第一次作业参考答案

一、第一次作业参考答案

练习 1

1. 列出以下复合命题的真值表.（其中支命题 p, q, r, s 视为命题变元.）

7° $(\neg p \wedge q) \to (\neg q \wedge r)$

$(\neg$	p	$\wedge$	$q)$	$\to$	$(\neg$	q	$\wedge$	$r)$
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1

8° $(p \to q) \to (p \to r)$

$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)$
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

9° $\neg(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

$\neg$	$(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r))$	$\leftrightarrow$	$((p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$r))$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

练习 2

2. 写出由$X_2 = \{x_1, x_2\}$生成的公式集 $L(X_2)$的三个层次：L_0, L_1 和 L_2.

$L_0 = X_2 = \{x_1, x_2\}$ $\quad$ $|\boldsymbol{L_0}| = \mathbf{2}$

$L_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, x_1 \to x_1, x_1 \to x_2, x_2 \to x_1, x_2 \to x_2\}$ $\quad$ $|\boldsymbol{L_1}| = \mathbf{6}$

$L_2 = \{\neg\neg x_1, \neg\neg x_2, \neg(x_1 \to x_1), \neg(x_1 \to x_2), \neg(x_2 \to x_1), \neg(x_2 \to x_2),$

$\neg x_1 \to x_1, \neg x_2 \to x_1, (x_1 \to x_1) \to x_1, (x_1 \to x_2) \to x_1, (x_2 \to x_1) \to x_1, (x_2 \to x_2) \to x_1,$

$\neg x_1 \to x_2, \neg x_2 \to x_2, (x_1 \to x_1) \to x_2, (x_1 \to x_2) \to x_2, (x_2 \to x_1) \to x_2, (x_2 \to x_2) \to x_2,$

$x_1 \to \neg x_1, x_1 \to \neg x_2, x_1 \to (x_1 \to x_1), x_1 \to (x_1 \to x_2), x_1 \to (x_2 \to x_1), x_1 \to (x_2 \to x_2),$

$x_2 \to \neg x_1, x_2 \to \neg x_2, x_2 \to (x_1 \to x_1), x_2 \to (x_1 \to x_2), x_2 \to (x_2 \to x_1), x_2 \to (x_2 \to x_2)\}$

$|\boldsymbol{L_2}| = \mathbf{30}$

分析：如何不重不漏地写出$X_n = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$各层次的全部公式？

本质上是一个“排列组合”问题。

首先易知$L_0 = X_n$，故$|L_0| = n$；

对于$L_i (i \geq 1)$，根据公式形成的规则“若p是公式，则$\neg p$是公式；若p, q是公式，则

$p \rightarrow q$是公式”可知：L_i的公式必然形如“$\neg p$”或“$p \rightarrow q$”，且p, q均为$L_k(k < i)$当中的公式。对于L_i中形如“$\neg p$”的公式，p肯定全部属于L_{i-1}，故这类公式的个数为$|L_{i-1}|$；对于L_i中形如“$p \rightarrow q$”的公式，不妨设p属于L_α而q属于L_β，α, β应当满足：“$0 \le \alpha \le i-1$”且“$0 \le \beta \le i-1$”且“$\alpha + \beta = i-1$”，故这类公式的个数为$\sum_{l=0}^{i-1} |L_l| \cdot |L_{i-l-1}|$。

综合以上两类公式，便知$|L_i| = |L_{i-1}| + \sum_{l=0}^{i-1} |L_l| \cdot |L_{i-l-1}|$，而依据这种思路，各层次（即$L_i(i \ge 1)$）具体有哪些公式也可以不重不漏地写出。

以$X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}(n = 3)$为例，$|L_0| = 3$，$|L_1| = |L_0| + |L_0| \cdot |L_0| = 12$，

$|L_2| = |L_1| + \sum_{l=0}^{1} |L_l| \cdot |L_{1-l}| = |L_1| + 2|L_0| \cdot |L_1| = 84$，

$$|L_3| = |L_2| + \sum_{l=0}^{2} |L_l| \cdot |L_{2-l}| = |L_2| + 2|L_0| \cdot |L_2| + |L_1| \cdot |L_1| = 732……$$

二、常见问题总结

1. 真值表格式错误

请严格仿照教材中真值表的书写方式及本次作业参考答案的格式进行真值表的绘线与填写，不必冗余也不可简略。

2. 对命题联结词不熟悉导致真值判定有误

（1）合取词“$\wedge$”（“与”/“且”）和析取词“$\vee$”（“或”）产生了混淆；

（2）蕴含词“$\rightarrow$”的唯一成假指派是“前件为真且后件为假”。

3. 题目抄错的现象较严重

（1）部分同学真值表第 9 小问遗漏了公式最前面的“$\neg$”，导致该永假式错判为永真；

（2）其他常见问题还包括把p和q、$\wedge$和$\vee$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$抄混等情况。

4. 公式集各层次元素有遗漏或错写

(1) 部分同学在L_1中没有写“$\mathrm{x}_1 \rightarrow \mathrm{x}_1$”和“$\mathrm{x}_2 \rightarrow \mathrm{x}_2$”两个公式，这进而导致遗漏了$\mathrm{L}_2$中与之相关的 10 个公式；

(2) 部分同学在列举L_2中公式时，把形如“$\neg x_m \rightarrow \neg x_n$”的公式错误地写入，请注意这些公式属于$L_3$而不是$L_2$。

另外，不要偷懒打省略号，尤其是省略号打得不明不白！！！即便你是用集合的简化表示，助教只要看懂也给分了，但考试时还是建议规规矩矩地一一列举。

练习3 2.1°

$(x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1))$

证明

1. $(\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)$ (L3)
2. $((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)) \to ((x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)))$ (L1)
3. $(x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1))$ (1)(2)MP

练习3 2.2°

$((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))$

证明

1. $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))$ (L2)
2. $((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))) \to (((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))$ (L2)
3. $((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))$ (1)(2)MP

练习3 3.2°

$\{\neg\neg p\} \vdash p$

证明

1. $\neg\neg p$ 假定
2. $\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ (L1)
3. $\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p$ (1)(2)MP
4. $(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ (L3)
5. $\neg p \to \neg\neg\neg p$ (3)(4)MP
6. $(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ (L3)
7. $\neg\neg p \to p$ (5)(6)MP
8. p (1)(7)MP

练习3 3.3°

$\{p \to q, \neg(q \to r) \to \neg p\} \vdash p \to r$

证明

1. $\neg(q \to r) \to \neg p$ 假定
2. $(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (p \to (q \to r))$ (L3)
3. $p \to (q \to r)$ (1)(2)MP
4. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)
5. $(p \to q) \to (p \to r)$ (3)(4)MP
6. $p \to q$ 假定
7. $p \to r$ (5)(6)MP

练习3 3.4°

$\{p \to (q \to r)\} \vdash q \to (p \to r)$

证明

1. $p \to (q \to r)$ 假定
2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)
3. $(p \to q) \to (p \to r)$ (1)(2)MP
4. $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ (L1)
5. $q \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (3)(4)MP
6. $(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r)))$ (L2)
7. $(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ (5)(6)MP
8. $q \to (p \to q)$ (L1)
9. $q \to (p \to r)$ (7)(8)MP

练习4 2.2°

使用演绎定理证明$(q \to p) \to (\neg p \to \neg q)$

只需证明$\{(q \to p)\} \vdash \neg p \to \neg q$

1. $\neg\neg q \to q$　　练习3 3.2°结论
2. $p \to \neg\neg p$　　练习4 2.1°结论
3. $q \to p$　　假定
4. $\neg\neg q \to p$　　(1)(3)HS
5. $\neg\neg q \to \neg\neg p$　　(2)(4)HS
6. $(\neg\neg q \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg q)$　　(L3)
7. $\neg p \to \neg q$　　(5)(6)MP

练习4 2.3°

使用演绎定理证明$((p \to q) \to p) \to p$

只需证明$\{(p \to q) \to p\} \vdash p$

1. $\neg p \to (p \to q)$　　否定前件
2. $(p \to q) \to p$　　假定
3. $\neg p \to p$　　(1)(2)HS
4. $(\neg p \to p) \to p$　　p24否定肯定律
5. p　　(3)(4)MP

练习5 1.2°

$\vdash (\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

由演绎定理，只需证明$\{\neg p \to q, \neg q\} \vdash p$

下证$\{\neg p \to q, \neg q, \neg p\} \vdash q$

1. $\neg p \to q$　　假定
2. $\neg p$　　假定
3. q　　(1)(2)MP

又显然有$\{\neg p \to q, \neg q, \neg p\} \vdash \neg q$

由反证率$\{\neg p \to q, \neg q\} \vdash p$

练习5 1.3°

$\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$

由演绎定理，只需$\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$

下证$\{\neg(p \to q), q\} \vdash p \to q$

1. $q \to (p \to q)$　　(L1)
2. q　　假定
3. $p \to q$　　(1)(2)MP

又显然有$\{\neg(p \to q), q\} \vdash \neg(p \to q)$

由归谬率$\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$

2.2 $\vdash (p\wedge q)\to q$

方法很多！仅供参考！

$p\wedge q = \neg(p\to\neg q)$

∴即证 $\vdash \neg(p\to\neg q)\to q$

1、$\neg q\to(p\to\neg q)$ L1

2、$(\neg q\to(p\to\neg q))\to(\neg(p\to\neg q)\to\neg\neg q)$ L3

3、$\neg(p\to\neg q)\to\neg\neg q$ MP 1,2

4、$\neg\neg q\to q$ 双否律

5、$\neg(p\to\neg q)\to q$ HS 3,4

2.3 $\vdash (p\wedge q)\to(q\wedge p)$

$p\wedge q = \neg(p\to\neg q)$

$q\wedge p = \neg(q\to\neg p)$

∴即证 $\vdash \neg(p\to\neg q)\to\neg(q\to\neg p)$

由演绎定理即证 $\{\neg(p\to\neg q)\}\vdash\neg(q\to\neg p)$

由归谬律，将 $q\to\neg p$ 作新假设：

1、$q\to\neg p$ 新假设

2、$(q\to\neg p)\to(\neg\neg p\to\neg q)$ L3

3、$\neg\neg p\to\neg q$ MP 1,2

4、$p\to\neg\neg p$ 第二双否律

5、$p\to\neg q$ HS 4,3

6、$\neg(p\to\neg q)$ 假设

由上知5、6矛盾，因此原式成立

即 $\vdash(p\wedge q)\to(q\wedge p)$ 成立

2.4 $\vdash p\to(p\wedge p)$

$p\wedge p=\neg(p\to\neg p)$

① 由演绎定理，即证 $\{p\}\vdash\neg(p\to\neg p)$

由归谬律，将 $p\to\neg p$ 作为新假设

1、p 假设

2、$p\to\neg p$ 新假设

3、$\neg p$ MP 1,2

由上知 1.3 矛盾，因此原式成立

② 1、$(\neg\neg p \to \neg p) \to \neg p$ 否定肯定律

2、$(p \to \neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ L3

3、$(p \to \neg\neg p) \to \neg p$ HS 2,1

4、$((p \to \neg\neg p) \to \neg p) \to (p \to \neg(p \to \neg\neg p))$ L3

5、$p \to \neg(p \to \neg p)$ MP 3,4

即 $p \to (p \land p)$

方法②不推荐！否定肯定律考试不一定可以直接用！

4.1 德·摩根律

$\vdash \neg(p\land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$

证：$\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$

$= (\neg(p\land q) \to (\neg p \lor \neg q)) \land ((\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land q))$

先证引理A：$\{p, q\} \vdash p \land q$

即 $\{p, q\} \vdash \neg(p \to \neg q)$

由归谬律，将 $p \to \neg q$ 做新假设

1、$p \to \neg q$ 新假设

2、p 假设

3、$\neg q$ MP 2, 1

4、q 假设

由上知 3、4 矛盾，因此引理成立

再证 $\neg(p\wedge q)\to(\neg p\vee\neg q)$ 式 B

即 $\neg\neg(p\to\neg q)\to(\neg\neg p\to\neg q)$

由演绎定理，即证 $\{\neg\neg(p\to\neg q),\neg\neg p\}\to\neg q$

由归谬律，将 q 作为新假设

1. $\neg\neg(p\to\neg q)$ 假设
2. $\neg\neg(p\to\neg q)\to(p\to\neg q)$ 双否律
3. $p\to\neg q$ MP 1, 2
4. $\neg\neg p\to p$ 双否律
5. $\neg\neg p$ 假设
6. p MP 5, 4
7. $\neg q$ MP 6, 3
8. q 新假设

由上知 7、8 矛盾，因此原式成立

再证 $(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$ 式 C

即 $(\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$

由演绎定理，即证 $\{\neg\neg p \to \neg q\} \vdash \neg\neg(p \to \neg q)$

1、 $p \to \neg\neg p$ 第二双否律

2、 $\neg\neg p \to \neg q$ 假设

3、 $p \to \neg q$ HS 1,2

4、 $(p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$ 第二双否律

5、 $\neg\neg(p \to \neg q)$ MP 3,4

得证式 C

由引理 A，可得：$\{B, C\} \vdash B \wedge C$

∴ 进而题设成立

第四次作业

2.3

$$(q \vee r) \to (\neg r \to q)$$

1. 列真值表
2. 证明

$$\begin{aligned}
&\models (\neg p \to \neg q) \to (q \to p) \\
&p = q,\ q = \neg r,\ \text{使用代换定理} \\
&\models (\neg q \to \neg\neg r) \to (\neg r \to q) \\
&\models (\neg\neg q \vee \neg\neg r) \to (\neg r \to q)
\end{aligned} \tag{}$$

$$\begin{aligned}
v((\neg\neg q \vee \neg\neg r) \to (\neg r \to q)) &= (v(\neg\neg q) \vee v(\neg\neg r)) \to (v(\neg r) \to v(q)) \\
&= (\neg\neg v(q) \vee \neg\neg v(r)) \to (v(\neg r) \to v(q)) \\
&= (v(q) \vee v(r)) \to (v(\neg r) \to v(q)) \\
&= v((q \vee r) \to (\neg r \to q)) \\
&\equiv 1 \\
\models (q \vee r) \to (\neg r \to q)
\end{aligned} \tag{}$$

2.4

$(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$

1. 列真值表(找特殊的指派)
    - 如 (p,q,r)=(0,0,0)

2.5

$(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge \neg q) \vee r)$

1. 列真值表(找特殊的指派)
    - 如 (p,q,r)=(0,0,0)

3.1

$\models p(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$

- 充分性(代换定理)

令$u(x_i) = \neg v(x_i), i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
v(p(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)) &= p(v(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)) \\
&= p(\neg v(x_1), \ldots, \neg v(x_n)) \\
&= p(u(x_1), \ldots, u(x_n))
\end{aligned}$$

- 必要性

$$\begin{aligned}
\text{由代换定理和前述充分性,}\ \models p(\neg x_1, \ldots, \neg x_n) &\Rightarrow \models p(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n) \\
\text{而}\ \ v(p(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n)) &= p(v(\neg\neg x_1), \ldots, v(\neg\neg x_n)) \\
&= p(\neg\neg v(x_1), \ldots, \neg\neg v(x_n)) \\
&= p(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \\
&= v(p(x_1, \ldots, x_n)) \\
\text{因此}\ \ \models p(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n) &\Rightarrow \models p(x_1, \ldots, x_n) \\
\text{因此}\ \ \models p(\neg x_1, \ldots, \neg x_n) &\Rightarrow \models p(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

3.2

$\models (p \to q) \leftrightarrow (p' \to q') \Rightarrow \models p \to p' \text{且} q \to q'$

只要给出一组满足左侧但不满足右侧条件的指派即可

如$p = 1, q = 1; p' = 0, q' = 0$

语义部分的证明相比于语法部分要简单许多

等值:

定义 1 (等值公式) p 与 q 等值，是指 $p \leftrightarrow q$ 为永真式.

由此定义及永真式的定义立即可知，当 $p, q \in L(X_n)$ 时，

p 与 q 等值 (即 $\vDash p \leftrightarrow q$)

$\Leftrightarrow$ $L(X_n)$ 的任一赋值 v 都使 $v(p) = v(q)$

$\Leftrightarrow$ $L(X)$ 的任一赋值 v 都使 $v(p) = v(q)$

$\Leftrightarrow$ p 与 q 有相同的成真指派和成假指派

$\Leftrightarrow$ p 与 q 有相同的真值函数

$\Leftrightarrow$ 对 $x_1, \cdots, x_n$ 的任何指派 $v_1, \cdots, v_n$, 都有

$$p(v_1, \cdots, v_n) = q(v_1, \cdots, v_n).$$

由定义 1 还立即可得

命题 1 1° $\vDash p \leftrightarrow p$; (等值的反身性)

2° $\vDash p \leftrightarrow q \quad \Rightarrow \quad \vDash q \leftrightarrow p$; (等值的对称性)

3° $\vDash p \leftrightarrow q$ 及 $\vDash q \leftrightarrow r \quad \Rightarrow \quad \vDash p \leftrightarrow r$. (等值的可递性)

代换定理:

定理 2 (代换定理)

$$\vDash p(x_1, \cdots, x_n) \quad \Rightarrow \quad \vDash p(p_1, \cdots, p_n),$$

其中 $p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$, 而 $p_1, \cdots, p_n \in L(X)$; $p(p_1, \cdots, p_n)$ 是用 $p_1, \cdots, p_n$ 分别全部替换 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 $x_1, \cdots, x_n$ 所得结果.

子公式等价可替换性:

定理 1 (子公式等值可替换性)

设 q 是 p 的子公式: $p = \cdots q \cdots$, 用公式 q' 替换 p 中的子公式 q (一处替换) 所得结果记为 $p' = \cdots q' \cdots$. 那么

$$\vDash q \leftrightarrow q' \quad \Rightarrow \quad \vDash p \leftrightarrow p'.$$

主析取范式

主合取范式

定义 3 (主析取范式与主合取范式) $L(X)$ 中的主析取范式是这样的析取范式，在它的每个析取支中，每个命题变元 $x_1, \cdots, x_n$ (带否定号或不带否定号) 按下标由小到大的次序都出现且都只出现一次. 主合取范式同样定义，只用把"每个析取支"改为"每个合取支".

定理 1 每个非永假式必有与它等值的主析取范式.

练习9

- 1.2 证明$(\neg p \wedge \neg q) \to \neg r$与$r \to (q \vee p)$等值

  即证明$((\neg p \wedge \neg q) \to \neg r) \leftrightarrow (r \to (q \vee p))$永真

  真值表搞定

  也可以简单用L3，与德摩根律证明$((\neg p \wedge \neg q) \to \neg r) \to (r \to (q \vee p))$与$(r \to (q \vee p)) \to ((\neg p \wedge \neg q) \to \neg r)$

  $((\neg p \wedge \neg q) \to \neg r) \leftrightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r)$

  $(\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r) \leftrightarrow (\neg r \vee \neg(\neg p \wedge \neg q))$

  $(\neg r \vee \neg(\neg p \wedge \neg q)) \leftrightarrow (\neg r \vee (\neg\neg p \vee \neg\neg q))$

  $(\neg r \vee (\neg\neg p \vee \neg\neg q)) \leftrightarrow (\neg r \vee (p \vee q))$

  $(\neg r \vee (p \vee q)) \leftrightarrow (r \to (q \vee p))$

- 1.3 证明$(\neg p \wedge q) \to \neg r$与$r \to (q \vee \neg p)$等值

同上,相似的过程，这种题目更推荐真值表，更加简便

- 2.2 证明$\neg(x_1 \vee \neg x_2) \to (x_2 \to x_3)$与$(\neg x_1 \wedge x_2) \to \neg(x_2 \wedge \neg x_3)$等值

使用德摩根律还有永真式$\neg\neg p \leftrightarrow p$得到

1. $\neg(x_1 \vee \neg x_2) \leftrightarrow (\neg x_1 \wedge x_2)$
2. $(\neg x_2 \vee x_3) \leftrightarrow \neg(x_2 \wedge \neg x_3)$

使用子公式等价可替换性带入即可

- 2.3 证明$\neg(x_1 \vee \neg x_2) \to (x_2 \to x_3)$与$\neg(\neg x_2 \vee x_3) \to (x_2 \to x_1)$等值

  L3：$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$永真

  使用代换定理得

  $(\neg\neg p \to \neg\neg q) \to (\neg q \to \neg p)$永真

  即$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$永真

  结合L3，$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$永真

  $(\neg(x_1 \vee \neg x_2) \to (x_2 \to x_3)) \leftrightarrow (\neg(x_2 \to x_3) \to \neg\neg(x_1 \vee \neg x_2))$

  右边再经过简单的一步即是结果

练习10

等值主析取/合取范式大家数电应该都学过，找出式子为真/假时的取值即可，手动一步步转化也不难

- 1.3 求$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$
  真值表
  在(x_1, x_2, x_3)取$(1,1,0),(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1)$时为真
  $(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$

- 1.4求$\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$的等值主析取范式
  先把$\to, \leftrightarrow$变成$\wedge, \vee$
  $\neg(\neg(\neg x_1 \vee \neg x_2) \vee x_3)$
  德摩根律
  $\neg((x_1 \wedge x_2) \vee x_3)$
  $\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg x_3$
  $(\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge \neg x_3$
  分配率
  $(\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)$
  $(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee ((x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3))$

求等值主合取范式

- 2.3

  $$3^\circ\ (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3).$$

  在$(0,0,0),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)$处为假

  $$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$
  $$\wedge(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

- 2.4

  $$4^\circ\ ((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4.$$

并没有什么不同，找出为假的取值即可

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$
$$\wedge(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4).$$

数理逻辑第六次作业参考答案

练习 11

2.3 分别找出只含有运算¬和∧的公式，使之与以下各公式等值：

$$(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \leftrightarrow x_3$$

方法一：利用以下 对式子直接进行变换

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$(p \rightarrow q) = \neg(p \wedge \neg q)$$
$$\boxed{\neg\neg p = p}$$

解：以下各公式与原公式等值：

$((x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow x_1)) \leftrightarrow x_3$ （消去↔）

$(\neg(x_1 \wedge \neg\neg x_2) \wedge \neg(\neg x_2 \wedge \neg x_1)) \leftrightarrow x_3$ （依据$u \rightarrow v = \neg(u \wedge \neg v)$）

$(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)) \leftrightarrow x_3$ （依据$\neg\neg p = p$）

$\big((\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)) \rightarrow x_3\big) \wedge \big(x_3 \rightarrow (\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2))\big)$ （消去↔）

$\neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \wedge \neg x_3) \wedge \neg\big(x_3 \wedge \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2))\big)$

（依据$u \rightarrow v = \neg(u \wedge \neg v)$）

方法二：也可以利用上节做法，写出公式的成真指派得到它的等值主析取范式，然后利用德摩根定律将其变换为符合题意的形式。

3.2 分别找出只含有运算¬和∨的公式，使之与以下各公式等值：

$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \rightarrow (\neg x_3 \wedge x_4)$$

方法一：利用以下 对式子直接进行变换

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$(p \rightarrow q) = \neg(p \wedge \neg q)$$
$$\neg p \wedge \neg q = \neg(p \wedge q)$$
$$\boxed{\neg\neg p = p}$$

解：以下各公式与原公式等值：

$(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \rightarrow (\neg x_3 \wedge \neg\neg x_4)$ （依据$p = \neg\neg p$）

$\neg(x_1 \vee x_2) \rightarrow \neg(x_3 \vee \neg x_4)$ （依据$\neg p \wedge \neg q = \neg(p \vee q)$）

$\neg\neg(x_1 \vee x_2) \vee \neg(x_3 \vee \neg x_4)$ （依据$u \rightarrow v = \neg u \vee v$）

$x_1 \vee x_2 \vee \neg(x_3 \vee \neg x_4)$ （依据$\neg\neg p = p$）

方法二：也可以利用上节做法，写出公式的成假指派得到它的等值主合取范式，然后利用德摩根定律将其变换为符合题意的形式。

练习 12 把以下论证形式化，并判断是否合理。（几乎必考，务必书写规范，步骤齐全）

2. A、B、C、D 为四个事件。已知：A 和 B 不同时发生；若 A 发生，则 C 不发生而 D 发生；若 D 发生，则 B 不发生。结论：B 和 C 不同时发生。

解：用x_1, x_2, x_3, x_4分别表示事件A, B, C, D发生，于是题中的论证可形式化为

$$\{\neg(x_1 \wedge x_2), x_1 \to (\neg x_3 \wedge x_4), x_4 \to \neg x_2\} \vdash \neg(x_2 \wedge x_3)$$

解方程组：

(1) $\neg(v_1 \wedge v_2) = 1$；

(2) $v_1 \to (\neg v_3 \wedge v_4) = 1$；

(3) $v_4 \to \neg v_2 = 1$；

(4) $\neg(v_2 \wedge v_3) = 0$。

由(4)式可得

(5) $v_2 = 1$，且

(6) $v_3 = 1$。

由(1)式与(5)式得

(7) $v_1 = 0$。

由(3)式与(5)式得

(8) $v_4 = 0$。

将(6)、(7)、(8)式代入(2)式的左边，得

$$v_1 \to (\neg v_3 \wedge v_4) = 0 \to (\neg 1 \wedge 0) = 1$$

所得结果说明：(0, 1, 1, 0)是(1)~(4)的解。它是前三个公式（"前提"）的公共成真指派，但却是$\neg(x_2 \wedge x_3)$（"结论"）的成假指派，所以题中的论断并不合理。

注意：A 和 B 不同时发生形式化为$\neg(x_1 \wedge x_2)$，而不是$\neg(x_1 \leftrightarrow x_2)$、$x_1 \to \neg x_2$、$x_2 \to \neg x_1$，也可以形式化为$(x_1 \to \neg x_2) \wedge (x_2 \to \neg x_1)$。

3. 例 3 中如果办案人员作出的判断是:“a, b, c 三人中至少有一人未作案”，判断是否正确？

例 3 一案案情涉及 a,b,c,d 四人. 根据已有线索，知

1° 若 a,b 均未作案，则 c,d 也均未作案；

2° 若 c,d 均未作案，则 a,b 也均未作案；

3° 若 a 与 b 同时作案，则 c 与 d 有一人且只有一人作案；

4° 若 b 与 c 同时作案，则 a 与 d 同时作案或同未作案.

解 用 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示 a,b,c,d 作案. 办案人员的推理可形式化为

$$\{(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \leftrightarrow (\neg x_3 \wedge \neg x_4),\ (x_1 \wedge x_2) \to ((x_3 \vee x_4) \wedge \neg(x_3 \wedge x_4)),$$
$$(x_2 \wedge x_3) \to ((x_1 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_4))\} \vdash \neg(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

解方程组

(1) $(\neg v_1 \wedge \neg v_2) \leftrightarrow (\neg v_3 \wedge \neg v_4) = 1$;

(2) $(v_1 \wedge v_2) \to ((v_3 \vee v_4) \wedge \neg(v_3 \wedge v_4)) = 1$;

(3) $(v_2 \wedge v_3) \to ((v_1 \wedge v_4) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_4)) = 1$;

(4) $\neg(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = 0$。

由(4)式分别可得

(5) $v_1 = 1$，

(6) $v_2 = 1$，

(7) $v_3 = 1$。

以上三式代入(2)式可得

(8) $v_4 = 0$。

以上四式代入(3)式的左边，得

$$(v_2 \wedge v_3) \to ((v_1 \wedge v_4) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_4)) = (1 \wedge 1) \to ((1 \wedge 0) \vee (\neg 1 \wedge \neg 0)) = 0$$

该式与(3)式矛盾，所以方程组(1)~(4)无解。这说明题中论断是正确的。

第七次作业 仅供参考!

P66

2.3 $\forall x_1 R_1^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$

约束 自由

记项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 为 t （t 即 term）

记公式为 P

t 代换 x_2 后，显然 t 中变元无约束

因此 项 t 对 P 中 x_2 自由

2.4 $\forall x_2 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to \forall x_1 R_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2))$

自由 约束

t 代换 $f_2^2(x_1, x_2)$ 中 x_2 时，x_1 受约束

因此 项 t 对 P 中 x_2 不自由

P67

3.3 方法同上，不详写

$\forall x_2 R_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \forall \underline{x_3} R_1^3(\underline{x_1}, x_2, x_3)$

$\uparrow$

∴不自由 $t: f_1^2(x_1, \underline{x_3})$

3.4 $\forall x_2 R_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \rightarrow \forall \underline{x_3} R_1^1(f_1^2(\underline{x_1}, x_3))$

$\uparrow$

$f_1^2(x_1, x_3)$

∴不自由

5、 $P(x)$ 中 x 自由，y 不自由，证：若 y 对 $P(x)$ 中 x 自由，则 x 对 $P(y)$ 中 y 也自由

思路：y 对 $P(x)$ 中 x 自由即 x 不出现在 y 约束范围

x 自由，即 x 不作为约束出现，因此 $P(y)$ 替换自由 x 后，$P(y)$ 不含 x，此时 x 对 $P(y)$ 显然是自由的

图解：$P(x)$ ： $\forall y(\cdots y)\cdots\cdots x$

$\Rightarrow P(y)$ ： $\forall y(\cdots y)\cdots\cdots y$

证：x 在 $P(x)$ 中自由出现，则 $P(y)$ 中 y 不存在 x 约束范围内，所以 x 对 $P(y)$ 中 y 自由 （言之有理即可）

P73

2、证对任意公式 p 与 q，有 $\vdash \forall x(p\to q)\to(\forall x p\to\forall x q)$

由演绎定理，即证 $\{\forall x(p\to q), \forall x p\}\vdash \forall x q$

1、 $\forall x(p\to q)$ 假设

2、 $\forall x(p\to q)\to(p\to q)$ K4

3、 $p\to q$ 1,2 MP

4、 $\forall x p$ 假设

5、 $\forall x p\to p$ K4

6、 p 4,5 MP

7、 q 3,6 MP

8、 $\forall x q$ 8 Gen

原式得证

3、1 $\{\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\}\vdash \forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)$

1、 $\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ 假设

2、 $\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ K4

3、 $\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ 1,2 MP

4、$\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_1, x_1)$ K4

5、$R_1^2(x_1, x_1)$ 3,4 MP

6、$\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)$ 5 Gen

证毕

3.2 $\{\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)\} \vdash \forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$

1、$\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ 假设

2、$\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ K4

3、$\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ 1,2 MP

4、$\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_1, x_3)$ K4

5、$R_1^2(x_1, x_3)$ 3,4 MP

6、$\forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$ 5 Gen

7、$\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$ 6 Gen

8、$\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3) \to \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ K4

9、$\forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ 7,8 MP

10、$\forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ 9 Gen

证毕

4. 1°. $(p\to\forall x\, q)\to\forall x(p\to q)$

x 不在 p 中自由出现

由演绎定理，只需证：$\{p\to\forall x q\}\vdash\{\forall x(p\to q)\}$

(1).	$p\to\forall x q$	假设
(2).	$\forall x q\to q$	K4
(3).	$p\to q$	(1)(2) MP
(4)	$\forall x(p\to q)$	Gen

2°. $(p\to\exists x q)\to\exists x(p\to q)$

由演绎定理：只需证 $\{p\to\exists x q\}\vdash\exists x(p\to q)$

由归谬律：设 $\neg\exists x(p\to q)$ 是条件，也即 $\forall x\neg(p\to q)$

(1)	$\forall x\neg(p\to q)$	假设
(2).	$\forall x\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)$	K4
(3).	$\neg(p\to q)$	(1)(2) MP
(4).	$\neg p\to(p\to q)$	永真
(5)	$\neg p\to(p\to q)\to(\neg(p\to q)\to\neg\neg p)$	K3
(6).	$\neg(p\to q)\to\neg\neg p$	(4)(5) MP
(7)	$\neg\neg p\to p$	双否
(8)	$\neg(p\to q)\to p$	(6)(7) HS
(9)	p	(3)(8) MP
(10)	$p\to\exists x q$	假设
(11)	$\exists x q\ (\neg\forall x\neg q)$	(9)(10) MP
(12).	$q\to(p\to q)$	K1
(13).	$q\to(p\to q)\to(\neg(p\to q)\to\neg q)$	K3
(14)	$\neg(p\to q)\to\neg q$	(12)(13) MP
(15)	$\neg q$	(3)(14) MP

(16) $\forall x \neg q$ Gen

因此 (11)(16) 矛盾，由归谬律，原式结论成立

由演绎定理，原命题成立

P81 1° (1). $(\exists x\, p \to q) \to \forall x (p \to q)$ x不在q中自由出现

由演绎定理：$\{\exists x\, p \to q\} \vdash \forall x (p \to q)$

(1). $\neg \forall x \neg p \to q$ 假定

(2). $\neg \forall x \neg p \to q \to (\neg q \to \neg\neg \forall x \neg p)$ K3

(3). $\neg q \to \neg\neg \forall x \neg p$ (1)(2) MP

(4). $\neg\neg \forall x \neg p \to \forall x \neg p$ 双否

(5) $\neg q \to \forall x \neg p$ (3)(4) HS

(6). $\forall x \neg p \to \neg p$ K4

(7) $\neg q \to \neg p$ (5)(6) HS

(8) $\neg q \to \neg p \to (p \to q)$ K3

(9) $p \to q$ (7)(8) HS

(10) $\forall x (p \to q)$ Gen.

2° $\exists x (p \to q) \to (\forall x\, p \to q)$

演绎：$\{\exists x (p \to q)\} \vdash \{\forall x\, p \to q\}$

演绎 II：$\{\exists x (p \to q), \forall x\, p\} \vdash \{q\}$

归谬：$\{\exists x (p \to q), \forall x\, p, \neg q\}$

(1) $\exists x (p \to q)$ 假设

(2) $\exists x (p \to q) \to (p \to (\exists x\, q))$ 前证

(3). $p \to \exists x\, q$ (1)(2) MP

(4) $\forall x\, p$ 假设

(5). $\forall x\, p \to p$ K4

(6) p (4)(5) MP

(7). $\exists x q \ (\neg\forall x \neg q)$ (3)(6) MP

(8) $\neg q$ 假设

(9) $\forall x \neg q$ Gen

(7)(9) 由归谬和演绎定理知命题得证。

3. 3° (0) $\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 R_1^2(x_2,x_3))$

(1) $\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to \exists x_3 R_1^2(x_2,x_3))$

(2). $\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (\exists x_3 (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3))$

(3). $\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (\exists x_3 \forall x_4 (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3))$

(4). $\exists x_3 \forall x_4 (\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3))$

(5) $\exists x_3 \forall x_4 \exists x_1 ((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3))$

4° (0) $\exists x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg \exists x_3 R_1^2(x_1,x_3))$

(1) $\exists x_4 R_1^2(x_4,x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \forall x_3 \neg R_1^2(x_1,x_3))$

(2). $\exists x_4 R_1^2(x_4,x_2) \to \forall x_3 (R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1,x_3))$

(3). $\forall x_3 (\exists x_4 R_1^2(x_4,x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1,x_3)))$

(4). $\forall x_3 \forall x_4 (R_1^2(x_4,x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1,x_3)))$

数理逻辑基础 Homework9

刘世凤

2022 年 5 月 27 日

1　练习17

2　设$\varphi, \psi \in \Phi_M$.求证：若对项t中的任一变元x都有$\varphi(x) = \psi(x)$，则$\varphi(t) = \psi(t)$.

证明：以t中出现的个体常元，个体变元和运算为基础构建项集T，对t在T中的层次数k进行归纳：

- 当$k = 0$时，$t = c_i$或$t = x_i$，因为$\varphi(c_i) = \psi(c_i) = \overline{c_i}$和$\varphi(x_i) = \psi(x_i)$，所以有$\varphi(t) = \psi(t)$;
- 当$k > 0$时，设$t = f_i^n(t_1, t_2, ..., t_n)$，其中$t_1, t_2, ...t_n$是层次较低的项，由归纳假设，有：
  $\varphi(t_1) = \psi(t_1), ..., \varphi(t_n) = \psi(t_n)$
  因此：
  $\varphi(t)$
  $= \psi(f_i^n(t_1, t_2, ...t_n)) = \overline{f_i^n}(\varphi(t_1), ...\varphi(t_n))$
  $= \overline{f_i^n}(\psi(t_1), ...\psi(t_n)) = \psi(f_i^n(t_1, t_2, ...t_n))$
  $= \psi(t)$

由项集T的分层性和上述归纳，得证。

3　设$t \in T$，φ和$\varphi' \in \Phi_M$，φ'是φ的x变通，且$\varphi'(x) = \varphi(t)$。用项t代换项$u(x)$中x所得的项记为$u(t)$。求证$\varphi'(u(x)) = \varphi(u(t))$。

详见教材P94-引理1-1°的证明。

引理 1　对给定的解释域，设 φ' 是项解释 φ 的 x 变通，且满足 $\varphi'(x) = \varphi(t)$，t 是某个项.

1° 若 $u(x)$ 是项，则 $\varphi'(u(x)) = \varphi(u(t))$.

2° 若 t 对公式 $p(x)$ 中的 x 自由，则

$$|p(x)|(\varphi') = |p(t)|(\varphi).$$

2 练习18

1. 设 K 中的 $C=\{c_1\}$, $F=\{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}$, $R=\{R_1^2\}$. 它的一个解释域是 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$, $\overline{c_1}=0$, $\overline{f_1^1}$ 是后继函数, $\overline{f_1^2}$ 是 $+$, $\overline{f_2^2}$ 是 $\times$, $\overline{R_1^2}$ 是 $=$. 试对以下公式分别找出 $\varphi, \psi \in \Phi_{\mathbf{N}}$, 使 $|p|(\varphi)=1$, $|p|(\psi)=0$, 其中 p 为:

1° $R_1^2(f_1^2(x_1,x_1), f_2^2(x_2,x_3))$.

2° $R_1^2(f_1^2(x_1,c_1),x_2) \to R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3)$.

3° $\neg R_1^2(f_2^2(x_1,x_2), f_2^2(x_2,x_3))$.

4° $\forall x_1 R_1^2(f_2^2(x_1,x_2), x_3)$.

5° $\forall x_1 R_1^2(f_2^2(x_1,c_1), x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)$.

2. 已知 K 中 $C=\{c_1\}$, $F=\{f_1^2\}$, $R=\{R_1^2\}$, 还已知 K 的解释域 $\mathbf{Z}$ (整数集), $\overline{c_1}=0$, $\overline{f_1^2}$ 是减法, $\overline{R_1^2}$ 是 "$<$". 试给出 $\varphi, \psi \in \Phi_{\mathbf{Z}}$, 使 $|p|(\varphi)=1$, $|p|(\psi)=0$, 其中 p 为:

1° $R_1^2(x_1,c_1)$.

2° $R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_1) \to R_1^2(c_1, f_1^2(x_1,x_2))$.

3° $\neg R_1^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1,x_2)))$.

4° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3)$.

5° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1,c_1),x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)$.

6° $\forall x_1 \forall x_2 (R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),c_1) \to R_1^2(x_1,x_2))$.

1-3° 使原式成真的指派应满足：$x_1 \cdot x_2 \neq x_2 \cdot x_3$,可行的一组项解释$\varphi$满足：$\varphi(x_1)=0$,$\varphi(x_2)=1$,$\varphi(x_3)=1$；可取项解释$\psi$满足：$\psi(x_1)=0$,$\psi(x_2)=0$,$\psi(x_3)=1$。
（注：本题答案不唯一，成假指派只需要满足$\psi(x_2)=0$或$\psi(x_1)=\psi(x_3)$）

1-4° 使原式成真的指派应满足：$\forall x_1, x_1 \cdot x_2 = x_3$，唯一可行的项解释$\varphi$满足：$\varphi(x_2)=\varphi(x_3)=0$，其他任意的项解释均为可行的一组项解释$\psi$。
（注：本题中x_1全部约束出现，故讨论项解释时不该对x_1赋予特定项解释）

5° $\forall x_1\ R_1^2(f_2^2(x_1,c_1),x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)$.
由于公式的真值只与自由变元的指派相关，故对上式中的变元更名:
$\forall x_3\ R_1^2(f_2^2(x_3,c_1),x_3) \to R_1^2(x_1,x_2)$.
使上式为假的指派满足: 对 $\forall x_3, x_3=0$ 且 $x_1 \neq x_2$
因此，不存在对 x_1, x_2 的指派使上式成立
故对任意的 φ, 恒有 $|p|(\varphi)=1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi)=0$

2-3° 使原式成真的指派应满足：$x_1 \geq x_2$，成假的指派满足$x_1 < x_2$，答案不唯一，不要遗漏原式中的$\neg$即可。

2-4° 使原式成真的指派应满足：$\forall x_1, x_1 - x_2 < x_3$，即$\forall x_1, x_1 < x_2 + x_3$。由于解释域没有上限，因此找不到对$x_2$和$x_3$的指派使原式成立，因此对任意的$\psi$，恒有$|p|(\psi) = 0$；不存在变通$\varphi$，使得$|p|(\varphi) = 1$。

2-5°（注：**1**-5°和**2**-5°都要注意$\forall$约束的范围）

由于公式的真值只与自由变元的指派相关，故对上式中的变元更名:

$\forall x_3\ R_1^2(f_1^2(x_3, c_1), x_3) \rightarrow R_1^2(x_1, x_2)$

使上式为假的指派满足: 对 $\forall x_3, x_3 - 0 < x_3$ 且 $x_1 \geq x_2$

而不存在对 x_1, x_2 的指派使上式成立

故对任意的 φ, 恒有 $|p|(\varphi) = 1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi) = 0$

3 练习19

2. 设 K 中 $C = \{c_1\}$, $F = \{f_1^2\}$, $R = \{R_1^2\}$, 解释域 $\mathbf{Z}$ 是整数集. $\overline{c_1} = 0$, $\overline{f_1^2}$ 是减法, $\overline{R_1^2}$ 是“<”. 求 $|p|_{\mathbf{Z}}$, 其中 p 为:

1° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(c_1, x_1), c_1)$,

2° $\forall x_1 \forall x_2 \neg R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1)$,

3° $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow R_1^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3)))$,

4° $\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))$.

3° 对任意$\varphi \in \Phi_Z$，总有$\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$与$\varphi(x_1) - \varphi(x_3) < \varphi(x_2) - \varphi(x_3)$同真或同假，因此对任意的$\varphi$总有$|p|(\varphi) = 1$，即$|p|_Z = 1$。

4° 使原式成真的指派应满足：$\forall x_1 \exists x_2 s.t. x_1 < (x_1 - x_2) - x_2$，等价于$\forall x_1 \exists x_2 s.t. x_2 < 0$。在解释域Z上，有$\exists x_2, x_2 < 0$恒成立，故有$|\exists x_2 R_1^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))|_Z = 1$，进而有$|p|_Z = 1$。

第十次作业参考

仅供参考！

by TA 朱晓

P93

3、证明K中以下公式都不是有效式

（证明不有效，就找个反例）

3) $\forall x_1(\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1))$

证：取 $M = Z$，$\overline{R_1^1} = $ "$=0$"，$\overline{c_1} = 0$

取项解释 $\varphi(x_1) = 1$

$$|\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1)|(\varphi)$$

$$= |\neg R_1^1(x_1)|(\varphi) \to |\neg R_1^1(c_1)|(\varphi)$$

$$= \neg |R_1^1(x_1)|(\varphi) \to \neg |R_1^1(c_1)|(\varphi)$$

$\because \neg|R_1^1(x_1)|(\varphi) = 1$，$\neg|R_1^1(c_1)|(\varphi) = 0$

$\therefore |\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1)|(\varphi) = 0$

$\Rightarrow |\forall x_1(\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1))| = 0$

$\therefore$ 原式不是K中有效式，得证

4) $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$

证：取 $M=Z$，$\overline{R_1^2} = “=”$，

则有任意 $\varphi \in \Phi_M$，$|R_1^2(x_1,x_1)|(\varphi)=1$

$\Rightarrow |R_1^2(x_1,x_1)|_M=1 \Rightarrow |\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)|_M=1$

若 $|\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi)=1$

则存在 φ 的 x_2 变通 φ' 使

$|\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=1$

取 $\varphi(x_2)=n$，$n\in Z$，则总有 $\varphi(x_1)=n-1$

s.t. $|R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi)=0$，

即不存在这样的 φ' 使 $|\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=1$

$\therefore |\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi)=0$

$\Rightarrow |\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|_M=0$

综上，$|\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi)=0$

即原式不是K中有效式，得证.

4、(i) 证对K中任何项t，$\varphi^+(t)=\varphi(t)$

证：为证上述结论，要对t分类讨论

更简单的方法是构造满足上述条件的项集T^+，与K的项集T比较

设 $F=\{f_i, i=1,2,\cdots\}$，F为K运算集

$X=\{x_i, i=1,2,\cdots\}$，X为K变元集

$C=\{c_i, i=1,2,\cdots\}$，C为K常元集

① $t\in X\cup C$时，$t\in T$，而由$\varphi^+(x_i)=\varphi(x_i)$知，

$t\in T^+$

② 若$t_1,\cdots t_n\in T$，则$f_i^n(t_1,\cdots t_n)\in T$，$f_i^n\in F$

指派 $\varphi(f_i^n(t_1,\cdots t_n))$

$=f_i^n(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))$

1) 若$t_1,\cdots t_n\in X\cup C$，则

$f_i^n(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))=f_i^n(\varphi^+(t_1),\cdots,\varphi^+(t_n))$

$=\varphi^+(f_i^n(t_1,\cdots t_n))$

2) 若$\exists t'\in t_1,\cdots,t_n$，$t\notin X\cup C$，

则总可通过 1) 中证明得$\varphi(t')=\varphi^+(t')$

即$f_i^n(t_1,\cdots t_n)\in T^+$

③ 任一项皆如此形成，即皆由规则①②的有限次使用形成

由上可见，T 与 T^+ 形成方法完全一致，$T=T'$

∴ 对 K 中任意项 t，$\varphi^+(t)=\varphi(t)$

原结论得证

(ii) 对 K 中任何公式 p，$|p|(\varphi^+)=|p|(\varphi)$

证：同(i)中思想，不过进行分类讨论

设 Y 为原子公式集，R 为谓词集 $\{R_i, i=1,\cdots\}$

① 若 P 为原子公式，则 $p\in K(Y)$

$P=R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$，

又由(i)中知 $\varphi^+(t_i)=\varphi(t_i)$

$$
\begin{aligned}
|P|(\varphi) &= R_i^n(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n)) \\
&= R_i^n(\varphi^+(t_1),\cdots,\varphi^+(t_n)) \\
&= |P|(\varphi^+)
\end{aligned}
$$

即 $P\in K^+(Y)$

② 若 p, q 为公式，则 $\neg P$，$P\to q$，$\forall x_i P$ $(i=1,2,\cdots)$ 都是公式

同(i)中讨论（此处省去，但作业考试写）

$|\neg p|(\varphi)=|\neg p|(\varphi^+)$

$|p\to q|(\varphi)=|p\to q|(\varphi^+)$

对于 $\forall x_i p\ (i=1,2,\cdots)$

若 p 为不含全称量词公式，

则由上讨论知 $|p|(\varphi)=|p|(\varphi^+)$

则 $|\forall x_i p|(\varphi)=|\forall x_i p|(\varphi^+)$

归纳得 对含全称量词公式 p 也成立

③ 任一公式皆如此形成，即皆由规则①②的有限次使用形成

综上可知 $\forall p\in K(Y)$, $|p|(\varphi^+)=p(\varphi)$

原结论得证

P98、2 $\vdash \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2) \to \exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)$

取 $M=Z$，$\bar{R}_1^2 =$ "$>$"

取 $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)-1$

$\therefore |\exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)|(\varphi)=0$

若 $|\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi)=1$，即

存在 φ 的 x_2 变通 φ'

s.t. $|R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=1$

令 $\varphi'=\varphi$，则 $|R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=1$

$\therefore |\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi)=1$

由上知 $|\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2) \to \exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)|(\varphi)=0$

即 $\vDash \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2) \to \exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)$ 不成立

若原式成立，应由K可靠性

得 $\vDash \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2) \to \exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)$ 成立

与上方结论矛盾

因此原式不成立