

数学分析 A1

作者：原生生物 QQ: 3257527639

使用资料：任广斌老师讲义（下称讲义）、数学分析教程（上册）（下称教材）、谢惠民习题课讲义（上册）（下称谢惠民）

注意：

- 1、文档顺序按照讲义编排，定义均依照教材
- 2、无缩进的结论是个人认为可以直接使用的定义/定理，不太确定的均已缩进
- 3、结论能否使用最终解释权在老师与助教

一、数列极限

定义 1 实数完备性：全体无尽小数 \Leftrightarrow 实数（教材 P3）

*可定义为此推出下方 6 条等价定义（定理）

*无穷递降法的应用

结论 1 $n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{Z}, n \neq m^2 \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ （教材 P5）

证明思路 反证，考虑 \sqrt{n} 整数部分

定义 2 极限的 $\epsilon - N$ 定义（教材 P9）

补充 可替换为 $\forall \epsilon \in (0, 1)$ 或 $|a_n - a| < M\epsilon$ (M 为正常数) 或 $|a_n - a| \leq \epsilon$

*此为唯一定义方式

*去掉有限项后近似常值

*适当放大法

结论 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ （谢惠民 P16）

证明思路 算术-几何均值放大为 $1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$

*分类思想（讨论：有无最大，极限是否为无穷，极限是否为 0 等等）

结论 3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1}^n a_i}{n} = 0$ （教材 P12）

证明思路 分 a_n 有无最大值，有易证，无则先考虑 \max 增大时子列，再放缩其余

定义 3 数列有界性（教材 P9）

定义 4 数列单调性（教材 P26）

补充 收敛数列性质（谢惠民 P17 起，均由定义证明）：

*极限唯一

*有界性

*保序性（蕴含保号性、夹逼定理）

（注意保序将严格大于小于变为不严格的大于等于小于等于）

（保序性经典用法：取某个数和极限的中点，都在此微小区域内）

结论 4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = c < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ （谢惠民 P28）

证明思路 考虑 $\frac{c+1}{2}$

结论 5 收敛数列必含最大项或最小项 (谢惠民 P18)

证明思路 任取两不等项考察

*保四则运算 (注意除法条件)

定义 5 子列定义 (教材 P14)

补充 数列收敛 \Leftrightarrow 一切子列收敛

证明思路 左推右由定义, 右推左任取一极限说明 (讲义 2)

结论 6 若数列可被分划为有限个子列 (即子列互相不交, 并集为原数列), 则数列存在极限 \Leftrightarrow 这些子列存在相同极限

证明思路 右推左利用定义 (教材 P14 类似证明)

定义 6 极限推广, 无穷大与无穷小 (教材 P24)

补充 无穷小相关定理 (教材 P17)

* $a > 1, t > 0, \ln n \ll n^t \ll a^n \ll n! \ll n^n$ (谢惠民 P53, 实质是阶的概念)

*分段证明无穷小 (以下三结论均可以使用此证明方式)

结论 7 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = c$ (Cesàro 平均或柯西命题, 教材 P18)

*此平均可改写为乘法形式

结论 8 $n, k \in \mathbb{N}^*, t_{nk} > 0, \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a$ (特

普利茨定理, 教材 P23)

结论 9 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \exists K, \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n |y_i| \leq K, z_n = \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

(谢惠民 P58)

*特普利茨和 Stolz 定理应用范围有不少重合, 但仍有其独特作用

*这类方法对涉及两个数列极限生成的无穷和式时尤其有用

结论 10 Stolz 定理 (教材 P51, 讲义 3)

$\frac{\infty}{\infty}$ 型 $b_{n+1} > b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$

$\frac{0}{0}$ 型 $b_{n+1} < b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$

证明思路 合分比不等式或特普利茨定理

*证明技巧: 用定义取出一列数累加 (与函数极限联系)

*一定要注意是否可以直接使用

*几乎是求极限题中最常用的技巧

*使用技巧: 取对数

结论 11 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

*使用技巧: 用来去除 n (感觉不满足条件时可取倒数) (谢惠民 P274 第 3 题)

结论 12 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$ (教材 P54)

证明思路 令 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = S_n$ 后进行处理

*不要忘记基本的代数变形处理!

定义 7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (教材 P31)

证明思路 利用单调有界定理

*常利用此式与 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 放缩 e (如下方结论 33)

结论 13 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$ (教材 P31)

证明思路 直接展开定义式

结论 14 $e \notin \mathbb{Q}$ (教材 P33)

证明思路 反证法

*注意此两极限的精准程度差异巨大, 第一个约为 $\frac{3}{2n}$, 第二个约为 $\frac{1}{(n+1)!}$, 证明可通过归纳等

定义 8 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln(n+1) = \gamma$ (教材 P35)

证明思路 仍然利用单调有界

结论 15 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}$

证明思路 平方后利用 Stolz 将 $\ln n$ 转化为 n , 再利用代数消去 n

实数完备性的六个等价定理

结论 16 单调有界数列存极限 (教材 P26)

证明思路 (由完备性) 写出实数的小数表示后上升

*证明有界性时可由估算或是猜测极限得到合理的界, 如 $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}} < 2$

结论 17 闭区间套定理 (教材 P28)

证明思路 (由单调有界定理) 考虑区间两端点极限

定义 9 确界定义 (教材 P41)

结论 18 有界实数集存在确界 (教材 P41)

证明思路 (由闭区间套定理) 二分法构造区间套

结论 19 有限开覆盖定理 (教材 P43)

证明思路 (由确界原理) 勒贝格方法, 考虑上确界

补充 可改进为存在勒贝格数 (谢惠民 P82)

结论 20 有界数列必有收敛子列 (教材 P38)

证明思路 (由有限覆盖定理) 反证, 若否, 任意数存邻域只有有限项, 矛盾

补充 可改进为单调收敛

结论 21 柯西收敛准则 (教材 P38)

证明思路 (由列紧定理) 取出有界数列

*结论 15 可由柯西收敛准则推出, 故此六定理等价

*事实上, 此六定理之间均可互相推导

*连续函数的一些性质证明与实数完备直接相关

结论 22 $\exists A, B, \mathbb{R} = A \cup B, \forall a \in A, b \in B, a < b \Rightarrow \exists \max A, \exists \min B$ 或 $\exists \max A, \exists \min B$
(戴德金分割, 谢惠民 P96)

证明思路 由确界可推得成立

*此定理亦与以上等价

迭代生成数列的性质 (联系导数)

结论 23 压缩数列 (柯西型压缩/收敛型压缩) 必收敛 (讲义 6)

证明思路 分别由柯西收敛准则与定义易得

结论 24 迭代生成数列只能收敛于不动点 (第一律, 谢惠民 P49)

证明思路 令递推公式两边趋于无穷

结论 25 迭代函数与数列单调性联系 (第二律, 谢惠民 P49)

证明思路 讨论一次/二次迭代下的函数

结论 26 迭代生成数列的蛛网工作法收敛规律 (谢惠民 P51)

证明思路 由前两结论可推得

*若迭代函数连续, 则只需相邻项之差极限为 0 便能收敛 (谢惠民 P156)

结论 27 牛顿切线法求根 (讲义 5, 实际为导数部分内容)

证明思路 利用上述分析证明

结论 28 $A > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3A}{3x_n^2 + A} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{A}$ (谢惠民 P53)

证明思路 注意到 $x_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{(x_n - \sqrt{A})^3}{3x_n^2 + A}$ 由压缩数列可得结论, 或由迭代规律证明

定义 10 极限点、数列上下极限 (教材 P45)

补充 上下极限具有对偶关系、亦有保号性 (讲义 6、教材 P47、P50)

结论 29 上、下极限为数列极限点 (教材 P46)

证明思路 任意小邻域内可取数列中的点

结论 30 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$ (教材 P48)

证明思路 分别说明大于等于、小于等于成立 (注意取子列的方法, 证明有界等结论时可应用)

结论 31 与上下极限相关的不等式 (教材 P49、P50)

证明思路 由上个结论可以推得

*以极值思想看待上下极限

结论 32 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{f(n)} + ax_n) = A, f(n+1) > f(n), a > 1, x_n$ 有界 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{A}{a+1}$

证明思路 不妨设 $A = 0$, 对 x_n 的任意极限点 t , 取出子列 x_{k_n} , 则 $x_{f(k_n)}$ 亦为子列, 极限点为 $-at$, 考虑 $x_{f(f(k_n))}$, 极限点为 a^2t , 若 x_n 不收敛, 当 t 为最大时, 可证 $t > 0$, 代入知 $x_{f(f(k_n))}$ 的极限更大, 矛盾

*注意有界性条件的运用 (极限点存在最大值)

*条件可加强为 $f(n)$ 单射

*若 $f(n)$ 于 n 充分大时在正整数中存在反函数则只需正数 a 不为 1 (如 $f(n) = n + t$)

结论 33 $\forall m, n, a_{n+m} \leq a_n + a_m \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$ (教材 P47、谢惠民 P90)

证明思路 仍考虑证明大于等于且小于等于

*以整体思想看待上下极限

结论 34 $x_n > 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n \geq e$ (谢惠民 P95, 教材 P84)

证明思路 若否, 某项后均小于 e, 将 e 放缩推知矛盾

*存在无限多项满足的反面为某项之后均不满足

结论 35 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (谢惠民 P63)

证明思路 两边取上下极限, 得到两个方程求解

*以夹逼思想看待上下极限

结论 36 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ (谢惠民 P91)

证明思路 考虑一切收敛子列 (此结论可通过乘积式得到关于 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 与 $\sqrt[n]{a_n}$ 的结论)

二、函数极限

定义 1 集合的势 (等价关系) (教材 P59)

补充 有限、可数、不可数定义, \mathbb{Q} 可数, \mathbb{R} 不可数

*康托对角线法思路的应用 (应用举例: 证明上极限为极限点)

结论 1 $f_n: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \forall n, \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty \Rightarrow \exists f, \forall n, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f_n(x)} = \infty$ (教材 P89)

证明思路 构造每段与一定个数 f_n 乘积相关的 f

结论 2 可数个可数集并集可数 (教材 P60)

证明思路 斜线行进法

定义 2 函数的运算、反函数、单调性、奇偶性 (教材 P66)

补充 不动点与 n 周期点定义 (教材 P67、P115)

结论 3 严格单调函数存严格单调反函数

证明思路 反证法, 利用 $f \circ f^{-1} = id$

定义 3 标准型函数极限 $\epsilon - \delta$ 定义 (教材 P68)

补充 仍可类似数列极限替换 ϵ 条件

* δ 与 N 均为多值对应, 不为 ϵ 函数

结论 4 f, g 为周期函数, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$ (谢惠民 P156、讲义 12)

证明思路 将极限式拆分为三项之和, 用绝对值适当放大得结论

结论 5 海涅归结原理 (数列极限与函数极限关系) (教材 P70、讲义 8)

证明思路 必要性易得, 充分性通过逆否证明

*可方便地用于说明极限不存在

*条件可加强为单调数列 (谢惠民 P122)

*可用数列极限说明函数极限性质: 唯一、局部有界、保序 (保号/夹逼)、保四则运算

*函数的柯西收敛原理 (仍由归结原理说明)

*保复合性 (注意条件!)

结论 6 f 在 $x > 0$ 上单调递增, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1, a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$ (谢惠民 P123)

证明思路 利用夹逼定理

定义 4 迪利克雷函数与黎曼函数 (教材 P71、P77)

补充 迪利克雷函数处处极限不存在, 黎曼函数有理点不连续无理点连续, 处处极限为 0, 处处不可导

*很多反例都可以靠两个函数进行变形构造 (如乘 x)

定义 5 函数单边极限 (教材 P76)

定义 6 函数上下极限 (教材 P112、讲义 9)

补充 函数此点有极限 \Leftrightarrow 左右极限存在且相等 \Leftrightarrow 上下极限存在且相等

*函数上下极限存在类似数列上下极限性质 (结论 28-30) (教材 P112-114)

结论 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (教材 P76)

证明思路 几何+代数证明

结论 8 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{m-n}{2}$ (谢惠民 P120)

证明思路 先考虑 n 为 1 时, 再分解为两极限之差

定义 7 极限推广, 无穷大与无穷小及阶的概念、记号

补充 等价无穷小在乘积中可替换

*记忆 $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \frac{a^x-1}{\ln a} \sim \ln(x+1) \sim \frac{(1+x)^a}{a}$

*带记号 o 的等式实质并不是等价关系, 而是序关系, 如 $o(x^2) = o(x), o(x) \neq o(x^2)$

结论 9 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$ (教材 P79)

证明思路 补充后替换, 注意常数与极限数的区别

结论 10 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, a \in (0,1), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(ax)}{x} = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{A}{1-a}$ (类似教材 P89)

证明思路 用定义表述此式, 将等比数列累加 (注意严谨性, 不能直接极限表述)

定义 8 函数的多种类型极限与统一定义 (讲义 10) (注意逻辑表述!)

结论 11 函数极限的 Stolz 定理 (讲义 10、谢惠民 P123) (同样注意需求条件)

证明思路 可取出数列说明

*需求条件实质上稍弱于连续

*若想通过任意右端成立推左则需一致连续 (见结论 19)

*常直接使用洛必达法则

定义 9 函数连续性 (教材 P90)、上下左右连续 (讲义 11)、开区间上连续 (教材 P93)

定义 10 闭区间上连续 (利用左右连续) (讲义 12)

补充 注意讲义 11 中连续性的多个等价定义 (基本等价定义与振幅刻画、开集原象刻画)

定义 11 上半连续与下半连续 (将单点向上提升不影响上半连续) (讲义 14)

补充 闭区间上的凸函数必然上半连续, 连续 \Leftrightarrow 上半连续+下半连续

结论 12 若 f 定义在开区间上, 每个开区间的像集仍为开区间, 则 f 在区间上连续

证明思路 用类似闭区间套定理的方式构造区间套套住某个点

*初等函数 (教材 P94) 均为连续函数

*连续性保四则运算、复合、max、min (可反向考虑复合, 即 **变量代换下的连续性**)

*考虑黎曼函数知连续性为点概念 (一致连续为区间概念)

*连续函数可以 **替换极限运算和函数的顺序**

结论 13 $f(x)$ 无理点值有理, 有理点值无理, 则不连续 (教材 P110)

证明思路 $f(x) + x$ 值域为无理数

定义 12 间断点与间断点类型 (教材 P94)

结论 14 单调函数只有至多可数个跳跃间断点 (教材 P95)

证明思路 先利用数列证明单侧极限存在 (类似可证明凸函数每点存在左右导数)

*单调且值域联通必连续, 严格单调且值域联通反函数必连续

结论 15 柯西法解函数方程 (以下 $f \in C(-\infty, +\infty)$) (教材 P97、谢惠民 P129)

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x) = f(1)x$$

$$f(x+y) = f(x)f(y) \Rightarrow f(x) = f(1)^x \text{ 或 } f(x) = 0$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x) = x^a \text{ 或 } f(x) = 0$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \Rightarrow f(x) = [f(1) - f(0)]x + f(0)$$

证明思路 猜出函数后先归纳得整数满足, 推出有理数满足, 结合连续证明实数满足

结论 16 非常值连续周期函数必有最小正周期 (讲义 12)

证明思路 先证明周期下界为 0, 再推出常值

结论 17 利用连续性计算 1^∞ 型极限 (教材 P98)

证明思路 **等价无穷小替换法**

$$\text{结论 18 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sum_{i=1}^n a_i^x)^{\frac{1}{x}}}{n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

证明思路 利用上述方式计算

定义 13 一致连续性 (教材 P102)

补充 **利普西茨连续** (教材 P106) (此条件若可导则与导函数有界等价)

证明思路 可直接通过定义说明

*善用定义说明一致连续

*注意一致连续的等价定义 (谢惠民 P156)

*利普西茨连续的性质 (教材 P106)

*一致连续为区间上概念 (由公共 δ 体现)

结论 19 $\exists x_n, y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0 \Rightarrow f$ 非一致连续

证明思路 可直接通过定义说明

结论 20 f 在实数一致连续 $\Rightarrow \exists a, b \geq 0, |f(x)| \leq a|x| + b$

证明思路 若否, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

*一致连续函数可以被夹在一次函数之间

结论 21 f 一致连续, $\forall x \in [0, 1], n \in \mathbb{Z}, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (教材 P106)

证明思路 利用一致连续性拆分 $f(x)$ 为三段无穷小

*仅连续不能推出此结论，反例如 $\frac{\sin \pi x}{1+x^2 \sin^2 \pi x}$

*实质是函数极限 Stolz 定理的逆定理

*将条件改为 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = 0$ 则只需 f 连续便能成立结论 (谢惠民 P156)

有界闭区间上连续函数的性质

结论 22 有界闭区间上的连续函数必一致连续 (康托定理, 教材 P106)

证明思路 凝聚定理出发, 利用反证法说明

*有界开区间一致连续 \Leftrightarrow 连续+端点存在有限极限

*连续+无限点存在有限极限 \Rightarrow 有界开区间一致连续 (另一侧反例: $\sin x$)

*一致连续区间可以拼接

*有界的一致连续函数乘积仍一致连续

*注意以上推论证明过程中的严谨性 (谢惠民 P141)

*感觉说不清楚时就用定义表述 (此方式可行于大部分证明题)

结论 23 连续周期函数必一致连续 (讲义 13)

证明思路 利用上方结论拼接连续区域即可

*此结论可反面使用, 即连续非一致连续则无周期

结论 24 $f(a) = f(b), a < b, g(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq a \\ f(x+b-a) & x > a \end{cases} \Rightarrow g$ 保留 f 的连续/一致连续

证明思路 连续由定义, 一致连续由拼接可立刻得

*直观地看, g 即为从 f 上挖去一个区间后拼接

*此结论有时可用于归纳, 如谢惠民 P155 第二题

结论 25 有界闭区间连续函数有最大值、最小值 (教材 P108)

补充 此结论蕴含有界性

证明思路 反证有界, 考虑趋向上界的点, 列紧得成立

*若此点非边界且可导, 则导数为 0 (即 Rolle 定理的经典证法)

*两次使用有界性可推出最值 (谢惠民 P135)

*在上一个推论的条件中, 若此点有二阶导, 则最大值处 ≤ 0 , 最小值处 ≥ 0

*也即, 非边界处的最值点必为极值点

结论 26 连续函数的零值定理、介值定理 (教材 P108)

补充 介值定理的另一个表述: 区间上的连续函数值域为区间

证明思路 零值由实数完备多个等价定理可推得 (谢惠民 P129), 证明介值需构造辅助函数

*介值性质并不需要连续, 即连续是更强的条件

*满足介值性的函数若存在趋向无穷的极限, 则必为正或负无穷

*零值可直接说明根的存在性

*两零点处导函数符号相同可知中间存在零点 (可看成零值定理弱化条件)

结论 27 $f \in C[a, b], f(a) = f(b) = 0$, 任两零点之间存在零点 $\Rightarrow f(x) = 0$

证明思路 先用确界定理说明任一子区间 (m, n) 上有 f 零点

*此结论即: 连续函数存在不同零点, 则某一子区间为 0 或能取出相邻零点

*此任一子区间上有 f 零点即为 f 零点稠密, 与稠密性相关的另一重要结论:

结论 28 $x \notin \mathbb{Q}$, 记 $\{t\} = t - [t]$, 则对 $n \in \mathbb{Z}$, $\{nx\}$ 在 $(0,1)$ 上稠密

证明思路 无理数不同倍数必然不等, 考虑抽屉原理得可任意接近 0, 作倍数得结论

*此结论在说明一些周期函数的性质时很有用（如谢惠民 P155 第 13 题）

结论 29 $f \in C(0, +\infty)$ 有界 $\Rightarrow \forall \lambda, \exists x_n \rightarrow +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(\lambda + x_n) - f(x_n)) = 0$ (教材 P111)

证明思路 反证，由恒大于正数（或小于负数）推出无界

结论 30 $f \in C(I), f(I) \subset I$ 或 $I \subset f(I) \Rightarrow f(x)$ 存在不动点（谢惠民 P132、P148）

证明思路 构造 $f(x) - x$ ，考虑定义域/值域的端点处

三、导数

定义 1 导数定义、左右导数、区间可导（教材 P125）、光滑函数（讲义 15）

补充 可导必连续，连续未必可导（存在连续处处不可导的连续函数），此结论亦可推出微分中的无穷小增量公式（谢惠民 P159、P161）

*导数是差商的极限（在分段函数表示时有时只能利用定义）

*导数最常用的几何观点：**切线斜率**，**一阶导数是最准确的线性逼近**（谢惠民 P160）

*可导是一点处的概念（仅一点可导：黎曼函数乘 x ）

*函数的左右导数具有保号性（本质是极限保号性）（谢惠民 P186）

结论 1 奇函数导函数为偶，偶函数导函数为奇（若 0 点存在则必为 0）

证明思路 由定义推得成立

*此结论可通过归纳推论出 n 阶导数的情况，也可说明泰勒公式中只含奇/偶项

结论 2 求导的链式法则（教材 P131）

证明思路 利用定义构造函数说明或利用无穷小增量公式

*链式法则亦可推广到 n 阶情况（讲义 16，实际应用很少）

*求导还有一些基础结论，如四则运算与导数混合、初等函数导数、反函数求导法则

*注意反函数求导法则使用时自变量的不同

结论 3 莱布尼茨公式（教材 P141）

证明思路 利用乘积求导公式归纳

结论 4 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ，则 f 在 0 处任意阶左导数为 0

证明思路 说明指数收敛速度高于任意阶多项式后归纳得结论

*此函数为任意阶可导但非实解析函数的典型案例（讲义 24），其泰勒多项式恒为 0

结论 5 n 为奇数时 $\arctan^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$ （ n 为偶数是 0 可由奇偶性推知）

证明思路 $y' = \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，可利用 $(1+x^2)y' = 0$ 使用莱布尼茨公式递推，或

分解为 $y' = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$ 直接计算 n 阶导数

*第二种思路的合理性需要由复变函数论说明，因此暂不适合写过程

*事实上，第一种解法更为本质也更为常用（谢惠民 P168 例题、P176 前三道练习题）

*注意拆项法的使用

*关于这个函数的 n 阶导数有不少可通过**归纳**得出的结论（教材 P143 第 4、5 题）

结论 6 隐函数与参数方程的求导法则（谢惠民 P171、P174）

证明思路 利用反函数求导法则与链式法则

微分中值定理（范围：有界闭区间连续、有界开区间可导的函数）

定义 2 极值点、极大值、极小值 (教材 P144)

补充 连续函数的严格极值点至多可数 (谢惠民 P156 第 16 到 18 题)

证明思路 对于大小确定的邻域, 大于邻域内所有其余点的点至多可数, 取邻域大小为 $\frac{1}{n}$,

则可数个至多可数的并仍为至多可数

结论 7 极值点处可导则导数为 0 (费马定理) (教材 P144)

证明思路 利用保号性推知成立

*关于函数极值的基本定理, 中值定理的成立基础

*由此可知区间无极值 \Leftrightarrow 单调

定义 3 驻点 (教材 P145)

补充 驻点涵义: 函数值变化为自变量变化的高阶无穷小 (微分看法)

结论 8 Rolle 中值定理 (一些难题往往直接通过此定理构造) (教材 P145)

证明思路 利用费马定理说明 (其实说明了必存在极值驻点)

*区间上的非端点最值必为极值

*事实上只需端点值相等

*定理亦可扩充为无穷区间 (通过构造有限映射到无穷的函数即可说明) (讲义 17)

*萨缪尔森证明涵盖了非极值点的驻点 (谢惠民 P189), 例如 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 考

虑包含 0 的含两零点区间

*此定理的几何意义为: 两零点间存在水平切线

*注意此定理的归纳性使用 (原函数的 n 个零点确定 $n-1$ 阶导函数的一个零点)

*此定理常用于说明根的个数

结论 9 $Q(x) = x^n(1-x)^n \Rightarrow Q^{(n)}(x)$ 在 $(0,1)$ 中存在 n 个互不相同根 (教材 P145)

证明思路 n 次使用 Rolle 定理, 注意每次的边界新增零点

结论 10 $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}$ 至多有 $n-1$ 个实根 (教材 P152)

证明思路 注意到乘 e^{cx} 不改变根, 故可将一项变为常数归纳

结论 11 拉格朗日中值定理 (教材 P146)

补充 此定理可写为有限增量公式 (谢惠民 P191), 引出泰勒展开中的拉格朗日余项

证明思路 构造函数通过 Rolle 中值定理说明

*几何意义: 函数割线斜率等于其中某点切线斜率

*此定理为利用导数研究函数时的常用工具

*割线斜率至少为切线斜率最小值, 且若为最小, 则切线斜率恒定

结论 12 $f(0) = 0, c \neq 0, |f'(x)| \leq |cf(x)| \Rightarrow f(x) = 0$ (谢惠民 P224)

证明思路 先利用构造无穷数列+单调有界定理说明 $\left[0, \frac{1}{2|c|}\right]$ 上恒成立

*注意说明小区间恒成立后组合区间的技巧

*亦可通过对数构造函数以说明 (更快捷且更本质的方法) (需利用下文结论 18)

*此结论可推广为贝尔曼不等式 (讲义 21), 证法为对数构造函数

*结合单调性, 可由拉格朗日中值定理定理证明不等式, 但一定注意是否可使用

结论 13 $\forall a > b > 0, \frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} < \arctan a - \arctan b$

证明思路 将反三角函数通过变量代换变回三角函数直接变形为平凡结论

*变量代换仍为基本操作方式

结论 14 柯西中值定理 (教材 P149)

证明思路 仍通过构造函数证明

- *注意使用条件
- *几何意义：参数方程形式曲线割线斜率等于其中某点切线斜率
- *此定理亦可扩充至无穷形式
- *此定理可通过行列式写出对n阶导成立的形式（实质是n次运用 Rolle）（讲义 17）
- *三个中值定理实质上等价，其逆定理均不一定成立

结论 15 关于凑微分的一些恒等式

$$f(x) + cf'(x) = \frac{(e^{cx}f(x))'}{e^{cx}}$$

$$f'(x) + g'(x)f(x) = \frac{(e^{g(x)}f(x))'}{e^{g(x)}}$$

$$cf(x) + xf'(x) = \frac{(x^c f(x))'}{x^{c-1}}$$

$$f(x) + f''(x) = \frac{(f^2(x) + f'^2(x))'}{2f'(x)}$$

$$f(x) - f''(x) = (e^x(f(x) - f'(x)))'$$

*以及一些奇奇怪怪的形式（比如 $f^2(x) - f'(x) = f^2(x)\left(\frac{1}{f(x)} + x\right)'$ ）

- *注意**待定函数法**的运用
- *可考虑直接利用类似积分的方式（拉格朗日定理与柯西定理均可靠此构造）
- *积分方式的运用前提是需要凑微分的部分中不含 $f(x)$
- *凑与多项式相关的导数的技巧（谢惠民 P196 例题 7.1.3、P222 第 9 题）
- *如果不知道怎么解决多阶导数叠合的问题，可以考虑试试 e
- *仍然注意基本代数变形（教材 P152 问题 3.4 第 3 题）
- *值得强调的变形：**将绝对值看成两个不等式，分为两部分证明有时可大幅简化问题**（谢惠民 P274 第一题 (2)、教材 P169 第七题）
- *存在多个变元时可考虑多次利用中值定理后叠加

结论 16 Darboux 定理（教材 P150）

补充 此定理说明了导函数具有介值性

证明思路 考虑最值点知满足零值，构造函数得介值成立，利用中值定理证间断点性质

- *此定理中关于间断点的部分证明中即得单侧导数极限定理（谢惠民 P194）
- *导数=导数的极限（若极限存在）
- *需要运用此定理时一般都较为明显，但一定注意**无法说明连续**

结论 17 f 二阶连续可导， $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'\left(\frac{x+y}{2}\right) \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ （谢惠民 P224）

证明思路 先用初等数学说明 $f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f'(x)+f'(y)}{2}$ ，再说明导函数连续从而推出结论

结论 18 若开区间可导函数在边界附近无界，则其导函数亦无界

证明思路 拉格朗日中值定理可证明

- *此结论为函数与导数有界性结论
- ***此结论反面并不成立**（如 $\sqrt[3]{x}$ 在 0 附近）
- *若函数与其 n 阶导函数均有界，则小于 n 的任意阶导数亦有界（泰勒展开可证）

结论 19 二阶导在实数上恒不为 0 的函数无界 (讲义 18)

证明思路 由 Darboux 不妨设为大于 0, 则会恒在某直线上方

结论 20 可导函数导函数不变号 \Leftrightarrow 单调 (教材 P153)

证明思路 定义与中值定理说明

*此结论可直接得出导函数恒为 0 必为常函数 (由此可知不定积分必含常数 C)

*严格单调性不受离散点处导函数为 0 影响

*此结论与以上推论在凸性中有完全对等的结论

*单调性亦可由右上/右下导数进行刻画 (讲义 20)

*由单调性可推出函数自身的大小关系, 从而证明不等式

结论 21 $x^{n+2} - 2x^n - 1 = 0$ 正根唯一 (谢惠民 P237)

证明思路 研究函数单调性可知

*一般来说, 一至二元不等式可以由单调性说明, 多元往往依靠凸性

定义 4 严格极大值、严格极小值、最值 (教材 P156)

补充 连续函数上左右导函数变号的点为严格极值点

证明思路 由单调性直接说明

*此结论未要求此点导数存在, 只需去心邻域存在即足够

*严格极值点附近未必单调 (谢惠民 P236)

*最大/小值若存在则唯一, 而最值点未必唯一

*可导区间上最值点必在边界或驻点上

结论 22 $(1 + \frac{1}{x})^{x+a}$ 在 $a \geq \frac{1}{2}$ 时在正数单调减, 否则在 x 充分大时单调增 (讲义 18)

证明思路 直接求导分析

*此结论可说明其与 e 的大小关系, 因其极限必为 e

结论 23 极大值点若存在二阶导数, 则其不大于 0

证明思路 利用局部保号性说明

*此结论说明了极值点二阶导数的性质, 其推广见下方结论 31

*由此可说明, 非常值的凸函数在内点无最大值 (讲义 19)

定义 5 凸性、凸函数、严格凸函数 (教材 P163)

补充 注意其多种等价表达

*原定义与三点定义法为最基本性质, 往往可以通过此证明性质

*原定义的几何意义为函数两点连线段在函数同一侧

*三点定义的几何意义为任一点向右移动会导致割线斜率增大

*四点定义与三点定义本质相同

结论 24 f 为恒正凸函数, 则 $\frac{1}{f}$ 为凹函数 (谢惠民 P249)

证明思路 用原定义或三点定义写出定义式分析大小即可

*凸函数在加法、乘法、最大值组合下保持凸性, 但不可复合 (如 $x^2 - 1$ 复合自身)

结论 25 琴生不等式 (教材 P163)

证明思路 归纳可知结果

*琴生不等式可用于推证多个不等式, 如谢惠民 P255-257 的经典不等式

*证不等式最常用的凸性为指数、对数与幂函数的凸性

结论 26 a_i 为正且不全相等, λ_i 为正且和为 $1 \Rightarrow (\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^x)^{\frac{1}{x}}$ 关于 x 单调增加 (定义 0 处

为 0 处极限值) (类似教材 P167)

证明思路 对于 $x_1 < x_2$, 构造函数 x^{x_1} 后利用琴生不等式代入 $a_i^{x_1}$

- *此为完整的幂平均不等式
- *虽然此貌似为单变量问题, 但直接求导几乎不可做
- ***常数变易法**将 a_i 看作变元从而更好解决问题

结论 27 开区间连续函数为凸函数只需任两点满足 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ (讲义 20)

证明思路 类似前文用柯西法进行说明

结论 28 凸函数存在递增左右导数, 且每点左导数不大于右导数 (教材 P171)

证明思路 利用单调有界定理从定义说明

- *此为凸函数对导数的最基本性质, 可导出一系列结论
- *支撑线判别法与导数单调判别法均可由此证明
- *由此可推知凸函数在其中任一闭区间均利普西茨连续

结论 29 开区间凸函数连续, 闭区间凸函数有界

证明思路 利用左右导数的性质证明

- *若开区间凸函数亦有界, 则可扩充定义为闭区间凸函数
- *将闭区间端点处的值增大不影响凸性

结论 30 可二阶导的函数具有凸性 \Leftrightarrow 二阶导数恒不小于 0 (教材 P167)

证明思路 利用一阶导数的单调性证明

定义 6 拐点 (教材 P180)

结论 31 设 $n > 1$, 若函数存在 n 阶导数, 某点的 n 阶以下导数均为 0, n 阶不为 0, 则 n 为偶数时此为极值点, n 大于 0 则为极小值, n 小于 0 则为极大值; n 为奇数时此为拐点, n 大于 0 则右侧为凸函数, n 小于 0 则左侧为凸函数 (谢惠民 P239、P250)

证明思路 直接利用泰勒展开证明, 或使用归纳法

- *这个结论说明了极值点和拐点对应的奇偶性质

结论 32 曲率公式 (讲义 20)

证明思路 通过二次泰勒多项式方程证明

- *推广后即 n 阶导数提供了最准确的 n 次曲线逼近 (若仅允许多项式则为泰勒多项式)

结论 33 若 $f(x), f'(x), f''(x)$ 均不变号, 则 $f''(x)$ 与 $f(x)$ 符号相同 (谢惠民 P277 推广)

证明思路 不妨设 $f(x) > 0$, 讨论 $f'(x)$ 符号后反证

- *此结论可归纳至多阶情况

结论 34 洛必达法则 (教材 P173)

补充 一定要注意使用条件!

证明思路 利用柯西中值定理, 结合定义证明

- *洛必达法则右端的极限可为无符号无穷 (第二部分结论 26 下推论)
- *即为连续形式的 Stolz 定理, 但注意条件区别
- *可改进为上下极限夹逼而成的不等式 (讲义 21)
- *与泰勒展开密切相关
- *一切不定型可利用对数、倒数等化为分式形式
- *反向使用洛必达时务必更加注意条件

结论 35 $f, u \in C_1(R), u'(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) + \frac{u(x)}{u'(x)} f'(x)\right) = t \Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = t$ (讲义 21)

证明思路 条件满足反向使用洛必达法则的要求, 配凑微分即得证

*此处的 t 可为实数或正负无穷

*洛必达法则亦可连续多次使用

结论 36 $f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x_0 + kh)}{h^n}$

证明思路 归纳或直接使用 n 次洛必达法则

*此即为 n 阶导存在时仅利用原函数的计算方法

*注意每次使用过后的条件变化

定义 7 渐近线与其计算公式 (教材 P180)

*注意教材 P181 作图大致步骤

*函数图像可由参数方程合成 (当前几乎不用) (谢惠民 P261)

四、泰勒展开

定义 1 微分定义 (教材 P185)

补充 一阶微分的形式不变性

证明思路 直接从定义出发写出式子

*微分看作独立变量函数 (讲义 23)

*微分记号 dx 并不需要为小量

*单变量情况, 可微即为可导, 计算微分与计算导数相同

*微分可方便地用于隐函数求导

*形式不变性在**高阶微分不存在**

*高阶微分记号 (教材 P189)

*微分用于估计误差做近似计算 (初等应用)

定义 2 泰勒多项式 (教材 P192)

补充 泰勒多项式本身并不要求 $x_0 \rightarrow x$

*注意条件**仅需一点处 n 阶可导** (与拉格朗日余项对比)

结论 1 函数减去泰勒多项式的余项在 $x_0 \rightarrow x$ 时为次数的高阶无穷小 (教材 P192)

证明思路 利用洛必达法则与归纳法

*事实上, 泰勒展开的系数是由此计算的

*由此亦可看出泰勒展开唯一性

定义 3 皮亚诺余项、麦克劳林公式 (教材 P193)

*泰勒展开本质为近似

*可用泰勒展开**估计误差**

*多项式泰勒展开在多项式次数后的项恒为 0

*奇偶函数的泰勒展开 (第三部分结论 1)

结论 2 泰勒多项式为规定次数下的**最佳近似** (讲义 24、谢惠民 P207)

证明思路 任给相同次数多项式, 产生的余项与皮亚诺余项之比趋向无穷

结论 3 带拉格朗日余项的泰勒公式 (教材 P199)

证明思路 对余项使用拉格朗日中值定理

*此余项条件为邻域内 $n + 1$ 阶可导

*由泰勒展开证明结论时几乎均为用此余项

*拉格朗日余项亦可写为更强的形式，此时可估计极限（教材 P209 问题第 1 题）

*拉格朗日余项作低阶展开或任意阶展开均可证明问题

*在涉及有界性时会考虑低阶泰勒展开

***拉格朗日余项作低阶展开**

结论 4 $f \in C^2(\mathbb{R}), M_k = \sup|f^{(k)}(x)|, M_0 M_2 < \infty \Rightarrow M_1^2 < 2M_0 M_2 (k = 0, 1, 2)$ (教材 P210)

证明思路 作出 $f(x + t)$ 的带拉格朗日余项的二阶泰勒展开，取适当 t 叠加两式可得结论

*此结论可用于估计导函数的界（讲义 26）

*写出增量形式的（即 $f(x + t)$ ）泰勒展开式代入不同的值为常见证明方法

结论 5 f 在 $[0, 1]$ 上有二阶导且最小值为 $-1, f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in [0, 1], f''(\xi) \geq 8$ (教材 P210)

证明思路 在最小值点写出带拉格朗日余项的二阶泰勒展开，代入 $0, 1$ 即得证

*最值点处因有导函数为 0 条件，为常见展开方式

***拉格朗日余项的任意阶展开（视为方程组）**

*结论 4 在不顾及具体值时可作如下的弱化推广

结论 6 $f \in C^n(\mathbb{R}), M_k = \sup|f^{(k)}(x)|, M_0 M_n < \infty \Rightarrow M_k < \infty (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ (谢惠民 P225)

证明思路 写出 $f(x + t)$ 的 n 阶带拉格朗日余项的泰勒展开，取适当的 $n - 1$ 个 t 可得到关于 $f(x)$ 的 1 到 $n - 1$ 阶导数的线性方程组，从而其均可以小于等于某 M_0, M_n 的线性组合，从而有界

结论 7 $f \in C^n[0, +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x)$ 存在有限 $\Rightarrow k \in [1, n], \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x) = 0$

证明思路 利用增量形式展开，与上题类似由适当的 t 组合，取极限得结果

***拉格朗日余项产生不等式**

结论 8 $f \in C^\infty(a, b), f^{(n)}(x) \geq 0, |f(x)| \leq M \Rightarrow \forall x, y \in (a, b), f^{(n)}(x) \leq \frac{2Mn!}{|x-y|^n}$ (谢惠民 P225)

证明思路 写出增量形式的、带拉格朗日余项的泰勒展开，只保留 0 与 n 两项即可

结论 9 $f \in C^n(\mathbb{R}), k = 0, 1, \dots, n - 1, f^{(k)}(0) = 0, c \geq 0, |f^{(n)}(x)| \leq c \sum_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(x)| \Rightarrow f(x) = 0$

证明思路 先考虑一个 0 处足够小的邻域 $[-t, t]$ ，其中 $|f^{(n)}(x)|$ 上界为 M ，写出不等式

右侧的带拉格朗日余项的麦克劳林展开，可得 $M \leq c \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} M$ ，可取足够小的 t 使得右

侧系数小于 1 ，故此区间内 M 为 0 ，组合区间即得结论

*此条件可进一步弱化为小于等于任意系数非负的线性组合（即 c 替换为 c_k ）

结论 10 带柯西余项的泰勒公式（教材 P199）

证明思路 由另一种构造使用中值定理

*在拉格朗日余项与柯西余项之间存在任意次数的广义柯西余项（讲义 24）

*拉格朗日余项与柯西余项为整体的泰勒展开，需要条件更强，结论也更强

定义 4 实解析函数 (讲义 24)

补充 实解析函数的每一点均能写为泰勒多项式的极限

结论 11 任意阶导数存在且非负的函数必实解析 (伯恩斯坦定理) (谢惠民 P225)

证明思路 由恒正可利用结论 7 估计, 由定义证出结论

*仅任意阶导数存在不能推得实解析, 如第三部分结论 4 所提到的函数

*由此, 实解析函数的要求严格强于任意阶导数存在

初等函数泰勒展开的计算方式

*直接法:

*通过定义求任意阶导数

*记忆基础函数的泰勒展开式 (三角函数、指数函数、对数函数、幂函数) (这些可直接通过 n 阶导计算得出)

*利用**复合**得到目标函数的泰勒展开式

结论 12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} = \frac{1}{6}$

证明思路 用复合求出分母式子的四阶麦克劳林展开式, 从而计算出结果

*间接法:

***待定系数法**与方程的思想

*在求导后展开, 通过类似积分的方式还原

结论 13 $\frac{x}{e^x - 1}$ 麦克劳林展开的递推公式 (0 点由极限定义) (谢惠民 P216)

证明思路 利用其倒数可写出完整展开, 待定系数法得到系数递推式

*此思路亦可用于 $\tan x$ 等可组合而成的函数

*这个递推的结果即为伯努利数

定义 5 欧拉数、伯努利数 (谢惠民 P215)

*此即为由方程得到的一系列特殊系数组

*可用于计算一些泰勒展开

定义 6 线性插值 (教材 P201)

结论 14 $f(x) \in C^2(a, b), l(x)$ 为过 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的直线, $M = \sup_{x \in (a, b)} f''(x) \Rightarrow$

$|f(x) - l(x)| \leq \frac{M}{8}(b - a)^2$ (线性插值误差估计) (教材 P202)

证明思路 利用任一点泰勒展开至二阶拉格朗日余项后代入 a, b 证明

结论 15 割线中值定理 (教材 P202、讲义 26)

证明思路 由误差估计证明过程中出现的两式不直接求和, 而由导函数介值性直接得到中值

定义 7 插值多项式 (讲义 36)

补充 可以理解为不同点处的泰勒展开

*插值多项式与原函数在展开点处的值必相等

*由此, 两函数差存在 n 个零点, 故 $n - 1$ 阶导数存在零点

*再构造函数使得增添零点, 即出现 n 阶导处中值结论

- *插值多项式余项与泰勒展开余项非常接近
- *亦可看成过 n 个指定点的 $n - 1$ 次多项式 (讲义 45)
- *构造方式: 先考虑某一点处为 0, 其他为 1 的构造, 再线性组合 n 个式子 (类似中国剩余定理)

五、不定积分

*此段几乎全为计算题, 因此此处不放置例题性的结论

定义 1 原函数、不定积分 (教材 P211)

补充 利用此定义可由直接法求出函数积分

- *注意 $\ln x$ 中何时要加上**绝对值**
- *可利用加减拆项简化运算
- *记忆常用公式 (包括基本公式与和平方有关的一些公式)
- *积分导致次数增加
- *用求导验证结果正确性

结论 1 分部积分公式 (教材 P214)

证明思路 利用乘积求导法则逆运算

- *分部积分常用于含指数函数、对数函数、幂函数、三角函数或是反三角函数时, 特点为求导不会使式子更复杂
- *利用分部积分有时可构造出方程组以得到希望结果 (**配对积分法**, 谢惠民 P285)
- *利用分部积分有时可以构造出**递推式**
- *因为不容易想起所以可**率先尝试**

结论 2 换元公式 (教材 P217)

证明思路 利用复合函数求导法则逆运算

- *依然记忆凑微分的常用公式
- *三角换元与**双曲换元**的应用 (根式情况)
- *注意换元后**补充导数一项**进入乘积
- *初等函数积分不一定为初等函数的原因之一即为积分无法复合
- *十分依赖观察能力

结论 3 反函数积分公式 (第二换元法) (讲义 28、谢惠民 P280)

证明思路 利用反函数性质分部积分

- *如同反函数求导一样注意代换变量后区别

定义 2 有理函数、部分分式 (教材 P223)

结论 4 有理函数可分解为规定形式 (教材 P223)

证明思路 利用复分析知识 (不要求掌握)

结论 5 任意有理函数存在初等原函数 (教材 P227)

证明思路 两类分式一类直接积分, 一类由分部积分得出递推, 累加即得

- *实际操作时注意运用换元技巧简化运算 (教材 P235 第二题 (10))
- *由于高次方程不可解性, 未必能找出分解, 因此为理论可做
- *寻找系数时可利用待定系数或**极限技巧** (刘维尔定理, 讲义 29、谢惠民 P290)

结论 6 三角函数有理式化为有理函数 (教材 P229)

证明思路 利用万能代换

- *注意如果函数含奇偶性, 会存在更方便的代换 (讲义 30、谢惠民 P281)

*先进行降次是较常用的处理

结论 7 线性分式的根式化为有理函数 (教材 P231)

证明思路 直接代换证明

*此代换有时会较为复杂, 但基本可以通用, 至少作为尝试

结论 8 根式函数的切比雪夫判别法 (教材 P232)

证明思路 三类分别代换观察结果

*涵盖情况多, 但容易**复杂**

*一般结论 7 足够使用

结论 9 欧拉变换 (讲义 30、谢惠民 P293)

证明思路 同样代换后观察

*对二次根式型较通用的处理, 较为方便简化

*仍注意**观察**和**换元**作为最本质的处理方法, 通用往往意味着繁琐

六、定积分

*此段采用谢惠民的编排顺序, 先讨论可积性

*重要的积分不等式 (讲义 34、39、41 部分内容) 放入积分应用中

定义 1 黎曼可积、黎曼积分、黎曼和 (教材 P238)

补充 积分的极限定义与古典极限并不相同, 可自由选取分割与介点集

*定积分可自然地看作曲边梯形的**(有向) 面积**

*由介点集任意性, 任意子区间都满足的性质可推出积分性质 (即**稠密**的性质)

*同样由任意性, 可积函数问题可通过**等距分划**转化为数列问题 (尤其不等式上)

*同样, 数列问题可看为积分

*积分时可去间断点可补充定义为连续点

*定积分的积分变量是哑标 (结果与其无关, 不定积分则不同)

结论 1 可积函数必然有界 (教材 P244)

证明思路 由分划后存在极限可推证

*可积与原函数存在无关 (注意 $\frac{d}{dx}(x^2 \sin \frac{1}{x^2})$ 为反例) (有界且原函数存在时可积)

定义 2 振幅、振幅面积 (教材 P264)

补充 振幅亦与函数连续有关 (讲义 11)

定义 3 Darboux 上下和、上下积分 (教材 P265)

补充 利用上和和下和证明本质是阶梯函数的**夹逼**

*添加分点后上和**不增**, 下和**不减**, 故存在某种**单调性**

*由此单调性结合有界知上下积分必然存在

结论 2 $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0 \Leftrightarrow \bar{I} = \underline{I}$ (教材 P267)

证明思路 利用振幅估算上下和, 夹逼可证

*此极限中的分划 P 任意性可改进为**存在性** (谢惠民 P301, 第二充分必要条件)

*可进一步改进为振幅与区间长度**二元控制** (谢惠民 P301, 第三充分必要条件)

*分两部分进行二元控制的方法有很多应用 (见下方结论 27)

*两步改进后实质已非常接近勒贝格定理

结论 3 闭区间上的连续函数、单调函数均可积 (教材 P268)

证明思路 直接利用振幅可判别 (注意有界闭区间连续必然一致连续)

*此可推知闭区间凸函数单侧导函数可积

结论 4 $f \in R[a, b] \Rightarrow \forall \epsilon, \exists g, h, g \leq f \leq h, \int_a^b (g - h) < \epsilon$ (教材 P269, 谢惠民 P333)

(其中 g, h 可为阶梯函数、连续函数、连续可微函数)

证明思路 用上下和可构造阶梯函数, 从阶梯出发用连续与可微逼近

*利用熟悉的函数逼近可积函数是常用的处理方式

结论 5 $f \in R[a - t, b + t], t > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x + h) - f(x)| dx = 0$ (谢惠民 P333)

证明思路 利用上个结论中构造的连续函数, 将极限写为定义后拆分绝对值

定义 4 零测度集、几乎处处 (教材 P264、P277)

*至多可数个零测集并集零测

*零测集子集零测

结论 6 Lebesgue 定理 (教材 P271)

证明思路 采用第三部分定义 2 处的证明思路, 通过划分 $\frac{1}{n}$ 从振幅出发证明

*此定理两方向证明都较复杂, 需仔细阅读

*使用此定理可简化很多结论的证明, 如可积区间可叠加、乘法保持可积性等

*由此定理亦可知, 改变有限个点不影响积分

结论 7 $f \in C[c, d], g \in R[a, b] \rightarrow [c, d] \Rightarrow f \circ g \in R[a, b]$

证明思路 g 的连续点必然为 $f \circ g$ 的连续点

*若 f 可积则无法判定 $f \circ g$ 是否可积 ($R(R(x))$ (R 为黎曼函数) 为反例)

*若 f, g 不可积亦无法判定 $f \circ g$ 不可积 ($D(D(x))$ (D 为迪利克雷函数) 为反例)

结论 8 $f \in R[a, c] \Rightarrow \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ (可加性, 教材 P245)

证明思路 写为积分和形式

*由此可定义 $a \geq b$ 时的 $\int_a^b f$

*积分还具有唯一性、线性性等基本性质

结论 9 $f \in R[a, b], f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$; 某连续点处非 0 $\Leftrightarrow \int_a^b f > 0$ (教材 P245)

证明思路 左半边由定义, 右半边写出非 0 点一个邻域即可

*此即为积分的保序性

*此式可产生一些自然的基本放缩, 如 $\int_a^b |f| \geq \left| \int_a^b f \right|$

结论 10 $i = 0, 1, \dots, n - 1, \int_0^1 x^i f(x) dx = 0 \Rightarrow f$ 在 $[0, 1]$ 上至少 n 零点 (教材 P248)

证明思路 若否, 则可组合出 $n - 1$ 次多项式与 f 乘积不变号

*说明零点个数的思路: 中值定理、组合积分等

结论 11 上题条件下, $\int_0^1 x^n f(x) dx = 1 \Rightarrow \max_{[0, 1]} |f| \geq 2^n (n + 1)$ (教材 P264)

证明思路 组合出 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$ 与 f 乘积放缩

结论 12 $f \in C[0,1] \rightarrow [m, M] \Rightarrow \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$ (教材 P269)

证明思路 构造函数 $(f(x) - m) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M} \right)$, 利用均值不等式

*积分问题时常要考虑构造适当的函数以控制 (经常需要保证其正负性)

结论 13 $f \in C[a, b]$ 单调增 $\Rightarrow \int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f$ (讲义 39)

证明思路 构造函数 $\left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)$

结论 14 $f \in C[a, b], g \in C[a, b]$ 不变号 $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b], \int_a^b f g = f(\xi) \int_a^b g$ (积分第一中值定理, 教材 P246)

证明思路 控制大小后利用介值定理, 或利用柯西中值定理

*可改进为 $g \in R[a, b]$

*可改进为 $\xi \in (a, b)$ (谢惠民 P308)

*不可改进为 $f \in R[a, b]$

* g 不变号条件不可省略

*取 g 为 1 可得常用结论

*注意保留的为不变号的

结论 15 积分第二中值定理 (讲义 33、谢惠民 P246) $f \in R[a, b], g$ 单调, $\exists \xi$,

$$\int_a^b f g = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f$$

$$g \text{ 非负单调增} \Rightarrow \int_a^b f g = g(b) \int_\xi^b f$$

$$g \text{ 非负单调减} \Rightarrow \int_a^b f g = g(a) \int_a^\xi f$$

证明思路 利用阿贝尔变换得到阿贝尔引理后证明 (不要求掌握) (讲义 33)

*注意闭区间单调函数必可积

*注意提取出的为单调的

*可利用第一中值定理证明弱化的第二中值定理 (谢惠民 P327)

*两个积分中值定理的应用见结论 37

定义 5 变限积分 (教材 P249)

补充 可积函数的变限积分必连续

证明思路 由可积函数有界, 直接由定义推知

*事实上可积为区间性质, 因此变限积分在区间连续

*若函数有一点处连续, 则此点变限积分必可导

*当使用条件未必满足时, 应回到定义或利用性质好的函数逼近

结论 16 $f \in R[a, b]$ 在 x 处连续 $\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x)$ (微积分基本定理, 教材 P251)

证明思路 由导数定义计算极限

*当 f 在区间连续时, 变限积分区间可导, 即为一个原函数

*不连续点处未必不可导 ($\int_0^x \cos \frac{1}{t} dt$ 在 0 处, 结论 31)

结论 17 $f \in C[a, b]$, F 为 f 原函数 $\Rightarrow \int_a^b f = F|_a^b$ (牛顿-莱布尼茨公式, 教材 P251)

证明思路 由结论 14 直接得到

结论 18 u, v, f 可导, $g(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f \Rightarrow g'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$

证明思路 利用复合函数求导法则拆分

*将积分中的 f 替换为 $f(x, t)dt$ 有更好的结论 (讲义 34, 利用全微分, 不要求掌握)

结论 19 $f \in C^1[a, b] \Rightarrow \int_a^b |f'| \geq \omega_{[a,b]} f(x)$ (ω 为振幅, 即最大值最小值差)

证明思路 设出最值点后放缩直接得到

*此结论常用于含绝对值时的放缩

*注意极值思想的应用

*利用极值与中值定理可提出指定项放缩

结论 20 $f \in R[0, a], g(x) = \frac{\int_0^x f}{x} \Rightarrow g$ 保持 f 的单调性

证明思路 利用换元统一积分限说明 (讲义 39)

*此函数 (称积分平均) 保持极限, 可从极限定义出发说明

*事实上 g 亦保持凸性, 证明见第七部分结论 26

结论 21 分部积分公式 (教材 P255)

证明思路 对乘积微分公式作积分

*可以将积分与导数建立更好的联系

*遇到多重积分时可以降低重数 (见结论 33)

*利用分部积分保留某些性质 (证明 π 是无理数, 教材 P263 问题 6.4 第 4 题)

结论 22 $\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{2k+1} \frac{1}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (讲义 39)

证明思路 考虑 $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ 直接计算与三角代换后分部积分计算

*可以从积分的角度考虑组合恒等式

*注意 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d(x-t)$, 故在不同点分部有不同结果 (相当于泰勒展开)

结论 23 换元公式 (教材 P260)

证明思路 利用复合函数求导法则

*一定注意使用条件中的连续可导、端点一致等要求

*换元可用于调整积分限优化结构

*亦可用于统一积分内容 (常遇到平移换元, 即 $t = x + a$)

*事实上条件可改变, 不过实际运用不多 (讲义 35)

*利用对称性可大量简化运算 (当直接算无从下手时可尝试配对)

*基本公式 (来自换元) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

结论 24 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ (教材 P284)

证明思路 对称性配对后变量代换得到方程

*事实上此积分并非常义积分, 但计算技巧值得关注

*利用换元和分部可以处理不少复杂的问题，结合放缩得到更多结果

积分与极限

*积分与极限同时出现时须注意**运算顺序**

*常用积分定义/极限定义直接处理

*极限计算积分与积分计算极限

结论 25 $\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx = 4\pi \ln r$ (泊松积分, 谢惠民 P372)

证明思路 利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)} = e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx}$ 化简后, 发现只需要证明

$$r^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{r+1}{r-1} \prod_{k=1}^{2n} (r - \zeta_{2n}^k)}, \quad (\zeta_{2n} \text{ 为 } 2n \text{ 次本原单位根}), \text{ 根式中即为 } \frac{(r+1)(r^{2n}-1)}{r-1}$$

*极限计算积分较少出现, 但有基础性作用

结论 26 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(2 + \cos \frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^\pi$

证明思路 转化为积分, 利用上一题结论可算得成立

*此类数列极限有自然的积分表示, 但仍注意数列极限技巧的**基础应用**

结论 27 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t} dt = \frac{1}{2}$ (教材 P263)

证明思路 利用 Stolz 转化后三角变形得结论

*利用拆分处理极限

结论 28 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = 0$ (谢惠民 P335)

证明思路 分为 $\int_0^\epsilon f$ 与 $\int_\epsilon^1 f$ 分别估计, 调整 ϵ, n 取值**使两段分别任意小**

*亦可利用最值点为可数集合而构造区间估算

结论 29 f, g 可积且 g 有周期 $T \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(px)dx = \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f$ (谢惠民 P335)

证明思路 可平移使 g 一个周期内积分为 0, 以 g 每个**周期作拆分**, 用**阶梯函数逼近** f

*舍弃无关部分的思想

结论 30 $f \in C[a, b] \rightarrow [0, +\infty) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{[a,b]} f$ (教材 P249)

证明思路 只关注最值点附近, 其余**利用极限舍去**

结论 31 $f \in C[-1, 1], \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx = \pi f(0)$ (教材 P263)

证明思路 换元后只关注 0 附近部分的值, 其余利用极限舍去

积分与导数

*核心部分, 将微分积分联系起来

*积分余项的泰勒展开揭示了一元微分学的统一性

*有较多的方法与技巧

*注意先判定**是否可导**

*利用导数得到等式

结论 32 $\frac{d}{dx} \int_0^x \cos \frac{1}{x} dx = 0$

证明思路 写为导数定义，利用分部移出部分后再使用**洛必达法则**

结论 33 泰勒公式积分余项 (教材 P257)

证明思路 **多次使用分部积分**说明相等

- *积分余项不含中值，为精确值
- *可直接推出拉格朗日余项与柯西余项
- *一阶时积分余项即为牛顿莱布尼茨公式

结论 34 $f \in C[0, +\infty] \Rightarrow \int_0^a (\int_0^x f) dx = \int_0^a f(x)(a-x) dx$ (教材 P263)

证明思路 对 a 求导或在左侧内部使用分部积分 (两方法本质相同)

- *此式可递推得到多重积分的形式
- *利用泰勒展开积分余项与此式可写出泰勒展开多重积分余项 (讲义 34)
- *将常数看作变量求导可以证明一些等式/不等式 (讲义 39)
- *积分等式的另一个常用证明思路是**配凑对称**

***利用导数控制不等式**

结论 35 f 可导, $f(a) = f(b) = 0, f'(x) \in [\alpha, \beta], \alpha < 0 < \beta \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \frac{1}{2} \alpha \beta \frac{(b-a)^2}{\beta - \alpha}$

证明思路 $f(x)$ 一定位于 $\alpha x - a\alpha, \alpha x - b\alpha, \beta x - a\beta, \beta x - b\beta$ 围成的平行四边形之中

结论 36 $f \in C[\mathbb{R}] \rightarrow (0, +\infty), |f'(x) - f'(y)| \leq |x - y| \Rightarrow (f'(x))^2 < 2f(x)$

证明思路 反证，若否，不妨设此点导数为负，估计向后减少量直到函数值为0

***导数的范围**可使函数位于某些曲线上方或下方，从而估算积分

结论 37 f 可导, $f' \geq m > 0$, (谢惠民 P371)

$$1) f' \text{单调增} \Rightarrow \left| \int_a^b \cos f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}$$

$$2) |f| \leq \pi \Rightarrow \left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}$$

证明思路

1) 首先利用 $\cos f(x) = \frac{(\sin f(x))'}{f'(x)}$ ，接着由**单调性**用第二积分中值定理提取放缩

2) 利用上述类似方法，讨论 $\cos f(x)$ **是否存在零点**，若存在必为唯一零点，故拆分后利用积分第一中值定理放缩

***注意中值定理使用条件!**

***放缩为最大/最小后利用中值定理提出为常用处理 (教材 P253 例 3)**

***利用导数得到中值结果**

结论 38 f 可导, $\int_a^b f = 0, |f'| \leq M, x \in [a, b] \Rightarrow \left| \int_a^x f \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}$ (谢惠民 P359)

证明思路 泰勒展开后提取中值

***实际与第四部分结论 14 完全相同**

结论 39 $f \in C^2[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in (a, b), \int_a^b f - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$

证明思路 在 $\frac{a+b}{2}$ 处泰勒展开后写出 a, b 处表达式得结论

***还原为微分学中值问题**为常用操作思路，且由于等价性一定可以得出结果

结论 40 $f \in C^2[a, b], f(a) = f(b) = 0, |f''| \leq M \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$ (谢惠民 P359)

证明思路 利用分部积分 (先中点后 $(x-a)(x-b)$ 处分部) 估算 (讲义 41)

*直接**利用积分特有的方式** (如分部积分) 亦有机会解决问题

*事实上上方题目均可用两种方式做出

*实质仍然一致 (在某点处分部与泰勒展开一致)

***数值积分 (与上方中值结果联系紧密)**

$$\text{结论 41 (矩形估计)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{f(0)-f(1)}{2}$$

证明思路 对小区间估计, 利用 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d(x-b)$

$$\text{结论 42 (优化的矩形估计)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right) = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}$$

证明思路 对小区间估计, 利用 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)d(x-a) + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)d(x-b)$

$$\text{结论 43 (梯形估计)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)}{2} \right) = \frac{f'(0)-f'(1)}{12}$$

证明思路 对小区间估计, 利用 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$

*利用分部积分凑出想要的形状

*积分**天生容纳中值**, 故含中值结果积分下可得确定结果 (如结论 39 积分可直接推知结论 41)

定义 6 广义可积 (教材 P279)、无穷积分、瑕积分 (教材 P281)

*此处不讨论可积条件, 仅含计算内容, 故仍由之前**定积分技巧**计算 (见结论 24)

*注意反常积分可以和常义积分互相转化 (如利用 $\tan x$ 换元等)

七、积分应用

*面积部分定理可运用分割求和取极限证明 (但注意事实上我们并没有严格定义空间中的弧长与面积)

*物理部分并不重要, 考试亦未考过, 故略过

结论 1 平面图形面积 $S = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (xdy - ydx)$ (教材 P288, 谢惠民 P337)

补充 后半部分的式子为参数方程形式, x, y 均为 t 函数, 对 t 积分

*后半部分的式子可直接推导出极坐标形式扇形公式 $(\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta)$

结论 2 $y^2 - 2xy + x^3 = 0$ 所构成封闭曲线面积是 $\frac{8}{15}$ (谢惠民 P337)

证明思路 代入 $y = tx$ 写为参数方程形式, 注意 t 取值范围为 0 到 2

结论 3 空间曲线弧长 $L = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dt$ (教材 P293)

补充 此式令 $x = t, z = 0$ 可得出函数的弧长公式 $(\int_a^b \sqrt{x^2 + f'^2(x)} dx)$

结论 4 半轴长 a, b 的椭圆周长与 $y = c \sin \frac{x}{a}$ 一个周期长度相同 $\Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2$

证明思路 分别写出, 换元后调整形式得到方程

结论 5 空间区域体积 $V = \int_a^b g(x)dx$ ($g(x)$ 为截面积) (教材 P295)

结论 6 质心坐标公式 $x_c = \frac{\int_a^b xs(x)dx}{\int_a^b s(x)dx}$ ($s(x)$ 为截线段长, y, z 类似公式) (谢惠民 P341)

结论 7 旋转体体积公式 $V_x = 2\pi y_c S$ (绕 x 轴旋转, 2π 可为任意角度) (谢惠民 P342)

证明思路 利用 $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, 代入证明

*旋转体侧面积有类似公式 (谢惠民 P342)

结论 8 旋转体侧面积公式 $S = \int_a^b y\sqrt{x^2 + y^2}dt$ (教材 P296)

结论 9 长轴 a 短轴 b 椭圆绕长轴旋转所得椭圆面面积为 $2\pi b \left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)$

证明思路 利用参数方程代入公式

*绕短轴则结果形式并不同

*椭圆绕长短轴形成椭球性质存在差异 (如均匀带电线段等势面必为绕长轴旋转椭圆)

结论 10 递增与**递减级数**的积分估计 (教材 P301-302)

证明思路 利用每个区间放缩为端点进行估计

*此结论可以说明存有限极限的单调函数级数与积分的差存在极限

*因此, 此时无穷级数与无界积分敛散性一致

*此结论并不复杂, 但可以判断不少情况

结论 11 $\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \geq \left(\int_a^b fg \right)^2$ (柯西-施瓦茨不等式) (教材 P248)

证明思路 利用柯西不等式极限形式或利用 $\int_a^b (tf - g)^2 \geq 0$ 构造关于 t 的二次函数

*注意取等条件为 f, g 几乎处处线性相关

*柯西不等式在不等式题中应用极多

*从取等条件得到等式

结论 12 $f \in C[0,1], \int_0^1 f = 1, \int_0^1 xf dx = a, \int_0^1 x^2 f dx = a^2 \Rightarrow f(x) = 2x$ (谢惠民 P334)

证明思路 直接利用柯西, 故 $f(x)$ 为 x 倍数, 再由第一个式子算出结果

*拆分技巧

结论 13 $\int_a^b f = 1, f \geq 0 \Rightarrow \left(\int_a^b f \cos kx dx \right)^2 + \left(\int_a^b f \sin kx dx \right)^2 \leq 1$ (谢惠民 P353)

证明思路 将 $f(x)$ 拆为 $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)}$, 组合后以柯西放缩

*当需要分离时可将函数拆分 (为了运用非负条件)

结论 14 $f \in C^2[0,1], f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1 \Rightarrow \int_0^1 f''^2 \leq 4$ (谢惠民 P374)

证明思路 分部可知 $\int_0^1 f'' = 1, \int_0^1 xf''(x)dx = 1$ 利用柯西有 $\int_0^1 f''^2 \geq \frac{\left(\int_0^1 (x-c)f''(x)dx \right)^2}{\int_0^1 (x-c)^2 dx} =$

$\frac{3c^2 - 6c + 3}{3c^2 - 3c + 1}$, 直接求出最小值, c 取 $\frac{1}{3}$ 即达到

*注意待定系数法的运用

*常用的放缩方式

*利用牛顿-莱布尼茨公式与绝对值放缩调整

结论 15 $f \in C^1[0, a], f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^a |ff'| \leq \frac{a}{2} \int_0^a f'^2$ (谢惠民 P373)

证明思路 利用 $|f(x)| \leq \int_0^x |f'|$, 令 $g = \int_0^x |f'|$ 柯西放缩

结论 16 $f \in C^1[0, 1], f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)f'^2(x)dx$

证明思路 牛顿-莱布尼茨公式调整左侧后柯西拆分

*平方式还可选择求导处理

结论 17 f 可导, $f' \in [0, 1], f(0) = 0 \Rightarrow \left(\int_0^1 f\right)^2 \geq \int_0^1 f^3$ (教材 P254)

证明思路 将 1 变为参数 t 求导, 整理后再求导

*当结论实质上与上限无关时可将上限看作变量处理

结论 18 Young 不等式 (教材 P305)

证明思路 先说明取等时的情况, 再分类证明

*函数连续的条件可以去掉 (严格单调自然可积), 此时需利用定义证明

*取等时产生的等式实际上即为反函数的积分公式

*注意拼接为矩形方法的应用

结论 19 $a, b, p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ (离散形式, 教材 P306)

证明思路 利用 x^{p-1} 与 x^{q-1} 互为反函数, 积分证明

结论 20 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ (赫尔德不等式, 教材 P308)

证明思路 在结论 19 中代入 $a = \frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, b = \frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, 积分即得证

*此不等式可看作柯西不等式推广

结论 21 $p \geq 1 \Rightarrow \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (闵可夫斯基不等式, 教材 P308)

证明思路 $|f+g|^p \leq |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g|$, 两边积分后利用赫尔德不等式

*这些不等式都可以范数化表达 (讲义 44), 可在泛函分析中推广

*不等式可来自离散形式极限

结论 22 f, g 单调增 $\Rightarrow \int_0^1 fg \geq \int_0^1 f \int_0^1 g$ (切比雪夫总和不等式)

证明思路 由排序不等式 (或构造乘积) 说明离散形式的总和不等式后取极限

结论 23 $f > 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq e^{\int_a^b \ln f}$ (均值不等式)

证明思路 由算术-几何平均不等式取极限而来

结论 24 Gronwall 不等式 (讲义 39, 谢惠民 P373 有弱化形式)

证明思路 求导证明 $\frac{M(t_0) + \int_0^t f \varphi}{M(t_0)e^{\int_0^t \varphi}}$ 单调减后直接比较得结果 (注意 $M(t_0)$ 已为常数)

*注意此不等式条件

结论 25 f 连续凸 $\Rightarrow (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ (谢惠民 P344)

证明思路 写出每对对称点均满足的不等式后积分

*这个不等式亦有鲜明的几何意义 (谢惠民 P345)

*这个不等式左右两不等号均为连续函数凸的充分必要条件 (谢惠民 P373)

结论 26 $f \in R[0, a], g(x) = \frac{\int_0^x f}{x} \Rightarrow g$ 保持 f 的凸性 (谢惠民 P353)

证明思路 由 g 连续只需证明满足琴生条件, 利用 f 凸性放缩

结论 27 $f \in [m, M], \varphi$ 凸, $p \geq 0, \int_a^b p = 1 \Rightarrow \varphi\left(\int_a^b pf\right) \leq \int_a^b p\varphi(f)$ (琴生不等式, 谢惠民 P346, 讲义 41)

证明思路 $\varphi(f(x)) \leq \varphi(c) + \alpha(f(x) - c), c = \int_a^b fp$, 同乘 $p(x)$ 后积分可消去 α

*琴生不等式很强, 可证明包括均值在内的一系列不等式

*直接使用不多, 一般运用特例

结论 28 Wallis 公式 (教材 P309)

证明思路 利用三角函数次方的定积分结果使用夹逼原理

*注意证明中 **积分与夹逼** 的综合运用

结论 29 $n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (斯特林公式, 教材 P311)

证明思路 利用不等式估计 $\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 极限

*教材 P311 上实际给出了一个余项估计 ($e^{\frac{t}{m}}, t \in [0, 1]$)

*事实上用更好的不等式能得到更精确的估计 ($e^{\frac{t}{12n}}, t \in [0, 1]$, 讲义 41)

*此式可估算组合数的阶

*有时需要与 **组合恒等式** 综合运用 (教材 P312 问题 7.4 第 2 题)

结论 30 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (教材 P312)

证明思路 利用范围内 $1 - x^2 \leq e^{-x^2}, e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ 由 e^{-nx^2} 作出估计, 并使 n 趋向无穷,

夹逼得结论

*此即为 **用极限计算积分** 的例子

感谢阅读!