

中国科学技术大学
2020-2021学年第一学期期中考试试卷

考试科目: 数学分析A1

得分:

学生所在系:

姓名:

学号:

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将姓名、学号等填写清楚.
2. 本考试为闭卷考试, 共十道大题, 每题10分, 总分100分, 考试时间120分钟.
3. 解答请写在试题后的空白处, 若写不下, 可写在试题的背面, 写在草稿纸上无效.

2020年11月29日

一、假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) = 1.$$

证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 存在.

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) = 1.$

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. $n > 0$ 时, $\forall p > 0.$

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \cdots + a_n)$ 存在. (Cauchy 准则)

二、已知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3.$$

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$

取 $\ln$ 得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + \frac{f(x)}{x})}{x} = 3.$$

又 $\ln(1+y) \sim y, y \rightarrow 0$ 时.

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 3.$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2.$

三、证明：函数 $\sqrt{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 一致连续；函数 $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 非一致连续。

证明：

$$\textcircled{1} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists M \text{ s.t. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} < \varepsilon, \text{ 当 } x > M \text{ 时.}$$

不妨取 $\delta < 1$.

~~故~~ $f(x)$ 在 $[0, M+2]$ 上一致连续

$$\Rightarrow \exists \delta' \text{ s.t. } |x_1 - x_2| < \delta' \text{ 且 } x_1, x_2 \in [0, M+2] \text{ 时.}$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

$$\text{取 } \delta_0 = \min(1, \delta').$$

下对 x_1, x_2 位置讨论：

$$(1) \quad x_1, x_2 \in [0, M+2] \text{ 时, 已证.}$$

$$(2) \quad x_1, x_2 \in [M, +\infty) \text{ 时.}$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = f'(\xi) |x_1 - x_2| < \varepsilon \cdot \delta_0 < \varepsilon.$$

$$(3) \quad x_1 < M < x_2 \text{ 时.}$$

$$\text{因 } x_2 - x_1 < 1 \Rightarrow x_1 < M < x_2 < M+1$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 \in [0, M+2].$$

$$(4) \quad x_1 < M+2 < x_2 \text{ 时} \Rightarrow M+1 < x_1 < M+2 < x_2.$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 \in [M, +\infty)$$

(Q.E.D.)

$$\textcircled{2} \quad \text{取 } x_n = \frac{1}{2\lambda n^2 + \frac{\pi}{2}}, \text{ 则 } |x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0.$$

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = \sqrt{2\lambda(n+1)^2 + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2\lambda n^2 + \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2\lambda(2n^2 + 2n + 1) + \pi}{\sqrt{2\lambda(n+1)^2 + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2\lambda n^2 + \frac{\pi}{2}}}$$

$$> \frac{2\lambda(2n^2 + 2n + 1)}{2\sqrt{4\lambda(n+1)^2}}$$

$$> \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \frac{(2n^2 + 2n)}{n+1} = \sqrt{\lambda} n \rightarrow +\infty.$$

四、Riemann 函数 $R(x) = \begin{cases} 1, & x=0, \\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q} (q>0, p, q \text{ 为互素整数}), \text{ 是周期为1的函数.} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$

证明: $R(x)$ 处处不可导.

证明:

$$\frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0}$$

① x_0 为有理数 $\frac{p_0}{q_0}$ 时.

$$\frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0} = \frac{R(x) - \frac{1}{q_0}}{x - \frac{p_0}{q_0}}$$

若 x 沿无理数趋近于 x_0 , 则

$$\frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0} \text{ 趋于 } \infty. \Rightarrow \text{不可导.}$$

② x_0 为无理数时. $\frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0} = \frac{R(x)}{x - x_0}$

x 为有理数 $\frac{p}{q}$ 时.

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{1}{p - qx_0}$$

下证存在无穷组 (p, q, N) 使 $|p - qx_0| < \frac{1}{q} < \frac{1}{N}$.
若此成立, 则 $|\frac{R(x)}{x - x_0}| = |\frac{1}{p - qx_0}| > N \rightarrow +\infty$.

对 N , 考虑 $N+1$ 个数 $F_0 = 0, F_1 = x_0 - [x_0], \dots$

$$F_k = kx_0 - [kx_0], \dots, F_N = Nx_0 - [Nx_0], F_k \in (0, 1).$$

由抽屉原理, $\exists m, n$ s.t. $|F_m - F_n| < \frac{1}{N}$.

$$\text{即 } |(m-n)x_0 - ([mx_0] - [nx_0])| < \frac{1}{N}$$

若仅存在有限组 (p, q, N) . 由上构造得 N 可任取.

$|x_0 - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN}$. 令 $N \rightarrow +\infty$, 得 x_0 为有理数 (因 (p, q) 有限) 矛盾.

五、设 $f \in C^2(\mathbb{R})$, f 具有反函数 g , 而且

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 2.$$

设 $F(x) = g(x^2)$, 求 $F''(0)$.

解

$$F(x) = g(x^2) = f^{-1}(x^2)$$

$$f(F(x)) = x^2.$$

$$\textcircled{1} f'(F(x)) F'(x) = 2x.$$

$$\textcircled{2} f''(F(x)) F'(x)^2 + f'(F(x)) F''(x) = 2.$$

令 $x=0$ 得:

$$\textcircled{1} \Rightarrow f'(0) F'(0) = 0, \quad f'(0) = 2$$

$$\Rightarrow F'(0) = 0.$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow f'(0) F''(0) = 2.$$

$$\Rightarrow F''(0) = 1.$$

六、设

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \in C^1(\mathbb{R})\},$$

其中

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求出集合 A (需说明理由).

解. $f'_\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$ 存在 $\Rightarrow \alpha > 1$

此时 $f'_\alpha(0) = 0.$

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \text{ 时.}$$

$$f_\alpha \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'_\alpha(x) = 0 \text{ 存在.}$$

$$\alpha > 1 \text{ 时. } \lim_{x \rightarrow 0} f'_\alpha(x) = -\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}. \text{ 存在且为 } 0$$

$$\Rightarrow \alpha > 2.$$

故 $A = (2, +\infty)$

七、设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内连续, 且存在两两互异的点 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, 1)$, 使得

$$\alpha = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} = \beta.$$

证明: 对任意 $\lambda \in (\alpha, \beta)$, 存在互异的点 $x_5, x_6 \in (0, 1)$, 使得

$$\lambda = \frac{f(x_5) - f(x_6)}{x_5 - x_6}.$$

证明: ~~考虑~~

不妨设 $x_1 > x_2, x_3 > x_4$.

考虑 $h(t) = \frac{f(tx_1 + (1-t)x_3) - f(tx_2 + (1-t)x_4)}{(tx_1 + (1-t)x_3) - (tx_2 + (1-t)x_4)}, \quad t \in [0, 1].$

分析: $tx_1 > tx_2, (1-t)x_3 > (1-t)x_4$.

$\therefore tx_1 + (1-t)x_3 > tx_2 + (1-t)x_4. \quad \forall t \in [0, 1].$

$\therefore h(t) \in C[0, 1].$

$h(0) = \beta > h(1) = \alpha.$

$\therefore \forall \lambda \in (\alpha, \beta)$. 由介值定理, 存在 t_0 s.t.

$$h(t_0) = \frac{f(x_5) - f(x_6)}{x_5 - x_6} = \lambda.$$

$$x_5 = t_0 x_1 + (1-t_0)x_3.$$

$$x_6 = t_0 x_2 + (1-t_0)x_4.$$

八、设 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 是凸函数，证明

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

证明: 令 $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

$$g''(x) = f''(x) \geq 0.$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ 单增. } x > x_0 \text{ 时, } f'(x) - f'(x_0) \geq 0. \quad \text{即 } g'(x) \geq 0.$$

$$x < x_0 \text{ 时, } f'(x) - f'(x_0) \leq 0.$$

$$g'(x) \leq 0.$$

$$\therefore x > x_0 \text{ 时, } g(x) \geq g(x_0) = 0.$$

$$x < x_0 \text{ 时, } g(x) \geq g(x_0) = 0.$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0.$$

九、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上有二阶连续导数, $f'(0) = 1$, $f''(0) \neq 0$, 且

$$0 < f(x) < x, \quad \forall x \in (0, 2).$$

令 $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 \in (0, 2)$. 求数列 $\{nx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限.

解: $\{x_n\}$ 显然存在极限, 且为 0 (单调收敛).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{x_n}{n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}}{n+1-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - f(x_n)}{x_n f(x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - \left(0 + f'(0)x_n + \frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2) \right)}{x_n \left(0 + f'(0)x_n + \frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2) \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{2}f''(0)x_n + o(x_n)}{f'(0)x_n + \frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2)} \\ &= -\frac{f''(0)}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = -\frac{2}{f''(0)}$$

十、设 $\alpha > 1$, 函数 $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 可微, 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$f'(x_n) < f(\alpha x_n).$$

证明:

反证: 若 $\exists M$, s.t. $\forall x > M$ 时.

$$f'(x) \geq f(2x) > 0 \Rightarrow f \text{ 单调.}$$

$$\text{取 } x_1 > \frac{1}{\alpha-1}, \quad x_2 = x_1 + 1 > x_1.$$

~~则 $f(x_2) > f(x_1)$~~

$$\text{则 } f(x_2) > f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq f(2\xi) > f(2x_1)$$

但此时

$$\alpha x_1 > x_1 + 1 = x_2 \quad \text{矛盾.}$$