数学分析(A1), 第1次课

任广斌(中国科大)

2020-09-21

- 教材:
  - 常庚哲、史济怀《数学分析教程》
- 参考文献:
  - 主要参考书:

    Zorich 《数学分析》
  - 习题:

    谢惠民《数学分析习题课讲义》, 周明强, 裴礼文, 楼红卫
  - 其他:

    华罗庚, Rudin, 菲赫金哥尔茨, 克莱鲍尔, 齐民友,

    张筑生, 梅加强.

人类智慧的结晶

- 知识
  - 科学 ══
    - 数学 ══
      - 分析
      - 代数
      - 几何
    - 数学的应用
  - 宗教

人类是宇宙的眼睛， 数学是人类的眼睛.

- 计算π速度最快的公式 (Ramanujan):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1103 + 26390k)}{396^{4k}(k!)^4}$$

一般项的阶: $a_k = O\left(\frac{k}{(99)^{4k}}\right).$

从分析的角度看宇宙：数学是宇宙的语言

- 相对论:

  时空是Minkowski流形 流形上微积分

- 量子物理:

  可观察量=Hilbert空间中的自伴算子 泛函分析谱理论

- 规范场物理:

  宇宙规则: 选取联络使得曲率最小 近代微分几何

从分析的角度看数学

- 分析:

数学分析	(导数和积分)
复分析	($\mathbb{C}$上数学分析)
实分析	(什么是积分, 积分定义的最广场所)
泛函分析	(无限维数学分析)
偏微分方程	(数学分析的应用)
概率论	(数学分析的拓展)

- 代数

线性代数	(数学分析线性化)
抽象代数	(什么是加减乘除)

- 几何

微分几何	(什么导数, 导数定义的最广场所)
点集拓扑	(什么是连续)

课程内容

- 函数.

初等函数	$C^{\omega}[a,b]$	$C^k[a,b]$	$R[a,b]$	$L^2[a,b]$
	Taylor理论	微分学	积分学	Fourier分析

- 极限　　(微积分基本定理（双射）)

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftharpoons}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$$

极限=级数=积分=求导

课程内容(续)：周六，120学时

第1-2章	极限	
第3-4章	导数	Taylor定理
第5-7章	积分	Riemann定理

350年的历史

- 微积分创立：Newton(英1665), Leibniz (德)
- 严格化（Cauchy, Riemann, Weierstrass）
- Lebesgue积分理论(1902)
- 外微分理论在高维起关键作用(Grassman, Poincare, Cartan)

贯穿主线： 导数–微分–积分

极限的精髓: 从规则到不规则, 从简单到复杂

极限过程打破人类的认识边界并将边界逐步推向无穷

实数理论	有理数	$\longrightarrow$	无理数
极限理论	常值数列	$\longrightarrow$	差不多常值
连续理论	常值函数	$\longrightarrow$	差不多常值函数
可导理论	线性函数	$\longrightarrow$	差不多线性函数
微分学	多项式	$\longrightarrow$	初等函数
积分学	阶梯函数	$\longrightarrow$	Riemann可积函数
实分析	简单函数	$\longrightarrow$	Lebesgue可积函数
泛函分析	光滑函数	$\longrightarrow$	广义函数

极限技巧: ϵ – room

给定精度粗糙$\longrightarrow$精确化$\Longleftarrow$舍$\longrightarrow$得$\Longleftarrow$退一步$\longrightarrow$海阔天空

	粗糙	精确	
给定ϵ	$\|A-B\|<\epsilon$	$A=B$	$\epsilon\to 0^+$
给定ϵ	$\|f(x)-f(x_0)\|<\epsilon$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$	$\epsilon\to 0^+$
给定h	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$f'(x_0)$	$h\to 0$
给定π	$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$	$\int_a^b f(x)dx$	$\|\pi\|\to 0$

没有极限精确定义, 只能从哲学的角度定性研究, 不能定量研究.

近代分析

弯曲空间	流形上微积分、纤维丛上微积分
无限维维空间	Banach空间上微积分
非交换非结合	广义函数、Clifford分析

- 实分析的抽象积分理论是积分理论推广的最广场所.
- 微分几何的流形和纤维丛理论是导数推广的最广场所.

脉络

主要矛盾:	微分	:	积分	
次要矛盾:	局部	:	整体	
	离散	:	连续	(量子理论)
	平坦	:	弯曲	(时空是MInkowski流形)
	有限	:	无限	(矩阵到算子)
	交换	:	非交换	(函数到算子)
	直观	:	抽象	
	数	:	形	

数学分析观光地图：极限

- 分析是极限的艺术 （真传一句话）

$$\xrightarrow{\text{知识扩充}}$$

$$\text{简单常识}\xrightarrow{\text{具体}}\boxed{\text{极限(拓扑学)}}\xrightarrow{\text{抽象}}\text{复杂深奥}$$

$$\xleftarrow{\text{思维反转}}$$

- 仿生学

$$\text{有理数} \xrightarrow{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{p}{q}} \text{实数}$$

$$\text{多项式} \xrightarrow{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x)} \text{初等函数}$$

数学分析观光地图：微分学精髓

- 微积分——狭义积分学:

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$$

- 不定积分和定积分关系

$$\int f(x)dx \ \underset{\text{定积分}}{\overset{\text{不定积分}}{=\!=\!=}} \ \int_a^x f(t)dt + C$$

- 导数–微分–积分公式的对应

导数公式	微分公式	积分公式
$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$	$dF(x) = f(x)dx$	$F(x) + C = \int dF(x) = \int f(x)dx$

数学分析观光地图：积分学精髓

$$R[a,b] \xrightarrow{\int_a^x} C[a,b] \qquad (\text{非单射})$$

$$f \in R[a,b] \xLeftrightarrow{\text{Riemann可积性定理}} f\text{有界几乎处处连续}$$

- 任意修改函数在一点处的值, 则可积性不变, 积分值不变.
- Riemann积分理论 $\xRightarrow[\text{打破函数有界}]{\text{打破区间有界}}$ 广义Riemann积分理论

微分学顶峰: 带积分余项的Taylor公式

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \text{余项}$$

$$\text{积分余项} \xlongequal{f^{(n+1)}\text{存在且可积}} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

有了导数和积分以后, 研究函数的手段极大地增加

带积分余项的Taylor公式一统江山

- 带Lagrange余项的Taylor公式
- 带Cauchy余项的Taylor公式
- 微积分基本定理
- 分部积分公式
- 积分中值定理(第一、第二)
- 微分中值定理(Rolle, Lagrange, Cauchy)
- L'hospital法则

带Peano余项的Taylor公式

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \text{余项}$$

$$\text{Peano余项} \xlongequal[n\geq 1]{f^{(n)}(a)\exists} o\Big((x-a)^n\Big)$$

带Peano余项的Taylor公式$(n=0) \Longleftrightarrow f$在$a$点连续

带Peano余项的Taylor公式$(n=1) \Longleftrightarrow f$在$a$点可导

带Peano余项的Taylor公式$(n=1) \xRightarrow{\text{极值必要条件}}$ Fermat定理

带Peano余项的Taylor公式$(n=2) \xRightarrow{\text{极值充分条件}}$ 极小值.

带Peano余项的Taylor公式$(n=1) \Longrightarrow \frac{0}{0}$型L'Hospital法则.

带Lagrange余项的Taylor公式

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\text{余项}$$

$$\text{Lagrange余项} \xlongequal[f^{(n+1)}|_{(a,b)}\exists]{f\in C^n[a,b]} \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

带Lagrange余项的Taylor公式$(n=0)$ $\Longleftrightarrow$ Langrange 中值定理

带Lagrange余项的Taylor公式$(n=1)$ $\xRightarrow{\text{单调必要条件}}$ 单调性

带Lagrange余项的Taylor公式$(n=2)$ $\xRightarrow{\text{凸凹必要条件}}$ 凸性

§1. $\mathbb{R}$

- 公元前2百万年: 有理数. 公元前2千年: 极限
- 记号:

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\text{减法}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{除法}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{极限}} \mathbb{R} \xrightarrow{x^2+1=0} \mathbb{C}$$

(有理数域, 实数域(完备), 复数域(代数闭域))

例题: $\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \xRightarrow[n\in\mathbb{N}]{} \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

反证法: $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q} \in (m, m+1), \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

$$\Longrightarrow \quad q_1 := p - qm \in (0, q)$$

$$\Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{p}{q}\frac{p-qm}{p-qm} = \frac{qn-pm}{q_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$q > q_1, \quad p = \frac{p_1}{q_1} q > p_1, \qquad p_1, q_1 \in \mathbb{N}.$$

$\xRightarrow[q>q_1, p>p_1, all\ in\ \mathbb{N}]{\sqrt{n}=\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}}$ 矛盾(无穷递降法).

$\mathbb{Q}$长除法

$$\begin{array}{r|l} & \underline{a_0.\quad a_1} \\ q\ ) & p \\ & \underline{a_0 q} \\ & \quad r_0\times 10 \\ & \quad\underline{\quad a_1 q} \\ & \qquad r_1\times 10 \end{array}$$

$$\xLeftrightarrow[\substack{a_{k\geqslant 1}=0,1,\cdots,9\\ a_0\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \ p,q\in\mathbb{N}}]{r_k=0,1,\cdots q-1}$$

$$\begin{cases} p = a_0 q + r_0 \\ 10r_0 = a_1 q + r_1 \\ \vdots \\ 10r_n = a_{n+1} q + r_{n+1} \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{p}{q} = \begin{cases} = a_0 + \dfrac{r_0}{q} \\ = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{1}{10}\dfrac{r_1}{q} \\ = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \cdots + \dfrac{a_n}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}\dfrac{r_n}{q} \\ \xlongequal[r_n<q]{\text{上式极限}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0.a_1a_2\cdots(\text{十进制}) \end{cases}$$

有理数

$$
\text{有理数}\begin{cases}
\text{有限小数：} & \exists r_n = 0 \\
\text{无限小数, 但是循环：} & \forall r_k \neq 0 \xRightarrow[\text{方程组必重复}]{r_k=0,1,\cdots,q-1} \text{出现循环}
\end{cases}
$$

例题

$$0.\dot{9} = 1 \quad (\text{否则，距离} > 0)$$

$$x = 0.\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_n \Longrightarrow 10^n x = a_1 \cdots a_n + x$$

$$\Longrightarrow x = \frac{a_1 \cdots a_n}{10^n - 1}.$$

实数刻画

- 十进制表示: $a_0.a_1a_2\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$

$$\mathbb{R} = \text{由1经过加、减、乘、除、极限运算得到}$$

- Dedekind分割: $\sqrt{2} \equiv \left\{A, \quad B\right\}, \qquad \mathbb{Q} = A \bigsqcup B$

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0, \text{或} x > 0 \text{而且} x^2 < 2\} \\ B &:= \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, \quad x^2 > 2\} \end{aligned}$$

- Cauchy 数列: $\sqrt{2} \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty} / \sim$

$$a_n \in \mathbb{Q}, \quad \text{Cauchy数列(极限为 } \sqrt{2})$$

有理数的稠密性

- 不同两个实数之间必有(无穷个)有理数和(无穷个)无理数.

$$\forall (x,y) \xrightarrow[q(y-x)>1]{\exists q\in\mathbb{N}} \exists\, p \in (qx,qy)\cap\mathbb{Z} \Longrightarrow \frac{p}{q} \in (x,y)$$

$$\forall (x,y),\ \exists\, \frac{p}{q} \in (\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}) \quad\Longrightarrow\quad \frac{p}{q}\sqrt{2} \in (x,y)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$$

实数几何表示

$$\mathbb{R} \xleftrightarrow{\text{双射}} \text{实数轴}$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}\right\} \xlongequal[\text{套出实轴上唯一点}]{\text{区间套}} \bigcap_{k=0}^{\infty}\left[a_0.a_1\cdots a_k,\quad a_0.a_1\cdots a_k+\frac{1}{10^k}\right].$$

总结

- 进入《数学分析》大森林, 成为2维的人
- 加上战略高度的俯瞰, 成为3维的人
- 熟能生巧, 掌握数学全部已有知识成为4维的人.

数学分析是数学各学科的固有参照物，是我们的锚定和定海神针；其它学科都有数学分析的影子。

作业

第一次做业: [1.1] 4, 5, 10

问题: 1, 3, 5, 6

分析是极限的艺术

数学分析(A1), 第2次课

任广斌(中国科大)

2020-09-23

本次课主要内容

- 数列极限(§2).
  - 极限定义: $\epsilon - N$语言.
- 极限性质(§3).
- 极限判别法.

从仿生学看极限

- 例子:　实数是有理数极限

- 极限和级数是一体两面:　极限 $\xleftrightarrow{\text{双射}}$ 级数

  - 级数是一个极限:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \xlongequal[]{a_n = \sum_{n=0}^{n} b_k} \lim_{n\to\infty} a_n.$$

  - 极限是一个级数(裂项求和):

$$\lim_{n\to\infty} a_n \xlongequal[a_0=0]{b_n=a_n-a_{n-1}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

数列

- 数列是一个映照:

$$\underbrace{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots}_{\text{有序一列数}} \xleftrightarrow{\text{双射}} \begin{array}{rcl} f: \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

- 数列记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 下标n是哑标.

极限顾名思义

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad a_n\text{无限接近}a \quad (n\text{充分大时})$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

- 定性描述, 不深刻, 阻碍极限理论的进一步发展.

例如无法证明*Cesàro*平均的收敛性. 超越直觉

如何定量刻画极限?

- 目标:

$$\text{利用数列} \xRightarrow{\text{传递唯一一个数的信息}} \text{数}$$

- 策略:　利用仿生学

$$\text{平均速度} \xRightarrow{\text{逼近}} \text{瞬时速度}$$

逼近论出场

- 逼近论的精髓:

$$\text{粗糙} \quad \xRightarrow[\text{逼近}]{\epsilon\text{–出错容忍度}} \quad \text{精致}$$

- 借助$\epsilon - room$是极限的精髓:

$$\epsilon\text{出场} \quad \xRightarrow{\text{逼近}} \quad \text{退一步海阔天空方法出场}$$

- 给定ϵ:
  - ϵ可视为测量身高的仪器精度.
  - 数列前有限项对于传递的极限信息没有任何帮助, 可以删去,
- N出场:

$$\text{删去滥竽充数项} \xrightarrow[\text{需要删去多少项}]{N\text{出场刻画}} \text{剩余项给定精度下相同.}$$

- 任意给定ϵ:

给定ϵ	给定精度	粗糙身高	传递信息不唯一
任意给定ϵ	任意给定精度	精致身高	传递信息唯一

记号

$$\underset{\bullet}{\forall} \quad \overline{\overline{\quad\quad\quad}} \quad \underset{\bullet}{A}ny, \qquad \underset{\bullet}{\exists} \quad \overline{\overline{\quad\quad\quad}} \quad \underset{\bullet}{E}xist.$$

$\epsilon = epsilon$

收敛=常值的推广

$$\text{常值数列} \xlongequal[\textit{Trick}:\text{不等式刻画等式}]{a_n \equiv a} \begin{array}{l}\forall\ \epsilon > 0, \quad |a_n - a| < \epsilon \\ (\exists N\text{固定常值}, \quad n = N+1, N+2, \cdots)\end{array}$$

$$\text{差不多常值数列} \xlongequal{\text{例}\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0} \begin{array}{l}\forall\ \epsilon > 0, \quad |a_n - a| < \epsilon \\ \underbrace{(\exists N = N(\epsilon), \quad n = N+1, N+2, \cdots)}_{\epsilon-N\text{语言}}\end{array}$$

任意ϵ精度下, 去掉前面有限项为常值数列 (相差ϵ视为恒等.)

哲学角度看极限

$$\boxed{\text{出发点：　常值数列}} \xrightarrow[\text{极限产生质变}]{\text{极限过程}} \boxed{\text{终点：　收敛数列}}$$

- 见山是山

$$a_n \equiv a, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

- 见山不是山：　(角度提升)

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad (n > N, N\text{与}\epsilon\text{无关}) \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

- 见山还是山：　(维度提升)

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad (n > N, N\text{与}\epsilon\text{有关}) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

极限的精髓: ϵ 宽容度逼近技巧

	等式	不等式
常值数列	$a = b$	$\forall \epsilon > 0, \quad \lvert a - b \rvert < \epsilon$
收敛数列	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	$\forall \epsilon > 0, \quad \lvert a_n - a \rvert < \epsilon \quad (n > N(\epsilon))$ $\forall \epsilon > 0$, 去掉有限项为ϵ精度下常值 极限是一种趋势, 增减有限项不影响极限

ϵ技巧的起源

问题	在极限中, 如何由a_n确定唯一的数a?
难度	a_n, a之间没有确定的关系.
解答	只能借助ϵ-room.

ϵ技巧的哲学解读: 极限两部曲

$$
\begin{aligned}
\epsilon\text{容忍度} = \epsilon - room \quad &= \quad \text{退一步海阔天空} \\
&= \quad \text{先舍后得} \\
&= \quad \text{先扬后抑} \\
&= \quad \text{以退为进} \\
&= \quad \text{将欲取之, 必先予之} \\
&= \quad \text{欲擒故纵}
\end{aligned}
$$

取定ϵ	故纵	先粗糙(逼近)
ϵ任意	欲擒	再精致(极限)

例子: 瞬时速度=平均速度（取定ϵ）的极限（ϵ任意）

$$\text{(极限是一种趋势) } N\text{尺子} \Longleftarrow \lim_{\boxed{n\to\infty}} \boxed{a_n = a} \Longrightarrow \epsilon\text{尺子(差不多常值)}$$

- 极限定量刻画:

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \underbrace{\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{当} n > N \text{时},}_{n\text{充分大时}} \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

两把尺子的作用

ϵ尺子	确定数列是ϵ精度下的常值数列
N尺子	去掉前面N项, 数列是ϵ精度下的常值数列 数列前面N项不反映数列的性态, 可以任意丢弃

- 如何用一个数列描述一个数?

数列 $\mapsto$ 数

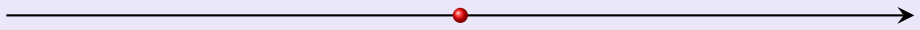
先有ϵ	确定数列是何精度下的常值数列
后有N	去掉前面多少项, 使得数列给定精度下的常值数列

ϵ的任意给定

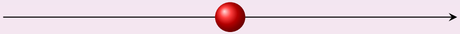
给定ϵ	给定精度下的常值数列	粗糙值	不唯一
ϵ可任意选取	相当于极限过程	精确值	唯一

极限的几何解读

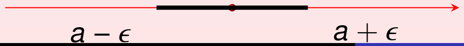
- 常值数列， 点，



- 收敛数列， 大点， 粗糙



- 精细 $(a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon), \forall\ n > N)$



做题法则：战略战术原则

对常值数列命题成立 $\Longrightarrow$ 对收敛数列命题成立

战略　　　　战术

$\epsilon - N$等价刻画

- 可替换
  - $\forall\ \epsilon \in (0,1)$
  - $|a_n - a| < M\epsilon \quad M$是固定正常数.
  - $|a_n - a| \leqslant \epsilon$.

否定命题

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \epsilon_0, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \exists n_0 > N \quad s.t.$$

$$|a_n - a| \geqslant \epsilon_0.$$

- 原理:

$$\forall \quad \Longleftrightarrow \quad \exists, \qquad \text{否定不等式}$$

例题: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

- 证法一:

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1\cdots 1\sqrt{n}\sqrt{n}} \leqslant \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{2\sqrt{n}}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \text{ 取} N = [\frac{4}{\epsilon^2}], \text{ 当} n > N \text{时}, |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon.$$

- 证法二:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n, \qquad \alpha_n > 0$$

$$\Longrightarrow \quad n = (1+\alpha_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n-1}} \quad \text{同上}$$

寻找N的原则

- N不唯一, 找到一个就行
- 不需要找到最小的N, 找最小的N是画蛇添足.
- 找N, 通过"放缩"方法.
- $N = N(\epsilon)$表示依赖关系而不是函数.

极限奥秘

$$\xrightarrow{\text{知识扩充}}$$

$$\text{简单常识}\xrightarrow{\text{具体}}\boxed{\boxed{\text{极限(拓扑学)}}}\xrightarrow{\text{抽象}}\text{复杂深奥}$$

$$\xleftarrow{\text{思维反转}}$$

- 奥秘:

  极限过程将我们的知识边界极大推广到遥远处

  但是遥远边界处的知识是由极限的触角和核心知识发生联系.

极限奥秘(续)

$$\xrightarrow{\text{扩充}}\quad\xrightarrow{\text{扩充}}\quad\xrightarrow{\text{扩充}}$$

$$\mathbb{Q}:\mathbb{R} \quad = \quad \text{常值数列: 收敛数列} \quad = \quad \text{多项式: 初等函数}$$

$$\xleftarrow{\text{简化}}\quad\xleftarrow{\text{简化}}\quad\xleftarrow{\text{简化}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow$ a_n的性质是否遗传到极限

a的性质如何展示a_n性质

- 唯一性:　收敛数列极限唯一

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b \Longrightarrow a = b.$$

证明：　$|a-b| \leqslant |a-a_n| + |a_n-b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \qquad n \gg 1$

收敛数列性质(续)

- 有界性:　收敛数列极限必有界, 反之不然
  - 有界:　$|a_n| \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$　(界不唯一).
  - 有上界:　$a_n \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
  - 有下界:　$a_n \geqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

证明:　取$M = |a_1| + \cdots |a_N| + |a| + 1$.

- 注记:

有界	宏观控制
收敛	集中趋势(大点)

极限与四则运算关系：　可交换、保四则运算、保语法

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty}\text{收敛} \quad \Longrightarrow \quad \{a_n \circledast b_n\}_{n=1}^{\infty}\text{收敛}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \circledast b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \circledast \lim_{n\to\infty} b_n$$

(记号：　$\circledast = +, -, \times, \div$　　除时分母极限假设非零.)

证明:　$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \frac{\epsilon}{\frac{|b|}{2}|b|}, \qquad |b_n| > \frac{|b|}{2}, \quad n \gg 1.$$

保序性

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in (\alpha,\beta) \Longrightarrow a_n \in (\alpha,\beta), \quad n \gg 1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Longrightarrow a_n < b_n, \quad n \gg 1.$

(3) $a_n \leqslant b_n, \quad n \gg 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

(4) $a_n < b_n, \quad n \gg 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

注记: 极限刻画趋势, 反映不出前有限项的信息.

发散性判别法:　子列

- 子列:　$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$k_n = \text{子列元素在原数列位置}$$

$$n = \text{子列元素在自身数列位置}$$

    - k_n满足刻画性质：

$$k_n \Uparrow, \qquad k_n \geqslant n \quad (\text{缩编})$$

- 子结构是数学中天然的结构:

子集合, 子群, 子环, 子域, 子模, 子流形, 子空间. 子代数

它是探针, 可探测研究对象的整体结构.

数列与子列敛散关系

- 下列等价
  - $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛
  - $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$任意子列收敛
  - $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$任意子列收敛且极限相同

证明: $(1) \Longrightarrow (3)$

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a| < \epsilon$$

$$但是 k_n \geqslant n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_{k_n} - a| < \epsilon$$

例题: $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ 发散

证明: 取

$$k_n \in \underbrace{\left(n\pi + \frac{\pi}{3}, \quad n\pi + \frac{2\pi}{3}\right)}_{\text{长度}\frac{\pi}{3}>1}$$

$$\Longrightarrow \quad \sin k_n \begin{cases} \geqslant \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & n\text{偶} \\ \leqslant -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} & n\text{奇} \end{cases}$$

两边夹定理(比较判别法)

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad n \gg 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

证明: $\forall\, \epsilon > 0, n \gg 1 \quad \Longrightarrow \quad a - \epsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < a + \epsilon.$

作业

第二次做业: [1.2] 1(奇数题) 4, 5, 6, 7

[1.3] 10, 11, 12

数学分析(A1), 第3次课

任广斌(中国科大)

2020-09-25

本次课主要内容

- 无穷大和无穷小
  - $\frac{\infty}{\infty}$型Stolz定理(离散L'Hospital法则)
  - $\frac{0}{0}$型Stolz定理(离散L'Hospital法则)
- 常数e
  - e是无理数

- 极限推广之一:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}.$$

- 推广方法:

$$\sqrt{2}\text{用有理数描述} \xLeftrightarrow{\text{类似}} \infty\text{用数列描述}.$$

实轴单点紧化

- 球极投影

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\text{双射}} & \mathbb{R}\cup\{\infty\} \\ A & \mapsto & B \end{array}$$

$\mathbb{S}^1$是以实轴的原点为圆心的单位圆周.

$\mathbb{S}^1$的北极与A点的连线交实轴于B点.

无穷大无穷小的定义

- 无穷大:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall\ M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{当} n > N \text{时},\ a_n > M.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (-a_n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

- 无穷小: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

- 无穷大和无穷小关系

$$\{a_n\}\text{无穷大} \xLeftrightarrow{a_n \neq 0} \left\{\frac{1}{a_n}\right\}\text{无穷小}$$

无穷大和无界关系

- 无穷大和无界:

$$\text{无穷大} \Longrightarrow \text{无界} \Longleftrightarrow \exists\text{子列无穷大}$$

敛散形态

	$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	∞
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	收敛	发散	发散
		特性同$\mathbb{R}$	特性不同于$\mathbb{R}$
	$a=0$无穷小量		无穷大量

无穷小的优势

- 收敛的本质是无穷小:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$$

- 无穷小的优势:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \xLeftrightarrow[\text{转化为非负无穷小}]{\text{天上掉下的非负工具}} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

$$\xLeftrightarrow[\text{转化为上极限}]{\text{简化一半}} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| = 0$$

- Cesàro平均:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots a_n}{n} = a.$$

- 对于$a = \infty$, 结论不成立:

$$a_n = \begin{cases} n, & n\text{偶} \\ -n-1, & n\text{奇}. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a.$$

证明: 简化: 不妨设$a=0$.

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N_1$$

$$\Longrightarrow \qquad |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right| \leqslant \frac{|a_1|+\cdots+|a_{N_1}|}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

对于$n > N := N_1 + [\frac{2(|a_1|+\cdots+|a_{N_1}|)}{\epsilon}] + 1$成立.

Toeplitz变换

- 假定

$$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

- 给定数列$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, 可构造新数列$\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} t_{nk}.$$

- 对应关系$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \mapsto \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$称为Toeplitz变换.
- Toeplitz变换保持收敛性, 保持极限值不变.

Toeplitz变换例子

- 假设$\alpha_n > 0$, 而且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = 0, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

- Toeplitz变换

$$t_{nk} = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.$$

  - 例子:

$$t_{nk} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n - 1}.$$

$$t_{nk} = \frac{k^2}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = \frac{k^2}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Theorem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k = a$$

证明: 不妨设$a = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{当}n > N\text{时}, \quad |a_n| < \epsilon/2$$

$$\Longrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| + \frac{\epsilon}{2} \qquad (\forall\ n > N)$$

$$\leqslant \epsilon \qquad (\forall\ n \gg 1)$$

最后一步利用了下列事实:

$$\text{固定}N, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| = 0$$

Toeplitz变换的矩阵表达

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_{11} & & & & \\ t_{21} & t_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Toepliz矩阵是非负下三角矩阵,

  每行是单位分解, 每列是无穷小量.

- 当Toepliz矩阵每行的元素都相等时,

  Toeplitz 变换———Cesàro平均.

Theorem (Stolz定理)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} \overset{x_n \nearrow +\infty}{\underset{\text{右端}\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.$$

证明: 情形1 $a \in \mathbb{R}$ (右端记为a). 记$x_0 = y_0 = 0$.

$$\frac{y_n}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n} \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

$$\text{Toeplitz} \quad \Longrightarrow \quad \text{Stolz}$$

证明: 情形2 $a=+\infty$: 化为$a=0$情形, 只要证$y_n \nearrow +\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=+\infty \Longrightarrow \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}>1 \quad (n>N)$$

$$\Longrightarrow y_n-y_{n-1}>x_n-x_{n-1}, \quad y_n \nearrow$$

$$\xRightarrow[n:=N+1,\cdots,n]{\text{相加}} y_n-y_N>x_n-x_N\to+\infty.$$

情形3 $a=-\infty$: 化为$a=+\infty$情形.

注记

- $\frac{\infty}{\infty}$型Stolz定理，实际上$\frac{\star}{\infty}$型

- $a=\infty$结论失效:

$$x_n=n, \qquad y_n=\begin{cases} n^2, & n偶 \\ 0, & n奇 \end{cases}$$

- 几何:　点$M_n(x_n,y_n)$在x轴投影$\nearrow +\infty$

$$\overrightarrow{M_nM_{n-1}}斜率\to a \Longrightarrow \overrightarrow{OM_n}斜率\to a$$

Theorem (Stolz定理)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} \xLeftarrow[\text{右端}\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}]{x_n,y_n\to 0,\quad x_n\searrow 0} \lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.$$

证明: 不妨设$a=0$ $(y_n$用y_n-ax_n代). 其它情形同Toeplitz证明.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0 \xRightarrow{\forall\ \epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}} -\epsilon<\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}<\epsilon \quad (\forall\ n>N)$$

$$\xRightarrow[\text{相加}]{n:=n+1,\cdots,n+p} -\epsilon<\frac{y_{n+p}-y_n}{x_{n+p}-x_n}<\epsilon \quad (n>N,\forall p\in\mathbb{N})$$

$$\xRightarrow{p\to\infty} -\epsilon\leqslant\frac{y_n}{x_n}\leqslant\epsilon \quad (n>N)$$

§ 5 最重要常数e

- 在复的观点下，指数函数一统天下

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

- 利用exp, log运算，乘除法和加减法地位相同.

(利用Fourier变换和逆变换, 求导积分和乘除法地位相同.)

- 导数运算下的不动点

$$(e^x)' = e^x$$

概率论	偏微分方程	李群
Gauss分布	热核	单参数子群

e的定义

$$e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 2.71828\cdots$$

- 极限存在性: 利用单调有界数列必有极限(证明见下节)
- 两个极限相等:

Lemma

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - (1+\frac{1}{n})^n = \frac{3\alpha_n}{2n}, \qquad \alpha_n \in (0,1)$$

需要 $(1-r_1)\cdots(1-r_n) \geqslant 1-r_1-\cdots-r_n, \qquad \forall\, r_1,\cdots r_n \in (0,1) \qquad (\star\star)$

e的定义的合理性

$$e_n \;:== \;(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}$$

$$\overset{(\star)}{=\!=} \;2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

$$(\star) \Longrightarrow e_n < e_{n+1}$$

$$(\star) \Longrightarrow e_n < 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} < 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 3$$

$$(\star) \overset{(\star\star)}{\Longrightarrow} e_n \geqslant 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1+2+\cdots+(k-1)}{n})$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{3}{2n}$$

e的Taylor展开余项

Lemma

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\theta_n}, \qquad \theta_n \in (n, n+1).$$

证明: $$e - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n!n}$$

推论: $$e - \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} \in (\frac{1}{11!}, \frac{1}{10!10}) \subset (0, 10^{-7}) \Longrightarrow e = 2.71828\cdots$$

- 反证法

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{m}{n} \in (2,3), \qquad n, m \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\theta_n}, \qquad \theta_n \in (n, n+1).
\end{aligned}
$$

$$
\xrightarrow{\text{两边乘}n!} \quad \frac{1}{\theta_n} \in \mathbb{N} \qquad \text{矛盾}
$$

作业

第3次做业:　[1.4]　3　4,　5

[1.6]　1,　2,　14,　15,　16

[1.11]　3,　4,　5

数学分析(A1), 第4次课

任广斌(中国科大)

2020-09-27

本次课主要内容

- $\mathbb{R}$完备性(§7):
  - $\mathbb{R}$完备性的六个等价定理

实数刻画

- 十进制表示: $a_0.a_1a_2\cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$

$$\mathbb{R} = \text{由1经过加、减、乘、除、极限运算得到}$$

- Dedekind分割: $\sqrt{2} \equiv \left\{A, \quad B\right\}, \qquad \mathbb{Q} = A \bigsqcup B$

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0, \text{或} x > 0 \text{而且} x^2 < 2\} \\ B &:= \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, \quad x^2 > 2\} \end{aligned}$$

- Cauchy 数列: $\sqrt{2} \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty} / \sim$

$$a_n \in \mathbb{Q}, \quad \text{Cauchy数列(极限为 } \sqrt{2}\text{)}$$

实数完备性等价刻画

- 下列等价:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{R}\text{完备性} \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathbb{R}\text{十进制表示} \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{Dedekind分割公理} \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{实数的Cauchy数列表示} \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{实数完备性的六个等价定理}
\end{aligned}
$$

微积分基石

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{单调有界定理}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{区间套定理}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{确界原理}} \arrow[dd, Rightarrow] \\
 & \text{Cantor} & \\
\boxed{\text{Cauchy准则}} \arrow[uu, Rightarrow] & \boxed{\text{列紧性定理}} \arrow[l, Rightarrow] & \boxed{\text{有限覆盖定理}} \arrow[l, Rightarrow] \\
\mathbb{R}\text{完备} & \text{Bolzano-Weierstrass} & \text{Heine-Borel} \\
 & [a,b]\ \text{列紧} & [a,b]\ \text{紧}
\end{tikzcd}$$

Theorem (单调有界定理)

单调有界数列必有极限.

Theorem (区间套定理)

若闭区间套的长度趋于零, 则必套出唯一一点.

区间套定理

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists!\ \zeta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

即 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \xRightarrow{[a_n,b_n]\searrow,\text{长度}\to 0}$ 独点集

Theorem (确界原理)

有上界的集合必有上确界.

- $E \subset \mathbb{R}$, E的上界:

$$x \leqslant M \ (\forall x \in E) \Longleftrightarrow M\text{是}E\text{的一个上界}.$$

- E的上确界记为 $\sup E$: 上界中最小的一个

  - $\sup E$是E的上界: $\forall\ x \in E \Longrightarrow x \leqslant \sup E$

  - $\sup E - \epsilon$不是E的上界

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists x_\epsilon \in E, \quad s.t. \ \ \sup E - \epsilon < x_\epsilon \leqslant \sup E$$

- 最大值与上确界

$\max E$	上界	$\max E \in E$
$\sup E$	上界	可能 $\sup E \notin E$ (例如$E = (0, 1)$)

- 上确界 $\overset{\text{在}\epsilon\text{误差下}}{=\!=\!=\!=\!=}$ 最大值

- 起着最大值的作用

$$x_\epsilon \in (\sup E - \epsilon,\ \ \sup E] \cap E$$

- 上确界是最大值在极限意义下的推广

$$\text{上确界} \xRightarrow{\text{极限}} \text{最大值}$$

- 上确界与最大值关系

$$\text{上确界} =\!=\!=\!= \text{最大值} + \lim$$

- 下确界

$$\inf E := \text{下界中最大的一个}$$

$\sup E$	$\inf E$
supremum	infimum

- 对偶关系:

$$\sup(-E) = -\inf E$$

$$\inf(-E) = -\sup E$$

有限覆盖定理

Theorem (有限覆盖定理)

有界闭区间的任意开覆盖必存在有限子覆盖.

$$[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \qquad (I_\lambda\text{开区间,}\quad \Lambda\text{指标集合})$$

$$\xrightarrow{\exists\ \text{有限集}\Lambda_0\subset\Lambda} \qquad [a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} I_\lambda$$

反例: $\qquad (0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n},\ 1)$

列紧性定理

Theorem (Bolzano-Weierstrass列紧性定理)

有界数列必有收敛子列.

Theorem (Cauchy判别准则)

Cauchy数列必收敛.

Cauchy数列$\Longleftrightarrow$收敛数列.

Cauchy数列的定义

- Cauchy数列

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{是Cauchy数列}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\ \epsilon > 0,\ \underbrace{\exists N = N(\epsilon),\ \text{当} n, m > N\text{时},}_{n, m\text{充分大}}\ \text{有} |a_n - a_m| < \epsilon$$

Cauchy数列的特点

- Cauchy数列是天生具有收敛资质的数列

对于任意给定的误差, 去掉前面有限项, 是在给定精度下的常值数列.

- Cauchy数列的判定由数列自身的信息给定

$$\text{Cauchy数列} \xLeftrightarrow{\text{没有外在的}a} \text{自身的信息}$$

注记

- 内蕴判别法

$$\text{Cauchy} \Longrightarrow \text{收敛}$$

- 完备的直观看法:

没有极限的Cauchy数列称为空隙，无空隙称为完备.

定理证明(0): 实数十进制表示$\Longrightarrow$单调有界定理

$$
\begin{array}{lcll}
a_1 & = & \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots, & \alpha_0\in\mathbb{N},\quad \alpha_{j\geqslant 1}\in\{0,1,\cdots,9\} \\
b_1 & = & \beta_0.\beta_1\beta_2\cdots & \text{类似} \\
c_1 & = & \gamma_0.\gamma_1\gamma_2\cdots & \\
\vdots & & \vdots\quad\vdots\quad\vdots & \\
\downarrow & & & \\
a & = & P_0.P_1P_2P_3\cdots &
\end{array}
$$

- 考虑第一列:

  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\nearrow\Longrightarrow \alpha_0\leqslant\beta_0\leqslant\gamma_0\leqslant\cdots\leqslant M$ (第一列单调有界)

  单调增加有上界的整数列, 只有有限项出现跳跃，假设跳跃位于$k_1,\cdots k_{n_0}$, 去掉前k_{n_0}项, 为常值数列.

- 考虑第二列, 继续类似讨论.

定理证明(1): 单调有界定理$\Longrightarrow$区间套定理

- 方法: 区间套$\xrightarrow{\text{构造}}$单调有界数列.

$$a_n \nearrow \leqslant \quad b_n \searrow, \qquad b_n - a_n \to 0$$

$\xrightarrow{\text{单调有界定理}}$ 两个数列极限均存在且相等，记为ζ

$$\xrightarrow{\exists !} \quad \zeta \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

$$\forall x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_n, b_n] \quad \text{有}$$

$$|\zeta - x| \leqslant b_n - a_n \to 0$$

- 方法: 有上界的集合$\xrightarrow{\text{二等分}}$区间套.

记 E是给定的有上界的集合，$F := E$的上界集.

$$\underbrace{[\underbrace{a}_{\in E},\ \underbrace{b}_{\in F}]}_{\text{含有某}E\text{中点}d_0} \supset \underbrace{[a_1,\ \underbrace{b_1}_{\in F}]}_{\text{含有某}E\text{中点}d_1} \supset \underbrace{[a_2,\ \underbrace{b_2}_{\in F}]}_{\text{含有某}E\text{中点}d_2} \supset \cdots$$

套出唯一一点$\zeta = \sup E$:

$$\zeta = E\text{中点的序列的极限} = F\text{中点的序列的极限}$$

定理证明(3): 确界原理$\Longrightarrow$有限覆盖定理

- 方法: 局部 $\xrightarrow[\text{得寸进尺方法}]{\text{Hömander 构造}}$ 整体.

$$\Gamma \quad := \quad \left\{x \in [a,b] : \quad [a,x]\text{具有有限子覆盖}\right\} \neq \emptyset$$

$$c \quad := \quad \sup \Gamma \leqslant b$$

只要证明$b \in \Gamma$.

反证法: $b \notin \Gamma$

取覆盖中开区间I_0, 取$\epsilon_0 > 0$:

$$c \in (c - \epsilon_0,\quad c + \epsilon_0) \subset I_0$$

$$\xRightarrow{c=\sup\Gamma} \quad \exists x_0 \in \Gamma \cap (c - \epsilon_0,\quad c + \epsilon_0)$$

$$\xRightarrow{x_0\in\Gamma} \quad [a, x_0]\text{具有有限子覆盖}$$

$$\xRightarrow{\text{添加}I_0} \quad [a, c + \frac{\epsilon_0}{2}]\text{具有有限子覆盖}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{若}c < b,\text{则这与}c = \sup\Gamma\text{矛盾}.$$

若$c = b$, 则这与$b \notin \Gamma$矛盾.

- 方法: 不存在收敛子列 $\xrightarrow[\text{构造}]{\text{反证法}}$ 开覆盖.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$不存在收敛子列

$\xrightarrow[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,b]]{\text{不妨设}\{a_n\}\text{互不相同}}$ $\forall\, x\in[a,b],\ \ \exists(x-\delta_x,x+\delta_x)$

仅含有$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$有限项.

$\xrightarrow{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\bigcup\limits_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\bigcup\limits_{\text{有限}}(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 矛盾

定理证明(5): 列紧性定理$\Longrightarrow$Cauchy准则

Cauchy数列 $\Longrightarrow$ 有界数列

$\Longrightarrow$ 存在收敛子列，其极限是整个数列的极限.

定理证明(6): Cauchy准则$\Longrightarrow$单调收敛定理

假设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots < M$ (数列的上界)

构造二等分区间套: $E := \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $F :=$ E的上界集

$$\underbrace{[\underbrace{a_1}_{\in E},\ \underbrace{M}_{\in F}]}_{\text{含有某}E\text{中点}a_{n_1}} \supset \underbrace{[\alpha_1,\ \underbrace{\beta_1}_{\in F}]}_{\text{含有某}E\text{中点}a_{n_2}} \supset \underbrace{[\alpha_2,\ \underbrace{\beta_2}_{\in F}]}_{\text{含有某}E\text{中点}a_{n_3}} \supset \cdots$$

$$\xRightarrow{\text{可选取}n_K \nearrow} \alpha_k \underbrace{\leqslant}_{\text{构造}} a_{n_k} \underbrace{\leqslant}_{\text{单调性}} a_{m(m>n_k)} \underbrace{\leqslant}_{\text{上界}} \beta_k$$

$$\Longrightarrow \{a_n\} Cauchy$$

区间套注记

- 区间套是数学中的聚光灯
  - 区间套将难点集中到一点附近处理.
  - 区间套将所有的信息归纳为一点附近.

最重要的两个拓扑概念

- 紧性:　紧集几何表示为Big point.

  $$\text{在一点成立的性质} \xrightarrow{\text{推广}} \text{在紧集成立.}$$

  紧集是有限集合在不可数集合中的最近的亲戚.

- 完备性:　极限理论建立的基石.

  集合的框架应该足够大, 包含它的所有的天生的Cauchy数列的极限.

  $$\mathbb{Q} : \mathbb{R} =\!=\!=\!=\!= R[a,b] : L^1[a,b]$$

作业

第4次做业: [1.5] 1, 2 4, 5, 6

[1.7] 3

[1.8] 1

数学分析(A1), 第5次课

任广斌(中国科大)

2020-09-28

本次课主要内容

- 压缩映照原理　　(单调收敛的补充)
- 单调数列导函数判别法
- Newton切线法求根

- Cauchy型压缩数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$q \in (0,1)\text{是固定值}$$

$$|a_n - a_{n-1}| \leqslant q|a_{n-1} - a_{n-2}| \qquad \forall\ n > 2$$

Theorem

压缩数列必收敛

证明: $|a_n - a_{n-1}| \leqslant q|a_{n-1} - a_{n-2}| \leqslant q^2|a_{n-2} - a_{n-3}| \leqslant q^{n-2}|a_2 - a_1|$

$$
\begin{aligned}
\forall m > n, \quad |a_m - a_n| &\leqslant |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leqslant (q^{m-2} + \cdots + q^{n-1})|a_2 - a_1| \leqslant \sum_{k=n-1}^{\infty} q^k |a_2 - a_1| \\
&\leqslant \frac{q^{n-1}}{1-q}|a_2 - a_1| \to 0 \qquad n \to \infty
\end{aligned}
$$

压缩数列导函数判别法

假设$a_{n+1}=f(a_n)$, 且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|=r<1.$$

则$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$是压缩数列.

证明: $$|a_{n+1}-a_n| = |f(a_n)-f(a_{a-1})|$$

$$\xlongequal{\text{中值定理}} |f'(\zeta)||a_n-a_{n-1}|$$

$$\leqslant r|a_n-a_{n-1}|$$

单调数列导函数判别法

假设$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_2 > a_1,$

$$f' \geqslant 0.$$

则$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$是单调增加数列.

证明: $f' \geqslant 0. \Longrightarrow f$单调增加

$$a_n \geqslant a_{n-1} \Longrightarrow a_{n+1} = f(a_n) \geqslant f(a_{n-1}) = a_n.$$

利用函数研究数列

	数列	函数
	离散	连续
优势	可数情形	导数工具处理单调凸凹

例题

假设正数$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$序列满足

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

证明: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛.

方法1:

$$
\begin{aligned}
a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad &\Longrightarrow \quad 0 < a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} < 1 \\
&\Longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \\
&\Longrightarrow \quad |a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}\right| \\
&\qquad = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \\
&\qquad \leqslant \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}| \quad (\text{压缩数列})
\end{aligned}
$$

方法2: $f(x) := \dfrac{1}{1+x}$, $a_{n+} = f(a_n)$

$$a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$$

$$\Longrightarrow |a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})|$$

$$\leqslant \max_{x\in[\frac{1}{2},1]} |f'(x)||a_n - a_{n-1}| \quad (Lagrange\text{中值})$$

$$\leqslant \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}| \quad (\text{压缩数列})$$

例题续

极限值:

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \xRightarrow{A:=\lim a_n} A = \frac{1}{1+A}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\cdots$$

例题续: 单调性

- 数列: $a_{n+1} = f(a_n), \qquad f(x) = \dfrac{1}{1+x}.$
- 奇数项子列↘: $a_{2n+3} = F(a_{2n+1}),\ F(x) := f(f(x)) = \dfrac{1+x}{2+x}$

$$a_3 = F(a_1) = \frac{2}{3} < 1 = a_1$$

$$a_{2n+1} \leqslant a_{2n-1} \Longrightarrow a_{2n+3} - a_{2n+1} = F'(\zeta)(a_{2n+1} - a_{2n-1}) < 0$$

- 偶数项子列↗: $a_{2n+2} = F(a_{2n}) \qquad a_4 > a_2$

$$a_2 = f(a_1) = f(1) = \tfrac{1}{2}, \qquad a_4 = F(a_2) = \tfrac{3}{5}$$

单调性判别方法

- 减法:

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n \begin{cases} \geqslant 0 \Longrightarrow x_n \nearrow \\ \leqslant 0 \Longrightarrow x_n \searrow \end{cases}$$

- 除法:

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \frac{x_{n+1}}{x_n} \begin{cases} \geqslant 1 \Longrightarrow x_n \nearrow \\ \leqslant 1 \Longrightarrow x_n \searrow \end{cases}$$

- 函数:

$$x_{n+1} = f(x_n),\ f'(x) > 0 \begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow x_n \nearrow \\ x_1 \geqslant x_2 \Longrightarrow x_n \searrow \end{cases}$$

注记: $\{x_n\}$可以沿着实轴增加或减少.

- 收敛型压缩收敛$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\text{固定值:} \qquad a \in \mathbb{R}, \quad q \in (0,1)$$

$$|a_n - a| \leqslant q|a_{n-1} - a|, \qquad \forall\ n > 2$$

收敛型压缩收敛

Theorem

压缩数列必收敛

证明: $|a_n - a| \leqslant q^{n-1}|a_1 - a| \to 0 \qquad n \to \infty$

- 推广的压缩收敛(压缩收敛满足下列条件)

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant Mq^n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

$$\xrightarrow{\text{Cauchy准则}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \quad \text{收敛}$$

$$\xrightarrow{\text{Cauchy准则}} \quad \{a_n\}\text{收敛}$$

Fibonacci数列

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

$$a_{n+1} \xlongequal{\text{后一项是前两项之和}} a_n + a_{n-1} \quad (\forall\, n \geqslant 2)$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Fibonacci数列(续)

证明: $b_n := \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Longrightarrow b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \dfrac{1}{b_{n-1}}$

取b满足

$$b = 1 + \frac{1}{b}, \qquad \text{其中} \quad b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

两式相减

$$b_n - b = \frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{b}$$

$$\Longrightarrow \qquad |b_n - b| \leqslant q|b_{n-1} - b| \qquad \text{其中} q = \frac{1}{b} \in (0,1)(\text{压缩数列})$$

Fibonacci数列(续)

方法二： $b_n := \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Longrightarrow b_n = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \dfrac{1}{b_{n-1}}$

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} b_{n+1} &= 1 + \frac{1}{b_n} < 1 + \frac{1}{1} = 2 \\ b_{n+1} &= 1 + \frac{1}{b_n} > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$b_n = f(b_{n-1}), \qquad f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \qquad \forall\, x \in [\frac{3}{2}, 2]$$

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - b_n| &\leqslant \max_{x \in [\frac{3}{2}, 2]} |f'(x)||b_n - b_{n-1}| \\ &\leqslant \frac{4}{9}|b_n - b_{n-1}|(\text{压缩数列}) \end{aligned}$$

构造压缩数列计算平方根

- 计算 $\sqrt{a}$, $a > 0$:
  - 初始粗糙值

$$x_0 = [\sqrt{a}] + 1$$

  - 构造压缩数列:

$$x_n := \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}) \geqslant \sqrt{a}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leqslant x_n - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_{n-1} - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_{n-1}}) \leqslant \frac{1}{2}(x_{n-1} - \sqrt{a})$$

(压缩数列)

Stoltz定理的应用

- $$\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = 0 \xRightarrow{\text{Cesàro}} \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$$
- $$\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-2}) = 0 \xRightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{2n} \xRightarrow{\textit{Stoltz}} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n} - a_{2(n-1)}}{2n - 2(n-1)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{2n+1} \xRightarrow{\textit{Stoltz}} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1} - a_{2(n-1)+1}}{2n+1 - (2(n-1)+1)} = 0$$

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \qquad x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o(\frac{\ln n}{n^2})$$

证明: 易见$x_n \in (0,1)$, $x_n \searrow \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\xrightarrow{\text{Stoltz}} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1-x_n)}{x_n(1-x_n)} = 1$$

Stoltz定理的应用(续)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(nx_n-1)}{\ln n}\xlongequal{nx_n\sim 1}\lim_{n\to\infty}nx_n\frac{n-x_n^{-1}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-x_n^{-1}}{\ln n}$$

$$\xlongequal{\text{Stolz}}\lim_{n\to\infty}\frac{1-x_{n+1}^{-1}+x_n^{-1}}{\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$=\!=\!=\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{1}{x_n(1-x_n)}+\frac{1}{x_n})$$

$$=\!=\!=\lim_{n\to\infty}n\frac{x_n(1-x_n)-1+(1-x_n)}{x_n(1-x_n)}=-1$$

$$\lim_{n\to\infty}(2a_{n+1}+a_n)=s\in\mathbb{R}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{s}{3}$$

证明: 不妨设$s=0$ (否则考虑$a_n-\frac{s}{3}$).

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n \;=\!=\!=\; \lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n a_n}{2^n}$$

$$\overset{\text{Stolz}}{=\!=\!=}\; \frac{(-2)^{n+1}a_{n+1}-(-2)^n a_n}{2^{n+1}-2^n}=0$$

聚点

$$\{r_n\}_{n=1}^{\infty} := [0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

考虑数列:

$$\Longrightarrow \underbrace{r_1,}_{1\text{项}} \underbrace{r_1, r_2,}_{2\text{项}} \underbrace{r_1, r_2, r_3,}_{3\text{项}} \cdots$$

$$\text{该数列所有子列极限全体} = [0,1]$$

Newton切线法求根

- 函数: $f \in C^2[a,b], \quad f' > 0, \quad f'' > 0, \quad f(a)f(b) < 0.$

- 函数在(a,b)具有唯一根$x = c$:

$$c \in (a,b) \qquad f(c) = 0$$

函数严格单调增加, 在区间端点函数值异号

- 下面给出方程$f(x) = 0$的唯一根$x = c$的数值解.

数值解的构造：Newton切线法求根方法

- 任取$x_1 \in [a,b]$，过$(x_1, f(x_1))$的切线与实轴的交点记为$(x_2, 0)$.

$$(x_2, 0)\ \text{位于切线}\ \ y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

- x_2满足:
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

- $x_2 \in (a,b)$:

$$f(x_1) + f'(x_1)(a - x_1) < f(x_1) + f'(x_1)(c - x_1) = f(c) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} > a \qquad \text{同理} \qquad x_2 < b.$$

- 过$(x_n, f(x_n))$的切线与实轴的交点记为$(x_{n+1}, 0)$:

$$(x_{n+1}, 0) \text{ 位于切线 } y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

$$\Longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n))}{f'(x_n)}$$

- $x_n \in (a, b)$ (归纳法)

数值解的单调有界性

- $x_n > c \quad (n = 2, 3, \cdots)$:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - c &=\!=\!=\!= x_n - c - \frac{f(x_n) - f(c))}{f'(x_n)} \\
&=\!=\!=\!= (x_n - c)(1 - \frac{f'(\zeta_n)}{f'(x_n)}) \\
&=\!=\!=\!= (x_n - c)(x_n - \zeta_n)\frac{f''(\eta_n)}{f'(x_n)} > 0.
\end{aligned}
$$

- $x_n > x_{n+1} \quad (n = 2, 3, \cdots)$:

$$
\begin{aligned}
0 < f'(x_n) &=\!=\!=\!= \frac{f(x_n) - f(c))}{x_n - x_{n+1}} \\
&=\!=\!=\!= \frac{f'(\zeta_n)(x_n - c)}{x_n - x_{n+1}} \\
&\Longrightarrow x_n > x_{n+1}
\end{aligned}
$$

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到c:

$$a := \lim_{n\to\infty} x_n \xRightarrow{x_n\text{的递推公式两端取极限}} f(a) = 0$$

$$\xRightarrow{\text{方程根的唯一性}} a = c$$

结论

- 过$(x_n, f(x_n))$的切线与实轴的交点记为$(x_{n+1}, 0)$:

$$(x_{n+1}, 0) \text{ 位于切线 } y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

$$\Longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n))}{f'(x_n)}$$

- 函数图形上的点列$\{(x_n, f(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$的极限$(c, f(c))$位于实轴上.

- 方程的根: $\quad y = f(x)$具有根$x = c$.

- 方程$f(x) = 0$的数值解: $\quad x_{n+1} == x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

数学分析(A1), 第6次课

任广斌(中国科大)

2020-09-30

本次课主要内容

- 上极限与下极限(§8)

极限推广之三

- 上极限与下极限是处理极限的重要手段
- 上极限与下极限刻画数列的敛散程度.

$$\text{数列集中于}[\varliminf_{n\to\infty} a_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n]\text{的}\epsilon\text{膨胀.}$$

- 上极限与下极限在数列极限不明情况下使用

数列存在有极限的子列

- 数列有极限 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- 任意数列存在有极限的子列 (数列极限扩充后的好处)
- 数列极限与子列极限关系:

$$
\begin{aligned}
\text{数列有极限} &\Longleftrightarrow \forall \text{ 子列有极限} \\
&\Longleftrightarrow \forall \text{ 子列有极限且极限相同}
\end{aligned}
$$

极限点(聚点)

Definition

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{的极限点}x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Longleftrightarrow \exists\text{子列}a_{k_n} \to x$$

Definition

$$E := \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{极限点全体}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n := \sup E$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf E$$

上极限与下极限关系

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

$$\varlimsup : \varliminf = \sup : \inf = \max : \min .$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n) \;=\!=\!=\!=\; -\varliminf_{n\to\infty} a_n,$$

$$\sup(-E) \;=\!=\!=\!=\; -\inf E$$

上下极限可达到

Theorem

上极限是最大极限点

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \xlongequal{\quad\quad} \max E, \qquad E := \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{极限点全体}.$$

上下极限可达到(续)

证明:　情形1:　$\sup E = +\infty$

$$\xRightarrow{\text{反证法}} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{无上界}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{存在子列}a_{k_n} \to +\infty$$

情形2:　$\sup E = -\infty$

同情形1的证明

续

情形3: $\sup E \in \mathbb{R}$

$$\xRightarrow{a^* := \sup E \in \mathbb{R}} \quad \exists c_1 \in E \cap (a^* - 1,\ a^* + 1)$$

$$\xRightarrow{\text{极限定义}} \quad \text{存在数列}\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{无穷多项} \in (a^* - 1,\ a^* + 1)$$

$$\Longrightarrow \quad \text{取}a_{k_1} \in (a^* - 1,\ a^* + 1)$$

$$\text{同理存在}c_2 \in E \cap (a^* - \frac{1}{2},\ a^* + \frac{1}{2})$$

$$\Longrightarrow \quad \text{取}a_{k_2} \in (a^* - \frac{1}{2},\ a^* + \frac{1}{2}), \qquad k_2 > k_1.$$

继续这一过程, 存在子列$\{a_{k_n}\}$, 极限为a^*.

上极限的$\epsilon - N$定义

Definition

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = a \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R}\text{是}\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{极限点} \\ \forall\ \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{当}n > N\text{时, 有}a_n < a + \epsilon. \end{cases}$$

证明: 必要性: 第一条显然，第二条利用反证法.

否则, 数列中有无穷多项大于$a + \epsilon$,

$\Longrightarrow$ 必有聚点大于a, 与a是最大聚点矛盾.

充分性: 比a大的点都不是聚点.

上极限是一种极限

Theorem

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k \searrow\right) =: \limsup_{n\to\infty} a_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} a_k \nearrow\right) =: \liminf_{n\to\infty} a_n$$

注记: $b_k = \sup_{k\geqslant n} a_k := \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$

$\Longrightarrow \quad b_{n+1} = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} \leqslant \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} = b_n$

$\Longrightarrow \quad \sup_{k\geqslant n} a_k \searrow$

上极限是一种极限(续)

证明: 情形1: $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = +\infty$

存在子列 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k \geqslant \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty$

情形2: $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = -\infty$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \forall\, M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < -M$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k \leqslant -M$$

情形3: $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \in \mathbb{R}$

$$a^* := \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \xlongequal{\exists\text{子列}\{a_{k_n}\}} \lim_{n\to\infty} a_{k_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_n.$$

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{当} n > N \text{时，有} a_n < a^* + \epsilon$$

$$\Longrightarrow \sup_{k\geqslant n} a_k \leqslant a^* + \epsilon \quad (\forall n > N)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k \leqslant a^* + \epsilon$$

$$\xRightarrow{\epsilon\to 0^+} \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k \leqslant a^*$$

上极限的极限刻画

- $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$= 某子列$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$的极限. 该子列只知存在性, 不能具体写出.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n \xlongequal{\exists\text{ 子列}} \lim_{n\to\infty} a_{k_n}$$

- $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$=某单调数列$\{\sup_{k\geqslant n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$的极限, 该单调数列一般不是$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列, 但是具体给出.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n \xlongequal{\exists\text{ 单调数列}} \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k$$

利用上下极限刻画极限

Theorem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = a$$

上下极限保序性

$$a_n \leqslant b_n \quad (n \gg 1) \quad \Longrightarrow \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} b_n, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

口诀: 见到等式或不等式, 取极限(上下极限).

保四则运算

在下列两端有意义的条件下成立

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

- 两端无意义: $+\infty + (-\infty), \quad -\infty + (+\infty)$

  例如: $a_n = n, \quad b_n = -n - 1.$

- 严格不等式可能成立:

  例如: $\{a_n\} = \{0, 1, 2, 0, 1, 2, \cdots\}$

  $\{b_n\} = \{2, 3, 1, 2, 3, 1, \cdots\}$

证明

只证第一公式，另一公式类似、对偶.

- 左不等式, 将上下极限写为极限, 去掉极限, 只要证明

$$\inf_{k\geqslant n} a_k + \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant \inf_{k\geqslant n}(a_k + b_k)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \inf_{k\geqslant n} a_k + \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant a_m + b_m \qquad (\forall\ m \geqslant n)$$

- 右不等式情形一： $\varliminf_{n\to\infty} a_n$, $\varlimsup_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$

将上下极限写为极限, 去掉极限, 只要证明

$$\inf_{k\geqslant n}(a_k+b_k) \leqslant \inf_{k\geqslant n} a_k + \sup_{k\geqslant n} b_k, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

- 采用战略战术方法: 当$\inf=\min$, $\sup=\max$时, 结论显然成立. 利用$\epsilon - room$推广到一般情形:

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ \epsilon>0,\ \exists k_0>n,\ s.t.\ a_{k_0}<\inf_{k\geqslant n} a_k+\epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \inf_{k\geqslant n}(a_k+b_k)\leqslant a_{k_0}+b_{k_0}\leqslant \left(\inf_{k\geqslant n} a_k+\epsilon\right)+\sup_{k\geqslant n} b_k$$

证明(续)

- 右不等式情形二： $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$

$$\exists \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty \Longrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_{k_n} + b_{k_n}) = -\infty$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall M \gg 1,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{当} n > N \text{时}$$
$$a_{k_n} + b_{k_n} < -2M + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_k + \epsilon < -M$$

- 右不等式情形三： $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = -\infty$

$$\forall\ M > 0, \quad a_{k_n} + b_{k_n} < -2M \qquad (n \gg 1).$$

常用等式

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + b \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + b \end{cases}$$

例题

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ 有极限, 有限或} -\infty.$$

证明: 固定$k \in \mathbb{N}$, 考虑k进制: $n = mk + l, \qquad 0 \leqslant l \leqslant k-1.$

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{ma_k + a_l}{mk + l} = \frac{a_k}{k + \frac{l}{m}} + \frac{a_l}{n}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty \Rightarrow m \to \infty} \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_k}{k} \xrightarrow{k\text{任意性}} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{a_k}{k}$$

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{na_1}{n} = a_1 \quad (\text{有上界})$$

记号

$$x = [x] + \{x\}, \qquad [x] \in \mathbb{Z}, \quad \{x\} \in [0, 1)$$

例题

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}=1.$

证明: $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\in\mathbb{N},\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left\{(2-\sqrt{3})^n\right\}=0$

$$\Longrightarrow\quad \underbrace{\underbrace{\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}}_{\in(0,1)}+\underbrace{\left\{(2-\sqrt{3})^n\right\}}_{\in(0,1)}}_{\in(0,2)\cap\mathbb{Z}}=1$$

Cesàro平均与极限关系

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到A

$\Longleftrightarrow$ 它的所有子列的Cesàro平均都收敛到A

证明: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到A $\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$任意子列收敛到A

$\Longrightarrow$ 任意子列的Cesàro平均都收敛到A

所有子列的Cesàro平均都收敛到A

$\xRightarrow{\text{取上极限子列}}$ Cesàro平均收敛到上极限，也收敛到A

$\xRightarrow{\text{取下极限子列}}$ $\overline{\lim}\, a_n = A = \underline{\lim}\, a_n$

乘法版本的Cesàro平均

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\xRightarrow{\text{在}\exp,\log\text{变换下}} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a.$$

例题

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{发散}, & q = -1 \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

证明: 不妨设 $q \neq 0$, $|q| < 1$. 令 $|q| = \dfrac{1}{1+\alpha}$, $\alpha > 0$.

$$0 \leqslant |q|^n \leqslant \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha} \to 0 \quad (\text{两边夹})$$

作业

第6次做业: [1.6] 9, 10

[1.10] 1(奇数题), 2(3), 3

数学分析(A1), 第7次课

任广斌(中国科大)

2020-10-09

本次课主要内容

- 上极限与下极限应用

- 区间套的应用

- 重要概念的注记

压缩数列扰动

$$a_{n+1} \leqslant q a_n + \epsilon_n, \qquad a_n, \quad \epsilon_n \geqslant 0, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$q \in (0,1), \qquad \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

压缩数列扰动(续)

证明: $a := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \in [0, +\infty]$

$$a_{n+1} \leqslant qa_n + \epsilon_n \quad \xRightarrow{\text{取}\overline{\lim}} \quad a \leqslant qa.$$

情形1 $\quad a \neq +\infty$: $\quad \Longrightarrow \quad a = 0.$

情形2 $\quad a = +\infty$: $\quad \xRightarrow{\text{不妨设}a_n \geqslant 1} \quad \epsilon_n < 1 - q < (1 - q)a_n$

$$\xRightarrow[a_{n+1}\leqslant qa_n+\epsilon_n]{} \quad a_n \searrow$$

回顾Stolz定理的应用

$$\lim_{n\to\infty}(2a_{n+1}+a_n)=s\in\mathbb{R}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{s}{3}$$

证明: 不妨设$s=0$ (否则考虑$a_n-\frac{s}{3}$).

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n a_n}{2^n}$$

$$\xlongequal{\text{Stolz}} \frac{(-2)^{n+1}a_{n+1}-(-2)^n a_n}{2^{n+1}-2^n}=0$$

上极限的应用

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n}+2a_n)=0$$

$$\xRightarrow{\{a_n\}\text{有界}} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

上极限的应用(续)

证明: $a := \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| \in [0, +\infty)$

反证: $a \in (0, +\infty)$

$\Longrightarrow$ 存在子列$a_{k_n} \to a$或$-a$

$\xRightarrow{\text{利用给定条件}}$ $\lim_{n\to\infty} a_{2k_n} = -2a$或$2a$

$\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} |a_{2k_n}| = 2a > a = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|$ 矛盾

严格区间套: e

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n},\ \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+m_0}\right] \xlongequal[m_0\in\mathbb{N}]{a\in(0,\ m_0]} \left\{e^{a}\right\}$$

特例
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] \xlongequal{\quad} \left\{e\right\}$$

调和-几何-算术平均不等式

$$\frac{1}{\frac{a_1^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2\cdots+a_n}{n} \qquad a_j \geqslant 0$$

等式成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(一句话证明: $\ln x$是$\mathbb{R}^+$上凹函数.)

续

$$(1+\frac{a}{n})^n < (1+\frac{a}{n+1})^{n+1} \Longleftrightarrow \sqrt[n+1]{(1+\frac{a}{n})^n} < 1+\frac{a}{n+1}$$

调和几何平均不等式中, 取

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1+\frac{a}{n}, \qquad a_{n+1} = 1.$$

续

$$(1+\frac{a}{n})^{n+m_0} > (1+\frac{a}{n+1})^{n+1+m_0} \Longleftrightarrow \sqrt[n+1+m_0]{(1+\frac{a}{n})^{n+m_0}} > 1+\frac{a}{n+1}$$

调和几何平均不等式中, 取

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+m_0} = 1+\frac{a}{n}, \quad a_{n+m_0+1} = 1.$$

续

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n+1+m_0]{(1+\frac{a}{n})^{n+m_0}} &> \frac{n+m_0+1}{(n+m_0)\frac{1}{1+\frac{a}{n}}+1} \\
&= \frac{(n+m_0+1)(n+a)}{(n+m_0)n+(n+a)} \\
&= 1+\frac{(n+m_0)a}{(n+m_0)n+(n+a)} \\
&= 1+\frac{a}{n+\frac{n+a}{n+m_0}} \\
&> 1+\frac{a}{n+1} \qquad a\in(0,m_0]
\end{aligned}
$$

严格区间套: Euler常数$\gamma = 0.577\cdots$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1),\quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right]=\left\{\gamma\right\}$$

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0.577\cdots$$

续

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] = \left\{e\right\}$$

$$(1+\frac{1}{n})^{n} < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \Longleftrightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

$$[a_n, b_n] := \left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1),\quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right]$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) > 0, \qquad b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0$$

调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

调和级数(续)

$$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \Longleftrightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

$$a_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \varlimsup_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}+1}{a_n} - 1\right) \geqslant 1.$$

反证法: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall\, n > N$, 成立

$$n\left(\frac{a_{n+1}+1}{a_n}-1\right)<1$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_n > n(a_{n+1}+1-a_n) \Longleftrightarrow \frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad +\infty > \frac{a_N}{N} > \frac{a_N}{N}-\frac{a_n}{n} = (\frac{a_N}{N}-\frac{a_{N+1}}{N+1}) + \cdots + (\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_n}{n})$$

$$> \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

假设$a_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *则*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

裂项相乘(续)

不妨设

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (0, +\infty], \qquad \beta := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, \infty).$$

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ 当 n \geqslant N 时，有 \frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta + \epsilon$$

$$\Longrightarrow \qquad a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N < (\beta+\epsilon)^n M \quad (M = (\beta+\epsilon)^{-N} a_N)$$

$$\Longrightarrow \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \beta + \epsilon$$

裂项相乘(续)

情形1: $\alpha \in (0, \infty)$

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ 当 n \leqslant N 时,\ 有 \frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha - \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad a_n > M(\alpha - \epsilon)^n \quad (\forall\ n \geqslant N)$$

$$\Longrightarrow \quad \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geqslant \alpha - \epsilon$$

情形2: $\alpha = +\infty$

$$\forall\ M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ 当 n \geqslant N 时,\ 有 \frac{a_{n+1}}{a_n} > M$$

$$\xRightarrow{同理} \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geqslant M \to +\infty$$

几何算术的转化

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{s^n} \xlongequal{\forall s>1} 0$$

几何算术的转化(续)

$$\text{必要性:}\quad \forall s > 1 \Longleftrightarrow qs > 1, \qquad q := \frac{2}{1+s} \in (0,1)$$

$$\Longrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < qs \qquad (\forall\ n > N)$$

$$\Longrightarrow \frac{|a_n|}{s^n} < q^n \to 0.$$

几何算术的转化(续)

充分性: $\dfrac{|a_n|}{s^n} < \epsilon \quad (\forall\ n > N) \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{\epsilon} s$

$$\Longrightarrow \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant s \to 1.$$

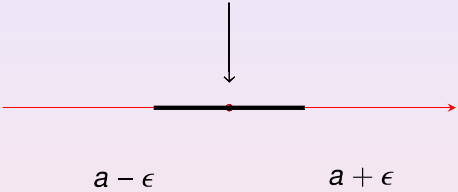
收敛数列的本质

$$\text{收敛数列} \;=\!=\!=\!=\; \text{常值数列} + \lim \qquad (\text{极限由}\epsilon - N\text{表达})$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \underbrace{\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{当} n > N \text{时},}_{n\text{充分大时}} \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

收敛数列的图示

$$a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon), \quad \forall \quad n > N(\epsilon)$$



ϵ任意给定

区间套注记

- 区间套是数学中的聚光灯
  - 区间套将难点集中到一点附近处理.
  - 区间套将所有的信息归纳为一点附近.

最重要的两个拓扑概念：紧性

- 紧性：　紧集几何表示为Big point.

$$\text{在一点成立的性质} \xrightarrow{\text{推广}} \text{在紧集成立.}$$

紧集是有限集合在不可数集合中的最近的亲戚.

最重要的两个拓扑概念: 完备性

- 完备性: 极限理论建立的基石.

集合的框架应该足够大, 包含它的所有的Cauchy数列的天生的极限.

$$\mathbb{Q} : \mathbb{R} \Longleftrightarrow R[a,b] : L^1[a,b]$$

问题

问题:　为何不使用$\epsilon - N$语言，也能求极限？

解答:　$\epsilon - N$语言 $\Longrightarrow$ 极限的判别法，某些数列的收敛性

$\Longrightarrow$ 所考虑数列的收敛性

- 解题时可以利用所掌握的一切知识.

白猫、黑猫, 抓住老鼠就是好猫.

——邓小平

第7次做业: [1.10] All

[1.11] All

数学分析(A1), 第8次课

任广斌(中国科大)

2020-10-12

本次课主要内容

- 集合的势
- 函数极限

数列的三种看法

- 数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:　有序的可列个实数

$$a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n, \quad \cdots$$

- 定义在自然数集合上的实值函数:

$$f: \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

- 阶梯函数(常值延拓):

$$f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f|_{[n,n+1)} = a_n, \qquad f|_{(-\infty,1)} = a_1$$

前两章联系

第一章	数列	基础	可数	离散
第二章	函数	提升	不可数	连续

前三章联系

第一章	阶梯函数
第二章	连续函数
第三章	光滑函数

- 集合A的势 $\underline{\underline{\qquad\qquad}}$ $\bar{\bar{A}}$

$$\bar{\bar{A}} \;\underline{\underline{\text{A为有限集合}}}\; A\text{中元素个数}$$

势的定义

Definition

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{双射} f : A \to B.$$

$$\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{单射} f : A \to B.$$

等价关系

$$A \sim B \xLeftrightarrow{\text{定义}} \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$$

- $A \sim B$等价关系

(1) 自身性: $A \sim A$

(2) 反对称性: $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$

(3) 传递性: $A \sim B,\quad B \sim C \Longrightarrow A \sim C$

- 记号

$$A\text{的所有子集合全体} = 2^A$$

- 例子: $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$

$$2^{\mathbb{Z}_n} = \left\{\emptyset, \underbrace{\{1\}, \cdots, \{n\},}_{n\text{个元素中取1个}} \underbrace{\{1,2\}, \cdots \{n-1, n\},}_{\text{取2个}} \cdots, \mathbb{Z}_n\right\}$$

- 记号来源

$$\overline{\overline{2^{\mathbb{Z}_n}}} = 2^n = 2^{\overline{\overline{\mathbb{Z}_n}}}$$

可数集和不可数集

有限集	可数集	不可数集
$A \sim \mathbb{Z}_n$	$A \sim \mathbb{N}$	例如$\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}$

续

- 至多可数集=有限集或可数集
- 无穷集=不是有限集=可数集或不可数集.

- 最小无限集:

$$A\text{是无限集} \Longrightarrow \overline{\overline{\mathbb{N}}} \leqslant \bar{\bar{A}}.$$

证明: 任意无限集合包含可列子集.

$$\overline{\overline{A_n}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$$

$$\overline{\overline{A_n}} \leqslant \overline{\overline{\mathbb{N}}} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} \leqslant \overline{\overline{\mathbb{N}}}$$

- 无穷集合和有限集合有本质差别:

$$A\text{是无穷集合} \Longrightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \setminus \{\text{独点集}\}}}$$

- 无穷集合涉及极限, 其性质产生质变.
- 极限是产生质变的重要手段. 极限是延拓之手、上帝之手.

证明:

$$\begin{array}{lllll} A_1: & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ A_2: & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ A_3: & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

- 按斜对角线遍历每一个元素:

$$x_{11},\quad \underbrace{x_{21},\ x_{12},}_{\text{第二条斜对角线}}\quad \underbrace{x_{31},\ x_{22},\ x_{13},}_{\text{第三条}}\quad \cdots$$

- 行进中剔除重复元素 $\Longrightarrow$ 至多可数.

$[0, 1]$*区间不可数*

不可数集续

证明: 反证法: $[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$

三等分区间套:

$$[0,1]\supset\underbrace{I_1}_{\not\ni x_1}\supset\underbrace{I_2}_{\not\ni x_2}\supset\cdots\supset\underbrace{I_n}_{\not\ni x_n}\supset\cdots$$

$$\Longrightarrow \quad x_1,x_2,\cdots\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\{x_0\}\subset[0,1]\text{矛盾}$$

超越数和代数数

$$\mathbb{R}\text{分类}\begin{cases}\text{超越数} & (\text{例如}e,\pi)\\ \\ \text{代数数} & (\text{整系数多项式的根})\end{cases}$$

$\mathbb{Q} \subset$ *代数数全体 （可数）*

- 代数数=整系数多项式的根.
- 整系数多项式

$$a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad a_0 \neq 0$$

- 方程的高:

$$n + |a_0| + \cdots |a_n| \in \mathbb{N}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	$\forall \epsilon > 0$	$\exists n \in \mathbb{N}$ 当 $n > N$ 时	有 $\lvert a_n - a\rvert < \epsilon$
	任给误差	除去有限项 充分靠近$+\infty$	a_n差不多是a
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = s$	$\forall \epsilon > 0$	$\exists \delta > 0$ 当$0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ 时	有 $\lvert f(x) - s\rvert < \epsilon$
	任给误差	除去远离x_0的项 除去x_0 充分靠近x_0 但 $\neq x_0$	$f(x)$差不多是s

注记

- 万事开头难:

  只要认识到必须利用$\epsilon - room$, 极限的定义就顺理成章了.

极限表明趋势, 极限与远处值以及x_0处值无关.

任意修改f远离x_0的值以及f在x_0的值，不影响极限.

实轴单点紧化

- 球极投影

$$S^1 \xleftrightarrow{\text{双射}} \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

在单点紧化模型中

$+\infty$	x_0^+
∞	x_0
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = s$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = s$

几何意义

$$\text{Range } f|_{(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}} \subset (s-\epsilon, s+\epsilon)$$

- ϵ 确定何时将区间视为独点集

$$(s-\epsilon, s+\epsilon) \equiv \{s\}.$$

- δ 确定在多大的区间上f视为常数

$$f|_{(x_0-\delta,\ x_0+\delta)} \equiv s.$$

函数极限的解读

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = s \Longleftrightarrow \text{当}x\text{充分靠近}x_0(\text{不含}x_0)\text{时}, f(x)\text{充分靠近}s$$

$$\Longleftrightarrow f(x)\underbrace{\text{在}x_0\text{附近}(\text{不含}x_0)}_{\delta\text{尺子}},\underbrace{\text{差不多是常值函数}s}_{\epsilon\text{尺子}}$$

$$\Longleftrightarrow f|_{(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}} \doteq s$$

$$\Longleftrightarrow f\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}\big) \subset (s-\epsilon,s+\epsilon)$$

$$\Longleftrightarrow (x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\} \subset f^{-1}(s-\epsilon,s+\epsilon)$$

函数极限的映照观点

$$(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\} \xrightarrow{\quad f \quad} (s-\epsilon, s+\epsilon)$$

$x \to x_0$ $\qquad\qquad$ $f(x) \to s$

x_0附近 $\qquad\qquad$ f是ϵ精度下常值

两把尺子的作用

$$\text{(极限是一种趋势)}\ \delta\text{尺子} \Longleftarrow \lim_{\boxed{x \to x_0}} \boxed{f(x) = s} \Longrightarrow \epsilon\text{尺子(差不多常值)}$$

ϵ尺子	确定极限存在的函数是ϵ精度下的常值函数
δ尺子	去掉远离x_0的项以及x_0,极限存在的函数是ϵ精度下的常值函数 远离x_0的项以及x_0不反映函数在x_0的逼近性态, 可以任意修改

给定ϵ	给定精度下的常值数列	粗糙值	不唯一
ϵ可任意选取	相当于极限过程	精确值	唯一

- 依赖关系: $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$
- 可替换
  - $\forall\ \epsilon \in (0, 1)$
  - $|f(x) - s| < M\epsilon$ (M固定常数)
  - $|f(x) - s| \leqslant \epsilon$

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

证明: $\forall\ \epsilon > 0$, 取$\delta = \epsilon$, 当$0 < |x - 0| < \delta$时, 有

$$\left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| \leqslant |x| < \delta = \epsilon.$$

寻找δ的原则

- δ不唯一，找到一个就行
- 不需要找到最大的δ，找最大的δ是画蛇添足.
- 找δ，通过“放缩”方法.
- $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$表示依赖关系而不是函数.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq s \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \epsilon_0, \quad \forall\, \delta > 0, \quad \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$|f(x) - s| \geqslant \epsilon_0.$$

- 原理:

$$\forall \quad \Longleftrightarrow \quad \exists, \qquad \text{否定不等式}$$

- Dirichlet 函数

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}\chi_{\mathbb{Q}}\text{不存在.}$$

作业

第8次做业:

[2.1]	3				
[2.2]	4,	6			
[2.3]	5,	6,	8,	问题	1
[2.4]	4				

数学分析(A1), 第9次课

任广斌(中国科大)

2020-10-14

本次课主要内容

- 函数极限和数列极限关系定理
- 函数极限的性质
- 函数极限的Cauchy判别准则
- 上下左右极限

常值函数	差不多常值函数
δ与ϵ无关	δ与ϵ相关

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xlongequal{f\text{是常数}} s \iff \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\delta = 1,\ \text{当}0 < |x - x_0| < \delta\text{时},$$
$$|f(x) - s| < \epsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = s \iff \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\epsilon, x_0),\ \text{当}0 < |x - x_0| < \delta\text{时},$$
$$|f(x) - s| < \epsilon.$$

$$\lim_{\boxed{x \to x_0}} \boxed{f(x) = s}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \underbrace{\boxed{\exists \delta = \delta(\epsilon),\ \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta\text{时},}}_{x \to x_0} |f(x) - s| < \epsilon.$$

$x \to x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0$附近(不包含$x_0$), 远离$x_0$的点对于极限无贡献

$f(x) \to s \quad \Longleftrightarrow \quad f$在$x_0$附近(不包含$x_0$)差不多是常数

lim $\xlongequal[\epsilon\text{就是极限}]{\text{极限就是}\epsilon}$ ϵ

定性 定量

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = s$ $f|_{(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}} \xlongequal{\epsilon\text{误差}} s$

函数极限与数列极限关系定理

Theorem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=s \quad \xLeftrightarrow[x_n\neq x_0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}]{\{x_n\}:\qquad x_n\to x_0} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=s$$

注记: *可设x_n单调*

函数极限与数列极限关系定理(续)

必要性证明:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = s \implies \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ 当0 < |x - x_0| < \delta时, |f(x) - s| < \epsilon$$

$$x_0 \neq x_n \to x_0 \implies 对上述\delta > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}当n > N时, 0 < |x_n - x_0| < \delta$$

$$\implies |f(x_n) - s| < \epsilon \qquad (\forall\ n > N)$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = s$$

充分性证明:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq s \implies \exists\ \epsilon_0 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n :\ 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

$$但|f(x_n) - s| \geqslant \epsilon_0$$

$$\implies x_0 \neq x_n \to x_0, \exists 单调子列\{x_{k_n}\}, |f(x_{k_n}) - s| \geqslant \epsilon_0$$

$$\implies x_0 \neq x_{k_n} \to x_0 但 f(x_{k_n}) \nrightarrow s$$

收敛数列必有单调的子列

续

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad 不妨设 x_0 = 0$$

$\Longrightarrow$ 不妨设x_n互不相同

$\Longrightarrow$ 不妨设$x_n > x_0$

取↘

$\Longrightarrow$ $x_{k_1} := x_1,$

$$x_{k_2} \in [0, \frac{x_{k_1}}{2}] \cap [0, \frac{1}{2}],$$

$$x_{k_3} \in [0, \frac{x_{k_2}}{2}] \cap [0, \frac{1}{2^2}],$$

$\ldots$

例题:

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},\qquad \lim_{x\to x_0}\chi_{\mathbb{Q}}(x)\qquad \nexists.$$

函数极限与数列极限关系定理(续)

Theorem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\exists \quad \underset{\forall\ x_n\neq x_0,\forall\ n}{\overset{\{x_n\}:\quad x_n\to x_0}{\Longleftarrow\!\!=\!\!=\!\!=\!\!\Longrightarrow}} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)\exists$$

做题法则：　战略战术原则

对常值函数命题成立 $\Longrightarrow$ 对极限存在的函数命题成立

战略　　　　战术

- 离散版本提升到连续版本

离散是连续的垫脚石

- 常值函数提升到函数极限存在

常值函数是函数极限存在的垫脚石

- 唯一性: 收敛数列极限唯一

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = s_1,\ s_2 \Longrightarrow s_1 = s_2$$

$$左 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \xlongequal{x_0 \neq x_n \to x_0} s_1,\ s_2 \Longrightarrow 右$$

- 有界性:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = s \in \mathbb{R} \xLongrightarrow{\text{取}\epsilon=1} f\text{在某}(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}\text{有界}.$$

方法二: 否则, $\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

$$f(x) \leqslant g(x), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\},$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \ \lim_{x \to x_0} g(x) \exists$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x).$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x),\quad \lim_{x\to x_0} g(x)\exists$$

$$\xRightarrow[\text{除时分母极限假设非零}]{\circledast=+,-,\times,\div}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\circledast g(x))\exists$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\circledast g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\circledast\lim_{x\to x_0} g(x)$$

复合函数，变量代换

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \qquad \lim_{y\to y_0} g(y) = s$$

$$y_0 \notin f((x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}) \quad \text{或者 } g \text{连续(外表帅)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} g(f(x)) \xlongequal{y=f(x)} \lim_{y\to y_0} g(y) = s.$$

证明 $\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}:\quad x_0 \neq x_n \to x_0$，令$y_n = f(x_n)$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0, \quad y_n \neq y_0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = s.$$

y_0是极限 $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = s$的空门:

$$\lim_{y \to y_0} = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}}.$$

$$f(x) \equiv y_0 \Longrightarrow g(f(x)) = g(y_0)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0), \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = s$$两者无关

例: $f \equiv 0, \quad g = \chi_{\{0\}}, \quad x_0 = y_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 1, \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = 0.$$

- 变量代换使用方法:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \xrightarrow[x\to x_0\Rightarrow y\to y_0\Rightarrow g(y)\to s]{\text{变量代换}y=f(x)} \lim_{y\to y_0} g(y)$$

- 注意条件: 右端极限存在, 而且下列条件之一成立:

(1) $y_0 \notin f\big((x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}\big)$;

(2) g连续 (连续性绑架了g在y_0处的极限值)

两边夹定理

Theorem

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x), \qquad \forall\, x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = s$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} h(x) = s$$

Cauchy判别准则: 内蕴判别法

Theorem (Cauchy)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\exists \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon>0, \exists\delta>0,$ 当$x_1, x_2\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$时,

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$$

必要性: $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - s| + |f(x_2) - s|$

充分性: $\forall \{x_n\}: \quad x_0 \neq x_n \to x_0$

$\Longrightarrow \{f(x_n)\}$Cauchy

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\exists.$

右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) := \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) =: f(x_0+0) = f(x_0^+)$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = s \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \text{当}\, 0 < x - x_0 < \delta\,\text{时}, |f(x) - s| < \epsilon$$

左右极限与极限关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = s \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = s$$

Definition

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) :=\!=\!= \sup\left\{s\in[-\infty,+\infty] : \exists x_0 \neq x_n \to x_0, \lim_{n\to\infty} f(x_n)=s\right\}$$

Theorem

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) =\!= \max\left\{s\in[-\infty,+\infty]: \exists x_0\neq x_n\to x_0,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=s\right\}$$

证明

- $t := \sup E,$

$$E := \left\{ s \in [-\infty, +\infty] : \exists x_0 \neq x_n \to x_0, \lim_{n\to\infty} f(x_n) = s \right\}$$

- $t := \lim_{n\to\infty} s_n, \qquad s_n \in E.$

$$s_n = \lim_{k\to\infty} f(x_k^{(n)}), \qquad \exists x_0 \neq x_k^{(n)} \to x_0.$$

- $\forall m \in \mathbb{N}$, 取y_m:

$$0 < |y_m - x_0| < \frac{1}{m}, \qquad |f(y_m) - s_m| < \frac{1}{m}$$

$$\Longrightarrow \qquad x_0 \neq y_m \to x_0, \qquad \lim_{m\to\infty} f(y_m) = t \Longrightarrow t = \max E$$

函数上极限是一种极限

离散版本: $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k$

连续版本: $\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = s \iff \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = s$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$x\in(0,\frac{\pi}{2})\xrightarrow{\text{面积}}\sin x<x<\tan x$$

$$\Longrightarrow 0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2(\frac{x}{2})^2\to 0$$

作业

第9次做业: [2.4] 11, 12, 13

数学分析(A1), 第10次课

任广斌(中国科大)

2020-10-16

本次课主要内容

- 72种极限
- Stolz定理
- 无穷大和无穷小

极限的全部类型

- 共计72种极限: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = s.$

$\lim$	$\lim,\quad \overline{\lim}\quad \underline{\lim}$	3种
s	$s \in \mathbb{R},\quad +\infty,\quad -\infty,\quad \infty$	4种
x_0	$x_0 \in \mathbb{R},\quad x_0^+,\quad x_0^-,\quad +\infty,\quad -\infty,\quad \infty$	6种

- 72种极限举例

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = s \quad \overset{s\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, \epsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \text{当}|x| > M\text{时},\ |f(x) - s| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \overset{x_0\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, M > 0,\ \exists\delta > 0,\ \text{当}0 < |x - x_0| < \delta\text{时},\ |f(x)| > M$$

- 有限点和无穷点的统一(球极投影).

$$\text{无穷远点}\begin{cases}\text{利用函数及其趋势刻画} & \text{(连续版本)}\\ \text{利用数列及其趋势刻画.} & \text{(离散版本)}\end{cases}$$

- 上下左右极限在极限的研究中将难度肢解, 可研究极限不存在情形.

$$\text{连续函数}\begin{cases}\xrightarrow[\text{推广}]{\text{左、右极限}} & \text{左连续和右连续.}\\ \xrightarrow[\text{推广}]{\text{上、下极限}} & \text{上半连续和下半连续.}\end{cases}$$

- 极限统一定义

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \forall \text{ 邻域} U_s, \ \exists \text{去心领域} \hat{U}_{x_0}: \quad f(\hat{U}_{x_0}) \subset U_s.$$

不离于宗，谓之天人.

——《庄子 · 天下》

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

证明: 情形1: $x>0$. $n=[x]$ $x\in[n,n+1)$

$$(1+\frac{1}{n+1})^n \leqslant (1+\frac{1}{x})^x \leqslant (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

$$\forall\ \epsilon>0, x\gg 1 \Longrightarrow 左,右\in(e-\epsilon,e+\epsilon) \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

情形2: $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x \xlongequal{y=-(x+1)} \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^{y+1} = e.$$

Theorem (Stolz定理)

- $\frac{\infty}{\infty}$型: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty$.
- 右端 $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
  - 严格单调性(保证分母非零):

    存在常数$T > 0$, 使得$g(x+T) > g(x) \quad (x \gg 1)$.
  - 连续性(保证局部有界): $f, g \in C(a, +\infty)$.

$$\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)}.$$

Theorem (Stolz定理)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \xlongequal[\text{右端}\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}]{f,g\text{局部有界},\ g\ \nearrow+\infty} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}.$$

Cauchy定理

Theorem (Cauchy定理)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \xlongequal[\text{右端存在}]{f\text{ 局部有界}} \lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)).$$

续

Theorem

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}} \xlongequal[\text{右端存在}]{f\text{局部有界}, n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}{x^n}=n+1$$

Theorem

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{1/x} \xlongequal[\text{右端存在}]{\text{非负}f\text{在}(a,+\infty)\text{局部有界}} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x))^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}\xlongequal{Stolz}\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

离散版本:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\xlongequal{\quad\quad}\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

情形1： $A \in \mathbb{R}$

$\forall\, \epsilon > 0$，$\exists x_0 > a$，当$x \geqslant x_0$时，有

$$A - \epsilon < \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} < A + \epsilon$$

续

$$\xRightarrow{T\text{进制}} \forall\, x > x_0 + T,\ \exists k = k(x) \in \mathbb{N}:$$

$$\frac{x - x_0}{T} \in [k, k+1) \quad \text{即} \quad x - kT \in [x_0, x_0 + T):$$

$$\Longrightarrow x - T > x - 2T > \cdots > x - kT \geqslant x_0$$

$$A - \epsilon < \frac{f(x) - f(x-T)}{g(x) - g(x-T)}, \quad \cdots, \quad \frac{f(x-(k-1)T) - f(x-kT)}{g(x-(k-1)T) - g(x-kT)} < A + \epsilon$$

Stolz定理的证明(续)

$$\xRightarrow{\text{合分比}} A-\epsilon < \frac{f(x)-f(x-kT)}{g(x)-g(x-kT)} < A+\epsilon$$

$$(A-\epsilon)\left(1-\frac{g(x-kT)}{g(x)}\right) < \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x-kT)}{g(x)} < (A+\epsilon)\left(1-\frac{g(x-kT)}{g(x)}\right)$$

$$\xRightarrow{\text{条件(1)(4)}} A-\epsilon \leqslant \varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant A+\epsilon$$

情形2: $A=+\infty$, 归结于$A=0$情形.

情形3: $A=-\infty$, 归结于$A=+\infty$情形.

Theorem (Stolz定理)

- $\frac{0}{0}$*型:* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$
- *右端*$\in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$
  - *严格单调性(保证分母非零):*

    存在常数$T>0$, *使得*$g(x+T)<g(x) \quad (x\gg 1).$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}.$$

只考虑左端极限$= s \in \mathbb{R}$. 不妨设$s = 0$, 否则f用$f - sg$代替.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = 0$$

$\Longrightarrow$ $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists x_0 > a$, 当$x \geqslant x_0$时, 有

$$-\epsilon < \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} < \epsilon$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > x_0$$

$$\Longrightarrow x + kT > x + (k-1)T > \cdots > x + T > x > x_0$$

$$-\epsilon < \frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}, \quad \cdots, \quad \frac{f(x+kT)-f(x+(k-1)T)}{g(x+kT)-g(x+(k-1)T)} < \epsilon$$

Stolz定理的证明(续)

$$\xRightarrow{\text{合分比}} \quad -\epsilon < \frac{f(x+kT)-f(x)}{g(x+kT)-g(x)} < \epsilon$$

$$\xRightarrow{k\to\infty} \quad -\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

连续版本Stolz定理 $\Longrightarrow$ 离散版本Stolz定理

§6 无穷大和无穷小(两者对偶, 本质相同)

- 无穷小量:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x)\text{是}x \to x_0\text{时的无穷小量}.$$

- 无穷大量:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Longleftrightarrow f(x)\text{是}x \to x_0\text{时的无穷大量}.$$

- 无界量:

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} |f(x)| = +\infty \Longleftrightarrow \exists\{x_n\}: \quad x_0 \neq x_n \to x_0, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$$

常见无穷小量

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^\alpha} = s \neq 0 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} f(x)\text{是}x \to x_0\text{时}\alpha\text{阶无穷小量}$$

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\infty \qquad (0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$$

$\Longleftrightarrow$ $\varphi\sim\psi \quad (x\to x_0)$等价

等价量在极限计算中的应用

$\varphi \sim \psi \quad (x \to x_0)$*等价无穷大(小)量*

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} f(x)\varphi(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)\psi(x)$$

在右端极限存在的条件下成立

证明: 左$=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\psi(x)\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=$右

注记

在加减情形, 应用等价无穷大(小)量小心:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \xlongequal{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)} \frac{1}{3!}.$$

- Landau记号

$$f(x)=O(1)\quad(x\to x_0)\quad\Longleftrightarrow\quad f(x)\text{在}x_0\text{附近有界}$$

$$f(x)=o(1)\quad(x\to x_0)\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{x\to x_0}f(x)=0$$

$$f(x)=O(g(x))\quad(x\to x_0)\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{f(x)}{g(x)}=O(1),\quad(x\to x_0)$$

$$f(x)=o(g(x))\quad(x\to x_0)\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{f(x)}{g(x)}=o(1),\quad(x\to x_0).$$

例子

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \qquad x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o(\frac{\ln n}{n^2})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n^2}}{\frac{\ln n}{n^2}} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n(nx_n - 1)}{\ln n} = -1$$

无穷大量的阶

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & g\text{是比}f\text{更高阶的无穷大量} \\ s \in \mathbb{R}\setminus\{0\} & \text{同阶} \\ 1 & \text{等价.} \end{cases}$$

- $x \to +\infty$的无穷大量

$$\ln x \quad \ll \quad x^{\alpha} \quad \ll \quad a^{x} \quad \ll \quad e^{e^{x}} \quad \ll \quad \cdots$$

无穷大量的阶↗，其中$\alpha > 0$, $a > 1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\xlongequal[b=e^\alpha]{y=\ln x}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{b^y}\xlongequal{\text{Stolz}}0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}\xlongequal[\text{可令}\alpha\in\mathbb{N}]{\text{Stolz}}0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=\begin{cases}+\infty & \alpha>\beta\\ 1 & \alpha=\beta\\ 0 & \alpha<\beta.\end{cases}$$

作业

第10次做业: [2.5] 4, 6, 7, 8, 9, 10,

[2.6] 3

数学分析(A1), 第11次课

任广斌(中国科大)

2020-10-19

本次课主要内容

- 连续函数

- 直观:

自变量x连续变化$\Longrightarrow$因变量y也随之连续变化.

例子

- 运动物体走过的距离, 随着时间的变化而连续变化.

当时间变化非常小, 它运动的距离变化很小 (不管速度多大).

一点处连续：假设f在x_0附近有定义.

f在x_0处连续： $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$ 当$|x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$$\xRightarrow{\text{保邻近}} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\xRightarrow{\text{换次序}} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

$$\xRightarrow{\text{离散判别}} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0), \quad x_0 \neq x_n \to x_0$$

$$\xRightarrow{\text{左右连续}} \quad f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$$

$$\xRightarrow{\text{上半下半连续}} \quad f(x_0) \leqslant \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \leqslant \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \leqslant f(x_0).$$

注记

- 上半连续:

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0).$$

- 下半连续:

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \geqslant f(x_0).$$

注记

- 左连续:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) =\!=\!=\!= f(x_0).$$

- 右连续:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) =\!=\!=\!= f(x_0).$$

注记

- 连续函数绑架了它在一点处的极限值
- 连续函数的极限值是天然给定的.

$$x_0 \in \mathbb{R} \begin{cases} x_0\text{是}f\text{的连续点} \\ x_0\text{是}f\text{的间断点} \begin{cases} \text{第二类间断点（最坏情形：}f(x_0^{\pm})\text{不全存在）} \\ \text{第一类间断点} \begin{cases} \text{可去间断点}\ (f(x_0^{+}) = f(x_0^{-})) \\ \text{跳跃点}\ (f(x_0^{+}) \neq f(x_0^{-})) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

- 第一类间断点：$f(x_0^{\pm})$存在且有限. 跳跃度$= |f(x_0^{+}) - f(x_0^{-})|$

例题

$\chi_{\mathbb{Q}}(x)$	$x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$	$\frac{\sin x}{x}$	$\sin\frac{1}{x}$	$x\sin\frac{1}{x}$
第二类	$x=0$连续	$x=0$可去间断	$x=0$第二类	$x=0$可去
	其它第二类	其它连续	其它连续	其它连续

Riemann函数

$R:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$周期为1.

$$\forall x\in(0,1],\qquad R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q},\qquad (p,q)=1,\quad p,q\in\mathbb{N}\\[2em] 0 & x=\text{无理数}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = 0, \qquad R(x)\text{在无理点连续, 有理点可去间断(上半连续).}$$

证明: $\forall x_0 \in (0,1]$, $\forall \epsilon > 0$:

$$(x_0-1, x_0+1)\text{仅有有限个有理数}\frac{p}{q},\ \text{使得}\frac{1}{q} \geqslant \epsilon$$

$$\text{即}q = 1, 2, \cdots, [\frac{1}{\epsilon}].$$

(在ϵ精度下, 只有有限项非零)

注记

Riemann函数在无理点的连续性，诠释出连续是ϵ精度下的连绵不断.

注记

- 连续是粘合剂:

$$\text{连续} \xlongequal{\epsilon\text{精度下}} \text{连绵不断, 没有断开}$$

- 连续的本质是局部常值, 是ϵ误差下的常值, 是修正意义下的连绵不断.

一点连续$\not\Rightarrow$ 局部连续

f在x_0处连续 $\not\Rightarrow$ f 在x_0附近连续，f在x_0附近一致连续

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0 \Longleftrightarrow \lim_{r\to 0^+}\sup_{x_1,x_2\in(x_0-r,x_0+r)}|f(x_1)-f(x_2)|=0.$$

重要概念: 振幅

函数在一个区间上的振幅差不多是最大值和最小值之差, 是最大值和最小值之差的修正. 振幅=落差.

$$\omega_f(x_0, r) \xlongequal{\quad} \sup_{x\in(x_0-r,x_0+r)} f(x) - \inf_{x\in(x_0-r,x_0+r)} f(x)$$

$$\xlongequal{\star} \sup_{x_1,x_2\in(x_0-r,x_0+r)} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

★的证明: 左 $\geqslant \sup\limits_{x_1,x_2\in(x_0-r,x_0+r)} (f(x_1)-f(x_2))=$ 右

$\forall\epsilon>0,\ \exists\, x_\epsilon^{(1)}, x_\epsilon^{(2)} \in (x_0-r, x_0+r)\ \ s.t.$

$$左 \leqslant f(x_\epsilon^{(1)})+\epsilon-(f(x_\epsilon^{(2)})-\epsilon)\leqslant 右+2\epsilon$$

在一点振幅

$$\omega_f(x_0) \xlongequal{\quad\quad} \lim_{r\to 0^+} \omega_f(x_0, r).$$

连续的振幅刻画

$$f\text{在}x_0\text{处连续} \Longleftrightarrow \omega_f(x_0) = 0.$$

必要性:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta): \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

$$\Longrightarrow \quad \omega_f(x_0, r) \xlongequal{\forall r \in (0,\delta)} \sup_{x_1, x_2 \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 2\epsilon$$

充分性:

$$0=\omega_f(x_0)=\lim_{r\to0^+}\sup_{x_1,x_2\in(x_0-r,x_0+r)}|f(x_1)-f(x_2)|$$

即 $\forall\, \epsilon>0$, 当$r\in(0,\delta)$时，有 $\sup\limits_{x_1,x_2\in(x_0-r,x_0+r)}|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon.$

取$r=\frac{\delta}{2}$, $\forall\ x\in(x_0-r,x_0+r)$:

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\sup_{x_1,x_2\in(x_0-r,x_0+r)}|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon.$$

单调函数a.e.连续

(a,b)*上单调函数间断点至多可数且为跳跃点.*

证明: (1) 必跳跃:

单调有界数列定理+函数极限和数列极限关系定理

(2) 至多可数:

间断点$x_0 \Longleftrightarrow (f(x_0^-), \quad f(x_0^+)) \Longleftrightarrow r_{x_0} \in \mathbb{Q}$

$$f \in C(a,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f\text{在}(a,b)\text{每点连续}$$

$$\Longleftrightarrow \text{开集的原像是开集}$$

连续是局部性质

必要性： $\forall$ 开集G，要证$f^{-1}(G)$开.

$$\forall\ x_0 \in f^{-1}(G) \Longrightarrow f(x_0) \subset G\text{开}$$

$$\Longrightarrow \exists\ \epsilon > 0,\quad (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset G$$

$$\xrightarrow[f\text{连续}]{\exists\ \delta>0} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset f^{-1}(G)$$

连续是局部性质(续)

充分性: $\forall\, x_0 \in (a,b)$, 要证f在x_0连续.

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad (f(x_0) - \epsilon,\ \ f(x_0) + \epsilon)\text{是开集}$$

$$\Longrightarrow \quad f^{-1}(f(x_0) - \epsilon,\ \ f(x_0) + \epsilon)\text{是开集且包含}x_0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \delta > 0, \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

Theorem

连续函数经有限次$+, -, \times, \div$, 复合运算仍然连续

(除：分母$\neq 0$;　复合：可复合)

证明：
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) \xlongequal[y_0=g(x_0)]{y=g(x)} \lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0) = f(g(x_0)).$$

注记

- $\mathbb{R}$中加减乘除极限运算，内政.
- 复合是范畴中态射，外交.

$$e^x\text{一统天下}\begin{cases}\text{指数函数}\,e^x & \xrightarrow{\text{反函数}} \text{对数函数}\,\ln x\\[2ex] \text{三角函数}\,\sin x,\cos x\cdots & \xrightarrow{\text{反函数}} \text{反三角函数}\\[2ex] \text{幂函数}\,x^{\alpha}(\alpha\neq 0) & \xrightarrow{\text{反函数}} \text{幂函数}\,x^{1/\alpha}\end{cases}$$

简单初等函数$\longrightarrow$初等函数

Theorem

初等函数在其定义域的开子集上连续

Theorem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\text{存在且有限} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|.$$

证明: $|x| = \sqrt{x^2}$是初等函数, 连续.

单调函数连续性

Theorem

单调增加值域连通的函数必连续.

$$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}\nearrow,\quad f(a,b)\text{连通}\Longrightarrow f\in C(a,b).$$

Theorem

单调增加连续反函数必连续.

$$f \in C[a,b]\nearrow \xRightarrow{\text{值域连通}} f^{-1} \in C[f(a),f(b)].$$

$$f \in C(a,b)\nearrow \xRightarrow{\text{连续是局部性质}} f^{-1} \in C(f(a),f(b)).$$

作业

第11次做业: [2.7] 1, 3, 5, 8, 9, 10

数学分析(A1), 第12次课

任广斌(中国科大)

2020-10-21

本次课主要内容

- 连续函数的性质
- 函数极限的计算

极限与连续比较

极限	连续
$\lim\limits_{x_0 \neq x \to x_0} f(x) = s$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
$f(\hat{U}(x_0, \delta)) \subset (s - \epsilon, s + \epsilon)$	$f(U(x_0, \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$
$x_0 \neq x \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to s$	$x \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

连续性刻画三部曲

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$	$f\vert_{U(x_0,\delta)} \xlongequal{\epsilon\text{误差}} f(x_0)$	$f(U(x_0,\delta)) \subset U(f(x_0),\epsilon)$
定性	定量直观	定量精确

$$|x - x_0| < \delta \xRightarrow{\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

连续$\xlongequal{\quad\quad}$常值+lim

$$f \in C(a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{开集的原像是开集.}$$

$$\forall G \subset \mathbb{R}\text{开} \Longrightarrow f^{-1}(G) \subset (a,b)\text{开}$$

注记:　原像的定义

$$f^{-1}(G) :=\!=\!= \Big\{x \in \mathbb{R}: \quad f(x) \in G\Big\}$$

续

证明: 必要性.

$$\forall x_0 \in f^{-1}(G)$$

$$\Longrightarrow f(x_0) \subset G \text{开}$$

$$\xrightarrow{\exists \epsilon > 0} (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset G$$

$$\xrightarrow{\exists \delta > 0} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset f^{-1}(G).$$

充分性： $\forall\, x_0 \in (a,b)$，要证f在x_0连续.

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad (f(x_0) - \epsilon,\ \ f(x_0) + \epsilon)\text{是开集}$$

$$\Longrightarrow \quad f^{-1}(f(x_0) - \epsilon,\ \ f(x_0) + \epsilon)\text{是开集且包含}x_0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \delta > 0, \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

注记

- 连续是局部性质.
- 连续是粘合剂. 例如$\chi_{\mathbb{Q}}$, Riemann 函数.
- $f(x) = f(x_0) + o(1) \quad (x \to x_0)$ 带Peano余项的Taylor展开.

- 极限与绝对值可交换:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\exists \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|.$$

- 极限保加法

$$\begin{array}{ccc} a_n & & \lim a_n \\ + & \longrightarrow \boxed{\lim} \longrightarrow & + \\ b_n & & \lim b_n \end{array}$$

- 连续保极限

$$\begin{array}{ccc} a_n & & f(a_n) \\ \downarrow & \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow & \downarrow \\ \lim a_n & & \lim f(a_n) \end{array}$$

$$x_0, y_0, s \in [-\infty, +\infty]$$

$$y_0 \notin f((x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}) \quad \text{或者 } g\text{在}y_0\text{连续}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} g(f(x)) \xlongequal[x\to x_0 \Rightarrow y\to y_0 \Rightarrow g(y)\to s]{\text{变量代换}_{y=f(x)}} \lim_{y\to y_0} g(y)$$

$$f \in C[a,b] \xLeftrightarrow{def} f \in C(a,b), f\text{在}a\text{点右连续}, \text{在}b\text{点左连续}.$$

- 假设$X \neq \emptyset, \tau \subset 2^X$. 如果下列满足:
  - $X, \emptyset \in \tau$
  - $X_\alpha \in \tau \quad (\alpha \in \Lambda) \Longrightarrow \bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \in \tau$
  - $X_1, X_2 \in \tau \Longrightarrow X_1 \bigcup X_2 \in \tau$

则称(x, τ)拓扑空间, τ中的元素称为X中的开集.

- 注意 $(0, 1+\frac{1}{n}) = (0, 1]$

续

- 假设(X,τ) 是拓扑空间, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f\text{连续} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{开集的原像是开集}$$

$$(\text{即}\forall G \in \mathbb{R}\text{开} \Longrightarrow f^{-1}(G) \in \tau)$$

- $X \subset \mathbb{R}$, X 中具有由 $\mathbb{R}$ 诱导的拓扑 τ:

$$\tau = \left\{A \cap X : \quad A\text{是}\mathbb{R}\text{中的开集}\right\}$$

续

- 一点处: $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f\text{在}x_0\text{连续} \iff \lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例如: 若x_0是X的孤立点, 则f在x_0处连续.

- 任意集合$X \subset \mathbb{R}$:

$$f \in C(X) \xLeftrightarrow{X\text{的开集}=\mathbb{R}\text{中开集}\cap X} \text{开集的原像是开集.}$$

例题

$f \in C(\mathbb{R})$，周期函数，非常值$\Longrightarrow f$ 必有最小正周期.

例题(续)

证明: $T_0 := \inf\{f\text{的周期}\} \xRightarrow{\star} T_0 > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T_0) \xlongequal[T_n\text{ 是}f\text{周期}]{T_n \to T_0} f(\lim_{n\to\infty}(x+T_n))$$

$$\xlongequal{\quad\quad} \lim_{n\to\infty} f(x+T_n) = f(x)$$

反证法: $T_0 = 0 \xRightarrow{\star\star} \{f\text{的周期}\} \subset (0, +\infty)\text{稠密}$

$\Longrightarrow \forall\, x \in (0, +\infty),\ \exists f\text{周期}T_n \to x:$

$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} T_n) = f(0)$

$\xRightarrow{f\text{周期函数}} f(x) = f(0)$

$(\star\star)$的证明: 否则, 存在$(a-\epsilon_0, a+\epsilon_0)$, 该区间无$f$的周期.

$$\exists \quad |T_{n_0}| < \frac{\epsilon_0}{2} \qquad (\text{这是因为} T_n \to T_0)$$

但是$(a-\epsilon_0, a+\epsilon_0)$长度$=2\epsilon_0$, 必含有$T_{n_0}$的整数倍点.

例题

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0,\qquad f,g\text{是周期函数}\Longrightarrow f=g$$

证明: $$0 = \lim_{n\to\infty}\left(f(x+nT_f)-g(x+nT_f)\right)$$

$$= f(x)-\lim_{n\to\infty} g(x+nT_f+nT_g)$$

同理 $$0 = g(x)-\lim_{n\to\infty} f(x+nT_f+nT_g).$$

两式相减.

例题

$$[x]\sin(\pi x) \in C(\mathbb{R}).$$

证明: $\forall\, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x \in [n, n+1), \quad n := [x]$

$\Longrightarrow f(x) = n\sin(\pi x), \quad \forall\, x \in [n, n+1)$连续

$$f(n^+) = f(n^-) = f(n) = 0.$$

1^∞*型极限*：$u, v \in C(\mathbb{R}),\quad \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1,\quad \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \exp\big(\lim_{x\to x_0} \underbrace{(u(x)-1)v(x)}_{0\cdot\infty\text{型}}\big)$$

$$左式 = \lim_{x\to x_0} e^{(u(x)-1)v(x)\ln(1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}}} = 右式$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}} \xlongequal{y=u(x)-1} \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

证法二:

$$左式 = \lim_{x\to x_0}(1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}(u(x)-1)v(x)} = 右式$$

例题

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \xlongequal{a>0} \ln a$$

$$y := a^x - 1 \Longrightarrow x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$$

$$\Longrightarrow \text{左边} = \lim_{y\to 0} \frac{y \ln a}{\ln(1+y)} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{a_j>0} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= {\left(1+\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}}}}^{\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{nx}} \\
&= e^{\frac{1}{n}(\ln a_1+\cdots \ln a_n)}
\end{aligned}
$$

例题

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{a_j>0} \max\{a_1,\cdots,a_n\}$$

不妨设$a_k \nearrow$

左边 $\geqslant \left(\dfrac{a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = a_n(\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{x}} \to a_n \qquad x \to +\infty$

右边 $\leqslant \left(\dfrac{na_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = a_n$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{a_j>0} \min\{a_1,\cdots,a_n\}$$

不妨设$a_k \nearrow$. 令$b_k := \dfrac{1}{a_k} \searrow$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{y=-x}{=\!=\!=} \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{b_1^y+\cdots+b_n^y}{n}\right)^{\frac{1}{y}}}$$

$$=\!=\!= \frac{1}{b_1} = a_1 = \min\{a_1,\cdots,a_n\}.$$

例题

$$\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\begin{cases}\max\{a_1,\cdots,a_n\}, & \text{最大值}, \quad x=+\infty\\[2ex] \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}, & \text{算术平均}, \quad x=1\\[2ex] \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}, & \text{几何平均}, \quad x=0\\[2ex] \left(\dfrac{a_1^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}, & \text{调和平均}, \quad x=-1\\[2ex] \min\{a_1,\cdots,a_n\}, & \text{最小值}, \quad x=-\infty\end{cases}$$

续

$$a_k > 0, \qquad k = 1, \cdots, n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \in C[-\infty, +\infty].$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{常数}, & a_1 = a_2 = \cdots = a_n \\ \text{严格单调增加} & \text{其它} \end{cases}$$

注记:　　不妨设$x > 0$, 不妨设$x \geqslant 1$. 只要证明

$$x > 1 \Longrightarrow f(x) > f(1).$$

证明来自于$g(x) = x^a$是严格凸函数, 其中$a > 1$, $x \in (0, +\infty)$.

作业

第12次做业: [2.8] 3, 4

[2.3] 问题 2

数学分析(A1), 第13次课

任广斌(中国科大)

2020-10-23

本次课主要内容

- 一致连续

$$f \in C(I) \quad \stackrel{I\text{区间}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\ x_0 \in I,\ \ \forall\ \ \epsilon > 0,\ \ \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0),$$

$$\text{当}\ x \in I,\ \ |x - x_0| < \delta\text{时}, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

注记：在一点连续

- 在一点处连续：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- $\epsilon-\delta$语言

$$f|_{(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I} \xlongequal{\epsilon\text{精度}} f(x_0).$$

$$\overbrace{\underbrace{\text{局部}}_{\text{自变量接近}}}^{\delta}\ \overbrace{\underbrace{\text{差不多}}_{\text{函数接近}}}^{\epsilon}\ \text{常值}$$

- 一点连续 $\not\Rightarrow$ 在一个区间连续 (例如$x\chi_{\mathbb{Q}(x)}$)

- 局部到底多大, 由δ刻画:

ϵ给定，对不同的x_0，δ可能不同:

$$\delta = \delta(\epsilon, x_0)$$

一致连续	非一致连续
$f\|_{(x_0-\delta(\epsilon),x_0+\delta(\epsilon))\cap I} \overset{\epsilon\text{精度}}{=\!=\!=} f(x_0)$	$f\|_{(x_0-\delta(\epsilon,x_0),x_0+\delta(\epsilon,x_0))\cap I} \overset{\epsilon\text{精度}}{=\!=\!=} f(x_0)$

- 一致由公共δ体现

一致连续	非一致连续
$\exists$公共$\delta=\delta(\epsilon)$	$\nexists$公共δ

常值 ： 差不多常值 $=\!=\!=$ 一致连续 ： 连续

假设I是区间, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

f在I上一致连续 $\Longleftrightarrow$ $\forall\ \epsilon > 0,\ \ \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall\ x_0 \in I,$

当 $x \in I,\ \ |x - x_0| < \delta$时, 有$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$

一致连续的例子

$\sin x$在$\mathbb{R}$上一致连续.

证明

证明: $$|\sin x-\sin x_0| = 2|\sin\frac{x-x_0}{2}||\cos\frac{x-x_0}{2}| \leqslant |x-x_0|$$

$$\forall \epsilon \in (0,1),\quad 具有公共\delta=\epsilon$$

$$f'\text{有界} \xRightarrow[\text{Lipschitz}]{\text{中值定理}} f\text{一致连续}.$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) \xlongequal{\forall x_n, y_n \in I} 0$$

$$\xRightarrow{f\text{在}I\text{上一致收敛}} \lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$$

非一致连续的典型例子

$\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上非一致连续.

固定ϵ, $x_0 \to 0^+ \Longrightarrow \delta \to 0^+$, 不具有公共$\delta$.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) \xlongequal[y_n = \frac{1}{n+1}]{x_n = \frac{1}{n}} 0, \qquad \lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 1$$

一致连续Cauchy判别准则

f在I上一致连续 $\Longleftrightarrow$ $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\epsilon), \forall\ x', x'' \in I,$

当 $|x' - x''| < \delta$时, 有$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$

一致连续的极限表达

$$f\text{在}I\text{上一致连续} \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0, s.t.$$

$$\sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x',x''\in I}} |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x',x''\in I}} |f(x') - f(x'')| = 0.$$

f在区间I上非一致连续 $\Longleftrightarrow$ $\exists\ \epsilon_0>0,\ \ \forall\delta>0,\exists\ x',x''\in I,$

$|x'-x''|<\delta$ 但$|f(x')-f(x'')|\geqslant\epsilon_0.$

闭区间一致连续

Theorem

$f \in C[a,b] \Longleftrightarrow f$ 在区间$[a,b]$上一致连续.

紧=大点=存在公共δ

局部与整体

一致连续	连续
整体概念	局部概念

注记: $\epsilon-\delta$语言 $\xrightarrow{\text{产生新概念}}$ 一致连续.

$$f \in C[a,b] \Longrightarrow \quad \forall\, x \in [a,b], \quad \forall\ \epsilon > 0, \quad \exists \delta_x > 0 :$$

$$\sup_{x',x'' \in (x-\delta_x, x+\delta_x)\cap[a,b]} |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

$$\xRightarrow{\text{有限覆盖定理}} [a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} (x_k - \frac{\delta_k}{2}, x_k - \frac{\delta_k}{2}).$$

$$f\text{在}(x_k - \frac{\delta_k}{2}, x_k - \frac{\delta_k}{2}) \cap [a,b]\text{一致收敛} \Longrightarrow f\text{在}[a,b]\text{一致收敛}$$

另一证明:

$$\text{假设} f \in C[a,b] \text{但在} [a,b] \text{上非一致连续}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \epsilon_0 > 0, \quad \forall \ n \in \mathbb{N}, \quad \exists s_n, t_n \in [a,b]: \ |s_n - t_n| < \frac{1}{n}$$

$$\text{但是} |f(s_n) - f(t_n)| \geqslant \epsilon_0$$

取 $s_{k_n} \to s \in [a,b]$, 则 $t_{k_n} \to s$

$$\xrightarrow{f \in C[a,b]} \quad 0 \leftarrow |f(s_{k_n}) - f(t_{k_n})| \geqslant \epsilon_0 \quad \text{矛盾}$$

Theorem

设(a,b)是有限区间，则

$$f\text{在有限区间}(a,b)\text{上一致连续} \Longleftrightarrow \text{存在}f\text{的延拓} \in C[a,b]$$

证明

必要性证明:

在假设下, 利用Cauchy准则, $f(a^+), f(b^-)$存在

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ f(a^+) & x = a \\ f(b^-) & x = b \end{cases}$$

$$F \in C[a,b], \quad F|_{(a,b)} = f$$

无限区间上一致连续

Theorem

$$f在\mathbb{R}上连续,在端点处极限存在 \Longrightarrow f在\mathbb{R}上一致连续$$

$$反之不成立, 反例: \sin x$$

证明

$f \in C[a,+\infty)$, $f(+\infty)$存在且有限 $\Longrightarrow$ f在$[a,+\infty)$一致连续

无限区间上一致连续(续)

证明:

$$f(+\infty)\text{存在且有限} \Longrightarrow \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\, M > a:\ \sup_{x',x''\geqslant M} |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

$$f \in C[a,+\infty) \Longrightarrow \exists\delta_1 > 0:\ \sup_{\substack{|x'-x''|<\delta_1\\ x',x''\in[a,M+2]}} |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

取$\delta = \min(\delta_1, 1)$:

(1) $x' \in [a, M+1] \Longrightarrow x', x'' \in [a, M+2]$.

(2) $x' \in [M+1, \infty) \Longrightarrow x', x'' \in [M, \infty)$.

$$\text{综上所述}\ \sup_{|x'-x''|<\delta} |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

在区间上连续和局部一致连续等价

$$f \in C(I) \Longleftrightarrow f\text{在}I\text{上局部一致连续}.$$

注记: 局部放置在闭区间内.

f在$(a,b],[b,c)$一致连续 $\Longrightarrow$ f在(a,c)一致连续.

证明: f分别在三个区间选取公共δ:

$$(a,b],\quad [b,c),\quad [\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2}].$$

一致连续在乘积运算下的性态

f, g在$[a, +\infty)$上有界且一致连续 $\Longrightarrow$ fg在$[a, +\infty)$ 一致连续.

- 有界性条件不可去.
- 一致连续在乘积运算下不保持:

反例: $x, \sin x$在$\mathbb{R}$上一致连续, $x \sin x$在$\mathbb{R}$上非一致连续.

取$x_n' = 2n\pi, \quad x_n'' = 2n\pi + \frac{1}{n}$.

证明: 利用三角不等式.

$$
\begin{aligned}
|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| &= |f(x')(g(x') - g(x'')) + g(x'')(f(x') - f(x''))| \\
&\leqslant M(|g(x') - g(x'')| + |f(x') - f(x'')|) \\
&\leqslant 2M\epsilon \qquad (|x' - x''| < \delta)
\end{aligned}
$$

$\mathbb{R}$上连续但非一致连续函数，必定是非周期函数

- 一致连续的用途(副产品)：

判断非周期性.

续

证明: 反证. 若$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$是以$T$为周期的连续函数, 则$f\in C[-2T,2T]$在$[-2T,2T]$一致连续.

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\,\delta\in(0,T):$$
$$|x'-x''|<\delta,\ x',x''\in[-2T,2T]\Longrightarrow|f(x')-f(x'')|<\epsilon$$

因此

$$|x'-x''|<\delta,\quad\forall x',x''\in\mathbb{R}$$

$$\xRightarrow{\exists\,k\in\mathbb{Z}}\quad x'-kT\in[0,T),\quad x''-kT\in[-2T,2T]$$

$$\Longrightarrow\quad|f(x')-f(x'')|=|f(x'-kT)-f(x''-kT)|<\epsilon$$

例题

$$\underbrace{\sin^2 x}_{\text{一致}} + \underbrace{sin(x^2)}_{\text{非一致}} \text{非周期}$$

取$x_n' = \sqrt{2n\pi}, \quad x_n'' = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$

第13次做业: [2.9] 1

问题 1, 2

数学分析(A1), 第14次课

任广斌(中国科大)

2020-10-26

本次课主要内容

- 闭区间连续函数　(§10)
- 上半连续函数　(§11)

- 有界性:

> *紧集上连续函数必有界.*
>
> $$f \in C[a,b] \Longrightarrow f\text{在}[a,b]\text{有界}.$$

证明: 通过常值延拓, 不妨设$f \in C(\mathbb{R})$.

$$\Longrightarrow \quad [a,b] \subset \underset{\text{(有限)}}{\bigcup_{x\in[a,b]}} (x-\delta_x, x+\delta_x)$$

$$\Longrightarrow \quad f|_{(x-\delta_x, x+\delta_x)} \text{ 有界}$$

紧集上连续函数必取到最大值和最小值.

$$f \in C[a,b] \Longrightarrow f\text{在}[a,b]\text{上达到最大值和最小值}.$$

证明: $M := \sup f[a,b] < +\infty.$

$$\Longrightarrow \exists\{x_n\} \subset [a,b] : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$$

$$\xRightarrow{\text{取子列} x_{k_n} \to \xi \in [a,b]} f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = M$$

零值定理

紧集$[a,b]$上连续函数，若在边界异号，则在内部具有零点.

$$f \in C[a,b], \quad f(a)f(b) < 0 \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b): \quad f(\xi) = 0.$$

- 边界信息体现内部信息:

$$\text{两点(函数异号)} \xrightarrow{\text{提供}} \text{一个零点}$$

- 几何意义: 从实轴的下方穿越到上方时, 必经过实轴($\mathbb{R}$完备)

- 三要素：闭区间、连续、异号.

- 方法: 将异号性质, 通过二等分区间套, 挤压到一点处.

$$\text{信息} \xrightarrow{\text{区间套}} \text{凝聚到一点}$$

二等分区间套:

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$$

不妨设 $f(a_n)f(b_n)<0,\quad\forall\, n\in\mathbb{N},\quad a_n,b_n\to\xi\in[a,b]$

$$\Longrightarrow\qquad f^2(\xi)=0.$$

介值定理

$$f \in C[a,b], \quad \gamma\text{介于}f(a)\text{与}f(b)\text{之间}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists c \in [a,b]: \quad f(c) = \gamma.$$

证明: 不妨设 $\gamma \in (f(a), f(b))$.

对于$F(x) := f(x) - \gamma$利用零值定理即可.

值域定理

$$f \in C[a,b] \quad \Longrightarrow \quad f[a,b] = [\min_{x\in[a,b]} f(x), \quad \max_{x\in[a,b]} f(x)]$$

证明: 取 $x_*, x^* \in [a,b]$:

$$f(x_*) = \min_{x\in[a,b]} f(x) =: m, \quad f(x^*) = \max_{x\in[a,b]} f(x) =: M$$

不妨设$x_* \leqslant x^*$

则 $[m,M] \supset f[a,b] \supset f[x_*, x^*] \xlongequal{\text{介值定理}} [m,M]$

连续函数保号性

连续函数保号: 将地上的绳子一端提起来, 其周边会带起来.

连续函数性质总结

连续函数保紧，保连通

$$\text{有界闭区间上连续函数} \Longrightarrow \text{有界、最值、零值、介值、值域等定理.}$$

- 上极限和下极限保序性:

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\Longrightarrow \qquad \varliminf_{x \to x_0} f(x) \leqslant \varliminf_{x \to x_0} g(x), \qquad \varlimsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant \varlimsup_{x \to x_0} g(x).$$

证明

取$x_n \to x_0$： $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$

取子列x_{k_n}： $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_{k_n})\exists$(有限或无穷).

$$\varlimsup_{x\to x_0} g(x) \geqslant \lim_{n\to\infty} g(x_{k_n}) \geqslant \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \varlimsup_{x\to x_0} f(x)$$

上半连续的$\epsilon-\delta$刻画

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x) \leqslant f(x_0) \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\delta > 0,\ 当|x - x_0| < \delta时, \quad f(x) < f(x_0) + \epsilon$$

证明: 充分性: $\forall \epsilon > 0, \quad \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0) + \epsilon.$

必要性: 反证法: $\exists \epsilon_0 > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$

但是$f(x_n) \geqslant f(x_0) + \epsilon_0$

$\Longrightarrow$ 取$x_{k_n} \to x_0, \quad \lim_{n \to \infty} f(x_{k_n}) \exists \geqslant f(x_0) + \epsilon_0$

$\Longrightarrow \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) \geqslant f(x_0) + \epsilon_0.$

例题

奇次实系数多项式必有实数根.

证法1: $p(x)=x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}\in C(\mathbb{R})$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} p(x)=\pm\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \exists[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R},\ p(\alpha)<0,\ p(\beta)>0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\xi\in[\alpha,\beta],\quad p(\xi)=0$$

证法2: 实系数多项式的共轭根成对出现.

- 复分析处理实分析的威力: $\mathbb{C}$是完备域

例题

$$f, g \in C[0, +\infty), \quad f \geqslant 0$$

$$\lim_{x \to \infty} g(f(x)) = +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

续

证明: 反证法: $\exists M_0 > 0,\ \exists \{x_n\}:\ x_n > n,$ 但$f(x_n) \in [0, M_0]$

$$令\ K := \max_{x \in [0, M_0]} g(x)$$

$$\Longrightarrow x_n > n, \quad 但 g(f(x_n)) \leqslant K, \quad 与 \lim_{x \to \infty} g(f(x)) = +\infty 矛盾$$

例题

$$f \in C[0,+\infty), \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$f^2(x) \leqslant 2x^n f(2^{-\frac{1}{n}}x), \quad \forall x \in [0,+\infty)$$

$$\Longrightarrow \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant x^n.$$

续

证明: 显然$f(0)=0$, $f(x)\geqslant 0$.

只要证明 $F(x)\leqslant 0$. 其中 $F(x):=f(x)-x^n$.

反证法: 存在$M>0$, s.t. $F(M)>0$.

取$x_0\in[0,M]$: $F(x_0)=\max\limits_{x\in[0,M]}F(x)$

$$\Longrightarrow (F(x_0)+x_0^n)^2\leqslant 2x_0^n\left(F(2^{-\frac{1}{n}}x_0)+\frac{1}{2}x_0^n\right)$$

$$\Longrightarrow F(x_0)<F(2^{-\frac{1}{n}}x_0)\text{与}x_0\text{的选取矛盾}$$

例题

$$f \in C[0,+\infty) \text{ 有界},$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \exists x_n \to +\infty: \quad \lim_{n\to+\infty}\left(f(\lambda + x_n) - f(x_n)\right) = 0$$

证明: 只要证明

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n > n:\ |f(\lambda + x_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n}.$$

例题(续)

反证法: 存在$\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall x > n_0$: $|f(\lambda_0 + x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n_0}$.

$$\Longrightarrow \lambda_0 \neq 0$$

$$\Longrightarrow \text{不妨设} f(\lambda_0 + x) - f(x) \geqslant \frac{1}{n_0}$$

$$\xRightarrow[\text{相加}]{\text{令}x=n_0,\cdots,n_0+(m-1)\lambda_0} f(m\lambda_0 + n_0) - f(n_0) \geqslant \frac{m}{n_0} \to \infty \quad (m \to \infty)$$

$$\Longrightarrow \varliminf_{m\to\infty} f(m\lambda_0 + n_0) = +\infty \text{与} f \text{有界矛盾}$$

例题

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right| \leqslant |\sin x|, \qquad \forall x \in (-1,1) \Longrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} k a_k\right| \leqslant 1$$

相除, 再令$x \to 0$.

例题

计算 $$\lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{k\to\infty}\left\{\cos(\pi n!x)\right\}^{2k}\right\}$$

作业

第14次做业: [2.10] 5, 7, 9, 11.

问题 2, 4

[2.11] 2, 3.

实数完备性基本定理的相互证明（30 个）

摘要：这 6 个定理虽然出发的角度不同，但描写的都是实数连续性这同一件事，它们之间是相互等价的，即任取其中两个定理，它们可以相互证明。它们在证明过程中相互联系。对同一个定理的证明，虽然不同的定理作为工具会使证明有简繁之分，有的用的是类似的证明方法，有的出发点与站的角度不同，但最后却都能殊途同归。而有时使用同一个定理，也可能有不同的方法。即使方法相同，还可以有不同的细节。作为工具，它们又各具特点。而这些都是值得我们去注意与发现。

1 **确界原理**非空有上(下)界数集，必有上(下)确界。

2 **单调有界原理** 任何单调有界数列必有极限。

3 **区间套定理** 若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，则存在唯一一点 ξ，使得 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$。

4 **Heine-Borel 有限覆盖定理** 设$[a,b]$是一个闭区间，H 为$[a,b]$上的一个开覆盖，则在H中存在有限个开区间，它构成$[a,b]$上的一个覆盖。

5 **Weierstrass 聚点定理（Bolzano 致密性定理**有界无穷数列必有收敛子列。**）** 直线上的有解无限点集至少有一个聚点。

6 **Cauchy 收敛准则**数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$对任给的正数ε，总存在某一个自然数N，使得$\forall m,n>N$时，都有$|a_m-a_n|<\varepsilon$。

一. 确界原理

1. 确界原理证明单调有界定理

证 不妨设$\{a_n\}$为有上界的递增数列. 由确界原理, 数列$\{a_n\}$有上确界, 记$a=\sup\{a_n\}$. 下面证明a 就是$\{a_n\}$ 的极限. 事实上, 任给$\varepsilon>0$, 按上确界的定义, 存在数列$\{a_n\}$中某一项a_N, 使得$a-\varepsilon>a_N$. 又由$\{a_n\}$的递增性, 当$n\geqslant N$

时有$a-\varepsilon<a_N\leqslant a_n$.

另一方面, 由于a 是$\{a_n\}$的一个上界, 故对一切a_n都有$a_n\leqslant a<a+\varepsilon$. 所以当$n\geqslant N$ 时有

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

这就证得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 同理可证有下界的递减数列必有极限, 且其极限即为它的下确界.

2. 确界原理证明区间套定理

证明：1 设$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$是一个闭区间套，即满足：

1） $\forall n$，$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$；

2） $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

我们证明，存在唯一的实数ξ，使得$\xi\in[a_n,b_n]$，（$n=1,2,\cdots$）

存在性：令$S=\{a_n\}$，显然，S 非空且有上界（任一b_n都是其上界）. 据确界原理，S

有上确界，设sup S $=\xi$. 现在，我们证明 ζ 属于每个闭区间［a_n，b_n］，（n＝1，2，…）显然

$a_n\le\xi$，（n ＝1，2，…）　所以，我们只需证明对一切自然数 n，都有 $\xi\le b_n$.
事实上，因为对一切自然数 n，b_n都是 S 的上界，而上确界是上界中最小者，因此必有 $\xi\le b_n$

，故我们证明了存在一实数 ξ，使得 $\xi\in$［a_n，b_n］，（n ＝1，2，…）

唯一性：　假设还有另外一点 $\xi'\in R$ 且 $\xi'\in[a_n,b_n]$，则 $|\xi-\xi'|\le|a_n-b_n|\to 0,$

即 $\xi=\xi'$。从而唯一性得证。

3. 确界原理证明有限覆盖定理

即闭区间［a，b］的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖

证① 令S ＝｛x｜a＜x ≤b，［a，x］能被H 中有限个开区间覆盖｝；

②显然S有上界　因H 覆盖闭区间［a，b］，所以，存在一个开区间（α，β）∈H 使 a ∈（α，β）　取x ∈（α，β），则［a，x］能被H中有限个开区间覆盖　从而，x ∈S，故S 非空；

③ 由确界原理存在 ζ＝sup S；

④ 现证 ζ＝b　用反证法　若 ζ≠b，则 a＜ζ＜b　由H 覆盖闭区间［a，b］，一定存在（α_1，β_1）∈H，使 ζ∈（α_1，β_1）　取 x_1，x_2使 $\alpha<x_1<\zeta<x_2<\beta_1$

，且 $x_1\in S$　则［a，x_1］能被H 中有限个开区间覆盖，把（α_1，β_1）加进去，就推得 $x_2\in S$　这与 ζ ＝sup S 矛盾，故 ζ＝b，即定理结论成立

4. 确界原理证明聚点定理

证　设 S 是直线上的有界无限点集，则由确界原理有 $\eta=\sup S,\xi=\inf S$。若 η,ξ 中有一点不是 S 的孤立点，则显然就是 S 的一个聚点。

否则，令 $E:=\{x\in R|S$ 中仅有有限个数小于 $x\}$。显然 E 非空且有上界。令 $\eta'=\sup E$，则由 E 的构造方法可知，$\forall\varepsilon>0$ 必有 $\eta'+\varepsilon\notin E$，即 S 中有无限个数小于 $\eta'+\varepsilon$ 大于 η'。所以 $(\eta'-\varepsilon,\eta'+\varepsilon)$ 中含有 S 的无限个数，故 η' 是 S 的聚点。

5. 确界原理证明Cauchy收敛准则

即数列｛x_n｝收敛　　$\forall\varepsilon>0$，∃N，当n，m ＞N 时有｜x_n-x_m｜＜ε

必要性:略

充分性:

① 构造非空有界数集S，因为欲证明数列｛x_n｝收敛，故数集S 必须含有数列｛x_n 中的无限多个数，为此，令S ＝ x｜｛（－∞，x）∩｛x_n｝是空集或有限点集｝；

②由于满足Cauchy收敛准则充分条件的数列是有界的，故知数列｛x_n｝的下界 a ∈S，上界 b 也是S 的上界,所以S 是非空有上界的数集　由确界原理数集S 有上确界 ζ＝sup S；

③ 对 ε＞0，（－∞，ζ）∩｛x_n｝是无限点集，否则，就与 ζ＝sup S 矛盾

因（－∞，ζ－ε）∩｛x_n｝至多含有｛x_n｝的有限多个点　故（ζ－ε，ζ＋ε）含有

$\{x_n\}$ 的无限多个点 设 $x_{n_k} \in (\zeta-\varepsilon, \zeta+\varepsilon)$，$k=1, 2, \cdots$，且 $n_1 < n_2 < \cdots$

取 $N_1 = \max\{N, n_1\}$，则当 $n > N_1$ 时，总存在 $n_k > N_1$ 使

$x_n - \zeta \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \zeta| < 2\varepsilon$，

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \zeta$.

二. 单调有界定理

6. **单调有界定理**证明**确界定理**

证：我们不妨证明非空有上界的数集 S 必有上确界

(1). 欲求一实数使它是非空数集 S 的上确界 利用非空有上界的数集 S，构造一数列使其极限为我们所要求的实数

选取性质 p：不小于数集 S 中的任一数的有理数

将具有性质 p 的所有有理数排成一个数列 $\{r_n\}$，并令 $\{x_n\} = \max\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，则得单调递增有上界的数列 $\{x_n\}$；

(2) 由单调有界定理得，$\zeta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，且对任意的自然数 n 有 $r_n \leqslant x_n \leqslant \zeta$；

(3) ζ 是数集 S 的上确界. 用反证法，若有数 $x_0 \in S$ 使 $x_0 > \zeta$，取 $\varepsilon = (x_0 - \zeta)/2$，则存在一个有理数 r_N，使 $\zeta \leqslant r_N < \zeta + \varepsilon = (x_0 + \zeta)/2 < (x_0 + x_0)/2 = x_0$，从而 $r_N < x_0$，这与 r_N 是数集 S 的上界矛盾 所以对一切 $x \in S$，都有 $x \leqslant \zeta$，即 ζ 是数集 S 的上界.

任给 $\varepsilon > 0$，若 $\forall x \in S$，都有 $x \leqslant \zeta - \varepsilon$，则存在有理数 r'，使 $\zeta - \varepsilon < r' < \zeta$，即 $x \leqslant \zeta - \varepsilon < r' < \zeta$，我们就找到 $r' \in S$ 这与（若 $\forall x \in S$，都有 $x \leqslant \zeta - \varepsilon$）矛盾，所以存在 $x' \in S$，使 $x' > \zeta - \varepsilon$，即 ζ 是数集 S 的最小上界

于是，我们证明了所需结论.

7. **单调有界定理**证明**区间套定理**

若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套，则在实数系中存在唯一的一点 ξ，使得 $\xi \in [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$，即

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, \cdots. \quad (1)$$

证：$\{a_n\}$ 为递增有界数列，依单调有界定理，$\{a_n\}$ 有极限 ξ，且有

$a_n \leqslant \xi, \quad n = 1, 2, \cdots. \quad (2)$

同理，递减有界数列 $\{b_n\}$ 也有极限，并按区间套的条件有

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi, \quad (3)$

且 $b_n \geqslant \xi, \quad n = 1, 2, \cdots. \quad (4)$

联合 (2)、(4) 即得 (1) 式.

最后证明满足 (2) 的 ξ 是唯一的. 设数 ξ' 也满足

$a_n \leqslant \xi' \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$

则由 (1) 式有

$|\xi - \xi'| \leqslant b_n - a_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$

由区间套的条件得

$|\xi-\xi'|\leq\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

故有$\xi'=\xi$.

8. **单调有界定理**证明**有限覆盖定理**,

即闭区间 $[a, b]$ 的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖

证:(1)设有理数 $r\in(a, b]$,使闭区间 $[a, r]$ 能被H 中有限个开区间覆盖 把 $[a, b]$ 上的这种有理数的全体排成一个数列 $\{r_n\}$,因为存在一个开区间 $(\alpha, \beta)\in H$ 使 $r_n\in(\alpha, \beta)$,在 $(\alpha, \beta)\cap[a, b]$ 内含有无穷多个有理数,所以 $\{r_n\}$ 是存在的;

(2)将数列 $\{r_n\}$ 单调化,取 $x_n=\max\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$,则数列 $\{x_n\}$ 单调递增有上界;

(3) 由单调有界定理得,$\zeta=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 且 $r_n\leq x_n\leq\zeta$,$n=1, 2, \cdots$;

(4) 因 $x_n\in[a, b]$,$n=1, 2, \cdots$,由(3)得 $\zeta\in[a, b]$,故 ζ 必在H 中的某个开区间 (α_1, β_1) 中 再由(3),一定有 $r_N\in\{r_n\}$,使 $\alpha_1<r_N\leq\zeta$ 又由① $[a, r_n]$ 能被H 中有限个开区间覆盖 故只需把 (α_1, β_1) 加进去 $[a, \zeta]$ 能被H 中有限个开区间覆盖

若 $\zeta=b$,则说明 $[a, b]$ 能被H 中有限个开区间覆盖 用反证法 若 $\zeta<b$,由于 $[a, b]$ 内的有理数在 $[a, b]$ 上处处稠密,故一定存在有理数 r',使得 $\zeta<r'<\min\{\beta, b\}$,这样一来,$[a, r']$ 能被H 中有限个开区间覆盖,故 $r'\in\{r_n\}$,与(3)矛盾 所以,$\zeta=b$。

9. **单调有界定理**证明**聚点定理**

证明:设S 是一有界无限点集,则在S 中选取一个由可数多个互不相同的点组成的数列 $\{a_n\}$,显然数列 $\{a_n\}$ 是有界的

下面我们从 $\{a_n\}$ 中抽取一个单调子列,从而由单调有界定理该子列收敛,最后我们证明该子列的极限值,就是有界无限点集S 的聚点 分两种情况来讨论

1)如果在 $\{a_n\}$ 的任意一项之后,总存在最大的项(因S 是有界的且 $\{a_n\}$ S,这是可能的),设 a_1 后的最大项是 a_{n_1};a_{n_1} 后的最大项是 a_{n_2},且显然 $a_{n_2}\leq a_{n_1}$;

一般地,a_{n_k} 后的最大项记为 $a_{n_{k+1}}\leq a_{n_k}$,$(k=1, 2, \cdots)$

这样,就得到了 $\{a_n\}$ 的一个单调递减的子数列 $\{a_{n_k}\}$,因为 $\{a_n\}$ 有界,根据单调有界定理知,$\{a_{n_k}\}$ 收敛

2)如果1)不成立 即从某一项以后,任何一项都不是最大的(为证明书写简单起见,不妨设从第一项起,每一项都不是最大项) 于是,取 $a_{n_1}=a_1$,因 a_{n_1} 不是最大项,所以必存在另一项 $a_{n_2}>a_{n_1}$ $(n_2>n_1)$,又因为 a_{n_2} 也不是最大项,所以又有 $a_{n_3}>a_{n_2}$ $(n_3>n_2)$,…… 这样一直作下去,就得到 $\{a_n\}$ 的一个单调递增的子列 $\{a_n\}$,且有上界,根据单调有界定理知,$\{a_n\}$ 收敛,

总之不论 $\{a_n\}$ 属于情形1)还是情形2),都可作出 $\{a_n\}$ 的一个单调收敛的子列 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}=a$,今证 a 是S 的聚点。对 $\varepsilon>0$,存在自然数K,使得 $k>K$

时，$a-\varepsilon<a_{n_k}<a+\varepsilon$，
若这时 $\{a_{n_k}\}$ 单调递减，$a_{n_{k+1}}<a+\varepsilon$（$k>K$）且 $a_{n_{k+1}}\neq a$，$a_{n_{k+1}}\in S$，
即 a 的 ε 邻域内含有 S 中异于 a 的点，故 a 是 S 的聚点。
$\{a_{n_k}\}$ 单调递增时，类似可证。

10. 单调有界定理证明Cauchy收敛准则

必要性：略
充分性：先证明柯西数列$\{a_n\}$是有界的。取ε=1，因$\{a_n\}$是柯西数列，所以存在某个正整数No，当n>No
时有$|a_n-a_{No+1}|<1$，亦即当n>No时$|a_n|\leqslant |a_{No+1}|+1$即$\{a_n\}$有界。
不妨设$a_n\in[a,b]$，我们可用如下方法取得$\{a_n\}$的一个单调子列$\{a_{n_k}\}$
(1)取$\{a_{n_k}\}\in\{a_n\}$使[a，a_{n_k}]或[a_{n_k}，b]中含有无穷多的$\{a_n\}$的项
(2)在[a，a_{n_k}]或[a_{n_k}，b]中取得$a_{n_{k+1}}\in\{a_n\}$且满足条件(1)并使$n_{k+1}>n_k$，然后就有
$a_{n_k}<a_{n_{k+1}}$
不断地进行（1），（2）得到一单调递增的子列$a_{n_k}<a_{n_{k+1}}<a_{n_{k+2}}<\cdots$

因为$a_{n_k}\in\{a_n\}$，而$\{a_{n_k}\}$是一个单调有界数列，由单调有界定理知a_{n_k}收敛，

设$\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n_k}-a|=0$（1）

下证$\{a_n\}$收敛于a

因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}$=a 则对∀ε>0∃正整数K，当k>K时，$|a_{n_k}|$另一方面由于$\{a_n\}$是柯西列，所以

存在正整数N，当n，$n_1>N_1$ 时有$|a_n-a_{n_1}|<\frac{\varepsilon}{2}$ 由（1）就可得当$n_1>N$ 有 $|a_{n_1}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

所以当n>max(N,N_1)时$|a_n-a|\leqslant |a_n-a_{n_1}|+|a_{n_1}-a|<\varepsilon$
故$\{a_n\}$收敛于a

三．区间套定理

11. 区间套定理证明确界原理

即非空有上界的数集 S 必有上确界，非空有下界的数集 S 必有下确界
证：仅证明非空有上界的数集 S 必有上确界

(1) 要找一数 ζ，使其是数集 S 的上确界　ζ 是 S 的上确界就要满足上确界定义中的两个条件：大于 ζ 的数不在 S 中，ζ 的任何邻域内有 S 中的点　这两条即为性质 **p**．

如果 ζ 在闭区间 [a，b] 中，则闭区间 [a，b] 应有性质：任何小于 a 的数不在 S 中，[a，b] 中至少含有 S 中的一个点，该性质即为$\mathbf{p}^*$

取 S 的上界为 b，且 b ∈ / S，取 a ∈ S，a < b，则闭区间 [a，b]
有性质$\mathbf{p}^*$；

(2) 将闭区间 [a，b] 等分为两个闭区间，则至少有一个闭区间 $[a_1, b_1]$ 也有性质 p，如此继续得一闭区间列，满足
$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$；

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b_n - a_n) = 0$$

(3)由区间套定理的得 ζ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$，n=1, 2, ⋯, 并且每个闭区间 $[a_n, b_n]$ 都有性质**p***

（4）因为 $a_n \le \zeta \le b_n$，n=1, 2, ⋯，且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

由于对∀x∈S, 有 $x \le b_n$，从而 $x \le \lim_{n\to\infty} b = \zeta$；又对∀ε>0,总存在N,使得 $\zeta - \varepsilon < a_N$ 故存在

$x_0 \in S \cap [a_N, b_N]$，于是 $x_0 \ge a_N > \zeta - \varepsilon$. 因而 ζ =sups

12. 区间套定理证明单调有界定理

2　设 $\{x_n\}$ 是单调有界数列，不妨设其为单调递增且有上界 b_1　现在我们来构造一个闭区间套

在 $\{x_n\}$ 中任取一项记作 a_1，这时 $a_1 < b_1$，于是，以 a_1 和 b_1 为端点的闭区间 $[a_1, b_1]$ 内一定含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项　将区间 $[a_1, b_1]$ 二等分，得闭区间

$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$，$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$，

由于 $\{x_n\}$ 单调递增，故 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ 中只有一个包含 $\{x_n\}$ 的无限多项，我们记该区间为 $[a_2, b_2]$　再将 $[a_2, b_2]$ 二等分，在所得区间中只有一个包含 $\{x_n\}$ 的无限多项，记该区间为 $[a_3, b_3]$ 如此继续，得一闭区间列：$[a_1, b_1]$，$[a_2, b_2]$，…，$[a_n, b_n]$，…，

满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$，（$n = 1, 2, \cdots$）；

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

故 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个闭区间套，由闭区间套定理，存在唯一实数 ζ，使得 $\zeta \in [a_n, b_n]$，（$n = 1, 2, \cdots$）

现在证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = \zeta$　因 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

，故对　$\varepsilon > 0$，存在自然数 N'，当 $n > N'$ 时，$|b_n - a_n| < \varepsilon$

另外，由于 $[a_n, b_n]$ 包含递增数列 $\{x_n\}$ 的无限多项，所以必存在 N''，当 $n > N''$ 时，有 $a_n \le \zeta \le b_n$，

取 $N = \max\{N', N''\}$，当 $n > N$ 时有 $|x_n - \zeta| < b_n - a_n| < \varepsilon$，

此即 $\lim_{n\to\infty} x_n = \zeta$

13. 区间套定理证明有限覆盖定理

即闭区间 $[a, b]$ 的任一开覆盖 H 都有有限的子覆盖

证1用反证法

(1)要证明的整体性质p是：闭区间［a，b］能用H 中的有限个开区间覆盖. 与p相反的性质p^{-1}是：闭区间［a，b］不能用H中的有限个开区间覆盖；

(2) 假设闭区间［a，b］有性质p^{-1} 将闭区间［a，b］等分为两个闭区间，则至少有一个闭区间［a_1，b_1］也有性质p^{-1} 否则，［a，b］有性质p 如此继续得一闭区间列，使每个闭区间都有性质

p^{-1}，且［a，b］⊃［a_1，b_1］⊃ … ⊃［a_n，b_n］⊃…；

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b_n-a_n)=0$$

(2)由闭区间套定理得数ξ属于所有的闭区间［a_n，b_n］，n＝1，2，…，并且每个闭区间［a_n，b_n］有性质p^{-1}；

④ 由ζ∈［a，b］和H 是［a，b］的开覆盖，有ζ属于H 中的某个开区间

$\zeta\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\subset(\alpha_1,\beta_1)$，和

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

可知，存在自然数m，使［a_m，b_m］⊂（α_1，β_1） 这与［a_m，b_m］具有性质p^{-1}矛盾

14. **区间套定理**证明**聚点定理**

证明(反证法)：已知∃a，b，使$a\le x_n\le b$。设[a，b]没有E的有限子覆盖，记

[a，b]=［a_1，b_1］，二等分［a_1，b_1］，其中必有一区间含$\{x_n\}$的无穷多项，

记其为［a_2，b_2］，二等分［a_2，b_2］，……如此继续下去，便得区间套

［a_n，b_n］，满足∀n，［a_n，b_n］含$\{x_n\}$的无穷多项。由区间套定理可得，∃唯

一的$r\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，使$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=r$。

因此∃n_1，使$r-1\prec a_{n_1}\le r\le b_{n_1}\prec r+1$。

这时存在$x_{n_1}\in[a_{n_1},b_{n_1}]$，归纳地，∀k>1，∃$n_k$，使$r-\frac{1}{k}<a_{n_k}\le r\le b_{n_k}<r+\frac{1}{k}$

由$[a_{n_k},b_{n_k}]$含$\{x_n\}$的无穷多项，知$a_{n_k}\in[a_{n_k},b_{n_k}]$，由$a_{n_k}\le x_{n_k}\le b_{n_k}$，

令$k\to\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=r$，所以$\{x_n\}$存在收敛子数列。定理证完

15. **区间套定理**证明**Cauchy收敛准则**

证 设$\{x_n\}$为 **Cauchy** 基本列，即$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$有

$|x_n-x_N|\le\varepsilon$，即$x_n\in[x_N-\varepsilon,x_N+\varepsilon]$。

定义性质P：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$有$x_n\in[x_N-\varepsilon,x_N+\varepsilon]$。则

（1） 令$\varepsilon=\frac{1}{2}$，则$\exists N_1$使得$[x_{N_1}-\frac{1}{2},x_{N_1}+\frac{1}{2}]$具有性质$P$，不妨记此区间为$[\alpha_1,\beta_1]$。

（2） 令$\varepsilon=\frac{1}{2^2}$， 则$\exists N_2(>N_1)$使得$[x_{N_2}-\frac{1}{2^2},x_{N_2}+\frac{1}{2^2}]$具有$P$，不妨记此区间为$[\alpha_2,\beta_2]$。

⋮。。。

(k): 令$\varepsilon=\frac{1}{2^k}$，则$\exists N_k(>N_{k-1})$使得$[x_{N_k}-\frac{1}{2^k},x_{N_k}+\frac{1}{2^k}]$具有$P$，不妨记此区间为$[\alpha_k,\beta_k]$。

由此可得一闭区间套$\{[\alpha_n,\beta_n]\}$满足

(i) $[\alpha_n,\beta_n]\supset[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]$;

(ii) $(\beta_n-\alpha_n)=\frac{1}{2^n}$;

(iii) $[\alpha_n,\beta_n]$具有性质P，即含有某个$N>0$后的所有项。

由闭区间套定理可知存在唯一的$\xi\in[\alpha_n,\beta_n]$。从而$x_n\to\xi,(n\to\infty)$。

四. 有限覆盖定理

16. 有限覆盖定理证明确界原理

证明：设Ｓ 为非空有上界的数集，我们证明Ｓ 有上确界

不妨设Ｓ没有最大值 设ｂ为Ｓ的一个上界，下面用反证法来证明supＳ ＝ξ存在 假设supＳ 不存在，取ａ ∈Ｓ 对任一ｘ ∈［ａ， ｂ］，依下述方法确定一个相应的邻域

Ｕｘ ＝（ｘ－δ， ｘ＋δ）

１）若ｘ∈Ｓ，因Ｓ中没有最大值，所以至少存在一点ｘ′∈Ｓ，使ｘ′＜ｘ，这时取

δ＝ｘ′－ｘ；

２）若ｘ∈／Ｓ且ｘ不是Ｓ的上界，同样存在ｘ′∈Ｓ，使ｘ＜ｘ′，这时取δ＝ｘ－ｘ′；

３）若ｘ∈Ｓ，且ｘ是Ｓ的上界，因supＳ存在，故有δ＞０，使得Ｕｘ ＝（ｘ－δ，ｘ＋δ）中的点都是Ｓ 的上界.

于是我们得到了［ａ， ｂ］的一个开覆盖：

Ｈ ＝｛Ｕｘ ＝（ｘ－δ， ｘ＋δ）｜ｘ ∈［ａ， ｂ］｝

根据有限覆盖定理，Ｈ 有有限子覆盖：

$\tilde{H}$＝｛Ｕｎｋ＝（ｘｋ－δｘｋ， ｘｋ＋δｘｋ）｜ｋ＝１， ２，…， ｎ｝

将Ｕｘ分成两类,若Ｕｘ是３）中所确定的开区间，我们把Ｕｘ称为是第二类的，否则称为是

第一类的, 显然 a 所属的邻域 U_{x_i} 是第一类的， b 所属的邻域 U_{x_i} 是第二类的, 所以至少有一个第一类邻域与某个第二类邻域相交，这是不可能的.

17. 有限覆盖定理证明单调有界定理

即单调有界数列必有极限

证：不妨设数列 $\{x_n\}$ 单调递增有上界M, 且若 $\{x_n\}$ 中有最大值，则易知 $\{x_n\}$ 收敛于某常数，从而定理得证，一下假设 $\{x_n\}$ 中没有最大值，我们用反证法来证明

（1）设 $\{x_n\}$ 没有极限。对任意取定自然数 n_0 有 $x_{n_0}<M$, 下面作闭区间 $[x_{n_0}, M]$ 的对应开覆盖H. 设 $x\in[x_{n_0}, M]$,

1）若 $x=x_{n'}$ (n' 是自然数)。因为 $\{x_n\}$ 中没有最大值，说以至少存在某个自然数 n'', 使得 $x_{n'}\le x_{n''}$, 这时取 $\delta=x_{n'}-x_{n''}$ 得x的领域（$x-\delta, x+\delta$）

2) 若 $x\notin\{x_n\}$ 且x不是 $\{x_n\}$ 的上界，同样存在 $x_{n'}\in\{x_n\}$，使 $x<x_{n''}$, 取 $\delta=x_{n'}-x_{n''}$ 得x的领域（$x-\delta$， $x+\delta$）

3）若 $x=x_{n'}\in\{x_n\}$ 且是 $\{x_n\}$ 的上界。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在，故必存在 x 的邻域

（$x-\delta$， $x+\delta$），使得它不含有 $\{x_n\}$ 中的任何项，于是我们得到了闭区间 $[x_{n_0}, M]$ 的一个开覆盖

② 由有限覆盖定理，选出有限个开区间：

（$x_1-\delta_1$， $x_1+\delta_1$），…，（$x_n-\delta_n$， $x_n+\delta_n$）

也能覆盖闭区间 $[x_{n_0}$， $M]$

③ 将这有限个开区间分成两类：若（$x_i-\delta_i$， $x_i+\delta_i$）是第 3）

中情形，则称之为第 1 类；否则称为第 2 类

显然 x_{n_0} 所属的邻域是第 1 类　M 所属的邻域是第 2 类　但因

（$x_1-\delta_1$， $x_1+\delta_1$），…，（$x_n-\delta_n$， $x_n+\delta_n$）覆盖了 $[x_{n_0}$， $M]$，所以至少有一个第 1 类开区间与某个第 2 类开区间相交，这是不可能的，矛盾。

18. 有限覆盖定理证明区间套定理

即若 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是一闭区间套，则存在唯一 ζ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$， $n=1, 2, \cdots$

证:用反证法证明　①假设 $[a_n, b_n]$， $n=1, 2, \cdots$, 没有公共点，

则 $[a_1, b_1]$ 上的任何一点都不是 $\{[a_n, b_n]\}$ 的公共点, 从而，总存在一个开区间（$x-\delta_x$， $x+\delta_x$），使得（$x-\delta_x$， $x+\delta_x$）不与所有的 $[a_n, b_n]$ 相交　即存在 $[a_{n_x}, b_{n_x}]$，使 $[a_{n_x}, b_{n_x}]\cap(x-\delta_x, x+\delta_x)=\phi$,

现让 x 取遍 $[a_1, b_1]$ 上的所有点，就得到一个开区间集：

$H=\{(x-\delta_x, x+\delta_x)$: x 取遍 $[a_1, b_1]$ 上的所有点$\}$

② 由有限覆盖定理，选出有限个开区间：

$\tilde{H}=\{(x_k-\delta_{x_k}, x_k+\delta_{x_k}): k=1, 2, \cdots m\}$，

覆盖闭区间 $[a, b]$，其中 $(x_k-\delta_{x_k}, x_k+\delta_{x_k})\cap[a_{n_{x_k}}, b_{n_{x_k}}]=\phi$ ；

③ 因为 $[a_{n_{x_k}}, b_{n_{x_k}}]$ 只有有限个，由闭区间套定理的条件，它们是一个包含着一个，因此其中一定有一个最小区间，设为 $[a_{n_0} b_{n_0}]$，这时，

$[a_{n_0}, b_{n_0}] \cap (x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}) = \phi$ ，$k = 1, 2, \cdots m$

从而，$[a_{n_0}, b_n] \cap \bigcup_{k=1}^{n} (x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}) = \phi$

这就与$[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset [a_1, b_1]$矛盾

所以，$[a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$，应有公共点

19. 有限覆盖定理证明聚点定理

证　设E为有界无穷点集，因此存在$M>0$，使得$E\subset[-M,+M]$. 由本节习题6知，$[-M,+M]$的聚点均含于$[-M,+M]$，故E若有聚点，必含于$[-M,+M]$.

反证法：若E无聚点，即$[-M,+M]$中任何一点都不是E的聚点，则对于$\forall x\in[-M,+M]$，必有相应的$\delta_x>0$，使得$U(x;\delta_x)$内至多只有点$x\in E$(若$x\notin E$，则$U(x;\delta_x)$中不含E中之点). 所有这些邻域的全体形成$[-M,+M]$的一个无限开覆盖：

$$H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[-M,+M]\}.$$

由有限覆盖定理知，H中存在有限个开区间能覆盖$[-M,+M]$. 记

$$\overline{H}=\{(x-\delta_{x_k},x+\delta_{x_k})\mid x_k\in[-M,+M],k=1,2,\cdots,N\}\subset H$$

为$[-M,+M]$的一个有限开覆盖，则$\overline{H}$也覆盖了E. 由$U(x;\delta_x)$的构造含意知，$\overline{H}$中N个邻域至多有N个点属于E，这与E为无穷点集相矛盾. 因此，在$[-M,+M]$内一定有E的聚点.

由此聚点定理得证.

20. 有限覆盖定理证明Cauchy收敛准则

证(反证法)　假设柯西列$\{x_n\}$不收敛，

易证$\{x_n\}$为有界无穷数列，取ε=1，因$\{a_n\}$是柯西数列，所以存在某个正整数No，当n>No时有$|a_n - a_{No+1}| < 1$，亦即当n>No时$|a_n| \leqslant |a_{No+1}|+1$即$\{a_n\}$有界。

即存在闭区间$[a,b]$使得$\{x_n\}\subset[a,b]$。则$\forall x\in[a,b]$ $\exists U(x,\delta)$ 使得$U(x,\delta)$中只含有$\{x_n\}$中的有限多项(否则，若$\forall\delta>0,U(x,\delta)$都有$\{x_n\}$中的无限多项，则易证$\{x_n\}$收敛，这与假设矛盾)。

从而得$[a,b]$的一个开覆盖$\mathrm{H}:=\{U(x,\delta)|x\in[a,b]\}$

由 **Heine–Borel** 有限覆盖定理知，存在H的一个有限子覆盖

$$\mathrm{H}_1:=\{U(x_i,\delta_i)|x_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,k\}。$$

所以$\cup\mathrm{H}_1$只含有$\{x_n\}$中的有限多个点，这显然与$(\cup\mathrm{H}_1)\supset[a,b]\supset\{x_n\}$是矛盾的，假设错误，因此$\{x_n\}$必收敛。

五. 聚点定理

21. 聚点定理证明确界原理

证 设S是一个有上界数集，则$\exists b\in R$使得$\forall x\in S$有$x<b$，取$a\in S$构造区间$[a,b]$。定义性质P：区间中至少有一个数属于S且区间的右端点为S的一个上界。

利用二等分法容易构造出满足性质P的区间套$\{[a_n,b_n]\}$

定义性质 P: 不能用 H 中有限个开区间覆盖。

(1) 将$[a,b]$等分为两个子区间，则至少有一个具有性质P，不妨记该区间为$[a_1,b_1]$，则$[a_1,b_1]\subset[a,b]$;

(2) 将$[a_1,b_1]$等分为两个子区间，则至少有一个具有性质P，不妨记该区间为$[a_2,b_2]$，则$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$;

$\vdots$

n) 将$[a_{n-1},b_{n-1}]$等分为两个子区间，则至少有一个具有性质 P，不妨记该区间为$[a_n,b_n]$，则$[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$;

由此可得一个区间套$\{[a_n,b_n]\}$且满足$b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0$ (1)

显然$\{b_n\}\subset[a,b]$且单调递减有下界。我们证明$\exists\xi\in R,\ni b_n\to\xi,(n\to\infty)$。事实上，不妨设$\{b_n\}$有无穷个数，由聚点原理知$\{b_n\}$有聚点$\xi$。

因此$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0$，使得$b_N\in U(\xi,\varepsilon)$且$b_N>\xi$。由于$\{b_n\}$单调递减，则易证$\forall n>N$ 有 $b_n\in U(\xi,\varepsilon)$。

由于b_n都为 S 的上界，($\xi\in U(\xi,\varepsilon)$)所以$\xi$也为$S$的上界。由(1) 易证$a_n\to\xi,(n\to\infty)$。故$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1>0,\forall n>N_1$有$a_n\in U(\xi,\varepsilon)$。从而可知，$\forall n>N+N_1,\exists x\in S,\ x\in[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)$。即$\xi-\varepsilon<x\le\xi$

故ξ为S的上确界。

22. 聚点定理证明单调有界定理

证 不妨设$\{x_n\}$是单调有上界无穷数列，即$\exists a,b\in R$，使得$\{x_n\}\subset[a,b]$。故由聚点原理可知$\exists\xi\in R,\ni\xi$为$\{x_n\}$的聚点，即$\forall\varepsilon>0,U(\xi,\varepsilon)$含有$\{x_n\}$中的无限多项。由单调性易得知$U(\xi,\varepsilon)$外最多有$\{x_n\}$中的有限项，因此又极限的一种等价定义得:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$$

23. 聚点定理证明区间套定理

即若｛［ａₙ，ｂₙ］｝是一闭区间套，则存在唯一ζ属于所有的闭区间［ａₙ，ｂₙ］，ｎ＝１，２，…

证：设Ｓ＝｛ａₙ｝∪｛ｂₙ｝ 则Ｓ是有界无限点集 由聚点定理得数集Ｓ聚点ζ 若存在一个ａ$_N$，使ｂₙ＞ａ$_N$＞ζ（ｎ＝１，２，…）

再取ε＝$\frac{1}{2}$（ａ$_N$－ζ），由｛ａₙ｝的单调性，当ｎ＞Ｎ 时，ａₙ＞ａ$_N$＞ζ＋ε这样，（ζ

$-\varepsilon, \zeta+\varepsilon)$内至多有S 中的有限多个点 这与ζ是聚点矛盾，于是得到$\zeta \geq a_n (n=1, 2, \cdots)$

同理可证，$\zeta \leq b_n (n=1, 2, \cdots)$ 因此，有$\zeta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

唯一性

最后证明满足ξ是唯一的. 设数ξ′也满足

$$a_n \leq \xi' \leq b_n,\ n=1,2,\cdots, \qquad (1)$$

因为 $a_n \leq \xi \leq b_n,\ n=1,2,\cdots, \qquad (2)$

则由（1）(2)式有

$|\xi-\xi'| \leq b_n - a_n,\ n=1,2,\cdots.$

由区间套的条件得

$$|\xi-\xi'| \leq \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = 0$$

故有ξ′ = ξ. 唯一性即证。

24. 聚点定理证明有限覆盖定理

即闭区间$[a, b]$的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖

证① 找一个使它具有与性质p 相反的性质p^{-1}的数集S；

为此我们先证明$\delta>0$，$x\in[a, b]$有开区间$(\alpha_0, \beta_0)\in H$，使$(x-\delta, x+\delta)\subset(\alpha_0, \beta_0)$. 否则,$\exists x_1\in[a, b]$对任意的$(\alpha, \beta)\in H$，都有$(x_1-1, x_1+1)\not\subset(\alpha, \beta)$,$\exists x_2\in[a, b]-\{x_1\}$，对任意的$(\alpha, \beta)\in H$，都有$(x_2-\frac{1}{2}, x_2+\frac{1}{2})\not\subset(\alpha, \beta)$, 如此继续得一数列$\{x_n\}$，$x_n\in[a, b]-\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$，对任意的$(\alpha, \beta)\in H$，都有$(x_n-\frac{1}{n}, x_n+\frac{1}{n})\not\subset(\alpha, \beta)$

② 显然数集$\{x_n\}$是有界无限点集；

③ 由聚点定理，数列$\{x_n\}$有聚点ζ；

④ 由$\{x_n\}\subset[a, b]$，得$\zeta\in[a, b]$, 故存在一个开区间$(\alpha_1, \beta_1)\in H$，使$\zeta\in(\alpha_1, \beta_1)$ 令$\delta_1=\min\{\zeta-\alpha_1, \beta_1-\zeta\}$，则存在自然数N， 使$N>\frac{2}{\delta_1}$，$x_N\in(\zeta-\frac{\delta_1}{2}, \zeta+\frac{\delta_1}{2})$ 从而，$(\zeta-\frac{1}{N}, \zeta+\frac{1}{N})\subset(\alpha_1, \beta_1)$ 矛盾

现在，我们取$n=[\frac{b-a}{\delta_1}]+1$， $x_i=a+\frac{2i+1}{2n}(b-a)$， $i=0, 1, 2, \cdots$

设$(x_i-\delta, x_i+\delta)\subset(a_i, b_i)\in H$，$i=0, 1, 2, \cdots$ 则

$\bigcup_{i=0}^{n-1}(a_i, b_i)\supset\bigcup_{i=0}^{n-1}(x_i-\delta, x_i+\delta)\supset[a, b]$，

因此所需结论成立

25. 聚点定理证明Cauchy收敛准则

证明：设$\{x_n\}$是一Cauchy列，则知$\{x_n\}$是有界的 若$\{x_n\}$中只有有限多个项不相

同，那么必有一项譬如x_{n_0}出现无限多次，这时就得到$\{x_n\}$的一个收敛子列$\{x_{n_k}\}$。又因为$\{x_n\}$是Cauchy列，故对 $\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>m>N$ 时
$|x_n-x_m|<\varepsilon$
特别地，当$n>N$，$k>N$ 时由于$n_k>k>N$，从而
$|x_n-x_{n_k}|<\varepsilon$，

令$k\to\infty$，得$|x_n-x_{n_0}|\leq\varepsilon$ 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_{n_0}$

若$\{x_n\}$中有无限多项互不相同，则数集$S=\{x_n\}$是一有界无限点集，根据聚点定理，S 至少有一聚点ζ，由聚点的定义，对任意的自然数k，在$U(\zeta,\frac{1}{k})$中，必含有$\{x_n\}$的无限多项，从而在$U(\zeta,\frac{1}{k})$中可选出一项x_{n_k}且$x_{n_k}\neq\zeta$，由于k 的任意性，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=\zeta$ 同上可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\zeta$

六. Cauchy收敛准则

26. **Cauchy收敛准则**证明**确界原理**

证：设S 为非空有上界数集. 由实数的阿基米德性, 对任何正数α, 存在整数K_α, 使得$\lambda_\alpha=k_\alpha\alpha$为S 的上界, 而$\lambda_\alpha-\alpha=(k_\alpha-1)\alpha$不是S 的上界, 即存在$\alpha'\in S$, 使得$\alpha'>(k_\alpha-1)\alpha$.

分别取$\alpha=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$, 则对每一个正整数n, 存在相应的λ_n, 使得λ_n为S 的上界, 而

$\lambda_n-\frac{1}{n}$ 不是S 的上界, 故存在$a'\in S$, 使得$a'>\lambda_n-\frac{1}{n}$

又对正整数m，λ_m是S 的上界, 故有$\lambda_m\geqslant a'$. 结合(6)式得$\lambda_n-\lambda_m<\frac{1}{n}$;

同理有$\lambda_m-\lambda_n<\frac{1}{m}$

. 从而得

$|\lambda_m-\lambda_n|<\max(\frac{1}{n},\frac{1}{m})$,

于是, 对任给的$\varepsilon>0$, 存在$N>0$, 使得当m, $n>N$ 时有
$|\lambda_m-\lambda_n|<\varepsilon$.
由柯西收敛准则, 数列$\{\lambda_n\}$收敛. 记

$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$. (1)

现在证明λ就是S 的上确界. 首先, 对任何$a\in S$ 和正整数n 有$a\leqslant\lambda_n$, 由

(1)式得$a\leqslant\lambda$, 即λ是S 的一个上界. 其次, 对任何$\delta>0$, 由$\frac{1}{n}\to0$ $(n\to\infty)$及

(1)式, 对充分大的n 同时有

$\frac{1}{n}<\frac{\delta}{2}$, $\lambda_n>\lambda-\frac{\delta}{2}$.

又因 $\lambda_n - \frac{1}{n}$ 不是S 的上界, 故存在a′ ∈ S, 使得a′ > $\lambda_n - \frac{1}{n}$

. 结合上式得a′ > $\lambda - \delta > \lambda - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = \lambda - \delta$.

这说明λ为S 的上确界. 同理可证: 若S 为非空有下界数集, 则必存在下确界.

27. Cauchy收敛准则证明单调有界定理

证 不妨设 $\{x_n\}$ 为单增有上界数列。假设 $\{x_n\}$ 无极限，Cauchy 收敛准则可知，

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists m > n > N$，但是 $x_n > x_m + \varepsilon_0$。由 N 的任意性，不难得到 $\{x_n\}$ 的一

个严格单增的子列 $\{x_{n_k}\}$，满足 $x_{n_{k+1}} > x_{n_k} + \varepsilon_0 > x_{n_{k-1}} + 2\varepsilon_0 > \cdots > x_{n_1} + k\varepsilon_0$。

由于 $\varepsilon_0 > 0, k > 0$， 所以当 $k \to \infty$ 时，有 $x_{n_{k+1}} \longrightarrow +\infty$。 这与 $\{x_n\}$ 为有界数列

矛盾， 故 $\{x_n\}$ 收敛

28. Cauchy收敛准则证明区间套定理

证 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是 Cantor 区间套。则由 $b_n - a_n \to 0, (n \to \infty$ 可知， $\forall \varepsilon > 0,$

$\exists N > 0, \ni n > N$ 时，有 $|a_n - b_n| < \varepsilon$。

由于 $\{a_n\}$ 单调递增， $\{b_n\}$ 中的每一个元素都为 $\{a_n\}$ 的上界。

故 $\forall m > n > N$，则有。$a_n \le a_m \le b_m \le b_n$

所以 $|a_m - a_n| = a_m - a_n \le b_n - a_n = |a_n - b_n| < \varepsilon$

$|b_m - b_n| = b_n - b_m \le b_n - a_n = |a_n - b_n| < \varepsilon$

故由 Cauchy 收敛准则可知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r$

下证 $r \in [a_n, b_n]$,用反证法

若 $\exists N_1$,使 $r < a_{N_1}$,由 $\{a_n\}$ 单调递增知 $n > N_1$ 时 $a_n > a_{N_1} > r$

所以 $|a_n - r| = a_n - r \ge 0$, 两边取极限有 $0 \le \lim_{n\to\infty}(a_n - r) < 0$,矛盾

同理 若 $\exists N_2$,使 $r > a_{N_2}$,由 $\{b_n\}$ 单调递减知 $n > N_2$ 时 $r > b_n > b_{N_2}$

所以 $|b_n - r| = r - b_n \ge 0$, 两边取极限有 $0 \le \lim_{n\to\infty}(r - b_n) < 0$，矛盾

故 $r \in [a_n, b_n]$,

最后证明满足r是唯一的. 设数r′ 也满足

$a_n \leqslant r' \leqslant b_n$, n = 1, 2, ⋯,　　(1)

因为 $a_n \leqslant r \leqslant b_n$, n = 1, 2, ⋯,　　(2)

则由 (1) (2)式有

$|r - r'| \leqslant b_n - a_n$, n = 1, 2, ⋯.

由区间套的条件得

$$|r - r'| \le \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

故有$r' = r$.唯一性即证。

29. Cauchy收敛准则证明有限覆盖定理

即闭区间［a，b］的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖

证① 在［a，b］上选取一数列{x_n}，使得（$x_n-\frac{1}{n}$，$x_n+\frac{1}{n}$）∩［a，b］具有与性质p：闭区间［a，b］能被H中有限个开区间覆盖，

相反的性质p^{-1}：闭区间［a，b］不能被H 中有限个开区间覆盖；

若［a，b］具有性质p^{-1}，则 $x_1\in$［a，b］，使（x_1-1，x_1+1）∩［a，b］具有性质p^{-1} 否则，［a，b］具有性质p，如此继续，得一数列{x_n}，使

$$\bigcap_{k=1}^{n}\left(x_k-\frac{1}{k},\ x_k+\frac{1}{k}\right)\cap[a,\ b]$$

具有性质p^{-1}

② 因为$|x_n-x_m|\leqslant\max\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\}$

所以，数列{x_n}满足Cauchy收敛准则的条件；

③ 由Cauchy收敛准则得，$\zeta=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

④显然，$\zeta\in$［a，b］ 存在开区间（α，β）∈H，使$\zeta\in$（α，β）

又由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\zeta$，存在$x_N$，使（$x_N-\frac{1}{N}$，$x_N+\frac{1}{N}$）⊂（α，β） 这与

($x_N-\frac{1}{N}$，$x_N+\frac{1}{N}$)具有性质p^{-1}矛盾。

30. Cauchy收敛准则证明聚点定理

即任一非空有界无限点集S 必有聚点

证:① 取a为S的下界，对任意固定的自然数n，存在自然数k_n，使$x_n=a+\frac{k_n}{n}$ 满足

1）S ∩（x_n，+∞）至多为有限点集；2）S ∩($x_n-\frac{1}{n}$，+∞）为无限点集

② 由①对任意自然数n、m，$x_n-\frac{1}{n}<x_m$，这是因为，若存在n、m 使$x_n-\frac{1}{n}\geqslant x_m$，

则 S ∩（$x_n-\frac{1}{n}$，+∞）⊂ S ∩（x_m，+∞），

这与1）、2）矛盾 从而

$|x_n-x_m|\leqslant\max\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\}$因此{$x_n$}满足Cauchy收敛准则；

③ 由Cauchy收敛准则得，$\zeta=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

④ 对 $\varepsilon > 0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \frac{1}{n}) = \zeta$，所以存在 n_0 使得

x_{n_0}，$x_{n_0} - \dfrac{1}{n_0} \in (\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$，

从而

$S \cap (x_{n_0} - \dfrac{1}{n_0}, +\infty) \subset S \cap (\zeta - \varepsilon, +\infty)$，

由 2）得 $S \cap (\zeta - \varepsilon, +\infty)$ 是无限点集

又 $S \cap (\zeta + \varepsilon, +\infty) \subset S \cap (x_{n_0}, +\infty)$，

由 1）得 $S \cap (\zeta + \varepsilon, +\infty)$ 至多是有限点集 因此

$S \cap (\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$，

是无限点集，即 ζ 是 S 的聚点

到此，实数完备性基本定理的相互证明完毕

	单调有界定理	确界定理	区间套定理	有限覆盖定理	聚点定理	柯西收敛定理
单调有界定理		√	√	√	√	√
确界定理	√		√	√	√	√
区间套定理	√	√		√	√	√
有限覆盖定理	√	√	√		√	√
聚点定理	√	√	√	√		√
柯西收敛定理	√	√	√	√	√	

数学分析(A1), 第15次课

任广斌(中国科大)

2020-10-28

课程内容安排

- 微积分
  - 单变量微分学
    - 导数 ($Ch3$) 8讲
    - 导数的应用(Taylor) ($Ch4$) 4讲
  - 单变量积分学
    - 不定积分 ($Ch5$) 4讲
    - 定积分 ($Ch6$) 10讲
    - 积分的应用 ($Ch7$) 5讲

微积分城市地图

- 导数和积分是一对互逆运算, 是微积分的主要矛盾.
- 导数和积分犹如硬币的两面, 地位等价.
- 导数和积分是由极限派生出的一种运算, 导数是差商的极限, 积分是和式的极限.
- 导数的重要性在于导数是变化率, 是描述变化的世界的最重要手段. 积分的重要性在于积分是集腋成裘的方法, 通过微元法积分可处理非规则情形.
- 极限=级数=离散测度的积分. 极限、导数、积分的地位等价.

本次课主要内容

- 导数的定义
- 复合函数导数的链式法则

连续	连绵不断	C^0	局部常值	Taylor展开到零次项
可导	光滑	弱C^1	以直代曲	Taylor展开到1次项

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad (x \to x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0)$$

假设$f:(x_0-\delta,x_0+\delta)\longrightarrow\mathbb{R}$.

f在x_0处可导(可微) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0)$ 存在有限.

导数记号

$$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = y'(x_0).$$

注意 $\quad f'(x_0) \neq (f(x_0))'.$

- 导数=变化率　　(描述变化的天然手段)

自变量	$x_0 \longrightarrow x_0 + h$	
函数值	$f(x_0) \longrightarrow f(x_0 + h)$	
平均变化率	$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$	(四则运算)
瞬时变化率	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$	(极限运算)

导数极限观点

导数 $\xlongequal{\text{极限观点}}$ $\frac{0}{0}$型极限 $\xlongequal{\qquad}$ 差商极限

两个独立变量

流形	切丛
曲线	切线
曲线变量x_0	切线变量 h
曲线方程$y = f(x)$	切线方程 $y = f(x_0) + f'(x_0)h$

- 单变量微积分需要多变量(x_0, h)帮助.

导数是放大率

$$\text{区间}[x_0, x_0+h]\text{端点} \xrightarrow{\quad f \quad} \text{区间}[f(x_0), f(x_0+h)]\ \text{端点}$$

$$\text{区间长度}h \xrightarrow[f'(x_0)]{\text{放大率}} \text{区间长度}f(x_0+h)-f(x_0) \doteq f'(x_0)h$$

- 导数是切线斜率: α是切线和实轴夹角.

$$f'(x_0) = \tan\alpha$$

- 割线方程:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0+\epsilon) - f(x_0)}{\epsilon}(x - x_0)$$

- 切线方程:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

导数物理意义

- 距离(位移)函数关于时间变量的导数是瞬时速度

平均速度 $$\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$$

瞬时速度 $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}=S'(t_0)$$

- 利用左右极限刻画导数

$$f'(x_0)\text{存在} \Longleftrightarrow f'_{\pm}(x_0)\text{存在且相等}$$

  - 右导数

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

  - 左导数

-

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

可导是局部概念

f在开区间(a,b)上可导 $\Longleftrightarrow$ f 在(a,b)每一点可导.

连续性、可导性是局部概念, 可积性是整体概念

可导 : 可积 $=\!=\!=\!=$ 局部 : 整体

$$f\text{在区间}\mathrm{I}\text{上可导} \xLeftrightarrow{\text{例如}\mathrm{I}=[a,b]} f\ \text{在}\mathring{\mathrm{I}}\text{可导, 在端点单侧可导}$$

导函数

$$\text{函数}f \xrightarrow{\text{求导}} \text{导函数}f'$$

$$\underbrace{\overbrace{f'}^{\text{与}f\text{ 相关}}}_{\text{导函数}}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

例题

- 圆面积的导数=周长

$$\pi(r+\Delta r)^2 = \pi r^2 + 2\pi r\Delta r + o(\Delta r), \quad \Delta \to 0.$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta r} \doteq 2\pi r$$

- 球体积的导数=表面积

可导必连续

连续	$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad (x \to x_0)$
可导	$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\lvert x - x_0 \rvert) \quad (x \to x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = 0.$$

- 函数光滑$\Longleftrightarrow f \in C^1$
- 函数可导$\Longleftrightarrow f$的导数存在且有限
- 函数图形光滑≠函数光滑.

反例: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

该函数图形光滑, 但是函数非光滑, 在0点处切线是y轴, $f'(0) = \infty$.

- 假设函数连续. 则函数图形光滑=函数图形无尖点.

例子: $f(x) = \sqrt{x^2}$ 以0为尖点.

$$f\text{在}x_0\text{处可导}, g\text{在}y_0 := f(x_0)\text{处可导},$$

$$\Longrightarrow \quad g\circ f\text{在}x_0\text{处可导},$$

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

- 函数f在x_0附近先放大$f'(x_0)$倍,
- 其次函数g在y_0附近再放大$g'(y_0)$倍.
- 函数f和函数g连续作用, 在x_0附近放大倍数

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$$

$$z = g(y), \quad y = f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{y_0} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$$

- 去除极限外衣:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

变量： $z = g(y), \quad y = f(x), \quad z_0 = g(y_0), \quad y_0 = f(x_0)$

(绝对)改变量： $\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0 \quad \Delta z = z - z_0$

多重复合链式法则

$$y = h(u), \quad u = g(v), \quad v = f(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

见到方程就求导

$$F(x) = g(f(x)) \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

- $G(y)$在y_0处连续:

$$G(y) := \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y_0) & y = y_0. \end{cases}$$

- 恒等式:

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = G(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} G(f(x)) = G(y_0) = g'(f(x_0)).$$

$$f \in C[a,b] \nearrow \text{在} x_0 \in (a,b) \text{可导,}$$

$$\Longrightarrow \quad f^{-1} \text{在} y_0 = f(x_0) \text{可导当且仅当} f'(x_0) \neq 0.$$

$$\text{当} f'(x_0) \neq 0 \text{时,} \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

反函数求导

- 反函数导数公式:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}},\qquad x'(y)=\frac{1}{y'(x)}.$$

- 反函数导数几何意义:

$$y=f(x)\xRightarrow{x,y\text{地位相同}}x=f^{-1}(y)$$

$$f'(x_0)=\tan\alpha,\quad (f^{-1})'(y_0)=\tan\beta,\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

反函数求导的证明

必要性:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\Longrightarrow \qquad (f^{-1})'(f(x_0))\, f'(x_0) = 1, \quad f'(x_0) \neq 0$$

充分性:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \xlongequal[f\text{ 连续}]{x = f^{-1}(y)} \lim_{y\to y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

求导的四则运算

f, g在x可导, 则f和g的四则运算在x可导 (除:$g(x) \neq 0$)

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x) \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

降级运算

$$F(x) = f(x)g(x) \Longrightarrow \ln|F(x)| = \ln|f(x)| + \ln|g(x)|$$

$$\Longrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow \ln|F(x)| = \ln|f(x)| - \ln|g(x)|$$

$$\Longrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}$$

除法化为乘法

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$y=\ln x \Longrightarrow x=e^y \Longrightarrow 1=e^y y' \Longrightarrow y'=\frac{1}{x}$$

$$y=x^\mu \Longrightarrow y=e^{\mu\ln x} \Longrightarrow y'=e^{\mu\ln x}\mu\frac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}$$

(1) $(c)' = 0$

(2) $(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(3) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$

(4) $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x, \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad (\mathrm{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

第15次做业: [3.1] 5, 6, 10,

[3.2] 1 (12-30偶数题), 7

[3.2] 问题 1, 3

数学分析(A1), 第16次课

任广斌(中国科大)

2020-10-30

本次课主要内容

- 高阶导数(§3)
- Fermat定理(§4)
- 微分中值定理 (Rolle, Langrange, Cauchy)

$$f(x) \xrightarrow{\text{求导}} f'(x) \xrightarrow{\text{求导}} f''(x) \xrightarrow{\text{求导}} \cdots \longrightarrow f^{(n)}(x) \longrightarrow \cdots$$

$$f^{(n)}(x_0)\exists \Longleftrightarrow \begin{cases} f^{(n-1)}(x)\text{在}x_0\text{某领域有定义} \\ f^{(n-1)}(x)\text{在}x_0\text{处可导.} \end{cases}$$

Taylor展开:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

一阶导数	二阶导数
斜率	曲率
速度	加速度

$\widetilde{R}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, *周期为1的函数.* $\quad \forall\ x\in[0,1)$,

$$\widetilde{R}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}x & x=\dfrac{p}{q},\quad (p,q)=1,\quad p,q\in\mathbb{N}\\ 0 & x=0\text{或无理数}\end{cases}$$

$\widetilde{R}(x)$在$x=0$可导, 在其它点不可导.

高阶导数线性性

$$(\lambda f+\mu g)^{(n)}(x) \xlongequal[\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}]{f^{(n)},\ g^{(n)}\exists} \lambda f^{(n)}+\mu g^{(n)}.$$

$$(f\,g)^{(n)}(x) \xlongequal{f,g\in C^\infty(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

$$(f\,g)^{(n)}(x) \xlongequal{f,g\in C^\infty(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{n} C(n,k) f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

取$f(x)=x^{n-k}$, $g(x)=x^k$.

等式在$x=0$处取值，则 $n! = c(n,k)(n-k)!k!$

假设 $f,g\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, *则*

$$(g\circ f)^{(n)}=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k\\ 1k_1+2k_2\cdots+nk_n=n}}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}g^{(k)}(f(x))\overbrace{\underbrace{\left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n}}_{f\text{导数的总阶数}=n}}^{\substack{f,g\text{导数的总阶数}=k\\ f\text{各阶导数地位相同时}}}$$

注记: $1k_1+2k_2\cdots+nk_n=n\neq 0\Longrightarrow k_i$不全为零 $\Longrightarrow k\neq 0$

二项式展开定理

$$(x_1+\cdots+x_n)^k=\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$$

$$(x_1+\cdots+x_n)^k=\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}C_{k_1\cdots k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1^{k_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n^{k_n}}\Big|_{x_1=\cdots=x_n=0}$$ 作用得 $$k!=C_{k_1\cdots k_n}k_1!\cdots k_n!.$$

Faà di Bruno公式的证明

$$(g\circ f)^{(n)}(x) = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k\\ 1k_1+2k_2\cdots+nk_n=n}} c(n,k_1,\cdots,k_n)g^{(k)}(f(x))\left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n}$$

取$g(y)=y^k,\quad f(x)=a_1x+\cdots+a_nx^n$

$$g\circ f(x)=(a_1x+\cdots+a_nx^n)^k=\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}x^{1k_1+2k_2\cdots+nk_n}a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n},$$

两种方法计算$g\circ f^{(n)}(0)$:

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k\\ 1k_1+2k_2\cdots+nk_n=n}}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}n!a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k\\ 1k_1+2k_2\cdots+nk_n=n}}c(n,k_1,\cdots,k_n)k!a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}$$

例题

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

$$\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^{(n)} \xlongequal{\text{拆项法}} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}$$

假设f在x_0的一个领域有定义.

x_0是f的极大值点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(x) \leqslant f(x_0)$ 在x_0的某领域成立.

x_0是f的严格极大值点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(x) < f(x_0)$ 在x_0的某去心领域成立.

$$f(x) = \overbrace{c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots +}^{\text{先求导: 杀掉低阶项}} \underbrace{c_n(x-x_0)^n}_{\text{幸存项}} + \overbrace{\cdots\cdots}^{\text{再令}x=x_0\text{: 杀掉高阶项}}$$

$$\Longrightarrow f^{(n)}(x_0) = n!c_n \Longrightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

- Taylor展开的精髓:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{不可数信息}} \underset{\text{Taylor展开}}{\overset{\text{系数公式}}{\rightleftarrows}} \underbrace{\{c_0, c_1, \ldots, c_n, \cdots\}}_{\text{可数信息}}$$

- Taylor展开是函数的原子分解.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{函数的原子}}.$$

Fermat定理

$$f\text{在}x_0\text{处取到极值},\ f\text{在}x_0\text{处可导} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$

证明: $f'_+(x_0)f'_-(x_0) \leqslant 0, \qquad f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$$\Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

- f的驻点$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$导数为零的点.
- f的极值点$x_0 \xRightarrow{\text{假设}x_0\text{是}f\text{的可导点}} x_0$是$f$的驻点
- 极值点可以不是可导点

$$f(x) = |x|, \qquad \text{在}x = 0\text{取极小值点}.$$

Rolle定理

$$f \in C[a,b],\ \text{在}(a,b)\text{可导},\ f(a) = f(b)$$

$$\Longrightarrow \qquad \exists\, \xi \in (a,b): \quad f'(\xi) = 0.$$

- 口诀:

$$\text{函数}f\text{的两个零点} \xrightarrow{\text{提供}} \text{导函数}f'\text{的一个零点}$$

- 根源:

$$\underbrace{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}_{\text{平均变换率}} = \underbrace{f'(\xi)}_{\text{瞬时变化率}}$$

- 边界点性质决定内部性质:

边值问题	零点问题
函数f	导函数f'

- 有了导数以后，方程视为变分方程:

$$\text{变分方程} \Longleftrightarrow \text{极值问题}$$

- 变分方程的边值问题有解:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(a) = f(b) \end{cases}$$

Rolle定理注记

- ξ不唯一:

  具体位置不明, ξ称为中值

- 三要素:

$x\chi_{[0,1)}(x)$	$x \in [0,1]$
$\lvert x \rvert$	$x \in [-1,1]$
x	$x \in [0,1]$

Rolle定理的证明

证明： f的最大值和最小值点必有一个在内点达到

$$\xrightarrow[\text{Fermat定理}]{\text{该点记为}\xi} \quad f'(\xi) = 0.$$

Lagrange定理

$$f \in C[a,b], 在(a,b)可导$$

$$\Longrightarrow \qquad \exists\, \xi \in (a,b): \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注记

- 带Lagrange余项的零阶Taylor展开:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

- 利用导数估计函数:

$$f \in C(a,b) \xrightarrow{f'\text{在}(a,b)\text{有界}} \begin{array}{l} f\text{在}(a,b)\text{Lipschitz} \\ f\text{在}(a,b)\text{一致连续} \end{array}$$

平均速度在某一时刻达到 $=\!=\!=\!=$ 瞬时速度

经平移旋转，函数图形端点位于实轴上

曲线 $\xrightarrow{\text{平移+旋转}}$ 曲线–割线

$f(x)$ $\qquad$ $f(x)-\left(f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$

图形端点位于实轴上

$$f, g \in C[a,b], \text{在}(a,b)\text{可导}, \quad g' \text{在}(a,b)\text{恒不为零}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \xi \in (a,b): \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Cauchy定理几何意义

- 曲线在$t=\xi$处切线斜率

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \xRightarrow{\text{链式法则}} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\xi} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=\xi} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

- 曲线的割线斜率:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Cauchy定理的变分方程形式

$$\left((f(x)-f(a))-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right)'=0$$

$$Cauchy \xRightarrow{g(x)=x} Lagrange \xRightarrow{f(a)=f(b)} Rolle \xRightarrow{\text{变分方程}} Cauchy.$$

中值定理建立函数f及其导数f'的联系, 十分重要有用的联系.

$$f, g \in C[a,b], \quad 在(a,b)可导, \quad f(a) = f(b) = 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b): \quad f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$$

证明: 变分方程:

$$\left(f(x)e^{g(x)}\right)'\Big|_{x=\xi} = 0$$

凑微分

$$f'(x) + f(x)g'(x) \xRightarrow[\text{乘以}e^{g(x)}]{\text{凑成一个函数的导数}} (f(x)e^{g(x)})'$$

推导过程:

$$u(x)(f'(x) + f(x)g'(x)) = (f(x)u(x))'$$

$$\Longrightarrow \quad u'(x) = u(x)g'(x)$$

$$\xRightarrow{\text{取}} \quad u(x) = e^{g(x)}$$

作业

第16次做业: [3.3] 5, 问题 6, 7, 8

[3.4] 2, 3, 5

数学分析(A1), 第17次课

任广斌(中国科大)

2020-11-02

本次课主要内容

- 无穷区间上中值定理
- Darboux中值定理

中值定理的作用

- 中值定理建立函数及其导数的联系和信息传递

- 中值定理给出初等函数与多项式函数的误差估计

无穷区间上Rolle定理

$$f\text{在}(a,b)\text{可导}, \quad f(a^+) = f(b^-) = A$$

$$\xRightarrow{a,b,A \in [-\infty,+\infty]} \quad \exists\,\xi \in (a,b): \quad f'(\xi) = 0.$$

无穷区间上Rolle定理

- Rolle定理在扩充实轴成立:
- 无穷区间上Rolle定理的条件:

$$\text{在边界点处具有相同极限值} \xrightarrow{\text{提供}} \text{导函数的一个零点}$$

- 双射

$$
\begin{aligned}
C[-\infty,+\infty] &\longrightarrow C[a,b]\\
f &\longmapsto f\circ\tau^{-1}
\end{aligned}
$$

$$f=(f\circ\tau^{-1})\circ\tau.$$

- 双射(初等函数)

$$\tau:[-\infty,+\infty]\longrightarrow[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]\longrightarrow[a,b]$$

$$\tau(x)=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\pi}\arctan x.$$

- 无穷区间上的Rolle定理的证明:

令$g = f \circ \tau^{-1}$，　则$f = g \circ \tau$.

$$f'(\xi) \xlongequal[\xi=\tau^{-1}(\eta)]{\eta=\tau(\xi)} g'(\eta)\frac{b-a}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2}.$$

- 思考题:　$[0, +\infty)$情形?

证明

- 通过缩小(a,b), 可不妨设$A \in \mathbb{R}$.

$$A = +\infty \xRightarrow[M:=1+f(x_0)]{\text{取定}x_0\in(a,b)} \exists c_1 \in (a, x_0): \quad f(c_1) > M$$

$$\xRightarrow{\text{介值定理}} \exists c \in (c_1, x_0): \quad f(c) = M$$

$$\xRightarrow{\text{同理}} \exists d \in (x_0, d): \quad f(d) = M$$

$A = -\infty$情形类似

证明续

- 再次通过缩小(a,b), 可不妨设$a, b \in \mathbb{R}$.

  - 可不妨设f不恒为常数A.

  - $\exists x_0 \in (a,b)$: $\quad f(x_0 \neq A$. 不妨设$f(x_0) < A$.

  - 令$M = \dfrac{A + f(x_0)}{2} \Longrightarrow M < A$.

$$A = f(a^-) \Longrightarrow \exists c_1 \in (a, x_0): \quad f(c_1) > M$$

$$\xRightarrow{\text{介值定理}} \exists c \in (c_1, x_0): \quad f(c) = M$$

$$\xRightarrow{\text{同理}} \exists d \in (x_0, d): \quad f(d) = M.$$

无穷区间上Cauchy中值定理

f, g, h在(a, b)可导，在端点处单侧极限存在有限，$a, b \in [-\infty, +\infty]$

$\Longrightarrow \exists\, \xi \in (a, b)$:

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

- 变分方程

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix} = 0$$

中值定理统一

h=1			Cauchy中值定理
h=1	$g(x) = x$		Lagrange中值定理
h=1	$g(x) = x$	f(a)=f(b)	Rolle中值定理

反例

- 不是任意瞬时速度都是平均速度

$$f(x) = x^3, \qquad \forall\, x \in [-1, 1].$$

$$\text{不存在} x_1 < 0 < x_2, \qquad s.t. \quad f'(0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Darboux 定理:

$$
\begin{aligned}
& f\text{在}[a,b]\text{可导}, \\
\Longrightarrow\quad & f'\text{可取到}f'(a)\text{与}f'(b)\text{之间一切值}. \\
& f'\text{无第一类间断点}.
\end{aligned}
$$

Darboux 定理: 导函数值域连通

证明

不妨设$f'(a) < f'(b)$　　(否则$-f$用f代替)

$$\forall\, \gamma \in (f'(a), f'(b))$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \in (F'(a), F'(b)), \qquad (F(x) := f(x) - \gamma x)$$

$\Longrightarrow$　F最小值在内点ξ达到

$$\Longrightarrow \quad \gamma = f'(\xi)$$

证明(续)

令$G=f'$, x_0是G的第一类间断点$\xrightarrow{f在[a,b]可导}$ x_0是G的连续点.

$$
\begin{aligned}
G(x_0)=f'(x_0) &\xlongequal{取x_n\xrightarrow{>}x_0} \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\\
&\xlongequal{\xi_n\in(x_0,x_n)} \lim_{n\to\infty} f'(\xi_n)\\
&\xlongequal[第一类间断]{\xi_n\xrightarrow{>}x_0} \lim_{x\to x_0^+} f'(x)\\
&\xlongequal{\quad} f'(x_0^+)=G(x_0^+)
\end{aligned}
$$

故G在x_0右连续, 同理左连续.

例题

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \qquad f\text{可导}, \quad f \in C(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$$

证明

- f'仅有的间断点$x=0$是第二类间断点.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2},\quad x\neq 0$$

- $f'(0)\neq\lim_{x\to 0}f'(x)$.

导函数可去奇点定理

假设f在$(a-\delta, a+\delta)$连续, 在$(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$可导, 则

a是f'的可去间断点$\Longleftrightarrow a$是f'的连续点

证明

$$f'(a) \xlongequal{\qquad\qquad} \lim_{s\to a}\frac{f(s)-f(a)}{s-a}$$

$$\xlongequal{\text{中值定理}} \lim_{x\to a} f'(x)$$

结论: f在a点处可导, 而且f'在a点处连续.

导数的计算方法(利用中值定理)

- 若f是R上连续函数，而且导函数在a点处极限$\lim_{x\to a} f'(x)$存在而且有限，则

$$f\text{在}a\text{点处导数=导数的极限} = \lim_{x\to a} f'(x).$$

例题

$$f(x) \xlongequal{a>b>0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} \in C[-\infty,+\infty].$$

$$f'(0) \xlongequal{\qquad\qquad\qquad} \lim_{s\to 0}\frac{f(s)-f(0)}{s}$$

$$\xlongequal{\text{中值定理}} \lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{8}\sqrt{ab}(\ln\frac{a}{b})^2$$

微积分基本定理的推论，也是中值定理的推论

- 微积分基本定理

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$$

- 推论

$$f' = 0 \quad \xLeftrightarrow{f\text{在}(a,b)\text{可导}} \quad f \equiv c.$$

$$f' = g' \quad \xLeftrightarrow{f,g\text{在}(a,b)\text{可导}} \quad f \equiv g + c.$$

$$\text{在非连通开集上} \quad f' = 0 \quad \xLeftrightarrow{f\ \text{可导}} \quad f\text{局部是常数}$$

有界区间上, 函数和导数有界性关系

- 在有界区间上:

$$\text{导函数有界} \xrightarrow{Lagrange} \text{函数一致连续}$$

$$\Longrightarrow \text{函数可扩充为闭区间一致连续}$$

$$\Longrightarrow \text{函数有界}$$

函数和导数有界性关系

- $$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \xLongrightarrow{f\ 在\mathbb{R}上可导} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$$
  $$\centernot\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

- f' 在 $+\infty$ 附近有界 $\xLongrightarrow{f\ 在\mathbb{R}\ 可导}$ $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $+\infty$ 附近有界

- f'在有限区间(a,b)有界$\xLongrightarrow{f\ 在(a,b)可导}$ $f(x)$在(a,b)有界

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \xRightarrow{L'Hospital} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

函数和导数有界性关系(证明)

$$\lim_{x\to+\infty}|f'(x)| \xlongequal{\text{反证法}} A\in(0,+\infty]$$

$$\Longrightarrow \exists[M,+\infty):\quad |f'(x)|>\min\{\frac{A}{2},1\}$$

$$\Longrightarrow 0=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f(M)+f'(\zeta)(x-M)}{x}\right|\geqslant\min\{\frac{A}{2},1\}.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\overbrace{(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}^{\text{切线}}}{\underbrace{f(x)}_{\text{曲线}}-\underbrace{(a+b(x-x_0))}_{\text{割线}}}\;\overset{f'(x_0)\exists}{\underset{(a,b)\neq(f(x_0),f'(x_0))}{=\!=\!=\!=\!=}}\;0$$

故$\exists\,\delta>0$, $\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$，有

$$\Big|f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))\Big|<\Big|f(x)-(a+b(x-x_0))\Big|$$

曲线和切线距离 < 曲线和割线距离

例题

假设f可导, f'恒不为零, 则

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{2}\left(\ln f(x)^2\right)' = \frac{1}{2}\frac{2f(x)f'(x)}{f(x)^2} = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

作业

第17次做业：[3.4]　7,　8,　9,　10,　11,　12

数学分析(A1), 第18次课

任广斌(中国科大)

2020-11-04

本次课主要内容

- 中值定理的Taylor展开解读
- 低阶Taylor展开的应用
  - 单调性
  - 极值

学而不思则罔，　　思而不学则殆

——孔子

战略解读： 分析是极限的艺术如何落到实处?

- 工具： 极限、 导数(各级)、 积分.
- 手段： 逼近.

0次Taylor多项式	连续	C^0		
1次Taylor多项式	可导	弱C^1	单调	直线
2次Taylor多项式	光滑	C^2	凸凹	二次曲线

续

- 落到实处:　以简代繁, 以多项式代替初等函数.
- 具体实施:　初等函数是无穷次多项式
  - Taylor展开是微积分的顶峰
  - 余项估计(Peano余项、Lagrange余项，积分余项).
  - 余项需要导数和积分表达
- 方法:　仿生学

$$\mathbb{R} \quad : \quad \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{从规则到不规则}]{\text{极限过程}} \text{初等函数} \quad : \quad \text{多项式}$$

	f	f'	f''
	$+$	$+$	$+$
来自序关系	非负	$\nearrow$	凸

- 函数的正负部分解

$$f = \frac{|f| + f}{2} - \frac{|f| - f}{2} =: f^{+} - f^{-}.$$

- 一阶情形:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\overset{f'(x_0)\exists}{\Longleftrightarrow} \quad f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \overbrace{o(x - x_0)}^{\text{Peano余项}}}_{\text{Taylor展开}}$$

- 二阶情形:

$$f''(x_0) \;=\!=\!=\; \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

$$\xlongequal{L'Hospital} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{\frac{1}{2!}(x-x_0)^2}$$

$$f(x) \xlongequal{f''(x_0)\exists} \underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\overbrace{o((x-x_0)^2)}^{\text{Peano余项}}}_{\text{Taylor展开}}$$

- 零阶情形(常数变易法+Cauchy中值定理):

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \xlongequal[x\text{固定}, t\text{变量}]{f\in C[a,b],\text{内部可导}} f'(\xi)$$

$$f(x) \xlongequal{\quad\quad} \underbrace{f(x_0) + \overbrace{f'(\xi)(x-x_0)}^{\text{Lagrange余项}}}_{\text{Taylor展开}}$$

- 一阶情形(常数变易法+Cauchy中值定理):

$$\frac{f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)}{\frac{1}{2!}(x-t)^2} \xlongequal[x\text{固定}, \, t\text{变量}]{f\in C^1[a,b],\ \text{内部2阶可导}} f''(\xi)$$

$$f(x) \xlongequal{\quad\quad} \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\overbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2}^{\text{Language余项}}}_{\text{Taylor展开}}.$$

二次Taylor多项式决定函数性质：单调、凸凹、极值

$$f(x) \overset{f'(x_0)\exists}{=\!=\!=} f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$$f(x) \overset{f''(x_0)\exists}{=\!=\!=} f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$f(x) =\!=\!= f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$

$$f(x) =\!=\!= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2.$$

单调性几何意义

单调增加 $\Longleftrightarrow$ 自变量增加时, 曲线上行

Theorem

$f \in C[a,b]$, 内部可导, 则

- f 在 $[a,b] \nearrow \Longleftrightarrow f'|_{(a,b)} \geqslant 0$
- f 在 $[a,b] \nearrow\!\!\!\!\!\nearrow \Longleftrightarrow f'|_{(a,b)} \geqslant 0$, 不在任何开区间恒为零.

$$f'\Big|_{(a,b)} > 0 \xrightarrow{f \in C[a,b]} f \text{ 在 } [a,b] \nearrow\!\!\!\!\!\nearrow, \qquad \text{反之不成立.}$$

单调导数刻画的证明

- 必要性：导数是差商极限．充分性：Lagrange 中值定理.
- 必要性： 反证法:

  假设f'在某开区间恒为零, 则f在某开区间恒为常数.

  充分性： 反证法:

  假设f单调增加但是不是严格单调增加, 则

  $$\exists x_1 < x_2 : \qquad f(x_1) = f(x_2)$$

  由于f单调增加, 故f在(x_1, x_2)为常数.与假设矛盾.

严格单调函数

Theorem

$$f \in C[a,b], \quad f'\big|_{(a,b)} > 0 \xrightarrow{Lagrange} f\text{在}[a,b]\nearrow$$

反之不成立: (例子$f(x) = x^3$)

严格单调增加的函数, 其导数可以有零点, 即切线可以是水平的.

Theorem

$$f \in C[a,b], \quad \text{除有限个例外} f' > 0 \xrightarrow{Lagrange} f\text{在}[a,b]\nearrow$$

证明: f可以剖分成有限个区间，在每个区间严格单调.

例子

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, \qquad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

证明: $f(x) = \frac{\sin x}{x} \searrow \Longrightarrow f(\frac{\pi}{2}) < f(x) < f(0), \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$

导数保号性和函数保号性关系

$f \in C[a,b]$, 内部可导, 则

$$f' > 0 \Longrightarrow \begin{cases} f > 0, & f(a) = 0 \\ \\ f < 0, & f(b) = 0 \end{cases}$$

例题

$$f'' > 0 \ \ on \ \mathbb{R} \Longrightarrow f\text{无界}$$

证明:　取$f'(a) \neq 0$,　考察在a点的支撑线:

情形1:　$x > a$.

$$(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a))' > 0 \Longrightarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0$$

情形2:　$x < a$.

$$(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a))' < 0 \Longrightarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0$$

综上所述, 曲线在支撑线上方. 因为$f'(a) \neq 0$, 故f无界.

极值

$$\text{极值点}\begin{cases}\text{单调性改变} & \text{两边单调}\\ \\ \text{导数变号} & \text{两边可导}\end{cases}$$

函数在一点性态(导数 > 0, 取极值) $\not\Rightarrow$ (单侧)单调性

点态性质⇏局部性质

- $f(x)-x$位于$\pm 2x^2$, 在$x=0$处沿着直线$y=x$震荡.

$$f(x)=x+2x^2\sin\frac{1}{x},\quad f'(0)=1$$

- 非负偶函数, 以$x=0$为极小值:

$$f(x)=|x|+x\sin\frac{1}{x},\quad f'(\frac{1}{n\pi})=1-(-1)^n n\pi$$

- 非负函数, 位于$3x^2$与x^2之间, 以$x=0$为极小值:

$$f(x)=x^2(2+\sin\frac{1}{x})$$

极值充分条件

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0\text{是}f\text{严格极小值点}$$

极值充分条件

- 导数变号:

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \text{导数在}x_0\text{处变号, 典型例子}f(x) = x^2.$$

- 函数图形与典型例子差不多相同

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

极值必要条件

$$x_0\text{是}f\text{的极小值点}, f''(x_0)\text{存在} \Longrightarrow f''(x_0) \geqslant 0$$

证明: 否则, $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$是$f$的严格极大值点

假设 $f \in C[a,b]$, $A = \left\{\text{区间端点, 驻点, 不可导点}\right\}$ 是有限集合, 则

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) =\!=\!=\!= \max_{x\in A} f(x).$$

最大值点判别法

假设 $f \in C[a,b]$, x_0*是*f*在内部* (a,b) *上唯一极值点，则*

$$x_0\text{是}f\text{在 }[a,b]\text{ 上最值点}.$$

证明

不妨设x_0是极大值点.

设c是f在 $[a,b]$ 上最大值点，$x_0 \neq c$. 不妨设$x_0 < c$.

$\Longrightarrow$ f在 $[x_0,c]$ 上最小值点在(x_0,c)达到, 与极值点唯一矛盾.

例题

假设f可导, f'恒不为零, 则

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{2}\left(\ln f(x)^2\right)' = \frac{1}{2}\frac{2f(x)f'(x)}{f(x)^2} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

例题

$$f(x) = (1+\frac{1}{x})^{x+\alpha} \begin{cases} \searrow e, & \text{当}\alpha \geqslant \frac{1}{2}, \quad x > 0 \\ \nearrow e, & \text{当}\alpha < \frac{1}{2}, \quad x \gg 1. \end{cases}$$

证明

对数求导法:　　幂函数降阶

$$f'(x)=f(x)u(x),\qquad u(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{x+\alpha}{x(x+1)}\to 0\quad (x\to+\infty).$$

$$u'(x)=\frac{(2\alpha-1)x+\alpha}{x^2(1+x)^2}\begin{cases} >0, & \text{当}\alpha\geqslant\frac{1}{2},\quad x>0\\ <0, & \text{当}\alpha<\frac{1}{2},\quad x>\frac{\alpha}{1-2\alpha}.\end{cases}$$

$$u\nearrow \xRightarrow{u(+\infty)=0} u<0 \Longrightarrow f'<0 \Longrightarrow f\searrow$$

最小二乘法(Legendre): 赋予误差的平方和为最小

- 采样数据: $x_1, x_2, \cdots x_n$.

$$
\text{平均}\begin{cases}\text{算术平均}\\ \text{几何平均}\\ \text{调和平均}\\ \text{中位数}\end{cases}
$$

- 最小平方法

$$
\bar{x} = \arg\min_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 \xlongequal{\text{求解最小值}} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.
$$

注记: 平方和的推广是L^2范数, 加权平均, 在物理上表示能量.

作业

第18次做业: [3.5] 2(偶), 3(偶), 5, 7, 15

数学分析(A1), 第19次课

任广斌(中国科大)

2020-11-09

本次课主要内容

- 凸函数

原理

- 仿生学:

$$\mathbb{R} \quad : \quad \mathbb{Q} \qquad \text{=======} \qquad \text{初等函数} \quad : \quad \text{多项式}$$

- 无穷次多项式提供了初等函数的逐次逼近.
    - 利用一次多项式代替初等函数, 决定单调性.
    - 利用二次多项式代替初等函数, 决定凸凹性.

凸函数典型例子

$$f(x) = x^2 \qquad (\text{严格凸})$$

凸函数高维推广：次调和

$n=1$	$n>1$
线性函数$f''=0$	调和函数$\Delta f=0$
凸函数$f''\geqslant 0$	次调和函数$\Delta f\geqslant 0$
凸分析	次调和分析

凸函数定义

- 凸函数: $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, 区间$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

$$f\text{凸} \Longleftrightarrow f\text{图形上方几何凸}$$

$$\Longleftrightarrow \text{割线在曲线上方}$$

$$\Longleftrightarrow f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{I}, \quad \forall t \in (0,1)$$

- f严格凸$\Longleftrightarrow$ “$<$”.
- f凹$\Longleftrightarrow -f$凸.

凸性三点判别法

$$f : \mathrm{I} \longleftrightarrow \mathbb{R}\text{凸}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \forall x_1 < x_2 < x_3,\ x_i \in \mathrm{I}:$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

(中间来自合分比不等式).

(严格凸$\Longleftrightarrow$ "$<$")

三点刻画几何意义

- 三点割线刻画$=\!=\!=\!=$斜率单调增加:

$$P_1, P_2, P_3\text{的横坐标单调增加} \Longrightarrow \text{割线斜率} k_{P_1P_2} \leqslant k_{P_1P_3} \leqslant k_{P_2P_3}$$

三点刻画几何意义(续)

- 三点割线刻画的三个不等式相互等价于三角形面积非负:

$$0 \leqslant 2S_{\Delta P_1P_2P_3}\text{有向面积} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ f(x_2) - f(x_1) & f(x_3) - f(x_1) \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_3 - x_2 \\ f(x_1) - f(x_2) & f(x_3) - f(x_2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ f(x_1) - f(x_3) & f(x_2) - f(x_3) \end{vmatrix}$$

三点刻画证明

$$f凸 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 < x_2 < x_3: \quad x_2 = (1-t)x_1 + tx_3:$$

$$f(x_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_3)$$

$$= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$$

(此为三点刻画最左边$\leqslant$最右边.)

凸性四点判别法

$$f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}\text{凸}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{I}\text{上}\forall\text{四点} : s < t \leqslant u < v :$$

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leqslant \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

(严格凸$\Longleftrightarrow$ “ $<$ ”)

凸函数的最大值原理

非常值凸函数在内点取不到最大值

$$f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}\text{凸, 在内点取到最大值}\Longrightarrow f\text{为常值}$$

证法一: 若f不是常数, 则最大值点是割线斜率符号变化的点.

这与割线斜率单调增加矛盾.

证法二: $x_0 = \arg\max_{x\in[a,b]} f(x) \in (a,b)$.

$$\text{任取}[c,d]: \qquad x_0 \in (c,d) \subset [c,d] \subset (a,b)$$

$$\Longrightarrow \qquad x_0 = tc + (1-t)d, \qquad t = \frac{d-x_0}{d-c} \in (0,1).$$

$$\Longrightarrow \qquad M = f(x_0) = f((1-t)c + td)$$

$$\leqslant (1-t)f(c) + tf(d) \leqslant tM + (1-t)M = M$$

$$\Longrightarrow \qquad f(c) = f(d) = M, \qquad f \equiv M$$

记号

- 右导数 $\quad f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

- 左导数 $\quad f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

- 右极限 $\quad f(x_0+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x).$

- 左极限 $\quad f(x_0-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x).$

支撑线判别法

$f: \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$凸 $\Longrightarrow$ $\forall x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$, 曲线在$(x_0, f(x_0))$处存在支撑线:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\}:$$

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \alpha(x - x_0).$$

(严格凸$\Longleftrightarrow$ " $<$ ")

支撑线判别法的证明

四点判别法说明割线斜率单调增加，其极限过程导出左右极限存在有限，

$$\text{左导数} \leqslant \text{右导数}.$$

$$\forall \alpha \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$$

$$\overset{\text{三线判别法}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \alpha \leqslant \frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0}, \qquad \forall\ x < x_0 < u$$

$$\overset{\text{支撑线方程}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} f(x) \geqslant f(x_0) + \alpha(x - x_0), & \forall\ x < x_0 \\ f(u) \geqslant f(x_0) + \alpha(u - x_0), & \forall\ u > x_0 \end{cases}$$

- 闭区间上凸函数的刚性:

闭区间上凸函数, 增加端点处的值保凸.

闭区间上凸函数的有界性

- 闭区间上凸函数的有界性:

$$\text{闭区间上函数凸} \Longrightarrow \text{支撑线} \leqslant \mathrm{Graph}\ f \leqslant \text{割线}$$

$$\Longrightarrow \text{函数有界}$$

开区间上凸函数必连续

证明1

开区间上凸函数 $\xRightarrow{\text{四点法则}}$ 差商局部有界

$\Longrightarrow$ 局部Lipschitz, 从而连续.

证明2

$$\text{开区间上凸函数} \xRightarrow{\text{四点法则}} \text{左右导数存在且有限}$$

$$\Longrightarrow \text{左右连续, 从而连续.}$$

紧区间上凸函数

f可扩充为$[a,b]$连续凸$\Longleftrightarrow f$在有界开区间(a,b)上有界凸.

证明

充分性:

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-}\left(f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)$$

$$= f(x_0)+A(b-x_0)$$

差商局部单调有界.

$$x\to x_0=\frac{a+b}{2},\qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\nearrow\leqslant\frac{M-f(x_0)}{\frac{b-a}{4}}.$$

凸函数可导性

$$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}\ \text{凸，则}$$

- 左右导数$f'_\pm$存在且有限$\nearrow$

$$\forall x<y \Longrightarrow f'_-(x)\leqslant f'_+(x)\leqslant f'_-(y)\leqslant f'_+(y)$$

$$(\text{严格凸}\Longrightarrow \text{中间}<\text{成立})$$

- 若右导数左连续或左导数右连续，则f可导.

证明

(1) 割线判别准则

(2) $f'_+(x) = \lim\limits_{u \to x^-} f'_+(u) \leqslant f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$

假设 $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *是可导函数, 则*

$$f\text{凸} \Longleftrightarrow f' \nearrow \Longleftrightarrow \qquad f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\forall x_0 \in \mathring{\mathrm{I}},\ \forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\}.$$

(严格凸 $\Longleftrightarrow \nearrow\!\!\!\nearrow \Longleftrightarrow$ "$>$" *)*

证明: 最左 $\xRightarrow{\text{四点刻画}}$ 中间 $\xRightarrow[\text{切线判别法}]{\text{Lagrange}}$ 最右 $\xRightarrow{\text{切线判别法}}$ 最左

C^1情形:

$$\text{支撑线} \xLeftrightarrow[\text{切线判别法}]{\alpha \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)] = \{f'(x_0)\}} \text{切线}$$

C^2凸函数

$f: \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$二次可导，则

(1) f凸 $\Longleftrightarrow f'' \geqslant 0$

(2) f严格凸 $\Longleftrightarrow f$凸，$\mathrm{Graph}\ f$不含直线段

证明

$$f'' \geqslant 0 \Longrightarrow f' \nearrow \xRightarrow{\text{支撑线判别法的证明}} \text{割线斜率} \nearrow \Longrightarrow \text{凸}$$

凸凹性与坐标系选取有关

单位圆盘上半圆周为凹, 下半圆周为凸.

作业

第19次做业: [3.5] 17, 18(偶), 21, 22, 23.

数学分析(A1), 第20次课

任广斌(中国科大)

2020-11-11

本次课主要内容

- 单调函数、凸函数的上下左右导数刻画.
- 凸函数Jensen不等式
- 曲线的密切直线和密切圆周

开区间上凸函数的弱条件：中点凸性

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}凸$$

$$\Longleftrightarrow \quad f \in C(a, b), \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall\ x_1, x_2 \in (a, b).$$

开区间上凸函数的弱条件证明

反证法: ∃连接$(a_1, f(a_1)), (a_2, f(a_2))$的割线$h(x)$, $\exists x_0 \in (a,b)$:

$$h(x_0) < f(x_0).$$

$$g := f - h \in C[a,b]$$

$$\stackrel{\text{取}}{\Longrightarrow} x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_0 < x_2 : \quad g(x_1) = g(x_2) = 0, \quad g|_{(x_1,x_2)} > 0$$

$$\Longrightarrow f(\frac{x_1+x_2}{2}) > h(\frac{x_1+x_2}{2}) = \frac{h(x_1)+h(x_2)}{2} = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

凸函数左右可导性

$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$凸, 则

- 左右导数单调增加:

$$\forall x<y\Longrightarrow -\infty<f'_-(x)\leqslant f'_+(x)\leqslant f'_-(y)\leqslant f'_+(y)<\infty$$

(严格凸 $\Longrightarrow$ 中间的严格不等式成立.)

- 若右导数左连续, 或左导数右连续, 则函数可导.

单调性和凸性的左右上下导数刻画

在连续假设下:

$$\text{单调} \iff \text{右上导数非负};$$

$$\text{凸} \iff \text{左右导数单调增加}.$$

单调性的右上导数刻画

$$f \nearrow \quad \xLeftrightarrow{f\in C(a,b)} \quad f\text{右上导数} \in [0, +\infty]$$

必要性: $f \nearrow \Longrightarrow \overline{\lim_{x\to x_0^+}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0.$

单调性的右上导数刻画(续)

充分性: $\forall\,[c,d]\subset(a,b)$, 要证$f(d)\geqslant f(c)$.

$$g(x):=f(x)-f(c)-\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)$$

$$g(c)=g(d)=0,\qquad g\text{在}[c,d]\text{最大值点}x_0\in[c,d)$$

$$\forall x>x_0\quad\Longrightarrow\quad 0\geqslant\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

$$\Longrightarrow\quad f(d)\geqslant g(c)$$

涉及两点技巧: 将两点放到实轴上

方法: 曲线-割线

Jensen不等式

$$f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}\text{凸}, \qquad \text{区间}\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

$$\forall\ x_i \in \mathrm{I}, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \cdots \lambda_n = 1.$$

$$(\text{严格凸} \Longleftrightarrow \text{“}<\text{”}\ \text{除非} x_1 = \cdots = x_n.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i + \lambda_n x_n, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{归设}} f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leqslant (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} f(x_i) + \lambda_n f(x_n).$$

几何-算术-调和平均不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}, \quad \forall\ x_i > 0$$

$$(\text{等} \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_n.)$$

几何-算术-调和平均不等式

证明: $-\ln x$ 在$(0,+\infty)$严格凸, 利用Jensen不等式:

$$-\ln\frac{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \leqslant \frac{1}{n}\left(-\ln\frac{1}{x_1}-\cdots-\ln\frac{1}{x_1}\right)\leqslant \ln\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

最后的不等式利用了$\ln x$ 在$(0,+\infty)$严格凹.

例题

$$f_n(x) = (\lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \ \lambda_i > 0,\ \ a_i > 0$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \max\{a_1, \cdots, a_n\}, & \text{最大值}, \quad x = +\infty \\ \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n, & \text{加权算术平均}, \quad x = 1 \\ a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}, & \text{加权几何平均}, \quad x = 0 \\ \left(\lambda_1 a_1^{-1} + \cdots + \lambda_n a_n^{-1}\right)^{-1}, & \text{加权调和平均}, \quad x = -1 \\ \min\{a_1, \cdots, a_n\}, & \text{最小值}, \quad x = -\infty \end{cases}$$

续

$$f_n(x) = (\lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x)^{\frac{1}{x}} \in C[-\infty, +\infty].$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{常数}, & a_1 = a_2 = \cdots = a_n \\ \\ \text{严格单调增加} & \text{其它} \end{cases}$$

Young不等式

加权几何平均 $\leqslant$ *加权算术平均*

$$a, b, p, q \geqslant 0, \quad p + q = 1 \Longrightarrow a^p b^q \leqslant pa + qb.$$

$$等 \Longleftrightarrow a = b$$

$$特例 p = q = \tfrac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

证明

- 不妨设$x > 0$.

$$s < t < 0 \quad \Longrightarrow \left(\lambda_1 a_1^s + \cdots + \lambda_n a_n^s\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\lambda_1 a_1^t + \cdots + \lambda_n a_n^t\right)^{\frac{1}{t}}$$

令 $u = -s, \quad v = -t, \quad u > v > 0, \quad b_i = \dfrac{1}{a_i},$ 上式改写为

$$u > v > 0 \quad \Longrightarrow \frac{1}{\left(\lambda_1 b_1^u + \cdots + \lambda_n b_n^u\right)^{\frac{1}{u}}} \leqslant \frac{1}{\left(\lambda_1 b_1^v + \cdots + \lambda_n b_n^v\right)^{\frac{1}{v}}}$$

证明

- 不妨设$x \geqslant 1$， 而且只要证明 $x > 1 \Longrightarrow f(x) > f(1).$

$$u > v > 0 \Longrightarrow \left(\lambda_1 b_1^u + \cdots + \lambda_n b_n^u\right)^{\frac{1}{u}} \geqslant \left(\lambda_1 b_1^v + \cdots + \lambda_n b_n^v\right)^{\frac{1}{v}}$$

令 $x = \frac{u}{v}$, $a_i = b_i^v$, 上式改写为

$$x > 1 \Longrightarrow \left(\lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x\right)^{\frac{1}{x}} > \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$

证明续

- 下面证明: $x > 1 \Longrightarrow f(x) > f(1)$

$$f(x) > f(1) \iff (\lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x)^{\frac{1}{x}} \geqslant \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$

$$\iff \lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x \geqslant (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)^x$$

$g(u) = u^x$是严格凸函数, 其中$x > 1$, $u \in (0, +\infty)$.

上式是g的Jensen不等式

$f \in C[a,b]$, g在$[a,b]$可导, $\lambda(x)$具有正下界. 则

$$\begin{cases} \left| \left(\lambda(x) \dfrac{d}{dx} + f(x) \right) g(x) \right| \leqslant |g(x)|, & \forall x \in [a,b] \\ \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad g \equiv 0$$

- 初值问题存在唯一解:

$$\begin{cases} \left(\lambda(x)\frac{d}{dx} + f(x)\right)g(x) = 0, & \forall x \in [a,b] \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad g \equiv 0$$

Bellman不等式的证明

反证法: $\exists\, d \in (a,b)$: $g(d) \neq 0$. 取$[a,d]$中g的零点的最大值:

$$c := \max\{x \in [a,d] : g(x) = 0\}$$

$\Longrightarrow$ $c < d$, $g|_{(c,d)}$ 没有零点, $g(c) = 0$.

$\xRightarrow{h(x):=\ln|g(x)|}$ $|f(x) + \lambda(x)h'(x)| \leqslant 1, \quad \forall x \in (c,d)$

$\Longrightarrow$ $h'(x)$在(c,d)有界

$\Longrightarrow$ $h(x)$在有界区间(c,d)有界, 与$h(c) = \infty$矛盾.

曲线与切线关系最紧密

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\overbrace{(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}^{\text{切线}}}{\underbrace{f(x)}_{\text{曲线}}-\underbrace{(a+b(x-x_0))}_{\text{割线}}}\xlongequal[(a,b)\neq(f(x_0),f'(x_0))]{f'(x_0)\exists}0$$

故$\exists\,\delta>0$，$\forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$，有

$$\Big|f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))\Big|<\Big|f(x)-(a+b(x-x_0))\Big|$$

曲线和切线距离 $<$ 曲线和割线距离

曲率

- 曲线$y=f(x)$, 曲率圆$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
- 曲线与曲率圆在交点(x_0,y_0)具有相同的2阶Taylor多项式.

$$y_0=f(x_0),\qquad y_0'=f'(x_0),\qquad y_0''=f''(x_0).$$

- 曲率$=\dfrac{1}{R}=\dfrac{|y_0''|}{(1+(y_0')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

- 曲率圆方程

$$\begin{cases} (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2 \\ (x_0 - a) + (y_0 - b)y_0' = 0 \\ 1 + (y_0')^2 + (y_0 - b)y_0'' = 0 \end{cases}$$

曲率圆求解

- 曲率圆

$$
\begin{cases}
y_0 - b = -\dfrac{1+(y_0')^2}{y_0''} \\[2ex]
x_0 - a = -\dfrac{1+(y_0')^2}{y_0''}y_0' \\[2ex]
\dfrac{1}{R} = \dfrac{|y_0''|}{(1+(y_0')^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{cases}
$$

曲率圆与二次Taylor多项式关系

- $f(x)$在(x_0, y_0)的曲率圆方程$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
- 不妨设(x_0, y_0)位于曲率圆的上半圆周, 即$y_0>b$.

  (若$y_0=b$, 则在(x_0, y_0)处的切线垂直, $f'(x_0)=\infty$矛盾)
- 此时曲率圆在(x_0, y_0)附近的方程为

$$\begin{aligned} y &= b+\sqrt{R^2-(x-a)^2} \\ &= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2) \end{aligned}$$

续

- 曲率圆是曲线精确到二阶的逼近

例题

- $f(x) = x^2$ 在原点处曲率圆

$$f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 2, \qquad \frac{1}{R} = 2$$

曲率圆方程: $$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^2}$$

- $f(x) = x^2$ 在原点处Taylor展开就是它自己(Taylor展开唯一性)

作业

第20次做业: [3.5] 问题 4, 5, 7.

数学分析(A1), 第21次课

任广斌(中国科大)

2020-11-13

本次课主要内容

- L'Hospital法则(§6)

L'Hospital法则

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\!=\!=\!=\; \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

- *不定型: 下列之一成立*
  - $\frac{0}{0}$型 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
  - $\frac{\infty}{\infty}$型. $\lim_{x\to a} g(x) = \infty.$
- *右端极限存在*$\in \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty, \infty\}$
  - *推广的严格单调性(保证分母非零): g'恒不为零.*
  - *可导性: f, g 在(a, b)可导, $a, b \in [-\infty, +\infty]$.*

注记: 在b点处类似结果成立.

- $\dfrac{0}{0}$型

$$A := \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(i) $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xlongequal[\xi\in(a,x)]{\text{Cauchy中值}} \lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A.$$

L'Hospital法则的$\frac{0}{0}$型证明

(ii) $a = -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \xlongequal[\text{变量代换}]{x=-\frac{1}{t}} \lim_{t\to 0}\frac{f(-\frac{1}{t})}{g(-\frac{1}{t})} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- $\dfrac{\infty}{\infty}$型

(i) $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$: $\quad A := \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \text{当}x \in (a, a+\delta],\ \text{有}\ \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \epsilon.$$

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(x)}}{1 - \frac{g(c)}{g(x)}} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \xlongequal[\xi\in(x,c),c=a+\delta]{\text{在}[x,c]Cauchy} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in (A-\epsilon, A+\epsilon).$$

$$\xRightarrow{\frac{\infty}{\infty}\text{型}} \quad A - \epsilon \leqslant \underline{\lim_{x\to a}} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \overline{\lim_{x\to a}} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant A + \epsilon.$$

L'Hospital法则的$\frac{\infty}{\infty}$型证明(续1)

(ii) $a \in \mathbb{R}, \quad A = +\infty$

不妨设$g' > 0$ (Darboux介值定理) $\xRightarrow{g \nearrow \infty} \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = -\infty.$

$$
\begin{aligned}
A = +\infty \quad & \Longrightarrow \quad \exists (a, a+\delta] : \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} > 1 \\
& \Longrightarrow \quad f' > g' \\
& \Longrightarrow \quad f(x) - g(x) \leqslant f(c) - g(c), \quad \forall\, [x, c] \subset (a, a+\delta] \\
& \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x)) = -\infty.
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{x \to a^+} f(x)) = -\infty \quad \xRightarrow[\text{倒数}]{A = \infty \text{转化为} A = 0} \quad \text{结论成立}
$$

L'Hospital法则的$\frac{\infty}{\infty}$型证明(续2)

(iii) $a \in \mathbb{R}, \quad A = \infty$

由假设极限为无穷, 故在a点附近 $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right| \geqslant 1.$

由Darboux导函数值域连通定理, f'和g' 不变号, 从而结论成立:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \text{或} -\infty.$$

(iv) 其它情形类似.

L'Hospital法则与Stolz定理不同之处

- L'Hospital法则与Stolz定理表面上不同之处:

$$右端极限可以=\infty.$$

- L'Hospital法则与Stolz定理本质相同

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty或-\infty.$$

L'Hospital法则条件缺一不可

- 非不定性:

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x+1} \neq \lim_{x \to 0} \frac{x'}{(x+1)'} = 1.$$

L'Hospital法则条件缺一不可

- 右端极限不存在:

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \neq \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{x'} \qquad (\nexists).$$

Theorem (L'Hospital)

在右端极限存在性不明的情形下, 结论减弱为

$$\varliminf_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\leqslant\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\varlimsup_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\varlimsup_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- 设$f, g \in C^1(c,d)$, $a \in (c,d)$,

  $f(a) = g(a) = 0$, g' 恒不为零, 最右端极限存在. 则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)}{g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)}$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- 初等函数极限 $\xrightarrow{\text{Taylor展开}}$ 有理函数极限

极限统一为无穷大

- 无穷大的阶$\nearrow$:

$$\ln x, \qquad x^\alpha(\alpha > 0), \qquad e^x, \qquad x^x, \qquad e^{e^x}, \cdots \qquad x \to +\infty$$

计算 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}} \xlongequal{L'Hospital} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=0.$$

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}\xlongequal[\text{可设}\alpha\in\mathbb{N}]{L'Hospital}\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}\xlongequal[\text{继续这一过程降阶}]{L'Hospital}0$$

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(1-\ln x)} = 0.$$

不定型的标准化

- 不定型可化为标准型$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$:

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty^0, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty.$$

例题

计算 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\mu \ln x \qquad (\mu > 0)$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\mu \ln x \xlongequal[\mu>0]{0\cdot\infty} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} \xlongequal[L'Hospital]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}} = 0$$

计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)\xlongequal{\infty-\infty}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\xlongequal[L'Hospital]{\frac{0}{0}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

计算 $\lim_{x\to+\infty} x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}$

$$I := \lim_{x\to+\infty} x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}} \xRightarrow{\infty^0} \ln I = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \frac{\ln x}{x} = 0$$

凑微分技巧的应用

$$f \in C(\mathbb{R}), \qquad \alpha \neq 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\alpha f(x) + x f'(x)) = \beta$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\beta}{\alpha}$$

证明

证明: 利用凑微分技巧:

$$u(x)(f'(x)+f(x)g'(x)) \xlongequal{u(x)=e^{g(x)}} (u(x)f(x))'$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(\alpha f(x)+xf'(x)) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^\alpha f(x))'}{x^{\alpha-1}} \xlongequal[\text{反向使用}]{L'Hospital} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha f(x)}{\frac{1}{\alpha}x^\alpha}$$

$$f, u \in C^1(a, +\infty), u' \text{恒不为零}, \lim_{x\to+\infty} u(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + \frac{u(x)}{u'(x)} f'(x)\right) := \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda.$$

凑微分技巧的应用续

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \xlongequal{\quad} \lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)f(x)}{u(x)}$$

$$\xlongequal{L'Hospital} \lim_{x\to+\infty} \frac{(u(x)f(x))'}{u'(x)}$$

$$\xlongequal{\quad} \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + \frac{u(x)}{u'(x)} f'(x)\right) = \lambda$$

例题

$$f(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

$f \in C^1[0,1]$	$\alpha > \beta + 1$
f在$[0,1]$ *Lipschitz*	$\alpha \geqslant \beta + 1$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta}, \qquad x \neq 0.$$

$$f \in C^1[0,1] \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \\ \alpha > \beta + 1 \end{cases}$$

$$\alpha \geqslant \beta + 1 \Longrightarrow f'\text{有界} \xRightarrow{Lagrange} f\text{Lipschitz}$$

$$\alpha < \beta + 1 \xRightarrow{Lagrange} \overline{\lim_{x \to 0^+}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

$$\Longrightarrow f\text{非Lipschitz}$$

第21次做业：[3.6]　1(奇)，2，4，5

数学分析(A1), 第22次课

任广斌(中国科大)

2020-11-16

本次课主要内容

- 函数作图

驻点, 极值点, 拐点

- 驻点: x_0是f的驻点 $\xLeftrightarrow{x_0\text{附近}f\text{可导}}$ $f'(x_0)=0.$
- 极值点: x_0是f的极值点 $\xLeftarrow{x_0\text{附近}f\text{可导}}$ f单调的转折点.

  反之不成立: $f(x)=x^2(2+\sin\frac{1}{x}).$
- 拐点:

x_0是f的拐点 $\Longleftrightarrow$ f严格凸凹转折点

$\xLeftrightarrow{x_0\text{附近}f\text{可导}}$ f'严格单调转折点

$\xLeftrightarrow{x_0\text{附近}f\text{2阶可导}}$ f''在x_0变号, $f''(x_0)=0$

驻点, 极值点, 拐点(续)

$f'(x_0)=0$	$f''(x_0)=0$
可能极值点	可能拐点

单调转折点	$\Longrightarrow$	极值点
严格凸凹转折点	$\Longleftrightarrow$	拐点

$$\text{右拐} \xleftrightarrow{\text{通过拐点}} \text{左拐}$$

在拐点处, 曲线与切线相互交叉, 切线是曲线的单边支撑线.

例题

- $f(x) = x^3$.　$x = 0$是拐点
- $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.　$x = 0$是拐点, 不可导点.
- $f(x) = x^4$ 凸.　$x = 0$非拐点, 可疑拐点, $f''(0) = 0$

- 水平渐近线:

$$f(x)\text{的水平渐近线}y=a \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=a$$

- 垂直渐近线:

$$f(x)\text{的水平渐近线}x=a \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to a^+\\(x\to a^-)}} f(x)=\infty$$

- 斜渐近线:

$$f(x)\text{的斜渐近线}y=ax+b \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} (f(x)-(ax+b))=0$$

斜渐近线的确定

- 斜渐近线:

$$f(x)\text{的斜渐近线}y = ax + b \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad a = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - ax).$$

作图步骤

- 定义域
- 周期, 奇偶, 对称.
- 单调, 凸凹
- 渐近线
- 特殊点:

驻点, 极值点, 拐点, 端点, 不可导点, 与坐标轴交点.

例题

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+(-1)+(-\frac{1}{4})(x-1)=-\frac{(x+1)^2}{4(x-1)}.$$

- 定义域: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
- 渐近线:
  - 垂直渐近线: $x=1$
  - 斜渐近线: $y=-\frac{1}{4}(x+3)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} &= -\frac{1}{4}\\ \lim_{x\to\infty}(f(x)-(-\frac{1}{4}x)) &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

续1

- 单调, 凸凹:

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} = -\frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$$

- 特殊点:
  - 与坐标轴交点$(-1,0)$, $(0,\frac{1}{4})$.
  - 驻点: $x = -1,\ 3$
  - 极小值点: $(-1,0)$. 极大值点: $(3,-2)$

续2

$$f'(x) = -\frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
f'	$-$	$+$	$+$	$-$
f''	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$\searrow$ 凸	$\nearrow$ 凸	$\nearrow$ 凹	$\searrow$ 凹
图形	↳	⬏	↱	↴

- Taylor多项式:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

- $f(x)$和$T_n(x)$在x_0处直到n阶导数相同:

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0), \\ T_n'(x_0) &= f'(x_0), \\ &\cdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Theorem (带有Peano余项的Taylor展开)

$$f(x) \overset{f^{(n)}(x_0)\exists}{=\!=\!=} \underbrace{T_n(x)}_{Taylor多项式} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{Peano余项}$$

证明1: $R(x) := f(x) - T_n(x)$

$$R(x_0) = 0, \quad R'(x_0) = 0, \quad \cdots, \quad R^{(n)}(x_0) = 0.$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{n-1次L'Hospital}}{=\!=\!=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\!=\!=\!= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\!=\!=\!= \frac{1}{n!}\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right)$$

$$\overset{\text{导数定义}}{=\!=\!=\!=} 0$$

证明2: $f^{(n)}(x_0)\exists$

$$f^{(n)}(x_0) \xlongequal{\qquad\qquad} \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

$$\xlongequal{\qquad\qquad} \lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-T_{n-1}(x))^{(n-1)}}{(\frac{1}{n!}(x-x_0)^n)^{(n-1)}}$$

$$\xlongequal{\text{n-1次L'Hospital}} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n-1}(x)}{\frac{1}{n!}(x-x_0)^n}$$

Taylor多项式唯一性

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \qquad P_n\text{是次数} \leqslant n\text{多项式}$$

$$\xLeftrightarrow{f^{(n)}(x_0)\exists} P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Taylor多项式刻画性质续

必要性: $\Longrightarrow$ $f(x)$两种表达式之差

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

$$\xrightarrow{\text{分子是次数}\leqslant n\text{多项式}} P_n(x)\equiv T_n(x).$$

例题

$$f \in C^2(\mathbb{R}), \qquad f''(x) + \frac{x}{2} f'(x) + f(x) = 0 \Longrightarrow f\text{与}f'\text{在}\mathbb{R}\text{有上界}$$

例题续

$$(f^2+(f')^2)' = -x(f')^2 \begin{cases} <0, & x>0 \\ >0, & x<0. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad f^2+(f')^2 \text{在} x=0 \text{取最大值, 故有上界.}$$

$$f^{(n)}(x_0) \xlongequal{f^{(n)}(x_0)\exists} \lim_{h\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x_0+kh)}{h^n}.$$

特例

特例:　$f(x) = x^m, \quad x_0 = 0$

Dirac函数的分解：

$$\delta_{mn} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^m, \qquad 0 \leqslant m \leqslant n.$$

Dirac函数的分解

$$\delta_{mn} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^m, \qquad (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k$$

$$x = 1: \qquad 0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$$

$$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=1}: \qquad 0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k$$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\right|_{x=1}: \qquad 0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k(k-1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}\right|_{x=1}: \qquad (-1)^n n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k(k-1)\cdots(k-n+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^n$$

高阶导数差分刻画的证明

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x_0+kh)}{h^n}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} kh + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (kh)^n + o(h^n) \right)$$

$$= f^{(n)}(x_0)$$

例题

$$f \in C^2[0,1], \quad f(0) = f(1) = 0, \quad \min_{x\in[0,1]} f(x) = -1$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \xi \in (0,1), \quad f'(\xi) = 8$$

例题续

证明: $x_0 \in \arg\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$: $f(x_0) = -1$, $f'(x_0) = 0$.

$$f(0) \xrightarrow{\exists \xi_1 \in (0,1)} f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(0 - x_0)^2$$

$$f(1) \xrightarrow{\exists \xi_2 \in (0,1)} f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1 - x_0)^2$$

$$x_0 \in (0, \frac{1}{2}] \Longrightarrow f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2} \geqslant 8, \quad f''(\xi_2) = \frac{2}{(1 - x_0)^2} \leqslant 8$$

$$\xrightarrow{\text{Darboux介值定理}} \exists\, \xi \in (0, 1) : \ f''(\xi) = 8. \ (x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)\text{类似讨论}).$$

建造航母

航母的横截面构成梯形, 底边长=斜边长=a.

问题:　斜边和底边夹角θ多大时, 横截面最大.

续

解: 横截面积

$$S(\theta)=\frac{(a+2a\cos\theta)+a}{2}a\sin\theta=a^2(1+\cos\theta)\sin\theta,\qquad \theta\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

$$S'=0\quad\Longrightarrow\quad\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{S(0)=0}\quad\theta=\frac{\pi}{3}\text{是内部唯一极值点, 而且不可能是最小值点}$$

$$\Longrightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{3}\text{是最大值点.}$$

例题

$$e^{-x}f'(x) = O(1), x \to +\infty \xRightarrow{f \in C^1(\mathbb{R})} e^{-x}f(x) = O(1), x \to +\infty.$$

证明

证明:

$$e^{-x}f(x) \xlongequal{x\to+\infty} \frac{f(x)-f(1)}{e^x-e}\frac{e^x-e}{e^x}+o(1)$$

$$\xlongequal{\text{Cauchy中值定理}} \frac{f'(\xi)}{e^\xi}\frac{e^x-e}{e^x}+o(1)=O(1)$$

作业

第22次作业: [3.7] 8

数学分析(A1), 第23次课

任广斌(中国科大)

2020-11-18

本次课主要内容 (第四章: Taylor定理)

- 微分定义
    - 一阶微分形式不变性
    - 高阶微分

- 曲线 $\overset{\text{线性化}}{=\!=\!=\!=}$ 切线的一丛 $=\!=\!=\!=$ 切丛

- 曲线和切线的全貌

$$\text{切丛} = \bigcup_{(x,f(x))\in\text{曲线}} (x,f(x))\text{点处的切线}$$

微分的核心秘密(下)

- 给定曲线，如影随形伴随着一簇切线。从一簇切线的信息提取曲线的信息。

$$\text{曲线} \xrightarrow[\text{以直代曲，线性化}]{\text{微分学}} \text{切线}$$

- 涉及两个函数:

曲线	切线
流形	切丛
	(线性子空间=切线平移到原点)

可微定义

f在x_0可微 $\Longleftrightarrow$ f在x_0附近有定义,$\exists$常数$\lambda \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\lambda\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0$$

- λ唯一, $\lambda=f'(x_0)$
- $\lambda\Delta x$称为f在x_0微分. 记为

$$dy:=\lambda\Delta x=f'(x_0)\Delta x.$$

微分定义

微分=函数改变量的线性部分(主部)=Taylor展开的第二项=dy.

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}_{=\Delta y}=\underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{=dy}+\underbrace{o(\Delta x)}_{\text{可忽略}}$$

- 当$y=f(x)=x$时,

$$dy=f'(x_0)\Delta x=\Delta x,\qquad dy=df(x)=dx.$$

$$\Longrightarrow\quad \underbrace{dx}_{=dy|_{y=f(x)\equiv x}}=\underbrace{\Delta x}_{\text{自变量的改变量}}.$$

从Taylor展开看微分

微分是Taylor展开的一次项部分。

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{=dy} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{可忽略}}$$

切线视为一维线性空间=切线平移到原点

微分是直线的方程表示, 该直线过原点平行于切线.

$$\underbrace{dy}_{dy\text{是直线方程的因变量}} = \overbrace{f'(x)}^{x\text{起着参数的作用}} \underbrace{dx}_{dx\text{是直线方程的自变量}}$$

注记

- 微分是两个独立变量的函数:

$$dy = f'(x)dx, \qquad x,\ dx\text{是两个独立变量}.$$

- dy总默认为dx的线性函数

$$dy = \underbrace{f'(x)}_{\text{伸缩率}}\ \underbrace{dx}_{\text{新变量}}.$$

- dx是切丛上变量, 表示任意的量, 而非小量.

dx的两重身份: 切丛的自变量; 函数$f(x) = x$的微分

曲线和切线

	曲线	曲线
	改变	改变量
自变量	$x_0 \Longrightarrow x_0 + \Delta x$	Δx
函数	$f(x_0) \Longrightarrow f(x_0 + \Delta x)$	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
	切线	切线
	改变	改变量
自变量	$x_0 \Longrightarrow x_0 + dx$	$dx = \Delta x$
函数	$f(x_0) \Longrightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	$dy = f'(x_0)dx$

注记1

- 曲线上的变化量:

Δx	Δy
自变量改变量	函数改变量
	难计算

- 切线上的变化量:

dx	dy
自变量微分	函数微分
$dx = \Delta x$	易计算$dy = f'(x_0)dx$

- 涉及两个图形的多种变量:

曲线	切线
x_0, $f(x_0)$, Δx, Δy	dx, dy

- 单变量微积分需要多变量微积分帮忙:

$$\text{固定曲线上的点}(x_0, f(x_0))\text{看变化量}\begin{cases}\Delta x, \quad \Delta y & \qquad \text{曲线} \\[2em] dx, \quad dy & \qquad \text{切线}\end{cases}$$

- 两个独立变量

曲线	切丛
$x, \quad \Delta x$	x, dx

- 切丛上独立变量:

$$x(\text{曲线变量}), \qquad dx(\text{切线变量})$$

$$\text{固定曲线上的点}(x_0, f(x_0))\text{看变化量}\begin{cases} \Delta x, \quad \Delta y & \text{曲线} \\ dx, \quad dy & \text{切线} \end{cases}$$

- 两个独立变量

曲线	切丛
$x, \quad \Delta x$	x, dx

注记5

- 微分的常用记号 (Leibniz)

$$dy = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$$

$$dy = df(x) = d(f(x)) = (df)(x) = df(x, \Delta x) = df(x, dx)$$

- 微分的最常用记号

$$df(x) = \text{默认}df\text{是}dx\text{的线性函数}$$

- 微分的直观看法:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

注记6

- 导数=微商=微分之商

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},\quad \text{分子分母有独立意义.}$$

- 微分的独立意义

dx, dy具有独立意义. 它们是切空间中的变量和函数

微元法

$\frac{dy}{dx}$	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
微商	差商极限
切线	曲线
两程序合二为一	精确表达
物理学家	数学家

可导和可微关系

在单变量微积分中, 可导和积分是一体两面, 是一回事.

$$\text{可导} \xLeftrightarrow{\text{单变量微积分}} \text{可微}$$

求微分 $\equiv$ 求导.

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

例子 $\quad d\sin x = \cos x dx.$

微分计算

$$
\begin{aligned}
df(x) &= f'(x)dx \\
d(f(x)+g(x)) &= df(x)+dg(x) \\
d(fg) &= fdg+gdf \\
d\frac{f}{g} &= \frac{gdf-fdg}{g^2}.
\end{aligned}
$$

一阶微分形式不变性

$$y = f(x), \quad x = \varphi(t), \quad x = \text{中间变量}, \quad t = \text{自变量}$$

$$\Longrightarrow \quad dy = f'(x)dx = (f(\varphi(t)))'dt$$

$$dy = df(\varphi(t)) = \frac{df(\varphi(t))}{dt}dt = f'(x)\varphi'(t)dt = \underbrace{f'(x)}_{t\text{的函数}} \quad \underbrace{dx}_{t,\,dt\text{ 的函数}}$$

注记

$$\text{微分与坐标系选取无关} \Longleftrightarrow \text{一阶微分形式不变性}$$

$$\Longleftrightarrow \text{复合函数求导}$$

$$\Longleftrightarrow dy = f'(x)dx, \quad x\text{是自变量或中间变量}$$

利用微分形式的一阶不变性，计算微分不必考虑真正的自变量是什么.

微分的用途

- 微分是近代数学的入门口

  - 微分形式， 张量分析， 外代数理论

    ——-现代微分几何

  - 微分形式提供测度

    ——现代分析学

符号之间关系

	x, dx	$dx, \Delta x$
x是自变量	独立	$dx = \Delta x$
x是中间变量	不独立 $x = \varphi(t)$ $dx = \varphi'(t)dt$	$dx \neq \Delta x$

- 二阶微分

$$y = f(x), \quad x\text{是自变量}$$

$$dy = f'(x)dx$$

$$\Longrightarrow \quad d^2y =: d(dy) = f''(x)dxdx =: f''(x)dx^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

高阶微分(续)

- n阶微分

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = \overbrace{d\cdots d}^{n}\, y = f^{(n)}(x)(dx)^n =: f^{(n)}(x)dx^n$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

$$d^n y = \overbrace{d\cdots d}^{n}\, y, \qquad dx^n = (dx)^n \text{当代书写顺序}$$

记号

$d^n x$	dx^n	$d(x^n)$
$\underbrace{d \cdots d}_{n} x$	$(dx)^n$	$nx^{n-1}dx$

二阶微分不具形式不变性: 与坐标系选取有关

$$y = f(x), \quad x = \varphi(t)$$

$$d^2y = f''(x)dx^2, \qquad \forall\ f$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi(t) = at + b.$$

证明

$$dy = f'(x)dx$$

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

$$d^2x = d(\varphi'(t))dt = \varphi''(t)(dt)^2 = 0 \Longrightarrow \varphi''(t) = 0$$

参数方程求导

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad 求 y'(x), \quad y''(x)$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx} = \frac{d\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{d\varphi(t)} = \frac{(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})'dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})'}{\varphi'(t)}$$

$d^2y \neq y''(x)dx^2$ 　　 x是中间变量

隐函数求导

$$x = y + \ln y$$

$$\Longrightarrow dx = (1 + \frac{1}{y})dy$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+y}$$

例题

$$S = S(r) = \text{半径为}r\text{的圆面积}$$

$$\Delta S = S(r+\Delta) - S(r) = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta + (\Delta r)^2$$

$$\Longrightarrow \qquad dS = 2\pi r dr$$

微元法: 当自变量半径从r变到$r+dr$, 相应面积微分

$$dS \xrightarrow[\text{直观}]{\text{微元法}} 2\pi r dr.$$

例题

$$y = e^{ax^2+bx}$$

$$y = e^u, \qquad u = ax^2 + bx$$

$$dy = e^u du = e^{ax^2+bx}(2ax+b)dx.$$

第23次做业: [4.1] 3, 4, 5(偶)

数学分析(A1), 第24次课

任广斌(中国科大)

2020-11-20

本次课主要内容

- Taylor展开
  - 带Peano, Lagrange, Cauchy余项的Taylor展开
  - Taylor展开的应用：实解析函数
  - Taylor展开一统天下

带Peano余项的Taylor展开(只涉及极限)

- Taylor展开:　$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$

$$T_n(x) \xlongequal{\text{Taylor多项式}} f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

- Taylor展开的极限表达

$$f^{(n)}(x_0) \xlongequal{f^{(n)}(x_0)\exists} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n-1}(x)}{\frac{1}{n!}(x-x_0)^n}$$

- Taylor展开的证明(利用L'Hospital法则算极限)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n-1}(x)}{\frac{1}{n!}(x-x_0)^n} \xlongequal[n-1\text{次}]{L'Hospital} f^{(n)}(x_0)$$

$$\forall \text{ 次数} \leqslant n\text{多项式}P_n \neq T_n, \quad \exists \quad \delta > 0, \quad \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}:$$

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - P_n(x)|.$$

函数和Taylor多项式的密切关系续

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

$$a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, \cdots, k-1, \qquad a_k \neq \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k < n.$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{f(x) - P_n(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} - a_k)(x - x_0)^k + o(x - x_0)^k} = 0$$

带Lagrange余项的Taylor展开(涉及中值定理)

- n阶情形(常数变易法+Cauchy中值定理):

$$f \in C^n[a,b], \quad f^{(n+1)}\text{在}(a,b)\exists$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, x, x_0 \in [a,b],\ \exists\, \xi \in (x_0, x)\text{或}(x, x_0):$$

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

- $n=0$, 此为Lagrange中值定理.

多项式的Taylor展开

- $\forall$ n次多项式$P(x)$, 具有Taylor展开

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Theorem

$$f \in C^n[a,b], \quad f^{(n+1)}\text{在}(a,b)\exists,\ p > 0$$

$$\Longrightarrow \forall\ x, x_0 \in [a,b],\ \exists\, \theta \in (0,1):$$

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\frac{n+1}{p}(1-\theta)^{n+1-p}}_{Cauchy\text{余项}}$$

$$p = \begin{cases} n+1, & \text{Lagrange余项} \\ 1, & \text{Cauchy余项} \end{cases}$$

带Cauchy余项的Taylor展开的证明

- 常数变易法: 固定x, 将x_0换为变量t

$$
\begin{aligned}
S_n(t) &:= f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n. \\
\varphi(t) &:= (x-t)^p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n'(t) &= (f'(t)) + (-f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)) \\
&\quad + (-\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2) + \cdots \\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.
\end{aligned}
$$

- Cauchy中值定理: x固定, t变量

$$f(x)-S_n(x_0)=\frac{S_n(x)-S_n(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}(\varphi(x)-\varphi(x_0))$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{=\!=\!=\!=}\frac{f^{(n+1)}(\xi)\dfrac{(x-\xi)^n}{n!}}{-p(x-\xi)^{p-1}}(-(x-x_0)^p)$$

$$\underset{\theta\in(0,1)}{\overset{\xi=x_0+\theta(x-x_0)}{=\!=\!=\!=}}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\frac{n+1}{p}(1-\theta)^{n+1-p}$$

局部和整体Taylor展开

带Peano余项的Taylor展开	局部	条件弱
带Lagrange余项的Taylor展开	整体	条件强
带Cauchy余项的Taylor展开	整体	条件强

设 f 在 x_0 附近 n 次可导

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_0 \text{非} f \text{极值点}, & n\text{奇} \\ x_0 \text{是} f \text{极值点}, & n\text{偶} \begin{cases} \text{极大值} & f^{(n)} < 0 \\ \text{极小值} & f^{(n)} > 0 \end{cases} \end{cases}$$

典型例子:　$f(x) = x^2, \quad x^3.$

实解析函数

$$f \in C^{\omega}(a,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f \in C^{\infty}(a,b), \forall\, x_0 \in (a,b),\ 在x_0附近成立$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

实解析函数

$$f \in C^{\omega}(a,b) \xLeftrightarrow{\text{等价描述}} f \in C^{\infty}(a,b), \forall\, x_0 \in (a,b),\ \text{在}x_0\text{附近成立}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(f(x) - T_n(x,x_0))}_{Cauchy\text{余项}} = 0$$

实解析判别准则

$f \in C^{\omega}(a,b) \Longleftrightarrow f \in C^{\infty}(a,b)$, 成立局部一致Cauchy不等式:

$$\forall\ x_0 \in (a,b),\ \exists\, \delta > 0,\ M > 0,\ R > 0:$$

$$\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leqslant M\frac{1}{R^n},$$

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b),$$
$$\forall\ n = 0, 1, \cdots.$$

Taylor 展开一统天下

- 连续: $f(x) = f(x_0) + o(1)$
- 可导: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$
- 中值定理: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$
- Fermat定理:

$$x_0\text{是}f\text{极值点} \xrightarrow[f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)]{f'(x_0)\exists} f'(x_0) = 0$$

- 极值:

$$f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x)\geqslant f(x_0)\text{极小值}$$

- 证明:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\\
&\geqslant f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{4}(x-x_0)^2
\end{aligned}$$

- 单调:

$$f' > 0 \Longrightarrow f \nearrow$$

- 证明:

$$x > x_0 \Longrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geqslant f(x_0)$$

- 凸凹:

$$f'' > 0 \quad \Longrightarrow f\text{凸}$$

- 证明

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$\xrightarrow{\text{支撑线}} \quad f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\xrightarrow[x_0 = (1-t)x_1 + tx_2]{x\text{用}x_i\text{代替}} \quad (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geqslant f((1-t)x_1 + tx_2)$$

- L'Hospital法则:

$$\text{Taylor 展开} \Longrightarrow \text{L'Hospital法则}$$

Laurent展开

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

- $f\in C^\infty(\mathbb{R})$:

  f的n次Taylor展开恒为零, f的Taylor展开恒为零.

- f具有Laurent展开:

$$e^{-\frac{1}{z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

最快到达原理

- 光线传播的路径是需时最少的路径.

  上半平面和下半平面分别是均匀介值, 光线在上半平面传播速度是常值V_A, 在下半平面传播速度是常值V_B. 假设光线从上半平面的$(0, h)$出发, 沿着入射角α的直线到达实轴$(x, 0)$, 经过折射后, 沿着折射角β的直线到达终点$(c-x, -k)$.

- 运行时间为

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{v_A} + \frac{\sqrt{(c-x)^2+k^2}}{v_B}$$

续

- 驻点为最小值点:

$$
\begin{aligned}
0 = T'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}v_A} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+k^2}v_B} \\
&= \frac{\cos\alpha}{v_A} - \frac{\cos\beta}{v_B}
\end{aligned}
$$

$$T''(x) > 0, \quad T'(0) < 0, \quad T'(c) > 0.$$

- 折射原理

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{v_A}{v_B}$$

两次利用中值定理

设$f, g \in [a, b]$, 在(a, b)可导, g'恒不为零, 则存在$\xi, \eta \in (a, b)$, s.t.

$$f'(\xi) = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

证明

同一个量采用两种方法计算产生等式:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \begin{cases} \dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}, & \text{Cauchy中值定理;} \\ \\ \dfrac{f'(\xi)(b-a)}{g(b)-g(a)}, & \text{Lagrange中值定理.} \end{cases}$$

两次利用中值定理

设$f, g \in [a, b]$, 在(a, b)可导, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 则存在$\xi, \eta \in (a, b), \xi \neq \eta$ s.t.

$$f'(\xi) + f'(\eta) = g'(\xi) + g'(\eta).$$

证明

$$G(x) = f(x) - g(x), \qquad c = \frac{a+b}{2}.$$

$$\xrightarrow{\text{Lagrangre}} \begin{cases} G(c) - G(a) = G'(\xi)(c-a) \\ G(b) - G(c) = G'(\eta)(b-c) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{G(a)=G(b)=0}]{\text{两式相加}} G'(\xi) + G'(\eta) = 0$$

$$\Longrightarrow f'(\xi) + f'(\eta) = g'(\xi) + g'(\eta).$$

扰动法

$$f, g \in C[a, +\infty), \text{在}(a, +\infty)\text{可导},$$

$$|f'(x)| \leqslant g'(x), \quad \forall x \in (a, +\infty)$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leqslant |g(x) - g(a)|$$

证明

情形1: $g' > 0.$

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \leqslant 1.$$

情形2: $g' \geqslant 0 \xRightarrow[\text{扰动法}]{g_\epsilon(x) := g(x)+\epsilon x, \quad \forall\, \epsilon > 0} g'_\epsilon > 0.$

$$|f'(x)| \leqslant g'(x) < g'_\epsilon(x) \xRightarrow{\text{情形1}} |f(x)-f(a)| \leqslant |g_\epsilon(x) - g_\epsilon(a)|$$

$$\xRightarrow{\epsilon\to 0} |f(x)-f(a)| \leqslant |g(x)-g(a)|.$$

第24次做业:

[4.1] 1

[4.2] 3

数学分析(A1), 第25次课

任广斌(中国科大)

2020-11-23

本次课主要内容

- 初等函数Taylor展开

有理数: 实数 $\Longleftrightarrow$ 多项式: 初等函数

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$a_0 \in \mathbb{Z},\ a_j = 0, 1, \cdots, 9 \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Taylor展开

- Taylor多项式

$$T_n(x) \xlongequal{\quad\quad} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

- 带Cauchy余项Taylor展开

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \frac{n+1}{p}(1 - \theta)^{n+1-p}$$

- Taylor级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

基本初等函数Taylor展开

$$
\begin{aligned}
e^x &\xlongequal{\quad\quad} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \\
\sin x &\xlongequal{\quad\quad} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \\
\cos x &\xlongequal{\quad\quad} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \\
(1+x)^{\alpha} &\xlongequal[\alpha\in\mathbb{R}]{|x|<1} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \\
\ln(1+x) &\xlongequal{|x|<1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \\
\arctan x &\xlongequal{|x|<1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}
\end{aligned}
$$

指数函数Taylor展开

$$e^x \xlongequal{\quad\quad} 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} = 0.$$

初等函数	$\mathbb{R}$
e^x + (+逆+代数复合运算)	1 + (代数极限运算)

- $e \notin \mathbb{Q}$

反证:
$$e = \frac{p}{q}$$

$$\text{其中} \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (p, q) = 1$$

$$\mathbb{Z} \ni n!\Big(\frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!})\Big) = \frac{e^{\theta}}{n+1} \in (0, 1), \quad n \gg 1.$$

正弦函数Taylor展开

$$\sin x \xlongequal{\theta\in(0,1)} x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

$$(\sin x)^{(k)}\Big|_{x=0}=\sin(x+k\frac{\pi}{2})\Big|_{x=0}=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^m. & k=2m+1.\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}=0.$$

正弦函数Taylor展开(续)

- $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{1}{i}(e^{ix})^{\text{odd}}$

- 求导改变奇偶性:

$$f(x) = \pm f(-x) \xRightarrow[\forall\ k \in \mathbb{N}]{} f^{(2k)}(x) = \pm f^{(2k)}(-x), \quad f^{(2k-1)}(x) = \mp f^{(2k-1)}(-x).$$

$$f\text{奇} \Longrightarrow f'\text{偶} \Longrightarrow f''\text{奇} \Longrightarrow \cdots.$$

- f 奇 $\Longrightarrow T_n$ 奇.

$$f\text{奇} \Longrightarrow f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots$$

余弦函数Taylor展开

$$\cos x \xlongequal{\theta\in(0,1)} 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{\cos\left(\theta x+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

$$(\cos x)^{(k)}\Big|_{x=0}=\cos(x+k\frac{\pi}{2})\Big|_{x=0}=\begin{cases}0, & k=2m+1\\ (-1)^m. & k=2m.\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\theta x+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!}x^{2n+2}=0.$$

幂函数Taylor展开

$$(1+x)^\alpha \xlongequal[|x|<1]{\theta\in(0,1)} 1+\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}(1-\theta)^n$$

$$((1+x)^\alpha)^{(k)}\Big|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}\Big|_{x=0}=\binom{\alpha}{k}k!$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1}}_{\text{有界}}=0.$$

续

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1, \qquad \forall\, \theta \in (0,1),\ \ |x| < 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} n^k x^n \xlongequal[a=1/|x|]{|x|<1} \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

幂函数Taylor展开续

$$(1+x)^\alpha \xlongequal[|x|<1]{\forall\ \alpha\in\mathbb{R}} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots$$

特例： 四种情形 $\alpha = -1, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

总是假设： $|x| < 1$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{求导}} \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots.$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{求导}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

续

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \underbrace{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-3}{2})}_{k\text{项}}\frac{1}{k!} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}.$$

对数函数Taylor展开

$$\frac{1}{1-x} \overset{|x|<1}{=\!=\!=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{1+x} \overset{|x|<1}{=\!=\!=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{反向形式求导}} \ln(1+x) \overset{|x|<1}{=\!=\!=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots .$$

求导确定Taylor展开法则

$$\begin{cases} f'(x) = g'(x) \\ \\ f(0) = g(0) \end{cases} \Longrightarrow f = g$$

对数函数Taylor展开(续)

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

$$\left(\ln(1+x)\right)^{(k)} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}(n+1)(1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1} \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

反三角函数Taylor展开

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

$$\xRightarrow{\text{反向形式求导}} \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots.$$

反三角函数Taylor展开(续)

$$
\begin{aligned}
y &= \arctan x, \qquad x = \tan y \\
\Longrightarrow \quad y' &= \cos^2 y = \cos y \sin(y + \frac{\pi}{2}) \\
\Longrightarrow \quad y'' &= 2\cos y(-\sin y)y' = \cos^2 y \sin 2(y + \frac{\pi}{2}) \\
\Longrightarrow \quad y^{(n)} &= (n-1)! \cos^n y \sin n(y + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos^{n+1} y(\zeta) \sin\left(n+1\right)(y(\zeta) + \frac{\pi}{2})}{n+1} = 0.
$$

$$\cos(x+y) = \mathrm{Re}\, e^{ix+iy} = \cos x\cos y - \sin x \sin y.$$

$$\xRightarrow{y\text{换为}-y} \quad \cos(x-y) = \mathrm{Re}\, e^{ix-iy} = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

$$\xRightarrow{\text{两者相加}} \quad \cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$$

反三角函数(续)

$$
\begin{aligned}
y &= \arctan x \\
y^{(n)} &= (n-1)!\cos^n y \sin n(y+\frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

证明: 归纳法.

$$
\begin{aligned}
y^{(n+1)} &= n!\cos^n y\cos n(y+\frac{\pi}{2})y' + n!\cos^{n-1} y(-\sin y)y'\sin n(y+\frac{\pi}{2}) \\
&= n!\cos^{n+1} y(\cos y\cos n(y+\frac{\pi}{2}) - \sin y\sin n(y+\frac{\pi}{2}) \\
&= n!\cos^{n+1} y\cos\left((n+1)y + n\frac{\pi}{2}\right) \\
&= n!\cos^{n+1} y\sin\left((n+1)(y+\frac{\pi}{2})\right)
\end{aligned}
$$

例题

$e^{\sin x}$展开至x^3

例题续

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \frac{1}{1!}(x - \frac{1}{3!}x^3) + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

例题

计算 $\sqrt[5]{2}$ 误差 $< 10^{-3}$.

续

$$a=\sqrt[5]{2}\xlongequal{a^5=2,\quad a\simeq\frac{5}{6}}\frac{6}{5}(1-b)^{\frac{1}{5}}\Longrightarrow b=1-2\left(\frac{6}{5}\right)^5\in\mathbb{Q}\cap(0,1).$$

$$(1+x)^\alpha\xlongequal{\theta\in(0,1)}1+\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}(1-\theta)^n$$

$$\alpha=\frac{1}{5},\quad x=-b,\quad n=3$$

$$\sqrt[5]{2}=\frac{6}{5}(1-b)^{\frac{1}{5}}\simeq\frac{6}{5}\left(1+\frac{\frac{1}{5}}{1!}(-b)+\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2!}(-b)^2+\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)}{3!}(-b)^3\right)$$

$$R_3(-b)\leqslant\left|\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-3)}{3!}\right|(1-b)^{\frac{1}{5}-4}b^4\leqslant 4\times 10^{-4}.$$

$$1-|x|<|1+\theta x|<1+|x|$$

注记: 函数与导数的联系

$$\text{函数} \overset{\text{代数运算}}{\Longleftrightarrow} \text{差商} \overset{\text{Cauchy中值定理}}{\Longleftrightarrow} \text{导数}$$

例题

f在$[a,b]$连续，(a,b)可导，f非一次多项式，

$$\Longrightarrow \exists\, \xi,\eta \in (a,b):$$

$$f'(\xi) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > f'(\eta)$$

证明: 采用曲线-割线方法:

不妨设$f(a)=f(b)=0$, f不恒为零.

不妨设存在$x_0\in(a,b)$: $f(x_0)>0$.

$$f'(\xi)\ \overset{\text{Lagrange}}{=\!=\!=\!=}\ \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=\frac{f(x_0)}{x_0-a}>0$$

$$f'(\eta)\ \overset{\text{Lagrange}}{=\!=\!=\!=}\ \frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}=\frac{f(x_0)}{x_0-b}<0$$

例题

$$f\text{在}[0,+\infty)\text{凸}$$

$$\Longrightarrow \quad f(a)+f(b)\leqslant f(0)+f(a+b) \qquad \forall\, a,b\in[0,+\infty).$$

证明

证明: 不妨设 $0 < a \leqslant b < a + b$, 则由四点判别法

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} \leqslant \frac{f(a+b) - f(b)}{(a+b) - b}$$

作业

第25次做业:

[4.2] 1

[4.3] 1, 2(4), 5

数学分析(A1), 第26次课

任广斌(中国科大)

2020-11-25

本次课主要内容

- Taylor展开的应用

$$\mathbb{Q} : \mathbb{R} \Longleftrightarrow \text{多项式} : \text{初等函数}$$

$$\text{初等函数用低级多项式替代}\begin{cases}\text{一次多项式: 单调性} \quad f' \geqslant 0; \quad \text{极值} \\ \\ \text{二次多项式: 凸凹性} \quad f'' \geqslant 0\end{cases}$$

- 单调性:

$$f' \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\zeta) \geqslant 0 \Longrightarrow f \nearrow .$$

- 凸凹性

$$f'' \geqslant 0 \Longrightarrow f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)) = \frac{f''(\zeta)}{2!}(x-x_0)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow f\text{凸}.$$

初等函数视为多项式

$$\text{初等函数极限} \xlongequal[\textit{Peano}\text{余项}]{\textit{Taylor}} \text{有理函数极限}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \arctan x}{\sin x - \tan x}$$

$$\text{分子} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(\cos x)\text{分母} = \sin x(\cos x - 1) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

例题 $$\lim_{x\to 1}\frac{a_2(x-1)^2+a_1(x-1)+a_0-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$$

求 a_k

已知条件 $\Longleftrightarrow$ $$\sqrt{x^2+3}=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+o((x-1)^2)$$

$$\Longrightarrow \quad a_k=\frac{f^{(k)}(1)}{k!}.$$

求$\tan x$的三次Taylor多项式.

方法一: $\tan x$是奇函数, $\tan x = a_1 x + a_3 x^3 + o(x^3)$

$$a_1 = (\tan x)'\Big|_{x=0}, \qquad a_3 = \frac{(\tan x)'''}{3!}\Big|_{x=0}.$$

方法二:　　利用已知的Taylor展开:

$$\tan x = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)} = x + a_3 x^3 + o(x^3)$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) = (1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2))(x + a_3 x^3 + o(x^3))$$

$$\xRightarrow{\text{比较系数}} \quad -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{2!} + a_3$$

$$\Longrightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3}$$

Taylor展开的中值余项估计产生不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad \forall x > 0.$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3, \qquad \forall x > 0.$$

$$\ln(1+x) = \log 1 + \frac{1}{1+\theta x}x \in \left(\frac{x}{1+x},\ x\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{2!}{(1+\theta x)^3}x^3, \qquad \theta \in (0,1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4!}\frac{3!}{(1+\theta x)^4}x^4, \qquad \theta \in (0,1).$$

两个Taylor公式(其一为条件)的应用

$$f''(0)\exists,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n^{3/2}f(\frac{1}{n})=0$$

续

两个Taylor公式:

$$f(x) = o(x) \qquad x \to 0 \qquad \text{此为已知条件}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) \qquad \text{此为典型公式}$$

两个Taylor公式 $\Longrightarrow f(x) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$

$$\Longrightarrow f(\frac{1}{n}) = \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = o(\frac{1}{n^{3/2}})$$

两个Taylor公式(其一为条件)的应用(续)

$$f(x_0) \xlongequal[\theta=\theta(h,n)\in(0,1)]{f^{(n+1)}(x_0)\neq 0} f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{(n)!}h^n$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0}\theta(h,n) = \frac{1}{n+1}.$$

两个Taylor公式:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0)+f^{(n+1)}(x_0)\theta h+o(h)}{n!}h^n$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1}+o(h^{n+1})$$

两式相减 $\Longrightarrow \theta=\dfrac{1}{n+1}+o(1),\qquad h\to 0.$

两个Taylor公式(其一为条件)的应用(续)

$$f(x) \xlongequal[\exists\theta\in(0,1)\forall x,h]{f^{(n+2)}\exists} f(x)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n$$

$$\Longleftrightarrow f\text{是次数}\leqslant n+1\text{的多项式}$$

必要性证明

两个Taylor公式:

$$f(x+h) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+2)}(x)}{2!}(\theta h)^2 + +o(h^2)}{n!} h^n$$

$$f(x+h) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} h^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!} h^{n+2} + o(h^{n+2})$$

$$\xrightarrow{\text{相减}} \begin{cases} f^{(n+1)}(x)(\frac{1}{n+1} - \theta) = 0 \\ f^{(n+2)}(x)(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\exists f^{(n+1)}(x_0) \neq 0 \Longrightarrow \theta = \frac{1}{n+1} \Longrightarrow f^{(n+2)} \equiv 0.$$

充分性证明

$$\theta := \frac{1}{n+1}$$

一次多项式$f^{(n)}$:

$$f^{(n)}(x+\theta h) = f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)\theta h.$$

代入

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{n}(x)}{n!}h^{n} + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}h^{n+1} \\ &= f(x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^{n} \end{aligned}$$

三个导函数之间关系

$$f \in C^2(\mathbb{R}),\quad f''\text{不恒为零},\quad M_k := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$$

$$\Longrightarrow \qquad M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$$

三个导函数之间关系

两个Taylor公式 $\begin{cases} f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dfrac{f''(\zeta_1)}{2}h^2 \\ \\ f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \dfrac{f''(\zeta_2)}{2}h^2 \end{cases}$

不妨设$M_0, M_2 \in (0, \infty)$, 两个Taylor公式之差导出

$$2f'(x)h \leqslant 2M_0 + M_2h^2, \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad 2M_1h \leqslant 2M_0 + M_2h^2, \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad M_1 < +\infty, \qquad M_2h^2 - 2M_1h + 2M_0 \geqslant 0 \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad M_1^2 \leqslant 2M_0M_2.$$

$$f \in C^2(0,+\infty),\quad \lim_{x\to\infty} f(x)\exists\text{且有限},\quad f''\ \text{有界}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

不妨设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, 记

$$M_k(t) := \sup_{x\in(t,+\infty)} |f^{(k)}(x)|.$$

则

$$M_1^2(t) \leqslant 2M_0(t)M_2(t)$$

令 $t \to \infty$ 即可.

$$f'' \in C^2(-1,1), \quad f(0) = f'(0) = 0$$

$$|f''(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)|$$

$$\Longrightarrow \qquad f \equiv 0.$$

证明

$$\begin{cases} |f''(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)| \\ f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(\zeta)}{2!}x^2 = \frac{f''(\zeta)}{2!}x^2 \\ f'(x) = f'(0) + \frac{f''(\eta)}{1!}x = \frac{f''(\eta)}{1!}x \end{cases}$$

$$M := \max_{x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |f''(x)| \Longrightarrow M \leqslant M(\frac{\delta^2}{2} + \delta), \quad \delta = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow M = 0 \Longrightarrow f|_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = 0$$

将在0点展开, 代之以在$\pm\frac{1}{2}$展开. 同理$f \equiv 0$.

在极值点处Taylor展开

$$f'' \in C^2[a,b], \quad f(a) = f(b) = 0, \quad x_0\text{是}f\text{的内部极大值点}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \zeta \in (a,b): \quad f''(\zeta) = -\frac{8}{(b-a)^2} f(x_0)$$

证明: $0 = f(a) = f(x_0) + + \frac{f''(\zeta_1)}{2!}(a - x_0)^2$

$$0 = f(b) = f(x_0) + + \frac{f''(\zeta_2)}{2!}(b - x_0)^2$$

情形1: 假设$x_0 \in [a, \frac{a+b}{2}]$. (另一情形类似)

$$\xLongrightarrow{Darboux} \text{Range} f'' \supset [-\frac{2}{(x_0 - a)^2} f(x_0), -\frac{2}{(b - x_0)^2} f(x_0)] \ni -\frac{8}{(b-a)^2} f(x_0).$$

割线中值定理

$$f \in C^1[a,b], \quad f\text{在}(a,b)\text{二阶可导}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in [a,b],\ \exists \zeta \in (a,b):$$

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) - \frac{f''(\zeta)}{2}(b-x)(x-a).$$

割线中值定理

$$f'' > 0 \Longrightarrow f(x) \leqslant l(x) \quad 割线$$

$$|f(x) - l(x)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

利用了

$$(b-x)(x-a) \leqslant \left(\frac{(b-x)+(x-a)}{2}\right)^2.$$

割线中值定理(续)

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\zeta_1)}{2}(a-x)^2$$

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(\zeta_2)}{2}(b-x)^2$$

计算:

$$\frac{b-x}{b-a}\text{第一式} + \frac{x-a}{b-a}\text{第二式}$$

再利用Darboux定理即可.

例题

f在$[0,a]$二阶导数存在且有界, f在内部$(0,a)$取到最大值.

$$\Longrightarrow |f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma \qquad (M是|f''|上界).$$

证明

证明：设$x_0 \in (0, a)$是f最大值点：

$$
\begin{aligned}
f'(0) - f'(x_0) &= f''(\zeta_1)(0 - x_0) \\
f'(a) - f'(x_0) &= f''(\zeta_2)(a - x_0) \\
f'(x_0) &= 0
\end{aligned}
$$

例题

$$e^{-x}f'(x) = O(1), x \to +\infty \xRightarrow{f \in C^1(\mathbb{R})} e^{-x}f(x) = O(1), x \to +\infty.$$

证明

证明:

$$e^{-x}f(x) \xlongequal{x\to+\infty} \frac{f(x)-f(1)}{e^x-e}\frac{e^x-e}{e^x}+o(1)$$

$$\xlongequal{\text{Cauchy中值定理}} \frac{f'(\xi)}{e^\xi}\frac{e^x-e}{e^x}+o(1)=O(1)$$

作业

第26次做业: [4.3] 问题2, 4, 5, 6

数学分析(A1), 第27次课

任广斌(中国科大)

2020-11-27

- 不定积分

$$C^1[a,b]/\mathbb{R} \underset{\int_a^x}{\overset{\frac{d}{dx}}{\rightleftarrows}} C[a,b]$$

微积分中的主要矛盾.

微积分基本定理续

单射: $F_1'(x) = F_2'(x) \xLeftrightarrow{Lagrange} F_1 = F_2 + C \xLeftrightarrow{约定} F_1 = F_2.$

满射: $\forall\, f \in C[a,b], \quad \exists\, F(x) = \int_a^x f(t)dt =$ 面积, 使得

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \xlongequal[\text{需要面积定义}]{\text{直观}} f(x).$$

面积的定义

局部是规则的面积, 极限过程产生不规则图形的面积.

- 分割: $\pi: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\|\pi\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

- 求和:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

- 取极限:

$$\text{面积} = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

积分符号是象形文字

$$\text{面积} = \int_a^b f(x)dx = \sum_{x\in[a,b]} f(x)dx = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\int = sum \quad \text{拉长}$$

求和指标 $x \in [a,b]$ 是求和哑标

$$\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{\substack{\text{微元法}\\ \text{直接上切线}\\ \text{逼近极限二合一}}}_{\text{没有逼近过程}} \hspace{-2em} \underbrace{\phantom{\frac{dy}{dx}}}_{} \quad ====== \quad \underbrace{\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\text{逼近过程}}$$

$$\underbrace{\overbrace{\int_a^b f(x)dx}^{\text{微元法}}}_{\text{没有逼近过程}} \quad ====== \quad \underbrace{\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i}_{\text{逼近过程}}$$

微积分基本定理

设$f \in C[a,b]$，$F \in C^1[a,b]$，则

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a).$$

- 微积分基本定理的等价陈述

$$C^1[a,b]/\mathbb{R} \quad \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftharpoons}} \quad C[a,b]$$

Newton-Leibniz公式是带积分余项的Taylor公式

$$F(x) \xlongequal[x_0\in[a,b]]{F\in C^1[a,b]} \underbrace{F(x_0)}_{\text{零次Taylor多项式}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} F'(t)dt}_{\text{Taylor展开的积分余项}}$$

原函数: Primitive

$$F(x)\text{是}f(x)\text{在区间}I\text{上原函数} \xLeftrightarrow{F\text{在}I\text{上可导}} F'(x) = f(x), \forall\ x \in I$$

注记

- 原函数是-1阶导函数
- 不采用记号$f^{(-1)}$的原因:
  - 有更好的象形文字作为记号
  - $f^{(-1)}$是多值函数: 导数给定, 函数可相差常数.

最自然的原函数

$$f \in C[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^x f(t)dt\text{是}f(x)\text{在区间}[a,b]\text{上一个原函数}$$

- 原函数全体记为$\int f(x)dx$
- 不定积分:

$$\int f(x)dx = \text{原函数全体} = \int_a^x f(t)dt + C$$

C是任意常数, 称为积分常数.

不定积分的符号解释

- 不定积分=原函数全体=-1阶导数=相差常数的一族函数

$$\underbrace{F(x)}_{x\text{的函数}} + \underbrace{C}_{\text{积分常数}} = \underbrace{\int}_{\text{积分符号}} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{被积函数}} \underbrace{dx}_{\substack{x\text{是积分变量}\\ \text{不再是哑标}}}}^{\text{积分表达式}}$$

不定积分的微积分基本定理

设$f \in C[a,b]$，$F \in C^1[a,b]$，则

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

- 不定积分的微积分基本定理的等价陈述

$$C^1[a,b]/\mathbb{R} \ \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{=\!=\!=\!=}} \ C[a,b]$$

不定积分计算方法

求导公式 $\overset{\text{去分母}}{\Longleftrightarrow}$ 微分公式 $\overset{\text{两边积分}}{\Longleftrightarrow}$ 积分公式

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

dF(x)=f(x)dx

$$\int dF(x) = \int f(x)dx$$

$$= F(x) + c$$

$$\int f(x)dx \overset{\text{只要处理微分}}{=\!=\!=} \int dF(x) \overset{\text{导数积分同归于尽}}{=\!=\!=} F(x) + c$$

不定积分天才记号

- 象形文字:

  定积分连续求和的天然解释

- 便于计算:

  利用微分公式的反转带有天生的计算方法

不定积分和定积分关系

- 定积分提供不定积分的最自然的代表元.

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$$

不定积分计算公式: 积分变量代换公式

- 积分变量代换公式=复合函数求导公式:

$$\int f(x)dx \xlongequal[\text{变量代换}]{x=\varphi(t)} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

证明: 两边导数相同

不定积分计算公式: 分部积分公式

分部积分公式=微积分基本定理=求导公式

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

- 求导公式两边积分

$$\begin{aligned} f(x)g'(x) &= (f(x)g(x))' - f'(x)g(x) \\ f(x)dg(x) &= d(f(x)g(x)) - g(x)df(x) \end{aligned}$$

微分学的公式和积分学的公式的对应

积分学	微分学
变量代换	复合函数求导公式 一阶微分形式不变性
分部积分公式 微积分基本定理另一形式	乘积求导公式

微积分三大法宝全部出场

- 原子分解
- 变分法
- 对偶方法

分部积分是对偶方法, 将困难转嫁, 峰回路转.

至此$C[a,b]$上微积分结束.

剩下内容:

- 积分计算: 初等函数的不定积分可能不是初等函数.
- $R[a,b]$上微积分
- 微积分的应用.

积分计算

- 积分九九表 $\Longleftrightarrow$ 求导九九表
- 验证积分公式或计算结果: 两边求导.
- 积分线性性 $\Longleftrightarrow$ 求导线性性

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(\frac{x}{a})^2 + 1} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} arctan \frac{x}{a} + C$$

积分常用公式(续)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} d\frac{x}{a} = arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \int \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

$$= \int \frac{(x + \sqrt{x^2 + a^2})'}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

积分常用公式(续)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= x\sqrt{a^2-x^2}+\int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a})+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}dx &= x\sqrt{a^2+x^2}-\int \frac{(a^2+x^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}))+C\end{aligned}$$

注记

积分后a的次数增加一次

注记

数学分析A1期中考试安排如下:

时间: 2020年11月29日（星期日）晚上7:30—9:30.

地点: 5教103教室, 5教104教室.

考试内容: 教材前三章, 去掉混沌理论.

数学分析(A1), 第28次课

任广斌(中国科大)

2020-11-30

本次课主要内容

- 积分的计算

$$C^1[a,b]/\mathbb{R} \;\underset{\displaystyle\int_a^x}{\overset{\displaystyle\frac{d}{dx}}{\rightleftarrows}}\; C[a,b]$$

- 实数: 有理数的极限——曲边梯形面积: 规则图形面积的极限
- 极限用于扩大人类知识: 从简单到复杂, 从规则到不规则.
- 极限是质变的数学实现.

- 计算积分的原理:　　微积分基本定理

$$C^1[a,b]/\mathbb{R} \underset{\text{求导}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}} C[a,b]$$

$$F \xrightarrow{\text{求导}} f \qquad \text{求导公式, 熟知}$$

$$F \xleftarrow{\text{积分}} f \qquad \text{积分公式, 反转求导公式}$$

- 已知F, f和双方对应:

从一个反向看是求导公式, 从另一方向看是积分公式.

求导公式=微分公式= 积分公式

- 求导公式 $\xRightarrow{\text{两边积分}}$ 积分公式

$$\underbrace{F'(x)=f(x)}_{\text{求导公式}} \xRightarrow{\text{两边积分}} \underbrace{F(x)+c=\int f(x)dx}_{\text{积分公式}}.$$

$$\underbrace{(\sin x)'=\cos x}_{\text{求导公式}} \xRightarrow{\text{两边积分}} \underbrace{\int \cos x dx=\sin x+C}_{\text{积分公式}}.$$

- $$\text{微分公式} \xRightarrow{\text{两边积分}} \text{积分公式}$$

$$\int \cos x dx \xlongequal[\text{微分公式}]{\text{两边积分}} \int d\sin x = \sin x + C.$$

验证不定积分结果

- 验证不定积分结果的方法:

两边求导

积分的线性性

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \lambda f(x)dx \xlongequal{\text{常数}\lambda} \lambda \int f(x)dx + C$$

计算积分的两大法宝

- 变量代换
- 分部积分

微分学的公式和积分学的公式的对应

积分学	微分学
变量代换	复合函数求导公式
	一阶微分形式不变性
分部积分公式	乘积求导公式
微积分基本定理另一形式	

变量代换

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\Longrightarrow \int f(g(x))g'(x)dx \xlongequal{u=g(x)} \int f(u)du$$

$$= F(u) + C$$

$$= F(g(x)) + C.$$

为什么初等函数的导数是初等函数，但对积分不对？

- 导数公式——————积分公式

- 复合函数求导公式:

  每个函数的导数决定复合函数的导数

- 复合函数求导公式——————积分的变量代换公式:

$$\int f(g(x))\underbrace{g'(x)}_{\text{多出一项}}dx = F(g(x)) + C.$$

每个函数的积分不能决定复合函数的积分

记F是f的原函数

$$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx = F(\ln x) + C$$

$$\int f(\sin x)\cos x dx = F(\sin x) + C$$

$$\int f(\tan x)\sec^2 x dx = F(\tan x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

利用变量代换计算积分例题

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx \xlongequal{u=\frac{\ln x}{x}} \int \frac{1}{(1-u)^2}du$$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \xlongequal{u=\sqrt{x}} 2\int \sin u du$$

$$\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sqrt{1-\frac{\sin^2 x}{x^2}}}dx \xlongequal{u=\frac{\sin x}{x}} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx \xlongequal{u=e^x} \int \frac{1}{u(1+u)}du$$

利用变量代换计算积分例题(续)

$$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}dx \xlongequal{u=\tan x} \int \frac{1}{a^2u^2+b^2}du$$

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{2020}}dx \xlongequal{u=1-x} -\int \frac{(1-t)^2}{t^{2020}}dt$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx \xlongequal{u=\arctan x} \int u du$$

- 分部积分公式的作用:

山重水复疑无路, 柳暗花明又一村

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

利用分部积分公式计算积分例题

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}) + C$$

利用分部积分公式计算积分例题

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx \xlongequal[|t|<\frac{\pi}{2}]{x=a\sin t} \int a^2 \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int 1 + \cos(2t)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + C$$

利用分部积分公式计算积分例题(续)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}dx &= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{(a^2+x^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ &= \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\Big) + C\end{aligned}$$

利用分部积分公式计算积分例题(续)

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx \xlongequal{x=a\mathrm{sh}t} \int a^2\mathrm{ch}^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int 1+\mathrm{ch}(2t)dt$$

$$=\!=\!= \frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\mathrm{sh}2t)+C$$

$$=\!=\!= \frac{a^2}{2}\Big(\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\Big)+C$$

利用分部积分公式计算积分例题(续)

$$\mathrm{sh}t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (\text{奇函数}), \qquad \mathrm{ch}t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad (\text{偶函数})$$

$$\mathrm{ch}^2 t = \frac{\mathrm{ch}(2t) + 1}{2}, \qquad \mathrm{sh}2t = 2\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t, \qquad \mathrm{ch}t^2 = 1 + \mathrm{sh}^2 t$$

$$x = a\mathrm{sh}t \Longrightarrow (e^t)^2 - 2\frac{x}{a}e^t - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow e^t = \frac{2\frac{x}{a} + \sqrt{4\frac{x^2}{a^2} + 4}}{2}$$

$$\Longrightarrow t = \ln\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

$$\int \Big(f(x) + f'(x)\Big)e^x dx \xlongequal{(f(x)+f'(x))e^x=(f(x)e^x)'} f(x)e^x + C$$

利用分部积分公式计算积分

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx \;=\!=\!=\; \int\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)e^x dx$$

$$=\!=\!=\; \frac{e^x}{1+x}+C$$

利用分部积分公式计算积分

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx = \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^x dx$$

$$= \int (\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}(\sec\frac{x}{2})^2) e^x dx$$

$$= (\tan\frac{x}{2}) e^x + C.$$

反函数积分

f是严格单调增加连续函数, 其原函数$F(x)$

$$\Longrightarrow \quad \int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$$

反函数积分

$$\int f^{-1}(x)dx \;=\!=\!=\; xf^{-1}(x) - \int xdf^{-1}(x))$$

$$\xlongequal{u=f^{-1}(x)} \; xf^{-1}(x) - \int f(u)du$$

$$\xlongequal{u=f^{-1}(x)} \; xf^{-1}(x) - F(u) + C = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$$

例题

求解f： 设$F(x)$是$f(x)$在$(0,+\infty)$原函数，$F(1)=1$，而且满足

$$f(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

例题

$$F'(x)F(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}F^2(x) = 2\int \arctan\sqrt{x}\, d\arctan\sqrt{x} = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$$

$$\xRightarrow{F(1)=1} \quad C = \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

计算: $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k} dx$

- 递推公式: $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

$$
\begin{aligned}
I_k &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^k} dx \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} - \int x d(x^2+a^2)^{-k} \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{k+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k(I_k - a^2 I_{k+1}) \\
I_{k+1} &= \frac{1}{2ka^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^k} + (2k-1)I_k\right)
\end{aligned}
$$

作业

第28次做业: [5.2] 4(奇)

数学分析(A1), 第29次课

任广斌(中国科大)

2020-12-02

本次课主要内容

- 有理函数的积分

注记

- 积分的计算是基本功.

- 积分的计算原理

$$C^1[a,b]/\mathbb{R} \underset{\int_a^x}{\overset{\frac{d}{dx}}{\rightleftarrows}} C[a,b]$$

- 积分的计算具体过程

$$\int f(x)dx \xlongequal{\text{只要处理微分}} \int dF(x) \xlongequal{\text{导数积分同归于尽}} F(x)+c$$

§3有理函数的积分

$$\text{有理函数} \xRightarrow[\text{必可积出}]{\text{积分}} \text{初等函数} \xRightarrow{\text{积分}} \text{可能非初等函数}$$

$$\int e^{-x^2}dx\text{非初等函数} \xrightarrow{\text{求导}} e^{-x^2}\text{初等函数}$$

有理函数的分解

有理函数 $\overline{\overline{\qquad}}$ 多项式+真分式

真分式 $\overline{\overline{\qquad}}$ 型如 $\dfrac{1}{(x-a)^k}$, $\quad\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^j}$ 线性组合.

有理函数的分解

- 多项式因子分解无具体表达式, 只有分解存在性(Galois)
- 分式分解的存在性的证明需要复分析
- 有理函数积分的计算常常需要变量代换和分部积分

真分式分解步骤(复分析)

	实根a　(k重)	复根成对出现　(k重)
相应多项式	$x-a$	$x^2+px+q \quad (p^2-4q<0)$
相应分解	$\sum_{j=0}^{k} \frac{b_j}{(x-a)^j}$	$\sum_{j=0}^{k} \frac{A_j x + B_j}{(x^2+px+q)^j}$

- 真分式可以分解为形如上面真分式的求和

- 单根情形:

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k} + C, & k \neq 1 \\ \ln|x-a| + C & k = 1 \end{cases}$$

- 复数根情形:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A(x+\frac{p}{2})+(B-\frac{Ap}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4}))^k}$$

$$\xlongequal[a^2=q-\frac{p^2}{4}>0]{u=x+\frac{p}{2}} \frac{Au}{(u^2+a^2)^k}+\frac{B_1}{(u^2+a^2)^k}$$

有理函数的积分(3)

- 复数根情形:

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^k}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}d(x^2+a^2)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-k)}(x^2-a^2)^{1-k}+C, & k \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}\ln|x^2-a^2|+C & k=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n+1}dx \xlongequal{u=x^n} \frac{1}{n}\int \frac{1}{u+1}du$$

$$\xlongequal{\quad\quad} \frac{1}{n}\ln|x^n+1|+C$$

例题2

$$\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx \xlongequal{u=x^4} \frac{1}{4}\int \frac{u^2}{u^2+3u+2}du$$

$$\frac{u^2}{u^2+3u+2} \xlongequal{\text{化为带分式}} 1-\frac{3u+2}{(u+1)(u+2)}$$

$$\xlongequal{\text{真分式标准分解}} 1-\left(\frac{-1}{u+1}+\frac{4}{u+2}\right).$$

- 待定系数法

$$\frac{3u+2}{(u+1)(u+2)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2}.$$

两边乘以$u+1$, 再令$u=-1$.

$$A = \left.\frac{3u+2}{u+2}\right|_{u=-1} = -1$$

比较一次项系数 $A+B=3 \xRightarrow{A=-1} B=4.$

- 真分式由奇点主部唯一确定(Liouville定理)

$$\frac{3u+2}{(u+1)(u+2)} \sim \begin{cases} \dfrac{-1}{u+1}, & u \to -1; \\ \dfrac{4}{u+2}, & u \to -2. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Liouville}} \quad \frac{3u+2}{(u+1)(u+2)} = \frac{-1}{u+1} + \frac{4}{u+2}.$$

例题3

计算 $$\int \frac{1}{x^3+1}dx$$

$$\frac{1}{x^3+1} \xlongequal{\text{真分式分解}} \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\xlongequal{L'Hospital} A = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{1}{3}.$$

比较分子的二次项和常数项:

$$A+B=0, \quad A+C=1 \xlongequal{A=\frac{1}{3}} B=-\frac{1}{3}, \quad C=\frac{2}{3}.$$

例题3(续)

$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}\right)$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \ln|x^2-x+1| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C.$$

例题4

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

例题4(1)

$$x^4+1=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x^4+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}+\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right)\end{aligned}$$

例题4(2)

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}x}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$
$$= \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}x}{x^4+1}$$

$$\int \frac{\sqrt{2}x}{x^4+1}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{(x^2)^2+1}dx^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(x^2)+C.$$

例题4(3)

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C = F(x) + C$$

$$F(x) \xlongequal{F\text{可导,必连续}} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

例题4(4)

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+1} = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-\sqrt{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C = G(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx - \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}(F(x)-G(x)) + C$$

构造题目

$$\int \frac{1}{x(x^7+1)}dx \qquad \int \frac{8x^7+1}{x(x^7+1)(x^8+x+1)}dx$$

$$\int \frac{1}{x(x^k+1)}dx \qquad \int \frac{(k+1)x^k+1}{x(x^k+1)(x^{k+1}+x+1)}dx$$

$$\int \frac{x^{3k-1}}{1+x^{4k}}dx \qquad \int \frac{x^{k-1}}{1+x^{2k}}dx$$

构造题目(1)

$$\int \frac{du}{u+1} \xlongequal{u=x^{-7}} \int \frac{-7x^{-8}}{x^{-7}+1}dx$$

$$= -7\int \frac{1}{x(x^7+1)}dx$$

构造题目(2)

$$\int \frac{du}{u(u+1)} \xlongequal{u=x(x^7+1)} \int \frac{8x^7+1}{x(x^7+1)(x^8+x+1)}dx$$

构造题目(3)

$$\int \frac{du}{u+1} \xlongequal{u=x^{-k}} \int \frac{-kx^{-(k+1)}}{x^{-k}+1}dx = -k\int \frac{1}{x(x^k+1)}dx$$

构造题目(4)

$$\int \frac{du}{u(u+1)} \xlongequal{u=x(x^k+1)} \int \frac{(k+1)x^k+1}{x(x^k+1)(x^{k+1}+x+1)}dx$$

$$\int \frac{du}{u^4+1} \xlongequal{u=x^{-k}} -k\int \frac{x^{-k-1}}{x^{-4k}+1}dx = -k\int \frac{x^{3k-1}}{1+x^{4k}}dx$$

构造题目(6)

$$\int \frac{du}{u^2+1} \xlongequal{u=x^{-k}} -k\int \frac{x^{-k-1}}{1+x^{-2k}}dx = -k\int \frac{x^{k-1}}{1+x^{2k}}dx$$

构造题目(7)

$$\int \frac{du}{u^2+1} \xlongequal{u=x^k} k\int \frac{x^{k-1}}{1+x^{2k}}dv$$

作业

第29次作业: [5.3] 奇

数学分析(A1), 第30次课

任广斌(中国科大)

2020-12-04

本次课主要内容

- 三角、根式积分

三角	根式
万能变换	Euler变换

$$\text{三角、根式积分} \xrightarrow{\text{借助变量代换、分部积分化简}} \text{有理函数}$$

三角、根式积分的计算常常需要利用变量代换和分部积分公式

- 万能变换 $t = \tan\dfrac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

万能变换续

- 万能变换给出勾股定理整数解

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$具有整数解: \begin{cases} a = t^2 - 1 \\ b = 2t \\ c = t^2 + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{N}$$

三角函数: $R(x, y)$是两个变量的有理函数.

$$\text{万能变换} \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \text{有理函数}$$

$$dx = 2d\arctan t = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$\int R(\cos x, \sin x)dx \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

三角函数的积分: 在奇偶下简化

三角函数: $R(x,y)$是两个变量的有理函数.

$$\int R(\cos x, \sin^2 x)\sin x dx \xlongequal[\text{关于}\sin x\text{ 奇}]{t=\cos x} -\int R(t, 1-t^2)dt$$

$$\int R(\cos^2 x, \sin x)\cos x dx \xlongequal[\text{关于}\cos x\text{ 奇}]{t=\sin x} \int R(1-t^2, t)dt$$

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)dx \xlongequal[\text{关于}\sin x, \cos x\text{ 偶}]{t=\tan x} \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

例题1

计算: $$\int \frac{dx}{\sin(2x) + 2\sin x}$$

例题1续

$$原式 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}dx$$

$$t=\tan\frac{x}{2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\begin{aligned} 原式 &= \frac{1}{4}\int \frac{1+t^2}{t}dt \\ &= \frac{1}{4}(\ln|t|+\frac{1}{2}t^2)+C = \frac{1}{4}(\ln|\tan\frac{x}{2}|+\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2})+C \end{aligned}$$

$$\text{原式} \xlongequal{\quad} \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{\sin^2 x(1+\cos x)}dx$$

$$\xlongequal{t=\cos x} -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-t^2)(1+t)}dt$$

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2}$$

$$t = 1: \qquad A = \frac{1}{4}$$

$$t = -1: \qquad C = \frac{1}{2}$$

$$t = +\infty: \qquad B = \frac{1}{4}$$

例题2

计算: $$\int \frac{dx}{2\sin^2(3x) - 3\cos^2(3x) + 1}$$

例题2续

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{u=3x} \frac{1}{3}\int \frac{1}{2\sin^2 u - 3\cos^2 u + 1}du \\
&\xlongequal{t=\tan u} \frac{1}{3}\int \frac{1}{3t^2-2}dt \\
&\xlongequal{\quad} \frac{1}{9}\int \frac{1}{t^2-(\sqrt{\frac{2}{3}})^2}dt \\
&\xlongequal{\quad} \frac{1}{9}\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{2}{3}}}{t+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right| + C \\
&\xlongequal{\quad} \frac{1}{9}\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\ln\left|\frac{\tan(3x)-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\tan(3x)+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right| + C
\end{aligned}
$$

例题3

计算: $$\int \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}dx, \qquad r\in(0,1), \quad |x|<\pi.$$

例题3续

$$\text{原式} \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt,$$

$$\xlongequal{\quad} 2(1-r^2)\int \frac{1}{(1+t^2)(1+r^2)-2r(1-t^2)} dt$$

$$\xlongequal{\quad} 2(1-r^2)\int \frac{1}{(1-r)^2+t^2(1+r)^2} dt$$

$$\xlongequal{\quad} 2\frac{1-r^2}{(1+r)^2}\int \frac{1}{t^2+(\frac{1-r}{1+r})^2} dt = 2\arctan(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2})+C$$

计算: $$\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx$$

$$\left(\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}}\frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1-x}{(1+x)^2\sqrt{x}} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$\text{原式} = \int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,d(1+x)$$

$$= (1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= (1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + C$$

例题

计算: $$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$$

$$(\arcsin\sqrt{x})' = \!=\! \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{原式} \xlongequal{u=\arcsin\sqrt{x}} 2\int u\,du = u^2 + C = (\arcsin\sqrt{x})^2 + C$$

- 型1:　线性分式的根式, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \xlongequal{t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}} \text{有理函数的积分}$$

- 型2:

$$\int (a+bt)^p t^q dt \xlongequal{p,q\in\mathbb{Q}} \begin{cases} \text{型1}, & q\in\mathbb{Z} \\ \text{型1}, \ s=a+bt, & p\in\mathbb{Z} \\ \text{型1}, \ \text{被积函数}=(\frac{a+bt}{t})^p t^{p+q} & p+q\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

根式函数的积分(续)

- 型3:

$$\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}\,dx \xlongequal[t=x^{\beta}]{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}} \text{型2}$$

利用欧拉变换计算椭圆积分

- 椭圆积分与椭圆弧长有关:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \xlongequal{\text{欧拉变换}} \text{有理函数的积分}$$

- 欧拉变换:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \xlongequal{\text{欧拉变换}} \begin{cases} t - \sqrt{a}x, & a > 0 \\ tx - \sqrt{c}, & c > 0 \\ t(x-\alpha), & \text{二次多项式两个实根}\alpha,\beta \end{cases}$$

例题

计算: $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$$

原式 $$=\!=\!=\!= \int \frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx.$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\frac{1}{t}dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)dx = -\frac{2}{3}\frac{1}{x^2-1}dx$$

原式 $$=\!=\!=\!= \int -\frac{2}{3}dt = -\frac{2}{3}t + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

例题

计算: $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$$

原式 $$\overset{u=x^{1/6}}{=\!=\!=\!=} \int \frac{1}{u^3(1+u^2)} 6u^5 du$$

$$=\!=\!=\!= 6\int 1-\frac{1}{1+u^2} du$$

$$=\!=\!=\!= 6(u-\arctan u)+C = 6(x^{1/6}-\arctan x^{1/6})+C$$

计算: $$\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+x+2}}$$

原式 $$\underline{\underline{\qquad}} \int \frac{1}{x(x+1)}\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}dx, \qquad t=\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}.$$

解法二: $$\sqrt{-x^2+x+2}=\sqrt{(2-x)(x+1)}=t(x+1)$$

$$t=\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$$

解法三: 倒数变换$x=\dfrac{1}{t}$

$C[a,b]$上微积分的总结

- 涉及函数: 初等函数$\subset$ 实解析函数$\subset$ 光滑函数$\subset$ 连续函数

- 涉及运算: 求导和积分是一对互逆运算

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$$

- 涉及方法: $\begin{cases} \text{原子分解} & \text{(原子分解, 调和分析)} \\ \text{对偶方法} & \text{(分部积分, 广义函数)} \\ \text{变分方法} & \text{(方程视为变分方程, 数学物理)} \end{cases}$

- 带有积分余项的Taylor公式:

$$T_n(x;x_0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x)\xlongequal{f\in C^{n+1}[a,b]}T_n(x;x_0)+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

- $n=0$: 这是Newton-Leibniz公式, 也是微积分基本定理:

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)dt.$$

- 利用常数变异法证明: 将x_0视为变量, 两边对x_0的导数相同.

- 带有积分余项的Taylor公式$\xRightarrow{\text{积分论}}$ Cauchy余项

$$f(x) = T_n(x;x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!)}(x-x_0)^{n+1}\frac{n+1}{p}(1-\theta)^{n+1-p}$$

- $n=0,\ p=1$: 这是Lagrange中值定理

$$f(x)-f(x_0)=f'(\zeta)(x-x_0).$$

- 在连续函数$C[a,b]$框架下，求导，微分，积分地位等价.

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$$

- 积分记号是象形文字，背负计算方法：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

$$F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow dF(x) = f(x)dx \Longleftrightarrow \int f(x)dx = \int dF(x) = F(x)+C.$$

微积分是仿生学

- 微积分以极限为触角极大地扩充人类的知识.

	$\mathbb{Q}$	:	$\mathbb{R}$
微分学	多项式	:	初等函数
积分学	阶梯函数	:	Riemann可积函数
实分析	特征函数	:	Lebesgue可积函数
泛函分析	光滑函数	:	广义函数

微积分的扩充

微分学 $\Longrightarrow$ 流形上分析,纤维丛理论

积分学 $\Longrightarrow$ 实分析

第30次做业:

[5.4] 1 (3) (7)

[5.4] 2 (1) (6) (10)

数学分析(A1), 第31次课

任广斌(中国科大)

2020-12-07

本次课主要内容

- 定积分

- 不定积分归结于面积给出的原函数

$$\underbrace{\int f(x)dx}_{\text{全部原函数}} = \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\text{一个原函数(面积)}} + C$$

注记

至此不定积分完成历史使命:

- 不定积分归结于研究变上限积分
$$\int_a^x f(t)dt$$

- 研究变上限积分只需要研究积分
$$\int_a^b f(t)dt.$$

微积分基本定理的解读: 不定积分由变上限积分代替

- 微积分基本定理的不定积分解读:

$$\begin{tikzcd} C[a,b] \arrow[r, shift left, "\int"] & C^1[a,b]/\mathbb{R} \arrow[l, shift left, "\frac{d}{dx}"] \end{tikzcd}$$

- 微积分基本定理的定积分解读:

$$\begin{tikzcd} C[a,b] \arrow[r, shift left, "\int_a^x"] & C^1[a,b]/\mathbb{R} \arrow[l, shift left, "\frac{d}{dx}"] \end{tikzcd}$$

注记1

- 积分理论的首次推广：　曲边梯形的面积有意义,有定义.

$$\text{连续函数理论} \xRightarrow{\text{扩大}} \text{Riemann可积函数理论}$$

注记2

- 积分理论的再次推广：曲边梯形的面积的推广，对y轴剖分.

$$\text{Riemann可积函数理论} \xrightarrow{\text{完备化}} \text{Lebesgue可积函数理论}$$

$\Longrightarrow$ 实分析

注记3

- 积分理论的其它推广：　算子值的积分理论

$\Longrightarrow$泛函分析

定积分出场续

在扩充的积分论中, 求导和积分不再等价.

- 积分将一骑绝尘而去:

$$\text{Riemann 积分} \subset \text{Lebesgue积分} \subset \text{抽象积分理论.}$$

- 在纤维丛上的微积分中, 求导和积分联手为分析做贡献.

微积分的核心秘密

- 微积分的实质:

局部:　　利用的简单、规则取代复杂、不规则。

整体:　　局部的连续叠加.

微积分分的威力在于极限在于极限

$$\overbrace{\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{没有逼近过程}}}^{\substack{\text{微元法}\\ \text{直接上切线}\\ \text{逼近极限二合一}}} \quad \frac{\underline{\text{点态变化率}}}{\text{具体实现}} \quad \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\text{逼近过程}}$$

$$\overbrace{\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{没有逼近过程}}}^{\text{微元法}} \quad \frac{\underline{\text{积少成多}}}{\text{具体实现}} \quad \underbrace{\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i}_{\text{逼近过程}}$$

曲边梯形面积的定义

局部是规则的面积, 极限过程产生整体面积.

- 分割: $\pi: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$

$$\|\pi\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i.$$

- 求和:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i, \quad \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

- 取极限:

$$面积 = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

面积定义中的极限的$\epsilon-\delta$精确定义

若存在$I\in\mathbb{R}$, 使得对$\forall\ \epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$\|\pi\|<\delta$时, 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon, \quad \forall\ \zeta_i\in[x_{i-1},x_i],$$

则称I为Riemann和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$ 当$\|\pi\|\to 0$时的极限, 记为

$$I=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i.$$

- 称极限值I 为f 在$[a,b]$ 上的Riemann积分或定积分,
- 称f在$[a,b]$上Riemann可积.

- $R[a,b] = [a,b]$上Riemann可积函数全体.

$$\int_a^b f(x)dx :\xlongequal{f\in R[a,b]} \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

$$\underbrace{\int_a^b}_{\text{积分符号}} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{被积函数}} \underbrace{dx}_{x\text{是积分变量是哑标}}}^{\text{积分表达式}}$$

定积分的注记1

- 定积分作为极限与古典极限不同:

$\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$	$\|\pi\|$给定	$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$不确定,	π, ζ_i不确定
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	n给定	a_n确定	
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	x给定	$f(x)$确定	

定积分的注记2

- 定积分作为极限可以转化为古典极限:

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i \xlongequal[\text{取区间等分},\ \zeta_i\text{区间端点}]{f\in R[a,b]} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}$$

- 定积分转化为古典极限, 由此得到定积分的性质.

定积分的注记3

- 定积分作为极限的分割特点:

$$\|\pi\| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{分割越来越细}$$

$$\|\pi\| \to 0 \quad \not\Leftrightarrow \quad \text{增加分点}$$

定积分的注记4

- 定积分的积分变量是哑标:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

$$\text{离散情形} \quad \sum_{n=1}^m a_n = \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{j=1}^m a_j.$$

- 不定积分的积分变量不是哑标:

定积分的注记5

- 定积分的几何意义:

$$\int_a^b |f(x)|dx = \text{曲边梯形的面积}.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \text{曲边梯形的代数(带符号)面积}.$$

定积分的注记5

- 定积分可转化为非负函数的定积分:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$$

定积分的注记5

- 可积函数的简化(极限的精髓):

$$\mathbb{Q} : \mathbb{R} = \text{多项式} : \text{初等函数} = \text{阶梯函数} : \text{Riemann可积函数}$$

- 定积分是有方向积分(第二型曲线积分)

$$\int_a^b := -\int_b^a$$

定积分的注记7

- 定积分与不定积分的关系

$$\int f(x)dx \xlongequal{f\in C[a,b]} \int_a^x f(t)dt + C$$

- 定积分计算归结于不定积分:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^x f(t)dt + C\right)\Big|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b$$

- 积分记号是象形文字, 背负天然的计算方法.

- 狭义积分学 $=\!=\!=\!=$ 微分学:

$$C^1[a,b]/\mathbb{R} \xrightleftharpoons[\text{积分}]{\text{求导}} C[a,b]$$

- 广义积分学 $\nLeftrightarrow$ 微分学:

定积分的注记9

- Riemann可积函数 $\not\Leftrightarrow$ 具有原函数的函数:

	Riemann可积函数 柔软	具有原函数的函数 刚性
$\chi_{[-1,1]\setminus\{0\}}$	$\checkmark$	$\times$ 不连续, Darboux
$(x^2 \sin \frac{1}{x^2})'$	$\times$ 无界	$\checkmark$

定积分的注记9

- Riemann可积函数 $\not\Leftrightarrow$ 具有原函数的函数.

- 两类函数脱节的根本原因是涉及两套理论.

  - Riemann可积函数的柔软理论:

    $R[a,b]/\sim$: 函数允许修改在有限点处的值, 不改变可积性和积分值.

    $$f \in R[a,b]/\sim \Longrightarrow f \ \ a.e.\text{有原函数}, \quad f \overset{a.e.}{=\!=} F'$$

  - 具有原函数的函数的刚性理论:

    作为古典函数, 不允许修改在任意点处的值, 否则破坏连续性, 破坏具有原函数.

定积分的注记10

- 微元法:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\substack{\text{无逼近}\\ \text{一步到位}\\ \text{直接上切线}}} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\text{逼近过程}}$$

$$\underbrace{\int_a^b f(t)dt}_{\substack{\text{无逼近}\\ \text{二合一,一步到位}\\ \text{象形}}} = \underbrace{\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta_i}_{\text{逼近过程}}$$

- Riemann可积性定理:

$$f \in R[a,b] \Longleftrightarrow f\text{在}[a,b]\text{有界}, a.e.\text{连续}.$$

定积分的注记12

- Riemann积分非绝对收敛积分.

$$f = \chi_{\mathbb{Q}} - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}, \qquad |f| = 1$$

$$\Longrightarrow \qquad f \notin R[0,1], \qquad |f| \in R[0,1]$$

- Lebesgue积分是绝对收敛积分.

例题

$$\int_0^a x^2dx \xlongequal[\zeta_i\text{取右端点}]{n\text{等分}} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n}a)^2\frac{a}{n}$$

$$\xlongequal{\qquad\qquad} \lim_{n\to\infty}\frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

$$\int_0^a x^2dx \xlongequal{\text{计算方法的威力}} \int_0^a d\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{3}a^3.$$

例题

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right)^{1/n}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right)}$$

$$= e^{\int_0^1 \ln(1+x)dx} = e^{\int_0^1 \ln(1+x)d(x+1)} = \frac{4}{e}.$$

作业

第31次做业:

[6.1] 2 3

数学分析(A1), 第32次课

任广斌(中国科大)

2020-12-09

本次课主要内容

- 微积分基本定理

微积分实质

$$C[a,b] \underset{\text{求导}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$$

$$R[a,b] \xrightarrow[\text{非单射},\ \nexists\text{逆}]{\text{积分}} C[a,b]$$

从实分析的观点看待微积分基本定理

$$L^1[a,b]/\sim \quad \underset{\text{求导}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}} \quad AC[a,b]/\mathbb{R}$$

$$R[a,b]/\sim \quad \underset{\text{求导}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}} \quad R^1[a,b]/\mathbb{R}$$

$$R^1[a,b] = \left\{ f \in C[a,b] : \exists g \in R[a,b],\ f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt \right\}$$

- 注意:

$$f \in R[a,b], \quad f \xlongequal{a.e.} g \quad \not\Rightarrow \quad g \in R[a,b]$$

$$f \in R[a,b] \xRightarrow{\text{古典数列极限}} \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}.$$

注记

验证Riemann可积性都归结于Riemann可积性定理.

- Riemann可积性定理 $\Longrightarrow$ $f \in R[a,b]$.

- 唯一性: $f \in R[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx$唯一.

积分的性质(续)

- 线性性:

$$\forall f, g \in R[a,b], \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda f + \mu g \in R[a,b]$$

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

积分限可加性

- 可加性:

$$\forall f \in R[a,c], \quad f \in R[c,b], \quad c \in (a,b)$$

$$\Longrightarrow \quad f \in R[a,b]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

证明: 取$[a,c]$的n等分分割, $[c,b]$的n等分分割, 合在一起:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c < x_{n+1} < x_{n+2} < \cdots < x_{2n} = b$$

$$\xrightarrow{\text{取}\zeta_i = x_i} \quad \sum_{i=1}^{2n} f(\zeta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i + \sum_{i=n+1}^{2n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

积分限可加性(续)

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{积分存在的前提下}}{\underset{a,b,c\text{无大小关系}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

连续函数和Riemann可积函数关系

Riemann 可积性定理 $\Longrightarrow$ $C[a,b] \subset R[a,b]$

Riemann积分的$\epsilon-\delta$精确定义

$f \in R[a,b] \Longrightarrow \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,$ 当$\|\pi\| < \delta$时, 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon$$

对任意的分割π和任意的$\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$成立.

记号 $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$

$$\|\pi\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

有界性：证法1

- 存在Riemann和有界:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i\right| < 1 + \left|\int_a^b f(x)dx\right|, \quad \forall\ \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

- 函数在$[x_0, x_1]$有界:

$$\forall \zeta_1 \in [x_0, x_1] \xRightarrow[i=2,\cdots,n]{\text{取}\zeta_i = x_i} |f(\zeta_1)| \leqslant \frac{1}{\Delta x_1}\left(1 + \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \left|\sum_{i=2}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right|\right)$$

- 同理, f在$[x_{i-1}, x_i]$有界, 从而在$[a, b]$有界.

有界性：反证法

- 可设f无上界(否则考察$-f$)：$\forall\ \pi: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

- 可设f在第一个分割区间$[x_0, x_1]$无上界(其它情况类似).

- Riemann和可以任意大:

$$\forall M > 0,\ \text{选取}\zeta_1 \in [x_0, x_1],\ \zeta_i = x_i (i \neq 1):$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i = f(\zeta_1)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(x_i)\Delta x_i \geqslant M.$$

- $\xrightarrow{\|\pi\| \to 0} \int_a^b f(x)dx \geqslant M \to +\infty$, 矛盾.

保序性

$$f \geqslant 0 \xrightarrow{f \in R[a,b]} \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

保序性

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \overset{f\in R[a,b],\ f\geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad f\text{在连续点处恒为零}$$

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \overset{f\in R[a,b],\ f\geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad f \overset{a.e.}{=\!=} 0.$$

保序性证明

- $$\int_a^b f(x)dx = 0 \xrightarrow{f \in R[a,b],\ f \geqslant 0} f\text{在连续点处恒为零}$$

反证法： 假设x_0是f连续点, $f(x_0) > 0$

$$\Longrightarrow \quad \text{存在}x_0\text{某领域}I \subset [a,b]: \quad f|_I \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geqslant \int_I f(x)dx \geqslant \frac{f(x_0)}{2}|I| > 0, \quad \text{矛盾}$$

- $$\int_a^b f(x)dx = 0 \xLeftarrow{f\in R[a,b],\ f\geqslant 0} f\text{在连续点处恒为零}$$

证明: $$\int_a^b f(x)dx \xlongequal{\text{取}\zeta_i\text{为}f\text{连续点}} \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i = 0.$$

保序性(续)

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \overset{f \in C[a,b],\ f \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad f \equiv 0$$

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \quad \overset{f \in C[a,b],\ f \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad f\text{不恒为零}$$

单调性

$$f \geqslant g \xRightarrow{f,g \in R[a,b]} \int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx \overset{f,g \in R[a,b]}{\underset{f \geqslant g}{\Longleftrightarrow}} f \overset{a.e.}{=\!=} g.$$

$$f \in R[a,b]$$

$$\xRightarrow{\text{反之不成立}} \quad |f| \in R[a,b], \qquad \text{(Riemann可积性定理)}$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx \qquad \text{(积分定义或单调性)}$$

$$C[a,b] \underset{\text{求导}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$$

$$f \in C[a,b] \quad \Longrightarrow \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt \text{是} f \text{的原函数, 而且}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$$

- Darboux介值定理 $\xrightarrow[\text{某个函数的导函数}]{\text{连续函数必是}}$ 连续函数介值定理

微积分基本定理证明

$$f \in C[a,b] \Longrightarrow f\text{在}[a,b]\text{一致连续}$$

$$\Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当}|x-t| < \delta, \text{而且} x, t \in [a,b]\text{时, 有}$$

$$|f(x) - f(t)| < \epsilon.$$

$$\begin{aligned}
|F'(x) - f(x)| &= \left| \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x)) dt \right| \\
&\leqslant \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dt \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}$$

- Newton-Leibniz公式给出积分计算方法:

$$\int_a^b f(x)dx \xlongequal[f\text{具有原函数}]{f\in R[a,b]} F(b)-F(a)$$

注记

- 积分计算归结于原函数、不定积分
- Riemann积分理论以连续函数积分理论为基础

Newton-Leibniz公式是带积分余项的Taylor公式

- F在$[a,b]$连续， 在(a,b)可导， $F' \in R[a,b]$， 则

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)dx$$

$$F(b) \xlongequal{F'\text{逐点存在},F' \in R[a,b]} F(a) + \int_a^b F'(x)dx$$

- $F' \in R[a,b] \Longrightarrow \int_a^b F'(x)dx$积分确定
- F'逐点存在 $\Longrightarrow F(a), F(b)$确定不能被修改

Newton-Leibniz的连续版本

- 连续版本:

$$\underbrace{\int_a^b \underbrace{\underbrace{F'(x)}_{\text{变化率}} dx}_{\text{绝对变化量}}}_{\text{绝对变化量净积累}} = F(x)\Big|_a^b$$

- 离散版本：　裂项求和

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\underbrace{\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}}_{\text{变化率}} (x_i-x_{i-1})}_{\text{绝对变化量}}}_{\text{绝对变化量净积累}} = F(b)-F(a)$$

Newton-Leibniz公式的证明

假设F在$[a,b]$连续， 在(a,b)可导， $F' \in R[a,b]$， 则

$$F(b)-F(a) \xlongequal{[a,b]n\text{等分}} \sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))$$

$$\xlongequal{Lagrange} \sum_{i=1}^{n} F'(\zeta_i)\Delta x_i$$

$$\xlongequal{\|\pi\|\to 0} \int_a^b F'(x)dx$$

作业

第32次做业:

[6.1] 4 7

[6.2] 1 2 8 10

数学分析(A1), 第33次课

任广斌(中国科大)

2020-12-11

本次课主要内容

- 积分中值定理

积分中值定理

Theorem (积分第一中值定理)

$$\int_a^b f(x)\underbrace{g(x)dx}_{\text{正测度}} \xlongequal[\exists\ \zeta\in[a,b]]{f\in C[a,b],\ g\in R^+[a,b]} f(\zeta)\int_a^b g(x)dx$$

注1: 在$f, g \in C[a, b]$, $g > 0$的假设下, 可取中值为内点$\zeta \in (a, b)$.

注2: $R^+[a, b] = \{f \in R[a, b] : \ f \geqslant 0\}$.

积分中值定理注记：积分两个特性：

- 积分增强光滑性
- 积分是一种平均：
  - 概率测度：

$$d\mu(x)=\frac{g(x)}{\int_a^b g(t)dt}dx\text{是概率测度}$$

  - 概率测度的离散版本是加权平均.
  - 关于概率测度具有积分平均：

$$\int_a^b f(x)d\mu(x)\xlongequal{\exists\ \zeta\in[a,b]}f(\zeta)$$

积分中值定理的本质:

- 积分中值定理是将混合物分离方法.

积分中值定理的条件注记

- 积分中值定理的条件不能减弱:

中值	加权
连续	非负
$f \in C[a,b]$	$g \geqslant 0$

- 积分中值定理对于$g>0$成立$\Longrightarrow$对于$g\geqslant 0$成立

$$\int_a^b f(x)(g(x)+\frac{1}{n})dx \xlongequal{\zeta_n\in[a,b]} f(\zeta_n)\int_a^b (g(x)+\frac{1}{n})dx$$

不妨设$\zeta_n\to\zeta_0\in[a,b]$, 在上式中令$n\to\infty$即可.

介值定理$\Longrightarrow$积分中值定理

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) \in [f_{\min}, f_{\max}] = f[a,b]$$

$$\xRightarrow{\exists\ \zeta\in[a,b]} \quad f(\zeta) = \int_a^b f(x)d\mu(x).$$

- 假设$f, g \in C[a,b]$, $g > 0$.

$$H(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt, \qquad G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Cauchy中值定理 $$\frac{H(b)-H(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{H'(\zeta)}{G'(\zeta)}$$

$\Longleftrightarrow$ 积分中值定理 $$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} = f(\zeta)$$

- 利用微分中值定理证明积分中值定理:

$$f \in C[a,b] \quad \text{可代之以} \quad f \in R[a,b], fg, g\text{有原函数}.$$

积分中值定理=变分等式

- 变分方程

$$F'(\zeta) = 0$$

- 辅助函数:

$$F(x) = \int_a^x fg \int_a^b g - \int_a^b fg \int_a^x g.$$

- 在$f, g \in C[a,b]$，$g > 0$的假设下，可取中值为内点$\zeta \in (a,b)$.

微分中值定理=积分中值定理=变分等式

- 微分中值定理:

$$F(b)-F(a) \xlongequal[\exists\,\zeta\in(a,b)]{\substack{F\in C[a,b]\\ F'在(a,b)存在}} F'(\zeta)(b-a)$$

- 微分中值定理$\xlongequal{\text{N-L公式}}$积分中值定理:

$$\int_a^b f(x)dx \xlongequal{f\in R[a,b]具有原函数} f(\zeta)(b-a)$$

- 积分中值定理$\xlongequal{微分中值定理}$变分等式:

$$\left((b-a)\int_a^x f(t)dt-(x-a)\int_a^b f(t)dt\right)'=0.$$

积分第二中值定理

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{权函数}} g(x)dx \overset{f,g\in R[a,b]}{\underset{\substack{\color{red}{f\text{单调减非负}}\\ \exists\,\zeta\in[a,b]}}{=\!=\!=\!=\!=}} \underbrace{f(a)}_{\text{最大值}} \underbrace{\int_a^{\zeta}}_{\text{中值在积分限}} g(x)dx$$

积分中值定理是分离工具.

积分第二中值定理的离散版本

Theorem (Abel引理)

$$\epsilon_k \geqslant 0, \quad \searrow, \quad u_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k = 0, 1, \cdots, n$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\epsilon_k}_{\text{加权}} u_k \in \underbrace{\epsilon_0}_{\text{最大值}} \left[\min_{0 \leqslant k \leqslant n} \sum_{i=0}^{k} u_i, \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \sum_{i=0}^{k} u_i \right].$$

积分中值定理是分离工具.

$$\sum_{k=0}^{n}\epsilon_k(S_k - S_{k-1}) \xlongequal[\epsilon_{n+1}=0,\quad S_{-1}=0]{\text{在求和指标以外零扩充}} -\sum_{k=0}^{n}(\epsilon_{k+1}-\epsilon_k)S_k$$

证明: 左边 $= \epsilon_n S_n - \epsilon_0 S_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1}(\epsilon_k - \epsilon_{k+1})S_k =$ 右边

Abel引理的证明

证明: $$\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k u_k \xlongequal{u_k=S_k-S_{k-1}} \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k (S_k - S_{k-1})$$

$$\xlongequal{\text{分部求和}} \sum_{k=0}^{n} (\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) S_k$$

$$\in \quad \epsilon_0 [m, \ M]$$

积分第二中值定理的证明(1)

$$\forall\, \pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \forall \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

积分第二中值定理的证明(2)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\xlongequal{\qquad\qquad} \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(\zeta_i)-f(x))g(x)dx\right|$$

$$\leqslant \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$$

$$\xrightarrow[\text{可积充要条件}]{\|\pi\|\to 0} 0.$$

积分第二中值定理的证明(3)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx$$

$$\overset{\text{Abel引理}}{\in} f(a)\left[\min_{c\in[a,b]}\int_a^c g(x)dx,\ \max_{c\in[a,b]}\int_a^c g(x)dx\right]$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \xlongequal[\text{介值定理}]{} f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx$$

积分第二中值定理的另一证明

- 积分第二中值定理不依赖于Abel引理的证明. 需要加强条件:

$$f \in C^1[a,b], \quad g \in C[a,b], \quad f \geqslant 0 \searrow$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b f(x)dG(x), \qquad G(x) = \int_a^x g \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} f(b)G(b) - \int_a^b Gf' \\
&\xlongequal{\text{积分中值}} f(b)G(b) + (f(a) - f(b))G(\zeta) \\
&\in f(a)\left[\min_{[a,b]} G, \ \max_{[a,b]} G\right] \\
&\xlongequal{\text{介值定理}} f(a)\int_a^\zeta g.
\end{aligned}$$

积分第二中值定理的单调增加版本

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{权函数}} g(x)dx \xlongequal[\substack{f\text{单调增非负} \\ \exists \zeta \in [a,b]}]{f,g \in R[a,b]} \underbrace{f(b)}_{\text{最大值}} \underbrace{\int_\zeta^b}_{\text{中值在积分限}} g(x)dx$$

- 证明同$f \searrow$.
- 证法2:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b f(b+a-t)g(b+a-t)dt \\
&\overset{F(x):=f(b+a-x)}{\underset{G(x):=g(b+a-x)}{=\!=\!=\!=}} \int_a^b F(x)G(x)dx \\
&\overset{\text{第二中值}}{=\!=\!=} F(a)\int_a^\eta G(t)dt \\
&= f(b)\int_\zeta^b g(x)dx
\end{aligned}
$$

积分第二中值定理的单调版本

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \underset{\substack{f\text{单调} \\ \exists\,\zeta\in[a,b]}}{\overset{f,g\in R[a,b]}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} f(a)\int_a^{\zeta} g(x)dx + f(b)\int_{\zeta}^{b} g(x)dx$$

积分第二中值定理的单调版本续

证明: $f(x)-f(b)\geqslant 0 \searrow$

$$\int_a^b (f(x)-f(b))g(x)dx = (f(a)-f(b))\int_a^\eta g(x)dx$$

移项即可.

带积分余项的Taylor展开(微分学顶峰)

假设 $f^{(n+1)}$ *在* $[a,b]$ *上存在,* $f^{(n+1)} \in R[a,b]$, *则*

$$f(x) \;=\!=\!=\; T_n(x;x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

$$T_n(x;x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

带积分余项的Taylor展开(续)

- 条件: $f^{(n+1)}$在$[a,b]$上存在, $f^{(n+1)} \in R[a,b]$.

  在边界点处$f^{(n+1)}$存在, 可减弱为在边界点处$f^{(n)}$连续.

带积分余项的Taylor展开证明

- 固定x, 令变量$t := x_0$

$$\frac{d}{dt}\Big(f(x) - T_n(x;t)\Big) = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} \in R[a,b]$$

$$\xrightarrow[\text{两边积分}]{\text{N-L公式}}$$ 带积分余项的Taylor公式成立

正测度特点

- $\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ 带积分余项的Taylor展开:

$$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \xlongequal[\text{问:为何对}x_0\text{求导}]{\text{关于}x_0\text{求导验证}} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)(x-\zeta)^{n+1-p} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{p-1} dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_))^{n+1} \frac{n+1}{p}(1-\theta)^{n+1-p}$$

$p = n+1$, Lagrange余项

作业

第33次做业:

[6.2]	3	5	9
[6.3]	2	3	5

数学分析(A1), 第34次课

任广斌(中国科大)

2020-12-14

本次课主要内容

- 微积分基本定理

微积分基本定理

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$$

- $$f \in C[a,b] \Longrightarrow F(x) = \int_a^x f \in C^1[a,b]$$

$$F' = f.$$

- $$F \in C^1[a,b] \Longrightarrow F' \in C[a,b]$$

$$\int_a^x F'(t)dt \xlongequal{N-L} F(x) - F(a).$$

积分理论的推广

$$R[a,b] \xrightarrow[\text{非单射}, \nexists\text{逆}]{\text{积分}} C[a,b]$$

$$f \in R[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^x f(t)dt \in C[a,b]$$

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' \xlongequal{a.e.} f(x)$$

等号在f的连续点处成立.

证明

- 连续性:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leqslant M|\Delta x| \to 0.$$

- 可导性:

在f的连续点x_0处:

$\forall\ \epsilon,\ \exists \delta > 0,$ 当$|x - x_0| < \delta,\ x, x_0 \in [a, b]$时, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x}(f(t) - f(x_0))dt\right| \leqslant \epsilon$$

Lebesgue积分意义下的微积分基本定理

$$L^1[a,b]/\sim \;\underset{\text{求导}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}}\; AC[a,b]/\mathbb{R}$$

$$R[a,b]/\sim \;\underset{\text{求导}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}}\; R^1[a,b]/\mathbb{R}$$

$$R[a,b] \quad\Longrightarrow\quad Range\int_a^x$$

$$\Longrightarrow\quad \left\{f\in C[a,b] : \exists\, g\in R[a,b],\ f(x)=f(a)+\int_a^x g\right\}$$

注记

- $$f \in R[a,b] \Longrightarrow \int_a^x f \in R^1[a,b]$$

$$\left(\int_a^x f\right)' \xlongequal{a.e.} f.$$

- $$F \in R^1[a,b] \Longrightarrow \exists\, g \in R[a,b],\ F(x) = F(a) + \int_a^x g$$

$$L^1[a,b] \ni F' \xlongequal{a.e.} g \in R[a,b].$$

$$\int_a^x F'(t)dt \xlongequal[\text{微积分基本定理}]{Lebegue} F(x) - F(a).$$

- 对于a.e.有定义的函数:

  无法确定Riemann可积性, 只能确定Lebesgue可积性.

$$f \in R[a,b], \quad f \xlongequal{a.e.} g \quad \not\Rightarrow \quad g \in R[a,b]$$

$$f \in R[a,b], \quad f \xlongequal{a.e.} g \quad \Rightarrow \quad g \in L^1[a,b]$$

注记

$$\int_a^b f' \overset{f\nearrow}{\leqslant} f(b) - f(a)$$

对Cantor函数"$<$"成立.

Sobolev空间

$$W^{1,1}[a,b] := \left\{ F \in C[a,b] : \ F'在(a,b)存在, \ F' \in R[a,b] \right\}$$

Newton-Leibniz公式续

$$\int_a^x F' \xlongequal{F\in W^{1,1}[a,b]} F(x) - F(a)$$

注记

假设$F \in R^1[a,b]$:

$$\int_a^x F'(t)dt \xlongequal[\int_a^x \text{是Lebesgue积分}]{F\in R^1[a,b]} F(x) - F(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x F(t)dt \xlongequal[\int_a^x \text{是Lebesgue积分}]{a.e.} F(x)$$

注记

$$\int_a^x sgn(t-\frac{a+b}{2})dt \in R^1[a,b] \setminus W^{1,1}[a,b].$$

该连续函数以a, b为零点, 在$x=\frac{a+b}{2}$*两边导数分别为*$+1,-1$.

由Lebegue积分理论给出的微积分基本定理使用范围$=R^1[a,b]$

由Riemann积分理论给出的微积分基本定理使用范围$=W^{1,1}[a,b]$

具有原函数的非连续函数

$$R[0,1] \setminus C[0,1] \ni f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

具有原函数的非连续函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ 具有原函数$F(x)$:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x \sin\frac{1}{t}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^x t^2 d\cos\frac{1}{t}\\ &= x^2\cos\frac{1}{x}-\int_0^x \underbrace{2t\cos\frac{1}{t}}_{\text{连续函数}}\,dt\end{aligned}$$

$$F'(x) \overset{\text{在}f\text{连续点}}{=\!=\!=\!=} f(x), \qquad F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=0=f(0).$$

Riemann可积函数和具有原函数的函数不同

$$f \in R[a,b] \qquad \not\Leftrightarrow \qquad f\text{有原函数}$$

- 不能作为导函数(Darboux)：$\chi_{[-1,1]\setminus\{0\}}$
- 无界：$\left(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right)'$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = 0, \quad F'(x) \xlongequal{x\neq 0} 2x \sin \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

变上限积分求导公式

- 假设

$$
\begin{aligned}
&u : I \longrightarrow [a,b]\text{可导}\\
&v : I \longrightarrow [a,b]\text{可导}\\
&f(\cdot,x) \in C[a,b], \quad \forall x \in I\\
&f(t,\cdot) \in C^1(I), \quad \forall t \in [a,b]
\end{aligned}
$$

$$
\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t,x)dt\right)' = f(u(x),x)u'(x) - f(v(x),x)v'(x) + \int_{v(x)}^{u(x)} f'_x(t,x)dt.
$$

不妨设$v(x) \equiv a$.

令 $$g(u,w) = \int_a^u f(t,w)dt$$

$$\frac{d}{dx}g(u,w) \xlongequal[\text{链式法则}]{u=u(x),w=w(x)} g'_u u' + g'_w w'.$$

$$g'_u = f(u,w), \quad g'_w = \int_a^u f'_w(t,w)dt$$

Taylor展开多重积分余项

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_n} f^{(n+1)}(t)dtdx_n \cdots dx_1.$$

上式等价于(关于x_0求导)

$$-\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0) \xlongequal[\forall\ f]{a.e.} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\cdots\int_{x_0}^{x_{n-1}} -f^{(n+1)}(x_0)dx_n\cdots dx_1.$$

上式等价于

$$\frac{(x-x_0)^n}{n!} \xlongequal{\text{归纳法}} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\cdots\int_{x_0}^{x_{n-1}} dx_n\cdots dx_1.$$

- 这是原式: n 换为$n-1$, 取$f^{(n)}=1$.
- 此式是$\frac{(x-x_0)^n}{n!}$展开到$n-1$次多项式.

Taylor展开多重积分余项

假设$f^{(n+1)}$在$[a,b]$上存在, $f^{(n+1)} \in R[a,b]$, 则

$$f(x) \;=\!=\!=\; T_n(x;x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

$$\;=\!=\!=\; T_n(x;x_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\cdots\int_{x_0}^{x_n} f^{(n+1)}(t)dtdx_n\cdots dx_1.$$

$$T_n(x;x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f, g \in R[a, b] \Longrightarrow |\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|\,\|g\|.$$

$\mathbb{R}^n$	$\|\|x\|\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}$
$R[a,b]$	$\|\|f\|\| = \sqrt{\int_a^b \|f(x)\|^2 dx}$

Cauchy不等式续

$$\langle f,\ g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \qquad \|f\|^2 = \langle f,\ f\rangle$$

$$\left\|\int_a^b fg\right\| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}$$

离散版本: $\left\|\sum a_k b_k\right\| \leqslant \sqrt{\sum |a_k|^2}\sqrt{\sum |b_k|^2}$

证明

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_a^b (f+\lambda g)^2 \\
&= \lambda^2 \int_a^b g^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2
\end{aligned}
$$

$$
\Delta = \left(\int_a^b fg\right)^2 - 4\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leqslant 0.
$$

等式成立当且仅当f和g相差常数因子.

注记

- $(R[a,b], \|\cdot\|)$ 约定几乎处处相等为恒等
- $(R[a,b], \|\cdot\|)$是赋范线性空间, 非完备.
- $R[a,b]$完备化 $= L^2[a,b]$

假设$f^{(n+1)}$在$[a,b]$上存在, $f^{(n+1)}\in R[a,b]$, 则

$$f(x) \;=\!=\!=\; T_n(x;x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

$$T_n(x;x_0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

积分余项$\Longrightarrow$微分余项

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \\
&= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)(x-\zeta)^{n+1-p} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{p-1} dt \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_{)})^{n+1} \frac{n+1}{p}(1-\theta)^{n+1-p}
\end{aligned}
$$

$p = n+1$,　Lagrange余项

第34次做业:

[6.3] 4 6 7 问题4.

数学分析(A1), 第35次课

任广斌(中国科大)

2020-12-16

本次课主要内容

- 分部积分公式　　(§4)
- 换元公式　　(§4)

分部积分公式

$$\int_a^b f\,dg \xlongequal{f,g\in C^1[a,b]} (fg)\Big|_a^b - \int_a^b g\,df$$

分部积分公式

- 条件: 所有在积分号中出现的函数要求连续.
- 条件可减弱为:
  - 所有导函数都逐点存在.
  - 在积分号中出现的函数要求Riemann可积.

证明

$$\int_a^b (fg)'(x)dx \xlongequal{(fg)'\text{存在}\in R[a,b]} (f(x)g(x))\Big|_a^b$$

分部积分公式(高阶)

$f^{(n+1)}$, $g^{(n+1)}$ 在$[a,b]$存在且Riemann可积. 则

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)g^{(n+1)}(x)dx\\ = &\left[f(x)g^{(n)}(x)-f'(x)g^{(n-1)}(x)+\cdots+(-1)^n f^{(n)}(x)g(x)\right]_a^b\\ &+(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)g(x)dx.\end{aligned}$$

口诀

- 导数转嫁一次出现一个负号.
- 边界项第一项=被积函数其中一项导数降一次, 另一项不变.
- 边界项第二项=第一项的修正:

  其中一项导数继续降一次, 另一项导数升一次
- 这一过程持续下去,直到导数降到函数；交错求和.

注记

- 高阶分部积分公式每项都是相同的阶数=n.

$$积分 = -1阶, \quad 函数 = 0阶.$$

- 交错和与裂项和关系:

$$交错和 \xRightarrow{求导} 裂项和$$

证明

- 证法1:

$$F(x) := f(x)g^{(n)}(x) - f'(x)g^{(n-1)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g(x)$$

$$\Longrightarrow \quad F'(x) = f(x)g^{(n+1)}(x) + (-1)^n f^{(n+1)}(x)g(x)$$

$$\int_a^b F'(x)dx \xlongequal{F'\text{点点存在且可积}} F(x)\Big|_a^b .$$

证明续

- 证法2:　分部积分公式反复使用.

$$\int_a^b f(x)g^{(n+1)}(x)dx = \int_a^b f(x)dg^{(n)}(x)$$

$$= \left[f(x)g^{(n)}(x)\right]_a^b - \int_a^b g^{(n)}(x)f'(x)dx$$

$$= \left[f(x)g^{(n)}(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)dg^{(n-1)}(x)$$

$$= \left[f(x)g^{(n)}(x) - f'(x)g^{(n-1)}(x)\right]_a^b + \int_a^b g^{(n-1)}(x)f''(x)dx$$

$$= \cdots$$

假设 $f \in C[a,b]$, φ' *在* $[\alpha,\beta]$ *存在可积而且*

- φ*将边界点映为边界点:* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
- φ*满足遍历条件:* $\varphi[\alpha,\beta] = [a,b]$.

(等价于 $\varphi[\alpha,\beta] \subset [a,b]$*)*

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

注记: a, b没有大小关系, α, β没有大小关系.

证明

$$F(x) \xlongequal{\quad:\quad} \int_a^x f, \qquad (F,\varphi\text{可复合}, \varphi[\alpha,\beta]=[a,b])$$

$$(F\circ\varphi)'(t) \xlongequal{\qquad} f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[a,b]$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \xlongequal{\qquad} F(x)\Big|_a^b \xlongequal{\qquad} F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta$$

$$\xlongequal{\text{N-L}} \int_\alpha^\beta (F(\varphi(t)))'dt$$

$$\xlongequal{\qquad} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

积分换元公式

假设$\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ 严格单调双射, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, 而且

- $f \in R[a,b], \quad f\circ\varphi \in R[\alpha,\beta]$.

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

证明

$$\pi_1: \quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta, \qquad \varphi(t_k) = x_k$$

$$\pi_2: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \xlongequal{\theta_i \in (t_{i-1}, t_i)} \varphi'(\theta_i)\Delta t_i$$

$$\xi_i := \varphi(\theta_i) \in (x_{i-1}, x_i) \qquad (\varphi\text{严格单调})$$

证明续

$$\|\pi_1\| \to 0 \xRightarrow{\varphi \in C^1[\alpha,\beta]} \|\pi_2\| \to 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\theta_i))\varphi'(\theta_i)\Delta t_i$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

积分换元公式

假设$\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ 严格单调双射, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, $\quad f \in C[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

变上限求导

$$\frac{d}{ds}\int_a^{\varphi(s)} f(x)dx = \frac{d}{ds}\int_\alpha^s f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\Longrightarrow \int_a^{\varphi(s)} f(x)dx = \int_\alpha^s f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + C$$

$$C = 0$$

π是无理数

反证: $\pi = \dfrac{p}{q}, \qquad p, q \in \mathbb{N}.$

考虑$[0, \pi]$上的函数:

关于中心对称, a.e. 非负, $2n$次多项式, 在端点处各阶导数为整数

$$f(x) = \frac{q^n}{n!} x^n (\pi - x)^n = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n$$

续

考察它的Fourier系数

$$0 < \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx \leqslant \frac{q^n \pi^{2n}}{n!}\pi \in (0,1), \qquad n \gg 1.$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx \xlongequal{\text{分部积分}} f\text{在原点和}\pi\text{点各阶导函数的}\mathbb{Z}\text{-线性组合}$$

例题

计算 $$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$$

解答

原式记为I

$$I \xlongequal{x=\pi-t} \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt - I$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}d(-\cos t) \\
&= -\frac{\pi}{2}(2\arctan(\cos t)-\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}-\pi
\end{aligned}$$

注记

- 本例借助不定积分失效

- 定积分计算无需借助不定积分

$$\int_a^b f = \int f \Big|_a^b .$$

- 定积分的计算保留不定积分的计算方法, 即分部积分公式和换元公式, 但甩开不定积分.

例题

$$f\text{在}[a,b]\text{单调增加}$$

$$\xrightarrow{f\in C^1[a,b]} \quad g(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\text{在}[a,b]\text{单调增加}$$

证明

$$g(a) \xlongequal{\quad\quad} \lim_{x\to a} g(x) \xlongequal{L'Hospital} f(a)$$

$$g'(a) \xlongequal{\quad\quad} \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\xlongequal{\quad\quad} \lim_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)-f(a)dt}{(x-a)^2}$$

$$\xlongequal{L'Hospital} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)} = \frac{f'(a)}{2}$$

证明续

$$g'(x) \xlongequal{\qquad\qquad} \frac{1}{x-a}f(x) - \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt$$

$$\xlongequal[\xi \in [a,x]]{\text{积分中值定理}} \frac{1}{x-a}(f(x) - f(\xi))$$

$$\xlongequal[\eta \in (\xi,x)]{\text{微分中值定理}} \frac{x-\xi}{x-a}f'(\eta) \geqslant 0$$

例题

$$f\text{在}[a,b]\text{凸} \Longrightarrow g(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\text{在}[a,b]\text{凸}$$

证明

$$g(x) =\!=\!=\!= \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$$

$$\xlongequal[dt=(x-a)ds]{t=(1-s)a+sx} \int_0^1 f((1-s)a+sx)ds$$

$$f\text{在}[a,b]\text{凸} \Longrightarrow f\in C(a,b), \quad f\text{有界} \Longrightarrow f\in R[a,b]$$

证明续

假设 $x_1 < x_2 < x_3$, 则

$$\frac{g(x_3)-g(x_2)}{x_3-x_2} = \int_0^1 \frac{f((1-s)a+sx_3)-f((1-s)a+sx_2)}{((1-s)a+sx_3)-((1-s)a+sx_2)} sds$$

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1} = \int_0^1 \frac{f((1-s)a+sx_2)-f((1-s)a+sx_1)}{((1-s)a+sx_2)-((1-s)a+sx_1)} sds$$

$$\xrightarrow[\text{四点判别法}]{f\text{凸}} \frac{g(x_3)-g(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant 0$$

例题

$$f \in C[a,b] \text{在} [a,b] \text{单调增加}$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_a^b x f(x)dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

证明

f单调增加

$$\Longrightarrow (x-\frac{a+b}{2})(f(x)-f(\frac{a+b}{2}))\geqslant 0,\quad \forall x\in[a,b]$$

$$\xRightarrow{f\in C[a,b]} \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx \geqslant f(\frac{a+b}{2})\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx = 0$$

证法2

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\,dx \\
\underline{\underline{\text{积分第二中值}}}\ & f(a)\int_a^{\xi}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx + f(b)\int_{\xi}^{b}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx \\
=\!=\ & f(a)\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\Big|_a^{\xi} + f(b)\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\Big|_{\xi}^{b} \\
=\!=\ & f(a)\frac{1}{2}(\xi - a)(\xi - b) + f(b)\frac{1}{2}(\xi - a)(b - \xi) \\
=\!=\ & \frac{1}{2}(\xi - a)(b - \xi)(f(b) - f(a)) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

作业

第35次做业:

[6.4]　　1(偶)　6　7　8　9.

数学分析(A1), 第36次课

任广斌(中国科大)

2020-12-18

微积分问答

- 为何导数如此重要?
- 导数、微分、不定积分、定积分的关系如何?
- 为何说"导数和积分是一对互逆运算就是微积分基本定理"?
- 为何说分析是极限的艺术?
- 为何说带积分余项的泰勒展开是微积分顶峰?
- 为何说极限是舍得之法, 是退一步海阔天空法?
- 为何说微积分是仿生学?
- 积分学如何摆脱导数独立发展?

- 微分学奥秘在于双射:

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$$

- 极限理论的具体实施通过导数和积分理论实现.

导数和积分脱胎于极限但又不失一般性

极限=级数=关于计数测度的积分=导数

- 为何导数如此重要?

  这是因为导数是变化率.

  变化率是研究变化的世界最重要, 最有效的工具.

- 导数、微分、不定积分、定积分的关系如何？
    - 导数、微分、不定积分、定积分是同一事物的不同侧面.
    - 导数是变化率,
    - 微分是导数的等价描述, 是函数改变量的主部, 是泰勒展开的线性部分,
    - 变上限积分是导数的另一面目, 是导数的逆, 是特定的原函数.
    - 不定积分本质上是变上限积分, 相差常数是变上限积分, 是原函数全体.

- 导数和积分的作用是什么?
  - 在单变量微积分的万花筒中的素材只有三项:

$$\text{函数, 导数, 积分.}$$

,

  - 由他们产生丰富多彩的微积分内容.
  - 函数是研究的主要对象, 导数和积分是研究函数的重要工具

- 为何说“导数和积分是一对互逆运算就是微积分基本定理”?
  - 先求导, 再积分回到函数, 这是牛顿莱布尼兹公式.
  - 牛顿莱布尼兹公式是带有积分余项的泰勒公式的雏形.
  - 带有积分余项的泰勒公式的一般形式可导出其它泰勒公式:

    带有Peano余项, 拉格朗日余项, Cauchy余项.
  - 连续性、可导性可表示为带有Peano余项的泰勒展开.

- 微分学中值定理是带有拉格朗日余项的泰勒展开.
- 微分学中值定理与积分学中值定理等价:

这是因为导数与积分等价.

- 先积分, 再求导, 回到函数.
- 特定原函数来自变上限积分.
- 积分作为分割、求和、取极限, 是一复杂的极限, 给出曲边梯形的面积.
- 积分提供原函数, 其计算有牛顿莱布尼兹公式. 积分的计算归结于原函数, 即不定积分.

- 为何说带积分余项的泰勒展开是微积分顶峰?
    - 带积分余项的泰勒展开以牛顿莱布尼兹公式为特例, 可导出众多定理给出初等函数的泰勒级数展开.

- 为何说分析是极限的艺术极限？

  - 极限是打破人类认识边界. 将人类认识边界推向无穷的手段. 从有理数到实数, 从多项式到初等函数, 从阶梯函数到连续函数, 极限将人类的认识从简单、常识、规则走到复杂、深奥、非规则情形.

  - 极限过程提炼出的差商极限和分割求和取极限, 即导数和积分这一对互逆的运算, 使得对函数的研究如虎添翼

  - 例如, 有了导数和积分, 函数就表示为泰勒多项式, 加上积分余项, 泰勒多项式的系数是由导数完全给出, 积分余项由导数和积分给出.

- 极限是质变的数学语言: 等式被弱化为ϵ相等.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad a_n\Big|_{n\in U(+\infty)} \xlongequal{\epsilon} a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)\Big|_{x\in U(x_0)} \xlongequal{\epsilon} f(x_0)$$

- 极限的目标

$$\text{利用数列} \xRightarrow{\text{传递唯一一个数的信息}} \text{数}$$

- 为何说微积分是仿生学？

- 在数的研究中，有理数的诞生是自然的，由1经过加减乘除得到. 无理数的发现则困难得多. 这是因为需要通过极限过程. 从有理数才能造出无理数，最终发现实数可以表示为十进制小数.

- 模仿数的研究可处理函数. 此时起有理数作用的是多项式，起实数作用的是初等函数.

- 利用导数和积分为工具可得到初等函数的带积分余项的泰勒展开. 估计余项后，可建立初等函数的泰勒级数展开，恰如数的十进制表示.

- 关于初等函数的极限理论, 利用泰勒级数理论, 问题可归结于
    - 规则情形下的连续函数极限
    - 非规则情形下的$\dfrac{0}{0}$型L'Hospital法则, 即有理函数的极限.
- 积分学中相应的理论是从阶梯函数到黎曼可积函数的扩充.

- 为何说极限是舍得之法, 是退一步海阔天空法?

  - 极限的定量刻画在人类历史上是短暂的, 其发明是极其困难的, 之前只有定性的刻画, 例如周易关于变化的理论, 以及哲学和宗教对极限的认识.
  - 自从有了极限的定量刻画, 才有了瞬时速度, 导数的概念. 它们是$\frac{0}{0}$型极限的雏形. 在一点处瞬时速度依赖于该点时间改变量和相应距离改变量. 在一点处这两者都是零, 此时极限定量刻画之法起着关键作用.
  - 一个方法就是先舍后得之法, 就是先退一步后海阔天空之法, 也就是给一定的容忍度得到时间的小的改变量和相应距离改变量产生速度和粗糙量. 极限过程得到瞬时速度的精确值.

- 在曲边梯形面积的计算中也是先退一步, 将问题归结于长方形面积, 得到粗糙的面积值, 极限过程给出精确值.

- 这些过程中代数过程起量变作用, 极限过程起质变作用.

- 以退为进的方法是极限定量刻画的精髓, 是逼近论的精髓.

- 逼近论的典范是带积分余项的泰勒展开. 抓大放小这产生了好加小方法, 是完备化的具体体现.

- 数列极限是用一列数传递唯一一个数的信息的方法. 数列极限的定量刻画采用的是退一步海阔天空法. 对于任意的正数ϵ, 在无穷远点领域, 数列数列是在ϵ误差下的常值数列.

- 曲线 $\xlongequal{\text{线性化}}$ 切线的一丛 $=\!=\!=$ 切丛

- 曲线和切线的全貌

$$\text{切丛} = \bigcup_{(x,f(x))\in\text{曲线}} (x,f(x))\text{点处的切线}$$

微分的核心秘密(下)

- 给定曲线，如影随形伴随着一簇切线。从一簇切线的信息提取曲线的信息。

$$\text{曲线} \quad \xRightarrow[\text{以直代曲，线性化}]{\text{微分学}} \quad \text{切线}$$

- 涉及两个函数:

曲线	切线
流形	切丛
	(线性子空间=切线平移到原点)

从Taylor展开看微分

微分是Taylor展开的一次项部分。

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{=dy} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{可忽略}}$$

切线视为一维线性空间=切线平移到原点

微分是直线的方程表示, 该直线过原点平行于切线.

$$\underbrace{dy}_{dy\text{是直线方程的因变量}} = \overbrace{f'(x)}^{x\text{起着参数的作用}} \underbrace{dx}_{dx\text{是直线方程的自变量}}$$

- 微分是两个独立变量的函数:

$$dy = f'(x)dx, \qquad x, \ dx\text{是两个独立变量}.$$

- dy总默认为dx的线性函数

$$dy = \underbrace{f'(x)}_{\text{伸缩率}} \ \underbrace{dx}_{\text{新变量}} \ .$$

dx, dy具有独立意义. 它们是切空间中的变量和函数

- dx是切丛上变量, 表示任意的量, 而非小量.

dx的两重身份: 切丛的自变量; 函数$f(x) = x$的微分

- 微积分的后续发展是什么？

    - 后继课程都有微积分的影子. 微分最广场所是流形和纤维丛. 积分最广场所是抽象积分论和测度论. 从而产生流行上微积分, 纤维丛上联络, 巴拿赫空间上微积分, 实分析.

- 极限之后是什么?
    - 极限产生的新的对象是继续研究的新的起点、新的垫脚石. 例如由多项式产生初等函数, 初等函数是新起点, 其后果需要承担传承关系.

- 积分学如何摆脱导数独立发展？
    - 积分学中，积分从微分学的在野党一跃成为执政党。积分从此单独发展，可撇开导数。
    - 黎曼可积函数与连续函数理论比较, 表面上只是跨出一小步, 因为黎曼可积函数当且仅当函数有界,且几乎处处连续, 实际上它又是很大一步. 这是因为黎曼可积函数类变得柔韧不再刚强
    - 改变函数在一点处的值不改变可积性，不改变函数的积分值.

- 学习微积分有何好方法
  - 兴趣
- 如何培养兴趣:
  - 问题驱动

- 有哪些好问题？
    - 对宇宙的认识.

- 相对论:
  - 时空是Minkoski流形, 需要掌握流形和纤维丛上的微积分.
- 量子力学。
  - 量子力学中物理量用Hilbert空间中非有界自伴算子刻画. 泛函分析是出发点.
- 规范场理论.
  - 使得曲率达到极小的联络是宇宙规则, 需要研究微分几何.

- 拍X光片:
    - Radon变换是其基础.
- 保密通讯:
    - 椭圆曲线是其基础

例题

- 插值多项式的余项估计

$f \in C^{n-1}[a,b]$, 在(a,b) n阶可导, $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 是$[a,b]$中的不同点, 则

$$f(x) - \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}f(x_i)}_{\text{Lagrange插值多项式}} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

证明

- 考察以$c, x_1, \cdots, x_n$为不同零点的函数

$$f(x) - \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) - \frac{f(c) - \sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j\neq i} \frac{c-x_j}{x_i-x_j} f(x_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (c - x_i)} \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

$\Longrightarrow$ 其n阶导数存在零点：

$$f^{(n)}(\xi) - \frac{f(c) - \sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j\neq i} \frac{c-x_j}{x_i-x_j} f(x_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (c - x_i)} n! = 0$$

证明续

- 极限过程对于任意c成立

例题

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)\text{收敛} \xLeftrightarrow{a_n>-1} \sum_{n=1}^{+\infty}\log(1+a_n)\text{收敛} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{收敛}.$$

例子

$$\log(1+a_n) \xlongequal{\quad\quad} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\xrightarrow{\text{Peano余项}} 1+a_n = e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\text{发散}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\text{发散}$$

数学分析(A1), 第37次课

任广斌(中国科大)

2020-12-21

本次课主要内容

- Riemann可积充要条件
- Darboux定理

- Riemann可积充要条件

约定

- 本次课总是假设

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad 有界$$

记号

- 分割

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$$

$$\|\pi\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

记号

- 振幅

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$\omega_i = M_i - m_i = f\text{在分割的第}i\text{个小区间上的振幅}$$

$$\omega = f\text{在}[a,b]\text{上振幅}$$

Riemann可积充要条件

$$f \in R[a,b]$$

$$\Longleftrightarrow \qquad f\text{在}[a,b]\text{有界}, \quad \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$$

- Riemann和

$$S(f,\pi,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i], \qquad \xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n).$$

- Darboux大和

$$S(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

- Darboux小和

$$s(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

注记

- Darboux和消除对于点$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$的选取的依赖.
- Darboux和不是Riemann和.
- Darboux和是ϵ误差下的Riemann和.

- Darboux上积分

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\pi} S(f,\pi)$$

$$\text{Darboux大和} \geqslant \text{Riemann和} \xrightarrow[\text{包含+收缩}]{\text{极限过程}\|\pi\|\to 0} \overline{\int_a^b} f(x)dx \geqslant \int_a^b f(x)dx$$

- Darboux下积分

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx := \sup_{\pi} s(f,\pi)$$

$$\text{Darboux小和} \leqslant \text{Riemann和} \xRightarrow[\text{被包含+膨胀}]{\text{极限过程}\|\pi\| \to 0} \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \leqslant \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Riemann可积和Darboux积分关系

$$f \in R[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

给定f,π.

包含所有Riemann和 $\{S(f,\pi,\xi):\ \forall\,\xi\}$*的最小闭区间*

$$=[s(f,\pi),\ \ S(f,\pi)]$$

Riemann和与Darboux和的关系定理的证明需要引理

Lemma

$$S(f,\pi)=\sup_{\xi} S(f,\pi,\xi)$$

$$s(f,\pi)=\inf_{\xi} s(f,\pi,\xi)$$

证明利用战略-战术方法

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

给定f,π.

$$[s(f,\pi),\ \ S(f,\pi)] \supset \left[\underline{\int_a^b} f(x)dx,\ \overline{\int_a^b} f(x)dx\right]$$

$$[s(f,\pi),\ \ S(f,\pi)] \xrightarrow{\|\pi\|\to 0} \left[\underline{\int_a^b} f(x)dx,\ \overline{\int_a^b} f(x)dx\right]$$

Darboux定理

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(f,\pi) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} s(f,\pi) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Riemann与Darboux关系定理

给定f, π.

包含所有Riemann和$\{S(f,\pi,\xi):\ \forall\,\xi\}$的最小闭区间

$$=\!=\!=\!=\!=\; [s(f,\pi),\ \ S(f,\pi)]$$

$$\xrightarrow[\supset]{\|\pi\|\to 0} \left[\underline{\int_a^b} f(x)dx,\ \overline{\int_a^b} f(x)dx\right]$$

Riemann可积性定理的等价描述

$$f \in R[a,b]$$

$$\underset{\text{R-D关系定理中}}{\overset{f\text{在}[a,b]\text{有界}}{\Longleftrightarrow}} \quad \text{三个闭区间(之一)当}\|\pi\| \to 0\text{时极限为独点集}$$

大小和定理

- Darboux定理的证明需要用到大小和定理.

添加分点后, 大和不增, 小和不减.

大小和定理加强版本

$$
\begin{array}{cccc}
 & \pi & \xrightarrow{\text{添}k\text{个分点}} & \pi' \\
\Longrightarrow & s(f,\pi') & \leqslant & S(f,\pi') \\
 & \pitchfork & & \pitchfork \\
 & [s(f,\pi), s(f,\pi)+k\omega\|\pi\|] & & [S(f,\pi)-k\omega\|\pi\|, S(f,\pi)]
\end{array}
$$

证明: Daboux大和情形

不妨设$k=1$:

$$\pi \xrightarrow{\text{添加分点}x^*\in(x_{i-1},x_i)} \pi'$$

$$S(f,\pi)-S(f,\pi')$$

$$=\left(M_i-\sup_{x\in[x_{i-1},x^*]} f(x)\right)(x^*-x_{i-1})+\left(M_i-\sup_{x\in[x^*,x_i]} f(x)\right)(x_i-x^*)$$

$$\in[0,\quad \omega\|\pi\|]$$

证明: Daboux小和情形

Daboux小和情形的证明类似, 或将f换为$-f$.

只证

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(f,\pi) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\pi} S(f,\pi) \in [m(b-a), M(b-a)]$$

$$\Longrightarrow \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \pi_0: \quad S(f,\pi_0) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall\ \pi: \quad \|\pi\| < \frac{\epsilon}{2k_0(\omega+1)}, \qquad k_0 = \pi_0\text{分割点个数}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f(x)dx &\leqslant S(f,\pi) \\
&\leqslant S(f,\pi+\pi_0) + k_0\omega\|\pi\| && (\text{大小和定理}) \\
&\leqslant S(f,\pi_0) + k_0\omega\|\pi\| && (\text{大小和定理}) \\
&\leqslant (\overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}) + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{\|\pi\|\to 0} S(f,\pi) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

例题

$$f \in R[-1,1], \quad f\text{在}x = 0\text{处连续}$$

$$\varphi \in R[-1,1], \quad \varphi \geqslant 0, \qquad \varphi_h(x) = \frac{1}{h}\varphi\left(\frac{x}{h}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{h\to 0}\int_{-h}^{h} f(x)\varphi_h(x)dx = f(0)\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx$$

特例 $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x)dx \overset{f\text{在}x=0\text{连续}}{\underset{f\in R[-1,1]}{=\!=\!=\!=\!=}} f(0)$$

证明

方法:　　常值$\Longrightarrow$差不多常值

f在$x=0$处连续 $\Longrightarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \ \forall x \in (-\delta, \delta),\ |f(x) - f(0)| < \epsilon.$

当$h \in (0, \delta)$时

$$(f(0) - \epsilon) \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx \leqslant \int_{-h}^{h} f(x)\varphi_h(x)dx \leqslant (f(0) + \epsilon) \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx$$

例题

$$a_n, b_n \geqslant 0,$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛

$\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛

证明

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right\}\text{单调减少非负} \Longrightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\text{收敛}$$

$$\xrightarrow{\{b_n\}\text{收敛}} \{a_n\}\text{收敛}$$

第37次做业:

[6.5] 1 2 3.

数学分析(A1), 第38次课

任广斌(中国科大)

2020-12-23

本次课主要内容

- Riemann可积性定理

Def

$$A \subset \mathbb{R}\textit{零测集}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = m^*(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| : \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n\textit{是开区间}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\ \textit{开区间} I_n \subset \mathbb{R} : \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}|I_n| < \epsilon.$$

注记: 外测度=包含+收缩, 内测度=外测度+对合

注记

- m^*定义中要求可列覆盖

$$\text{任意开覆盖} \Longrightarrow \text{存在可列子覆盖}$$

注记

- m^*定义中的极限过程

$$粗糙 \xrightarrow{\lim} 精致$$

测度性质

可列个零测集的并是可测集

- $\frac{\epsilon}{2^n}$技巧:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^n}=\epsilon.$$

$$\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(r_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}},\ \ r_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)$$

a.e.连续

Def

$$f\text{在}[a,b]a.e.\text{连续} \iff f\text{在}[a,b]\text{不连续点集是零测集}$$

Riemann可积性定理

$$f \in R[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad f\text{在}[a,b]\text{有界，}\ a.e.\text{连续}$$

在一点处振幅

Def

$$
\begin{aligned}
f\text{在}(x_0-r,x_0+r)\text{振幅} &= \omega_f(x_0,r) \\
&:= \sup_{x\in(x_0-r,x_0+r)} f(x) - \inf_{x\in(x_0-r,x_0+r)} f(x) \\
&= \sup_{x,t\in(x_0-r,x_0+r)} |f(x)-f(t)|
\end{aligned}
$$

$$
f\text{在}x_0\text{处振幅} = \omega_f(x_0) := \lim_{r\to 0^+} \omega_f(x_0,r)
$$

利用振幅刻画可积性和连续性

$$f \in R[a,b] \iff f\text{在}[a,b]\text{有界}, \quad \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$$

$$f\text{在}x_0\text{连续} \iff \omega_f(x_0) = 0.$$

利用振幅刻画不连续点集

$$
\begin{aligned}
D &:= f\text{的不连续点集} \\
&= \left\{x \in [a,b]: \quad \omega_f(x) \neq 0\right\} \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{x \in [a,b]: \quad \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{m}\right\} \\
&=: \bigcup_{m=1}^{\infty} D_{\frac{1}{m}}
\end{aligned}
$$

振幅是可积和连续的桥梁

$$x \in (x_{i-1}, x_i) \xrightarrow[(x-r,x+r)\subset(x_{i-1},x_i)]{0<r\ll 1} \omega_i \geqslant \omega_f(x, r).$$

Riemann可积性定理的证明：　必要性

- f 在$[a,b]$a.e.连续
- $\forall\ m\in\mathbb{N}$,

$$D_{\frac{1}{m}}=\left\{x\in[a,b]:\quad \omega_f(x)\geqslant\frac{1}{m}\right\}\text{是零测集.}$$

- $\forall$ 分割π,

$$D_{\frac{1}{m}}\bigcap(x_{i-1},x_i)\text{是零测集}$$

- $x\in D_{\frac{1}{m}}\bigcap(x_{i-1},x_i)\quad\xrightarrow{0<r\ll1}\quad\omega_i\geqslant\omega_f(x,r)\geqslant\omega_f(x)\geqslant\frac{1}{m}$

$$f\in R[a,b] \xRightarrow[\text{可积充要条件}]{\text{任意固定}m} \forall\,\epsilon>0,\qquad \exists[a,b]\text{分割}\pi:$$

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{m} &> \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\\ &\geqslant \sum_{i:D_{\frac{1}{m}}\bigcap(x_{i-1},x_i)\neq\emptyset}\omega_i\Delta x_i\\ &\geqslant \frac{1}{m}\sum_{i:D_{\frac{1}{m}}\bigcap(x_{i-1},x_i)\neq\emptyset}\Delta x_i\end{aligned}$$

$$D_{\frac{1}{m}}\subset\bigcup_{i:D_{\frac{1}{m}}\bigcap(x_{i-1},x_i)\neq\emptyset}(x_{i-1},x_i)\cup\bigcup_{i=0}^{n}\{x_i\}$$

$$\Longrightarrow\quad m^*(D_{\frac{1}{m}})\leqslant\sum_{i:D_{\frac{1}{m}}\bigcap(x_{i-1},x_i)\neq\emptyset}\Delta x_i+\epsilon<2\epsilon$$

Riemann可积性定理的证明： 充分性

- 设f的不连续点集D是零测集.

$$\forall \ \epsilon > 0, \exists \ (\alpha_i, \beta_i):$$

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i), \qquad \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \epsilon.$$

- 紧集$K_\epsilon := [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i) \subset f$的连续点全体.

$[a,b]$上$a.e.$连续函数的弱一致连续性

Theorem

$$f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}\ a.e.\text{连续}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0:$$

$$\text{当}\ x\in K_\epsilon,\ \ y\in[a,b],\ \ |x-y|<\delta\text{时, 有}$$

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon.$$

证明

反证: $\exists \epsilon_0 > 0, \quad \exists s_n,\ t_n: \quad s_n \in K_\epsilon, \quad t_n \in [a,b], \quad |s_n - t_n| < \frac{1}{n},$

$$|f(s_n) - f(t_n)| \geqslant \epsilon.$$

取子列$s_{k_n} \to s^* \in K_\epsilon$

$$\Longrightarrow t_{k_n} \to s^*$$

$$\Longrightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} |f(s_{k_n}) - f(t_{k_n})| \geqslant \epsilon. \qquad 矛盾$$

(注记: $\lim_{x\to s^*} f(x) = f(s^*) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(t_{k_n}) = f(s^*)$)

Riemann可积函数的两个有界性

函数有界 $\Longrightarrow \omega_i \in [0, \omega]$

区间有界 $\Longrightarrow \Delta x_i \in [0, b-a]$

利用K_ϵ分割Riemann和

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \sum_{K_\epsilon\bigcap(x_{i-1},x_i)\neq\emptyset}\omega_i\Delta x_i + \sum_{K_\epsilon\bigcap(x_{i-1},x_i)=\emptyset}\omega_i\Delta x_i$$

- 在连续点处振幅小: 假设$K_\epsilon \bigcap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset$

$$
\begin{aligned}
\omega_i &= \sup_{z_1, z_2 \in [x_{i-1}, x_i]} |f(z_1) - f(z_2)| \\
&\leqslant \sup_{z_1, z_2 \in [x_{i-1}, x_i]} |f(z_1) - f(y_i)| + |f(y_i) - f(z_2)| \\
&< 2\epsilon \qquad (\text{取} y_i \in K_\epsilon \bigcap (x_{i-1}, x_i))
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \sum_{K_\epsilon \bigcap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \omega_i \Delta x_i < 2(b-a)\epsilon
$$

在不连续点处Riemann和的估计

- 在不连续点处, 集合小:

$$K_\epsilon \bigcap (x_{i-1}, x_i) = \emptyset, \qquad K_\epsilon \subset [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$$

$$\Longrightarrow \quad (x_{i-1}, x_i) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$$

$$\Longrightarrow \quad \Big| \sum_{K_\epsilon \bigcap (x_{i-1}, x_i) = \emptyset} \omega_i \Delta x_i \Big| \leqslant \omega \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \omega \epsilon.$$

结论

f在$[a,b]$有界，a.e.连续

$$\Longrightarrow \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$$

$$\xRightarrow{\text{可积充要条件}} f \in R[a,b]$$

$$C[a,b] \subset R[a,b],$$

$$[a,b]\text{上单调函数全体} \subset R[a,b]$$

续

- Riemann积分是非绝对可积的积分理论

$$f \in R[a,b] \quad \underset{\text{反之不成立}}{\Longrightarrow} \quad |f| \in R[a,b]$$

- Lebsgue积分是绝对可积的积分理论

$$R[a,b]\text{的完备化} = L^1[a,b]$$

续

- R[a, b] 对于加法、数乘、乘法封闭
- R[a, b] 对于除法不封闭

$$f \in R[a,b] \xrightarrow{f \neq 0,\ \frac{1}{f}\text{有界}} \frac{1}{f} \in R[a,b]$$

- R[a, b] 对于复合不封闭

$$f \in C[a,b] \quad g \in R[\alpha,\beta], \quad g[\alpha,\beta] \subset [a,b] \quad \Longrightarrow \quad f\circ g \in R[\alpha,\beta]$$

续

- Riemann可积函数的限制保持可积性

$$f \in R[a,b] \quad [c,d] \subset [a,b] \Longrightarrow \quad f|_{[c,d]} \in R[c,d]$$

- Riemann可积函数可以焊接:

$$f \in R[a,b] \quad f \in R[b,c] \Longrightarrow \quad f \in R[a,c]$$

Riemmann函数$R:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$是周期为1的函数.

$$R(x) \xlongequal{\forall x\in(0,1]} \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, \quad (p,q)=1, \quad p,q\in\mathbb{N}; \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

- Riemann函数在无理点连续，有理点第一类可去间断.

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = 0$$

证明: 不妨设$x_0 \in (0,1]$. 则(x_0-1, x_0+1)中除去有限个有理数, 其分母足够大:

$$\frac{1}{q} < \epsilon \Longleftrightarrow q > [\frac{1}{\epsilon}] + 1$$

$$除去q = 1, 2, \cdots, [\frac{1}{\epsilon}].$$

- Riemann函数无原函数(Darboux), 变上限积分不提供原函数.

$$R(x) \in R[a,b] \setminus C[a,b]$$

$$0 \equiv \left(\int_0^x R(x)dx\right)' \xlongequal[a.e.]{\text{当且仅当}x\text{是}R(x)\text{连续点}} R(x)$$

- $\chi_{(0,1]} \in R[0,1], \qquad R \in R[0,1].$

$$\chi_{(0,1]} \circ R = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \notin R[0,1].$$

零测集对于Riemann可积性的影响

- 修改函数在零测集的值, 可能改变Riemann可积性(不改变Lebesgue可积性)

$$\text{例如} \qquad 0 \longrightarrow \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}, \qquad R(x)$$

- 修改函数在有限个点处的值, 不改变Riemann可积性和积分值.

例题

$$f \in R[-1,1], \quad f\text{在}x=0\text{处连续}$$

$$\varphi \in R[-1,1], \quad \varphi \geqslant 0, \qquad \varphi_h(x) = \frac{1}{h}\varphi(\frac{x}{h})$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{h\to 0}\int_{-h}^{h} f(x)\varphi_h(x)dx = f(0)\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx$$

特例 $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x)dx \xlongequal[f\in R[-1,1]]{f\text{在}x=0\text{连续}} f(0)$$

证明

方法: 常值$\Longrightarrow$差不多常值

f在$x=0$处连续 $\Longrightarrow \forall\, \epsilon>0,\ \exists\, \delta>0,\ \ \forall x\in(-\delta,\delta),\ |f(x)-f(0)|<\epsilon.$

当$h\in(0,\delta)$时

$$(f(0)-\epsilon)\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx \leqslant \int_{-h}^{h} f(x)\varphi_h(x)dx \leqslant (f(0)+\epsilon)\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx$$

第38次做业:

[6.6] 1 2 3 4.

数学分析(A1), 第39次课

任广斌(中国科大)

2020-12-25

本次课主要内容

- 常数变易法, 扰动法
- 变分法
- 冷冻法:　　Gronwall不等式

常数变易法

- 常数变易法是拟合方法:　　降维打击
  - 将常值放到函数的框架下, 利用函数的导数和积分工具处理常值问题.
  - 将数列放到函数的框架下, 利用函数的导数和积分工具处理常值问题.
- 涉及矛盾:

离散: 连续——— 求导: 积分

例1

π^3，　3^π 谁大

$$\frac{3^\pi}{\pi^3} \xrightarrow{\text{常数变易法}} \left.\frac{3^x}{x^3}\right|_{x=\pi} = f(x)\Big|_{x=\pi}$$

$$f' > 0 \qquad \forall x > \frac{3}{\log 3} \Longrightarrow f(\pi) > f(3) = 1.$$

数列单调性的量子化方法

$$(1+\frac{1}{n})^n \nearrow, \qquad (1+\frac{1}{n})^{n+1} \searrow$$

$$(1+\frac{1}{n})^{n+p} \searrow \quad \xLeftrightarrow{\text{平分天下}} \quad p \geqslant \frac{1}{2}$$

续

$$(1+\frac{1}{n})^{n+p} \searrow \xrightarrow[\text{离散变量换为连续变量}]{\text{量子化}} (1+\frac{1}{x})^{x+p} =: e^{f(x)}$$

$$f(x) = (x+p)\ln(1+\frac{1}{x})$$

$$f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + (x+p)(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x})$$

$$f'(+\infty) = 0.$$ (敢于和善于使用在无穷远点的值)

续

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + +(x+p)(-\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x^2}) \\
&= \frac{-2}{(1+x)x} + \frac{(x+p)(2x+1)}{(1+x)^2x^2} \\
&= \frac{(2p-1)x+p}{(1+x)^2x^2}.
\end{aligned}
$$

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & p \geqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow f' \nearrow < 0 \Longrightarrow f \searrow \\ < 0 & p < \frac{1}{2},\ x \gg 1 \xrightarrow{x \gg 1} f' \searrow > 0 \xrightarrow{x \gg 1} f \nearrow \end{cases}$$

级数转化为幂级数的量子化方法

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1} \xlongequal{\text{量子化}} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\bigg|_{x=1} = f(x)\big|_{x=1}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k} = (1-x^2)^n$$

$$f(1) \xlongequal{\qquad} f(0) + \int_0^1 f'(x)dx = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$$

$$\xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} tdt$$

$$\xlongequal{\text{递推公式}} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

两种方法计算同一个式子

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \begin{cases} \underline{\underline{\text{Newton二项式展开}}} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} \\ \\ \underline{\underline{\text{积分变量代换}}} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{cases}$$

量子化为桥梁链接条件和结论

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$$

$$\Longrightarrow \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \text{在}(0,1)\text{有解}$$

见到方程就积分，积分化为变分方程

- 方程写为变分方程

$$\left(\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+a_nx\right)'=0$$

- 变分方程的求解转化为边值问题.

- 条件 $\xrightarrow{\text{量子化}}$ 函数的边界值$f(0)=f(1)=0$.

- 函数的两个零点$\xRightarrow[f'(\xi)=0]{f(0)=f(1)=0}$提供导函数的一个零点.

量子化提供一个参数

$$f \in C[a,b] \nearrow \Longrightarrow \int_a^b xf(x)dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

续

- 将常量b视为参数t，问题转化为证明一个函数非负.

$$g(t)=\int_a^t xf(x)dx-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)dx\geqslant 0$$

- 利用微积分的工具处理非负性:

$$\begin{aligned}g'(t)&=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx-\frac{a+t}{2}f(t)\\&=\frac{1}{2}\int_a^t (f(t)-f(x))dx\geqslant 0\quad (f\nearrow)\end{aligned}$$

$$\xrightarrow[g(a)=0]{g\nearrow}\qquad g(t)\geqslant 0.$$

- 单调性的刻画

$$(x-\frac{a+b}{2})(f(x)-f(\frac{a+b}{2}))\geqslant 0$$

- 结论转化为

$$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})(f(x)-f(\frac{a+b}{2}))dx\geqslant 0.$$

$$f \in C[0,T],\quad \varphi \in C[0,T],\quad \varphi \geqslant 0,\quad M(t) \nearrow \geqslant 0,$$

$$f(t) \leqslant M(t) + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds, \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

$$\Longrightarrow \qquad f(t) \leqslant M(t)e^{\int_0^t \varphi(s)ds}.$$

$$\text{不等式} \xRightarrow[\text{冷冻积分之外项}]{\text{部分量子化}} \text{单调性}$$

证明

- 只要证明

$$M(t_0)+\int_0^{t_0} f(s)\varphi(s)ds \leqslant M(t_0)e^{\int_0^{t_0}\varphi(s)ds}, \qquad \forall t_0 \in [0,T].$$

- 只要证明:

$$M(t_0)+\int_0^{t} f(s)\varphi(s)ds \leqslant M(t_0)e^{\int_0^{t}\varphi(s)ds}, \qquad \forall t \in [0,t_0], \quad \forall t_0 \in [0,T].$$

- 不妨设$t_0 > 0$ $\quad$ (否则$t_0 = 0 \Longrightarrow t = 0$).

部分量子化

- 将积分之外的项冷冻:　　(固定$t_0 \in (0, T]$)

$$M(t_0) + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds \leqslant M(t_0)e^{\int_0^t \varphi(s)ds}, \qquad \forall\ 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

- 归结于证明积分的单调性:

$$\left(M(t_0) + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds\right)e^{-\int_0^t \varphi(s)ds} \searrow \qquad \forall\ 0 \leqslant t \leqslant t_0$$

- 利用导数验证单调性:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(M(t_0)+\int_0^t f(s)\varphi(s)ds\right)e^{-\int_0^t \varphi(s)ds}\right]$$

$$=\!=\!=\quad \left(f(t)\varphi(t)-\varphi(t)\left(M(t_0)+\int_0^t f(s)\varphi(s)ds\right)\right)e^{-\int_0^t \varphi(s)ds}$$

$$\leqslant\quad (M(t)-M(t_0))\varphi(t)e^{-\int_0^t \varphi(s)ds}\leqslant 0.$$

将方程转化为变分方程的方法

$$f, g\text{在}[a,b]\text{可导, 而且} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\zeta \in (a,b), \quad f'(\zeta)\int_a^{\zeta} g(x)dx = g'(\zeta)\int_a^{\zeta} f(x)dx$$

- 归结于变分方程

$$F'(x) = 0.$$

其中 $F(x) = f(x)\int_a^x g(t)dt - g(x)\int_a^x f(t)dt.$

变分方程的构造来自分部积分

$$F'(x) = f'(x)\int_a^x g(t)dt - g'(x)\int_a^x f(t)dt$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad F(x) - F(a) = \int_a^x \left(f'(s)\int_a^s g(t)dt - g'(s)\int_a^s f(t)dt \right) ds$$

$$= \int_a^x \left(\int_a^s g(t)dt \right) df(s) - \int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt \right) dg(s)$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} f(x)\int_a^x g(t)dt - g(x)\int_a^x f(t)dt.$$

变分方程的求解归结于无穷区间的Rolle定理

设f在$[0,+\infty)$上可导, 且$0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$

$$\Longrightarrow \qquad \exists \xi > 0,\ f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

变分方程的构造和求解

- 变分方程的构造

$$F'(x) = f'(x) - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad F(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} ds + C$$

$$= f(x) - \frac{x}{1+x^2} + C \qquad (\text{取} C = 0)$$

- 利用$[0, \infty]$上的Rolle定理.

变分方程失效: 利用Rolle定理

$$f \in C[0,1], \quad f(x) \geqslant 0, \quad f(1) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \exists \xi \in (0,1), \quad f(\xi) = \int_0^{\xi} f(x)dx$$

变分方程失效: 利用Rolle定理

- 变分方程

$$\left(e^{-x}\int_0^x f(s)ds\right)' = 0$$

端点异号

- 量子化

$$G(x) := f(x) - \int_0^x f(s)ds$$

- 端点异号

$$G(1)G(x_0) \leqslant 0 \qquad (x_0\text{是}f\text{最大值点})$$

$$(i). \qquad G(1)G(x_0) < 0 \xrightarrow{\text{介值定理}} \exists \zeta \in (x_0, 1) \subset (0,1): \ G(\zeta) = 0$$

$$(ii). \qquad G(1) = 0, \quad \text{或者} \quad G(x_0) = 0 \qquad \Longrightarrow G(x) \equiv 0$$

量子化失效

$$f \in R[0,1] \searrow \Longrightarrow \int_0^a f(x)dx \geqslant a \int_0^1 f(x)dx \quad \forall\, a \in (0,1).$$

量子化失效

当$f \in C[a,b]$时，对于下列函数使用量子化方法:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right) &= \frac{1}{x}\left(f(x)-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{x}(f(x)-f(\xi))\\ &\leqslant 0 \qquad\qquad (f \searrow)\end{aligned}$$

当$f \in R[a,b]$时, 量子化方法失效.

$$\int_0^a f(x)dx \xlongequal{x=at} a\int_0^1 f(ax)dx \geqslant a\int_0^1 f(x)dx$$

$$(f \searrow \Longrightarrow f(at) \geqslant f(t))$$

例题

$$f \in R[-1,1], \quad f\text{在}x=0\text{处连续}$$

$$\varphi \in R[-1,1], \quad \varphi \geqslant 0, \qquad \varphi_h(x) = \frac{1}{h}\varphi(\frac{x}{h})$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{h\to 0}\int_{-h}^{h} f(x)\varphi_h(x)dx = f(0)\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx$$

特例 $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x)dx \overset{f\text{在}x=0\text{连续}}{\underset{f\in R[-1,1]}{=\!=\!=\!=\!=}} f(0)$

证明

方法: 常值$\Longrightarrow$差不多常值

f在$x=0$处连续 $\Longrightarrow \forall\, \epsilon>0,\ \exists\, \delta>0,\ \ \forall x\in(-\delta,\delta),\ |f(x)-f(0)|<\epsilon.$

当$h\in(0,\delta)$时

$$(f(0)-\epsilon)\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx \leqslant \int_{-h}^{h} f(x)\varphi_h(x)dx \leqslant (f(0)+\epsilon)\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx$$

数学分析(A1), 第40次课

任广斌(中国科大)

2020-12-28

本次课主要内容

- 广义积分(反常积分、　奇异积分)

Riemann积分的两个有界性条件

- 区间$[a,b]$有界
- 函数f有界

$$
\text{广义Riemann积分}\begin{cases}\text{无穷限广义Riemann积分} & \text{破除区间的有界性}\\ \\ \text{瑕积分} & \text{破除函数的有界性}\end{cases}
$$

$$
\text{广义Riemann积分} = \text{Riemann积分} + \lim
$$

以Riemann积分为基础的推广

- Riemann积分(非条件收敛积分理论, 非绝对收敛积分理论):

$$f \in R[a,b] \Longrightarrow |f| \in R[a,b]$$

- 广义Riemann积分(条件收敛积分理论):

$$|f| \in R[a,+\infty) \xrightarrow{\text{Cauchy判别准则}} f \in R[a,+\infty)$$

- Lebesgue积分(绝对收敛积分理论):

$$f \in L^1[a,b] \Longleftrightarrow |f| \in L^1[a,b]$$

广义Riemann积分的几何意义

- 单位圆周长度:

$$2\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \text{瑕积分.}$$

- 面积:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx \qquad \text{无穷积分.}$$

假设f在$[a,+\infty)$局部Riemann可积, 右端极限存在有限. 定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx :=\!=\!=\!= \underbrace{\lim_{b\to+\infty} \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{f\in R[a,b]},}_{\text{极限存在有限}}$$

称$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛, 称f 在$[a,+\infty)$广义Riemann可积.

否则称$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散.

无穷积分收敛Cauchy判别准则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > a, \text{当} B > A > M \text{ 时}$$

$$\left| \int_A^B f(x)dx \right| < \epsilon$$

证明: $G(b) = \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{b \to +\infty} G(b)\text{存在有限} \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > a, \text{当} B > A > M\text{时}$$

$$|G(A) - G(B)| < \epsilon$$

即 $$\left| \int_A^B f(x)dx \right| < \epsilon$$

注记

- Rieamnn积分: 无穷积分 $\Longleftrightarrow$ 有限和: 无穷级数
- 无穷积分=Rieamnn积分+lim=双重极限
- 无穷积分$\neq$ 和式极限

注记

- 敛散性与初始值无关, 同级数情形.
- 有两个瑕点归结于只有一个瑕玷情形:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \underset{\text{称}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\text{收敛}}{\overset{\text{右端两个积分收敛}}{=\!=\!=\!=}} \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

假设a是f的瑕点, f在(a, b]局部Riemann可积, 右端极限存在有限. 定义

$$\int_a^b f(x)dx :\!=\!=\!= \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+} \underbrace{\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx}_{f\in R[a+\epsilon,b]}}_{\text{极限存在有限}},$$

称$\int_a^b f(x)dx$收敛, 称f 在[a, b]广义Riemann可积.

否则称$\int_a^b f(x)dx$发散.

瑕积分收敛Cauchy判别准则

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛(a为瑕点)

$\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$a < c < d < a + \delta$ 时

$$\left| \int_c^d f(x)dx \right| < \epsilon$$

- 有两个瑕点归结于只有一个瑕点情形:

$$\int_a^b f(x)dx \xlongequal[a,b\text{是瑕点},\ c\in(a,b)]{\text{右端两个积分收敛}} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

无穷积分和瑕积分联系

- 无穷积分和瑕积分本质相同　　(x轴, y轴地位等价)
  - 无穷积分:　面积沿着x轴跑到∞.
  - 瑕积分:　　面积沿着y轴跑到∞.
- 无穷积分和瑕积分关于直线$y = x - a$镜面对称

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)dx}_{\text{以}+\infty\text{为瑕点}} \xlongequal[\text{两边面积镜面对称}]{\text{假设}f\text{可逆}} \underbrace{\int_0^1 f^{-1}(x)dx}_{\text{以}0\text{为瑕点}}$$

注意: $y = f(x)$的图形沿着直线$y = x$镜面对称是$y = f^{-1}(x)$.
上式左面表示的曲边梯形的面积经过镜面对称就是右面表示的曲边梯形的面积.

- 原理:

$$\text{广义Riemann积分} \xlongequal{\quad} \text{Riemann积分+极限}$$

Newton-Leibniz公式

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \xlongequal[f\text{存在原函数}F]{f \in R[a,+\infty)} F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x)\text{存在有限}$$

分部积分公式

$$\int_a^{+\infty} f(x)dg(x) \xlongequal[\text{右端有意义}]{f,g\in C^1[a,+\infty)} f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)df(x)$$

$$(fg)(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}(fg)(x)\text{存在有限}$$

变量代换公式

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \ \underset{\substack{x=\varphi(t),\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=+\infty\\ \varphi[\alpha,\beta]\subset[a,+\infty]}}{\overset{f\in C[a,+\infty),\varphi\in C^1[\alpha,\beta]}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\ \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

注记

- 瑕点$+\infty$换为有限瑕点b, 结论仍然成立.
  - Newton-Leibniz公式
  - 分部积分公式
  - 变量代换公式

两个重要积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx\text{收敛} \xLeftrightarrow{p \to +\infty\text{情形}} p > 1$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p} dx\text{收敛} \xLeftrightarrow{p \to -\infty\text{情形}} p < 1.$$

广义积分中两个重要变量代换

$$x = \frac{1}{t} \qquad x = \tan t.$$

例题

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

$$I \xlongequal{x=\frac{1}{t}} -I$$

$$I \xlongequal{x=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan t dt = 0$$

例题

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx.$$

$$\text{特别}\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

$$I\ \xlongequal{x=\tan t}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\sec^2 t(1+\tan^\alpha t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^\alpha t}dt$$

$$I\ \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-s}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^\alpha s}{1+\tan^\alpha s}ds$$

$$2I\ \xlongequal{\text{相加}}\ \frac{\pi}{2}\Longrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

续

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx \\
&\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})} \frac{1}{t^2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} dt \\
2I &\overset{\text{相加}}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

例题

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

续

$$I \xlongequal{\quad} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$$

$$\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t dt$$

$$2I \xlongequal{\text{相加}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2}\sin(2x))dx$$

$$\xlongequal{\quad} -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin x dx = -\frac{\pi}{2} + I$$

$$I \xlongequal{\quad} -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

广义Riemann积分是条件收敛积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx \text{收敛}, \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|dx \text{发散}$$

续

$$I \xlongequal{t=x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$$

$$\left|\int_A^B \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt\right| \xlongequal[\text{Dirichlet判别法}]{\text{积分第二中值定理}} \frac{1}{2\sqrt{A}}\left|\int_A^{\zeta} \sin t dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{A}} \to 0 \qquad B > A \to +\infty$$

$$\xRightarrow{\text{Cauchy准则}} \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx\text{收敛}$$

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|dx \xlongequal{t=x^2} \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}dt$$

$$\geqslant \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{t}}dt$$

$$\xlongequal{\quad} \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}}dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}}dt = +\infty$$

Dirichlet判别法

- $f \in C[a, +\infty)$, $\quad \int_a^t f(x)dx$在$[a, +\infty)$有界
- g在$[a, +\infty)$单调减少, $\quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$$\xRightarrow{\text{积分第二中值定理}} \quad \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx\text{收敛}.$$

例如: $\quad f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Abel判别法

- $f \in C[a, +\infty)$, $\quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛
- g在$[a, +\infty)$单调有界

$$\xRightarrow[\text{不妨设}g(+\infty)=0]{\text{Dirichlet判别法}} \quad \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx\text{收敛}.$$

注记

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\text{收敛}\begin{cases}\text{在}\infty\text{点退化}\\ \\ \text{在}\infty\text{点振荡}\end{cases}$$

作业

第40次做业:

[6.7] 1 (1)(8)(10)(12), 3 (2)(4)(6)(7), 6

数学分析(A1), 第41次课

任广斌(中国科大)

2020-12-30

本次课主要内容

- 数值积分
- Jensen公式
- Stirling公式

- 离散和连续是一对矛盾

$$\text{离散分析}\begin{cases}\text{计算机时代}\\ \\ \text{量子物理}\end{cases}$$

$$\text{离散版本分析}\xrightarrow{\text{极限}}\text{连续版本分析}$$

数值积分重要性

- 困难

  初等函数的不定积分可能不是初等函数

- 积分算法:　数值计算

- 积分算法:　视初等函数为无穷次多项式

数值积分方法

n等分方法：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

在小的长方形面积的计算中涉及高的选取

$$\text{高}\begin{cases}\text{中点的高} & \text{涉及定义域的平均} \\ \text{端点高的平均} & \text{涉及值域的平均，} \quad \text{梯形法}\end{cases}$$

梯形法

$f \in C^2[a,b]$, 则存在$\xi, \eta \in (a,b)$使得

$$\int_a^b f(x)dx \xlongequal{x_i = a + i\frac{b-a}{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x_i - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

$$\xlongequal{\quad\quad} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \Delta x_i + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta)$$

- 积分数值计算

$$余项 \xlongequal{\quad} O(\frac{1}{n^2})$$

$f \in C^2[a,b]$, 则存在$\xi, \eta \in (a,b)$使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi)$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{24} f''(\eta)$$

证明

- 关于区间中点的分部积分公式+在端点退化的分部积分+积分中值定理

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
=\!=\!=\!=\!=\; &\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)d(x-\frac{a+b}{2}) \\
=\!=\!=\!=\!=\; &\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f'(x)d((x-a)(x-b)) \\
\xlongequal{x=(1-t)a+tb}\; &\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{(b-a)^3}{2(b-a)}\int_0^1 t(1-t)dtf''(\xi) \\
=\!=\!=\!=\!=\; &\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{(b-a)^2}{12}f''(\xi)
\end{aligned}
$$

续

- Newton-Leibniz公式+原函数于端点处在中点Taylor展开消去偶次项.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\overset{F\in C^3[a,b]}{=\!=\!=} F'(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{F'''(\xi)+F'''(\zeta)}{3!}(\frac{b-a}{2})^3$$

$$\overset{\text{Darboux}}{=\!=\!=} f(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$$

梯形法的证明

- n等分区间上每一个利用平均值中值定理, 再相加:

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \qquad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$\frac{1}{x_i - x_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{12} f''(\xi_i)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12n^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i)$$

$$\overset{\text{Darboux}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12n^2} f''(\zeta)$$

凸函数积分平均

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\text{凸}$$

$$\Longrightarrow\qquad f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

注记

- 若$f \in C^2[a,b]$, 则凸函数积分平均不等式是平均值中值定理的推论.

- 凸函数积分平均不等式无需条件$f \in C^2[a,b]$.

证明

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\text{凸}$$

$$\Longrightarrow\qquad f\text{在}[a,b]\text{上有界, 在}(a,b)\text{上连续}$$

$$\Longrightarrow\qquad f\in R[a,b]$$

续

- 利用凸函数的定义(第一个不等式)和四点判别法(第二个不等式):

$$f(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{f(a+\theta(b-a))+f(b-\theta(b-a))}{2} \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

- 积分,利用下列公式

$$\int_0^1 f(a+\theta(b-a))d\theta \xlongequal{x=a+\theta(b-a)} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_0^1 f(b-\theta(b-a))d\theta \xlongequal{x=b-\theta(b-a)} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

面积解释

- 切线围成的面积 ⩽　曲边梯形的面积 ⩽　割线围成的面积

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Jensen不等式(次线性的积分形式)

$\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$凸

$f : [a, b] \longrightarrow [\alpha, \beta], \qquad f, \omega \in C[a, b]$

$d\mu(x) := \omega(x)dx$是$[a, b]$上概率测度

$$\Longrightarrow \varphi\left(\int_a^b f(x)d\mu(x)\right) \leqslant \int_a^b \varphi(f(x))d\mu(x)$$

证明

$$\varphi\text{凸} \xRightarrow{\text{存在支撑线}} \qquad \varphi(y) \geqslant \varphi(c) + \alpha(y-c)$$

$$\text{取}y = f(x), \qquad c = \int_a^b f(x)\mu(x) \in [\alpha, \beta]$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \qquad \int_a^b \varphi(f(x))d\mu(x) \geqslant \varphi(c).$$

- 凸函数的支撑线不等式——除去积分外衣的Jensen不等式.

Stirling公式

$$n! \xlongequal{\quad\quad} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \qquad \theta_n \in (0,1)$$

证明

- 只要证

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} \in (1, e^{\frac{1}{12n}})$$

- 只要证

$$a_n \searrow 1, \qquad a_n e^{-\frac{1}{12n}} \nearrow 1$$

续

- $a_n \searrow 1$的证明:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}}{\dfrac{(n+1)!}{\sqrt{2\pi(n+1)}(\frac{n+1}{e})^{n+1}}} = \frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} \searrow 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\text{只要证}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}} = 1$$

这来自于Wallis公式.

- $a_n e^{-\frac{1}{12n}} \nearrow 1$的证明:

$$|x| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \frac{1}{x}\left(\ln(1+x)_{\text{odd}}\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots \\ &< 1 + \frac{x^2}{3}(1 + x^2 + x^4 + \cdots) \qquad 0 < |x| < 1 \\ &= 1 + \frac{1}{3}\frac{x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$0<|x|<1 \Longrightarrow \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}<1+\frac{1}{3}\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\xRightarrow{x=\frac{1}{2n+1}} (n+\frac{1}{2})\ln\frac{n+1}{n}<1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

$$\Longrightarrow a_n e^{-\frac{1}{12n}}\text{严格单调增加}$$

$$\frac{a_n e^{-\frac{1}{12n}}}{a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}}=e^{-(1+\frac{1}{12n(n+1)})}(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}<1$$

Wallis公式

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{n\pi}$$

积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{奇} \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & n\text{偶} \end{cases}$$

证明: 分部积分两次得到递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \geqslant 2), \qquad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1.$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} I_1 & n\text{奇} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} I_0 & n\text{偶} \end{cases}$$

Wallis公式的证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx.$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2n+1}\frac{2}{\pi} \leqslant \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2n}\frac{2}{\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \sim \frac{1}{n\pi}$$

Wallis公式作用在于证明Stirling公式

$$\textit{Stirling公式} \Longrightarrow \textit{Wallis公式}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = 2^{2n}\frac{\left(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n)}(\frac{2n}{e})^{2n}} \sim \sqrt{n\pi}$$

证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = 1$

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}\right)^2}{\frac{(2n)!}{\sqrt{2\pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim 1$$

作业

第41次做业:

[7.4] 1， 2

数学分析(A1), 第42次课

任广斌(中国科大)

2021-01-04

本次课主要内容

- 积分的几何应用
  - 曲线弧长
  - 平面图形的面积

几何不变量

弧长	曲率
整体	局部
积分	微分

光滑曲线

- C^1曲线

$$\sigma:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}^2 \Longrightarrow \text{走入多变量微积分}$$

$$\text{曲线} = \text{弯曲空间} = \text{1维流形}$$

光滑曲线的参数表示

- 映照观点

$$\sigma : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto (x(t), y(t))$$

$$x(t), y(t) \in C^1[\alpha,\beta]$$

- 参数表示

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha,\beta]$$

曲线的显示表示和参数表示

显示表示	参数表示
x, y 关系明确	x, y地位相同
曲线与平行于y轴的直线最多交于一点	封闭曲线必须用参数表示
$y = f(x), \qquad x \in [a, b]$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$

曲线弧长的定义

- 选定曲线参数增加的方向
- 对曲线进行分割, 通过分割曲线参数区间实现

$$\pi : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

$$\|\pi\| := \max_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i - t_{i-1})$$

- 曲线的长度=割线长度的极限

$$L(\sigma) = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

注记

弧长	弧长的计算
与曲线的方向无关	与曲线的方向有关
与曲线的参数方程无关	与曲线的参数方程有关
天生属性	后天计算手段

注记

- 不可求长曲线:

分形雪花状曲线, Koch曲线

$\Longrightarrow$分形几何

$$\text{曲线}\sigma\text{的长度} = L(\sigma) \xlongequal{\sigma\in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^2)} \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

证明

$$
\begin{aligned}
L(\sigma) &= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2} \\
&\underline{\underline{\text{中值定理}}} \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2}\Delta t_i \\
&= \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt+I
\end{aligned}
$$

证明续

$$I = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \right) \Delta t_i$$

$$\begin{aligned}
|I| &\leqslant \overline{\lim_{\|\pi\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \right| \Delta t_i \\
&\leqslant \overline{\lim_{\|\pi\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left| y'(\eta_i) - y'(\xi_i) \right| \Delta t_i \\
&\leqslant \overline{\lim_{\|\pi\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(y') \Delta t_i = 0.
\end{aligned}$$

由几何意义可看出

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leqslant |b - c|$$

注记

- 若$x', y' \in R[\alpha, \beta]$, 则曲线长度的积分公式仍然成立.

注记

- 曲线的长度是切向量长度的积分

$$\text{切向量} \quad \sigma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

$$\text{切向量长度} \quad \|\sigma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\text{曲线长度} \quad L(\sigma) = \int_\alpha^\beta \|\sigma'(t)\| dt$$

弧长微分公式

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \xlongequal[\text{弧长增加}]{\text{沿着参数增加方向}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

证明

$$\text{曲线长度函数} = s(t) := \int_{\alpha}^{t} \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau$$

$$\Longrightarrow \quad s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\Longrightarrow \quad ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

微元法计算曲线长度

- 曲线长度———曲线弧长微元的叠加

$$L(\sigma)=\int_{\alpha}^{\beta}ds=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

弧长不依赖于参数的选取

- 曲线σ两种参数化可建立互逆双射

$$[a,b] \underset{\tau=\tau(t)}{\overset{t=t(\tau)}{\rightleftarrows}} [\alpha,\beta]$$

- 曲线上一点的两种表达:

参数表达	坐标表达	
$t=t(\tau)$	$(x(t),y(t))$,	$t\in[\alpha,\beta]$
$\tau=\tau(t)$	$(x(\tau),y(\tau))$,	$\tau\in[a,b]$

弧长不依赖于参数的选取续

- 一阶微分形式不变性

$$dx = x'(t)dt = x'(\tau)d\tau, \qquad dy = y'(t)dt = y'(\tau)d\tau$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}d\tau$$

- 积分变量代换公式

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \xlongequal{t=\tau(t)} \int_a^b \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}d\tau$$

弧长参数

- 弧长参数是最自然的参数:

弧长参数和曲线形影不离

- 弧长参数是天生的参数:

当切向量长度是单位长度时, 相应参数是弧长参数

弧长参数的存在性

- 沿着曲线以单位速度行走, 则以移动的距离为参数, 该参数就是弧长参数.

弧长参数的存在性

- 假设曲线σ的参数给定为t, 其速度向量即切向量处处非零. 则可以构造弧长参数τ和参数t之间的双射

$$[0, L(\sigma)] \underset{\tau=\tau(t)}{\overset{t=t(\tau)}{\rightleftarrows}} [\alpha, \beta]$$

- $$\tau(t) = \int_\alpha^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$\tau'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \|\sigma'(t)\|$$

- $$\sigma'(\tau) = \frac{\frac{d\sigma(\tau(t))}{dt}}{\frac{d\tau(t)}{dt}} = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$$

直角坐标系下弧长微分公式

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \xlongequal{y=f(x)} \sqrt{(1 + (f'(x))^2}dx$$

极坐标系下弧长微分公式

极坐标系(曲线方向选取为参数增加的方向)

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [c, d]$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}d\theta$$

三维空间曲线的弧长微分公式

- 空间曲线

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

- 弧长微分

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

- 弧长公式

$$\text{曲线}\sigma\text{的长度} = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

求下列心脏线的全长

$$r = a(1+\cos\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$L \xlongequal{\text{对称性}} 2\int_0^{\pi} a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2} = 8a$$

例题

求下列椭圆的全长

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi], \qquad a > b > 0.$$

$$L \xlongequal{\text{对称性}} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2\cos^2 t}\, dt$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{离心率}$$

$$\Omega = \Big\{(x,y) : x \in [a,b], \quad y \in [f_1(x), f_2(x)]\Big\}$$

$$\Longrightarrow \Omega\text{的面积} = S = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1 dy dx$$

由微元法看面积的计算

$$\text{微元面积} = (f_2(x) - f_1(x))dx = \Big(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1 dy\Big)dx$$

$$\Omega = \Big\{(x,y) : y \in [c,d], \quad x \in [\phi(y), \varphi(y)]\Big\}$$

$$\Longrightarrow \Omega\text{的面积} = S = \int_c^d \int_{\phi(y)}^{\varphi(y)} 1 dxdy$$

由微元法看面积的计算

$$\text{微元面积} = (\phi(y) - \varphi(y))dy = \Big(\int_{\phi(y)}^{\varphi(y)} 1 dx\Big)dy$$

在面积的计算中, x, y的地位相同.

例题

$$\Omega = \left\{(x,y) : y \in [0,1], \quad x \in [\sqrt{y}, 2\sqrt{y}]\right\}$$

计算Ω的面积

$$\Omega\text{的面积} = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} dxdy = \frac{2}{3}$$

$$\Omega = \left\{(r,\theta) : \theta \in [\alpha,\beta], \quad r \in [0, r(\theta)]\right\}$$

$$\Longrightarrow \Omega\text{的面积} = S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$$

由微元法看面积的计算

$$\text{微元面积} = \underbrace{\frac{1}{2}\overbrace{r}^{\text{高}}\overbrace{(rd\theta)}^{\text{底边长}}}_{\text{三角形面积微元}}$$

极坐标系下平面图形的面积

$$\Omega=\Big\{(r,\theta):\theta\in[\alpha,\beta],\quad r\in[r_1(\theta),r_2(\theta)]\Big\}$$

$$\Longrightarrow \Omega\text{的面积}=S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta))d\theta$$

例题

求下列心脏线所围面积

$$r = a(1+\cos\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$S \xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2$$

第42次做业:

[7.1]　1 (1)(6),　3(2)(5)

数学分析(A1), 第43次课

任广斌(中国科大)

2021-01-06

本次课主要内容

- 积分的几何应用
    - 旋转体体积
    - 旋转体侧面积
- 积分的物理应用
    - 万有引力
    - 变力做功

注记

单变量微积分的触角自然延伸到多变量. 这是微元法的应用.

旋转体体积的计算

- 体积是面积的叠加
- 旋转体的截面是圆, 截面积已知, 利用微元法

旋转体体积=截面积的一重积分.

$$体积微元 = dV = \underbrace{\pi f^2(x)}_{截面积}\, dx$$

$$旋转体体积 = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

例题

椭圆绕x轴旋转所得旋转体体积

平面曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

续

- 体积微元

$$dV = S(x)dx = \pi y^2 dx$$

- 椭球体积

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} \pi y^2 dx \\ &= \int_{-a}^{a} \pi b^2 (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx \\ &= \frac{4\pi}{3} ab^2 \end{aligned}$$

下列参数曲线绕x轴旋转

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta], \quad \varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta], \quad \varphi' > 0.$$

$$\text{旋转体体积} = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \pi y^2 dx = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\varphi'(t) dt$$

例题

星形线

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0, \quad x' < 0.$$

*半星形线**$t \in [0, \pi]$绕x轴旋转所得旋转体的体积*

$$\begin{aligned} V &= \pm \int_{t=0}^{t=\pi} \pi y^2 dx = \pm \int_0^{\pi} \pi (y(t))^2 x'(t) dt \\ &= \pm \int_0^{\pi} \pi (a\sin^3 t)^2 3a \sin t \cos^2 t dt \\ &= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt = 6\pi a^3 \left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!}\right) \end{aligned}$$

极坐标曲线绕x轴旋转的旋转体体积

下列围绕原点关于实轴对称的极坐标曲线, 绕x轴旋转

$$r = r(\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\textit{旋转体体积微元} = \textcolor{red}{\textit{截面积浓缩于质心}}\textit{所走过的距离} \times \textit{面积}$$

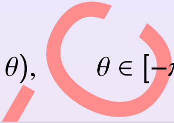
$$= 2\pi(\frac{2}{3}r)\sin\theta \cdot \frac{1}{2}r(rd\theta)$$

$$\textit{旋转体体积} = \int_0^{\textcolor{red}{\pi}} 2\pi(\frac{2}{3}r)\sin\theta \cdot \frac{1}{2}rrd\theta$$

例题

下列心脏线绕x轴旋转

$$r = a(1+\cos\theta), \qquad \theta \in [-\pi, \pi]$$



$$\text{旋转体微元体积} = \text{截面积浓缩于质心所走过的距离} \times \text{面积}$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}r\right)\sin\theta \cdot \frac{1}{2}r(rd\theta)$$

$$\text{旋转体体积} = \int_0^{\pi} \frac{2}{3}\pi a^3(1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta = \frac{8}{3}\pi a^3$$

例题

下列两个圆柱相交部分所围成的体积

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

在第一象限, 截面积是以 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 为边的正方形

$$V = 8\int_0^a dV = 8\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{16}{3}a^3.$$

旋转体侧面积

- *旋转体侧面积局部是台体*

- *台体侧面积涉及斜长即弧长*

参数曲线绕x轴旋转的旋转体侧面积

下列参数曲线绕x轴旋转

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha,\beta], \quad \varphi,\psi \in C^1[\alpha,\beta], \quad \psi > 0$$

$$\textit{旋转体侧面微元} = \underbrace{2\pi y}_{\textit{旋转台体的周长}} ds$$

$$\textit{旋转体侧面积} = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} 2\pi y ds = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

例题

下列椭圆绕x轴旋转

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b$$

求旋转椭球的侧面积

续

椭圆上半部绕x轴旋转

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in (0,\pi)$$

$$S_{侧面积} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 2\pi y ds = \int_0^{\pi} 2\pi b\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta d\theta}$$

地球环带面积

- $r =$ 地球半径,　　$h =$纬线平面间距离

- 环带面积

$$S = \underbrace{2\pi r}_{\text{赤道长}} \underbrace{h}_{\text{纬线平面间距离}}$$

- 环带面积与纬度无关, 与放置在赤道情形相同.

地球环带面积证明

$$\text{侧面积} = \int_{y=c}^{y=c+h} 2\pi x ds$$

$$\overset{x=\sqrt{r^2-y^2}}{=\!=\!=} \int_{y=c}^{y=c+h} 2\pi\sqrt{r^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)^2}dy$$

$$= 2\pi rh$$

地球环带面积证明(续)

$$\text{侧面积} \xlongequal{\text{方法二}} \int_{y=c}^{y=c+h} 2\pi x ds$$

$$\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_{y=c}^{y=c+h} 2\pi r\cos\theta r d\theta$$

$$\xlongequal{\quad} 2\pi r^2 \sin\theta\Big|_{y=c}^{y=c+h} = 2\pi rh$$

物体万有引力

- 质点(质量m, 位于原点)
- 均匀细棒(质量M, 位于实轴$[a, a+l]$)
- $[x, x+dx]$质量$= M\dfrac{dx}{l}$

$$\text{引力微分} = G\frac{m\cdot(M\frac{dx}{l})}{x^2}$$

$$\text{引力} = \int_a^{a+l}\frac{GmM}{l}\frac{dx}{x^2} = GmM\frac{1}{a(a+l)}.$$

第二宇宙速度

- M =地球质量,　　r =地球半径
- 第二宇宙速度—— 质量m由地面移至∞所需要的初速度v_0.

续

- 以地心为原点，以天空方向为x轴.

- 质量m由地面移至∞所做的功

$$功微元 = 引力 \cdot dx = \frac{GmM}{x^2}dx$$

$$功 = \int_r^{\infty} \frac{GmM}{x^2}dx = \frac{GmM}{r}$$

- 初速v_0提供动能$= \frac{1}{2}mv_0^2$.

续

功=动能	重力$\overset{地面处}{=\!=\!=}$地球引力
$\frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2$	$mg = G\frac{mM}{r^2}$

$$v_0 = \sqrt{2gr} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10^{-3} \times 6371} = 11.17km/s$$

g是重力加速度

变力做功

- 半球:　球心$(0,0,r)$, 半径$=r$. 它是由

$$\text{半球} \Longleftarrow \begin{cases} x^2+(y-r)^2=r^2 \\ y\in[0,r] \end{cases} \quad \text{绕}y\text{轴转动}$$

- 将注满水的半球抽干需要做功=变力做功

变力做功续

- 以垂直方向为y轴，某水平方向为x轴
- 旋转体积微元$= \pi x^2 dy$
- 功微元$= \underbrace{(r-y)}_{\text{所走距离}} \underbrace{\pi x^2 dy}_{\text{重力}}$

变力做功续

$$
\text{功} \xlongequal{\quad} \int_0^r (r-y)\pi x^2 dy
$$

$$
\xlongequal{\quad} \int_0^r (r-y)\pi(r^2-(y-r)^2)dy
$$

$$
\xlongequal{u=r-y} \int_0^r u\pi(r^2-(u^2)du = \frac{\pi}{4}r^4
$$

例题

$$假设a_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < +\infty$$

$$其中, \quad r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \to 0, \quad n \to \infty$$

证明

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k - r_{k+1}}{\sqrt{r_k}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{r_{k+1}}^{r_k} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
&= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k+1}} \right) < +\infty
\end{aligned}$$

例题

$$\text{假设} a_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{s_n} = +\infty$$

$$\text{其中}, s_1 = 0, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \to +\infty, \quad n \to \infty$$

证明

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{s_k} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_k} \\
&\geqslant \sum_{k=2}^{\infty} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{x} dx \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} (\log s_{k+1} - \log s_k) = +\infty
\end{aligned}
$$

例题

$$\exists \quad f \in C[0,+\infty), \quad f(x) \geqslant 0, \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx\text{收敛}, \quad f\text{无界}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{A_n}(x), \qquad A_n = [n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}]\text{互不相交}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} < \infty.$$

将f修正为连续函数.

例题

$$f \in C^1[0,1] \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{f(0)-f(1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{左} &= \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\zeta_n)-f(\frac{k}{n})}{\zeta_n-\frac{k}{n}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)dx \qquad (\text{积分中值定理}) \\
&= \frac{-1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_n)\frac{1}{n} \qquad (\text{微分中值定理}) \\
&= \frac{-1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = \text{右}
\end{aligned}$$

作业

第43次做业:

[7.1]　　5,　7

[7.2]　　1,　3

数学分析(A1), 第44次课

任广斌(中国科大)

20201-01-08

本次课主要内容

- 面积原理
- Young不等式

注记

- 面积原理体现的是积分限的分割技巧

$$\text{积分} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{求和}$$

- 阶数=阶梯(局部常值)函数的积分=面积

Riemannζ函数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\zeta}}, \qquad \zeta > 1\text{时收敛}$$

发散级数

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\zeta} \xlongequal[\exists r(\zeta)\in[0,1]]{\zeta\in(-\infty,1]} \int_1^n \frac{1}{x^\zeta} dx + r(\zeta) + O(\frac{1}{n^\zeta})$$

$$r(1) = 0.577\cdots \qquad \text{Euler常数,}$$

$$r|_{(-\infty,0]} = 0.$$

特例 $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + 0.577 + O(\frac{1}{n})$$

第一面积原理($\zeta \leqslant 0$情形)

$$f \nearrow \geqslant 0 \qquad f \in C[1, +\infty)$$

$$\Longrightarrow \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx\right| \leqslant f(n)$$

通过常值延拓, 初始点可修正.

证明

求和项满足

$$f(k-1) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leqslant f(k)$$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k-1) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

$$-f(n) \leqslant \int_{1}^{n} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) \leqslant f(n).$$

第二面积原理($\zeta > 0$情形)

$$f \searrow 0 \qquad f \in C[1, +\infty)$$

$$\xRightarrow{\exists 常数\gamma(f)} \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \underbrace{\gamma(f)}_{\in[0,f(1)]} + \underbrace{O(f(n))}_{\in[0,f(n)]}$$

第二面积原理 $\Longrightarrow$ $$\gamma(f) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx\right)$$

注记

第二面积原理 $\Longrightarrow$ $$\left|\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx - \gamma(f)\right| \leqslant f(n).$$

- 通过常值延拓, 初始点可修正.

证明

$$g(n) := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$$

$$\xRightarrow[g(1)=f(1)]{g\searrow\geqslant 0} \quad \gamma(f) := \lim_{n\to\infty} g(n) \in [0, g(1)]$$

证明续

$g \searrow \geqslant 0$的证明:

$$g(n) := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx\right) + f(n) \geqslant 0$$

$$g(n) - g(n+1) = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geqslant 0.$$

证明续

$$g(n) := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \searrow 0, \qquad \gamma(f) = \lim_{p\to+\infty} g(p)$$

$$\begin{aligned} g(n) - \gamma(f) &= \lim_{p\to\infty}\left(\int_n^p f(x)dx - \sum_{k=n+1}^{p} f(k)\right) \\ &\in [0, f(n)] \end{aligned}$$

离散求和的连续化

$$f \searrow 0 \qquad f \in C[1,+\infty)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(k), \qquad \int_1^{\infty} f(x)dx \quad \text{同敛散.}$$

证明

第二面积原理 $\Longrightarrow$ 级数和积分同敛散.

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leqslant f(n-1) \Longrightarrow \text{级数和积分同敛散.}$$

Young不等式

$$\varphi \in C[0,+\infty), \quad \varphi \geqslant 0, \quad \varphi\text{严格单调增加}, \varphi(0)=0$$

$$\psi = \varphi^{-1}$$

$$a \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant b \leqslant \varphi(+\infty)$$

$$\Longrightarrow \qquad ab \leqslant \int_0^a \varphi(x)dx + \int_0^b \psi(x)dx.$$

$$\text{等号成立} \Longleftrightarrow b = \varphi(a)$$

注记

当$b=\varphi(a)$时

长方形面积=两个曲边三角形面积之和

注记

- Youg不等式是分离提纯方法

- Youg不等式将乘法化为加法

共轭指数

- 一对共轭指数p, q

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad p, q \geqslant 1.$$

- 共轭指数例子

$$(p, q)=(2,2), \qquad (1,+\infty), \qquad (+\infty, 1).$$

Young不等式

设p, q是共轭指数，$p, q > 1, \quad a, b \geqslant 0$

$$\Longrightarrow \quad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

等号成立 $\Longleftrightarrow a^p = b^q$

证明

$$\text{取}\varphi(x) = x^{p-1}, \qquad \psi(y) = y^{q-1}$$

$$\Longrightarrow \qquad ab \leqslant \int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b y^{q-1}dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$\text{等号成立} \Longleftrightarrow b = \varphi(a) = a^{p-1} \Longleftrightarrow a^p = b^q$$

Hölder不等式(离散版本)

设p,q是共轭指数,

$$a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n,\qquad b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}_+^n$$

$$\Longrightarrow\qquad |\langle a,b\rangle|\leqslant\|a\|_p\|b\|_q$$

等号成立 $\Longleftrightarrow (a_1^p,\cdots,a_n^p)\parallel(b_1^q,\cdots,b_n^q)$

$$\|a\|_p:=\Big(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\Big)^{1/p}\qquad \|b\|_q=\Big(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\Big)^{1/q}$$

证明

不妨设a, b非零. 只要证

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p}\right)^{1/p}\left(\frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q}\right)^{1/q} \leqslant 1$$

$$\text{Yong} \Longrightarrow \text{左} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q}\right)=1.$$

Hölder不等式(连续版本)

设p, q是共轭指数, $\quad f, g \in R^+[a,b]$

$\Longrightarrow \quad |\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$

等号成立 $\Longleftrightarrow |f|^p, |g|^q$相差常数因子几乎处处相等.

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \qquad \|g\|_q = \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

证明

不妨设$\|f\|_p, \|g\|_q$非零. 只要证

$$\int_a^b \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} dx \leqslant 1 \qquad \text{(Young不等式)}$$

Minkowski三角不等式

$$f, g \in L^p[a,b], \quad p \in [1, +\infty]$$

$$\Longrightarrow \quad \|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

等号成立 $\Longleftrightarrow$ f, g相差常数因子几乎处处相等.

证明

$$
\begin{aligned}
&\|f+g\|_p^p \\
&\leqslant \int_a^b |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}dx + \int_a^b |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}dx \\
&\leqslant \|f\|_p\|f+g\|_p^{p/q} + \|g\|_p\|f+g\|_p^{p/q}
\end{aligned}
$$

例题

假设$f \in R[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b |f(x)|\cos x dx\right)^2 + \left(\int_a^b |f(x)|\sin x dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b |f(x)| dx\right)^2$$

证明

利用Hölder不等式

$$\text{左边} \leqslant \int_a^b |f(x)|dx \int_a^b |f(x)|\cos^2 xdx + \int_a^b |f(x)|dx \int_a^b |f(x)|\sin^2 xdx$$

$$\leqslant \text{右边}$$

例题

$$f \in C[0,1],$$

$$\int_x^1 f(t)dt \geqslant \frac{1-x^2}{2}, \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^1 f^2(t)dt \geqslant \frac{1}{3}.$$

续

$$F(t) := \int_t^1 f(x)dx \geqslant \frac{1-t^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(t)dt &\geqslant \left(\int_0^1 tf(t)dt\right)^2 && \text{(Hölder不等式)} \\
&= \left(\int_0^1 tdF(t)\right)^2 && \text{(分部积分公式)} \\
&= \left(\int_0^1 F(t)dt\right)^2 \geqslant \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

例题

$$f \in C^1[0,1],$$

$$\Longrightarrow \quad \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leqslant |f(1) - f(0)| + \int_0^1 |f''(x)| dx$$

证明

$$f(1) - f(0) = f'(\zeta) \qquad \text{(微分中值定理)}$$

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(\eta)| \qquad \text{(介值定理)}$$

$$f'(\eta) = f'(\zeta) + \int_\zeta^\eta f''(x) dx \qquad \text{(Newton-Leibniz公式)}$$

作业

第44次做业:

[7.3]　1，2，7

问题　1，2，3

数学分析(A1), 第45次课

任广斌(中国科大)

2021-01-11

本次课主要内容

- 唯一性定理
- 稠密性定理
- 从方程的角度观察中值定理

唯一性定理

$$
\begin{aligned}
& f \in C[a,b] \\
& \int_a^b f(x)g(x)dx = 0, \quad \forall g \in C[a,b],\ g(a) = g(b) = 0 \\
\Longrightarrow \quad & f = 0.
\end{aligned}
$$

取 $g(x) = f(x)\sin(\dfrac{x-a}{b-a}\pi)$

注记

- 在端点退化的非负光滑函数

$$\sin(\frac{x-a}{b-a}\pi)$$

唯一性定理

$$f \in C[a,b]$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = 0, \quad \forall g \in C^1[a,b],\ g(a) = g(b) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad f = C.$$

证明

- 思路

$$f(x)=c \Longleftrightarrow \int_a^b (f(x)-c)dx=0, \int_a^b (f(x)-c)^2dx=0.$$

- 证明: 取

$$c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x)-c)^2dx=0 \Longleftrightarrow \int_a^b f(x)(f(x)-c)dx=0$$

$$\text{取} g(x) \xlongequal[g(a)=g(b)=0]{g'(x):=f(x)-c} \int_a^x (f(t)-c)dt$$

- 通过极限的触角将问题归结于正则情形

$$\text{正则情形} \xrightarrow[\text{极限过程}]{\text{稠密性}} \text{一般情形}$$

Riemann可积函数分段线性连续逼近

- $f \in R[a,b] \xrightarrow{n\text{等分}[a,b]}$ 分段线性连续函数f_n
- 在分割的第i个区间:
  - $f_n(x)$是线性函数, 不妨设 $\nearrow$
  - $f(\text{左端点}) \leqslant f_n(x) \leqslant f(\text{右端点})$
  - $|f(x) - f_n(x)| \leq \max\left\{|f(x) - f(\text{右端点})|, |f(x) - f(\text{左端点})|\right\} \leqslant \omega_i$

稠密性定理

$$\forall\ f \in R[a,b], \quad f_n = \text{曲线}f\text{的}n\text{等分}[a,b]\text{割线}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n \xlongequal{L^1[a,b]\text{收敛}} f$$

证明

$f \in R[a,b]$, f_n是f的n等分割线

$$\xRightarrow{\text{控制收敛定理}} \lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)dx \xlongequal{\forall g\in R[a,b]} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

证明

$$f \in R[a,b], \quad f_n\text{是}f\text{的}n\text{等分割线}$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$$

注记

$f \in R[a,b]$, f_n是f的n等分割线

$\Longrightarrow$ f_n一致有界, $f_n(a) = f(a)$, $f_n(b) = f(b)$

$\Longrightarrow$ 若f单调, 则f_n单调. 若f严格单调, 则f_n严格单调.

稠密性定理

$$R[a,b] \subset \overline{\left\{[a,b]\text{逐段线性连续函数}\right\}}^{L^1[a,b]}$$

$$\forall\, f \in R[a,b], \quad \exists\, \varphi_n \in \left\{[a,b]\text{逐段线性连续函数}\right\}:$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|dx = 0.$$

稠密性定理的应用

$$\text{逐段线性连续} \xrightarrow{\text{稠密性}} \text{Riemann可积函数}$$

Newton-Leibniz公式对于$[a, b]$上逐段线性连续成立

Riemann-Lebesgue引理

$$f \in R[a,b] \Longrightarrow \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx = 0$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx = 0.$$

证明

- f是逐段线性连续函数

$$\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx \xlongequal{\text{分部积分}} f(x)\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\frac{\sin\lambda x}{\lambda}dx$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (\lambda \to \infty)$$

- $f \in R[a,b]$

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx - \int_a^b f_n(x)\cos(\lambda x)dx\right|$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx = 0$$

积分第二中值定理

$$\int_a^b fg \xlongequal[f\text{单调},\exists\zeta\in[a,b]]{f,g\in R[a,b]} f(a)\int_a^{\zeta} g + f(b)\int_{\zeta}^b g.$$

证明

不妨设$g \in C[a,b]$.

$$f_n := f\text{的}n\text{等分割线}, \qquad G(x) = \int_a^x g$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b fg &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n g \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \lim_{n\to\infty} \left(f_n G|_a^b - \int_a^b G f_n' \right) \\
&\xlongequal{\text{中值定理}} \lim_{n\to\infty} f_n G|_a^b - G(\zeta_n) \int_a^b f_n' \\
&\xlongequal{\text{可设}\zeta_n \to \zeta} fG|_a^b - G(\zeta)(f(b) - f(a)) \\
&= f(a)(G(\zeta) - G(a)) + f(b)(G(b) - G(\zeta))
\end{aligned}$$

$$\int_a^b fg \quad \frac{f, g \in R[a,b]}{\overline{f \searrow \geqslant 0, \exists \zeta \in [a,b]}} \quad f(a)\int_a^{\zeta} g.$$

证明

$f_n :=$ f的n等分割线,

$$G(x)=\int_a^x g,\quad M=\max_{x\in[a,b]} G(x),\quad m=\min_{x\in[a,b]} G(x)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b fg &= f(a)\int_a^{\zeta} g + f(b)\int_{\zeta}^b g \\ &= (f(a)-f(b))G(\zeta)+f(b)G(b)\in[f(a)m, f(a)M] \\ &\xlongequal{\text{介值定理}} f(a)G(\eta)\end{aligned}$$

Young不等式

$$\varphi \in C[0,+\infty), \quad \varphi \geqslant 0, \quad \varphi\text{严格单调增加}, \varphi(0)=0$$

$$\psi = \varphi^{-1}$$

$$a \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant b \leqslant \varphi(+\infty)$$

$$\Longrightarrow \qquad ab \leqslant \int_0^a \varphi(x)dx + \int_0^b \psi(x)dx.$$

$$\text{等号成立} \Longleftrightarrow b = \varphi(a)$$

证明

不妨设$\varphi \in C^1[0,\infty)$. 不妨设$b \leqslant \varphi(a)$.

$$b \in [\varphi(0), \varphi(a)] \xRightarrow{\text{介值定理}} \text{存在} c \in [0, a]: \quad b = \varphi(c)$$

$$\int_0^c \varphi(x)dx + \int_0^b \psi(y)dy \xlongequal[y=\varphi(x)]{x=\psi(y)} \int_0^c \varphi(x)dx + \int_0^c x\varphi'(x)dx$$

$$= \int_0^c (x\varphi(x))'dx = cb$$

$$\int_c^a \varphi(x)dx \geqslant \varphi(c)(a-c) = b(a-c).$$

相加即可.

口诀

函数的两个零点 $\xRightarrow{\text{诱导}}$ *导函数的一个零点*

$$f \in C[0,\pi], \quad \int_0^{\pi} f(x)dx = 0, \quad \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \text{互不相同} \zeta_1, \zeta_2 \in (0,\pi): \quad f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = 0$$

以原函数为出发点研究函数.

证明

$$F(x) := \int_0^x f \qquad F(0) = F(\pi) = 0$$

$$0 = \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx \xlongequal{\text{分部积分}} \int_0^{\pi} F(x)\sin x dx$$

$$\Longrightarrow \quad F\text{存在零点}\zeta \in (0,\pi)$$

$$\xRightarrow[F(0)=F(\zeta)=F(\pi)=0]{Rolle} \quad \text{结论成立}$$

Lagrange插值多项式

- 给定 $(x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n)), \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$

- Lagrange基本多项式

$$l_i(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

- Lagrange基本多项式

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}$$

- Lagrange插值多项式

$$\sum_{i=1}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

f在$[a,b]$ n阶可导 (边界点条件可减弱)

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$$

$$\xRightarrow{\exists \zeta \in (a,b)} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) + \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

从方程求根的观点看待中值定理

证明

- 下列函数以$c, x_1, \cdots, x_n$为$n+1$个不同零点:

$$f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) - \left(f(c) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(c)\right) \frac{\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)}{\prod_{k=1}^{n}(c - x_k)}$$

- 上述函数的n阶导数存在零点, 故

$$f^{(n)}(\zeta) - \left(f(c) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(c)\right) \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(c - x_k)} = 0$$

- 极限过程$\Longrightarrow$对任意c正确

注记

$n = 1$的Lagrange插值多项式余项估计 $=$ 关于割线的中值定理

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\text{方程存在根,}$$

归结于下列方程有两个根

$$\underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{曲线方程}} = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)}_{\text{割线方程}}}_{\text{该方程来自于上述方程两边积分}}$$

例题

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant M, \quad f(\frac{1}{n}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \qquad f \equiv 0$$

证明: f有无穷多个零点, 以0为聚点, $f(0) = 0$.

函数的两个零点产生导函数的一个零点.

$$\xrightarrow{\text{同理}} \quad f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 0.$$

$$f(x) \xlongequal{\text{Taylor展开}} \frac{f^{(k)}(\theta x)}{k!} x^k \Longrightarrow |f(x)| \to 0, \quad k \to \infty.$$

例题

$$\sum_{p\text{素数}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} &\leqslant \prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_j}+\frac{1}{p_j^2}+\cdots\right) \qquad (n\text{的素数分解}) \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_j}} \\
&\leqslant e^{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{2}{p_j}}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \leqslant 1+2x \leqslant e^{2x}, \qquad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]\right)$$

从分部积分的观点看待带有积分余项的Taylor展开

$$
\begin{aligned}
I_n &:= \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}df^{(n)}(t) \\
&= I_{n-1} - \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) = \cdots \\
&= I_0 - \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) - \cdots - \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) \\
&= f(x) - f(x_0) - \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) - \cdots - \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}
$$

终记

分析是极限的艺术