高等数学 C 上册 下半串讲

原生生物

高数拥有两条基本的路径：**求导-原函数**与**面积-定积分**，最终统一为**中值定理-泰勒展开**，串讲也按这三部分进行组织——考虑到实际范围，第一部分几乎只会涉及原函数的部分，第三部分也不会讲到中值定理的基本练习，希望大家能自行看书进行相应练习。
* 事实上这三部分都以极限基本定义为基础，不过这并不在这次串讲的范围内。出于时间考虑，默认大家掌握了这部分的知识 (包含基本概念与极限的保序性等简单性质)，有问题可以单独联系。
求导的动机是 “速度” 的计算，定积分的动机是 “面积” 的计算，而中值定理是为了得到核心工具：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

$$\int_a^b g'(t)\mathrm{d}t = g(b) - g(a)$$

* 本质：求导与积分**互逆**，从而可以进行联系。从物理上，这种互逆性是相对自然的。
* 基本要求：**光滑性**。事实上互逆性质只对一类特殊的函数成立，不过现实中基本都假设遇到的函数较好，因此可以如此考虑。
泰勒展开 [递归证明]：

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$$

其直接形式为微分，但事实上可以关联到积分，与积分估算技巧结合。
* 注意不同**余项**的含义与应用。
接下来的内容将全部以习题的形式进行组织，包含一些重点的结论与思路。虽然下方的习题以计算性的内容为主，但其中包含的思路事实上有不少与证明性质的技巧总结相关，最好不要只作为计算题进行研究。

一　微分与原函数

脉络：计算变化率 (求导)、希望进行更一般的计算 (初等函数导数与基本求导公式)、求导反问题 (原函数概念)、初等解的存在性与找法 (一般的不定积分)
* 注意形式上的微分记号 $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$，将其作为 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ 的某种形式拆分即可。

1. 求不定积分

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

   由 $\frac{1}{x}$ 的自然定义域在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上，直接计算可知 $x>0$ 时 $\ln x$ 是一个原函数，$x<0$ 时 $\ln(-x)$ 是一个原函数。但是，值得注意的是，虽然每个区间内都应有其任何原函数减 $\ln x$ 后为常数，两个分立的区间上未必一致，因此其全部原函数可写为

$$f(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & x>0 \\ \ln(-x) + C_2 & x<0 \end{cases}$$

* 这个例子告诉我们，$\ln|x| + C$ 写法本质上需要考虑每个区间上加不同的常数。一般情况下，我们计算的原函数仅是某个原函数后添上形式上的 $+C$，不考虑不同区间上的情况，但在计算定积分时，这种简单的处理可能引起问题。

2. 求不定积分

$$\int \frac{x^5}{(x^3+1)^4}\,\mathrm{d}x$$

* 所谓第一类换元法往往是某种"瞪眼"之后的配凑。而第二类换元法则是希望先进行"部分处理"，将不好处理的部分通过换元进行整体处理。本题我们用两种换元法计算：

- 利用第一类换元，直接配凑并拆分得到

$$\int \frac{x^5}{(x^3+1)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{(x^3+1)^4}\,\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{(x^3+1)^3}\,\mathrm{d}x^3 - \int \frac{1}{(x^3+1)^4}\,\mathrm{d}x^3\right)$$

进一步配凑为 (常用配凑：加减常数可直接放在 d 中)

$$\frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{(x^3+1)^3}\,\mathrm{d}(x^3+1) - \int \frac{1}{(x^3+1)^4}\,\mathrm{d}(x^3+1)\right)$$

由此可直接看出积分结果

$$-\frac{1}{6}\frac{1}{(x^3+1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{(x^3+1)^3} + C$$

- 利用第二类换元，将不好处理的 x^3+1 看作整体 t，则有 $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$，且 $x^3 = t-1$，于是得到

$$\int \frac{x^5}{(x^3+1)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{t-1}{t^4}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6t^2} + \frac{1}{9t^3} + C$$

代入也可得到结论。

* 对于较复杂的题目，往往不能一眼看出配凑方法，因此用第二类换元**将难处理的部分换为整体**是常用的思路。对含无理的情况更是如此，例如将上方分母的 4 次方改为某分数。从公式记忆的角度，只要记忆第二类换元如何进行即可解决全部问题。

3. 已知 a, b, c 不全为 0，求不定积分

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

* 本题是为了介绍对根号下二次函数的一般处理，我们分类讨论，下方设

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

- 在 $a=0$，$b=0$ 时，直接为常数，由此结果为

$$\frac{1}{\sqrt{c}}x + C$$

- 在 $a=0$，$b\neq 0$ 时，作整体换元 $t=\sqrt{bx+c}$，可得 $t^2 = bx+c$，于是 $\mathrm{d}x = \frac{2}{b}t\,\mathrm{d}t$，直接代入得到最终结果为

$$\frac{2}{b}t + C = \frac{2}{b}\sqrt{bx+c} + C$$

- 在 $a>0$ 时，将原积分中改写为

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{(x-h)^2+k}}$$

继续讨论：

- 若 $k=0$，此即为
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{|x-h|}$$
由此在 $x>h$ 时不定积分为
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(x-h)+C$$
$x<h$ 时为
$$-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(h-x)+C$$
- 若 $k<0$，此可看作
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{(x-h)^2-(\sqrt{-k})^2}}$$
由此由教材 4.3 节公式可知积分结果为
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(x-h+\sqrt{(x-h)^2+k})+C$$
- 若 $k>0$，此可看作
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{(x-h)^2+(\sqrt{k})^2}}$$
由此由教材 4.3 节公式可知积分结果为
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(x-h+\sqrt{(x-h)^2+k})+C$$

• 在 $a<0$ 时，将原积分中改写为
$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\frac{1}{\sqrt{-(x-h)^2-k}}$$
继续讨论：
- 若 $k\geq 0$，只有至多一点处分母有意义，不定积分无意义。
- 若 $k<0$，此可看作
$$\frac{1}{\sqrt{-a}}\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{-k})^2-(x-h)^2}}$$
由此由教材 4.3 节公式可知积分结果为
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{x-h}{\sqrt{-k}}+C$$

4. 求不定积分
$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\cos(cx)\,\mathrm{d}x$$

记 $M=b+c$、$m=b-c$，提供两种思路：

• 三角变换思路
通过积化和差公式有
$$\sin(bx)\cos(cx)=\frac{1}{2}(\sin((b+c)x)-\sin((b-c)x))$$
再由教材 4.4 节例 5 即得结果为
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+M^2}(a\sin Mx-M\cos Mx)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+m^2}(a\sin mx-m\cos mx)+C$$

- 指数思路

  利用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，可以将积分内改写为
  $$\mathrm{e}^{ax}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}}{2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}cx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}cx}}{2}$$
  整理得
  $$\frac{1}{4\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}(b+c))x}+\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}(b-c))x}-\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}(b-c))x}-\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}(b+c))x}\right)$$
  直接利用形式结果 e^{ax} 积分为 $a^{-1}\mathrm{e}^{ax}+C$ 可写出积分
  $$\frac{1}{4\mathrm{i}}\left(\frac{1}{a+\mathrm{i}M}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}M)x}+\frac{1}{a+\mathrm{i}m}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}m)x}-\frac{1}{a-\mathrm{i}m}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}m)x}-\frac{1}{a-\mathrm{i}M}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}M)x}\right)+C$$
  再展开化简也可得到结果。

* 三角函数相关的题目除了利用一些熟知的变换公式外，熟悉三角函数写成指数函数的方式可以加快很多三角和 e 同时存在的题目的计算速度。这也是为什么 sin、cos 与 e 指数都容易放入分部中。

5. 求不定积分 $\int f(x)g(\ln x)\mathrm{d}x$，这里 f,g 为多项式。

利用积分可以展开成每一项的积分求和，只需计算
$$\int x^m\ln^n x\,\mathrm{d}x$$
这里 m,n 为非负整数。

为将其化为熟悉的形式，设 $x=\mathrm{e}^t$，即可得到其为
$$\int \mathrm{e}^{mt}t^n\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t=\int \mathrm{e}^{(m+1)t}t^n\,\mathrm{d}t$$
再次换元 $s=(m+1)t$，得到
$$\frac{1}{(m+1)^{n+1}}\int s^n\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s$$
设右侧积分中的不定积分结果为 $I_n(s)$，利用分部积分计算有
$$I_n(s)=\int s^n\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s=\int s^n\,\mathrm{d}\mathrm{e}^s=s^n\mathrm{e}^s-n\int s^{n-1}\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s=s^n\mathrm{e}^s-nI_{n-1}(s)$$
由此可由 $I_0(s)=\mathrm{e}^s+C$ 出发归纳得到结果，再换回 $s=(m+1)\ln x$ 即可。更进一步的通项化简超出了这门课的范围，此处略去。

6. 求不定积分
$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$$

考虑换元 $t=\sin x$、$s=t^2$ 得到其为
$$\int\frac{t}{t^4+(1-t^2)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t^2}{t^4+(1-t^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{s^2+(1-s)^2}\mathrm{d}s$$
将分母展开配方为
$$\int\frac{1}{(2s-1)^2+1}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(2s-1)^2+1}\mathrm{d}(2s-1)=\frac{1}{2}\arctan(2\sin^2 x-1)+C$$
利用 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ 可将结果化简成
$$-\frac{1}{2}\arctan\cos 2x$$
* 虽然三角函数的有理式有通用换元方法，但这并不意味着只能通过通法硬凑。一些基本换元可能大大加快速度。事实上对有理函数也是如此。

7. 求不定积分
$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$$
这里 n 为正整数。

* 同样，有理函数有通用方法，但分解也并不是必须通过待定系数解决。

利用
$$\frac{1}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}$$
有
$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^n}=\frac{1}{x^2(x^2+1)^{n-1}}-\frac{1}{(x^2+1)^n}$$
由此可不断展开得到
$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^n}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\cdots-\frac{1}{(x^2+1)^n}$$
此式已经可以利用教材 4.5 节的知识算出积分。同样，无需掌握对一般 n 的通项化简，只要对具体的 n 能由此算出结果即可。

* 采用基本方法进行**更长时间的计算**与进行**更长时间的思考**后采用较好方法的**权衡**。

二　积分的操作

脉络：计算面积 (积分)、严谨的定义 (极限定义与基本性质)、一般计算方法 (微积分基本定理)、推广到更一般的情况 (广义积分)

* 此处我们先默认微积分基本定理成立，不关心其证明。

1. 若 $f(x)$ 连续非负，且在 $[a,b]$ 上不恒为 0，证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$。

由非负与不恒为 0 可设 $f(t)>0$，$t\in[a,b]$。由连续性，对任何 ε，存在 δ 使得 $|x-t|<\delta$ 且 $x\in[a,b]$ 时 $|f(x)-f(t)|<\varepsilon$。

取定 $\varepsilon=\frac{f(t)}{2}$，得到对应的 δ 后记区间
$$A=[a,b]\cap[t-\delta,t+\delta]$$
则由定义对任何 $x\in A$ 有
$$f(x)>f(t)-\varepsilon=\frac{f(t)}{2}$$
构造函数 $g(x)$ 在 A 上为 $\frac{f(t)}{2}$，其他为 0，则利用 f 非负性可知 $f(x)\geq g(x)$ 处处成立，于是
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
但根据积分的定义可知 $g(x)$ 下方为长方形，面积即 A 的长度乘 $\frac{f(t)}{2}$。由于 A 的长度非零 (无论 $t=a$、$t=b$ 或 $t\in(a,b)$，其都至少对应某一段区间)，$g(x)$ 的积分结果为正，从而矛盾。

* 注意最基本的**比较**性质，即 $f(x)\geq g(x)$ 时，其在任何区间上的积分也有不等号。利用此结论可以说明一些不等号成立。

* 虽然证明不是重点，但一些基本概念的**严谨定义**还是需要知道的，例如此处的连续性定义。

2. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

* **利用积分定义进行极限计算**并不常用，但需要用到时往往很难有其他方法。几个基本特征：求和的极限、求和数量与 n 相关、乘 n 后能配出 k/n 的形式。

将其写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(k/n)^2}}$$

进一步改写为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

注意左侧求和即为积分定义中将 $[0,1]$ 按 $\frac{1}{n}$ 步长划分后每个区间取右端点的结果，因此极限为

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

利用 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，直接计算可得积分为 $\ln(1+\sqrt{2})$，这就是结论。

3. 计算积分

$$\int_{-2}^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x$$

* 这题放在此处是为了让大家注意换元后的符号变化，不过其实有一个简便方法**检查结果**：观察发现积分中的函数恒负，由此可提前确定**积分结果一定是负数**，换元过程中可以先忽略符号，最后加负号即可。

设 $\sqrt{x^2-1}=t$，则 $x=-\sqrt{t^2+1}$，于是计算可得

$$\int_{-2}^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{3}}^{0}\frac{t}{-\sqrt{t^2+1}}\left(-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t\right)=-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

进一步计算即得其为

$$-\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=-\sqrt{3}+\arctan t\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

4. 计算积分 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$，这里 m,n 为非负整数。

* 当然，可以利用二项式定理完全展开成以后计算积分并合并，不过我们此处介绍一个更漂亮的做法。

若 $n=0$，积分结果即为 $\frac{1}{m+1}$。下面考虑 $n>0$ 的情况。换元可得

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}\int_0^1(1-x)^n\,\mathrm{d}x^{m+1}$$

由于 x 从 0 到 1 时 x^{m+1} 也从 0 到 1，且端点处 $(1-x)^n$ 与 x^{m+1} 均为 0，利用分部积分可知

$$\frac{1}{m+1}\int_0^1(1-x)^n\,\mathrm{d}x^{m+1}=-\frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\,\mathrm{d}(1-x)^n=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

由此，不断重复上述过程可将 n 变成 0，最后一次为 x^{m+n} 积分，于是结果为

$$\frac{n}{m+1}\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}\frac{1}{m+n+1}=\frac{n!m!}{(m+n-1)!}$$

5. 求 $r^2=\cos 2\theta$ 绕极轴旋转形成的旋转体侧面积。

这里介绍对一种极坐标 (尽量不用画图) 的基本处理方式：

- 角度范围控制

  在 $\theta\in[0,2\pi]$ 时，只有 $\cos 2\theta\geq 0$ 的部分此式才有意义，利用三角函数知识可知

  $$\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi]\cup[\frac{7}{4}\pi,2\pi]$$

  利用 $\cos\theta=\cos(-\theta)=\cos(2\pi+\theta)$，可发现其实质上是 4 段相同的曲线拼合而成的。

  不过，绕极轴旋转时，$\theta\in[0,\pi]$ 的部分会转到 $\theta\in[\pi,2\pi]$ 的部分，因此上述四段中**两两形成的旋转面是一致**的。若已知一段形成的旋转体表面积为 S，总表面积应为 $2S$，而非 $4S$。

  * 一定不要忘记判断重合的部分，否则可能导致结果相差倍数。一般来说极坐标形式的方程取 $\theta\in[0,\pi]$ 的部分计算积分是正确的。

- 参数方程构建

  注意到极轴即为 x 轴，我们下面来计算 S。考虑 $\theta\in[0,\pi/4]$ 的部分。此时可直接写出

  $$x(\theta)=r\cos\theta=\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$$

  $$y(\theta)=r\sin\theta=\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$$

  由此代入教材 5.5 节公式得到

  $$S=2\pi\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\sqrt{(\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta)'^2+(\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta)'^2}\mathrm{d}\theta$$

- 积分计算

  注意范围内所有涉及的 sin、cos 均正，直接计算导数得到结果为

  $$S=2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

  由此结果

  $$F=2S=(4-2\sqrt{2})\pi$$

* 对几何的建议：为了降低记忆量，建议把**参数方程形式**的公式背好，其他化为对应的参数方程，例如 $y=f(x)$ 即 $x=t$、$y=f(t)$，还有本题的极坐标情况。

6. 判断 $\int_a^b\frac{1}{x^2(x^2-1)}\mathrm{d}x$ 在 a 与 b 取何值时收敛 (这里假设 $b>a$，且 a 可取 $-\infty$，b 可取 ∞)。

* 瑕积分的一个简单判别方式是，如果收敛，微积分基本定理往往仍能成立，由此**直接假设收敛进行计算**即可知是否发散。如果无法简单判别，往往需要进行**比较**。

由于此函数在 $0,-1,1$ 外的点都有定义，我们只需要关注这三点附近与无穷的情况：

- 负无穷处

  若 $a=-\infty$、$b<-1$，在整个区间上有

  $$0<\frac{1}{x^2(x^2-1)}\leq\frac{1}{(b^2-1)x^2}$$

  而教材 5.7 节例 3 类似知 $\frac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,b)$ 积分收敛，于是比较可知原积分收敛。

- -1 处

  当 $-1\in[a,b]$ 时，考虑其子区间 $A=[a,b]\cap[-2,-1/2]$，若积分收敛，在子区间上的积分也应收敛。由有理函数的展开可计算得

  $$\frac{1}{x^2(x^2-1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x^2}$$

  第一项、第三项在 A 中均为普通的黎曼积分，从而收敛，而第二项以 -1 为瑕点，由于其的一个原函数为 $-\frac{1}{2}\ln|x+1|$，在瑕点附近左、右极限均不存在，因此不可能收敛，矛盾。

- 0 处

  当 $0\in[a,b]$ 时，考虑其子区间 $A=[a,b]\cap[-1/2,1/2]$，若积分收敛，在子区间上的积分也应收敛。由有理函数的展开可计算得

  $$\frac{1}{x^2(x^2-1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x^2}$$

  第一项、第二项在 A 中均为普通的黎曼积分，从而收敛，而第三项以 0 为瑕点，由于其的一个原函数为 $\frac{1}{x}$，在瑕点附近左、右极限均不存在，因此不可能收敛，矛盾。

- 1 处

  当 $1\in[a,b]$ 时，考虑其子区间 $A=[a,b]\cap[1/2,2]$，若积分收敛，在子区间上的积分也应收敛。由有理函数的展开可计算得

  $$\frac{1}{x^2(x^2-1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x^2}$$

  第二项、第三项在 A 中均为普通的黎曼积分，从而收敛，而第二项以 1 为瑕点，由于其的一个原函数为 $\frac{1}{2}\ln|x-1|$，在瑕点附近左、右极限均不存在，因此不可能收敛，矛盾。

- 正无穷处

  若 $b=\infty$、$a>1$，在整个区间上有

  $$0<\frac{1}{x^2(x^2-1)}\leq\frac{1}{(a^2-1)x^2}$$

  而教材 5.7 节例 3 类似知 $\frac{1}{x^2}$ 在 (a,∞) 积分收敛，于是比较可知原积分收敛。

综合以上，当且仅当 $0,-1,1$ 均不属于 $[a,b]$ 时原积分收敛。

7. 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$，这里 n 为非负整数。

若 n 为奇数，此函数为奇函数，利用对称性可知积分为 0。否则，设 $n=2k$，利用对称性可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}x^{2k}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

作换元 $t=x^2$ 有

$$2\int_0^{\infty}x^{2k}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}t^{k-1/2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\Gamma(k+1/2)$$

由 Gamma 函数的知识可知最终结果为

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$$

* 此题后半部分事实上直接在教材中就有，这里主要是提醒不能直接对原式进行换元，因为不满足**单调性**，必须分区间考虑。

8. 计算 $\int_{-1}^{1}\ln|x|\mathrm{d}x$。

* 由于 $\ln|x|$ 在 0 处无定义，积分必须**分为两段**研究，而不能试图通过一个全局原函数解决问题，这是在第一部分第一题中提醒过的。

由于 $\ln|x|$ 为偶函数，利用对称性可知积分为

$$2\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$$

进行分部积分得到 (这里利用了 $x\ln x$ 在 0 处右极限为 0，可写为 $\ln x/(1/x)$ 由洛必达法则计算得到)

$$2\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x = 2x\ln x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\mathrm{d}\ln x = -2$$

三 泰勒展开

脉络：导数关联根存在 (微分中值定理)、导数关联极限 (洛必达)、积分关联根存在 (积分中值定理)、导数关联积分 (变限积分)、多项式逼近 (泰勒展开)、一元微积分统一 (积分余项)

1. 确定正数 a 使得极限

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{\cos x}}}{x^a}$$

不为 0 或无穷。

将极限中写成

$$\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^{3a}}}$$

由三次根号为连续函数，只需要确定 a 使得

$$\lim_{x\to0+0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^{3a}}$$

不为 0 或无穷。

由条件可知分子分母均为 0，从而可使用洛必达法则将极限化为 (等号是由于 $\sqrt{\cos x}$ 极限为 1 可以提出)

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\sin x}{6ax^{3a-1}\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to0+0}\frac{\sin x}{6ax^{3a-1}}$$

由此，当 $3a-1=1$，即 $a=\frac{2}{3}$ 时，上述极限是 $\frac{1}{4}$，不为 0 或无穷，于是有

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{\cos x}}}{x^{2/3}} = 2^{-2/3}$$

而利用

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{\cos x}}}{x^a} = \lim_{x\to0+0}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{\cos x}}}{x^{2/3}}x^{2/3-a}$$

当 $a>2/3$ 时极限为无穷，当 $a>2/3$ 时极限为 0。

* 本题的结果有一件事值得注意：阶数 $O(x^k)$ **未必为整数**，而只有其为整数的情况下，洛必达法则才方便使用 (能够递降到 0)。因此，整体存在根号时需要先拿出根号。

2. 证明 n 次多项式在任何点处的 n 阶泰勒公式为自身 (即余项恒为 0)。

设原 n 次多项式为 $p(x)$，其在 x_0 点的泰勒公式为 $q(x)$，利用 Peano 余项的定义有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)-q(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

但是，由于 $p(x)$ 与 $q(x)$ 都是 n 次多项式，其差亦为 n 次多项式。设 $h(x)=p(x+x_0)-q(x+x_0)$，则 $h(x-x_0)=p(x)-q(x)$。若其非零，假设其次数最低的非零项为 k 次，利用 k 次洛必达法则得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x-x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^n}=\frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\lim_{x\to 0}\frac{h^{(k)}(x)}{x^{n-k}}$$

这里上标 (k) 表示求 k 阶导。但是，$h^{(k)}(x)$ 的常数项应非零，于是此极限在 $k=n$ 时为非零数，$k<n$ 时为无穷，矛盾，从而 $h(x)=0$，即 $p(x)=q(x)$。

3. 求 $\sin\sin x$ 在原点带 Peano 余项的 5 阶泰勒公式，并计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin\sin x}{x^3}$$

记 $t=\sin x$，其在 $x\to 0$ 时为无穷小，且与 x 等价。在 0 处将 $\sin t$ 展开到 9 阶 Peano 余项得到

$$\sin t=t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}+o(t^5)=t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}+o(x^5)$$

再代入

$$t=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

可得

$$\sin\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3+\frac{1}{120}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^5+o(x^5)$$

* 由于每个 t 中 $o(x^5)$ 的项与其他项乘积后仍为 $o(x^5)$，不会影响无阶以下的情况。

将上方的次方展开。由于第二项中除了 $x\cdot x\cdot x$ 与 $x\cdot x\cdot x^3$ 外的项都比五次高，第三项中除了 $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$ 外的项都比五次高，事实上只需保留这些项，也即

$$\sin\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}3x\cdot x\cdot\left(-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)$$

最终整理得到

$$\sin\sin x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^5)$$

* 若题目要求 **Lagrange 余项** (务必记得定义)，就不得不采取最基本的方法一阶阶算导数了。

4. 计算 $\int_0^{\sqrt{x}}\sin\sin t\,\mathrm{d}t$ 在 0 处对 x 的右导数 (即导数定义中的极限改为右极限)。

* 直接由复合函数求导与变限积分计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sqrt{x}}\sin\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sin\sqrt{x}$$

* 利用上一题作换元 $t=\sqrt{x}$ 后由洛必达法则可得其在 0 处右极限为 $\frac{1}{2}$。但是，这只是导数在 0 处的右极限，无法说明右导数的结果。

希望将上限换元为 x，因此考虑换元 $s=t^2$，有 $t=\sqrt{s}$，从而 (这里实质上进行了瑕积分，但不影响后续计算) $x>0$ 时

$$\int_0^{\sqrt{x}}\sin\sin t\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\sin\sin\sqrt{s}}{2\sqrt{s}}\mathrm{d}s$$

将积分中记为 $g(s)$，直接由洛必达法则计算可发现

$$\lim_{s\to0}g(s)=\lim_{s\to0}\frac{\sin\sin\sqrt{s}}{2\sqrt{s}}=\lim_{u\to0}\frac{\sin\sin u}{2u}=\frac{1}{2}$$

补充定义 $g(0)=\frac{1}{2}$，积分中是一个连续函数，且不影响积分结果，从而可知变限积分的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x g(s)\mathrm{d}s=g(x)$$

由此原函数在 0 处的右导数为 $g(0)=\frac{1}{2}$。

5. 证明若 f 二阶导数连续，求证带**二阶积分余项**的泰勒公式

$$f(x+t)=f(x)+tf'(x)+\int_x^{x+t}(x+t-s)f''(s)\mathrm{d}s$$

由于在积分中观察到了导数项，进行分部积分可得 (这里跳过了求导过程并丢掉了为 0 的项)

$$\int_x^{x+t}(x+t-s)f''(s)\mathrm{d}s=\int_x^{x+t}(x+t-s)\mathrm{d}f'(s)=-tf'(x)+\int_x^{x+t}f'(s)\mathrm{d}s$$

再由微积分基本定理计算第二项即得结论。

* 用此方法，归纳可得高阶积分余项的泰勒公式

$$f(x+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(x)+\frac{1}{k!}\int_x^{x+t}(x+t-s)^kf^{(k+1)}(s)\mathrm{d}s$$