 另一方面, 我们可任取一个凸多面体的内部点O(比如重心)以这点为球心作一个充分大半径的球, 包含这凸多面体. 那么以O点作投影, 我们可以得到这凸多面体与球面的一个拓扑变换.

#

定义3：令 S^2 为（标准）球面. S^2 上的一个子集 $X \subset S^2$ 称为一球面网络，若 X 由有限个点和有限条曲线组成，且满足以下条件：

(1) 每条曲线（边）的端点是两个不同的点（节点）；

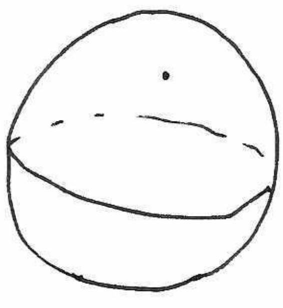
(2) 不同的曲线（边）不相交；

(3) 每条曲线（边）不自交。

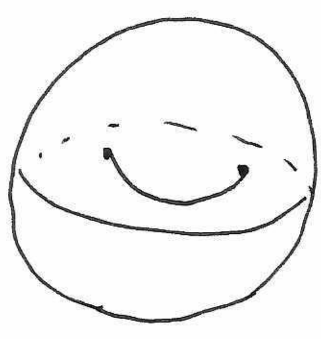
推论4：令 $X \subset S^2$ 为一球面网络，其（节）点个数为 v，曲线（边）个数为 e，X 分割 S^2 的面块数为 f，则有

$$v - e + f = 2$$

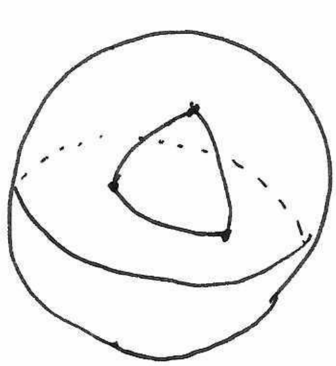
例：



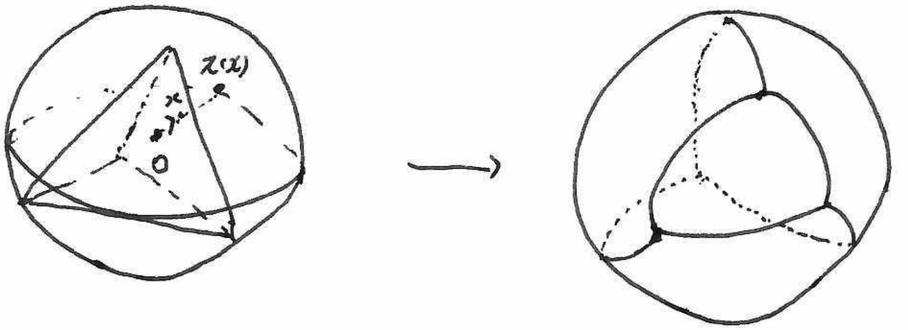
$v=1,\ e=0$
$f=1$



$v=2,\ e=1$
$f=1$



$v=3,\ e=3$
$f=2$



$v=4,\ e=6,\ f=4$

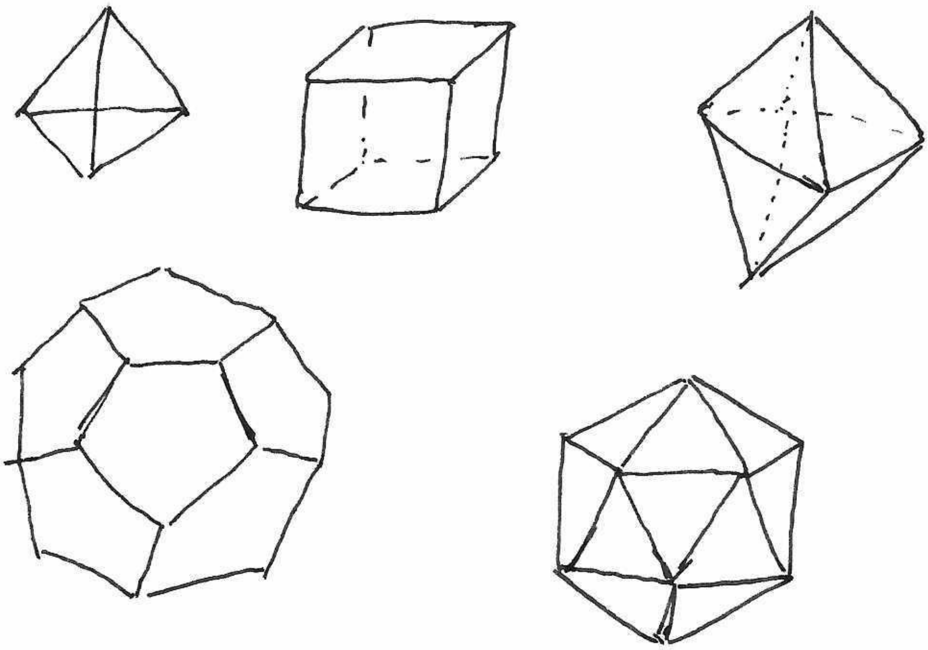
数一数任何一个球上的"球面网络"的 v, e, f!

定义5: 三维欧氏空间中的正多面体是一凸多面体，其每一面都是某固定 n 的正 n 边形，其每一顶点含于相同个数的面.

推论6: 正多面体有五个，分别为：

正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体.

证明:



设正多面体的面有n条边，且每个点含于m个面（亦即含于m条边中）.

那么，我们有

$$v = \frac{n \cdot f}{m} \in \mathbb{N}, \quad e = \frac{nf}{2} \in \mathbb{N}, \quad 且$$

$$\frac{n \cdot f}{m} - \frac{nf}{2} + f = 2$$

$$\iff \quad f \cdot (2n + 2m - mn) = 4 \cdot m \qquad (*)$$

由 $2n+2m-mn > 0$，得

$$m < \frac{2}{1-\frac{2}{n}} \overset{n \geq 3}{\leq} 6$$

故 $m \leq 5$

（代入$(*)$得 $f \leq 20$.）

情形一：$m=3$

$$f(6-n) = 12, \Rightarrow \begin{cases} f=4, \ n=3 & \Rightarrow 正四面体 \\ f=6, \ n=4 & \Rightarrow 正六面体 \\ f=12, \ n=5 & \Rightarrow 正十二面体 \end{cases}$$

情形二：$m=4$

$$f(8-2n) = 16 \Rightarrow f=8, \ n=3 \Rightarrow 正八面体$$

情形三：$m=5$

$$f(10-3n) = 20 \Rightarrow n=3, \ f=20 \Rightarrow 正二十面体.$$

#

注记：上述论证有一处不甚严密，即未说明给定(n,m,f)值的正多面体的唯一性。这可以由柯西的第一个数学成就——关于凸多面体的刚性定理，推得。也可通过证明每个顶点处各边构成的球面角是唯一的来推得唯一性。在此，我们不再赘述。

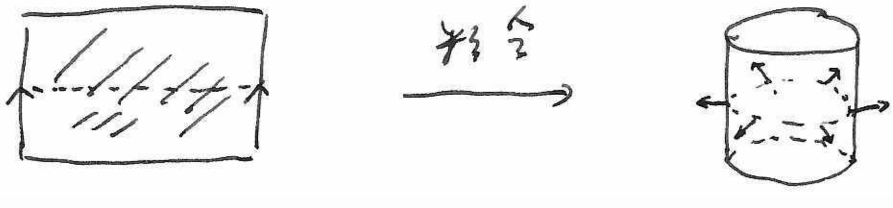
在上述讨论中，我们为把闭合曲面剪开，并剪成一些简单图形是非常重要的。（事实上，我们总是可以把它们剪成三角形，这导致一个空间可三角剖分的拓扑概念）。

那么，我们也可以反过来，用粘合简单图形的边来构造（闭合）曲面！

例7：（莫比乌斯带）

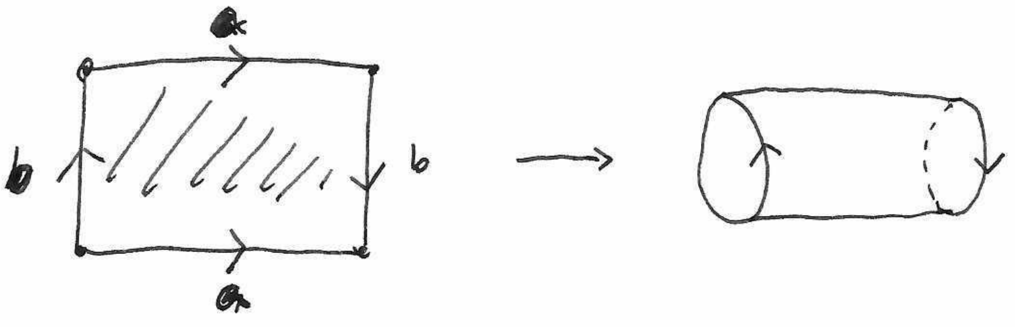
莫比乌斯带奇怪的地方是不可定向！我们把它和圆柱面比较

圆柱面是可定向的。

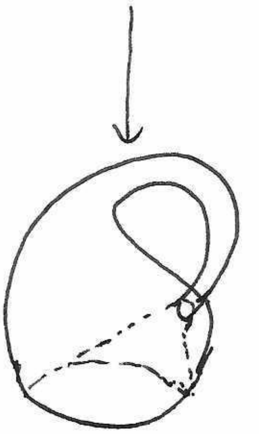


用直观的方法来理解：在圆柱面的任一点，根据法向的朝向，可以定出圆柱面的内面和外面；但莫比乌斯带都不能分出内、外两面。比如，你放一个虫子在圆柱面的外面上，那么只要它不越过边界，它不能爬到内面。而若把它放到莫比乌斯带上，它不需越过边界，就可以爬到这个带上的任何一点。

例8（克莱因瓶）

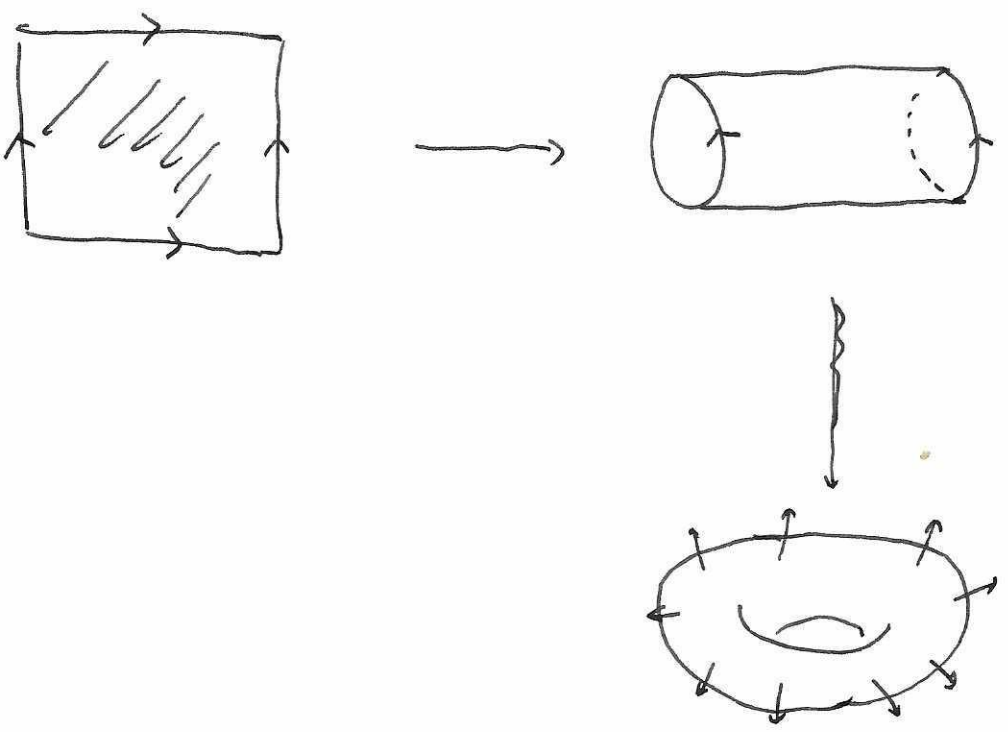


图(3)



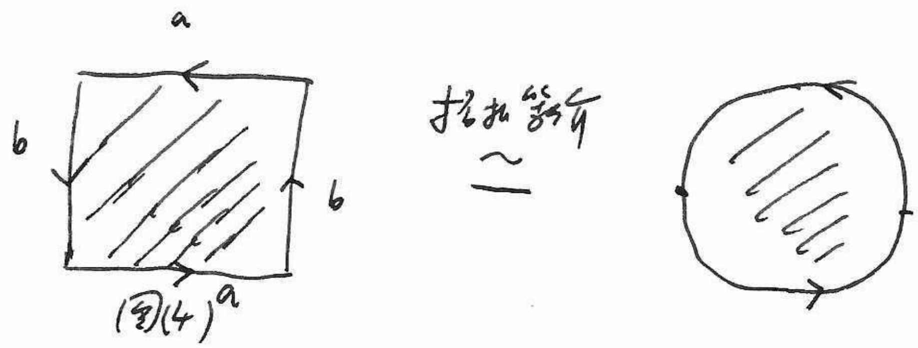
因为在R^3中，我们无法在不产生自交的情况下，把圆柱体的两端按曲线指示方向粘合起来，克莱因瓶在三维空间中并不存在。

克莱因瓶也等价于把莫比乌斯带的边界粘合起来。不难看到，它是一个不可定向的闭合曲面。请比较车胎面。（可定向闭曲面）



我们还有一个不可定向的闭合曲面的例子，那就是射影平面 $\mathbb{RP}^2$.

例 9 （射影平面）



图(4)

同样，$\mathbb{RP}^2$ 不存在于 E^3。

虽然克莱因瓶和射影平面是高维空间中的闭合曲面，但我们还是可以问它们之间是否可以通过拓扑变换来等同起来？

我们还是可以通过计算欧拉数来区分它们！

· 克莱因瓶的欧拉数 $= 1-2+1 = 0$

射影平面的欧拉数 $= 2-2+1 = 1$.

我们有下面基本的定理，其准确陈述和证明属于《拓扑学》的内容。

定理：闭合曲面的拓扑变换下的等价类由可否定向和欧拉数完全确定下来。