作 业 1

1. 完成教材第一章的习题1-5和9.

2. 定义集合
$$M_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$
上的二元运算如下
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$
该运算是否结合？是否交换？请证明或者给出反例.

1. 完成教材第一章的习题6，7，8，13（2）（3），15，19，20.

2. 定义集合

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

上二元运算 $+$ 和 $\cdot$ 如下：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

(1) 证明 $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ 构成一个环；

(2) 找出所有 $M_2(\mathbb{R})$ 在乘法意义下的可逆元，并证明这些元素在乘法意义下构成一个群。

3. 设 X 是一个集合，令 $S = \{f : X \to X \mid f \text{ 是单射}\}$。

(1) 证明 S 在复合运算下构成一个含幺半群;

(2) 证明当 X 是有限集时，S 在复合运算下构成一个群；当 X 是无限集时， S 在复合运算下不构成一个群。

4. 令 $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. 定义 $\mathbb{H}$ 上两个二元运算 $+$ 和 $\cdot$ 如下：

$$(a+bi+cj+dk)+(a'+b'i+c'j+d'k) := (a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k.$$

$$(a+bi+cj+dk)\cdot(a'+b'i+c'j+d'k) := (aa'-bb'-cc'-dd')$$
$$+(ab'+ba'+cd'-dc')i+(ac'-bd'+ca'+db')j+(ad'+bc'-cb'+da')k.$$

证明 $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ 构成一个可除环（或体）， 即 $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ 是一个环，并且 $(\mathbb{H}\backslash\{0\}, \cdot)$ 是一个群。

5. 设 α 是 $x^3 - x - 1 = 0$ 的一个根，定义 $\mathbb{Q}[\alpha] = \{a + b\alpha + c\alpha^2\}$，定义 $\mathbb{Q}[\alpha]$ 上两个二元运算 $+$ 和 $\cdot$ 如下：

$$(a+b\alpha+c\alpha^2)+(a'+b'\alpha+c'\alpha^2) := (a+a')+(b+b')\alpha+(c+c')\alpha^2.$$

$$(a+b\alpha+c\alpha^2)\cdot(a'+b'\alpha+c'\alpha^2) := (aa')+(ab'+ba')\alpha+(ac'+bb'+ca')\alpha^2$$
$$+(bc'+cb')\alpha^3+cc'\alpha^4$$
$$=(aa'+bc'+cb')+(ab'+ba'+bc'+cb'+cc')\alpha+(ac'+bb'+ca'+cc')\alpha^2.$$

证明 $(\mathbb{Q}[\alpha], +, \cdot)$ 构成一个环。

思考：$(\mathbb{Q}[\alpha], +, \cdot)$ 是否是一个域？

1. 详细证明讲义中的定理8，9，10(1)(2)(3)，13，14，18.

2. 证明定义1注记中的唯一性。

3. 设 R 是非空集合 A 中任一关系，定义 A 中关系 R_1, R_2 分别为

$$xR_1y\text{当}x=y, xRy\text{与}yRx\text{三者之一成立;}$$
$$xR_2y\text{若有}x_0,x_1,\cdots,x_n\text{使得}x_0=x,x_n=y$$
$$\text{且 } x_0R_1x_1, x_1R_1x_2,\cdots,x_{n-1}R_1x_n.$$

(1) 证明 R_2 是一个等价关系，称为 R **生成**的等价关系，记为 $\bar{R}$.
(2) 证明若 R 是等价关系，则 $R_2 = R$ 即 xR_2y 当且仅当 xRy.

思考题 **4**. 设 X 是一非空集合，仿照由自然数集$\mathbb{N}$ 到整数集 $\mathbb{Z}$的构造过程，得到 $(\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X),\cup)$ 上的一个关系 R，求 $((\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X))/\bar{R},\cup)$ 是个什么群？如果把 $\cup$ 改为 $\cap$ 呢？

思考题 **5**. 设 $(G,+)$ 是一个交换群，$\sim$ 是 G 上一个等价关系， $G/\!\sim\,=\{[a]|a\in G\}$，并且存在 G 上二元运算 $+$，满足 $[a]+[b]=[a+b]\ \forall a,b\in G$, 问 $\sim$ 是一个什么样的等价关系？并判断 $(G/\sim,+)$ 何时形成一个群。

1. 教材48页 3.2，3.3，3.4，3.5，3.6.

2. 思考题：设 R 为整环（定义见教材第28页），记 $R^* = R \setminus \{0\}$，定义 $R \times R^*$ 上关系 $\sim$ 为 $(r,s) \sim (r',s') \Leftrightarrow rs' = r's$. 证明：

（1）$\sim$ 为 $R \times R^*$ 上的等价关系，并记 $[(r,s)]$ 为 (r,s) 所在的等价类；

（2）定义 $R\times R^*/\sim$ 上二元运算 $+$ 和 $\cdot$ 如下：

$$[(r,s)] + [(r',s')] = [(rs' + r's, ss')]$$
$$[(r,s)] \cdot [(r',s')] = [(rr', ss')]$$

验证上述两个二元运算定义合理；

（3）证明 $(R \times R^*/\sim, +, \cdot)$ 是一个域。

3. 思考题：设 R 为一含幺交换环，I 是 R 的理想，定义 R 上关系 $\sim$ 为 $r \sim r' \Leftrightarrow r - r' \in I$. 则 $\sim$ 是 R 上一等价关系。记 $[r]$ 为 r 所在的等价类，定义 $R/\sim$（一般记为 R/I）上二元运算 $+$ 和 $\cdot$ 如下：

$$[r] + [r'] = [r + r']$$
$$[r] \cdot [r'] = [rr']$$

（1）验证上述两个二元运算定义合理；

（2）证明 $(R/I, +, \cdot)$ 是一含幺交换环。

1. 教材48-49页 3.7，3.8，3.9，3.10，3.11，3.12，3.13，3.14。

2. 思考题：令 $R = \{f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}\}$，$R$ 中元素称为**数论函数**. 对任意数论函数 $f, g \in R$，定义二元运算 $+$ 和 $*$ 如下：

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$
$$(f*g)(n) = \sum_{1 \leqslant d | n} f(d) g(\frac{n}{d})$$

证明 $(R, +, *)$ 构成一个环，并证明**莫比乌斯（Möbius）函数**与 **1** 互逆。其中：

$$\mathbf{1}(n) = 1 \quad \forall n.$$

1. 教材64-65页 4.1，4.2，4.4，4.5，4.6，4.7，4.8。

2. 思考题：令 R 为含幺环，I_1, I_2 是 R 的理想，且 $I_1 + I_2 = \{a + b \mid a \in I_1, b \in I_2\} = R$. 讨论环 $R/(I_1 \cap I_2)$，R/I_1 与 R/I_2 之间的关系。

1. 教材65-66页 4.10，4.11，4.12，4.13，4.15，4.16。

2. 设 G 是群，$x \in G$. 对任意 $g \in G, gxg^{-1}$ 称为 x 的共轭元。如果 x 的阶有限，我们把它的阶记为 $\operatorname{ord}(x)$。证明在群中
(1) $\operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(x^{-1})$;
(2) $\operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(gxg^{-1}) \quad \forall g \in G$;
(3) $\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord}(yx)$.

3. 设 G 是群，$g, h \in G$，并且 $gh = hg$，则 $\operatorname{ord}(gh) \mid [\operatorname{ord}(g), \operatorname{ord}(h)]$；若进一步 $(\operatorname{ord}(g), \operatorname{ord}(h)) = 1$，则 $\operatorname{ord}(gh) = \operatorname{ord}(g)\operatorname{ord}(h)$，并给出反例说明条件 $(\operatorname{ord}(g), \operatorname{ord}(h)) = 1$ 不能舍去。

1. 教材85-87页 6.2， 6.5， 6.6， 6.8， 6.13， 6.20， 6.21。

2. 证明素数阶群一定是循环群。

1. 设 $G=\langle g\rangle$ 为 n 阶循环群，$n>0$。
(1) 令 $G^m=\{\ h^m \mid h\in G\}$，其中 $m>0$。证明 G^m 为 G 的 $\frac{n}{(m,n)}$ 阶子群，且 $g^{(m,n)}$ 为一个生成元。
(2) 设 $a\in G^m$。则 G 中存在 (m,n) 个互不相同的元素 a_i，使得 $a_i^m=a$。

2. 教材第111页，8.1，8.2，8.3，8.5，8.6。

1. 教材第111-112页，8.7，8.8，8.9，8.10，8.11。

2. 思考题：证明形如 $8n+3$，$8n+5$，$8n+7$ 的素数均有无穷多个。

一. 教材：8.12-8.17

二.

1.

(1)设R为整环，证明$(R[x])^{\times} = R^{\times}$

(2)举例说明若R不为整环，(1)中等号可以不成立

2.设$f(x) = 3x^3 - 5x^2 - x + 5, g(x) = x^2 + 2x + 3$; 在$\mathbb{C}[x]$中求$g(x)$除$f(x)$的商$q(x)$及余项$r(x)$

3.设$p, q, m \in \mathbb{C}$，在$\mathbb{C}[x]$中考虑：

(1) p, q, m 满足什么条件时 $(x-m)^2$ 整除 $x^3 + px + q$

(2) p, q 满足什么条件时存在m使 $(x-m)^2$ 整除 $x^3 + px + q$

一. 教材：5.1-5.7

1. 完成课本习题 5.8–5.15.
2. 思考: 对于一般的 m, 如何判断多项式的一个零点是 m 重零点.

作业: 课本习题 7.1, 7.2, 9.1–9.10.

1.课本习题：7.3题到7.15题（7.6题与7.8题不用做）。

2.思考题

2.1：（证明商群是一个群）设$N \triangleleft G$，我们在集合$\bar{G} = G/N = \left\{aN \mid a \in G\right\}$上定义二元运算:$aN \cdot bN = abN$,试验证二元运算的可定义性(即若$aN = cN$,$bN = dN$，则 $abN = cdN$),以及证明 G/N 对此运算形成群(我们把这个群$\bar{G}$叫做群G对正规子群N的商群)。

2.2：(证明群同态基本定理)设$f : G \to H$是群G到群H的群同态。f的核记为$kerf$，定义为H中单位元的原像。f的像记为imf，定义为G中所有元素的像集。证明：

(1)$kerf$是G的正规子群

(2)imf是H的子群

(3)$G/kerf \cong imf$

1.课本习题：9.11；9.12；9.13；7.6；7.8；7.16；7.17；7.18。