高等数学 A 习题课讲义

原生生物

* 高等数学 A [刘培东老师班] 习题课讲义。

* 由于高等数学是一个需要大量练习的学科，习题课的主要组织结构将会是通过**题目**进行。我会给每道题一个编号，这样大家就可以看到一学期的知识究竟需要多少个练习来掌握。

* 讲义中提到的 n 默认为正整数，n 趋于无穷时的极限均指**数列极限**。C_m^n 代表组合数 $\frac{m!}{n!(m-n)!}$，且当 $m<n$ 时定义为 0。

目录

一 难易 **5**
§1.1 有关大学数学 . . . 5
1.1.1 文本 . . . 5
1.1.2 抽象 . . . 5
1.1.3 证明 . . . 7
1.1.4 方法 . . . 7
§1.2 联系 . . . 8
1.2.1 结构与动机 . . . 8
1.2.2 问与想 . . . 8

二 数列极限 **10**
§2.1 作业解答 . . . 10
§2.2 严谨性 . . . 13
2.2.1 替换原理 . . . 13
2.2.2 任意与存在 . . . 14
§2.3 证明的思路 . . . 19
2.3.1 存在性问题的非构造证明 . . . 19
2.3.2 从直觉出发 . . . 24
§2.4 阶估算 I . . . 28
2.4.1 什么是阶 . . . 28
2.4.2 多项式的用处 . . . 31

三 函数极限 **37**
§3.1 作业解答 . . . 37
§3.2 连续函数 . . . 42
3.2.1 连续与函数极限 . . . 42
3.2.2 归结原理 . . . 43
3.2.3 介值定理 . . . 46
3.2.4 最值定理 . . . 49

§3.3 初等函数连续性 51
3.3.1 反函数 51
3.3.2 指数与对数 53
3.3.3 幂函数 58
3.3.4 三角与反三角 61
3.3.5 补充与结论 62

四 有限与无穷 **65**
§4.1 无穷大 65
4.1.1 无穷的邻域 65
4.1.2 常用极限定理 68
§4.2 阶估算 II 73
4.2.1 涉及无穷的极限 73
4.2.2 无穷大的阶 80
4.2.3 无穷小的阶 83
4.2.4 更复杂的换元 87

五 导数 **93**
§5.1 连续函数补充 93
5.1.1 介值定理构造 93
5.1.2 函数迭代 96
§5.2 定义 100
5.2.1 导数的运算 100
5.2.2 可导性与近似 105
§5.3 计算 107
5.3.1 高阶导数 107
5.3.2 隐函数与参数曲线 112
5.3.3 微分 113

六 微积分基本定理 **117**
§6.1 作业解答 117
§6.2 积分 130
6.2.1 不定积分定义 130
6.2.2 定积分定义 136
6.2.3 本质差异 146
§6.3 微积分基本定理 148
6.3.1 变限积分的导数 148
6.3.2 导函数的积分 153
6.3.3 互逆性的理解 155

七 积分计算 **158**
§7.1 作业解答 158
§7.2 不定积分 168
7.2.1 换元与配凑 168
7.2.2 分部积分 178
7.2.3 有理函数相关 180

§7.3 定积分 183
7.3.1 换元与配凑 183
7.3.2 分部与递推 185
7.3.3 对称性 188

八 积分与证明 **190**
§8.1 作业解答 190
§8.2 积分与极限 196
8.2.1 极限计算 196
8.2.2 积分中值定理 201
§8.3 等式与不等式 205
8.3.1 等式证明 205
8.3.2 单调性 207
8.3.3 抽象函数 209

九 期中复习 **214**
§9.1 作业解答 214
§9.2 数列 220
9.2.1 极限计算 220
9.2.2 极限证明 225
§9.3 函数 230
9.3.1 极限与连续性 230
9.3.2 导函数 234
§9.4 积分 239
9.4.1 积分计算 239
9.4.2 积分应用 244

十 从一元到多元 **253**
§10.1 期中 253
10.1.1 试题 253
10.1.2 解答 254
§10.2 泰勒展开 258
10.2.1 高阶逼近 258
10.2.2 微分中值定理 260
10.2.3 余项 261
§10.3 一致性 262
10.3.1 多元的估算 262
10.3.2 重极限与可微 263
10.3.3 一致连续性 265

十一 微分中值定理 **268**
§11.1 作业解答 268
§11.2 微分中值定理 275
11.2.1 极值的性质 275
11.2.2 微分与积分 275
11.2.3 导函数的性质 275

§11.3 阶估算 III 275
11.3.1 等价无穷小的反例 275
11.3.2 任意阶的展开 275
11.3.3 等价性与复合 276
11.3.4 余项的估算 276

十二 泰勒展开与证明 277
§12.1 作业解答 277
§12.2 微分中值定理 279
12.2.1 多项式的根 279
12.2.2 一般的中值问题 280
§12.3 泰勒展开与估算 280
12.3.1 极限问题 280
12.3.2 不等式问题 281

十三 解析几何与拓扑 283
§13.1 作业解答 283
§13.2 空间的几何 284
13.2.1 直线与平面 284
13.2.2 曲线与曲面 284
13.2.3 高维情况 284
§13.3 空间的拓扑 284
13.3.1 开集与闭集 284
13.3.2 紧集的性质 284
13.3.3 连通性 284

一 难易

本次习题课主要介绍了大学数学 (主要针对高等数学 A 与线性代数 A) 相关的学习建议，不存在需要掌握的知识性内容，但仍然**非常推荐大家阅读**。

§1.1 有关大学数学

说到关于大学数学的建议，自然需要先从大学数学课与中学阶段数学的本质不同讲起。我们主要分为四件事讨论：文本的重要性、抽象层级的提升、证明逻辑的强化与学习方法的差异。

1.1.1 文本

个人一直的观点是，比起课堂，**对文本的阅读** (尤其是教材) 往往是更加重要的。原因有二：一方面，大学数学的内容量大，导致上课需要快速过掉较多内容，这就导致老师的**节奏**注定只能适合一小部分人，对剩下的同学来说跟上思路是很难的 (更大的问题是 “老师以为大家会” 的东西可能是自己尚未学过的，这种默认知识背景不同的情况会导致更多问题)；另一方面，即使能够跟上，上课来不及理解更多细节也会导致**以为自己懂了**，也就是虽然听着感觉理解了，但还是无法做出对应的题目。

——当然，上面说的这两方面问题读文本也会有，但以读为主的的最大好处是，**按自己节奏阅读的成本很低**。上课时无法随时暂停、快进或重放内容，即使有了录课，如此看一段视频所花的时间也远比读一段教材要高。

接下来，我们该聊聊阅读教材的注意事项了。很显然 (这是本讲义第一次出现显然这个词，也将是最后一次)，**朗读**一遍教材是无法对学习有任何帮助的。为了让**阅读**有超出朗读的效果，有两件事必须注意。首先，一定要注意教材的**逻辑细节**，简单来说，必须知道每个证明里上一句话到下一句话是用了何种**结论**。教材上的证明往往不会太过困难，这一部分往往是可以通过自己思考解决的。其次，需要掌握教材的**思路**。小到证明的一步为什么能想到、一个定义为何要出现，大到教材为何如此编排，某章的核心内容是什么，都是**必须**有自己答案的——稍后我们会解释如此要求的理由。不过，思路相关的问题就很难通过个人思考得到了，甚至每个人的答案都可能不同。因此，遇到这些问题时最好通过**交流**进行解决，也就是积极去问同学/助教 “这个东西是如何想到的”，并在得到的答案中找到自己可以接受的解释，以此进行更深入的理解。

理论上来说，大学的所有课程都可以只通过文本资料学习，无需上课。不过，如果能跟上老师的思路，上课也确实可以收获一些阅读无法收获的东西，我们将在下面继续讨论。

1.1.2 抽象

大家学习数学的过程中实际上经历了两次抽象：小学时从两个苹果和三个苹果放在一起是五个苹果到 $2+3=5$，是**具体事物到数字**的抽象；中学时从 $(3+2)^2=2^2+2\times2\times3+3^2$ 到 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，是**从数字到符号** (也就是**代数**) 的抽象。

在大学，我们将经历第三次抽象 (也往往是非数学专业会触及的最后一次抽象)：**从符号到结构**。例如，对于**加法** (不妨考虑对任何实数的加法)，我们可以提取出它的四个核心特征 (这里的 $\exists!$ 表示**存在唯一**)：

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad 0+a=a$$

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad \exists! b\in\mathbb{R},\quad a+b=0$$

前两个行称为**交换律**与**结合律**，第三行代表**零的存在性**，第四个行则代表**相反数的存在性**。

反过来说，**只要满足这四个特征的运算就可以称为“加法”**。例如，考虑 $\mathbb{R}^*$，即所有非零实数，它们的乘法满足 (第四行即为**倒数**，任何非零实数都有非零的倒数)

$$ab = ba$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad 1a = a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \exists! b \in \mathbb{R}^*, \quad ab = 1$$

由此，非零实数的乘法也可以看作某种意义上的“加法”。

当然，此时的“加法”就不再是一种特定的**运算**了，而是代表了一种**结构**。简单来说，对于一个集合 A，定义 A 上的一种运算 $\oplus$ (也就是给定 A 中两个元素，生成一个新的 A 中元素)，若它满足 (第四行中的 e 即为第三行中的 e)

$$\forall a, b \in A, \quad a \oplus b = b \oplus a$$

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$\exists! e \in A, \quad \forall a \in A, \quad e \oplus a = a$$

$$\forall a \in A, \quad \exists! b \in A, \quad a \oplus b = e$$

则称这个集合 A 对运算 $\oplus$ 构成一个**阿贝尔群**，第三行中的 e 称为**零元**，第四行中的 b 可以记为 $-a$，也即某种“相反数”。用这套语言来说，$\mathbb{R}$ 对加法运算构成一个阿贝尔群，$\mathbb{R}^*$ 对乘法运算构成一个阿贝尔群。

——阿贝尔群这个名字并不重要，重要的是，我们把一种具体的加法运算抽象为了一个“类似加法的结构”。这样做的好处就像我们之前的每一次抽象一样，只要证明了这种结构的性质，就可以**应用在所有具有这种结构的情况里**。

例如，只要集合 A 对运算 $\oplus$ 构成一个阿贝尔群，即有

$$-(a \oplus b) = (-a) \oplus (-b)$$

解答:

由定义第四个式子可知，只要验证了

$$(a \oplus b) \oplus ((-a) \oplus (-b)) = 0$$

利用“相反数”的唯一性即可得到原式成立。利用结合律，上式左侧等于

$$((a \oplus b) \oplus (-a)) \oplus (-b)$$

再次利用结合律可将其化为

$$(a \oplus (b \oplus (-a))) \oplus (-b)$$

利用交换律可知要证

$$(a \oplus ((-a) \oplus b)) \oplus (-b)$$

再次利用结合律得到

$$((a \oplus (-a)) \oplus b) \oplus (-b)$$

利用“相反数”的定义可知这等于

$$(e \oplus b) \oplus (-b)$$

利用零元的定义可知这等于

$$b \oplus (-b)$$

最后再利用“相反数”的定义将其化为 0，即得证。

将上述定理应用在加法上，可以得到对实数 a,b 有

$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$

而应用在非零实数乘法上，即得到了对非零实数 a,b 有

$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$$

由此，我们观察了一个非常简单的**将符号抽象为结构**的例子，且看到了一些好处。不过，就像之前的每一种抽象是困难的，这一层抽象也存在自己的困难，也就是需要**暂时丢弃已经学会的内容，只保留最基础的性质并通过全新的方式认知**。

* 事实上，大家以后或许还会接触到第四层，也是目前我们能研究的最高一层抽象，**将结构抽象为范畴**。例如，阿贝尔群和集合都是一个**范畴**，这样，我们就可以对比不同范畴之间的共性与不同了。

为了理解抽象，一个必须的办法是**从具体例子入手**。如果没有 $\mathbb{R}$ 对加法与 $\mathbb{R}^*$ 对乘法作为例子，下面的阿贝尔群定义将是**悬空**的。反之，若是只学具体例子，不去了解阿贝尔群的定义，就无法提取出具体例子的**共性**——而孤立地去学具体例子在大学是不可行的，因为大学数学的内容量真的很**大**。

笼统来说，所有具体例子、做题技巧整理都可以称为**低观点**，而所有结构性的内容、抽象层面的讨论都可以称为**高观点**。当然，应对考试必须掌握足够的低观点，而高观点很多则来自课程与自己的思考。高观点是必要的，就像上面所说的抽象层级，它可以做到提取低观点中的共性以**更好理解、记忆**。

* 高等数学课程中的结构想法远不如线性代数中多，但类似的寻找共性的思路仍然可以帮助大家理解很多**定义、定理的由来**。

1.1.3 证明

在大学之前，我们所谓的“证明”其实更多时候是“说明”：只要我们知道一个部分是对的，就可以直接跳过对于这部分的具体细节。

然而，在大学，这件事并不成立。这是由于大学中遇到的**逻辑**将更加复杂，甚至在有的地方反直觉，导致“知道是对的”并不成立，只有一步步**推导**出来的内容才能确信是对的。

在之后的习题课中，我们将以更严格的方式叙述逻辑，也将进一步解释为何有些“看起来对”的证明是不合理的，而有些“一时看不出理由”的推导其实是正确的。目前阶段，至少希望大家做到的是，在证明中绝大部分的**三段论**推导中看出其中用到的**结论**，通俗来说也就是**能说出每一步的理由**。

当然，这件事的做到只能算是“读懂”了一个证明，还远称不上是**学会**一个证明。与证明逻辑同等重要的是证明的**思路**，也即**能说出证明是如何想到的**——这事实上与本章开头讨论文本时的要求完全一致。

一个常见的误区是，数学家的“注意力”是凭空产生的，常人无法想到。事实上，绝大部分证明之所以读着让人感觉无法想到，是因为**写出的过程与真实思路有很大差异**。例如，虽然结构的呈现都是顺序，写证明时可能是一会儿从条件出发一会儿从结论出发研究的，可能是找了很多具体例子后研究共性，也可能是看别的证明时突然有了思路...... 知道了这些，我门就可以在遇到思路不明确的证明时多进行不同的尝试，或许就能发现想到这些其实是“自然”的——当然，这个过程里还是要再次强调与人的交流，毕竟一个人确实也不可能想清楚全部的思路。

1.1.4 方法

最后，我们来聊一聊学习方法的差别。中学数学的常见 (至少我亲身经历中常见) 的学习模式是：以记忆做题方法为主线，训练一套“什么题用什么方法”的模式，不太注重**分析与尝试**本身。

上述的做法在内容量不多时，确实可以成为有效的思路，因为通过大量题目的训练能够快速建立起“看到题目就知道该用什么”的**直觉**。大学数学里，**建立直觉**也仍然是很重要的部分——事实上前面所说的数学家的“注意力”就是一种直觉——但绝不可能只靠大量做题达成，这是因为大学的内容量已经**不可能对每个知识点都做充分多的题目**，或用我常说的话，“背是一定**背不完**的”。

那么，用什么方法能在做题不那么多的时候就达成训练直觉的目的呢？如果用最简单的方法概括，答案就是**多想、多问**。前者意味着该亲自参与的时候一定要亲自参与，例如习题课一般不会直接讲题目解答，尤其是作业题，因为这是必须自己做了才能有用的部分，没有自己的尝试就不可能知道怎洋的直觉是**有效**的，怎样是无效的；后者则意味着出现问题时需要及时沟通，因为自己想到的书上/答案写得有差别并不意味着就是错误的，说不定只是某一步需要补全，而自己做不出来时，知道这些只能依靠了解**其他人能否通过此思路走通**。

§1.2　联系

1.2.1　结构与动机

虽然刚才讲了大学数学与之前数学学习不同的四个方面，大家可以发现它们其实存在很鲜明的共性。具体来说，就是对**高观点**的更加注重。现在，我们可以详细解释何为大学数学中的高观点了。主要包含两部分：**结构**与**动机**。

无论是教材还是上课，资料一定是**顺序**呈现的，一行后接着另一行。但是，这样的顺序往往不是真正的**思路结构**。就像本次习题课的真实结构是在黑板上画了一张有着诸多连线的图一样，真正的结构往往至少是**树状**的——以教材为例，很可能每一章是为了解决某个 “主要问题”，此问题可以拆分为若干 “次要问题”，并可以进行进一步的拆分，直到得到个人可以解决的一个个小点。更多时候，这样的联系并非单向、逐级向下的，就以高数为例，**微分**之下的各种结论 (如微分中值定理) 与**积分**之下的各种结论 (如积分中值定理) 很多时候会存在一定程度的**对应**，而这样的对应关系会带来更复杂的连接。所有的这些对结构的分析都是掌握知识的重要一环，也可以切实提升**理解**，也即之前说的，不用记忆就培养直觉的方式。

另一个很重要但必须思考的内容就是**动机**，也即不断反问 “为何能够想到”。因为数学世界的一切都是由人类创造的 (暂且忽略发明与发现的哲学讨论)，**每一个概念的创造必有其原因**。即使很多时候站在初学角度并不能感知到最准确的理由，对动机有自己的理解仍然是重要的。例如，初学导数时，的确可以将导数理解为 “为了刻画**速度**出现的概念”，即使学到之后对这个概念有了更深的体会，也并不意味着用速度看待导数后对更多知识产生的理解是无效的。

当然，无论是结构还是动机都**不存在唯一的答案**。哪怕是教材的编写者所说出的结构，也并不一定就是教材是真正结构，因为其中还蕴含着编写者的整个知识体系所带来的理解。某种意义上，听课的最大意义就是**获取老师对高观点的理解**，并以此和直接阅读教材、自己思考结合，得到自己的答案。

——至于为何要强调高观点？正是因为这些部分可以超越简单的背诵，达到**在有限的时间与做题量下训练出直觉**的效果，所以，千万**不要觉得以应试为目的的学习就无需掌握高观点**，除非你能在刷题的同时记下做过的每一道题目是如何处理的。

1.2.2　问与想

在之前介绍方法时，我们已经说了 “多想” 与 “多问” 是本质性的解决方法，事实上它们就是**掌握高观点的必要方式**，也是大学数学与中学数学学习不同的本质所在。本章的最后，我们就来聊一聊具体如何多想、多问，概括起来其实只有两点：

- **简单的问题不要怕问**。

  总会有人因为担心自己的问题过于简单而害怕来交流，但其实简单的问题恰恰是最需要交流的，一方面大家会存在共性 (~~其实你不会的大家都不会，不要被群聊里活跃的人吓到~~)，另一方面解答这些问题的时间很短，而自己思考得到答案的时间则过于长了。

  同样，也不要担心自己 “连这都问是不是问题太多了”。事实上，在学习的前期，出现大量问题是正常的，只有找不同人交流、解决了前期的问题后，才能搭起初步的框架，之后遇到的问题更少。

此外，一个常见的**误区**是，既然有了答案就不用和人交流不会做的题了。但事实上，**答案是无法代替得到答案的过程的**，和人交流是为了知道别人从何种角度得到答案，而非机械记忆某套固定的操作方法。所以，尤其是学习前期，比起看答案，更应该将不会做的题拿给大家交流。

* 至于问 AI，个人并不推荐，因为它有着和看答案一样的问题：学习前期无法区分结果正误，即使是正确的，也无法得知想到证明所需的知识背景。

- **困难的问题不要怕想**。

  既然大家都来到了这里，不需要觉得有什么知识是“自己不配学”的。如果要建立完整的体系，一般都需要掌握全部的知识——除了一些**过于困难的技巧**可以适当放弃 (真有这样的情况会在讲义里提及)，其他内容都是理应掌握的。

  如果一时觉得怎么学都无法学会，那往往实际上是**切入思路**的问题。只要能适当调整思路，多去思考**如何用自己能理解的方式构建体系**，并和人交流，一定可以达成**不用堆时间也能学会**的效果。

  对于真正困难的内容，充分思考一定是有必要的。事实上，数学上的困难往往就意味着大量不符合直觉、无法通过直觉建构的内容，那么也就必须利用思考构建起**新的直觉**来进行理解——越是困难的东西，越不能指望通过强行记忆去学，因为困难将导致更容易忘却。

希望大家能带着这两句话，完成整个本科的数学学习，并至少**学有所得**。

二　数列极限

本次习题课主要介绍了数列极限的部分技巧和一些重要的估算，知识基础为数列极限定义、一些基本的数列极限结果 (如夹逼定理、保序性、加减乘除极限等) 与单调有界数列存在极限。

§2.1　作业解答

1. (1.3 节例 7) 设 a_n 是非负数列，且
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$$
证明
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

解答：

分两种情况：

– 若 $a > 0$，由于根号难以处理，尝试利用分子有理化直接计算可知
$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$$
由于 a 为正，分母必然非零。
直接缩小分母估算可知
$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$$
由此，对任何 $\varepsilon > 0$，利用 a_n 极限为 a，由 $\sqrt{a}\varepsilon > 0$ 可以取 N 使得 $n > N$ 时
$$|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$$
此时即得到
$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$
从而得证。

– 若 $a = 0$，此时也即求证 $\sqrt{a_n}$ 极限为 0。对任何 $\varepsilon > 0$，利用 a_n 极限为 0，由 $\varepsilon^2 > 0$ 可以取 N 使得 $n > N$ 时
$$|a_n - 0| < \varepsilon^2$$
此时再利用 $a_n \geq 0$ 即得到
$$|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$$
从而得证。

* 虽然解答中直接进行了分类讨论，直接做时往往会先只考虑到 $a > 0$ 的情况，在**检查过程发现严谨性问题时** (即 $a = 0$ 时分母可能为 0，且 $\sqrt{a}\varepsilon = 0$，不是符合要求的正数) 再补充另一种情况的证明。因此，一定要注意做完以后检查每步是否能实现。

* 当然，$\sqrt{a}\varepsilon$ 与 ε^2 的构造也是先有下面的估算再回头进行的，这也是经典的**解答呈现顺序与真实思路相反**。

2. (1.3 节定理 4(3)) 设
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = l_2$$
且 $l_2 \neq 0$，证明
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$$

解答：

- 定理 4(2) 已经证明了

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

由此只要证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{l_2}$$

即有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$$

- 为说明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{l_2}$，我们需要先说明左侧**定义合理**，也即 n 充分大时 b_n **非零**。
由于 $l_2 \neq 0$，有 $\frac{|l_2|}{2} > 0$，于是存在 N 使得 $n > N$ 时

$$|b_n - l_2| < \frac{|l_2|}{2}$$

此时利用三角不等式得

$$|b_n| > \frac{|l_2|}{2}$$

从而可知 $n > N$ 时 $b_n \neq 0$，可以定义。
另一方面，直接计算可知

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}\right| = \frac{|b_n - l_2|}{|b_n l_2|}$$

可以发现，在刚才得估算下，$n > N$ 时可以放大得到

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}\right| < \frac{|b_n - l_2|}{l_2^2/2}$$

为了进一步控制，对任何 $\varepsilon > 0$，利用 b_n 极限为 l_2，由 $\frac{l_2^2}{2} > 0$ 存在 N_0 使得 $n > N_0$ 时

$$|b_n - l_2| < \frac{l_2^2}{2}\varepsilon$$

从而可知 $n > N$ 且 $n > N_0$ 时

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}\right| < \frac{|b_n - l_2|}{l_2^2/2} < \varepsilon$$

也即取 $N_1 = \max\{N, N_0\}$ 可符合极限定义，得证。

3. (习题 1.3.4(1)) 用定义证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \frac{3}{2}$$

解答：

直接计算可知

$$\left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{|4n-6|}$$

对任何 $\varepsilon > 0$，直接解不等式可知使上式小于 ε 只需

$$n > \frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} + 6\right)$$

从而取 ($[x]$ 代表不超过 x 的最大整数)

$$N = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} + 6\right)\right] + 1$$

即符合要求。

4. (习题 1.3.5) 设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

且数列 b_n 有界，即

$$\exists M>0,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |b_n|<M$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

解答：

由条件可知

$$|a_n b_n| = |b_n||a_n| \le M|a_n|$$

对任何 $\varepsilon>0$，利用 a_n 极限为 0，由 $\frac{\varepsilon}{M}>0$ 存在 N 使得 $n>N$ 时

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| \le M|a_n| < \varepsilon$$

从而符合极限定义，得证。

* 仍然注意我们一定是**先进行估算，再利用定义取合适的数**。

5. (习题 1.3.7) 计算极限：

(1)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

解答：

利用分子有理化技术可知

$$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}| = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

由此对任何 $\varepsilon>0$，直接解不等式可知使上式小于 ε 只需

$$n > \frac{4}{\varepsilon^2}$$

从而取

$$N = \left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]+1$$

即符合极限定义，得证原式极限为 0。

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+10)^4}{n^4+n^3}$$

解答：

分子分母同除以 n^4 可得上式等于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2+10/n)^4}{1+1/n}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

利用乘积极限、加法极限结论即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{10}{n}\right)=2$$

进一步利用乘除法极限结论即得原式为

$$\frac{2^4}{1}=16$$

* 请一定注意书写证明时添加**必要的文字说明**以表明**逻辑**，可以注意习题解答中**关联词**的使用。

§2.2 严谨性

2.2.1 替换原理

我们首先需要了解证明过程中最常用的原理之一 (由于我们并不关注数理逻辑的细节，本讲义将所有可以用于证明的逻辑理论称为**原理**)：**替换原理**。

举例来说，假设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

为什么我们可以将极限定义里的 ε 替换为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 呢？事实上分为两步。首先，上式根据定义是 (默认 n、N 为正整数)

$$\forall\varepsilon > 0,\quad \exists N,\quad \forall n > N,\quad |a_n - a| < \varepsilon$$

由于 ε 本身只是一个形式的记号，我们可以将它作任意的**替换**，例如替换为 $\frac{\varepsilon}{2}$，可以得到

$$\forall\frac{\varepsilon}{2} > 0,\quad \exists N,\quad \forall n > N,\quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

而另一方面，我们知道一个数除以 2 是正数与这个数是正数等价，将逻辑上等价的式子进行**替换**就得到了

$$\forall\varepsilon > 0,\quad \exists N,\quad \forall n > N,\quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

也就是说，这个过程里进行了两步，先对形式记号进行了替换，再对逻辑上等价的式子进行替换。每一步替换前后，所得的命题都等价。

但是，至此，我们还需要提问，这两个替换随时都可以进行吗？举例来说，考虑如下的命题

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \exists y\in\mathbb{R},\quad y > x$$

我们把 x 替换为 $2x$ 或 x^2 不会影响此命题，但如果替换为 x^2+y，就能得到荒谬的结果：

$$\forall x^2+y\in\mathbb{R},\quad \exists y\in\mathbb{R},\quad y > x^2+y$$

这意味着，对形式变量的替换似乎确实不是任何时候都可以进行的。最关键的事情是，我们需要保证替换前后变量的**自由性**不变。也即，替换前的 x 不会受第二个条件 $\exists y\in\mathbb{R}$ 约束，那么无论替换成 z 或 w 都可以，但一定**不能与 y 有关**。

本节的 “替换原理” 实际上是指第一种情况，至于第二种情况，对于等价命题的替换，确实是在任何时候都可以进行的，我们可以称为 “等价原理”。更复杂的替换**不等价命题**的情况我们将在下一节介绍。

讲到这里，就可以纠正不少同学在证明时容易犯的错误了。

题 1. 下面的两个命题 (称为命题 2、命题 3) 与 a_n 在 n 趋于无穷时极限是 a (称为命题 1) 等价吗？若不等价，它们的推出关系是怎样？

$$\forall\varepsilon > 0,\quad \exists N,\quad \forall n > N,\quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{N}$$

$$\forall\varepsilon > 0,\quad \exists N,\quad \forall n > N,\quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{n}$$

解答:

首先，命题 2 与命题 3 都能推出命题 1，这是由于 N、n 都是正整数，因此 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{N}$ 或 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{n}$ 都意味着 $|a_n - a| < \varepsilon$，命题 1 已经成立 (此处的严格逻辑见下一节)。

此外，命题 3 也可以推出命题 2，这是因为在 $n > N$ 的条件下 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{n}$ 也可以推出 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{N}$。

命题 1 不能推出命题 2，考虑数列

$$a_n = n^{-1/2}$$

其极限为 0，但取 $\varepsilon = 0.5$，无论如何取 N 都无法保证 $n > N$ 时 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2N}$，矛盾。

* 此处构造思路为，命题 2 与命题 3 接近，而命题 3 本质是 $n|a_n - a|$ 趋于 0，因此 a_n 趋于 0 且 na_n 不趋于 0 很可能可以导出矛盾。三个命题里 ε、N、n 可以分别取，这就是**受约束性**带来的。

命题 2 不能推出命题 3，不过反例相对复杂：记 $b_n = na_n$，我们进行如下的构造：

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1$$

$$b_3 = 0, \quad b_4 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \quad b_5 = \frac{4}{6}, \quad \ldots, \quad b_7 = 1$$

$$b_8 = 0, \quad b_9 = \frac{1}{3} = \frac{8}{24}, \quad b_{10} = \frac{9}{24}, \quad \ldots, \quad b_{25} = 1$$

$$\cdots$$

可以发现，由于 $|a_n| \le \frac{1}{n}$，有 $a = 0$，此时命题 3 等价于 $|b_n| \to 0$，结论不成立。对于命题 2，对任何在 $\frac{1}{k-1}$ 与 $\frac{1}{k}$ 之间的 ε (k 为正整数，若 $\varepsilon > 1$ 则取 $k = 1$)，考虑上方构造的第 k 行，令 N 为这行的第一个下标，可以验证此后均成立 (事实上下方第一个不等号就是构造的想法来源)

$$\forall n > N, \quad |b_n| \le \frac{n-1}{kN} < \frac{n}{kN} < \frac{n\varepsilon}{N}$$

这即得到了 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{N}$，结论成立。

* 上方的证明和构造稍有技巧性，需要对概念较为熟悉以后才能想到。我自己构造此数列也尝试了挺久，一个**更简单的构造**是，将上述 b_n 不为 1 的项都改为 0，可用完全相同的方式证明成立性。由此可以类似发现，b_n 只需取 0 或 1，且 1 相距“足够远”就能得到反例，例如只有当 $n = k!$ (k 为正整数) 时 b_n 为 1，其他为 0。

* **学会构造反例是重要的**，因为反例可以帮助大家判断一个“看起来可能对”的逻辑是不是真的正确。稍后我们将看到更复杂的例子。

* 事实上，进行了“不合法的替换”并非得到的结论一定错，但从逻辑上来说确实**无法直接推出**。

总之，在进行形式记号的替换时，必须保证**自由变量替换为自由变量**，而**不能涉及在该命题中受到约束的变量**。当然，不同命题中可能有不同的自由变量，如果在其他地方得到了一个正整数 M，将 ε 替换为 $\frac{\varepsilon}{M}$ 也是可行的。

2.2.2 任意与存在

接下来，我们将介绍大学中常用而高中几乎不会出现的，关于“任意”与“存在”的几条原理。先来看一个经典的问题“找命题的否定”：

题 2. 给出如下命题的否定：对任意 $M > 0$，存在正整数 N 使得对任意 $n > N$ 有 $|a_n| > M$。

解答：

至少大家应该或多或少接触过 (如果没有接触过就请现在**记住**) 一个结论：一个包含任意、存在的命题的否定，只要把**任意改成存在、存在改成任意**，然后**将最后一句话改为否定即可**。也就是说，上述命题的否定为：

存在 $M > 0$ 使得对任意正整数 N 都存在 $n > N$ 满足 $|a_n| \le M$。

* 题目中的命题可以写为 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，下一章将讨论相关定义。

* 本部分接下来的内容都**与考试无关**，但如果大家能看完，会更能理解证明中的**逻辑**。

不知道大家是否想过，为何这样的做法是有道理的呢？这些有关证明、命题的东西就涉及到数学的一个重要且基础的分支，**数理逻辑**。正如其他数学分支一样，数理逻辑也需要一些公理与定理作为支撑，如上节所说，我们将它们称为**原理**，关于任意与存在，可以有着以下的原理：

$$(\neg\exists x A(x)) \leftrightarrow (\forall x \neg A(x))$$

我们简单介绍一下上方的记号：这里的 $A(x)$ 不是函数，而是一个关于 x 的**命题**，数理逻辑中研究的对象几乎都是命题；$\leftrightarrow$ 表示左右可以互相**推出**，我们用 $\leftarrow$ 或 $\rightarrow$ 表示单侧的推出；$\neg$ 表示对后方命题的**否定**；$\exists x A(x)$ 表示存在 x 使命题 $A(x)$ 成立，这**仍然是一个命题**，而 $\forall x A(x)$ 则表示对任何 x，命题 $A(x)$ 都成立——自然，$\forall x \neg A(x)$ 表示对任何 x，命题 $A(x)$ 都不成立。
* 注意此原理也是一个命题，而我们将它称为原理说明这个命题**恒真**，无论 $A(x)$ 是何种命题，上方命题都成立。

由此，我们可以将上方这句话解释为：以下两个命题相互等价：不存在 x 使得命题 $A(x)$ 成立、对任意 x 命题 $A(x)$ 不成立。当然，这句话很符合**直觉** (至于究竟什么是逻辑直觉，这是哲学家们研究的领域)，我们下面将用它推导出**题 2** 的更严谨解答。分为以下步骤：

1. 对于**推出** ($\rightarrow$) 的更严谨理解

   所谓的 $p \rightarrow q$ (这里的字母默认代表**命题**)，一个符合直觉的定义即，假设 p 成立，可以**证明** q 成立——篇幅所限，我们不会讨论数理逻辑中究竟何为一个证明。不过，之所以单独讨论这件事，是因为存在一个必须理解的事情：**假命题可以推出任何命题**。

   虽然这件事基本可以当作推出定义的一部分，但由于它并不像我们使用的其他原理一样符合直觉，我们必须作一定的说明。一个相对合理的理解是，这其实是为了让**任意**符合逻辑直觉。

   当我们在说**任意一个三角形都有三条边**时，我们其实在说，对任意一个图形 G，G 是三角形可以**推出** G 有三条边。这句话当然是正确的，因此，这句话**对任意图形都正确**——也就是说，在 “G 不是三角形” 时，“G 是三角形可以推出 G 有三条边” 仍然是正确的。

   一件明显的事是，无论右边的命题是不是 “G 有三条边”，我们都不希望 “G 不是三角形” 的情况影响整个命题的正确性，出于 “任意” 的语义，我们必须规定 G **不是三角形**时，无论 p 是什么命题，“G **是三角形可以推出** p” 都是真的，这就是所谓的假命题可以推出任何命题。

   * 另一种方式是将它理解为关联词**如果**、**则**，假设 “如果” 后的内容已经不成立，这句话本身不会被违反。

   * 事实上，在数理逻辑中，“假设 p 成立可以证明 q 成立” 并不是 $p \rightarrow q$ 的定义，两者的等价性是一个称为**演绎定理**的定理。

2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ **恒真**

   我们将用到以下**双重否定原理**：

   $$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

   也即对命题 p，其双重否定与自身等价。

   现在，我们假设 $p \rightarrow q$ 已经成立，来证明 $\neg q \rightarrow \neg p$。为证明 $\neg q \rightarrow \neg p$，我们进一步假设 $\neg q$ 成立，此时若 p 成立，利用 $p \rightarrow q$ 可知 q 成立。由于 $\neg q$ 成立，“$\neg q$ 不成立” 不成立，也即 $\neg\neg q$ 不成立，利用双重否定原理可知 q 不成立，这就得到了矛盾。

* 反证法的原理是对命题 r，$\neg r$ 与 r 至少有一个成立，这称为**排中律** (注意这并没有保证两者恰有一个成立，而我们刚才证明了至多有一个，因此的确恰有一个)。

* 将 p、q 替换为 $\neg q$、$\neg p$，结合双重否定原理将等价部分进行替换即可以得到下式恒真：

$$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$$

综合上方即得下式恒真：

$$(\neg q \to \neg p) \leftrightarrow (p \to q)$$

这就是**逆否命题与原命题等价**。

3. $(\neg\forall x A(x)) \leftrightarrow (\exists x \neg A(x))$ **恒真**

   我们将已知的原理 $(\neg\exists x A(x)) \leftrightarrow (\forall x \neg A(x))$ 拆成

$$(\neg\exists x A(x)) \to (\forall x \neg A(x))$$

$$(\forall x \neg A(x)) \to (\neg\exists x A(x))$$

   两块，利用第二部分推导可知可以颠倒方向后两侧同加否定，也即下方两式恒真：

$$(\neg\forall x \neg A(x)) \to (\neg\neg\exists x A(x))$$

$$(\neg\neg\exists x A(x)) \to (\neg\forall x \neg A(x))$$

   利用双重否定原理可以替换得到下方两式恒真：

$$\exists x A(x) \to (\neg\forall x \neg A(x))$$

$$(\neg\forall x \neg A(x)) \to \exists x A(x)$$

   将命题 $A(x)$ 利用替换原理替换为 $\neg A(x)$，可得下方两式恒真：

$$\exists x \neg A(x) \to (\neg\forall x \neg\neg A(x))$$

$$(\neg\forall x \neg\neg A(x)) \to \exists x \neg A(x)$$

   再次利用双重否定原理可得下方两式恒真：

$$\exists x \neg A(x) \to (\neg\forall x A(x))$$

$$(\neg\forall x A(x)) \to \exists x \neg A(x)$$

   将两个命题合并即为结论。

4. 对**任意**与**存在**的进一步讨论

   值得注意的是，在**题 2** 中，我们事实上并没有见到 $\forall x A(x)$ 或 $\exists x B(x)$ 这样形式的命题。与之相对，我们见到的是类似

$$\forall p(x), A(x), \quad \exists q(x), B(x)$$

   的形式 (注意以上两个命题**并非严谨的数理逻辑写法**)，那么，它们是什么含义呢？

   在第一部分推导中，我们已经得到了 $\forall p(x), A(x)$ 的含义事实上是

$$\forall x, p(x) \to A(x)$$

   也就是说，当我们在说 $\forall x > 0, x^3 > 0$ 时，我们指的其实是，对任何 x，$x > 0$ 能推出 $x^3 > 0$。

然而，对于存在，$\exists q(x), B(x)$ 并不代表 $\exists x, q(x) \to B(x)$。我们以 $\exists x > 0, x^2 < 0$ 为例，这当然是一个假命题，但是正如第一部分讨论的**假命题可以推出任何命题**，既然有 x 使得 $x > 0$ 为假，$\exists x, (x > 0) \to (x^2 < 0)$ 应当是一个真命题。

仔细观察可以发现，存在事实上是在说**且**，也即 $\exists q(x), B(x)$ 的真正解释是

$$\exists x, q(x) \wedge B(x)$$

也就是说，当我们再说 $\exists x > 0, x > 1$ 时，我们指的其实是，有一个 x 使得 $x > 0$ 成立、$x > 1$ 也成立。

5. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (p \to \neg q)$ **恒真**

   * 我们默认 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 同时出现时先计算 $\neg$。

   先证明 $\neg(p \wedge q) \to (p \to \neg q)$ 恒真：只需说明 $\neg(p \wedge q)$ 成立时，若 p 成立则 $\neg q$ 成立。由于 $\neg(p \wedge q)$ 成立，p 与 q 不同时成立，而 p 成立则 q 不成立，利用排中律也即 $\neg q$ 成立。

   再证明 $(p \to \neg q) \to \neg(p \wedge q)$ 恒真：若 p 能推出 $\neg q$，若 p 为假则 $p \wedge q$ 不成立，若 p 为真可推出 q 为假，因此 $p \wedge q$ 也不成立，两者结合即说明 $\neg(p \wedge q)$ 必然成立。

   综合以上两部分得证。

6. $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ **恒真**

   将第五部分推导的结论拆分为

$$\neg(p \wedge q) \to (p \to \neg q)$$

$$(p \to \neg q) \to \neg(p \wedge q)$$

   利用第二部分推导并通过双重否定原理进行替换可得以下两式恒真：

$$\neg(p \to \neg q) \to (p \wedge q)$$

$$(p \wedge q) \to \neg(p \to \neg q)$$

   将 q 替换为 $\neg q$ 并通过双重否定原理进行替换可得以下两式恒真：

$$\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$$

$$(p \wedge \neg q) \to \neg(p \to q)$$

   将两个命题合并即为结论。

7. 最终推导

   我们将**题 2** 形式化地写为

$$\forall p(M), \exists q(N), \forall r(n, N), s(n, M)$$

   这里 p、q、r、s 均代表命题。

   为了得到其否定，我们先利用第四部分推导将其改写为符合数理逻辑要求的形式

$$\forall M, p(M) \to (\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n, N) \to s(n, M)))$$

   接下来，我们想知道此命题的否定

$$\neg(\forall M, p(M) \to (\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n, N) \to s(n, M))))$$

   的等价表述。

利用第三部分推导，将 $p(M) \to (\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M)))$ 视为一个命题，可知上式等价于

$$\exists M, \neg(p(M) \to (\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M))))$$

利用第六部分推导，将 $\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M))$ 视为一个命题，利用等价替换可知上式等价于

$$\exists M, p(M) \wedge \neg(\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M)))$$

可以发现，此时前面的部分已经符合了第四部分推导中的讨论，从而可以形式化写成

$$\exists p(M), \neg(\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M)))$$

进一步利用关于任意与存在的原理可知上式等价为

$$\exists p(M), \forall N, \neg(q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M)))$$

利用第五部分推导可知上式等价为

$$\exists p(M), \forall N, q(N) \to \neg(\forall n, r(n,N) \to s(n,M))$$

再次利用第四部分推导可知上式可以形式化写成

$$\exists p(M), \forall q(N), \neg(\forall n, r(n,N) \to s(n,M))$$

再次利用第三部分推导、第六部分推导可知上式等价为

$$\exists p(M), \forall q(N), \exists n, r(n,N) \wedge \neg s(n,M)$$

最后利用第四部分推导形式化写为

$$\exists p(M), \forall q(N), \exists r(n,N), \neg s(n,M)$$

可以发现，这恰好是题目中存在改成任意、任意改成存在、将最后一句话改为否定的结果，符合我们之前找到的**规律**。

事实上，上方的证明并非数理逻辑上严谨的证明，但对于尚未学过数理逻辑的同学们来说已经足以作为对逻辑的**理解**。所谓大学数学的证明逻辑更加复杂，往往就是这些任意、存在、推出、否定的**相互嵌套**，如果说上述过程能对证明书写有什么启示，大概就是**分析好每一层的逻辑**，并**逐层进行操作**，而不是试图一口气给出全部的逻辑。

* 例如，本次作业里的 1.3 节例 7 中，由于 a_n 极限为 a 是**条件**，相应的极限定义中的 ε 可以**任取**，而 $\sqrt{a_n}$ 极限为 $\sqrt{a}$ 是**目标**，相应的极限定义中的 ε **需要被任意给定**。因此，我们必须以 $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|<\varepsilon$ 为目标，通过在 a_n 极限为 a 的定义中**取出**适当的值 (如 $a>0$ 时为 $\sqrt{a}\varepsilon$) 作为限制。

最后介绍两个上方并未涉及的重要性质：

1. 等价具有**自反性**、**对称性**与**传递性**：

$$p \leftrightarrow p$$

$$(p \leftrightarrow q) \to (q \leftrightarrow p)$$

$$((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \to (p \leftrightarrow r)$$

$\wedge$ 这个符号表示**且**，也即左右两个命题都成立。上述三个定理也即：命题 p 与自身等价；对命题 p、q，若 p、q 等价则 q、p 等价；对命题 p、q、r，若 p、q 等价且 q、r 等价，则 p、r 等价。

* 大家有兴趣可以用我们已经说的内容自行证明它们，不含存在与任意时的等价原理事实上可以通过类似思路证明。

2. **不等价命题**也可以替换：

$$(p(x) \to q(x)) \to (\forall x p(x) \to \forall x q(x))$$

$$(p(x) \to q(x)) \to (\exists x p(x) \to \exists x q(x))$$

也就是说，只要 $p(x) \to q(x)$，无论前面如何套存在与任意，推出性仍然成立，这就说明了**题 1** 证明的第一部分是合理的。$p(x) \leftrightarrow q(x)$ 时的情况只是上述替换的特例。

§2.3 证明的思路

2.3.1 存在性问题的非构造证明

本节我们终于将离开上方的纯抽象逻辑层面推导，回到具体的**证明技巧**来。希望大家能在学习各种技巧性内容时也注意自身的逻辑为何是合理的。

首先，我们将考虑一类**存在性**问题：问题的最终形式是说明存在 x 满足某些性质。自然地，最直接的方法是直接找到 x，这称为**构造性证明**。构造性证明的技巧有很多，其中最重要的往往是先试着**感性认知**命题在“说什么”，再从所述的内容中找到符合要求的对象。

* 例如，通过**反例构造**说明推导不成立即是一种构造性证明。从逻辑的角度来说，反例构造是为了说明命题 p 不能推出命题 q，而只要找到命题 p 为真、命题 q 为假的**例子**，即能说明这点。由于我们之后还将见到各种各样的反例，此处不再对构造性证明做更多展开。

不过，存在性问题事实上并非一定要通过构造证明。我们来看一个经典且有趣的例子：

题 3. 证明存在正无理数 a、b 使得 a^b 是有理数。

解答：

考虑 $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，若 c 是**有理数**，取 a、b 均为 $\sqrt{2}$ 可得命题成立，**否则**，由于

$$c^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2$$

取 $a = c$、$b = \sqrt{2}$ 可得命题成立。

在这个例子中，我们并没有显式构造出结果，但却的确得到了结论，这就是依赖**排中律**：既然 c 要么是有理数要么是无理数，只要两种情况都能得到结论，就能得到原命题结论成立。

除了这样的讨论外，在高等数学中还有一个常用的构造思路，我们姑且称为**猎人兔子原理**：猎人在数轴上设立了一个长为 $x > 0$ 的坑，则一只步长小于 x 的兔子从左到右跳时一定会落到坑里。我们先用它解决下面的被称为**有理数稠密性**的问题：

题 4. 证明对任何 $a < b$，存在有理数 $x \in (a, b)$。

解答：

由于 $b - a > 0$，我们可以取出正整数 n 使得

$$\frac{1}{n} < b - a$$

此时通过猎人兔子原理已经可以感受到存在整数 m 使得 $\frac{m}{n} \in (a, b)$，下面我们来严谨证明此结论。

为了说明兔子总有一步将跳进坑里，我们其实只需要证明兔子“走过坑的第一步”一定会落在坑里。也即，我们取 m 为**满足 $m > na$ 的最小整数** m。

此时，利用最小性可以发现

$$m-1 \leq na$$

将定义与上式两侧同除以 n 得到

$$\frac{m}{n}>a,\quad \frac{m}{n}-\frac{1}{n}\leq a$$

而第二式即得

$$\frac{m}{n}\leq a+\frac{1}{n}<b$$

从而令 $x=\frac{m}{n}$，由于其为整数除以正整数，必然为有理数，而由已证 $x\in(a,b)$，因此符合要求。

无理数稠密性其实也可以类似证明，只是有一处需要注意：

题 5. 证明对任何 $a<b$，存在无理数 $x\in(a,b)$。

解答：

我们先尝试**模仿之前的证明**：由于 $b-a>0$，我们可以取出正整数 n 使得

$$\frac{\sqrt{2}}{n}<b-a$$

通过猎人兔子原理感受后，我们试着严谨证明此结论。

为了说明兔子总有一步将跳进坑里，我们其实只需要证明兔子“走过坑的第一步”一定会落在坑里。也即，我们取 m 为**满足 $\sqrt{2}m>na$ 的最小整数** m。

此时，利用最小性可以发现

$$\sqrt{2}m-\sqrt{2}\leq na$$

将定义与上式两侧同除以 n 得到

$$\frac{\sqrt{2}m}{n}>a,\quad \frac{\sqrt{2}m}{n}-\frac{\sqrt{2}}{n}\leq a$$

而第二式即得

$$\frac{\sqrt{2}m}{n}\leq a+\frac{\sqrt{2}}{n}<b$$

但是，在令 $x=\frac{\sqrt{2}m}{n}$ 时，虽然仍然可以得到 $x\in(a,b)$，却会发现一个问题：当 $m=0$ 时，$x=0$ 是**有理数**。

由此，上述取法只能在 $0\notin(a,b)$ 时保证成立，在 $0\in(a,b)$ 时需要寻找其他证明方法。事实上这并不困难：由条件 $b>0$，因此存在正整数 n 使得 $\frac{\sqrt{2}}{n}<b$，又由于其大于 0，令 $x=\frac{\sqrt{2}}{n}$ 即得 $x\in(0,b)\subset(a,b)$，符合要求。综合这部分与之前的证明即得到结论。

* 证明的严谨性**即使步骤看似简单也需要检查**，否则很可能发生意料之外的错误。

在直接利用此原理解决了一些问题后，我们就可以研究下面这个似乎很难找到思路的问题了 (注意这仍然是一个存在性问题，因为极限存在的定义开头是 $\forall\varepsilon>0$，证明不存在则要说明 $\exists\varepsilon>0$)：

题 6. 证明 $\sin n$ 在 n 趋于无穷时的极限不存在。

解答：

我们分为三步证明：

– 初步分析

由于 $|\sin n| \leq 1$ 恒成立，这是一个**有界**数列，为了证明其极限不存在，我们可以先尝试**找**一个有界但极限不存在的数列，如 $a_n = (-1)^n$ 进行观察。

可以发现，它不存在极限的本质原因是不断在上下振荡。我们试着将它总结为一个**引理**：若对数列 a_n，存在 $t_1 < t_2$ 使得 a_n 中有无穷多项小于 t_1、有无穷多项大于 t_2，则 a_n 不存在极限。

* 事实上，若 a_n 有界且极限不存在，一定能找到上述的 t_1 与 t_2，不过此证明需要的分析技巧较多，不在课程要求内，我们将在证明最后进行补充。

– 引理证明

若引理不成立，假设 a_n 极限为 l，则在极限定义中取 $\varepsilon = \frac{t_2-t_1}{2}$ 可得

$$\exists N, \quad \forall n > N, \quad |a_n - l| < \frac{t_2 - t_1}{2}$$

* 当然，这个取法也是有了下方的估算后才得到的。

若 $l \geq \frac{t_1+t_2}{2}$，上方的式子可以说明第 N 项后所有 a_n 都满足

$$a_n > l - \frac{t_2 - t_1}{2} \geq t_1$$

与有无穷多项小于 t_1 矛盾。同理，若 $l < \frac{t_1+t_2}{2}$ 与有无穷多项大于 t_2 矛盾。

综合两种情况的矛盾即得引理成立。

– 原命题证明

既然我们已经证明了引理，下面就需要找到 $t_1 < t_2$ 使得有无穷多个 n 满足 $\sin n < t_1$、有无穷多个 n 满足 $\sin n > t_2$。

接下来是证明的关键：虽然我们无法知道 $\sin n$ 如何在 $\sin x$ 图像上分布，但既然它的**步长**是 1，根据猎人兔子原理，只要陷阱的长度大于 1，一定会有某个 $\sin n$ 落在陷阱中。

由此，考虑区间

$$I_k = \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{N}^*$$

由于 I_k 长度为 $\frac{\pi}{2} > 1$，且两端点均为正数，必然存在正整数 $n_k \in I_k$，而利用三角函数知识即得

$$\sin n_k > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

由于每个区间 I_k 都在 I_{k-1} 的后方，n_k 必然单调增加，因此考虑所有 $k \in \mathbb{N}^*$ 即得到了数列 $\sin n$ 中有无穷多项大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

同理，考虑区间

$$\left(\frac{\pi}{4} + (2k-1)\pi, \frac{3\pi}{4} + (2k-1)\pi\right), \quad k \in \mathbb{N}^*$$

可以得到数列 $\sin n$ 中有无穷多项小于 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

取 $t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$、$t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$，由引理即得证。

* 此证明虽然看起来较长，但过程的**思路**是非常清晰的：从类比得到引理，再用猎人兔子原理设法构造符合引理的 t_1、t_2。

– (**附加**) 引理逆命题证明

我们现在来证明，若 a_n **有界**且极限不存在，一定能找到 $t_1 < t_2$ 使得 a_n 中有无穷多项大于 t_1、有无穷多项小于 t_2。

此命题的证明分为两步：

1. a_n 有子列极限存在

   * 子列类似子集，指数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$，其中 n_i 均为正整数，且对每个 i 有 $n_i < n_{i+1}$，也即代表从数列 a_n 中按顺序选出**无穷多项**构成的新数列。

   由于我们的实数完备性假设**单调有界数列极限存在**，只要证明 a_n 有**单调子列**，即可得到其有极限存在的子列。

   若 a_n 有单调递增子列，已经得证，下面假设 a_n 无单调递增子列，我们证明它有单调递减子列。

   若对所有 n 都存在 $n_0 > n$ 使得 $a_{n_0} \geq a_n$，则任取一个 m_0，重复此过程可找到

   $$a_{m_1} \geq a_{m_0}, \quad a_{m_2} \geq a_{m_1}, \quad \dots$$

   且下标满足

   $$m_0 < m_1 < m_2 < \dots$$

   这就得到了一个单调**递增**的子列，矛盾，从而必然存在一个 n_1 使得对任何 $n_0 > n_1$ 都有 $a_{n_0} < a_{n_1}$。

   进一步地，若对所有 $n > n_1$ 都存在 $n_0 > n$ 使得 $a_{n_0} \geq a_n$，只要取 $m_0 > n_1$，与上方相同仍然可以得到单调递增的子列，矛盾，从而必然存在一个 $n_2 > n_1$ 使得对任何 $n_0 > n_2$ 都有 $a_{n_0} < a_{n_2}$。

   利用此过程，我们可以得到下标逐渐增大的 $n_1, n_2, \dots$ 使得

   $$\forall n > n_k, \quad a_n < a_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

   而再根据这些下标逐渐增大即得

   $$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots$$

   这就得到了一个单调**递减**子列，得证。

2. t_1 与 t_2 存在

   由已证，我们可以假设 a_n 的子列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ 极限为 l。

   由于 a_n 极限不存在，其极限不为 l，利用极限定义的**否定**可知

   $$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N, \quad \exists n > N, \quad |a_n - l| \geq \varepsilon$$

   取出上述 ε。若 a_n 中只有有限多项满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$，则取 N 为最后一项的下标即可使得对任何 $n > N$ 都有 $|a_n - l| < \varepsilon$，矛盾，于是 a_n 中必然有无穷多项满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$。

   进一步观察此式，可发现由于 $|a_n - l| \geq \varepsilon$ 等价于 $a_n \leq l - \varepsilon$ 或 $a_n \geq l + \varepsilon$，必然有无穷多个 a_n 满足 $a_n \leq l - \varepsilon$ 或有无穷多个 a_n 满足 $a_n \geq l + \varepsilon$ (否则，由于满足任何一个的 a_n 都有限，满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$ 的 a_n 也将有限)。

   我们先考虑第一种情况，即有无穷多个 a_n 满足

   $$a_n \leq l - \varepsilon < l - \frac{2}{3}\varepsilon$$

   此时，由于

   $$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = l$$

   可知

   $$\exists K, \quad \forall k > K, \quad |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

也即当 $k>K$ 时均有

$$a_{n_k}>l-\frac{\varepsilon}{3}$$

从而我们得到了 a_n 中有无穷多项大于 $l-\frac{\varepsilon}{3}$。

综合上方证明，取 $t_1=l-\frac{2\varepsilon}{3}$、$t_2=l-\frac{\varepsilon}{3}$ 即得成立。

同理，对第二种情况，取 $t_1=l+\frac{\varepsilon}{3}$、$t_2=l+\frac{2\varepsilon}{3}$ 可类似证得成立。

* 这说明凡是**证明有界数列极限不存在**都可以考虑这样的 t_1、t_2 构造。

除了猎人兔子原理外，另一个常用的非构造性证明方法是**抽屉原理** (也称为**鸽笼原理**)：对正整数 m、n，将超过 mn 个苹果放入 n 个抽屉，则必有一个抽屉的苹果超过 m 个。

* 抽屉原理还有**无穷**版本：将无穷个苹果放入有限个抽屉，必有一个抽屉中有无穷多个苹果。在**题 6** 附加部分的证明中，我们从有无穷多个 a_n 满足 $|a_n-l|\geq\varepsilon$ 推出了有无穷多个 a_n 满足 $a_n\leq l-\varepsilon$ 或有无穷多个 a_n 满足 $a_n\geq l+\varepsilon$ 即是利用了此原理。

我们以抽屉原理证明一个较困难的命题结束本节，大家可以注意**从无穷项中取出充分多项**的技巧：

题 7 (附加). 证明数列

$$a_n=\frac{1}{\sin(cn\pi)}$$

无界，其中 c 为无理数。

解答：

此证明事实上依赖一个很重要的引理：任何**无理数** c 满足

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists n\in\mathbb{N}^*,\quad\{nc\}\in(0,\varepsilon)\cup(1-\varepsilon,1)$$

这里 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的小数部分，根据定义可知 $\{x\}\in[0,1)$。

– 引理证明

取正整数 m 使得 $\frac{1}{m}<\varepsilon$。我们将区间 $[0,1]$ 等分为 m 份，记为 $I_1,\ldots,I_m$，即

$$I_j=\left[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}\right]$$

考虑 $\{c\},\{2c\},\ldots,\{(m+1)c\}$，这 $m+1$ 个数都落在 $[0,1]$ 中，利用**抽屉原理**，必有两个落在同一个 I_j 中。

我们取出 I_j，并假设 $\{n_1c\}\in I_j$、$\{n_2c\}\in I_j$，且 $n_1>n_2$，下面说明取 $n=n_1-n_2$ 即符合要求。

利用小数部分定义可知 k 为整数时 $\{x+k\}=\{x\}$，从而有

$$\{nc\}=\{n_1c-n_2c\}=\{n_1c-n_2c-([n_1c]-[n_2c])\}=\{\{n_1c\}-\{n_2c\}\}$$

而由条件 $|\{n_1c\}-\{n_2c\}|<\frac{1}{m}$，分正负讨论即得

$$\{nc\}\in\left[0,\frac{1}{m}\right)\cup\left(1-\frac{1}{m},1\right)$$

更进一步地，若 $\{nc\}=0$，即说明其为整数，从而由 n 为正整数可知 $c=\frac{[nc]}{n}$ 为有理数，矛盾，因此 0 无法取到，这就说明了

$$\{nc\}\in\left(0,\frac{1}{m}\right)\cup\left(1-\frac{1}{m},1\right)\subset(0,\varepsilon)\cup(1-\varepsilon,1)$$

从而得证。

* 事实上，对 $\{nc\} \in (1-\varepsilon, 1)$ 的情况，若 $\varepsilon < \frac{1}{2}$ 可发现 $\{2nc\} = 1 - 2(1 - \{nc\})$，若 $\varepsilon < \frac{1}{3}$ 可发现 $\{3nc\} = 1 - 3(1 - \{nc\})$...... 从而进一步利用猎人兔子原理可得存在正整数 n_0 使得 $\{n_0 nc\} \in (0, \varepsilon)$，从而可以将引理中的 $(0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1)$ 改进为 $(0, \varepsilon)$，具体证明留给大家思考。

– 原命题证明

由于 c 为无理数，上方已经证明 nc 不可能为整数，因此分母不会为 0，数列 a_n 每项都存在。

利用引理，对任何 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$，存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\{nc\} \in (0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1)$，此时利用 k 为整数时 $|\sin(x + k\pi)| = |\sin x|$ 有

$$|a_n| = \frac{1}{|\sin(cn\pi)|} = \frac{1}{|\sin(\{nc\}\pi)|}$$

进一步利用 sin 的单调性 (注意我们限制了 ε 的上限) 可知 $|\sin(\{nc\}\pi)| < \sin(\varepsilon\pi)$，从而

$$|a_n| > \frac{1}{\sin(\varepsilon\pi)}$$

利用 $x > 0$ 时 $\sin x < x$ (函数极限部分将学到此结论) 即得

$$|a_n| > \frac{1}{\varepsilon\pi}$$

由于对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ 都可取到 n 使得上式成立，对任何 $M > 0$，取

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{\pi M}, \frac{1}{2}\right\}$$

即得存在 n 使得 $|a_n| > \frac{1}{\pi\varepsilon} > M$，这就证明了无界性。

2.3.2 从直觉出发

毫无疑问，我们实际碰到的证明题中，非存在性的问题将远多于存在性问题，而这部分的技巧也将更加复杂。不过，正如第一章中所说，数学最终是需要建立直觉，遇到非存在性问题时，也不妨先从**直觉**出发考虑——直到实在做不出来的时候再尝试调整直觉。事实上，**判断正误**类型的题目最适合用来培养直觉，因此，当遇到结论时，不妨尝试想想**去掉/更改某些条件后其是否还正确**，并在尝试证明或举反例的过程中加深理解。

我们先来看一个很简单的问题：

题 8. 判断正误：n 趋于无穷时，若 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均为 a，则 a_n 极限为 a。

解答：

结论正确，证明如下：要证 a_n 极限为 a，也即对任何 ε 有

$$\exists N, \quad \forall n > N, \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

而从条件可以得到

$$\exists K_1, \quad \forall k > K_1, \quad |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$$

$$\exists K_2, \quad \forall k > K_2, \quad |a_{2k} - a| < \varepsilon$$

由此，取 $N = 2\max\{K_1, K_2\}$，则 $n > N$ 时，n 为奇数可推出 $n > 2K_1 - 1$，从而根据第一式可知 $|a_n - a| < \varepsilon$；n 为偶数可推出 $n > 2K_2$，从而根据第二式可知 $|a_n - a| < \varepsilon$。综合以上两式得成立。

事实上，我们可以从这个问题衍生出更多个判断题，此处给出正确的命题，大家可以自己证明作为练习：

1. n 趋于无穷时，若 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均存在，则 a_n 极限未必存在。
2. n 趋于无穷时，若 a_n 极限为 a，则 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均为 a。
3. n 趋于无穷时，若 a_n 除以 k 余 $0, 1, \ldots, k-1$ 的项构成的数列极限均为 a，则 a_n 极限为 a。
4. 若 a_n 奇数项单调增、偶数项单调减，且 n 趋于无穷时 $|a_n - a_{n+1}|$ 趋于 0，则 a_n 极限存在。

   * 证明思路：先利用反证证明有界性 (否则奇数项或偶数项趋于无穷将导致 $|a_n - a_{n+1}|$ 趋于无穷)，从而奇数项、偶数项极限均存在，再说明极限相同。

5. 若 n 趋于无穷时 $|a_n - a_{n+1}|$ 趋于 0，a_n 极限未必存在。

   * 证明思路：考虑 $a_1 = 1$、$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}$，这样得到的数列称为**调和级数**，有多种方法证明其极限不存在，我们之后将学到。

前三个命题算是直接的衍生，而第四个命题则是将原结论扩展为了一种**极限判断方法**，第五个命题是考虑其在减小条件时为何不成立。当然，这些命题并不是凭空想到的，而是在遇到相关问题时**通过对原题的理解自然产生的**，也可以作为某种**引理**存在。

即使是更复杂的题目，我们也可以通过练习培养出的直觉判断正误：

题 9. 判断正误 (两式分别判断)：若满足 $p_1 > 0$ 的**非负**数列 p_n 与数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_1 + \cdots + p_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1p_1 + \cdots + a_np_n}{p_1 + \cdots + p_n} = a$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1p_n + \cdots + a_np_1}{p_1 + \cdots + p_n} = a$$

解答：

从表面上看，两式似乎都是 a_1 到 a_n **加权平均**的形式。但是，这里的权重分配并不能保证均匀，而是某种 “n 足够大时对应的权重将很小”。由此，我们可以想到两个符合条件的极端例子：

$$p_1 = 1, \quad \forall n > 1, \quad p_n = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = 1$$

前者代表 “最不均匀” 的情况，后者代表 “最均匀” 的情况。想要验证命题是否成立，可以先考虑这两个极端例子，若此时都能成立则有很大概率时正确的。

* 某种意义上，想到这两种极端情况就是想做出本题对应的必要**直觉**。

- 第一式

  取数列 p_n 满足

$$p_1=1,\quad \forall n>1,\quad p_n=0$$

  此时计算得第一式左侧即为

$$\lim_{n\to\infty} a_1=a_1$$

  而右侧为 a，因此任取一个第一项不等于极限的数列 a_n 就是反例，如

$$a_1=1,\quad \forall n>1,\quad a_n=0$$

- 第二式

  对第二式，“最不均匀”的情况可直接由定义验证成立，“最均匀”的情况在上课已经证明成立，由此第二式大概率是正确的，我们先**设法进行证明**。

  * 当然，若证明过程中卡住，根据无法证出的地方又可以**回到找反例**的步骤，并进一步判断是的确不成立还是证明方式问题，以此循环。

  根据极限定义，对任何 ε，我们需要寻找 N 使得 $n>N$ 时

$$\left|\frac{a_1p_n+\cdots+a_np_1}{p_1+\cdots+p_n}-a\right|<\varepsilon$$

  将上式通分后可化为

$$\left|\frac{(a_1-a)p_n+\cdots+(a_n-a)p_1}{p_1+\cdots+p_n}\right|<\varepsilon$$

  由此，记 $b_n=a_n-a$，则 b_n 极限为 0，这样问题就化为了寻找 N 使得 $n>N$ 时

$$\left|\frac{b_1p_n+\cdots+b_np_1}{p_1+\cdots+p_n}\right|<\varepsilon$$

  由于无法保证所有 b_i 的正负，当它们全为正 (这当然是可能的) 时上方能够尽量大，因此我们可以先利用三角不等式进行一步放缩

$$\left|\frac{b_1p_n+\cdots+b_np_1}{p_1+\cdots+p_n}\right|\le\frac{|b_1|p_n+\cdots+|b_n|p_1}{p_1+\cdots+p_n}$$

  只要让右侧小于 ε，就能保证左侧小于 ε

  至此，我们就必须用上 $\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}$ 趋于 0 或 b_n 趋于 0 的性质了。经过**尝试**，先用 b_n 趋于 0 的条件是较容易做出来的，大家可以自行研究先用另一个条件能否得到结论。

  由于 b_n 趋于 0，对任何 δ 可以取出 N_1 使得 $n>N_1$ 时

$$|b_n|<\delta$$

  利用上式，原式即可放缩为

$$\frac{|b_1|p_n+\cdots+|b_n|p_1}{p_1+\cdots+p_n}\le\frac{1}{p_1+\cdots+p_n}\left(\sum_{i=1}^{N_1}|b_i|p_{n+1-i}+\delta\sum_{i=N_1+1}^{n}p_{n+1-i}\right)$$

  可以想象，当 n 很大时，δ 后面的乘积可能很接近 $p_1+\cdots+p_n$，无法保证它较小，因此直接将它放大为 $p_1+\cdots+p_n$，得到

$$\frac{|b_1|p_n+\cdots+|b_n|p_1}{p_1+\cdots+p_n}\le\frac{1}{p_1+\cdots+p_n}\sum_{i=1}^{N_1}|b_i|p_{n+1-i}+\delta$$

由于 δ 可以任取，此时第二项已经可以很小，为了保证总体小于 ε，还需要控制第一项。

由于 b_n 极限存在，其必然有界，也即存在 $M>0$ 使得 $|b_n|<M$ 对任何 n 成立 (取 $M=\max\{|b_1|,\dots,|b_{N_1}|,\delta\}+1$ 即可)。由于对第一项无法进行更好的处理，我们将所有 b_n 放大为 M 最终得到

$$\frac{|b_1|p_n+\cdots+|b_n|p_1}{p_1+\cdots+p_n}\le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1+\cdots+p_n}+\delta$$

可以发现，当 n 很大时，我们可以使得所有 $n+1-i$ 都很大 (因为它至少是 $n+1-N_1$)，由此可以想到将分母**截断**，只保留 $p_1+\cdots+p_{n+1-i}$ 以符合极限定义，这样即能写成

$$\frac{|b_1|p_n+\cdots+|b_n|p_1}{p_1+\cdots+p_n}\le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1+\cdots+p_{n+1-i}}+\delta$$

利用 p_n 的极限结论，对任何 $\gamma>0$，存在 N_2 使得 $n>N_2$ 时

$$\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}<\gamma$$

那么，只要在原式中让 $n>N_1+N_2$，即能使得求和中每一项都小于 γ，此时即有

$$\frac{|b_1|p_n+\cdots+|b_n|p_1}{p_1+\cdots+p_n}\le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1+\cdots+p_{n+1-i}}+\delta<MN_1\gamma+\delta$$

为了让 $MN_1\gamma+\delta\le\varepsilon$，只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$、$\gamma=\frac{\varepsilon}{2MN_1}$ 即可。

最后，我们**综合**上述过程 (事实上答案呈现的过程往往只有下方的部分)：对**任何** $\varepsilon>0$，取出 N_1 使得

$$\forall n>N_1,\quad |b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

记 $M=\max\{|b_1|,\dots,|b_{N_1}|,\delta\}+1$，可发现对任何 $n\in\mathbb{N}^*$ 有 $|b_n|<M$。进一步取 N_2 使得

$$\forall n>N_2,\quad \frac{q_n}{q_1+\cdots+q_n}<\frac{\varepsilon}{2MN_1}$$

* 注意此式中 M、N_1 是**自由**的，因此如此替换的逻辑是正确的，详见之前的讨论。

令 $N=N_1+N_2$，则对任何 $n>N$，由于 $n>N_1$，拆分出 N_1 项并直接放缩有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{b_1p_n+\cdots+b_np_1}{p_1+\cdots+p_n}\right|\\&\le\frac{|b_1|p_n+\cdots+|b_n|p_1}{p_1+\cdots+p_n}\\&\le\frac{1}{p_1+\cdots+p_n}\left(M\sum_{i=1}^{N_1}p_{n+1-i}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=N_1+1}^{n}p_{n+1-i}\right)\\&\le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1+\cdots+p_{n+1-i}}+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

由于 $n+1-i\ge n+1-N_1\ge N_2+1>N_2$，对左侧求和每一项利用条件进一步放缩有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{b_1p_n+\cdots+b_np_1}{p_1+\cdots+p_n}\right|\\&\le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1+\cdots+p_{n+1-i}}+\frac{\varepsilon}{2}\\&<M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{\varepsilon}{2MN_1}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就得到了证明。

* 所有 p_n 都为 1 时，以 a_n 构造的新数列称为 a_n 的 **Cesàro 平均**，我们已经证明了 a_n 收敛时其 Cesàro 平均收敛到相同结果。

虽然这道题相对复杂，它的确在我们考试要求的范围内：所涉及的都是**基本的放缩估算技巧**，虽然复杂但并没有本质性的无法做出的内容 (事实上考试往往会有这样的基本功证明题，这就是为何需要学会**分析**思路)。

§2.4 阶估算 I

2.4.1 什么是阶

如果说上面讲的部分是关于一般的证明技巧，本次习题课的最后一节，我们就将看到贯穿整个的高等数学**最重要**技巧，对**阶**的估算。当然，在只学到序列极限时，我们只能对此给出一个初步的定义，之后我们将看到它的更多作用。

简单来说，阶就是一个数列**趋于无穷的速度** (这里无穷可能指无穷大或无穷小)。我们以**无穷小** (也即极限为 0 的数列) 为例，假设两个**不含 0 的**数列 a_n、b_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

我们考察它们的**比例**构成的数列无穷处的情况

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

若极限为 0，说明 a_n 趋于 0 的速度比 b_n 更快 (可以考虑 $\frac{1}{n^2}$ 与 $\frac{1}{n}$ 的例子)，称为 a_n 是比 b_n 更**高阶**的无穷小。若上述极限存在且非零，则称为 a_n 与 b_n 是**同阶**的无穷小；若上述极限为 1，进一步称 a_n 与 b_n 是**等价**的无穷小。

* 事实上，上述的同阶定义还可以进一步扩充。只要存在 $0 < m < M$ 使得 $\frac{a_n}{b_n} \in (m, M)$ 恒成立，即可称两个无穷小**同阶**。不过，绝大部分情况上方定义已经够用。

反之，若 $\frac{1}{a_n}$ 极限为 0，称 a_n 为一个**无穷大**。若 a_n、b_n 都是无穷大，我们也可以类似比较：若 $\frac{1}{a_n}$ 是比 $\frac{1}{b_n}$ 高阶的无穷小，则称 a_n 是比 b_n 更**高阶**的无穷大 (也即趋于无穷的速度**更快**)；若 $\frac{1}{a_n}$ 与 $\frac{1}{b_n}$ 同阶则称 a_n 是与 b_n **同阶**的无穷大；若 $\frac{1}{a_n}$ 与 $\frac{1}{b_n}$ 等价则称 a_n 是与 b_n **等价**的无穷大。

我们先了解一些常见的阶比较，首先是多项式相关的比较：

题 10. 对关于 n 的两个非零多项式 $p(n)$ 与 $q(n)$，判断

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$$

何时存在 (不考虑经过分母零点引起某项不存在的情况)，并在存在时计算极限。

解答:

我们设

$$p(n) = \sum_{k=0}^{s} p_k n^k, \quad q(n) = \sum_{k=0}^{t} q_k n^k$$

且首项系数 $p_s \neq 0$、$q_t \neq 0$。

分三类讨论：

– 若 $s>t$，分子分母同除以 n^s 得到原式为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{s}p_kn^{k-s}}{\sum_{k=0}^{t}q_kn^{k-s}}$$

将分子改写为

$$p_s+\sum_{k=0}^{s-1}\frac{p_k}{n^{s-k}}$$

由此利用 $\frac{1}{n}$ 在 n 趋于无穷时趋于 0 即可看出分子极限应为 p_s，同理，分母由于所有项都不到 s 次，极限将为 0。

若此分数极限存在，由分母极限为 0 可通过极限乘除关系得到分子极限为零，矛盾，因此极限不存在。

– 若 $s=t$，分子分母同除以 n^s，与上方类似讨论得到分子极限为 p_s、分母极限为 q_t，由它们都非零，极限为非零常数 $\frac{p_s}{q_t}$。

– 若 $s<t$，分子分母同除以 n^t，与上方类似讨论得到分子极限为 0、分母极限为 q_t，从而利用乘除极限结论可知极限为 0。

* 可以发现此极限结论**只与分子分母的最高次项有关**，这就是阶估算的其中一个用处：高阶与低阶相加减几乎可以忽略低阶部分。

对 $k>0$，我们将 n^k (和与其同阶的无穷大) 称为 k **阶无穷大**，上方的结论说明了两件事：

1. 对自然数 s，n 的 s 次多项式 $p(n)$ 是 s 阶无穷大；
2. 对自然数 s、t，n 的 s 次多项式是比 n 的 t 次多项式高阶的无穷大当且仅当 $s>t$。

这两个结论都很符合我们的直觉。还有一些与多项式无关的比较：

题 11. 证明对任何 $a>1$、$b>0$、$c>0$ 有 (这里 $\ln^c n$ 表示 $\ln n$ 的 c 次方)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^c n}{n^b}=0$$

解答:

我们分别证明这四个式子极限为 0:

– 展开可以发现

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\dots\cdot\frac{n}{n}\le\frac{1}{n}$$

从而对任何 ε 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 即可使得

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

故原式得证。

* 对于阶乘我们目前并没有学到其他处理手段，只能**展开为乘法**。

– 展开可以发现

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\dots\cdot\frac{a}{n}$$

可以发现乘积中，$k>a$ 时 $\frac{a}{k}$ 都小于 1，因此在 $n>a$ 时，删除最后一项外小于 1 的项

$$\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\dots\cdot\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{n}$$

记

$$M=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\dots\cdot\frac{a}{[a]}\cdot a$$

则上式即 $\frac{M}{n}$。于是我们得到 $n>a$ 时

$$0<\frac{a^n}{n!}<\frac{M}{n}$$

通过**夹逼定理**得证。

* 夹逼定理常见的应用即为放大缩小后控制得到极限，其与**极限保序性**有本质的不同，因为其保证了极限的存在性，我们之后将更详细说明。

– 通过指数放缩出多项式的一个常见方法是**二项式定理**，也即利用

$$a^n=(1+(a-1))^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(a-1)^k$$

找正整数 m 使得 $m>b$，在 $n>m$ 时，只保留展开式中次数为 m 的项即有 (展开系数 C_n^m)

$$0<\frac{n^b}{a^n}<\frac{n^b}{C_n^m(a-1)^m}=\frac{m!n^b}{n(n-1)\dots(n-m+1)(a-1)^m}$$

由于 m 已经取定，下方为 n 的 m 次多项式，上方为 n^b，且 $b<m$，由此想到上下同除以 n^m，与**题 10** 相同可证明右侧极限为 0，进一步通过夹逼定理得证。

– 我们记 $t=\ln n$，则此式可以改写为

$$\frac{t^c}{(\mathrm{e}^b)^t}$$

进一步记 $s=1-\mathrm{e}^b$ 可将其写为

$$\frac{t^c}{(1+s)^t}$$

可以发现，此时与上一式已经很像，但 t **未必为整数**，因此**无法直接展开**。

为了解决此问题，我们需要将其**放缩为整数**。对任何 n，假设 n_0 是不超过 $\ln n$ 的最大整数 (也即 $[\ln n]$)，n_0+1 应为大于 $\ln n$ 的最小整数，根据定义放大分子缩小分母有

$$\frac{t^c}{(1+s)^t}\le\frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}}$$

找正整数 m 使得 $m>c$，与第三式相同可知 $n_0>m$ 时

$$0<\frac{t^c}{(1+s)^t}\le\frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}}<\frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-1+1)s^m}$$

我们最后进行放缩：与第三式相同可知

$$\lim_{n_0\to\infty}\frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}}<\frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-m+1)s^m}=0$$

从而对任何 $\varepsilon>0$，存在 N_0 使得 $n_0>N_0$ 时

$$\frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}}<\frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-m+1)s^m}<\varepsilon$$

而当 $n>\mathrm{e}^{N_0+1}$ 时即可保证 $[\ln n]>N_0$，从而取 $N=[\mathrm{e}^{N_0+1}]+1$ 即可得到 $n>N$ 时

$$\left|\frac{t^c}{(1+s)^t}\right|=\frac{t^c}{(1+s)^t}<\frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-1+1)s^m}<\varepsilon$$

这已经符合极限为 0 的定义。

* 虽然这个过程看似有些复杂，我们实际上是**通过放缩将非整数情况转化为了整数情况**。这其实也是一种阶估算：我们有自信在加 1 或减 1 时不会影响极限。此技巧在证明函数极限时将大量使用。

我们可以用 $\gg$(读作 "**远大于**") 表示无穷大的阶数更高，利用定义可知上述讨论即代表

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^b \gg \ln^c n$$

* 若 $a_n \gg b_n$、$b_n \gg c_n$，利用极限乘法可直接由定义得到 $a_n \gg c_n$，由此写出连续的远大于号是合理的。

必须注意的是，**不是任何两个无穷大都有高低阶关系** (对无穷小自然也同理)。考虑 a_n 奇数项为 n，偶数项为 $\sqrt{n}$，$b_n = n$，由于极限 $\frac{a_n}{b_n}$、$\frac{b_n}{a_n}$ 均不存在，这两个无穷大不存在高低阶关系。

2.4.2 多项式的用处

之前对阶相关结论的证明中，我们其实已经大量应用到了阶估算的结果：**题 10** 中，我们发现对于无穷大，低阶项在与高阶项相加时可以忽略，**题 11** 中，为了说明指数函数的阶高于幂函数，我们也通过阶找到了二项式展开中合适的项进行放缩。

事实上，阶估算最大的作用在于**等价替换**，不过也要小心替换的过程，一个通用的说法是**仅当乘除法时可以替换**，我们将以例题说明：

题 12. 若关于 n 的两个函数 $f(n)$、$g(n)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

计算其他极限时何时可以将 $f(n)$ 替换为 $g(n)$？

解答:

我们先说明对任何 $h(n)$，极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)}$$

的情况相同 (即同时存在或不存在，若同时存在则极限相同)。

若已知左侧极限存在，利用乘除极限结论可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)}$$

同理，若已知右侧极限存在也能得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)}$$

由此，任一极限存在都能得到两极限存在且相等，即得到了情况相同 (否则只能均不存在)。

同理，对任何 $h(n)$，极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{f(n)}$ 与 $\lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{g(n)}$ 情况相同。

其他情况一般不能替换，如考虑 $f(n) = n + 1$、$g(n) = n$，则极限

$$\lim_{n\to\infty} (f(n) - n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} (g(n) - n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right)^n = \mathrm{e}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{g(n)}{n} \right)^n = 1$$

情况并不相同。

利用乘除极限结论可得，若 $f(n)$ 是比 $g(n)$ 高阶的无穷大，则 $f(n) + g(n)$ 是与 $f(n)$ **等价**的无穷大，这是涉及无穷大的**常见替换方式**，也即所谓的 "可以直接扔掉低阶无穷大" 背后的理论依据。在涉及函数极限时，我们会进行更多这样的讨论。

不过，即使并不是直接用到阶的题目，阶相关的思想也可能很有用，我们就以自然常数 e 相关的证明过程为例，来看看如何想到这样一些看起来颇为 "不自然" 的证明。

题 13. 证明以下极限存在 (此即定义为 e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

解答:

首先，**尝试计算几项**后可以发现此数列是单调上升的，因此可以**猜测**其单调有界，并尝试证明：

– **单调性**

证明单调性也即要证对任何正整数 n 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

* 此时一个直观的想法是写成 $\frac{(n+1)^n}{n^n} \le \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$，并进一步化为 $(n+1)^{2n+1} \le n^n(n+2)^{n+1}$。但是，由于 $n(n+2) < (n+1)^2$，我们放缩过程中很容易导致不等号反向，只能暂时放弃这样的思路。

* 另一方面，如果考虑两边的二项式直接展开，可以发现左侧前两项 1、$\frac{C_n^1}{n}$ 与右侧前两项 1、$\frac{C_{n+1}^1}{n+1}$ 完全相同，由此可以想到**展开对比系数**。这样的展开事实上也是某种阶的思想。

直接展开可知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

为了能看到各项系数的实际情况，我们将组合数展开并单独提取常数部分，将它进一步化简为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

可以发现，每项系数确实可以写为类似的形式，同理改写最后一项得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{n^{n-1}}$$

同理可以写出

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n}{n+1} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\cdots 2}{(n+1)^{n-1}} + \frac{1}{(n+1)!}\frac{n!}{(n+1)^n}$$

直接计算可发现 (这或许会称为**糖水不等式**) $0 < a < b$ 且 $c > 0$ 时有 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$，从而下方每个对应项都将大于上方，且下方还多出一项，这就证明了单调性结论。

* 这部分证明的核心思路仍然是**二项式展开后对比同次项**，而这个思路即很大程度来自于阶估算的经验——即使此处所有项对 n 而言的阶数实际上都是零阶。

– **有界性**

在上方的展开中，由于每个阶乘项后面乘的数都小于 1，我们可以得到一个直接的估算

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

那么，只要右侧有上界，自然就可以得到左侧有上界，从而有界 (左侧存在下界 0)。

在**题 11** 中，我们已经发现阶乘的增长速度远大于指数，而当 $|q| < 1$ 时，以 q 为公比的等比数列求和是有界的 (可以直接从求和公式中得到)，这就提示我们可以考虑**放大为等比数列**。实际上这个过程并不困难：当 $n \ge 2$ 时，利用定义可发现 $n! \ge 2^{n-1}$，从而有

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

从而对任何 n 都有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$，这就得到了证明。

* 此处有界性证明实际上是单调性证明**过程中**自然出现的。如果不采取这种方法证明有界性，将面临更复杂的说明。

* 放大为指数函数是最简单的有界性估算，但现实中的有界性估算往往会更加困难。学习**积分**后，我们将看到怎么用更精确的方式得到一些有界性结论。

有了这样的思想，我们就可以完成一个 e 相关的更复杂的证明，也就是 e 与阶乘倒数求和极限实际上相等：

题 14. 证明 (定义 $0! = 1$)

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

解答：

在**题 13** 中，我们已经证明了右侧数列是有界的 (它不会超过 3，且大于 0)，且由于它的每一项是前一项加一个正数 $\frac{1}{n!}$，它必然也是单调上升的。由此，右侧极限的确存在。

此外，我们已经得到了

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

由于**两侧极限都存在**，同取极限即得到

$$\mathrm{e} \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

* 注意这个所谓的**保序性**结论必须在两侧极限都存在时才能使用。

由此我们只需要证明

$$\mathrm{e} \ge \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

回到之前的表达形式，我们可以用求和写为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$$

可以发现，固定 k，每一项在 n 趋于无穷时极限都是 $\frac{1}{k!}$。但很遗憾的是，这里有**无穷多项**，而这样的求和**不能先对每项求极限**——否则考虑 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$，此求和对任何 n 都为 1，但若先对内部取极限，可以得到极限为 0，结果是荒谬的。

好消息是，我们只需要证明大于等于，而这是可以丢弃项的，哪怕是**无穷多项**：对任何 M，由上式可得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{M}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$$

两侧趋于无穷 (这时即成为了 $M+1$ **个数求和**，不再存在对每项求极限的问题) 即得到

$$\mathrm{e} \ge \sum_{k=0}^{M}\frac{1}{k!}$$

由于这对任何 M 成立，上式两侧同时**对 M 取极限**得到

$$\mathrm{e} \ge \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

这就证明了结论。

事实上，刚才我们用了一种看起来很奇怪的技巧：**将一次极限转化为两次极限过程**。事实上，这种技巧可以进一步推广到更一般的情况：

题 15 (**附加**). 考虑有两个下标的“二重数列” $a_{n,k}$。我们进行如三个假设：

1. 对任何自然数 n、k 有 $a_{n,k} \geq 0$；
2. 固定任何 k，$a_{n,k}$ 对 n 单调递增且有界 (由此极限存在)，设

$$\alpha_k = \lim_{n\to\infty} a_{n,k}$$

3. 求和 $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k$ 对 m 有上界。

则有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}$$

* 为了方便起见，我们可以将 $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}$ 记作 $\sum_{k=0}^{\infty}$，由此上式可以简单写为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}a_{n,k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}$$

解答：

– **分析**

我们有必要先看看这个奇怪的定理是怎么回事。在刚说过无穷多项求和不能先对每项求极限以后，这个定理事实上给出了**能先对每项求极限**的一个充分条件。

为了说明这的确是我们之前对**题 14** 采取的证明方式的推广，我们令

$$a_{n,k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$$

可以发现它的确满足定理要求的三个条件 (这里 α_k 即为 $\frac{1}{k!}$)，而此时结论式的左侧为

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$$

右侧由于 $a_{n,k}$ 在 $k > n$ 时均为 0，实际上

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k} = \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}$$

进一步计算即得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

从而这就是**题 14** 的结论。

– **极限存在**

既然这与**题 14** 本质是同一个结论，我们将以相同的方式证明。首先要证明的就是涉及的极限都存在。

先看左侧，由于已知所有 $a_{n,k}$ 非负，利用极限保序性即得所有 α_k 非负，从而左侧的求和 $\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$ 对 m 单调增且有下界 0，又由有上界可知极限存在。

对右侧的极限，利用 $a_{n,k}$ 单调性可知 $a_{n,k}\le\alpha_k$ 对任何 n 成立，从而

$$\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

于是利用左侧极限存在即有

$$\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\le\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

由于 $\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}$ 对 m 单调增加且有界，极限

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}$$

必然存在。进一步地，利用每一项的大小关系，由极限保序性得上述极限对 n 单调增，且对任何 n 都有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

这就说明了 $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}$ 对 n 单调递增且有上界，又由其有下界 0 可知极限存在。

– ***左*** $\ge$ ***右***

上述过程中已经得到了对任何 n 都有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

两侧同时对 n 取极限，由于已经证明了极限存在，利用保序性即有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

– ***右*** $\ge$ ***左***

我们仍然采用**截断有限项**的方法。利用定义，对任何自然数 M 有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\ge\sum_{k=0}^{M}a_{n,k}$$

从而可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\ge\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{M}a_{n,k}=\sum_{k=0}^{M}\alpha_k$$

由于上式对任何 M 成立，两侧同时对 M 同取极限得证。

* 请体会证明方法与**题 14** 的类似处 (如果大家能理解其中逻辑，事实上是几乎**一模一样**的，可以代入第一部分的具体例子操作)，这事实上是从具体的问题走向抽象的“为何可交换”的推广。

* 可以发现，这里可以交换的本质是存在某种**单调性**，与 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$ 的总量递增、每项递减不同。这事实上是实分析中**单调收敛定理**的一个特例，因此在高等数学课程中几乎不会再出现用到这样技巧的证明。

* 另一方面，试图利用阶估算避免此技巧的尝试很难成功，从这题中也能看出本质问题在于这里有一个**两次极限**的过程，因此估计单个变量的阶很难处理的。

最后，让我们用**题 14** 的结论来证明一个有意思的事实：

题 16 (附加). 证明 e 是无理数。

解答:

首先，我们需要从形式

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

中分析出 e 是无理数的原因。直观来说，无论分母取得多大，e 都会落入比它更“精细”的范围内。在这个想法下，我们利用**反证法**，试图先寻找一个基本的范围，再将它更加精细化。

为了让分母能写成**阶乘**的形式，假设 e 是有理数，我们不妨设

$$\mathrm{e}=\frac{m}{n!},\quad m\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}^*$$

上述设法是合理的，因为只要 $\mathrm{e}=\frac{p}{q}$，即可使得 $\mathrm{e}=\frac{(q-1)!p}{q!}$，这样分母就成为了阶乘形式。

我们接下来证明“精细”的部分，也即对任何正整数 n 有 (利用单调有界数列存在极限，左侧的极限是存在的)

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!}<\frac{1}{n!}$$

这个估算其实并不困难，我们可以将左侧提取出 $\frac{1}{n!}$ 写成

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)}$$

类似之前，如果直接放缩，当 n 为正整数时，乘积中的每项都至少为 2，因此可得 (右侧的等号来自等比数列求和)

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)}\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2^{k-n}}=\frac{1}{n!}$$

但是，这样的方法只能说明小于等于号成立，为了进一步说明，我们只将 $n+1$ 缩小为 2，从 $n+2$ 开始的项缩小为 3，可以得到

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)}\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2\cdot3^{k-n-1}}=\frac{3}{4n!}<\frac{1}{n!}$$

这样就成功证明了。

* 这种**放缩中调整**的技巧是非常重要的。

最后，我们将开始的**直观感受改写成结论**。由于

$$\frac{m}{n!}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$$

将右侧求和中到 $\frac{1}{n!}$ 的项移到左侧 (事实上利用了每项减去常数后极限也减去了常数) 可得

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!}=\frac{m}{n!}-1-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{n!}$$

由于右侧的所有分母都是 $n!$ 的因数，右侧必然可以写为分母为 $n!$ 的分数，但左侧在 0 与 $\frac{1}{n!}$ 之间，不可能是分母为 $n!$ 的分数，矛盾。

之后介绍函数极限时，我们将更明确给出无穷大、无穷小的含义，并展现阶估算的更多价值。

三　函数极限

本次习题课从连续函数出发，主要介绍了函数极限的概念、连续函数相关性质与证明，并证明了初等函数连续性，知识基础为函数极限定义与一些基本的极限结果。

§3.1　作业解答

1. (习题 1.3.7) 计算极限：

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}$$

解答：

利用**幂函数的连续性**与**归结原理**有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$$

* 这两个依据做题时无需明确写出，但必须有意识，否则可能在无法直接使用时犯错。对这两个依据的详细解释可见本章后续的内容。

* 一个不需要用之后知识的看法是将其看成 $(1+1/n)^n$ 乘自身后作倒数，这样就可以用乘除极限得到此结论。

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

解答：

例题中已经证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

由此存在 N 使得 $n>N$ 时

$$\mathrm{e}-\varepsilon<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}+\varepsilon$$

取 $\varepsilon=0.01$，则左右均 $\in(0,1)$，此时

$$(\mathrm{e}-\varepsilon)^n<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}<(\mathrm{e}+\varepsilon)^n$$

令 $n\to\infty$，则左右侧极限均为 0，利用**夹逼定理**可知中间极限为 0。

* 在学过函数极限后，这题有更简单的做法，但**直接看作** $(\mathrm{e}^{-1})^n$ **并取极限是错误的**，因为这无法通过极限加减乘除或连续性得到。学完函数极限后，通过取 ln，这题可以有更直接的做法。

(6)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

解答：

直接利用乘积极限可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}=1$$

* 注意通过这三问可以看出，当 $n \to \infty$ 时，若 $a_n \to 1$、$b_n \to \infty$，$a_n^{b_n}$ 的极限可能是 0、1 或其他有限数 (事实上也可能是无穷)，这也进一步说明了直接将 a_n 或 b_n 替换为极限是不可取的。

2. (习题 1.3.8) 通过单调有界性证明下列极限存在：

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

解答：

由于此数列每一项比前一项增加了 $\frac{1}{n^2} > 0$，其单调增，又由其为正，有下界 0，只需证明有上界。

这里需要用到一个常见**裂项**技巧

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

由此可知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

这就证明了上界存在。

* 这类问题的更本质判定方法需要在学了**积分**以后介绍。

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

其中 0! 定义为 1。

解答：

见本讲义 2.4.2。

3. (习题 1.3.9) 证明

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

解答：

见本讲义 2.4.2。

4. (习题 1.3.10) 设序列 x_n 满足条件

$$|x_{n+1}| \le k|x_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

其中 $k \in (0,1)$，证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

解答：

由条件归纳可知

$$|x_n| \le k^{n-1}|x_1|$$

也即

$$-k^{n-1}|x_1| \le x_n \le k^{n-1}|x_1|$$

由于 $k \in (0,1)$，$n \to \infty$ 时 $k^n \to 0$，而上方左右均为 k^n 乘常数，从而极限为 0，利用**夹逼定理**可知中间极限为 0。

5. (1.4 节定理 3) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是定义在点 a 的某空心邻域内的函数，且

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to a} g(x) = l_2$$

若 $l_1 > l_2$，则存在 $\delta > 0$，使得只要 $0 < |x-a| < \delta$ 即有

$$f(x) > g(x)$$

解答:

由极限定义，存在 δ_1、δ_2 使得

$$\forall 0 < |x-a| < \delta_1, \quad |f(x) - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2}$$

$$\forall 0 < |x-a| < \delta_2, \quad |g(x) - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2}$$

由此取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，即有 $0 < |x-a| < \delta$ 时 (对上方两式利用三角不等式处理)

$$f(x) > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2} > g(x)$$

6. (1.4 节定理 4) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是定义在点 a 的某空心邻域内的函数，且空心邻域内满足 $f(x) \geq g(x)$，若当 $x \to a$ 时函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的极限均存在，则

$$\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$$

解答:

若否，与上一题同理可知存在 δ 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 时 $f(x) < g(x)$，与条件矛盾。

7. (1.4 节例 10) 设 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数，讨论

$$\lim_{x\to a} xD(x)$$

的存在性。

解答:

当 $a = 0$ 时，由 $D(x)$ 定义可知

$$-|x| \leq xD(x) \leq |x|$$

从而利用夹逼定理得极限存在为 0。

当 $a \neq 0$ 时，利用有理数、无理数的稠密性 (证明可见本讲义 2.3.1)，对每个正整数 n，存在 b_n、c_n 使得

$$b_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right), \quad c_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$$

则根据 $D(x)$ 定义有 $b_n f(b_n) = b_n$，$c_n f(c_n) = 0$。

另一方面，根据定义利用**夹逼定理**可得

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

而由上方计算有

$$\lim_{n\to\infty} b_n f(b_n) = a, \quad \lim_{n\to\infty} c_n f(c_n) = 0$$

从而利用**归结原理**反证可知极限不存在。

* 注意证明 $\lim_{x\to a} xD(x) \neq aD(a)$ 只能说明 a 处**不连续**，无法说明**极限不存在**。

* 利用归结原理是极限不存在的常见说明方式。

8. (习题 1.4.1(2)) 用定义证明函数极限

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2$$

解答:

直接计算可知

$$|x^2-a^2| = |x-a||x+a|$$

对任意 $\varepsilon>0$，要使 $|x-a||x+a|<\varepsilon$，分别控制两项：第二项只要 $|x-a|<|a|+1$ 即不超过 1，此时只需控制第一项，当 $|x-a|<\frac{\varepsilon}{2|a|+1}$ 即符合要求。
由此，取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{2|a|+1}\}$，则此时只要 $|x-a|<\delta$ 即有

$$|x^2-a^2| < (2|a|+1)\frac{\varepsilon}{2|a|+1} < \varepsilon$$

从而得证。
* 注意放缩时不能保证 $|x-a|<|a|$，因为**无法保证** a **非零**。这些细节的严谨性必须注意。

9. (习题 1.4.3) 计算极限：

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

解答:

利用二倍角公式即得

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

从而令 $t=\frac{x}{2}$ 可换元得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(2t)}{4t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{2t^2}$$

利用 $\frac{\sin x}{x}$ 在 0 处极限为 1 与乘积极限即得此极限为 $\frac{1}{2}$。
* 关于**换元**的更严谨讨论见下一章的后续内容，这本质上其实应用了复合函数的极限结论。

(7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

解答:

与之前类似，利用**分子有理化**技巧应对根号作差可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

由于右侧在 $x=0$ 时为 1，利用**初等函数连续性**可知极限也为 1。

10. (习题 1.4.4) 利用

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

计算极限：

(5)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

解答:

先换元到 0 处，令 $t=x-a$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(a+t)-\sin a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin a\cos t+\cos a\sin t-\sin a}{t}$$

将 $\cos a$ 部分单独提出，利用 $\frac{\sin x}{x}$ 在 0 处极限为 1 可将上述极限写为

$$\cos a+\sin a\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}$$

由于已证 $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$，有

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}=\lim_{t\to 0}(-t)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

从而原极限即为 $\cos a$。

* 另一个做法是利用和差化积公式将 $\sin(a+t)-\sin a$ 展开为乘积后换元。

(7)

$$\lim_{y\to 0}(1-5y)^{1/y}$$

解答:

先换元到 ∞ 处，令 $t=\frac{1}{y}$，则

$$\lim_{y\to 0}(1-5y)^{1/y}=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{5}{t}\right)^t$$

为了凑出 $1+\frac{1}{s}$ 的形式，令 $s=-\frac{t}{5}$，进一步换元得到

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{5}{t}\right)^t=\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{-5s}=\lim_{s\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right)^{-5}$$

利用**幂函数的连续性**即得此极限为 e^{-5}。

* 这里的两次换元成立性其实并没有想象中容易看出，至少并不在之前讨论过的复合函数极限的范畴内，因为它涉及了**无穷处的极限**。下一章将讨论推广的复合函数极限结论如何得到这类换元的合理性。

11. 求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{a^x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x^\beta}$$

其中 $a>1$、$\beta>0$。

解答:

本讲义 2.4.1 中已经证明了对任何 $a>1$、$b>0$、$c>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^c n}{n^b}=0$$

我们现在尝试将其**推广**到函数极限，证明对任何 $a>1$、$b>0$、$c>0$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^c x}{x^b}=0$$

这样本题的结论实际上为其特例。仍然从前往后证明：

– 第一式

为了将数列极限推广到函数极限，我们需要将函数**放缩**为数列。一个简单的想法是，我们可以将分母缩小、分子放大到**最近的整数**，也即

$$\frac{x^b}{a^x}\le\frac{([x]+1)^b}{a^{[x]}}$$

这里 $[x]$ 仍然表示不超过 x 的最大整数。

为了进行对右侧的估算，我们还需要先证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^b}{a^n}=0$$

这件事的证明与对 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0$ 的证明完全相同，因此不再详细写出：利用**阶估算**的想法，将 a^n 二项式展开出超过 b 次的项，再分子分母同除以 n 的对应次方即可。

由此，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N 使得 $n>N$ 时

$$\left|\frac{(n+1)^b}{a^n}\right|<\varepsilon$$

而当 $x>N+1$ 时 $[x]>N$，从而 $x>N+1$ 时

$$\left|\frac{([x]+1)^b}{a^{[x]}}\right|<\varepsilon$$

利用无穷处极限的定义，我们即可以得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{([x]+1)^b}{a^{[x]}}=0$$

而由于 $\frac{x^b}{a^x}>0$，进一步通过**夹逼定理**可知所求极限存在，为 0。

– 第二式

我们这里通过一个直观的换元进行证明：令 $t=\ln x$，由于 $x\to+\infty$ 时 $\ln x\to+\infty$ (这可以方便地由定义说明，只要 $x>\mathrm{e}^M$ 即保证 $\ln x>M$)，利用第一式，由 $\mathrm{e}^b>1$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^c x}{x^b}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^c}{\mathrm{e}^{tb}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^c}{(\mathrm{e}^b)^t}=0$$

从而得证。

* 同样，对换元严谨性的讨论见下一章。

§3.2　连续函数

3.2.1　连续与函数极限

在聊完数列极限后，我们即需要开始讨论函数极限。与上次习题课不同，这次习题课我们将更关注**基础性**的内容，例如给连续函数介值定理、闭区间连续函数有最值、初等函数连续性这些**看似自然**的结论补充证明。我们这么做是由于，数学上，如果直接默认看似自然的结论，很可能会带来严重的错误——例如，只凭直观是很难理解“处处连续处处不可导的函数”的存在性的。因此，我们必须在**证明**，或至少**理解证明思路**，才能承认一个结论。

在叙述并证明这些结论前，我们需要先聊聊函数极限出现的理由。事实上，**连续性**应当是一个比**函数极限**更自然的命题。函数 f 在点 x_0 连续的定义如下 (我们假定存在一个包含 x_0 的开区间使得函数有定义)：

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta>0,\quad\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\quad|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

直观来说，这个定义是为了让 x 有微小变化时 $f(x)$ 的变化也微小，从而可以对**误差**进行估计。

* 举一个简单的例子，当我们计算一个人跑步速率时，我们将使用公式 $v=\frac{s}{t}$，这里 s 代表路程，t 代表时间。但是，由于现实中的测量是有误差的，我们事实上无法得到真实的 s 与 t，只能得到某个 $s+\Delta s$、$t+\Delta t$。如果我们希望公式的结果有效，自然也就希望当 Δs、Δt 不大时，测量出的 $\frac{s+\Delta s}{t+\Delta t}$ 也能与真实的 $\frac{s}{t}$ 相差不大，也即**自变量变化微小时因变量变化也微小**——而这就是连续性的重要定义动机。

但是，如果只有连续性的定义，将出现两个问题：

1. 若函数的定义域不为开区间，上述的 “连续” 概念会在一些点难以谈论。例如，对于 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x$，我们自然希望它是连续的，但对**端点** 0 与 1，上述的定义并不适用。

2. 即使函数的定义域是开区间，我们有时也希望极限的概念能在**函数未定义的点谈论**。例如，对于函数 $\frac{\sin x}{x}$，由于分母为 0，其在 0 点没有定义，但作图可以发现，图像在 0 处的左右两侧会在 1 的高度 “连接” 上，由此我们希望此时也能定义 “极限” 为 1 解决这个问题。

当然，我们已经学习到，为了解决第二个问题，我们定义的函数极限需要**挖去中心点**，$f(x)$ 在 x_0 处极限为 l 时的真正定义是：

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall 0<|x-x_0|<\delta,\quad |f(x)-l|<\varepsilon$$

当 f 在 x_0 处有定义且 $l=f(x_0)$ 时，我们才称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。
* 这里连续性的定义与上方的连续性定义等价性是**需要验证**的，虽然验证过程并不困难，写出两种定义即可由 $|f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon$ 直接推得。

而为了解决第一个问题，我们的答案是定义**单侧极限**，如 $f(x)$ 在 x_0 处**右极限**为 l (直观来说即**从右侧逼近**) 的定义是

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x\in(x_0,x_0+\delta),\quad |f(x)-l|<\varepsilon$$

而**左极限**为 l 的定义是

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0),\quad |f(x)-l|<\varepsilon$$

* 另一个值得验证的结论是，$f(x)$ 在 x_0 处极限为 l **当且仅当**左右极限均为 l。从极限定义推出左右极限定义是直接的，而从左右极限为 l 推出极限为 l 需要对 $\varepsilon>0$ 在两边得到的 δ 中取最小值。

本讲义对左/右极限的记号是上标 $-$ 与 $+$，即左极限、右极限分别表示为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=l,\quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=l$$

由此，对于闭区间 $[a,b]$ 上的函数，它的左端点处只能从右侧逼近，因此以

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$$

定义它的连续性 (这对一般的点称为**右连续**)；同理，右端点只能从左侧逼近，因此以左连续定义它的连续性。由此，我们可以给出任何**区间上连续函数**的定义。

至此，我们终于搞清楚了有限点处的有限极限，之后，我们将通过对左/右极限定义的进一步讨论将极限点与极限值推广到**无穷**的情况，本章将只讨论有限的情况。

3.2.2 归结原理

在给出了函数极限的定义后，我们首先希望函数相关的结论能在**数列极限**中使用。例如，有了初等函数连续性结论，我们可以直接得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+\mathrm{e}^x}{\ln(x+1)+x^2+\cos x}=2$$

那么，我们能否以此直接进行 “换元” 得到数列极限结论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}+\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)+\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}=2$$

呢？

答案是肯定的，这就是所谓**归结原理**的一部分，它可以直接用函数结论解决数列极限问题：

题 17. 证明若

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

则对任何满足 $a_n \neq a$ 的数列 a_n，若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

则

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$$

进一步地，若 $b = f(a)$，$a_n \neq a$ 的限制可以去除。

解答：

- **分析**

  直观来说，这个定理说明了如果函数在 $x \to a$ 时极限为 b，对任何逼近 a 的数列，函数值也将逼近 b。这确实是一个较自然的结论，而想进行证明首先还是需要写出**定义**，并从条件的定义与结论的定义中找到目标。

  题中三个式子的定义分别为

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n > N, \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n > N, \quad |f(a_n) - b| < \varepsilon$$

  根据形式可以发现，将第二个定义中的 ε 取为第一个定义中的 δ，即可推出第三个定义中的 ε 可取为与第一个定义相同。由此可以得到证明思路。

- **原命题证明**

  对任何 $\varepsilon > 0$，由条件可取 $\delta > 0$ 使得只要 $0 < |x - a| < \delta$，即有 $|f(x) - b| < \varepsilon$，再由条件取 N 使得

  $$\forall n > N, \quad |a_n - a| < \delta$$

  利用 $a_n \neq a$ 可知

  $$\forall n > N, \quad 0 < |a_n - a| < \delta$$

  这就得到了

  $$|f(a_n) - b| < \varepsilon$$

  符合数列极限定义。

- **进一步证明**

  若 $b = f(a)$，连续性满足，定义可改写为

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall |x - a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

  由此对任何 $\varepsilon > 0$，取出 $\delta > 0$ 使得只要 $|x - a| < \delta$，即有 $|f(x) - b| < \varepsilon$，再由条件取 N 使得

  $$\forall n > N, \quad |a_n - a| < \delta$$

  这就得到了

  $$|f(a_n) - b| < \varepsilon$$

  符合数列极限定义。

此命题的逆否命题事实上也很常用，即只要找到了 a_n 趋于 a 使得 $f(a_n)$ 极限不存在，或两列趋于 a 的 a_n 极限不同，即可说明 $f(x)$ 在 a 处**极限不存在**，无需再回到基本定义。

反过来，数列极限是否可以解决函数极限问题呢？答案也是肯定的，这就是**归结原理**的另一部分 (事实上是上一部分的逆命题)：

题 18. 若对任何满足 $a_n \neq a$ 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

的数列 a_n 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$$

则

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

进一步地，若去除 $a_n \neq a$ 的限制，还可得到 $b = f(a)$，即 f 还在 a 点连续。

解答：

- **分析**

  以 "任何满足条件的数列极限均为 b" 作为条件是很难推出可用的结论的，因此我们需要尝试**反证**。

  对于这题来说，反证也即假设 $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$，找到数列 a_n 满足

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$$

  具体的构造思路仍然需要从定义中研究，必须注意的是，正如之前讨论过的，对数列的构造不需要**显式给出**，只需要**利用存在性保证可以符合要求**即可。

- **原命题证明**

  反证。若 $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$，根据之前讨论过的命题否定构造可知

  $$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x, 0 < |x-a| < \delta, \quad |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

  取出符合要求的 δ，对 $\delta = \frac{1}{n}$ 取出上方要求的 x 记为 a_n，则根据条件有

  $$a_n \neq a, \quad a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$$

  这就说明了数列 a_n 满足

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

  此外，由于所有 a_n 都满足 $|f(a_n) - b| \geq \varepsilon$，利用数列极限定义，取定 ε 与上述相同可知 $f(a_n)$ 极限不为 b，得证。

- **进一步证明**

  由于去除 $a_n \neq a$ 的限制事实上**加强**了条件 (即可以推出原条件)，原命题结论

  $$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

  已经满足。

  取定 a_n 为全为 a 的数列，利用条件即得 $f(a) = b$，得证。

3.2.3 介值定理

接下来，我们要用归结原理证明一个相对复杂 (但十分直观) 的结论，也即书上没有明确证明的**介值定理**。

题 19. 证明，若连续函数 $f(x)$ 定义在包含 $[a,b]$ 的区间上，则对任何一个在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的 t (若 $f(a)<f(b)$ 则 $t\in[f(a),f(b)]$，反之 $t\in[f(b),f(a)]$)，存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=t$。

解答:

若 $f(a)=f(b)$，此时 t 只能为 $f(a)=f(b)$，取 $c=a$ 即符合要求，于是只需证明 $f(a)\neq f(b)$ 时的情况。由于 $f(a)>f(b)$ 与 $f(a)<f(b)$ 的情况证明几乎完全对称，我们只证明 $f(a)<f(b)$ 的情况，另一情况类似可得。可以进一步假设 $f(a)<t<f(b)$，否则若 $t=f(a)$ 直接取 $c=a$ 即可，若 $t=f(b)$ 直接取 $c=b$ 即可。

根据以上讨论，我们假定了 $f(a)<t<f(b)$，接下来的证明过程相对复杂，分为以下步骤:

– **分析与构造**

既然我们的目标是**找到**符合要求的 c，我们需要有一种构造 c 的方式。对于连续函数 $f(x)$，找函数值等于 t 的点往往需要通过**二分法**进行，这可以启示我们进行如下的构造:

取 $x_1=\frac{a+b}{2}$，进行如下的迭代

$$x_{n+1}=\begin{cases}x_n+\frac{b-a}{2^{n+1}} & f(x_n)\le t\\ x_n-\frac{b-a}{2^{n+1}} & f(x_n)>t\end{cases}$$

我们对这个迭代进行几点讨论:

1. 首先，直接计算可知

$$x_{n+1}\le\frac{a+b}{2}+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(b-a)=b-\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$$

同理 $x_{n+1}\ge a+\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$，从而可以得到每一次迭代后确实在 (a,b) 范围内。

2. 由此，若某次迭代后 $f(x_n)=t$，我们已经找到了符合要求的 $c=x_n$，因此不妨设所有等号均不成立，也即**每次迭代后函数值均未与 t 严格相等**。

3. 直观上来说，这个迭代在进行的过程是，若当前比需要的值更大，我们就向左寻找到左侧区间的中点，否则像右寻找到右侧区间的中点，这就是所谓的**二分法**过程。即使 $f(x)$ 并不单调，这样的迭代从直觉上来说也一定可以找到 $f(x)=t$ 的某个根 (因为每次都在一端比 t 大一端比 t 小的区间中找)，大家可以自己简单画图进行尝试。

由于 f 在 $[a,b]$ 是连续函数，利用**归结原理**，只要极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，我们设此极限为 c，即有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$$

我们下面需要证明的也即 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在与 $f(c)=t$，这样，上面定义的 c 就是符合要求的点。

– **$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在**

从直观来说，既然每步的步长都在减半，最终 x_n 一定能落到某个点附近。但是，这件事的证明并不简单，因为我们无法知道 x_n 的**极限**，且此数列未必单调，无法利用**单调有界**定理。为此，我们提供两种不同的证明方式，分别是从**猜测极限**与**利用单调有界**出发的，大家可以挑选自己喜欢的方式证明，这里我们仅会用到条件

$$|x_{n+1}-x_n|=\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

1. (**附加**) 利用**题 6** 中证明的，我们知道 x_n 必然有一个子列 $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots$ 极限存在，设此极限为 c，我们下面证明 x_n 极限也为 c。
由条件可知对任何 $\varepsilon > 0$，存在 K 使得 $k > K$ 时
$$|x_{m_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$
另一方面，对任何 $n > m_k$ 有
$$|x_n - x_{m_k}| \le \sum_{t=m_k}^{n-1} |x_{t+1} - x_t| = \left(\frac{1}{2^{m_k}} - \frac{1}{2^n}\right)(b-a) < \frac{1}{2^{m_k}}(b-a)$$
由此，可取 K_0 使得 (由子列定义 $m_{K_0} \ge K_0$)
$$\frac{1}{2^{m_{K_0}}}(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}$$
则 $k > K_0$、$n > m_k$ 时必有 $|x_n - x_{m_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (由子列定义 m_k 随 k 单调增)。
综合以上，令 $N = m_{\max\{K, K_0\}+1}$，即有 $n > N$ 时
$$|x_n - c| \le |x_N - c| + |x_n - x_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
* 此处**利用子列猜测极限**是一个相对复杂但有用的估算方式，不过这里并不如下一种做法简单。
2. 首先，如果 x_n 一直在增加，我们可以直接算出其极限结果为
$$\lim_{n\to\infty}\left(x_1 + \frac{b-a}{4} + \frac{b-a}{8} + \cdots + \frac{b-a}{2^{n+1}}\right) = x_1 + \frac{b-a}{2}$$
由此可以想到，我们不再直接考虑 x_n，而是考虑一直增加的数列与 x_n 作差。
具体来说，令 $y_1 = x_1$，且
$$y_{n+1} = y_n + \frac{b-a}{2^{n+1}}$$
上方计算已经说明了 y_n 极限存在。
再令 $z_n = y_n - x_n$，由于
$$z_{n+1} - z_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} - (x_{n+1} - x_n)$$
它或为 $\frac{b-a}{2^n}$，或为 0，因此 z_n 单调上升，且
$$z_{n+1} = z_1 + (z_2 - z_1) + \cdots + (z_{n+1} - z_n) \le 0 + \frac{b-a}{2} + \cdots + \frac{b-a}{2^n} < b-a$$
从而 z_n 是单调非负且有上界的数列，其极限存在，因此由
$$x_n = y_n - z_n$$
可知 x_n 极限存在，得证。
* 这里我们用了一个奇妙的技巧，**将未必单调的数列拆成单调数列作差**。这个技巧的本质来源也在实分析中，不过利用此方法可以证明，只要极限
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|x_{k+1} - x_k|$$
存在，数列 x_n 极限也必然存在。

在之后的证明中，我们设

$$c=\lim_{n\to\infty}x_n$$

利用 f 的连续性与**归结原理**可知极限

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$$

因此只需证明 $f(c)=t$

- $f(c)=t$

这里我们采取**反证法**，假设 $f(c)<t$ 推出矛盾。若 $f(c)>t$，可以以相似的方法推出矛盾。这又分为三步：

1. x_n 不可能单调上升
   若 x_n 一直单调上升，也就意味着对每个 n 都有

   $$f(x_n)<t,\quad x_{n+1}=x_n+\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

   此时直接计算可发现

   $$c=\lim_{n\to\infty}x_n=b$$

   将 $f(x_n)<t$ 两侧同取极限即得

   $$f(b)\le t$$

   这与条件 $f(a)<t<f(b)$ 矛盾。
2. x_n 从某一项后单调上升
   由于我们已经知道了

   $$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)<t$$

   利用数列极限保序性可知存在 N 使得 $n>N$ 时 $f(x_n)<t$，此后根据 x_n 定义，其必然一直单调增加。
3. 矛盾推出
   由于我们已经知道 x_n 并非一直单调上升，但在某一项后单调上升，它一定存在**最后一次下降**，也即存在正整数 N 满足

   $$x_N<x_{N-1},\quad \forall n>N,\quad x_n>x_{n-1}$$

   但是，直接计算可发现此时 (由 x_n 定义，增加时 x_n-x_{n-1} 必然为 $\frac{b-a}{2^n}$)

   $$\lim_{n\to\infty}x_n=x_N+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=N+1}^{m}(x_n-x_{n-1})=x_N+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=N+1}^{m}\frac{b-a}{2^n}=x_N+\frac{b-a}{2^N}$$

   而另一方面，由于 $x_N<x_{N-1}$，由数列定义必然有

   $$x_N=x_{N-1}-\frac{b-a}{2^N}$$

   对比两式可发现

   $$c=\lim_{n\to\infty}x_n=x_{N-1}$$

   于是可得

   $$f(x_{N-1})<t$$

   但这与数列构造中 $x_N<x_{N-1}$ 需要 $f(x_{N-1})>t$ 矛盾。

* 事实上最后这部分证明可以从图像上直观理解，大家可以尝试进行绘制若 $f(c) < t$，如何从。

* 这题没有标注**附加**，是因为其中的过程与技巧确实都是我们**已经学过**的，只是用法更加复杂。例如，其中证明 x_n 极限存在的部分是一个很好的对“不知道极限时如何证明极限存在”的补充。阅读这样较复杂的证明可以有效加深对学过知识的**应用**的理解。

由此可见，数学上，即使直观的结论证明起来也可能非常复杂 (甚至可能未必正确)，这是由于连续函数可能具有非常差的性态——大家有兴趣可以搜索一下 Weierstrass 函数——不能直接从“图像连线”进行**严谨证明**。

介值定理的最经典应用是，只要连续函数在两个点符号相反，它们之间就存在**零点**，由此可以给出一些对零点的估计，我们之后讲解习题时会涉及。

3.2.4 最值定理

最后，我们再介绍一个很有用的性质，同样是书上未给出严谨证明的，**最值定理**：

题 20 (附加)**.** 证明，若连续函数 $f(x)$ 定义在包含 $[a,b]$ 的区间上，则存在 $c_m \in [a,b]$、$c_M \in [a,b]$ 使得

$$\forall x \in [a,b], \quad f(c_m) \le f(x) \le f(c_M)$$

也即区间上 $f(c_m)$ 为**最小值**、$f(c_M)$ 为**最大值**。

解答：

仍然遵循先分析后证明的思路：

– **分析**

与介值定理不同，此定理无法通过类似“二分逼近”的方式找点，因为我们**无法预判最大值点在什么位置**。由此，必须考虑值域本身，由于介值定理已经满足，我们需要证明**区间上连续函数的值域一定为区间**，再进一步说明其为**闭区间**，就得到了最大值最小值一定存在。

事实上，为了证明此结论，我们还需要一个被称为**确界原理**的定理，它需要从单调有界定理推出，也是实数完备性的等价表述之一。

* 这个技巧本质上来自于**点集拓扑**。

– **任何有上界的集合必有上确界**

对 $\mathbb{R}$ 的**非空**子集 E，这里的上界是指 M 满足

$$\forall x \in E, \quad x \le M$$

而 E 的上确界 M_0 是指 M_0 为 E 的上界，且任何 $m < M_0$ 均不为 E 的上界，也即**最小的上界**。

接下来的证明非常有技巧性，本质想法和上课介绍过的戴德金分割类似，大家欣赏一下即可：

我们默认 $\mathbb{Q}$ 是**可数**的，也即可以排成一个数列 (可以自行搜索对此的证明)，则令 D 是所有作为 E 的上界的有理数，由于 D 是 $\mathbb{Q}$ 的子集，且个数无穷 (由于已知 E 存在上界 M，所有比 M 大的有理数都是 E 的上界，这已经有无穷多个了)，它也可以排成一个数列 $q_1, q_2, \ldots$。令

$$p_n = \min\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$

根据定义可发现 p_n 是单调下降的，其有上界 p_1；且由于 E 非空，假设 $x \in E$，根据上界定义必然所有 $q_n \geq x$，于是所有 $p_n \geq x$，这就得到了 p_n **单调有界**，故极限存在，将极限记为 M_0。最后我们验证 M_0 为 E 的上确界：

1. 由条件，对任何 $x \in E$ 与 q_n，有 $x \leq q_n$，从而对任何 $x \in E$ 与 p_n 有 $x \leq p_n$，利用极限保序性可得 $x \leq M_0$，于是 M_0 是 E 的上界。
2. 对任何小于 M_0 的数 m，若 m 是 E 的上界，根据有理数稠密性可知存在 m 与 M_0 间的有理数，它也是 E 的上界，于是必为某个 q_k，从而对 $n \geq k$ 必然有 $p_n \leq q_k < M_0$，与 p_n 极限为 M_0 矛盾。

– **满足介值定理的函数在闭区间上值域为区间**

设满足介值定理的函数 f 在区间 $[a,b]$ 上值域为集合 E。由于 $f(a) \in E$，E 非空，且利用介值定理，我们知道 E 满足性质，若 E 包含 x、y，且 $x < y$，则 E 包含 $[x,y]$。我们下面证明满足此条件的非空集合一定为区间。这需要相对复杂的分类讨论：

1. 若 E 上界、下界都不存在，则 $E = \mathbb{R}$。
   此时根据定义，对任何 $t \in \mathbb{R}$，存在 $x \in E$ 使得 $x < t$ (否则 t 是下界)，存在 $y \in E$ 使得 $y > t$ (否则 t 是上界)，再利用介值定理即得 $t \in E$，得证。
2. 若 E 上界存在，下界不存在，则 $E = (-\infty, d]$ 或 $E = (-\infty, d)$。
   由 E 上界存在，我们设上确界为 d，利用上界定义可知 $E \subset (-\infty, d]$。若 $d \in E$，与上一种情况完全类似可知 $(-\infty, d]$ 中每一点均可取到，从而 $E = (-\infty, d]$，否则有 $E \subset (-\infty, d)$，我们下面证明等号成立。
   对任何 $t < d$，由上确界定义，t 不为上界，因此存在 $y \in E$ 使得 $t < y$，又由 t 不为下界可知存在 $x \in E$ 使得 $x < t$，再利用介值定理即得 $t \in E$，这就得到了证明。
3. 若 E 下界存在，上界不存在，则 $E = [c, +\infty)$ 或 $E = (c, +\infty)$。
   设 c 为 E 的下确界，证明与上一种情况完全类似。
4. 若 E 上下界均存在，则 $E = (c,d)$ 或 $E = [c,d)$ 或 $E = (c,d]$ 或 $E = (c,d)$。
   设 c 为 E 的下确界、d 为 E 的上确界，根据定义可知 $E \subset [c,d]$，接下来的讨论与第二种情况完全类似。

– **闭区间上连续函数的值域为闭区间**

由于我们已经证明了值域为区间，仍记为 E，为了证明其为闭区间，只需要排除 (半) 开区间与无穷区间的情况即可。我们接下来证明区间的右端不为无穷且不开，左端完全类似即可：

1. 区间右端不为无穷
   若区间右端为无穷，利用定义可知存在正整数 N 使得对所有正整数 $n > N$ 都有 $n \in E$ (只要 N 大于左端即可)。
   由此，利用值域定义可取出数列 $x_i \in [a,b]$ 满足 $f(x_i) = N + i$。由于 x_i 有界，其存在**收敛子列** (**题 6** 附加部分)，设此收敛子列为 $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$，则极限
   $$\lim_{n\to\infty} x_{k_n}$$
   存在，设极限为 x，则利用**归结原理**可知
   $$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x)$$
   但 $f(x_{k_n}) = N + k_n \geq N + n$，利用定义可发现极限不存在，矛盾。
2. 区间右端不开

由于已经证明区间右端不为无穷，我们设其为 d，则右端必然为 d 闭或 d 开，下面证明不为 d 开。

若区间右端为 d 开，利用定义可知存在正整数 N 使得对所有正整数 $n > N$ 都有 $d - \frac{1}{n} \in E$ (只要 $d - \frac{1}{N}$ 大于左端即可)。

由此，利用值域定义可取出数列 $x_i \in [a, b]$ 满足 $f(x_i) = d - \frac{1}{N+i}$。由于 x_i 有界，其存在**收敛子列**，设此收敛子列为 $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$，则极限

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n}$$

存在，设极限为 x，则利用**归结原理**可知

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x)$$

另一方面

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(d - \frac{1}{N+n}\right) = d$$

而 $f(x_{k_n})$ 为其子列，极限与原数列极限相同，这就得到 $f(x) = d$，与 d 不能取到矛盾。

* 取子列的方法某种意义上相对通用——不过还是并不在高等数学范围内。

综合以上，对原命题，我们考虑将 f 的定义**限制**在 $[a, b]$ 上 (也即不考虑 f 在 $[a, b]$ 外的点值)，则可知其值域一定为某闭区间 $[c, d]$。令 c_m 满足 $f(c_m) = c$、c_M 满足 $f(c_M) = d$，可发现即满足要求。

* 当然，若我们默认最值定理成立，利用介值定理可以立刻得到**闭区间上连续函数的值域是闭区间**，这个结论本身还是常用的。

比起介值定理，这个定理从直观上更难理解一些，但仍然是正确的。介值定理与最值定理的重要性在于，它们说明了**将逐点的连续性推广到区间上后获得的性质**，超越了连续性定义在**每点附近**的限制。

§3.3 初等函数连续性

接下来，我们将目光放到一个叙述起来十分简单的定理：**初等函数在定义域内连续**。此结论是可以直接使用的——从直观感受来说，初等函数可以 “画出连续的图像”，当然应该具有连续性。

不过，大家将通过接下来的分析看到，究竟需要怎样复杂的过程才能得到这一结论。

3.3.1 反函数

首先，我们必须引入一个相对抽象的理论，也即**反函数及其连续性**。事实上，不仅对数函数是指数函数的反函数，反三角函数是三角函数的反函数，就连 $\sqrt{x}$ 的定义也涉及了反函数的过程。由此，必须先给出反函数的连续性结论才能完成证明。

关于反函数的定义与基本性质如下：

题 21 (附加)**.** 设 X、Y 都是 $\mathbb{R}$ 的子集。对于定义在 $X \to Y$ 的函数 f，若定义在 $Y \to X$ 的函数 g 满足

$$\forall x \in X, \quad g(f(x)) = x$$

$$\forall y \in Y, \quad f(g(y)) = y$$

则称 g 是 y 的**反函数**。证明一个函数存在反函数当且仅当它是**双射**，且存在时反函数**唯一**。

解答:

分为四个命题:

- **存在反函数推单射**

  反证，若 f 不是单射，则存在不相等的 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$，于是 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，与它们分别为 x_1、x_2 矛盾。

- **存在反函数推满射**

  反证，若 f 不是满射，假设 $y \in Y$ 不在 f 的值域中，则有 $f(g(y)) \neq y$，矛盾。

- **双射推存在反函数**

  由满射可知对任何 $y \in Y$，存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$，又由单射可知这样的 x 唯一，从而可以定义 g 使得 $g(y)$ 为满足 $f(x) = y$ 的唯一元素 x，由此可验证其符合反函数定义。

- **反函数唯一**

  若 g_1、g_2 均为 f 反函数，对任何 $y \in Y$，利用 $g_1(f(x)) = x$ 与 $f(g_2(y)) = y$ 有

  $$g_2(y) = g_1(f(g_2(y))) = g_1(y)$$

  这就得到了 $g_1 = g_2$，从而反函数唯一。

而其**连续性**可以归结为定理:

题 22 (附加)**.** 若定义在区间 I (这里区间可能为开、闭或半开半闭，且两端可能为无穷) 上的**连续**函数 $f(x)$ 是**严格单调**的，则其值域是某个区间 J，且存在定义在 $J \to I$ 的**连续**函数 g 为 f 的反函数。

解答:

我们不妨设 f 严格单调增，单调减的情况证明完全类似。

与**题 20** 相同，我们可以说明 f 的值域必然为区间，设为 J。由值域定义，f 在 I 到 J 上为满射；另一方面，利用严格单调性，对 J 中的 $x < y$ 应有 $f(x) < f(y)$，从而可知 f 为单射。综合上述讨论，f 为双射，由**题 21** 结论存在反函数 g。

接下来分类讨论。对 $t \in J$，若 t 不为 J 的边界点 (即闭区间端点或半闭的端点)，存在 $s > 0$ 使得 $[t - s, t + s] \subset J$，连续性可以定义。另一方面，由于 $g(t - s) \in I$、$g(t + s) \in I$，且利用 f 的严格单调性可知 $g(t - s) < g(t) < g(t + s)$，因此 $g(t)$ 不是 I 的边界点，即存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $(g(t) - \varepsilon_0, g(t) + \varepsilon_0) \subset I$ (取 $\varepsilon_0 = \min\{g(t + s) - g(t), g(t) - g(t - s)\}$ 即可)。

* 这段的说明稍显复杂，总而言之是为了证明 **I 与 J 的边界点相互对应**，也即当 t 不是 J 的边界点时 $g(t)$ 不是 I 的边界点。

为了证明 g 在 t 处连续，也即要证

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall |y - t| < \delta, \quad |g(y) - g(t)| < \varepsilon$$

我们将其等价写为 (与数列极限类似可证明等价)

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \exists \delta > 0, \quad \forall |y - t| < \delta, \quad |g(y) - g(t)| < \varepsilon$$

对任何 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，将 $|g(y) - g(t)| < \varepsilon$ 改写为

$$g(t) - \varepsilon < g(y) < g(t) + \varepsilon$$

由 $\varepsilon<\varepsilon_0$ 可知上式两侧都落在 I 中。利用 f 的单调性，上式两侧同作 f 不影响结论，也即上式等价于

$$f(g(t)-\varepsilon)<y<f(g(t)+\varepsilon)$$

于是取 $\delta=\min\{f(g(t)+\varepsilon)-t,t-f(g(t)-\varepsilon)\}$ 即得 $|y-t|<\delta$ 时其必然落在上方区间内，从而 $|g(y)-g(t)|<\varepsilon$，得证连续。

若 J 的左端为闭且 t 为 J 的左端点，利用严格单调性类似讨论可知 $g(t)$ 必然为 I 的左端点，从而在上述过程中只考虑右侧可证明；对 J 的右端点 t 可证 $g(t)$ 为 I 的右端点，同理可证。

综合以上即证明了 g 的连续性。

3.3.2　指数与对数

* 在开始讨论之前，必须指出，**数列极限的加减乘除性质保证了实数的加减乘除 (除数非 0) 仍然是实数**。这是因为，实数是以 “某个极限存在的有理数列的极限” 定义的，因此，利用有理数的加减乘除 (除数非零) 仍然是有理数，我们才能保证有理数列极限的加减乘除仍然是有理数列的极限。实数对四则运算的封闭性是接下来一切讨论的基础。

首先，我们将聊一个在高中被规避的问题：指数函数究竟应该如何定义？对于一个正数 c，$c^{\sqrt{2}}$ 究竟是什么？这个过程需要分为三步：

题 23. 对实数 x 与整数 m，给出 x^m 的定义，并说明它在定义域内 ($m>0$ 时定义在 $\mathbb{R}$ 上，$m\leq 0$ 时定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上) 对 x 连续。

解答:

当 m 为正整数时，x^m 代表 x 与自身相乘 m 次；当 m 为 0 时，x^m 在 $x\neq 0$ 时定义为 1；当 $m<0$ 时，x^m 代表 x 与自身相乘 m 次的倒数。分类说明：

- $m=0$ 时，常函数利用定义可直接验证连续，保证落在定义域内时任取 δ 即可。
- $m>0$ 时，对任何 $x_0\in\mathbb{R}$，要使

  $$|x^m-x_0^m|<\varepsilon$$

  将左侧因式分解得到其等价于

  $$|x-x_0||x_0^{m-1}+xx_0^{m-2}+\cdots+x^{m-1}|<\varepsilon$$

  类似之前的操作，我们可以让第二项得到控制：只要 $|x-x_0|<1$，第二项中的每一项绝对值都不会超过 $(|x_0|+1)^{m-1}$，从而第二项不超过

  $$M=m(|x_0|+1)^{m-1}$$

  此时只要 $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{M}$ 即符合要求。综合以上，我们取

  $$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{M}\right\}$$

  即可得到 $|x-x_0|<\delta$ 时

  $$|x^m-x_0^m|\leq M|x-x_0|<\varepsilon$$

  从而符合连续性定义。

– $m < 0$ 时，记 $n = -m$，其为正整数。对 $x_0 \neq 0$，要使

$$\left|\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}\right| < \varepsilon$$

左侧同样因式分解为

$$\frac{|x - x_0|}{|xx_0|}\left|\frac{1}{x_0^{n-1}} + \frac{1}{xx_0^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{x^{n-1}}\right|$$

与之前类似，利用控制分母的思想，我们先取 $|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$，这样至少可以保证 $|x| > \frac{|x_0|}{2}$，从而分母不会为 0，且第二项中的每一项绝对值都不会超过 $\frac{2^{n-1}}{|x_0|^{n-1}}$，进一步对 $|xx_0|$ 部分应用此估计可得 $|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$ 时有

$$\left|\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}\right| \leq \frac{|x - x_0|}{|xx_0|}\frac{n2^{n-1}}{|x_0|^{n-1}} \leq \frac{2|x - x_0|}{|x_0|^2}\frac{n2^{n-1}}{|x_0|^{n-1}} = \frac{n2^n}{|x_0|^{n+1}}|x - x_0|$$

记 $M = \frac{n2^n}{|x_0|^{n+1}}$，取

$$\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$$

可类似前一种情况由定义证明连续。

* 可直接由定义讨论验证运算律 $x^m x^n = x^{m+n}$、$x^m y^m = (xy)^m$、$(x^m)^n = x^{mn}$ 满足。

整数次幂的定义与高中并无不同，而对于有理次幂，我们现在需要关注它的**存在性**，也即，对于正数 x 与正整数 q，为何一定存在 y 使得 $y^q = x$？这可以通过**连续**与**单调**严格证明，也就是第一部分所用的**反函数**理论：

题 24. 对正数 a 与有理数 $\frac{p}{q}$，给出 $a^{p/q}$ 的**严格定义**。

解答:

我们可以不妨设 q 为正整数 (若 q 为负整数，利用 $\frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$ 变换即可)。

分两步说明：

– q 为**奇数**时定义 $a^{1/q}$

考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = x^q$。利用不等式的乘积性质 (对正数 a, b, c, d，若 $a > b$、$c > d$ 则 $ac > bd$，这可以直接作差分解得到)，$f(x)$ 在 $x > 0$ 时为正且严格单调增，而由 q 为奇数可知 $f(x)$ 为奇函数，从而它在 $x < 0$ 时为负且严格单调增、在 $x = 0$ 时为 0，综合得到 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上**严格单调增**。

利用正整数 n 满足 $n^q \geq n$ 可知 $f(x)$ 的值域**无上界**，再由奇函数可知**无下界**，利用**题 22** 的结论，$f(x)$ 的值域只能为 $\mathbb{R}$，且存在唯一 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的连续函数 g 为 f 的**反函数**。我们记 $g(x) = x^{1/q}$。

– q 为**偶数**时定义 $a^{1/q}$

考虑定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = x^q$，与奇数时类似讨论正数与 0 可知 $f(x)$ 严格单调增。利用严格单调性，$f(0) = 0$ 为 f 的**最小值**，再通过正整数 n 满足 $n^q \geq n$ 可知 $f(x)$ 的值域**无上界**，利用**题 22** 的结论，$f(x)$ 的值域只能为 $[0, +\infty)$，且存在唯一 $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 的连续函数 g 为 f 的**反函数**。我们记 $g(x) = x^{1/q}$。

– 定义 $a^{p/q}$ 并验证**良好定义性**

对任何 $\frac{p}{q}$，我们将其化为**最简分数** (且保证分母为正整数) $\frac{p_0}{q_0}$，并定义

$$a^{p/q} = (a^{p_0})^{1/q_0}$$

当 q_0 为奇数时对 $a \in \mathbb{R}$ 可定义，否则对 $a \geq 0$ 可定义。

良好定义性包含两方面，这里仅简单说明：一个是对**定义域**的讨论，当 q_0 为偶数时，由最简分数可知 p_0 为奇数，因此 a^{p_0} 必然与 a 同号，于是只能在非负时定义；另一个是验证指数的运算律满足，由于涉及定义域问题需要的讨论相对复杂，不过仍然可以证明。

负数的奇数次方根可以用完全类似的方式说明，此处省略详细的过程。最后，我们来定义高中回避严格推导的**无理次幂**：

题 25 (附加)**.** 对正数 a 与实数 t，用极限理论给出 a^t 的**严格定义**。

解答：

在**题 24** 中，我们已经给出了有理数指数的定义，且当 $a > 0$ 时，它的任何有理数指数可以定义。我们如此定义 a^t：当 t 为有理数时，我们已经得到了定义，而当其为无理数时，我们**任取**一列有理数 $t_1, t_2, \ldots$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t$$

并定义

$$a^t = \lim_{n\to\infty} a^{t_n}$$

这个定义的合理性并不直观：我们需要说明此极限一定**存在**，且对每一列有理数都**相等**。

当 $a = 1$ 时，根据定义可发现 a 的任何有理数次方均为 1，由此可知对一切实数 t 有 $a^t = 1$。因此，我们只需要讨论 $a > 1$ 与 $0 < a < 1$ 的情况。先假设 $a > 1$，证明分为四步：

- **单调性**：对有理数 $q_1 < q_2$，有 $a^{q_1} < a^{q_2}$。

  设 $q_1 = \frac{p_1}{r_1}$、$q_2 = \frac{p_2}{r_2}$，其中 r_1、r_2 为正整数，p_1、p_2 为整数。**题 24** 中已经验证了正整数次方在底数为正时的单调增性，从而可两侧同作 $r_1 r_2$ 次方得到

  $$a^{q_1} < a^{q_2} \quad\Longleftrightarrow\quad a^{p_1 r_2} < a^{p_2 r_1}$$

  另一方面 $q_1 < q_2$ 同乘 $r_1 r_2$ 次方得到

  $$q_1 < q_2 \quad\Longleftrightarrow\quad p_1 r_2 < p_2 r_1$$

  再利用 $a > 1$，由定义可知 a^m $(m \in \mathbb{Z})$ 在 m 越大时越大，从而得证单调增。

- **极限存在**：存在趋于 t 的有理数列 s_n 使得 a^{s_n} 有极限，我们将此极限记为 l。

  我们希望找到**单调上升**趋于 t 的有理数列。利用有理数稠密性，令有理数 $s_1 \in (t-1, t)$，进一步取有理数 $s_2 \in (\max\{s_1, t-1/2\}, t)$，这样可以保证 s_2 比 s_1 更大，且 $|s_2 - t| < \frac{1}{2}$，同理取有理数 $s_3 \in (\max\{s_2, t-1/3\}, t)$，这样利用数列极限定义即可得到

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = t$$

  另一方面，由于 s_n 单调增，根据已证的单调性，a^{s_n} 也单调增，且其有界 (对任何大于 t 的有理数 q，$a^{s_n} < a^q$)，这就得到极限存在。

- **弱化的连续性**：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对**有理数** q_1、q_2，当 $q_1,q_2\in(t-\delta,t+\delta)$ 时，$|a^{q_1}-a^{q_2}|<\varepsilon$。

  不妨设 $q_1\leq q_2$，要使
  $$|a^{q_1}-a^{q_2}|<\varepsilon$$
  由单调性只需
  $$a^{q_1}(a^{q_2-q_1}-1)<\varepsilon$$
  取 $\delta<1$，利用单调性可知 a^{q_1} 不会超过任何 a^q，这里有理数 $q>t+1$，记 M 为上述 a^q。进一步利用单调性，取 $\delta<\frac{1}{2N}$，N 待定，则
  $$a^{q_2-q_1}-1<a^{1/N}-1$$
  要使其小于 $\frac{\varepsilon}{M}$，只需
  $$a^{1/N}<1+\varepsilon$$
  也即
  $$(1+\varepsilon)^N>\frac{a}{M}$$
  利用二项式展开可知左侧大于 $N\varepsilon$，从而只需 $N>\frac{Ma}{\varepsilon}$ 即可。由此，令
  $$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{M},\frac{\varepsilon}{aM}\right\}$$
  通过上述讨论可知符合要求。

- **极限相同**：对所有趋于 t 的有理数列 t_n，a^{t_n} 趋于 l。

  我们令 s_n 与第二部分证明中相同构造，证明的核心是三角不等式
  $$|a^{t_n}-l|\leq|a^{s_n}-l|+|a^{s_n}-a^{t_n}|$$
  对任何 $\varepsilon>0$，利用第三部分证明，存在 $\delta>0$ 使得 $s_n,t_n\in(t-\delta,t+\delta)$ 时
  $$|a^{s_n}-a^{t_n}|<\frac{\varepsilon}{2}$$
  由于
  $$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}t_n=t$$
  对任何 $\delta>0$，存在 N_1、N_2 使得 $n>N_1$ 时 $|s_n-t|<\delta$、$n>N_2$ 时 $|t_n-t|<\delta$，这就得到 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时 $|a^{s_n}-a^{t_n}|<\frac{\varepsilon}{2}$。

  另一方面，由于已知 a^{s_n} 极限为 l，存在 N_3 使得 $n>N_3$ 时
  $$|a^{s_n}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$$
  综合以上，$n>\max\{N_1,N_2,N_3\}$ 时
  $$|a^{t_n}-l|\leq|a^{s_n}-l|+|a^{s_n}-a^{t_n}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$
  得证。

当 $a\in(0,1)$ 时，将第一部分的单调增证明改为单调减，其他部分类似改写即可。

利用此定义，我们可以证明其**严格单调性**：

题 26. 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，证明定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)=a^x$ 严格单调增或严格单调减。

解答：

我们只证明 $a>1$ 时严格单调增，$a\in(0,1)$ 时严格单调减证明类似。

题 25 中，我们已经证明了对有理数 q_1、q_2，$q_1<q_2$ 时 $a^{q_1}<a^{q_2}$，接下来分为三部分：

- 若 $x<y$，且 x 为有理数，y 为无理数。构造有理数列 y_n 使得其极限为 y，取定 (x,y) 中的有理数 z，在极限定义中取 $\varepsilon=y-z$ 可知存在 N 使得 $n>N$ 时 $y_n>z$，从而

$$a^{y_n}>a^z>a^x$$

由此取极限得到

$$a^y\geq a^z>a^x$$

得证。

- 若 $x<y$，且 x 为无理数，y 为有理数。与上类似，构造有理数列 x_n 使得其极限为 x 可得证。
- 若 $x<y$，且 x、y 均为无理数，取有理数 $z\in(x,y)$，利用上方两部分可知

$$a^y>a^z>a^x$$

从而得证。

综合所有情况可知 a^x 严格单调增。

进一步地，**连续性**也是容易证明的：

题 27. 对正数 a，证明定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)=a^x$ 是连续函数。

解答：

由 a^x 定义，对所有有理数 q 有 $a^q>0$，进一步通过单调性可知对任何 $x\in\mathbb{R}$ 有 $a^x>0$。

对任何 $x_0\in\mathbb{R}$，有

$$|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|$$

与**题 25** 中弱化延续性的证明类似，对任何 $\varepsilon>0$，存在正整数 N 使得

$$a^{1/N}-1<\frac{\varepsilon}{a^{x_0}},\quad 1-a^{-1/N}<\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$$

从而再通过单调性可知只需取

$$\delta=\frac{1}{N}$$

即有 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$-\varepsilon<-a^{x_0}(1-a^{-\delta})<|a^x-a^{x_0}|<a^{x_0}(a^{\delta}-1)<\varepsilon$$

这就证明了连续性。

在讨论完指数函数后，**对数函数**的讨论就显得简单了，只需要补充一个**值域**结论：

题 28. 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，证明定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)=a^x$ 值域为 $(0,+\infty)$。

解答:

我们已经证明了 a^x 恒大于 0，从而由**题 22** 可知 $f(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$ 的某个子区间，接下来说明其为 $(0,+\infty)$。

仍然只证明 $a>1$ 的情况，$a\in(0,1)$ 时证明类似。对正整数 N，利用 $a^N=(1+(a-1))^N>N(a-1)$ 即可知 a^x 可取任意大，区间右端只能为 $+\infty$；由于 $a^{-N}=\frac{1}{a^N}$，即得 $a^{-N}<\frac{1}{N(a-1)}$，从而 a^x 可取任意接近 0，区间左端只能为 0。

由于对底数 $a>0$、$a\neq 1$，指数函数 a^x 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的严格单调连续函数，且其值域为 $(0,+\infty)$，根据**题 22**，**存在唯一**定义在 $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 的**连续**函数为其反函数，记为 $\log_a x$。

3.3.3 幂函数

由于当 $x>0$ 时有 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$，想要证明幂函数的连续性，一个简单方法是先说明函数**组合**的连续性结论：

题 29. 证明若 $f(x)$、$g(x)$ 定义域相同且连续，则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$ 连续；且 $g(x)$ 非零处 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 连续。

解答:

考虑任何 x_0 处：

- 对任何 $\varepsilon>0$，由定义存在 $\delta_1>0$、$\delta_2>0$ 使得 $|x-x_0|<\delta_1$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

  $|x-x_0|<\delta_2$ 时

$$|g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

  从而取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 即有 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|(f(x)\pm g(x))-(f(x_0)\pm g(x_0))|\leq|f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$$

  即符合连续性定义。

- 对任何 $\varepsilon>0$ 要使

$$|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)|<\varepsilon$$

  为了构造出 $f(x)-f(x_0)$ 与 $g(x)-g(x_0)$，我们利用分解 (本质是加 $f(x_0)g(x)$ 后减去这项)

$$f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)=g(x)(f(x)-f(x_0))+f(x_0)(g(x)-g(x_0))$$

  由于 $g(x)$ 在 x_0 处极限为 $g(x_0)$，存在 δ_0 使得 $|x-x_0|<\delta_0$ 时 $|g(x)-g(x_0)|<1$，此时

$$|g(x)|<|g(x_0)|+1$$

  另一方面，由定义存在 $\delta_1>0$、$\delta_2>0$ 使得 $|x-x_0|<\delta_1$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|+2}$$

$|x-x_0|<\delta_2$ 时 (加 1 是为了保证分母不为 0)

$$|g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|+2}$$

这样令 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$ 即有

$$|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)|\le(|g(x_0)|+1)|f(x)-f(x_0)|+(|f(x_0)|+1)|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$$

即符合连续性定义。

– 利用上一部分证明，只需证明 $g(x)$ 非零处 $\frac{1}{g(x)}$ 连续即可。

由于

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right|=\frac{|g(x)-g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|}$$

与数列极限时类似，我们先取 δ_1 使得 $|x-x_0|<\delta_1$ 时 $|g(x)-g(x_0)|<\frac{|g(x_0)|}{2}$，此时

$$|g(x)|>\frac{|g(x_0)|}{2}$$

进一步取 δ_2 使得 $|x-x_0|<\delta_2$ 时

$$|g(x)-g(x_0)|<\frac{|g(x_0)|^2}{2}\varepsilon$$

综合两部分，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right|\le\frac{2|g(x)-g(x_0)|}{|g(x_0)|^2}<\varepsilon$$

即符合连续性定义。

题 30. 证明若 $f(x)$ 在 x_0 连续，$g(t_0)=x_0$ 且 $g(t)$ 在 t_0 连续，则 $f(g(t))$ 也在 t_0 连续。

解答:

对任意 $\varepsilon>0$，由定义可知存在 $\delta_0>0$ 使得 $|x-x_0|<\delta_0$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\delta_0$$

存在 $\delta>0$ 使得 $|t-t_0|<\delta$ 时

$$|g(t)-g(t_0)|<\delta_0$$

此时有

$$|f(g(t))-f(g(t_0))|<\varepsilon$$

即符合连续性定义。

对于幂函数，一个比起指数函数更麻烦的地方在于，它的**定义域**会随着指数的不同而有差别。这虽然不至于非常复杂，但确实需要细致的讨论：

题 31. 证明 $f(x)=c$ (c 为常数) 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

* 注意 $f(x)=x^0$ 在 $x\neq 0$ 时为 1，否则**没有定义**，定义域与 $f(x)=1$ 不同。

解答:

对任何 x_0、任何 $\varepsilon>0$，取 $\delta=1$ 即有 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$$

即符合连续性定义。

题 32. 当 $a>0$ 且为最简形式分母是奇数的有理数时，证明 $f(x)=x^a$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

解答:

当 $x>0$ 时，由 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 与函数组合的连续性结论可知连续；当 $x<0$ 时，由 $x^a=\pm\mathrm{e}^{a\ln(-x)}$ (利用奇函数或偶函数性质) 与函数组合的连续性结论可知连续。由此，我们只需要再证明在 0 处连续即可。

利用定义可知 $0^a=0$，从而只需要证明

$$\lim_{x\to 0}x^a=0$$

由于 e^x 单调增，由反函数定义可知 $\ln x$ 在定义域内单调增，于是进一步通过定义可发现 $x>0$ 时 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 是单调增函数，再结合 e^x 恒正可知对任何 $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时

$$0<x^a<\delta^a$$

同理当 $-\delta<x<0$ 时

$$-\delta^a<x^a<0$$

由此，要使

$$|x^a|<\varepsilon$$

只需

$$\delta^a\le\varepsilon$$

由此，取 $\delta=\varepsilon^{1/a}$ 即符合极限定义，得证连续性。

题 33. 当 $a<0$ 且为最简形式分母是奇数的有理数时，证明 $f(x)=x^a$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续 (注意在两个区间上连续是指在它们上**分别**连续)。

解答:

当 $x>0$ 时，由 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 与函数组合的连续性结论可知连续；当 $x<0$ 时，由 $x^a=\pm\mathrm{e}^{a\ln(-x)}$ (利用奇函数或偶函数性质) 与函数组合的连续性结论可知连续。

题 34. 当 $a>0$ 且 a 不是最简形式分母为奇数的有理数时，证明 $f(x)=x^a$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

解答:

当 $x>0$ 时，由 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 与函数组合的连续性结论可知连续，由此只需要证明在 0 处连续。证明方式与**题 32** 完全相同。

题 35. 当 $a<0$ 且 a 不是最简形式分母为奇数的有理数时，证明 $f(x)=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

解答:

此时直接由 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 与函数组合的连续性结论可知连续。

综合以上，我们终于证明了**幂函数在定义域内连续**。

3.3.4 三角与反三角

接下来，我们来谈论三角函数。事实上，对于三角函数，我们会遇到一个和指数函数一样的问题，即其**严格定义**是不明确的。具体来说，弧度制本身需要用弧长来定义，但我们从未知道“弧长”究竟是什么，自然也就无从谈起 $\sin x$ 独立于几何的定义。

很遗憾，对于三角函数，我们现在的数学知识并不足以给出一个它的严格定义。一个可以完全避免循环论证与几何的方法是通过**级数**进行定义，而我们此处必须将

$$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\quad \sin x<x<\tan x$$

与三角函数的**运算律** (如奇偶性、和差角公式) 当作某种可以直接使用的**公理**进行理解。

至此，我们下面来证明三角函数是连续的，我们此处只证明 sin 的连续性即可，具体原因将在之后讨论：

题 36. 从 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $\sin x<x<\tan x$ 出发证明 $\sin x$ 是连续函数。

解答:

直接利用和差化积公式并将 cos 放大为 1 可知

$$|\sin x-\sin y|=\left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$$

由于 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $\sin x<x$，利用奇函数性质可知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $|\sin x|\le|x|$，在 $|x|\ge\frac{\pi}{2}$ 时由 $|\sin x|\le 1$ 此式仍然成立，从而可知

$$|\sin x-\sin y|\le 2\frac{|x-y|}{2}=|x-y|$$

由此，对任何 x_0 与任何 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$ 可得 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|\sin x-\sin x_0|\le|x-x_0|<\varepsilon$$

即符合连续性定义。

除此以外，我们还需要证明一个以后经常使用的**重要极限**：

题 37. 从 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $\sin x<x<\tan x$ 出发证明

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

解答:

在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，对不等式两端同除以 $\sin x$ 可得

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

令 $x\to 0^+$，由**夹逼定理**即得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1$$

利用 $\frac{x}{\sin x}$ 为偶函数，可知 (这里本质上也是利用了换元，将 x 换为 $-x$，严谨性见之后讨论)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(-x)}{\sin(-x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1$$

从而即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

再利用倒数极限结论即可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{1}=1$$

有了 sin 后，arcsin 自然也是可以定义的，只要基于如下结论：

题 38. 考虑定义在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ 上的 $\sin x$，证明它是一个严格单调增的函数，且值域即为 $[-1,1]$。

解答：

利用和差化积公式可以得到，对 $-\frac{\pi}{2}\le x<y\le\frac{\pi}{2}$ 有

$$\sin y-\sin x=2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

由于 $\frac{y-x}{2}\in(0,\frac{\pi}{2}]$、$\frac{x+y}{2}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，利用 sin、cos 性质可知右端为正，从而严格单调性成立。进一步由 $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$、$\sin\frac{\pi}{2}=1$ 可得值域结论。

由此，结合反函数的连续性，我们即得到了 arcsin 的良好定义性与**连续**性。

3.3.5　补充与结论

最后，我们对上述的讨论进行一些补充，并给出最终结论。首先，上一部分对函数组合连续性的讨论也可以**推广**到函数极限中：

题 39. 证明若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=l_1$$
$$\lim_{x\to x_0}g(x)=l_2$$

则

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=l_1\pm l_2$$
$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=l_1l_2$$

且 $l_2\neq 0$ 时

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$$

解答：

由于**题 29** 中事实上只用到了 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点处的连续性即可保证加减乘除 (除数不为 0) 时连续，我们定义

$$f_0(x)=\begin{cases}f(x) & x\neq x_0\\ l_1 & x=x_0\end{cases},\quad g_0(x)=\begin{cases}g(x) & x\neq x_0\\ l_2 & x=x_0\end{cases}$$

由极限与 x_0 点处值无关可知 $f_0(x)$、$g_0(x)$ 在 x_0 处极限与 $f(x)$、$g(x)$ 相同，从而由定义它们均在 x_0 处连续，进一步利用**题 29** 结论得证。

不过，复合的连续性的推广会有点麻烦：

题 40. 证明若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=l$$
$$\lim_{t\to t_0}g(t)=x_0$$

未必有

$$\lim_{t\to t_0}f(g(t))=l$$

但当 f 在 x_0 **连续**，即 $l=x_0$ 时，上式成立。

解答：

- 取

$$g(t)=0,\quad f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

  并取 $t_0=0$，则直接计算可知

$$\lim_{t\to t_0}g(t)=0,\quad \lim_{x\to 0}f(x)=0$$
$$\lim_{t\to t_0}f(g(t))=\lim_{t\to t_0}1=1$$

- 若 f 在 x_0 连续，有 $l=f(x_0)$。对任意 $\varepsilon>0$，由定义可知存在 $\delta_0>0$ 使得 $|x-x_0|<\delta_0$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\delta_0$$

  存在 $\delta>0$ 使得 $0<|t-t_0|<\delta$ 时

$$|g(t)-x_0|<\delta_0$$

  此时有

$$|f(g(t))-f(x_0)|<\varepsilon$$

  即符合极限定义。

* 对比定义可发现，前一种情况能举出反例的本质原因出现在我们定义极限时要求**挖去中心点**，但无法保证 t 在 t_0 附近挖去中心点的区域时 $g(t)$ 能落进 x_0 附近挖去中心点的区域。

此外，连续推出值域是区间的某种**逆命题**也成立，不过需要补充单调条件。我们以闭区间为例，开区间可以类似证明：

题 41. 若定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 是单调的，且值域是某个闭区间 $[c,d]$，则 f 连续。

解答：

不妨设 $f(x)$ 单调**增**，单调减时证明类似。

我们先说明 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a,b]$ 处**左**连续。若否，利用定义可知

$$\exists\varepsilon > 0,\quad \forall\delta > 0,\quad \exists x \in (x_0-\delta, x_0),\quad |f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon$$

利用单调增性，取出 ε，上式即代表

$$\forall\delta > 0,\quad \exists x \in (x_0-\delta, x_0),\quad f(x) \leq f(x_0)-\varepsilon$$

取 $t = f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}$，由于 $t < f(x_0) \leq d$ 且存在 x 使得

$$f(x) \leq f(x_0)-\varepsilon < t$$

即可知 $t \in [c,d]$。

另一方面，利用单调性，若有点 x_1 使得 $f(x_1) = t$，由于 $t < f(x_0)$ 应有 $x_1 < x_0$，但存在 $x \in (x_1, x_0)$ 使得

$$f(x) \leq f(x_0)-\varepsilon < t$$

这就得到了 $x > x_1$ 且 $f(x) < f(x_1)$，与单调增矛盾。于是 t 不在 $f(x)$ 值域中，与值域是闭区间 $[c,d]$ 矛盾。

完全类似可以证明 $f(x)$ 在 $x_0 \in [a,b)$ 处**右**连续，从而其在中间部分连续，左端点右连续，右端点左连续，符合连续性定义。

* 由此无论是证明了严格单调与值域，还是证明了严格单调与连续，都能得到反函数存在连续，这给出了证明**反函数连续**的两种做法。

得到这些结论后，由于 $\cos x$ 在不同区间可以写为 $\sqrt{1-\sin^2 x}$ 或 $-\sqrt{1-\sin^2 x}$，通过已证的结论与复合函数连续性可以进一步得到 $\cos x$ 连续，进而 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 也在定义域内连续。与 $\sin x$ 类似验证单调性后，即可得到反三角函数的存在性与连续性。至此，我们证明了所有**基本初等函数连续**，利用连续函数和差积商与复合在定义域内的连续性，我们终于得到了**初等函数在定义域内连续**。

回到本章的开头，相信通过本章的篇幅，大家已经感受到了这些看似简单的结论背后的复杂性——如果不利用连续性，甚至连 $x > 0$ 时 $\sqrt{x}$ 一定存在都是难以说明的。这些复杂并不是画蛇添足，而是**数学对超越直观的尝试**。只有超越了直观，我们才可能以逻辑体系建构出**不会出错**的数学工具。

四　有限与无穷

本次习题课主要介绍了无穷相关的性质，包括左右极限定义，无穷大、无穷小的定义，以无穷大为极限的情况，与一些阶估算、换元技巧，知识基础为函数极限的定义与理解。

§4.1　无穷大

4.1.1　无穷的邻域

* 本部分内容**与考试无关**，事实上思想来自后续的点集拓扑与复分析课程，但非常建议大家看一看以理解我们学到的种种极限定义如何统一。

在定义完有限处的极限后，为了计算方便，我们还需要定义无穷处的极限与极限是无穷的情况，将极限理论**推广**到无穷处。但是，如果直接每种情况分别定义，会导致讨论十分复杂。那么，有没有一种理论可以**统一**各种情况下的极限定义呢？

回到 $f(x)$ 在 x_0 处极限为 l 的定义，我们将它等价地写为：

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta),\quad f(x)\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$$

可以发现，$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$ 无非是一个包含 l 的开区间，而 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 则是一个包含 x_0 的开区间去除 x_0 这点。

如果我们想将 l 或 x_0 替换为无穷，似乎只需要定义**包含无穷的开区间**是什么就可以了，而这看起来也很直观：包含 $+\infty$ 的开区间就是 $(a,+\infty)$，包含 $-\infty$ 的开区间就是 $(-\infty,a)$，包含 ∞ 代表包含 $\pm\infty$，对应的开区间是 $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$。由于无穷都**无法取到**，我们认为包含无穷的开区间是否去除无穷这点不影响结果。

事实上，从上述定义出发，确实可以得到一个合理的无穷处极限定义，但是，它仍然无法解决两个重要的问题：

1. **开区间**究竟有什么特殊的？为什么定义里要取开区间？
2. 为什么正负无穷要**合并为无穷**？包含无穷的开区间由正负无穷拼成是合理的吗？

对第一个问题，答案在于开区间的特殊性：若 x_0 包含在某个开区间中，它距离区间的边界一定有一段**距离**，也即它左右移动充分小一定还能落在区间中。数学上，我们将满足上述条件的集合称为 x_0 的**邻域**，也即集合 U 满足

$$\exists\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0,\quad (x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_2)\subset U$$

* 注意定义中为包含于，**未必相等**，因此 $[x_0-1,x_0+1]$ 也是 x_0 的邻域，但 $[x_0,x_0+1]$ 不是。

我们将所有 x_0 的邻域的**集合** (注意这是一个**集合的集合**) 称为 $\mathcal{N}(x_0)$，一个邻域去除 x_0 本身称为**去心邻域**，所有 x_0 的去心邻域构成的集合记为 $\mathcal{N}^\circ(x_0)$。我们将用它们改写极限的定义：

题 42 (附加)**.** 证明 $f(x)$ 在 x_0 处极限为 l 等价于

$$\forall U\in\mathcal{N}(l),\quad \exists V\in\mathcal{N}^\circ(x_0),\quad \forall x\in V,\quad f(x)\in U$$

解答：

– **极限为 l 推此命题**

由定义，对任何 $U\in\mathcal{N}(l)$，存在 $\varepsilon_1>0$、$\varepsilon_2>0$ 使得 $(l-\varepsilon_1,l+\varepsilon_2)\subset U$，设 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，利用极限定义可知

$$\exists\delta>0,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta),\quad f(x)\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)\subset U$$

由于 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 符合 x_0 的去心邻域定义，此命题成立。

– **此命题推极限为** l

对任何 $\varepsilon>0$，由定义 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)\in\mathcal{N}(l)$，从而存在 $V\in\mathcal{N}^\circ(x_0)$ 使得对任何 $x\in V$ 有 $f(x)\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$。

根据去心邻域定义，存在 $\varepsilon_1>0$、$\varepsilon_2>0$ 使得

$$(x_0-\varepsilon_1, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon_2)\subset V$$

取 $\delta=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，则有 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $x\in V$，从而此时 $f(x)\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$，符合极限定义。

* 这个证明事实上很简单，只是**写出定义后验证**。本质上，邻域**放宽**了我们在定义时对开区间的要求，而上述证明即代表这样的放宽不会影响极限结果。

此定义最大的好处在于，在这样的严谨说明后，我们确实只需要定义 $\mathcal{N}(\infty)$ 与 $\mathcal{N}^\circ(\infty)$ 等就可以完成无穷处极限的定义了。不过，它们究竟是什么呢？

为了搞明白这点，我们将采用**球极投影**的视角看待无穷：考虑平面上的圆 $x^2+(y-1)^2=1$，它与 x 轴相切于 $(0,0)$。从圆的顶点 $(0,2)$ 出发，与圆上任何一点 A 连接并延长，一定相交于 x 轴上唯一点，也即 x 轴上的点可以视为圆的**投影**。当 A 从顺时针方向 (考虑投影到 x 轴上的位置，这实际代表向左) 接近 $(0,2)$ 时，x 轴上的点即会逼近 $-\infty$，当 A 从逆时针方向 (考虑投影到 x 轴上的位置，这实际代表向右) 逼近 $(0,2)$ 时，x 轴上的点即会逼近 $+\infty$。在这样的理解下，∞ **实际上是一个点**，而 $+\infty$ 是**向右逼近无穷的结果**，$-\infty$ 则是**向左逼近无穷的结果**。

* 为何明明是个圆却要叫球极投影？因为这个看法事实上还可以对**复数**进行，那时就将是一个球投影到复平面了。

不仅如此，这个视角下包含无穷的**邻域**也是直观的：从圆上截取包含 $(0,2)$ 的一段 (不是整个圆) 并投影，可以发现它投影到 x 轴上必然是某个 $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$，其中 $a<b$。而再由无穷本身无法取到，我们可以进行定义：$\mathcal{N}(\infty)=\mathcal{N}^\circ(\infty)$，为所有满足

$$\exists t_1<t_2,\quad(-\infty,t_1)\cup(t_2,+\infty)\subset U$$

的集合 U。

最后，我们来处理 $\pm\infty$ 的情况。我们事实上在之前就已经学过何为**向左逼近** (从右侧逼近) 了，也即所谓**右极限**。与之前完全类似，我们可以类似右极限中定义 x_0 的**右邻域** U：

$$\exists\varepsilon_2>0,\quad[x_0,x_0+\varepsilon_2)\subset U$$

并将所有右邻域的集合记为 $\mathcal{N}(x_0^+)$。而利用 "∞ 的右侧是 $-\infty$"，我们即可以得到 U 是 ∞ 的右邻域当且仅当

$$\exists t_2\in\mathbb{R},\quad(-\infty,t_2)\subset U$$

这也就是 $\mathcal{N}(-\infty)$ 的定义——它实质上是 $\mathcal{N}(\infty^+)$。

* 也就是说，所谓的负无穷处极限事实上是无穷的**右极限**，而正无穷处极限实质上是无穷的**左极限**。这就解释了**无穷处极限存在当且仅当正负无穷处极限存在且相等**。

* 当然，**左邻域**的定义与右邻域完全类似，且我们也可以谈论**去心右邻域** $\mathcal{N}^\circ(x_0^+)$，为所有去除 x_0 的右邻域构成的集合。

题 43 (附加)**.** 证明 $f(x)$ 在 x_0 处右极限为 l 等价于

$$\forall U \in \mathcal{N}(l), \quad \exists V \in \mathcal{N}^{\circ}(x_0^+), \quad \forall x \in V, \quad f(x) \in U$$

解答:

– **右极限为 l 推此命题**

由定义，对任何 $U \in \mathcal{N}(l)$，存在 $\varepsilon_1 > 0$、$\varepsilon_2 > 0$ 使得 $(l-\varepsilon_1, l+\varepsilon_2) \subset U$，设 $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$，利用极限定义可知

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta), \quad f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \subset U$$

由于 $(x_0, x_0+\delta)$ 符合 x_0 的去心右邻域定义，此命题成立。

– **此命题推右极限为 l**

对任何 $\varepsilon > 0$，由定义 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \in \mathcal{N}(l)$，从而存在 $V \in \mathcal{N}^{\circ}(x_0^+)$ 使得对任何 $x \in V$ 有 $f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$。

根据去心右邻域定义，存在 $\varepsilon_2 > 0$ 使得

$$(x_0, x_0+\varepsilon_2) \subset V$$

取 $\delta = \varepsilon_2$，则有 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时 $x \in V$，从而此时 $f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$，符合极限定义。

利用上述左右极限的定义，我们已经足以说明 x 在 $\pm\infty$ 处的极限是 l 是何种含义。不过，我们事实上还是无法说明极限值是 $\pm\infty$ 是何种含义，因为我们**尚未定义从左/右逼近**。我们将给出定义并举一个简单的例子。

题 44 (附加)**.** 称 $f(x)$ 在 x_0 处**从右侧逼近** l，若

$$\forall U \in \mathcal{N}(l^+), \quad \exists V \in \mathcal{N}^{\circ}(x_0), \quad \forall x \in V, \quad f(x) \in U$$

记为

$$\lim_{x \to x_0} = l^+$$

从左侧逼近同理。证明

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0^+, \quad \lim_{x \to 0}(-x^2) = 0^-$$

解答:

我们只证明第一式，第二式可仿照证明。

对任何 $U \in \mathcal{N}(0^+)$，根据定义可设 $\varepsilon > 0$ 满足 $[0, \varepsilon) \in U$，取 $V = (-\sqrt{\varepsilon}, 0) \cup (0, \sqrt{\varepsilon})$，由定义 $V \in \mathcal{N}^{\circ}(0)$，且利用单调性 $x \in V$ 时 $y \in [0, \varepsilon) \subset U$，从而得证。

* 由此可以看出从右侧逼近是一个直观的概念，代表在差距充分小时**大于等于且逼近**。

综合以上讨论，我们可以给出一个最终的**包含左右极限与无穷处的极限定义**：

$$\lim_{x \to A} f(x) = B$$

当且仅当

$$\forall U \in \mathcal{N}(B), \quad \exists V \in \mathcal{N}^{\circ}(A), \quad \forall x \in V, \quad f(x) \in U$$

这里 A、B 可能为 x_0、$x_0^{\pm}$ 或 ∞、$\pm\infty$，我们将它们合称为**极限数**。

事实上，数列极限也可以如此定义，对极限数 B，定义

$$\lim_{n\to\infty} a_n = B$$

当且仅当

$$\forall U \in \mathcal{N}(B),\quad \exists N \in \mathbb{N}^*,\quad \forall n > N,\quad a_n \in U$$

* 极限数并不是一个严谨的数学定义，此处仅为方便称呼而引入。大家可以自行验证此定义与教材上对各种情况的定义等价。
* 注意**极限为无穷仍然称极限不存在**。

有了此定义后，无论是**夹逼定理**、**归结原理**还是**函数组合极限**都可以推广，我们将在后续说明——虽然这些推广并不需要会证明，但基本**可以直接使用**，因此值得了解。
* 基本初等函数在 $x \to \pm\infty$ 时的极限情况**必须熟悉**——大部分可由图像直观感受，证明也并不困难。

4.1.2 常用极限定理

为了更方便计算涉及无穷的极限，我们将证明几个常用——且**可以直接使用**——的工具。首先是**推广的夹逼定理**：

题 45 (附加). 对任何极限数 A、B (定义见上一部分结尾)，只要 B 不为 ∞ (可以为 $\pm\infty$)，若有

$$\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} g(x) = B$$

且对某个 $V \in \mathcal{N}^\circ(A)$，当 $x \in V$ 时有

$$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

则

$$\lim_{x\to A} h(x) = B$$

解答：

我们将利用结论 (可直接由定义证明)：A 的两个**邻域的交集**仍是 A 的邻域，A 的两个**去心邻域的交集**仍是 A 的去心邻域。

根据定义，对任何 $U \in \mathcal{N}(B)$，由于 $B \neq \infty$，存在一个**区间** $I \subset U$ 使得 $I \in \mathcal{N}(B)$。利用极限定义，存在 $V_1 \in \mathcal{N}^\circ(A)$、$V_2 \in \mathcal{N}^\circ(A)$ 使得 $x \in V_1$ 时 $f(x) \in I$，$x \in V_2$ 时 $g(x) \in I$。

记 $V_0 = V \cap V_1 \cap V_2$，由开头结论可知 $V_0 \in \mathcal{N}^\circ(A)$，另一方面，由于 $f(x) \in I$、$g(x) \in I$ 与 $f(x) \le h(x) \le g(x)$，由 I 为区间可知 $h(x) \in I$，这就证明了当 $x \in V_0$ 时 $h(x) \in I \subset U$，符合极限定义，得证。

* 注意条件里 $B \neq \infty$ 是必要的，否则考虑 $f(x) = -x$、$g(x) = x$、$h(x) = 0$、$A = +\infty$ 可得矛盾，本质是由于过程里**取出区间**的操作，单个区间除 $\mathbb{R}$ 外不可能在 $\mathcal{N}(\infty)$ 中。

* 利用定义可以说明，当 $B = +\infty$ 时只要存在 $f(x)$ 即可得到 $h(x)$ 极限为 $+\infty$，当 $B = -\infty$ 时只要存在 $g(x)$ 即可得到 $g(x)$ 极限为 $-\infty$，我们之后将这个**加强**的结论也称为推广的夹逼定理。

利用它可以将之前数列极限的**无穷大阶比较**结论推广到函数极限：

题 46. 证明对任何 $a>1$、$b>0$、$c>0$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^c x}{x^b}=0$$

解答:

后两个极限的证明见本讲义 3.1 第 11 题，此处只证明第一个极限。

由 $a>1$，当 $x>2a$ 时必然 $x^x>(2a)^x$ (利用 $t>1$ 时 t^x 对 x 严格单调增)，从而有

$$0<\frac{a^x}{x^x}<\frac{a^x}{(2a)^x}=\frac{1}{2^x}$$

利用极限定义可直接算得左右在 $x\to+\infty$ 时极限均为 0，从而由推广的夹逼定理可知中间极限必然为 0。

* 这里能应用推广的夹逼定理是由于 $(2a,+\infty)\in\mathcal{N}(+\infty)$，由此可以看出，对 $x\to+\infty$ 的情况应用夹逼定理，只需要 x **充分大**时大小关系成立即可，这是符合直觉的。实际书写过程时，直接说"**由夹逼定理得**"即可。

接下来是**推广的复合函数极限**，此结论对**换元法**非常重要：

题 47 (附加). 若 f **在** A **处连续或** A **为无穷**，或**存在** $V_0\in\mathcal{N}^\circ(C)$ **使得** $t\in V_0$ **时** $g(t)\neq A$，且

$$\lim_{x\to A}f(x)=B$$

$$\lim_{t\to C}g(t)=A$$

则

$$\lim_{t\to C}f(g(t))=\lim_{x\to A}f(x)=B$$

这里 A、B、C 为极限数，定义见本讲义 4.1.1 结尾。

* 若 A 为无穷，$g(t)\neq A$ 直接成立；若 A 为 $x_0^\pm$，要求 $g(t)\neq x_0$。

解答:

- f **在** A **处连续或** A **为无穷**的情况

  考虑 A 为有限 (利用连续性) 或无穷 (去心与否无区别) 的情况可以发现 $f(x)$ 在 A 处极限为 B 的定义中可以将 $\mathcal{N}^\circ(A)$ 改为 $\mathcal{N}(A)$，从而即得到

  $$\forall U\in\mathcal{N}(B),\quad \exists V\in\mathcal{N}(A),\quad \forall x\in V,\quad f(x)\in U$$

  而第二个极限的定义即为

  $$\forall U\in\mathcal{N}(A),\quad \exists V\in\mathcal{N}^\circ(C),\quad \forall t\in V,\quad g(t)\in U$$

  由此，为证最终的极限，对任何 $U\in\mathcal{N}(B)$，取出对应 $f(x)$ 极限对应的 $V\in\mathcal{N}(A)$，使得 $x\in V$ 时 $f(x)\in U$，再取出 $g(t)$ 极限对应的 $W\in\mathcal{N}^\circ(C)$，使得 $t\in W$ 时 $g(t)\in V$，此时即得

  $$f(g(t))\in U$$

  从而对任何 $U\in\mathcal{N}(B)$，存在 $W\in\mathcal{N}^\circ(C)$ 使得 $t\in W$ 时 $f(g(t))\in U$，符合

  $$\lim_{t\to C}f(g(t))=B$$

  的定义，得证。

– **存在** $V_0 \in \mathcal{N}^\circ(C)$ **使得** $t \in V_0$ **时** $g(t) \neq A$ 的情况

由第二个极限定义可知

$$\forall U \in \mathcal{N}(A), \quad \exists V \in \mathcal{N}^\circ(C), \quad \forall t \in V, \quad g(t) \in U$$

对任何 $U \in \mathcal{N}^\circ(A)$，对 $U \cup \{A\}$ (若 A 为无穷将 $\{A\}$ 视为空集，由定义这是 A 的邻域) 取出第二个定义中对应的 V，并考虑 $V \cap V_0$，之前已经说明 $V \cap V_0 \in \mathcal{N}^\circ(C)$，再结合条件即得第二个定义可改写为

$$\forall U \in \mathcal{N}^\circ(A), \quad \exists V \in \mathcal{N}^\circ(C), \quad \forall t \in V, \quad g(t) \in U$$

由此，为证最终的极限，对任何 $U \in \mathcal{N}(B)$，取出对应 $f(x)$ 极限对应的 $V \in \mathcal{N}^\circ(A)$，使得 $x \in V$ 时 $f(x) \in U$，再取出 $g(t)$ 极限对应的 $W \in \mathcal{N}^\circ(C)$，使得 $t \in W$ 时 $g(t) \in V$，此时即得

$$f(g(t)) \in U$$

从而对任何 $U \in \mathcal{N}(B)$，存在 $W \in \mathcal{N}^\circ(C)$ 使得 $t \in W$ 时 $f(g(t)) \in U$，符合

$$\lim_{t \to C} f(g(t)) = B$$

的定义，得证。

* 这两种情况**存在本质不同**，一个是 $f(x)$ 可以补上中间的空心，一个是 $g(x)$ 不会碰到中间的空心，可对比**题 40** 的反例思考为何成立。

* 由定义，A 为无穷时事实上两种情况都会满足。

这里也给出一道例题：

题 48. 证明

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$$

解答:

– 作为计算题的**过程书写**

对于未知的指数，一个常见技巧是将其**取对数**，即写成 (由 $x \to 0^+$ 可知 $x > 0$，这步一定成立)

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{x \ln x}$$

进一步地，由于我们已经证明了无穷处的阶估算，设 $t = \frac{1}{x}$，由定义可发现 $x \to 0^+$ 时 $t \to +\infty$，从而

$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{x \ln x} = \mathrm{e}^{\lim_{x \to 0^+} x \ln x} = \mathrm{e}^{\lim_{t \to +\infty}(-\ln t/t)}$$

由**题 46** 可知指数上的极限为 0，从而原式极限为 1。

– **严谨性补充**

我们接下来将用**推广的复合函数极限**证明中间那个看起来并没有依据的三连等。

利用 $\lim_{t \to +\infty}(-\ln t/t) = 0$，记 $f(t) = -\ln t/t$，$g(x) = \frac{1}{x}$，由已证可知

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$$

由于最终计算的是 $+\infty$ 处，根据推广的复合函数极限可知

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} f(g(x)) = \lim_{t\to +\infty} f(t) = 0$$

我们接下来记 $g_0(x) = x\ln x$、$f_0(t) = \mathrm{e}^t$，由于已知

$$\lim_{x\to 0^+} g_0(x) = 0, \quad \lim_{t\to 0} f_0(t) = 1$$

由于 e^t 在 $t=0$ 处连续，再次利用推广的复合函数极限可知

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} f_0(g_0(x)) = \lim_{t\to 0} f_0(t) = 1$$

这就得到了证明。

* 可以发现，虽然计算极限时我们看似是在从左往右进行推导，真实的严谨性证明其实是**从右往左**的，这也能解释为何算出极限后无需进一步验证极限存在，因为我们的计算过程**实质上没有假定极限存在**，而是**从最右侧已知的极限结论一路向左推导出极限。**

在之后的计算题中，解答将只会书写上方的直接换元过程，但**非常建议大家自己尝试给一些计算过程补全严谨性**，以真正理解无穷处极限的作用。此外，与例题中类似可以证明，以下两个极限必然情况相同(同时不存在或同时为相同的极限数)

$$\lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

这是一个重要的**换元**过程。

* 左侧极限存在推右侧需利用证明中 $g(t)\neq A$ 的情况，右侧极限存在推左侧需利用证明中 A 为无穷的情况。

此外，还有**推广的归结原理**，可以解决涉及无穷时的数列极限问题，之后也将看到例子：

题 49 (附加)**.** 证明

$$\lim_{x\to A} f(x) = B$$

当且仅当对任何满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

且 a_n 均不等于 A 的数列 a_n 有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = B$$

这里 A、B 为极限数，定义见本讲义 4.1.1 结尾。

* 若 A 为无穷，$a_n \neq A$ 直接成立；若 A 为 $x_0^{\pm}$，要求 $a_n \neq x_0$。

解答：

- **上推下**

  由函数极限定义可知

$$\forall U\in\mathcal{N}(B), \quad \exists V\in\mathcal{N}^\circ(A), \quad \forall x\in V, \quad f(x)\in U$$

  由此，对于任何 $U\in\mathcal{N}(B)$，取出上述 V，由定义 $V\cup\{A\}$ (若 A 为无穷将 $\{A\}$ 视为空集) 是 A 的邻域，再利用数列极限定义可知

$$\exists N, \quad \forall n>N, \quad a_n\in V\cup\{A\}$$

已知 $a_n \neq A$ 即得到

$$\exists N, \quad \forall n > N, \quad a_n \in V$$

从而 $n > N$ 时 $f(a_n) \in B$，符合数列极限定义。

– **下推上引理**

我们希望证明，存在一列 $\mathcal{N}^\circ(A)$ 中的 $U_1, U_2, \dots$，使得

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$$

$$\forall U \in \mathcal{N}^\circ(A), \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n \subset U$$

分类构造：

1. 若 $A = x_0$，取 $U_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0) \cup (x_0, x_0 + \frac{1}{n})$。
2. 若 $A = x_0^+$，取 $U_n = (x_0, x_0 + \frac{1}{n})$；
3. 若 $A = x_0^-$，取 $U_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0)$；
4. 若 $A = \infty$，取 $U_n = (-\infty, -n) \cup (n, +\infty)$；
5. 若 $A = +\infty$，取 $U_n = (n, +\infty)$；
6. 若 $A = -\infty$，取 $U_n = (-\infty, -n)$。

利用定义可直接验证成立。

* 数列极限中已经证明，极限定义中的对任何 $\varepsilon > 0$ 可以改为对任何 $\frac{1}{m}$，其中 m 为正整数。本质上，这即是由于对任何 $\varepsilon > 0$，$(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ **一定包含某个** $(l - \frac{1}{m}, l + \frac{1}{m})$。将其进行推广即得到此引理。

* 从下方的过程可以看出此引理是用来**构造数列**。

– **下推上**

仍然采用**反证**的思路。若

$$\lim_{x \to A} f(x) \neq B$$

根据定义可知

$$\exists U \in \mathcal{N}(B), \quad \forall V \in \mathcal{N}^\circ(A), \quad \exists x \in V, \quad f(x) \notin U$$

取出符合条件的 U。考虑引理构造的 U_n，由于 $U_n \in \mathcal{N}^\circ(A)$，存在 U_n 中元素 t 使得 $f(t) \notin U$，将 t 记为 a_n。

由 $U_n \in \mathcal{N}^\circ(A)$ 可知 $a_n \neq A$，另一方面，对任何 $W \in \mathcal{N}(A)$，由于 W 去除 A 后在 $\mathcal{N}^\circ(A)$ 中，存在 N 使得 $U_N \subset W$，又由 U_n 之间的包含关系可知

$$\forall n > N, \quad U_n \subset W$$

于是

$$\forall n > N, \quad a_n \in W$$

这就证明了 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$。

另一方面，根据定义，对 B 的邻域 U，任何 n 都满足 $f(a_n) \notin U$，于是 $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ 不可能为 B，从而得到了矛盾。

最后是一些有关无穷极限加减乘除的结论，这些结论的验证相对简单，大家可以自行从定义推导，为方便，我们将 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ **简记**为 $a_n \to A$，下方的 x_0 均指实数：

- $a_n \to +\infty$、$b_n \to x_0$，则 $a_n + b_n \to +\infty$；
- $a_n \to -\infty$、$b_n \to x_0$，则 $a_n + b_n \to -\infty$；
- $a_n \to \infty$、$b_n \to x_0$，则 $a_n + b_n \to \infty$；
- $a_n \to +\infty$、$b_n \to +\infty$，则 $a_n + b_n \to +\infty$；
- $a_n \to \pm\infty$、$b_n \to x_0$ 且 $x_0 > 0$，则 $a_n b_n \to \pm\infty$；
- $a_n \to \pm\infty$、$b_n \to x_0$ 且 $x_0 < 0$，则 $a_n b_n \to \mp\infty$；
- $a_n \to \infty$、$b_n \to x_0$ 且 $x_0 \neq 0$，则 $a_n b_n \to \infty$；
- $a_n \to \infty$、$b_n \to x_0$，则 $\frac{b_n}{a_n} \to 0$；
- $a_n \to 0$，则 $\frac{1}{a_n} \to \infty$。

* 利用上述结论还可以组合出一些其他结论，如 $a_n \to +\infty$、$b_n \to -\infty$ 时 $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$，从而趋于 $+\infty$。
* 上方以数列为例，**对函数极限有完全相同的结论**。

§4.2　阶估算 II

4.2.1　涉及无穷的极限

接下来，我们将灵活运用前面证明的函数极限相关的定理与**估算**手段，来计算一些涉及无穷的极限。

题 50. 证明对多项式 f、g 有

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

解答：

与之前类似，要证其极限为 0 只要证明此对绝对值成立，再取 ln 得到其为 ($\exp(x)$ 即表示 e^x)

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2} + \ln|f(x)| - \ln|g(x)| \right)$$

我们下面证明

$$\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2} + \ln|f(x)| - \ln|g(x)| \right) = -\infty$$

再结合利用定义得到的

$$\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

即可由推广的复合函数极限得到结论。

由**题 46** 已证有

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

换元 $t = \frac{1}{x}$ 可得

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$$

利用 $\ln x^k = k\ln x$，在 0 附近将低次项放大到高次项，可得存在 $M_1 > 0$、$M_2 > 0$、$\delta > 0$ 使得

$$\forall x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta), \quad \big|\ln|f(x)| - \ln|g(x)|\big| \le M_1|\ln x| + M_2$$

* 建议大家自己**严格证明**这步放缩，思路：将 $f(x)$ 写为 $x^k f_0(x)$，且 $f_0(x)$ 是不以 x 为根的多项式，其在 0 处趋于某非零常数 a，从而存在 0 的去心邻域使得附近 $|\ln|f(x)|| \le k\ln|x| + |\ln|a|| + 1$。由此可知 (后半部分趋于 0，前半部分趋于 $-\infty$)

$$\lim_{x\to 0}|x|\left(-\frac{1}{x^2}+\ln|f(x)|-\ln|g(x)|\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{|x|}+|x|(\ln|f(x)|-\ln|g(x)|)\right)=-\infty$$

从而 (它是上方的 $-\infty$ 乘 $\frac{1}{|x|}$，后者极限为 $+\infty$)

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\ln|f(x)|-\ln|g(x)|\right)=-\infty$$

* 由此可以看出善用**无穷加减乘除**的重要性，可以完全避免复杂的估算。

我们下面把数列极限中 e **的定义**推广至函数极限：

题 51. 证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

并计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}}$$

解答：

分为三个部分证明：

- $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

  我们先证明

  $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\mathrm{e}$$

  第一个极限可以直接利用乘积极限结论，通过

  $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

  得到，第二个极限将乘改为除即可，结论不变。

  我们记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，则 $[x]\le x<[x]+1$，从而根据指数函数的单调性可知当 $x>0$ 时

  $$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

  与本讲义 3.1 第 11 题完全类似，我们可以利用数列极限与函数极限定义得到

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\mathrm{e}$$

  从而由推广的夹逼定理即得结论。

  * 将函数相关问题极限放缩到**相邻整数**是将数列极限结论推广至函数极限的重要方法。

- $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

  由于我们已经知道 $+\infty$ 的结论，我们尝试进行换元 $t=-x$ 并化简得到原极限等于

  $$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}$$

接下来利用乘积极限结论即有

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

左侧极限为 e 是进行了 $s=t-1$ 的换元，右侧极限为 1 可直接由定义得到。

– $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}}=\mathrm{e}^{-1}$

首先，根据推广的归结原理，要证明上式只需证明 (注意上式**不能推出**下式，但下式可以推出上式)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x+1}}=\mathrm{e}^{-1}$$

为证明此式，我们利用指数函数的连续性，取 ln 将其改写为要证

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-1$$

而由 e 的极限结论与对数函数的连续性，将 $-\sqrt{x}$ 看作整体换元为 t 可以得到

$$\lim_{x\to+\infty}(-\sqrt{x})\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\sqrt{x}}=\ln\mathrm{e}=1$$

由此即利用乘积极限得

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}(-\sqrt{x})\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{\sqrt{x+1}}{-\sqrt{x}}=1\cdot(-1)=-1$$

* 本质来说，我们对于指数上的 x 只有**取对数**一种处理方式，至于中间为何能想到“凑出”一个 $-\sqrt{x}$，我们将在学习**等价无穷小替换**后进一步理解。

不过，值得注意的是，函数的极限与在哪点取相关 (这似乎是一句废话)，不能看到对应的形式就直接认为是 e：

题 52. 计算

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

解答：

取 ln 后我们可以先计算

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

由于其为

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln(1+x)-x\ln x)$$

第一部分利用连续性代入 $x=0$ 可知极限为 0，第二部分在**题 50** 中已经证明极限为 0，从而此极限为 0，由此利用 e 的连续性即得原极限趋于

$$\mathrm{e}^0=1$$

* 这里使用的 $x\ln x$ 在 $x\to 0^+$ 时趋于 0 是一个较基础的极限结论。事实上可以得到对任何 a 都有 $x|\ln x|^a$ 在 $x\to 0^+$ 时趋于 0，此为**题 46** 的**直接推论**，可以直接使用。

我们这里再推广一个数列极限时得到的结论以方便之后使用：

题 53. 对关于 x 的两个非零多项式 $p(x)$ 与 $q(x)$，计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$$

解答：

对无穷处极限，与**题 10** 使用相同的技巧，设

$$p(x)=\sum_{k=0}^{s}p_kx^k,\quad q(x)=\sum_{k=0}^{t}q_kx^k$$

且首项系数 $p_s\neq 0$、$q_t\neq 0$，分情况讨论：

- 若 $s<t$，分子分母同除以 x^t，利用

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

与数列极限类似讨论得到分子极限为 0、分母极限为 q_t，从而利用乘除极限结论可知极限为 0。

- 若 $s=t$，分子分母同除以 x^s，与上方类似讨论得到分子极限为 p_s、分母极限为 q_t，由它们都非零，极限为非零常数 $\frac{p_s}{q_t}$。
- 若 $s>t$，分子分母同除以 x^s，与上方类似讨论得到分子极限为 p_s，分母极限为 0，利用无穷极限组合相关的结论即知此时极限为 ∞。

对 0 处极限，我们需要进行**反向**的假设

$$p(x)=\sum_{k=s_0}^{s}p_kx^k,\quad q(x)=\sum_{k=t_0}^{t}q_kx^k$$

且**最低次项**系数 $p_{s_0}\neq 0$、$q_{t_0}\neq 0$。作代换 $t=\frac{1}{x}$ 可发现

$$\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{k=s_0}^{s}p_kt^{-k}}{\sum_{k=s_0}^{s}p_kt^{-k}}$$

分子分母同乘 t^M，这里 $M=\max\{s,t\}$，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{k=s_0}^{s}p_kt^{M-k}}{\sum_{k=s_0}^{s}p_kt^{M-k}}$$

此时分子分母均成为了 t 的多项式，且 p、q **的最低次项成为了此时的最高次项**，次数分别为 $M-s_0$ 与 $M-t_0$，从而由上一部分结论可知：

- 若 $s_0<t_0$，极限为 ∞；
- 若 $s_0=t_0$，极限为 $\frac{p_{s_0}}{q_{t_0}}$；
- 若 $s_0>t_0$，极限为 0。

* 由此推广到函数后多项式除法的极限**无穷时**只与**最高次项**有关，**0 处**只与**最低次项**有关，本质是相对**最大**的一项。

从上面这些数列极限定理的推广中，我们可以感受到函数极限也存在**阶**的概念，不过似乎会更加复杂。在正式介绍其定义之前，我们对 $\ln n$ 趋于无穷的**速度**进行估算，并推广一个更复杂的数列极限结论：

题 54. 已知当 $x > -1$ 时 $\ln(1+x) \le x$，证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

存在，以此证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$$

* 题干中的不等式对 ln 相关的估算**较为重要**，在高中阶段往往已经证明，之后学到导数时我们将进一步介绍。
* 此极限往往称为**欧拉常数**，记为 γ。

解答:

由于我们并不知道此数列的极限，证明极限存在的工具就只有**单调有界**。我们尝试证明它的单调性与有界性：

- **单调性**

  为研究单调性，我们将相邻两项作差并化简得到

  $$\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1}$$

  在题干不等式中取 $x = -\frac{1}{n+1}$ 可以发现

  $$-\frac{1}{n+1} - \ln\frac{n}{n+1} \ge 0$$

  从而得证此数列单调减

- **有界性**

  由单调减可知所有项不会超过第一项，从而有上界。我们下面证明它有下界 0，即得证有界。在题干不等式中取 $x = \frac{1}{n}$ 可以发现

  $$\frac{1}{n} \ge \ln\frac{n+1}{n}$$

  求和得到

  $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k} = \ln(n+1)$$

  由此即得 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \ge \ln n$，得证存在下界 0。

证明单调有界后，由于 $\ln n$ 在 $n\to\infty$ 时极限为正无穷，利用无穷极限组合的结论即得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$$

最后这道较复杂的证明题是对于无穷极限定义与数列极限推广到函数极限的更复杂应用：

题 55. 对连续函数 f，若

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = a$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$

解答：

我们仍然先分析再进行证明：

- **初步分析**

  我们在数列极限中常用下面的**数列平均极限**结论：即若

  $$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

  则有

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

  它是**题 9** 的一种特殊情况 (所有 p_i 取为 1)，可以用相同的方法证明。

  如果我们将 $a_1+\cdots+a_n$ 记为 S_n，有 $n>1$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}$，从而结论可以写成，若

  $$\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=a$$

  则有

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=a$$

  此形式已经与我们要证的形式几乎相同了，由此我们实质上希望将此数列极限结论**推广**到函数极限。

- **失败的尝试**

  如果取 $S_n=f(n)$，由推广的归结原理有

  $$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n)=a$$

  从而可以得到

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=a$$

  事实上，对任何 $t\in[0,1)$，取 $S_n=f(n+t)$，我们都可以利用归结原理得到

  $$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n)=\lim_{n\to\infty}(f(n+t+1)-f(n+t))=A$$

  从而

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+t)}{n}=a$$

  再利用 $n+t$ 除以 n 极限为 1 即得

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+t)}{n+t}=a$$

  但是，即使有这些结论，我们也无法导出所需的函数极限。这是由于如果想使用归结原理，我们需要说明 $f(a_n)/a_n$ 极限为 a 对**任意一个**趋于无穷的数列 a_n 成立，而不是只对特定的一些数列成立。因此，需要进行更好的放缩才能通过数列极限结论控制。

- **初步处理**

  记 $\Delta(x)=f(x+1)-f(x)$，则条件变为

  $$\lim_{x\to+\infty}\Delta(x)=a$$

我们根据数列极限的思路，对 $x>0$，先进行拆分

$$f(x)=\Delta(x-1)+\Delta(x-2)+\cdots+\Delta(\{x\})+f(\{x\})$$

这里 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的小数部分。

我们先解决划分后剩余的 $f(\{x\})$ 部分。由于 f 连续，f 在 $[0,1]$ 上的最大值、最小值都存在，设最大值 M，最小值 m，有 $x>0$ 时

$$\frac{m}{x}\leq\frac{f(\{x\})}{x}\leq\frac{M}{x}$$

从而利用夹逼定理即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\{x\})}{x}=0$$

于是去掉这项得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\Delta(x-1)+\Delta(x-2)+\cdots+\Delta(\{x\})}{x}$$

– **放缩**

为了能利用数列极限结论进行放缩，我们希望对求和进行控制。由于 $\Delta(x)=f(x+1)-f(x)$ 也是连续函数，它在每个区间上存在最大值最小值，由此对正整数 n 可以考虑区间 $[n-1,n]$，其上 $\Delta(x)$ 在 b_n 处取到最大值 M_n，在 c_n 处取到最小值 m_n。

接下来的关键在于以下估算：在 $x>0$ 时

$$\frac{\Delta(x-1)+\Delta(x-2)+\cdots+\Delta(\{x\})}{x}\geq\frac{m_1+m_2+\cdots+m_{[x]}}{x}$$
$$\frac{\Delta(x-1)+\Delta(x-2)+\cdots+\Delta(\{x\})}{x}\leq\frac{M_1+M_2+\cdots+M_{[x]}}{x}$$

这利用了取整的性质 $x\in[[x],[x]+1)$，从而 $x-1\in[[x]-1,[x])$，这就可以利用定义得到 $\Delta(x-1)\in[m_{[x]},M_{[x]}]$，同理 $\Delta(x-2)\in[m_{[x]-1},M_{[x]-1}]$...... 最后一项 $\Delta(\{x\})\in[m_1,M_1]$，这样即能放缩得到结论。

– **夹逼**

由于 $b_n\geq n-1$，利用定义可发现 $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$，从而根据推广的归结原理有

$$\lim_{n\to\infty}M_n=\lim_{n\to\infty}\Delta(b_n)=a$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_1+\cdots+M_n}{n}=a$$

从而与本讲义 3.1 第 11 题完全类似可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M_1+\cdots+M_{[x]}}{[x]}=a$$

再由 $x>0$ 时

$$\frac{x-1}{x}\leq\frac{[x]}{x}\leq\frac{x}{x}$$

可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$$

通过乘积极限最终得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M_1+\cdots+M_{[x]}}{x}=a$$

同理

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{m_1+\cdots+m_{[x]}}{x}=a$$

从而由夹逼定理可得到最终结论。

* 当然，这道题也可以由定义直接证明，其中会出现类似数列平均极限的证明过程。不过，上述的方法相较由定义证明思路更加清晰：将问题转化为我们**会处理的**情况。

4.2.2 无穷大的阶

对于函数极限，阶的定义与数列极限是类似的。先来看无穷大的阶，这里我们学习无穷大极限的定义以后，就无需通过倒数是无穷小来说明了：对极限数 A (实数或无穷)，假设 $f(x)$、$g(x)$ 在 A 处是无穷大，即

$$\lim_{x\to A} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to A} g(x)=\infty$$

若

$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

也即 $f(x)$ 在 A 处远比 $g(x)$ 大，则称 $f(x)$ 在 A 处是比 $g(x)$ 更**高阶**的无穷大。

反之，若

$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

则称 $f(x)$ 在 A 处是比 $g(x)$ 更**低阶**的无穷大 (上式等价于 $g(x)$ 在 A 处是比 $f(x)$ 更高阶的无穷大)。

最后，若存在**同正或同负**的常数 m、M 使得在 A 的某个邻域成立

$$mf(x)\le g(x)\le Mf(x)$$

则称 $f(x)$、$g(x)$ 是在 A 处**同阶**的无穷大。

若 $\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且非零，可以由定义推出 $f(x)$、$g(x)$ 是在 A 处同阶的无穷大。这是同阶无穷大最常用的判定方式。更进一步地，若有

$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

则称 $f(x)$、$g(x)$ 是在 A 处**等价**的无穷大。

我们仍然可以定义无穷大的**阶数**，虽然它比数列极限更加复杂：对 $k>0$，A 处的 k 阶无穷大是指：

- 若 A 为 $\pm\infty$ 或 ∞，在 A 处与 x^k 同阶的无穷大。
- 若 A 为实数，在 A 处与 $(x-a)^{-k}$ 同阶的无穷大。

当然，不是所有无穷大都有阶，例如，由于已经证明了对任何 $k>0$ 都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{\mathrm{e}^x}=0$$

在 $+\infty$ 处，e^x 不是任何阶的无穷大。

在本讲义 2.4 中，我们已经证明了数列极限中计算**乘除极限**时可以**将等价的无穷大进行替换**，且高阶与低阶无穷大之和与高阶无穷大等价。这两个结论在函数极限中可以用完全相同的方法证明，也可以从它们出发进行一些估算：

题 56. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+2x^3}}{\sqrt{x^2+x^3}+x}$$

解答：

考虑分子分母次数最高的项 (这件事主要依靠**感受**而非严格的分析)，应均为根号下的 x^3，对应次数为 $\frac{3}{2}$，由此分子分母同除以 $x^{3/2}$ 得到原式等于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^{-3}+2}}{\sqrt{x^{-1}+1}+x^{-1/2}}$$

由此利用初等函数连续性可直接得到此极限结果为

$$\frac{\sqrt{0+2}}{\sqrt{0+1}+0}=\sqrt{2}$$

题 57. 对实数 k，判断极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}\ln(1+x^3)\sin x^2}{x^k\arctan x}$$

存在的条件并计算极限。

解答：

由于这里出现了很多项，我们先研究每一项趋于无穷的极限结果 (以下结果对于现在的学习阶段来说应当是不难证明的)：

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$$

且是一个一阶的无穷大，

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x^3)=+\infty$$

且远小于任何多项式，

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

最后的 $\sin x^2$ 有下界 -1、上界 1，但在 $x\to+\infty$ 时极限不存在。

有了这些结果，我们分两种情况证明：

– 当 $k>1$ 时，极限为 0。

  此时分子分母同除以 x 得到原极限等于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^{k-1}}\frac{\sqrt{1+x^{-2}}}{\arctan x}\sin x^2$$

  由于 $k-1>0$，利用乘积极限 ($\ln$ 的部分除以 x^{k-1} 后由**题 46** 的结论可得极限为 0) 可知 $\sin x^2$ 前的所有项在 $x\to+\infty$ 时极限为 0，而**有界量乘无穷小还是无穷小** (这可以用定义直接证明)，从而乘 $\sin x^2$ 后极限也为 0。

  * 若对有界量乘无穷小的结论不熟，也可以利用 $|f(x)\sin x^2|\le|f(x)|$ 进行夹逼。

– 当 $k\le1$ 时，极限不存在且不为无穷。

  此时仿照前一种情况进行处理，可发现 $\sin x^2$ 前得所有项在 $x\to+\infty$ 时极限为 $+\infty$，将它们记为 $f(x)$，下证 $f(x)\sin x^2$ 在 $x\to+\infty$ 时极限不存在。

  对正整数 n，考虑 $a_n=\sqrt{2n\pi}$、$b_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则 $\sin a_n^2=0$、$\sin b_n^2=1$，而利用定义可发现

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$$

从而通过推广的归结原理得到

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)\sin a_n^2 = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n)\sin b_n^2 = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = +\infty$$

若 $f(x)\sin x^2$ 在 $x\to+\infty$ 时极限存在或为无穷，利用归结原理，上述两极限应相同，矛盾，从而极限不存在且不为无穷。

* 仍然注意**归结原理**在证明极限不存在时的应用，三角函数的周期性可以提供有效的取点。

* 这道题看似困难，但从阶估算的角度来说实际上是**基础**的，只是相对复杂而已。本质上，我们是将所有能算出极限的部分估算出阶，进而分类后与 $\sin x^2$ 进行组合。

还有一些更复杂的阶相关的问题：

题 58. 考虑满足递推

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

的数列 a_n，证明只要 $a_1 > 0$ 即有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

附加：进一步证明这是一个 $\frac{1}{2}$ 阶的无穷大，并计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

解答：

从直观来看，我们能够利用递推写出等式 (无法直接看出下式的同学可以归纳证明)

$$a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{a_1} + a_1$$

不过，如果采用这个思路，我们需要证明 a_n 所有项的倒数之和趋于无穷，这是一个十分**难以估算**的结构。

我们接下来介绍两种可以进行估算的思路：

– **单调无界**

由于 $a_1 > 0$，利用

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n}$$

可归纳得到 a_n 单调递增。由此，我们只需证明其无上界即可得到趋于正无穷：若 a_n 无上界，对任何实数 M，存在 N 使得 $a_N > M$，利用单调性即得 $n > N$ 时 $a_n > M$，符合极限是正无穷的定义。

我们采用反证法，若 a_n 有上界，利用单调有界定理可知极限必然存在，设为 a，由 $a_1 > 0$ 且单调增可知 $a \ge a_1 > 0$，从而**递推式两侧同取极限**得到

$$a = a + \frac{1}{a}$$

此方程无解，矛盾，因此得证。

* 递推式两侧同取极限是一个重要的技巧，我们之后还将进一步介绍。

* 不过，单调无界的思路无法对接下来证明阶数有帮助，因为它只给了一个定性的收敛结果，没有进行任何的**估算**。

- **阶数分析**

  既然题干已经说明了这是 $\frac{1}{2}$ 阶的无穷大，我们希望能构造 a_n^2 相关的关系式——这应当是一个更好估算的一阶无穷大。

  记 $b_n = a_n^2$，将递推时两侧同时平方即可由完全平方公式发现

  $$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n} + 2$$

  由于 $b_{n+1} - b_n$ 每次都比 2 多一些，b_n 应当比 $2(n-1) + b_1$ 要大，但也不至于超过太多。我们最后从上式出发计算极限，思路是用**差分** (相邻两项差) 估算原数列除以 n 极限：归纳可以证明 $b_n > 0$，从而

  $$b_{n+1} > b_n + 2$$

  由此利用定义可知 $b_n \to +\infty$，于是有

  $$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n} + 1\right) = 2$$

  利用**数列平均极限**的结论变形 (见**题 55** 第一部分) 即得

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 2$$

  再由幂函数连续性与归结原理最终得到

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$$

  * 用**差分估算**原数列除以 n 极限的思路我们之后还将用到，由此数列平均极限的结论与其变形都是重要的。

4.2.3 无穷小的阶

有了无穷大的阶，我们还可以定义无穷小的阶。无穷小事实上就是指极限为 0 的数列或函数，由此，若对极限数 A，假设 $f(x)$、$g(x)$ 满足

$$\lim_{x\to A} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to A} g(x) = 0$$

且**在 A 的某去心邻域恒非 0** (这是为了保证下方的极限可以定义)，若

$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

也即 $f(x)$ 在 A 处远比 $g(x)$ 大，则称 $f(x)$ 在 A 处是比 $g(x)$ 更**低阶**的无穷小。

反之，若

$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

则称 $f(x)$ 在 A 处是比 $g(x)$ 更**高阶**的无穷小。

* 也即越大的无穷大越高阶，越小的无穷小越高阶。某种意义上，若 f 在 A 的某去心邻域恒 0，我们可以认为 f 是“最高阶”的无穷小。

最后，若存在**同正或同负**的常数 m、M 使得在 A 的某个邻域成立

$$mf(x) \le g(x) \le Mf(x)$$

则称 $f(x)$、$g(x)$ 是在 A 处**同阶**的无穷小。

若 $\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且非零，可以由定义推出 $f(x)$、$g(x)$ 是在 A 处同阶的无穷小，更进一步地，若有

$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

则称 $f(x)$、$g(x)$ 是在 A 处**等价**的无穷小。

无穷小的**阶数**定义如下：对 $k>0$，A 处的 k 阶无穷小是指：

- 若 A 为 $\pm\infty$ 或 ∞，在 A 处与 x^{-k} 同阶的无穷小。
- 若 A 为实数，在 A 处与 $(x-a)^k$ 同阶的无穷小。

与无穷大类似，计算**乘除极限**时可以**将等价的无穷小进行替换**，且低阶与高阶无穷小之和与低阶无穷小等价。为了避免叙述无穷大、无穷小高低阶产生的歧义，我们引入两个无论对无穷大还是无穷小都成立的记号：

- 若 $f(x)$、$g(x)$ 满足
$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$
则称 $f(x)$ 在 A 处**远小于** $g(x)$，记为
$$f(x)=o(g(x))\quad(x\to A)$$
还可能出现
$$f(x)=g(x)+o(h(x))\quad(x\to A)$$
这类式子，它表示的实际含义是
$$f(x)-g(x)=o(h(x))\quad(x\to A)$$
* 注意此处等号的含义**并非相等**，而是与 o **合在一起表示远小于**。
- 若 $f(x)$、$g(x)$ 满足
$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$
则称 $f(x)$ 在 A 处**等价于** $g(x)$，记为
$$f(x)\sim g(x)\quad(x\to A)$$

这两个记号在计算极限或进行替换时非常有用，具体来说，某点处若 $f(x)=o(g(x))$，则 $f(x)+g(x)\sim g(x)$；若 $h(x)\sim g(x)$，计算**乘除**极限时可以直接将 $h(x)$ 与 $g(x)$ 相互替换。
* 教材可能还会引入 O 等记号，不过为清楚起见，本讲义中将只使用上述两个渐近记号。

让我们先计算三个极限：

题 59. 对正实数 a 与实数 α，计算

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x},\quad\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$$

解答：

- 对第一个极限，作换元 $t=\frac{1}{x}$，直接由 ln 的性质与连续性可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{t\to\infty}\ln(1+t^{-1})^t=\ln\mathrm{e}=1$$

  * 思路的本质来源是，我们尚未学过任何 ln 相关的结论，因此只能都放到内部处理，看出形式后再向 e 的极限凑换元。

- 对第二个极限，作换元 $t=a^x$，利用对数换底公式可将原极限化为

$$\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\ln t}\ln a$$

  再进行换元 $s=t-1$ 即得到上式等于

$$\lim_{s\to 0}\frac{s}{\ln(s+1)}\ln a$$

  利用第一个极限与乘除极限结论即得结果为 $\ln a$。

  * 思路的本质来源是，我们对 a^x 尚未学过好的处理方式，因此尝试设为整体 t 可得到代换 $x=\log_a t=\frac{\ln t}{\ln a}$；我们尚未学过 1 处的极限，因此再换元到 0 处，这样就变成可以处理的情况了。

- 对第三个极限，尝试像第二个极限一样将 $(1+x)^\alpha$ 设为整体可以发现难以真正化简，因为 x 与 t 的关系仍然是一个幂函数。

  不过，利用 $(1+x)^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}$（$x$ 充分接近 0 时 $1+x$ 能保证为正），我们可以联想到用指数的极限解决问题。设 $t=\alpha\ln(1+x)$，则原极限化为

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^{t/\alpha}-1}$$

  将这拆分为

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\cdot\frac{t}{\mathrm{e}^{t/\alpha}-1}$$

  乘积第一项极限为 1，第二项换元 $s=t/\alpha$ 可发现极限为 α，从而极限为 α。

  * 最后一步也可以利用 $t\to 0$、$t/\alpha\to 0$ 直接将 e^t-1 **替换**为 t，$\mathrm{e}^{t/\alpha}-1$ **替换**为 t/α，从而更快得到结论。这样替换的合理性见之后讨论。

* 由此可以看出最本质的做题方法是**转化为会做的问题进行处理**。

可以发现，这三个极限都代表了 0 处的**阶数**结论，本讲义将它们与三角函数、反三角函数的结论并称为**基本的等价无穷小**，也即以下六条：

$$\ln(1+x)\sim x\quad(x\to 0)$$

$$(a^x-1)\sim x\ln a\quad(x\to 0)$$

$$((1+x)^\alpha-1)\sim\alpha x\quad(x\to 0)$$

$$\sin x\sim\tan x\sim x\quad(x\to 0)$$

$$(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^2\quad(x\to 0)$$

$$\arcsin x\sim\arctan x\sim x\quad(x\to 0)$$

请大家**务必记忆**这些结论，此后我们将直接使用。补充四个注释：

- 第四条中 $\sin x \sim x$ 的证明见本讲义 3.3.4，$\tan x \sim x$ 只需将 tan 由定义展开后利用乘积极限结论即可；第五条的证明见本讲义 3.1 第 9 题 (2)；第四条将第三条的 x 换元为 $\arcsin t$ 或 $\arctan t$ 即可证明。
- 这里连续使用 $\sim$ 记号是合理的，因为根据定义可以证明，若 $f(x) \sim g(x)$、$g(x) \sim h(x)$，也有 $f(x) \sim h(x)$，连续使用表示三者相互等价。
- 仍然需要注意替换只有在乘除极限才能进行，因此，其他情况我们可以**设法将原本的极限中想替换的部分化到乘积中**再进行替换，之后将看到例子。
- 注意等价无穷小替换**只要是乘积中的无穷小就可以替换**。例如，假设 $x \to A$ 时 $f(x) \to 0$，我们通常可以把 $x \to A$ 时乘除极限中的 $\ln(1+f(x))$ 替换为 $f(x)$。这本质上是换元 $t = f(x)$ 后给原极限乘 t/t，由极限为 1 消去极限中 $\ln(1+t)/t$ 后再把 t 重新写成 $f(x)$ 的结果 (使用六个基本等价无穷小时，无需验证 A 的某邻域 $f(x)$ 非零，只要**乘除后在邻域有定义**就可以替换，详见本讲义 11.3.1)。

最后一条注释中的替换方法 (本讲义将它称为**推广的替换性质**) 相对来说没有那么容易证明，本部分中我们用到它时都会给出详细的推导过程，此后将直接使用。

我们可以利用这些结论解决一些直接的问题：

题 60. 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{\sin x+\ln(1-x^2)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}$$

解答:

– 第一个极限，换元可知 $x \to 0$ 时 $\tan(5x) \sim 5x$，$\sin x \sim x$、$\ln(1-x^2) \sim (-x^2)$，由高阶无穷小加低阶无穷小结果为低阶可知分母、分子应均为 1 阶无穷小。由此，分子分母同除以 x 得到原极限等于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan(5x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\ln(1-x^2)}{x}}$$

直接换元 $t = 5x$、$s = -x^2$ 计算可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t/5}=5$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{-x^2}(-x)=\lim_{s\to 0}\frac{\ln(1+s)}{s}\lim_{x\to 0}(-x)=1\cdot 0=0$$

由此利用乘除极限结论即得原极限为 $\frac{5}{1+0}=5$。

* 最开始进行阶数的估算只是为了确定分子分母需要同除以 x 的几次方 (一般应除以较低阶项的阶数)。当然，本题分子可以直接替换为 $5x$，不过分母仍然需要除以 x 进行处理，因为**加减极限无法直接替换**。

– 仍然由于加减极限无法直接替换，我们无法直接将 $\sin(2x)$、$2\sin x$ 都认为是 $2x$ 从而得到分母为 0。

由此，需要将 $\sin(2x)$ 展开为 $2\sin x\cos x$，此后即得原极限等于

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}-2\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}=-2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=-1$$

这里极限计算直接通过基本的等价无穷小即得。

或是简单的估算：

题 61. 若对任何实数 x 有

$$|a_1\sin x+a_2\sin(2x)+a_3\sin(3x)|\le|\sin x|$$

证明

$$|a_1+2a_2+3a_3|\le 1$$

解答：

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_1\sin x+a_2\sin(2x)+a_3\sin(3x)}{\sin x}=a_1+a_2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin x}+a_3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin x}$$

利用等价无穷小替换将分母替换为 x，再对第二式换元 $t=2x$，对第三式换元 $s=3x$，即可计算得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_1\sin x+a_2\sin(2x)+a_3\sin(3x)}{\sin x}=a_1+2a_2+3a_3$$

另一方面，由条件可知 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时 (此时分母无零点)

$$\frac{|a_1\sin x+a_2\sin(2x)+a_3\sin(3x)|}{|\sin x|}\le 1$$

两侧同时对 $x\to 0$ 取极限即得

$$|a_1+2a_2+3a_3|\le 1$$

从而得证。

4.2.4　更复杂的换元

在本章的最后一部分，我们在基本等价无穷小的基础上结合更多的代数处理技巧，来解决稍复杂的问题，请大家务必注意**推广的替换性质**该如何使用：

题 62. 若 $a>0$、$b>0$，计算

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}},\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

解答：

- **0 处极限**

  由于我们没有好的处理指数的方法，先取对数将它化为 (注意由于对数中为正，在定义域中，此变换合理)

  $$\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{x^{-1}\ln((a^x+b^x)/2)}$$

  利用 e 的连续性只需先计算

  $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}$$

  由于当 $x\to 0^+$ 时 $\frac{a^x+b^x}{2}\to 1$，有 $\frac{a^x+b^x}{2}-1\to 0$，将其看作整体 t，由于 $\ln(1+t)$ 与 t 是等价无穷小，可在乘除极限中替换 $\ln(1+t)$ 为 t 得到上述极限为

  $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)$$

直接通分展开即得此为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$$

由此原极限即为 $\mathrm{e}^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$。

– **无穷处极限**

我们通过**夹逼原理**的方法解决问题：不妨设 $a\le b$，直接由指数函数性质有 $x>0$ 时

$$\frac{b}{2^{\frac{1}{x}}}=\left(\frac{b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}<(b^x)^{\frac{1}{x}}=b$$

由此两边同取 0^+ 处极限即可由夹逼定理得到 (左侧极限为 0 在数列极限时已经进行了证明，函数极限证明类似)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=b$$

再考虑 $a>b$ 的情况即可最终得到

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\max\{a,b\}$$

* 这个方法的本质思路来自**阶估算**：当 $x\to+\infty$ 时，若 $b>a$，可以证明 $a^x=o(b^x)$，从而我们可以设法消除 a^x 项。

* 这道题按照常规思路 (换到 0 处后取对数) 处理无法得到结果，这是因为**不利用估算无法得出结果中 max 的部分**。不过，这也启示我们先提出指数的公共部分，也即当 $b>a$ 时计算

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=b\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a/b)^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=b$$

虽然这样做最后一步还是会用到夹逼，但实际上相对更容易想到。

题 63. 证明当右侧极限存在时

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{t}=4\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

解答:

这道题主要是为了介绍一种常见的错误：

– **失败的尝试**

我们尝试换元 $y=x-2t$，可以得到原式改写为

$$\frac{f(y+4t)-f(y)}{t}$$

再换元 $s=4t$ 可写为

$$4\frac{f(y+s)-f(y)}{s}$$

那么，我们是否可以从上式与 $t\to 0$ 时 $s\to 0$、$y\to x$ 得到结论成立呢？答案是**否定**的。

此错误的本质来源是并未正确理解换元法：对连续函数 f 与 t_0 处极限存在 (设为 l) 的函数 g，为计算 $f(g(t))$ 在 t_0 处极限，当我们希望利用

$$\lim_{t\to t_0}f(g(t))=f\left(\lim_{t\to t_0}g(t)\right)=f(l)$$

时，进行换元 $s=g(t)$ 后式子的形式应变为

$$\lim_{s\to l}f(s)$$

此式中**不会再含有原本的变量** t。与之相对，我们化出的式子

$$4\frac{f(y+s)-f(s)}{s}$$

中，**同时**出现了一次换元后的 y 与另一次换元后的 s，实际上出现了双重极限，而这是目前的知识无法处理的。

总结来说，将 t 换元成 s 一定需要**将所有的 t 都改为** s，不允许只改变部分。

– **正确的处理方法**

我们将左侧拆分为两部分，写成

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+2t)-f(x)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{f(x)-f(x-2t)}{t}$$

对一项换元 $s=2t$，第二项换元 $s=-2t$，即得上式为

$$2\lim_{s\to 0}\frac{f(x+s)-f(x)}{s}+(-2)\lim_{s\to 0}\frac{f(x)-f(x+s)}{s}$$

整理即得结论成立。

题 64. 计算

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$$

解答:

由于我们并不会处理 $\frac{\pi}{2}$ 处的极限结论，我们将它换元至 0 处。令 $y=\frac{\pi}{2}-x$ (也可以令 $y=x-\frac{\pi}{2}$，不过尝试发现这样更简便)，换元可得原式等于

$$\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\cot y}$$

对于指数，由于 $\cos y$ 在 0 附近为正，我们仍然直接取对数得到只需计算

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln\cos y}{\tan y}$$

由于 $y\to 0$ 时 $\cos y-1\to 0$，将分子看作 $\ln(1+(\cos y-1))$，利用推广的替换性质得到原极限为

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{\tan y}$$

再次利用基本的等价无穷小替换得到此为

$$\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{1}{2}y^2}{y}=0$$

从而原极限为 $\mathrm{e}^0=1$。

* 注意取对数后**最后一步不要忘记算 e 指数**。

题 65. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\big(\ln(x^2+x)-2\ln(x+1)\big)$$

解答：

首先，注意这里含 ln 的项可以化简为

$$\ln\frac{x^2+x}{(x+1)^2}=\ln\frac{x}{x+1}$$

同样利用换元 $t=\frac{1}{x}$ 将极限换到 0^+ 处得到原极限等于

$$\lim_{t\to0^+}\frac{t+1}{t}\ln\frac{1}{t+1}$$

由于 $t\to0^+$ 时 $\frac{1}{t+1}-1\to0$，将 ln 项看作 $\ln\left(1+\frac{1}{t+1}-1\right)$，利用推广的替换性质得到原极限为

$$\lim_{t\to0^+}\frac{t+1}{t}\left(\frac{1}{t+1}-1\right)=-1$$

这即是结论。

题 66. 计算

$$\lim_{x\to0}\frac{(3+x)^x-3^x}{x^2}$$

解答：

由于直接计算难以处理，我们先从指数中提出公共部分 3^x 得到原式为

$$\lim_{x\to0}3^x\frac{(1+\frac{x}{3})^x-1}{x^2}$$

利用乘积极限可直接由 $3^0=1$ 得到上式等于

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+\frac{x}{3})^x-1}{x^2}$$

* 即使不确定原极限是否存在，这么做也是正确的，因为利用乘除极限反证可发现，如果下方极限不存在也能得到上方极限**不存在**。

由于指数无法处理，我们仍然化为对数得到其为

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(1+x/3)}-1}{x^2}$$

由初等函数连续性可知 $x\to0$ 时 $x\ln(1+x/3)\to0$，将其看作整体，利用推广的替换性质即可将 $\mathrm{e}^{x\ln(1+x/3)}-1$ 替换为 $x\ln(1+x/3)$，从而原极限等于

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{x}{3})}{x}$$

再次利用推广的替换性质可将分子替换为 $\frac{x}{3}$，从而原极限即为 $\frac{1}{3}$。

当然，函数极限的问题可以远比上面这些情况困难，那时我们往往会需要更加**标准化**的工具，也即一些更通用的处理方法。不过，在期中考试的范围内，目前介绍的技巧——**换元到 0 处后用对数处理指数并进行等价无穷小替换逐步化简**——已经足以解决具体函数的极限计算问题了。

当然，提出指数公共部分、用对数运算律进行化简这些小技巧仍然需要熟练，此外，证明极限**不存在**需要的取子列技巧也是重要的，例如对以下更困难的问题：

题 67. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$$

是否存在实数 k 使得极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^k(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

为非零常数？

解答：

本讲义 3.3.4 已经证明了估算 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$，从而有

$$|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}|\le|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}|=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{2}{\sqrt{x}}$$

由于右侧在 $x\to+\infty$ 时极限为 0，利用夹逼定理即得上方极限为 0。

下面证明不存在 k 使得下方极限为非零常数。分类讨论：

– 当 $k<\frac{1}{2}$ 时，与上方相同可知

$$|x^k(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})|<2x^{k-1/2}$$

由于右侧在 $x\to+\infty$ 时极限为 0，利用夹逼定理即得此时下方极限为 0。

– 当 $k=\frac{1}{2}$ 时，我们需要使用更精确的估算技巧以说明此时极限不存在。

核心思路为，既然已知 $\sin\sqrt{x+1}$ 与 $\sin\sqrt{x}$ 将会无限接近，我们希望能直接刻画出它们的差，也就是以**和差化积公式** (这类公式无需特地去记，记得和差角公式后从重点现推即可) 将它改写为

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})&=2\sqrt{x}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\\&=2\sqrt{x}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\end{aligned}$$

由于 sin 中的部分在 $x\to\infty$ 时趋于 0，利用推广的替换性质可知

$$\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{x}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2}$$

这里第二个等号直接将分子分母同除以 $\sqrt{x}$ 后利用初等函数连续性即得。

将此部分记为 $f(x)$，我们下面即要证明极限

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

不存在。

* 之后采取的思路很接近**题 57**，但由于无法显式取点，过程将更加复杂。

由于 $x>0$ 时

$$\sqrt{x}<\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}<\sqrt{x+1}$$

对任何 $t>1$，分别在上式取 $x=t^2$ 与 $x=t^2-1$ 可以得到

$$\frac{\sqrt{t^2}+\sqrt{t^2-1}}{2}<t<\frac{\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2}}{2}$$

记 $g(x)=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$，上式说明 $g(t^2-1)<t$、$g(t^2)>t$，由于 g 为连续函数，根据**介值定理**可知存在 $\xi\in(t^2-1,t^2)$ 使得 $g(\xi)=t$。

分别取 $t=2n\pi$、$t=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，其中 n 为正整数，可知存在

$$a_n\in((2n\pi)^2-1,(2n\pi)^2),\quad \frac{\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_n}}{2}=2n\pi$$

$$b_n\in((2n\pi+\pi/2)^2-1,(2n\pi+\pi/2)^2),\quad \frac{\sqrt{b_n+1}+\sqrt{b_n}}{2}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$$

由此代入即得

$$a_n\in((2n\pi)^2-1,(2n\pi)^2),\quad f(a_n)\cos\frac{\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_n}}{2}=f(a_n)$$

$$b_n\in((2n\pi+\pi/2)^2-1,(2n\pi+\pi/2)^2),\quad f(b_n)\cos\frac{\sqrt{b_n+1}+\sqrt{b_n}}{2}=0$$

由定义可以验证

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$$

从而利用推广的**归结原理**可知

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)\cos\frac{\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_n}}{2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}f(b_n)\cos\frac{\sqrt{b_n+1}+\sqrt{b_n}}{2}=0$$

若原极限为非零常数，利用推广的归结原理可知以上两式不可能趋于不同极限，于是矛盾。

- 当 $k>\frac{1}{2}$ 时，仍然记

$$f(x)=2x^k\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

与前一种情况类似可证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

取出与前一种情况相同的 a_n、b_n，接下来的证明也完全类似。

五　导数

本次习题课补充了部分连续函数相关的习题，并介绍了导数相关的计算与证明技巧，知识基础为函数极限、连续函数基本知识、导数定义与初等函数导数结果。

§5.1　连续函数补充

由于导数本身的内容含量不算多，本章开始我们将先补充两部分连续函数相关的习题。

5.1.1　介值定理构造

首先，之前虽然介绍了介值定理的概念，也用它进行过取点等操作，我们还并未见到相关的更灵活的问题。这里给出几个例子：

题 68. 若定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f 是单射，证明 f 严格单调。

解答:

证明分为两步：

- 我们先证明，对任何 $a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$ 都有

$$\min\{f(x_1), f(x_3)\} < f(x_2) < \max\{f(x_1), f(x_3)\}$$

则 f 严格单调。

由于条件中已有 $x_1 < x_3$ 时 $\min\{f(x_1), f(x_3)\} < \max\{f(x_1), f(x_3)\}$，可知 $x_1 < x_3$ 时 $f(x_1) \neq f(x_3)$，从而 $f(a) \neq f(b)$。我们不妨设 $f(a) < f(b)$，证明 f 严格单调增；若 $f(a) > f(b)$，可类似证明 f 严格单调减。

若 $f(a) < f(b)$ 且 f 不严格单增，存在 $a \le y_1 < y_2 \le b$ 使得 $f(y_1) \ge f(y_2)$。分类讨论：

1. 若 $y_1 = a$，由 $f(y_2) \le f(a)$，结合 $f(a) < f(b)$ 可知 $f(y_2) < f(b)$ (这也可以说明 $y_2 \neq b$)，从而

$$f(y_2) \le \min\{f(a), f(b)\}$$

在条件中取 $x_1 = a$、$x_2 = y_2$、$x_3 = b$ 即矛盾。

2. 若 $y_2 = b$，同理在条件中取 $x_1 = a$、$x_2 = y_1$、$x_3 = b$ 可得矛盾。
3. 若 $a < y_1 < y_2 < b$，且 $f(y_1) \ge f(a)$，此时即有 $f(y_1) \ge \max\{f(a), f(y_2)\}$，矛盾。
4. 若 $a < y_1 < y_2 < b$，且 $f(y_2) \le f(b)$，此时即有 $f(y_2) \le \min\{f(y_1), f(b)\}$，矛盾。
5. 排除了以上四种情况后，只可能 $a < y_1 < y_2 < b$，且 $f(y_1) < f(a)$、$f(y_2) > f(b)$，但这与 $f(a) < f(b)$ 结合可推出 $f(y_1) < f(y_2)$，矛盾。

- 接下来证明前一部分的条件成立。若不成立，应存在 $a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$ 使得

$$\min\{f(x_1), f(x_3)\} \ge f(x_2)$$

或

$$f(x_2) \ge \max\{f(x_1), f(x_3)\}$$

假设第一式成立，若 $\min\{f(x_1), f(x_3)\} = f(x_2)$，代表 $f(x_2)$ 与 $f(x_1)$、$f(x_3)$ 中某个相等，已经与单射定义矛盾；若

$$\min\{f(x_1), f(x_3)\} > f(x_2)$$

对 $t \in (f(x_2), \min\{f(x_1), f(x_3)\})$，由于

$$f(x_1) > t > f(x_2), \quad f(x_3) > t > f(x_2)$$

利用**介值定理**可知存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(\xi_1) = t$、存在 $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ 使得 $f(\xi_2) = t$，由此 $f(\xi_1) = f(\xi_2)$，且由区间不同可知 $\xi_1 \neq \xi_2$，与单射矛盾。

假设第二式成立，推出矛盾的条件类似。由此即通过反证证得了条件成立。

* 教材上的证明直接省去了第一部分，这是**错误**的，因为此命题无法直接通过单调定义一步得到。

题 69. 考虑定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f，证明对任何正整数 n，存在 ξ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{n} = f\left(\xi + \frac{b-a}{n}\right) - f(\xi)$$

且 ξ 与 $\xi + \frac{b-a}{n}$ 都在 $[a,b]$ 中。

附加：若将正整数 n 改为大于 1 的正数 t，结论是否仍然成立？

解答：

– 对正整数 n **成立**

* 若对一般的 n 没有思路，一个常见的办法是先对 $n=2$ 或 $n=3$ 这样的简单情况进行**尝试**。这里不具体写出尝试的过程，不过一个重要的观察是，对于 n，这个区间的 n **等分点**会非常重要，由此才有接下来的过程。

由于

$$g(\xi) = f\left(\xi + \frac{b-a}{n}\right) - f(\xi)$$

是 ξ 的连续函数 (通过函数组合连续性结论)，根据介值定理，假设不存在这样的 n，必然对所有 $\xi \in [a, b-(b-a)/n]$ 都有

$$f\left(\xi + \frac{b-a}{n}\right) - f(\xi) > \frac{f(b)-f(a)}{n}$$

或对所有 $\xi \in [a, b-(b-a)/n]$ 都有

$$f\left(\xi + \frac{b-a}{n}\right) - f(\xi) < \frac{f(b)-f(a)}{n}$$

不妨设大于号恒成立，小于号恒成立时推矛盾的方法类似。

记区间的第 k 个 n 等分点

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k$$

则由大于号恒成立，代入 $\xi = x_k$，其中 $k = 0, 1, \dots, n-1$，可发现

$$\forall k = 0, 1, \dots, n-1, \quad f(x_{k+1}) - f(x_k) > \frac{f(b)-f(a)}{n}$$

对所有 k 求和即得到

$$\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) > n\frac{f(b)-f(a)}{n}$$

由于裂项相消，化简得到

$$f(x_n) - f(x_0) > f(b) - f(a)$$

但根据定义有 $x_n = b$，$x_0 = a$，这就得到了矛盾。

* 介值定理稍难的题目往往需要尝试**反证**，从恒大于或恒小于推出矛盾。

– 对 $t \in (1,2)$ **不成立**

考虑 $f(x) = \sin x$，并取 $a = 0$、$b = 2\pi$。此时 $f(b) - f(a) = 0$，而对任何 $t \in (1,2)$，$\frac{2\pi}{t} \in (\pi, 2\pi)$，从而当 $\xi \in [0, 2\pi - 2\pi/t]$ 时必然有

$$f(\xi) > 0, \quad f(\xi + 2\pi/t) < 0$$

两者的差不可能为 $f(b) - f(a)$。

* 注意反例构造的思路是，我们希望取**尽量简单的情况**，因此假设 $f(a) = f(b) = 0$，在此基础上尝试通过正负进行构造。不过，直接使用 sin 在更复杂的情况很难行得通，我们需要更好的办法。

– 对一般的非整数 $t > 1$ **不成立**

对一般的 t，我们将遵循类似的思路构造反例：考虑 $a = 0$、$b = 1$，设

$$\delta = 1 - \frac{[t]}{t} = \frac{\{t\}}{t}, \quad \varepsilon = \frac{1}{[t]}$$

考虑函数 $h(x)$ 是连接 $(0,0)$、$(\delta,1)$、$(\frac{1}{t}, -\varepsilon)$ 的**折线**，并定义

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & x \in [0, \frac{1}{t}] \\ h(x - 1/t) - \varepsilon & x \in (\frac{1}{t}, \frac{2}{t}] \\ h(x - 2/t) - 2\varepsilon & x \in (\frac{2}{t}, \frac{3}{t}] \\ \cdots & \\ h(x - [t]/t) - [t]\varepsilon & x \in (\frac{[t]}{t}, 1] \end{cases}$$

可以发现，对正整数 k，所有 $\frac{k}{t}$ 处 $f(x)$ 的左右极限均为 $-k\varepsilon$，从而连续，且根据定义有

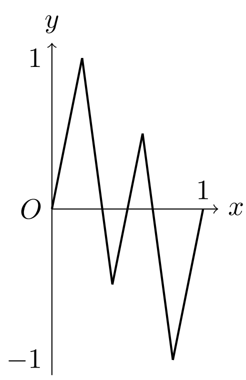
$$f(1) = h(1 - [t]/t) - [t]\varepsilon = h(\delta) - 1 = 0$$

也即 $f(1) - f(0) = 0$，另一方面，对所有 $\xi \in [0, 1 - 1/t]$，由于 $f(\xi)$ 与 $f(\xi + 1/t)$ 分属 f 定义中两块，必然有

$$f(\xi + 1/t) - f(\xi) = -\varepsilon < 0$$

这就证明了不存在符合要求的 ξ。

* 这里 δ 与 ε 的选取就是为了保证每段下降且最后一段恰好 $f(1)$ 位置达到 0。这个奇怪的函数构造事实上是**先画出图像**再研究具体的表达式的，以 $t = 2.5$ 为例，我们构造的 f 图像为：



在 $t \in (1,2)$ 时，我们构造的图像事实上与 $\sin x$ 形状类似。

题 70. 证明 $\sin x = 100(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ 在 $[0, +\infty)$ 上有无穷多个根。

解答:

记 $f(x) = \sin x - 100(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$，由于其为连续函数，只需找到为正的点与为负的点即可说明中间存在根。记 $g(x) = -100(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$，有

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-100}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

从而存在 $M > 0$ 使得 $x > M$ 时 $|g(x)| < \frac{1}{2}$。取正整数 K 使得 $2K\pi > M$，则利用三角不等式有当 $k > K$ 时 (此时 $2k\pi > M$，从而下方的 g 绝对值都不超过 $\frac{1}{2}$)

$$f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + g\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) > \frac{1}{2} > 0$$

$$f\left(k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1 + g\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < 0$$

从而根据介值定理，f 在 $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 一定存在一个根，而不同的 k 对应的上述区间**不重合**，因此每个 $k > K$ 都至少对应一个根，这就找到了无穷多个根。

* 利用介值定理研究根相关性质的题通常需要找为正、为负的点，而这一般依赖**作出草图观察并分析**。不过，

从上面这些题目中，我们可以看到，虽然介值定理的应用可以非常灵活，它的基本思路往往是**对具体函数从图像入手研究、对抽象函数从简单情况出发**。之后的函数相关题目中我们仍然会使用这类技巧。

5.1.2 函数迭代

此外，学了函数后，我们也可以解决一类数列极限问题，也就是满足形如 $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$ 的递推式的数列，称为**迭代数列**。

考虑一阶迭代 $a_{n+1} = f(a_n)$，若 f 是一个连续函数，且**已知 a_n 极限存在**，设它为 a 可以**两侧同取极限**得到 (注意 a_{n+1} 与 a_n 极限均为 a，这可由定义直接得到)

$$a = f(a)$$

由此，对于迭代数列的极限问题，只要证明了极限存在，计算极限往往是简单的。事实上，我们将满足 $x = f(x)$ 的 x 称为 f 的**不动点**，计算迭代数列极限往往归结为求 **f 不动点**、**证明存在性**、多个不动点时**判断落在哪个**三步。

* 之所以先求不动点再证明存在性，是因为不动点位置可以给存在性证明提供思路。

我们将以不同类型的例子说明迭代数列的可能操作方式，首先是直接算出极限的例子：

题 71. 考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$$

给出 a_n 存在非零极限的充要条件 (用 a、b、a_0、a_1 的关系式表达)。

解答:

由于已知 a_n 存在极限，设其为 l，利用极限的加减乘除性质，两边同取极限得到

$$l = al + bl$$

由 l 非零即得至少需要 $a+b=1$。

代入 $a=1-b$ (尝试可发现这比 $b=1-a$ 更好操作)，我们有

$$a_{n+2}=(1-b)a_{n+1}+ba_n$$

向等比数列配凑可以得到

$$a_{n+2}+ba_{n+1}=a_{n+1}+ba_n,\quad a_{n+2}-a_{n+1}=-b(a_{n+1}-a_n)$$

两式分别可以推出

$$a_{n+1}+ba_n=a_1+ba_0,\quad a_{n+1}-a_n=(-b)^{n-1}(a_1-a_0)$$

由于 a_n 极限存在，应有

$$\lim_{n\to\infty}(-b)^{n-1}(a_1-a_0)=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=l-l=0$$

从而利用等比数列的极限性质可知 $a_0=a_1$ 或 $|b|<1$，分类讨论：

- 若 $a_0=a_1$，代入可以发现 $a_n=a_0$ 为常数，由此只要 $a_0\neq 0$ 即保证了 a_n 极限为非零常数。
- 若 $|b|<1$，此时 $b\neq -1$，可从两递推式解出

$$a_n=\frac{1}{b+1}(a_1+ba_0-(-b)^{n-1}(a_1-a_0))$$

  从而直接计算可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a_1+ba_0}{b+1}$$

  由此此时只要 $a_1+ba_0\neq 0$ 即符合要求。

综合以上，上式极限存在非零当且仅当 $a+b=1$、$a_0=a_1$、$a_0\neq 0$，或 $a+b=1$、$|b|<1$、$a_1+ba_0\neq 0$。

* 这是一个标准的极限操作和**基本代数处理**结合的例子，虽然使用的极限理论并不复杂，但想得到正确的结果还是需要对各种代数变形足够熟练的。

接下来是两个使用标准分析过程的例子：

题 72. 考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$$

对不同的 $a_0\geq 0$ 计算 a_n 的极限。

解答:

按照标准的三步过程进行：

- 设 $f(x)=\sqrt{2x}$，则求解 $x=\sqrt{2x}$ 可在 $x\geq 0$ 得到两个不动点 0 与 2。
- 为了证明极限存在，我们往往需要通过**单调有界定理**，具体来说可以归纳得到：
  1. 当 $a_0=0$ 时，a_n 恒为 0，极限为 0；
  2. 当 $0<a_0<2$ 时，有 $a_n<a_{n+1}<2$，从而单调上升且有界 $[0,2]$，极限存在；
  3. 当 $a_0=2$ 时，a_n 恒为 2，极限为 2；
  4. 当 $a_0>2$ 时，有 $a_n>a_{n+1}>2$，从而单调下降且有界 $[2,a_0]$，极限存在。

– 上面的第一、第三种情况已经得到了极限，第二种情况由于 $a_n \geq a_0 > 0$ 恒成立，由极限保序性可知极限大于 0，又由不动点只有 0 和 2，排除了 0 后只能为 2；同理，第四种情况由于 $a_n > 2$ 恒成立，即可知极限至少为 2，因此只能为 2。

* 这题是迭代数列估算的最基本过程。

题 73. 考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+1} = \sin a_n$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

附加：计算

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n$$

解答：

– **极限为 0**

在之前介绍三角函数时我们已经得到了估算，在 $x \neq 0$ 时 $|\sin x| < |x|$，由此 $\sin x = x$ 只有 $x = 0$ 一个解，也即原函数只有一个不动点。

另一方面，由上述估算可知 $|a_{n+1}| = |\sin a_n| \leq |a_n|$，从而 $|a_n|$ 单调有界，极限存在。进一步讨论，对于任何 a_1，由于 $a_2 \in [-1, 1]$，由三角函数性质有 $\sin a_2$ 与 a_2 同号，以此归纳可知从第二项开始 a_n 恒不变号，再由 $|a_n|$ 极限存在即得 a_n 极限存在，由不动点唯一得证极限为 0。

– **阶数估算**

* 这部分较有技巧性，但可以**用于几乎所有迭代数列的收敛阶估算**。

首先，要计算 $\sqrt{n} a_n$ 的极限，利用初等函数连续性只需计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n a_n^2}$$

再取倒数后求平方根即可。

之所以要化成这样的式子，是为了利用**数列平均极限**的结论 (见**题 55** 中的版本)，将上述极限看成 $\frac{a_n^{-2}}{n}$，从而只要计算出

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}^{-2} - a_n^{-2})$$

就可以得到原极限。此时我们再代入表达式并通分得到

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}^{-2} - a_n^{-2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - \sin^2 a_n}{a_n^2 \sin^2 a_n}$$

由于已知 $n \to \infty$ 时 $a_n \to 0$，利用归结原理我们只需要计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

进行等价无穷小替换可将分母写为 x^4，进一步得到

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x} \frac{x - \sin x}{x^3} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

这里最后一步用了 $x - \sin x$ 的渐近结果，可以暂且作为结论使用，学到微分中值定理后将有比较好的方式进行证明。

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^2}=\frac{1}{3}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$$

* 注意这里将 $\frac{1}{na_n^2}$ 转化为 $a_{n+1}^{-2}-a_n^{-2}$ 与将数列极限转化为函数极限都**只能单向进行**，也即算出后面可得前面，但算出前面是得不到后面的。

虽然刚才两个例子中的 a_n 都有整体单调性，a_n 不是单调数列时我们仍然可能可以得到结果：

题 74. 考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+1}=ba_n(1-a_n)$$

且 $a_1=\frac{1}{2}$、$b\in(2,3]$，计算

$$\lim_{n\to\infty}a_n$$

解答:

我们先进行不动点的分析。求解 $x=bx(1-x)$ 可以得到两个根 $x=0$ 与 $x=1-\frac{1}{b}$，由此极限若存在只能是二者中的一个。不过，试着取定 b 计算几项即可发现这里的 a_n 并不具有单调性，由此需要更好的方法。这题最重要的观察在于，计算后可以发现 a_n **奇数项单调增**、**偶数项单调减**，且**任何一个奇数项小于任何一个偶数项**。接下来的过程分为几步：

– **子列有界性**

记 $f(x)=bx(1-x)$，注意条件 $b\in(2,3]$，作出图像观察后可以利用二次函数知识证明 (这里 $\frac{b}{4}$ 是 $f(x)$ 的最大值，在 $\frac{1}{2}$ 取到):

$$\forall x\in\left[\frac{1}{2},1-\frac{1}{b}\right),\quad f(x)\in\left(1-\frac{1}{b},\frac{b}{4}\right]$$

$$\forall x\in\left(1-\frac{1}{b},\frac{b}{4}\right],\quad f(x)\in\left[\frac{1}{2},1-\frac{1}{b}\right)$$

* 第二个式子的 x 取 $\frac{b}{4}$ 侧需要证明 $b\in[2,3)$ 时 $\frac{b^2}{4}(1-\frac{b}{4})\geq\frac{1}{2}$，虽然左侧减右侧是一个三次函数，但尝试出在 $b=2$ 时取等后可直接因式分解得到结论。

* 虽然得到这一步的过程相对复杂，但有了明确的**目标**后，接下来都是高考范围的代数处理过程。

由此，利用 $a_1=\frac{1}{2}$ 可知 $a_2\in(1-\frac{1}{b},\frac{b}{4}]$，进一步得到 $a_3\in[\frac{1}{2},1-\frac{1}{b})$，以此进行下去即可得到对任何正整数 k 有

$$a_{2k-1}\in\left[\frac{1}{2},1-\frac{1}{b}\right)$$

$$a_{2k}\in\left(1-\frac{1}{b},\frac{b}{4}\right]$$

这就得到了奇数项、偶数项子列分别有界，且奇数项一定小于偶数项。

– **子列单调性**

为了证明奇数项与偶数项的单调性，我们需要考虑 a_{n+2} 与 a_n 的关系，代入可知

$$a_{n+2}=b^2a_n(1-a_n)(1-ba_n(1-a_n))$$

记 $g(x)=f(f(x))=b^2x(1-x)(1-bx(1-x))$。虽然 $g(x)-x$ 是一个四次方程，但 $f(x)=x$ 时有 $g(x)=x$，因此我们已经知道了 $g(x)-x$ 的两个根 0 与 $1-\frac{1}{b}$，由此进一步分解可知

$$g(x)-x=x(bx-b+1)(-b^2x^2+b(b+1)x-(b+1))$$

计算可发现 $-b^2x^2+b(b+1)x-(b+1)$ 没有根，其在 $\mathbb{R}$ 上恒小于 0，由此即得 $g(x)-x$ 当且仅当在 $(0,1-\frac{1}{b})$ 为正。

进一步估算可以发现 (这里的代数计算相对复杂，省略具体过程，有兴趣的同学可以作图研究)

$$\forall x\in\left[\frac{1}{2},1-\frac{1}{b}\right),\quad x<g(x)<1-\frac{1}{b}$$

$$\forall x\in\left(1-\frac{1}{b},\frac{b}{4}\right],\quad x>g(x)>1-\frac{1}{b}$$

由此，结合前一部分估算即可发现

$$a_{2k-1}<g(a_{2k-1})=a_{2k+1}<1-\frac{1}{b}$$

$$a_{2k}>g(a_{2k})=a_{2k+2}>1-\frac{1}{b}$$

由此即证明了奇数项单调减、偶数项单调增。

– **极限计算**

结合前两部分的单调与有界可知 a_{2k-1}、a_{2k} 极限均存在。由于 $g(x)$ 不动点只有 0 与 $1-\frac{1}{b}$，且奇数项、偶数项均恒大于等于 $\frac{1}{2}$，极限不可能为 0，即得

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}a_{2k}=1-\frac{1}{b}$$

至此由定义可最终证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1-\frac{1}{b}$$

* 一般来说，迭代数列的题目如果难以直接计算且本身不单调，往往可以分成具有不同单调性且趋于同一极限的部分，虽然会更加复杂，但本质是不难的。

§5.2 定义

5.2.1 导数的运算

导数的定义本身是十分简洁的，f 在 x 处的导数也即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

由于连续的定义是分子极限为 0，我们利用乘积极限可直接得到**可导必定连续**。不过，从这个定义出发衍生的运算律可能并不简单，我们证明两个相对复杂的情况作为函数极限的应用：

题 75. 证明**除法求导**法则：若 f、g 在 (a,b) 可导，且 g 在 (a,b) 非零，则 $x\in(a,b)$ 时

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

解答:

也即我们要计算

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{hg(x+h)g(x)}$$

由于 $g(x)\neq 0$，利用乘除极限可知将分母中的 $g(x+h)$ 替换为 $g(x)$ 不会影响极限情况，由此可将极限写成

$$\frac{1}{g^2(x)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{h}$$

为了凑出 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 对应的形式，我们在中间加减项将极限写为

$$\frac{1}{g^2(x)}\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)g(x)-f(x)g(x))-(g(x+h)f(x)-f(x)g(x))}{h}$$

由于已知 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 存在，利用乘积的极限即得上式为

$$\frac{1}{g^2(x)}\left(g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

由 $f'(x)$、$g'(x)$ 定义得结论成立。

题 76. 证明**复合函数求导**的链式法则：若 g 在 (a,b) 可导，且值域在 (c,d) 中，f 在 (c,d) 可导，则 $t\in(a,b)$ 时

$$(f(g(t)))'=f'(g(t))g'(t)$$

以此证明**反函数求导**法则，即若 f、g 可导且互为反函数，$g'(f(x))$ 非零的点有

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$$

解答:

我们先写出定义

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(g(t+h))-f(g(t))}{h}$$

为了凑出 f 与 g 导数的形式，我们希望能将它看成

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(g(t+h))-f(g(t))}{g(t+h)-g(t)}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$$

但此做法**无法保证新出现的分母非零**，由此需要分类讨论：

- 若存在 $\delta>0$ 使得 $0<|h|<\delta$ 时 $g(t+h)\neq g(t)$ 恒成立，则我们的确可以将极限改写为

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(g(t+h))-f(g(t))}{g(t+h)-g(t)}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$$

  第二部分极限为 $g'(t)$，而换元 $s=g(t+h)-g(t)$ 可得

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(g(t+h))-f(g(t))}{g(t+h)-g(t)}=\lim_{s\to 0}\frac{f(g(t)+s)-f(g(t))}{s}=f'(g(t))$$

  从而由乘积极限得证。

- 若对任何 $\delta>0$，都存在 $0<|h|<\delta$ 使得 $g(t+h)=g(t)$，又要分为三步：

  1. 我们先说明 $g'(t)=0$。

取 $\delta = \frac{1}{n}$，则存在 $|h_n| < \frac{1}{n}$ 使得 $g(t+h_n) = g(t)$，从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(t+h_n) - g(t)}{h_n} = 0$$

利用**归结原理**，由定义 h_n 极限为 0，于是上述极限必然与函数极限 $g'(t)$ 相同，这就证明了 $g'(t) = 0$。由此，目标变为证明

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(g(t+h)) - f(g(t))}{h} = 0$$

* 注意此时无法取 $h = h_n$ 说明，因为**不确定函数极限存在时无法通过单个数列确定。**

2. 由于已知

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = 0$$

我们希望存在 M、$\delta > 0$ 使得 $h \in (-\delta, \delta)$ 时

$$|f(g(t+h)) - f(g(t))| \le M|g(t+h) - g(t)|$$

这样即能通过 $h \in (-\delta, \delta)$ 时

$$\left|\frac{f(g(t+h)) - f(g(t))}{h}\right| \le M\left|\frac{g(t+h) - g(t)}{h}\right|$$

即

$$-M\left|\frac{g(t+h) - g(t)}{h}\right| \le \frac{f(g(t+h)) - f(g(t))}{h} \le M\left|\frac{g(t+h) - g(t)}{h}\right|$$

由夹逼定理直接得到中间极限为 0。

3. 最后我们证明上述的 M 与 δ 的确存在。注意到我们仍然没有用到 f 的导数的条件，这里自然需要使用 f 的导数进行估算。

由于 $f'(g(t))$ 存在，设 $L = |f'(g(t))|$，利用绝对值函数连续性有

$$\lim_{s\to 0} \left|\frac{f(g(t)+s) - f(g(t))}{s}\right| = L$$

利用极限**保序性**可知存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $s \in (-\delta_0, 0) \cup (0, \delta_0)$ 时

$$\left|\frac{f(g(t)+s) - f(g(t))}{s}\right| < L + 1$$

从而同乘 h，结合 0 处两侧相等即得 $s \in (-\delta_0, \delta_0)$ 时

$$|f(g(t)+s) - f(g(t))| \le (L+1)|s|$$

利用 g 可导，其在 t 处连续，从而存在 δ 使得 $h \in (-\delta, \delta)$ 时 $|g(t+h) - g(t)| < \delta_0$，从而 $h \in (-\delta, \delta)$ 时

$$|f(g(t) + (g(t+h) - g(t))) - f(g(t))| \le (L+1)|g(t+h) - g(t)|$$

也即

$$|f(g(t+h)) - f(g(t))| \le (L+1)|g(t+h) - g(t)|$$

取 $M = L + 1$ 即找到了符合要求的 M 与 δ。

* 将过程中的 1 改成任何大于 0 的 ε 都能推出小于等于号成立，由此事实上将这一步过程改造可以直接证明极限为 $f'(g(t))g'(t)$，不过讨论方式会相对复杂。

有了这些运算律后，利用基本的等价无穷小结论可以算出基本初等函数的导数，进而得到所有初等函数的导数计算方式，讨论可得结论**初等函数若在开区间可导则导数仍为初等函数**。

* 注意初等函数未必在连续点可导，如 $|x| = \sqrt{x^2}$ 是初等函数，但在 0 处并不可导。

此外，关于导数的一些基本性质将会变得很容易证明：

题 77. 证明可导的奇函数导数为偶函数，可导的偶函数导数为奇函数，可导的周期函数导数为周期函数。

若 f 为 $\mathbb{R}$ 上可导的函数，且 $f'(x)$ 有周期 T，即 $f'(x+T) = f'(x)$，是否 f 一定有周期 T？

解答：

– **可导的奇函数导数为偶函数**

由条件 $f(-x) = -f(x)$，两侧同时求导由复合函数求导法则即得 $-f'(-x) = -f'(x)$，即 $f'(-x) = f'(x)$。

– **可导的偶函数导数为奇函数**

由条件 $f(-x) = f(x)$，两侧同时求导由复合函数求导法则即得 $-f'(-x) = f'(x)$，即 $f'(-x) = -f'(x)$。

– **可导的周期函数导数为周期函数**由条件存在 T 使得 $f(x+T) = f(x)$，两侧同时求导由复合函数求导法则即得 $f'(x+T) = f'(x)$，从而 $f'(x)$ 以 T 为周期。

– **导数为周期函数不能推出原函数为周期函数**

考虑 $f(x) = x$，$f'(x) = 1$ 以任意正实数为周期，但 $f(x)$ 不是周期函数。

不过，到这里，我们需要讨论一个从几何直观来看不算平凡的事：$f(x)$ 在一点处趋于无穷和它的导数趋于无穷是**完全不同**的概念：

题 78 (附加). 举例说明，若 f 在 (a,b) 可导

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to b^-} f'(x) = +\infty$$

互相无法推出。

解答：

– **导数趋于正无穷而函数有限**

考虑区间 $(0,1)$ 上的 $f(x) = -\sqrt{1-x}$，直接计算有

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

从而 $x \to 1^-$ 时 $f'(x) \to +\infty$，而由初等函数连续性 $f(x) \to 0$。

– **函数趋于正无穷而导数极限不为正无穷**

此例子的构造会稍复杂一些分为两步：

1. 先证明引理：对任何区间 $[s,t]$ 与给定的 c、d，存在三次函数 h 使得

$$h(s) = c, \quad h(t) = d, \quad h'(s) = h'(t) = 0$$

由于 $h'(x)$ 为二次函数且 $h'(s) = h'(t) = 0$，应有 (C_1 为某常数)

$$h'(x) = C_1(x-s)(x-t)$$

从而考虑利用多项式的导数可发现 (C_2 也为某常数)

$$h(x)=\frac{1}{3}C_1x^3-\frac{1}{2}(s+t)C_1x^2+C_1stx+C_2$$

由此代入剩下两个条件可得到关于 C_1、C_2 的方程

$$\left(\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2t\right)C_1+C_2=c$$

$$\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}st^2\right)C_1+C_2=d$$

由于 $s<t$，可发现第一个方程中 C_1 的系数小于第二个方程中 C_1 的系数，于是作差相消即可解出 C_1，进一步代入得 C_2。

我们将 $h(x)$ 称为**可导连接** (s,c) **与** (t,d) 的曲线。可以进一步计算发现当 $c<d$ 时它在 $[s,t]$ 上**单调增加**。

* 事实上，利用多项式插值理论，即使要求 s 与 t 处直到 k 阶的导数都为 0，也一定可以解出符合要求的多项式。

2. 考虑区间 $(0,1)$，任取 $\varepsilon\in(0,1)$，构造 $f(x)$ 满足对任何正整数 n 有

$$\forall x\in\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{n(n+1)},1-\frac{1}{n+1}-\frac{\varepsilon}{n(n+1)}\right),\quad f(x)=n$$

且 $f(x)$ 在 $(1-\frac{1}{n+1}-\frac{\varepsilon}{n(n+1)},n)$ 与 $(1-\frac{1}{n+1}+\frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)},n+1)$ 之间是可导连接这两点的曲线。

由此，利用引理可由导数定义发现 f 在所有分界点处的导数均为 0，而其他点处 $f(x)$ 均在附近为初等函数，因此导数存在。

由引理可发现 $f(x)$ 单调增加，且

$$f\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\geq n$$

由此即利用定义得到

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty$$

而由于

$$f'\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{n(n+1)}\right)=0$$

恒成立，令 n 趋于无穷可得

$$\lim_{n\to\infty}f'\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{n(n+1)}\right)=0$$

若 $f'(x)$ 在 $x\to1^-$ 时极限为正无穷，由推广的归结原理可知上述极限应为 $+\infty$，从而矛盾。

* 本题事实上也是先画图再构造的，我们构造出了一个**不断增加但一直有平缓部分**的函数。事实上，$f(x)$ 的性质可能与 $f'(x)$ 的性质差异很大，几乎不能通过几何直观得到结论。真正联系函数与其导数需要在学到**微分中值定理**后。

当然，上述的讨论只是对导数最基本的**代数**性质的刻画，接下来我们将谈论它的重要**几何**性质，也就是作为 “切线” 的几何意义。

5.2.2 可导性与近似

几何上来说，“切线” 意味着一点附近最**接近**的一条直线，这也是我们高中学到的几何直观，它可以用如下的定理刻画：

题 79. 若 f 在 x_0 处可导，设

$$l_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

证明 $l_0(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 附近的**最佳一次逼近**，也即对任何一个一次函数 $l(x)$，存在 $\delta > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x) - l_0(x)| \le |f(x) - l(x)|$$

解答：

分两种情况讨论：

– 若 $l(x_0) \neq f(x_0)$，我们可以直接通过连续性证明：记

$$g(x) = |f(x) - l(x)| - |f(x) - l_0(x)|$$

由 $f(x_0) = l_0(x_0)$ 可发现 $g(x_0) > 0$，而由 f 在 x_0 处可导，其在 x_0 处连续，根据连续函数复合性质可知 $g(x)$ 也在 x_0 处连续，从而由极限保号性存在 $\delta > 0$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $g(x) > 0$，再结合 $g(x_0) > 0$ 即得 $|x - x_0| < \delta$ 时 $g(x) > 0$，得证。

– 若 $l(x_0) = f(x_0)$，可设 $l(x) = f(x_0) + k(x - x_0)$。我们写出现在的不等式形式

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \le |f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)|$$

由于无论 k 取何值，$x = x_0$ 时等号成立，两边同除以 $|x - x_0|$，我们只需证明存在 δ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| \le \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k\right|$$

记上式右减左为 $h(x)$，若 $k = f'(x_0)$，$h(x)$ 恒为 0，已经成立，否则利用导数定义与复合函数极限结论可知

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = |f'(x_0) - k| - |f'(x_0) - f'(x_0)| = |f'(x_0) - k| > 0$$

从而再次由极限保号性得证存在上述 δ。

* 本题的核心思路是从函数作差中**配凑**出导数的形式。

从几何性质的思路出发，我们可以进行一些导数相关的**估算**，这里只举三个不算复杂的例子：

题 80. 若 $|f(x)| \le |g(x)|$ 在 $(-1, 1)$ 恒成立，且 g 在 0 处可导，$g(0) = g'(0) = 0$，证明 f 在 0 处可导并计算 $f'(0)$。

解答：

由条件代入 $x = 0$ 可知 $f(0) = 0$，从而根据定义

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

利用 $|f(x)|\le|g(x)|$ 两边除以 $|x|$ 可知 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上有

$$-\left|\frac{g(x)}{x}\right|\le\frac{f(x)}{x}\le\left|\frac{g(x)}{x}\right|$$

利用 $g(x)$ 在 0 处导数为 0 的定义与复合函数的极限结论，左右在 $x\to 0$ 时极限都为 0，由夹逼定理即得 $f'(0)=0$.

题 81. 设

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x) & x\in\mathbb{Q}\\ \sin x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

计算 $f'(0)$。

解答:

由于此函数并不具有任何直接的性质，我们只能由定义出发计算导数。由定义可发现 $f(0)=0$，从而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

记 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，它在 0 的**去心**邻域有定义，且满足

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x} & x\in\mathbb{Q}\\ \frac{\sin x}{x} & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

对任何 $\varepsilon>0$，存在 δ 使得 (对两种情况分别取 δ 再取出较小的) 只要 $0<|x|<\delta$ 即有

$$\left|\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right|<\delta,\quad\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\delta$$

由于 $g(x)$ 必然与上方两个中的某个相等即得 $|g(x)-1|<\delta$，从而由定义得证

$$\lim_{x\to 0}g(x)=1$$

也即 $f'(0)=1$。

* 注意本题的方法可以推广到，若 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内每点等于 $g(x)$ 或 $h(x)$，且 $g(x_0)=h(x_0)$、$g'(x_0)=h'(x_0)=t$，则必然有 f 在 x_0 可导且 $f'(x_0)=t$。

* 注意此例子说明**一点处可导只能推出一点连续**，此例子中的函数在 0 的任何邻域都不连续。

题 82. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

解答:

利用基本等价无穷小可知 (这实际上也是 $\ln x$ 在 1 处的导数)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}=1-1=0$$

由此，对任何 $\varepsilon>0$，存在 δ 使得 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时

$$\left|\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right|<\varepsilon$$

两边乘 $|x|$ 后由 0 处相等可知 $x\in(-\delta,\delta)$ 时

$$|\ln(1+x)-x|\le\varepsilon|x|$$

由此，取 N 使得 $\frac{1}{N}<\delta$，即有 $n>N$ 时

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$

由于 $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(k+1)-\ln k$，裂项即得上式能写为

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln\frac{2n+1}{n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$

由于上述所有 $1/k$ 都在 $(-\delta,\delta)$ 中，利用之前的估算可知

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln\frac{2n+1}{n}\right|\le\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\varepsilon}{k}<\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

由此利用极限定义即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln\frac{2n+1}{n}\right)=0$$

而根据初等函数连续性与归结定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)=\ln 2$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$$

* 这里的核心思路是，由于 ln 求和容易裂项相消，我们希望说明此倒数和与 ln 求和的差距可以在 $n\to\infty$ 时趋于 0。

* 本题也可以利用**题 54** 的结论，记 a_n 为 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$，由于 a_n 极限存在，$a_{2n}-a_n$ 极限为 0，这样也能得到极限为 $\ln 2$，但上方的**导数估算**做法实际上是更加本质的：它无需利用我们尚未知道如何严谨证明的 $\ln(1+x)\le x$ 结论。

不过，这些几何角度的讨论还远远不是导数的全貌。例如，有了最佳一次逼近以后，我们是否能找到最佳二次、最佳三次，乃至最佳 n 次逼近？这些问题事实上也可以用导数来回答，也即导数**完全解决了**多项式逼近的问题。不过，我们在下半学期才能进行这一部分讨论，目前仍然只能以介绍计算技巧为主。

§5.3 计算

5.3.1 高阶导数

由于基本初等函数的一阶导数是不难通过之前的极限计算的，初等函数的导数往往是非常简单的问题。因此，导数相关的困难计算经常会涉及**高阶导数**，也就是进行多次求导运算 (我们用 **0 阶导数**表示函数自身)。对于这类问题，涉及的技巧就相对灵活了。我们先给出几乎是这部分最重要的定理，**乘积的** n

阶导数：

题 83. 若 $f(x)$、$g(x)$ 均在 $\mathbb{R}$ 上 n 阶可导，计算 $f(x)g(x)$ 的 n 阶导数，$n\in\mathbb{N}_{\circ}$。

解答：

尝试算前几项后可发现存在与二项式定理类似的系数，由此我们先**猜测**结果为

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

这里上标 (k) 表示 k 阶导数，$k=0$ 时即表示函数自身。

为了证明此结果，可以使用**归纳法**：当 $n=1$ 时由乘积求导公式可知结论成立，若 $n-1$ 时情况成立，n 时有

$$(f(x)g(x))^{(n)}=\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x)g^{(n-1-k)}(x)\right)'$$

将每一项用乘积求导公式展开可知

$$(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\big(f^{(k+1)}(x)g^{(n-1-k)}(x)+f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\big)$$

注意两项的 f 的导数次数与 g 的导数次数和为 n，我们可以进行拆分重组：

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k+1)}(x)g^{(n-1-k)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\\&=\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\\&=f^{(n)}(x)g(x)+\sum_{k=1}^{n-1}(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k)f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)+f(x)g^{(n)}(x)\end{aligned}$$

* 上方第二个等号是将第一个求和中的 $k+1$ 替换为新的 k；第三个等号是将相同的 k 合并，留下第一个求和中 $k=n$ 的项与第二个求和中 $k=0$ 的项。

对比此式与我们证明目标的系数，可发现只需证明

$$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k=C_n^k$$

而这可以直接通过定义得到：

$$\begin{aligned}C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k&=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\\&=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n}{(n-k)k}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k\end{aligned}$$

从而证明了原结论。

利用它可以进行一些计算：

题 84. 计算 $f(x)=\arctan x$ 在 0 处的 n 阶导数值，$n\in\mathbb{N}$。

解答：

提供两种方法：

- 由于 arctan 难以直接操作，我们先尝试求一次导数得到

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

此时右侧成为两个多项式的商，但仍然难以处理，我们试着两侧**同乘** $1+x^2$ 得到

$$f'(x)(1+x^2)=0$$

由于 $1+x^2$ 求 3 阶及以上导数为 0，当 $n\geq 3$ 时，对左侧求 $n-1$ 阶导可以利用**题 83** 展开，从而得到

$$f^{(n)}(x)(1+x^2)+C_{n-1}^1 f^{(n-1)}(x)\cdot(2x)+C_{n-1}^2 f^{(n-2)}(x)\cdot 2=0$$

代入 $x=0$ 即可计算得到

$$f^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)=0$$

由此利用直接计算的结论 $f(0)=0$、$f'(0)=1$、$f''(0)=0$ 递推可得到

$$f^{(2k)}(0)=0,\quad k\in\mathbb{N}$$

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!,\quad k\in\mathbb{N}$$

- (**附加**) 仍然从求一阶导后的结果

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

出发。

* 由于我们尚未学过复函数相关的理论与导数含义，**此方法直接使用将被扣分**，但可以用于提供思路与结果。

利用复数知识可以计算验证

$$x^2+1=(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$$

从而进一步计算有

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}-\frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$$

直接计算可发现

$$\left(\frac{1}{x+c}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+c)^n}$$

对任何实数 c 成立，我们**形式上**认为对复数也成立，从而写出导数

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^n}-\frac{1}{(x+\mathrm{i})^n}\right)$$

* 事实上利用复变函数知识可以证明，右侧的确是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的 $n-1$ 阶导数。

从而可知

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(-\mathrm{i})^n}-\frac{1}{\mathrm{i}^n}\right)$$

由于 $\mathrm{i}(-\mathrm{i})=1$，我们可以化简得到

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}}(\mathrm{i}^n-(-1)^n\mathrm{i}^n)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}(1-(-1)^n)\mathrm{i}^{n-1}$$

由此即可进一步算得

$$f^{(2k)}(0)=0,\quad k\in\mathbb{N}$$

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!,\quad k\in\mathbb{N}$$

题 85 (**附加**). 计算 $f(x)=\arcsin x$ 在 0 处的 n 阶导数值，$n\in\mathbb{N}$。

解答:

与之前类似先求一阶导得到

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

直接相乘可得

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)=1$$

但若直接两边平方后求 $n-1$ 阶导，从 $(f'(x))^2$ 的 n 阶导数难以直接解出 $f^{(n-1)}(x)$，我们需要寻找更好的方法。

尝试再求一阶导得到

$$f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

由此可发现

$$f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)}f'(x)$$

将其改写为

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=0$$

即可以类似之前进行操作了。当 $n\geq 4$ 时两边同求 $n-2$ 阶导有 ($1-x^2$ 三阶及以上导数为 0，x 二阶及以上导数为 0)

$$(1-x^2)f^{(n)}(x)+C_{n-2}^1(-2x)f^{(n-1)}(x)+C_{n-2}^2(-2)f^{(n-2)}(x)-(xf^{(n-1)}(x)+C_{n-2}^1f^{(n-2)}(x))=0$$

代入 $x=0$ 即发现

$$f^{(n)}(0)-(n-2)^2f^{(n-2)}(0)=0$$

由此计算 $f(0)=0$、$f'(0)=1$、$f''(0)=0$ 递推可得到

$$f^{(2k)}(0)=0,\quad k\in\mathbb{N}$$

$$f^{(2k+1)}(0)=1^23^25^2\dots(2k-1)^2,\quad k\in\mathbb{N}^*$$

* 一种记号是将 $1^23^25^2\dots(2k-1)^2$ 写作 $(2k-1)!!$。

不过，对于更一般的问题，往往需要自己逐步求导观察，我们先用**题 50** 的结论给出一个函数构造并计算导数：

题 86. 设

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \mathrm{e}^{-1/x^2} & x\neq 0\end{cases}$$

计算 $f(x)$ 在 0 处的 n 阶导数值，这里 $n\in\mathbb{N}$。

解答：

我们先证明 e^{-1/x^2} 在 0 以外的点的 n 阶导数 ($n\in\mathbb{N}$) 一定可以写为

$$\frac{f(x)}{x^M}\mathrm{e}^{-1/x^2}$$

其中 f 为多项式，M 为某自然数。

直接归纳即可：当 $n=0$ 时 0 阶导数即为自身 e^{-1/x^2}，从而成立，若 $n-1$ 阶导数能写为此形式，再次求导计算可发现

$$\left(\frac{f(x)}{x^M}\mathrm{e}^{-1/x^2}\right)'=\left(\frac{f'(x)x^M-Mx^{M-1}f(x)}{x^{2M}}+\frac{2f(x)}{x^{M+5}}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}$$

利用多项式的导数还是多项式通分即可得到结论。

我们接下来**归纳**证明 f 在 0 处的 n 阶导数为 0。由定义可知 $f(0)=0$，若结论对 $n-1$ 阶导数成立，利用归纳假设可知

$$f^{(n-1)}(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{f(x)}{x^M}\mathrm{e}^{-1/x^2} & x\neq 0\end{cases}$$

由此可知

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x^M}\mathrm{e}^{-1/x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{M+1}}\mathrm{e}^{-1/x^2}$$

利用**题 50** 的结论即可得到此极限为 0，从而得证。

* 此证明的核心思路事实上在下半学期才能学到来源：若 $f(x)$ 在 0 处的 0 到 $n-1$ 阶导均为 0，而 n 阶导非零，可以证明 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 x^n 是**同阶**无穷小。由于 e^{-1/x^2} 在 $x\to 0$ 时将比任何多项式趋于 0 的速度都快 (**题 50** 已经证明)，必然 $f(x)$ 的任意阶导数均为 0。

* 此函数是**光滑但不实解析**的函数的重要例子。光滑是指可以求任意阶导数，实解析的概念我们将在后半学期介绍。

最后，我们再看一个直接计算导数进行递推的例子：

题 87. 对正整数 n，设 $f_n(x)=x^n\ln x$，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}$$

解答：

尝试求一次导可以发现

$$f_n'(x)=x^{n-1}+nx^{n-1}\ln x=x^{n-2}+nf_{n-1}(x)$$

由此再求 $n-1$ 阶导，直接归纳计算可发现 x^{n-1} 的 $n-1$ 阶导是 $(n-1)!$，从而

$$f_n^{(n)}(x)=(n-1)!+nf_{n-1}^{(n-1)}(x)$$

为了凑出题目中的形式，我们除以 $n!$ 研究，即可发现

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{1}{n}+\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}$$

由此递推即得

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+f_1'(x)$$

进一步计算可得

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1+\ln x$$

于是可知

$$\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1-\ln n$$

其极限为**欧拉常数** (定义见**题 54**)。

5.3.2 隐函数与参数曲线

除了这类问题外，另一类常见的计算性问题是，函数**并不显式给出**，而是藏在方程或参数中。我们以两个例题说明这种情况下的计算该如何进行。首先是隐函数的情况：

题 88. 设 $y=f(x)$ 是由

$$x^2+y^2+xy=1$$

确定的可导函数，计算 $f''(x)$。

解答:

对于隐函数问题，一个最简单的方法是直接**对等式两侧求导**得到

$$2x+2f(x)f'(x)+xf'(x)+f(x)=0$$

可以发现已经成为了对 $f'(x)$ 的一元一次函数，从而得到 ($2y+x\neq 0$ 时)

$$f'(x)=-\frac{2x+y}{2y+x}$$

* 注意如果不想把 y 写成 $f(x)$，求导时一定不要忘记 **y 是 x 的函数**，因此需要利用复合函数求导。

接下来直接用商求导公式即得到 ($2y+x\neq 0$ 时)

$$f''(x)=-\frac{(2+f'(x))(2y+x)-(2f'(x)+1)(2x+y)}{(2y+x)^2}$$

再代入 $f'(x)$ 表达式化简即得 ($2y+x\neq 0$ 时)

$$f''(x)=-6\frac{x^2+xy+y^2}{(2y+x)^3}$$

再由条件 $x^2+xy+y^2=1$ 可进一步化简结果为 ($2y+x\neq 0$ 时)

$$f''(x)=-\frac{6}{(2y+x)^3}$$

* 严格来说，我们还需要判断 $2y+x=0$ 时是否的确不可导，不过这类题目一般不需要进行如此严格的讨论。事实上，可以证明导数分母为 0 时，若分子非零，曲线往往**切线与 y 轴垂直**，从而的确斜率不存在。

若隐函数的形式是 $g(x,y(x))=0$，利用复合函数求导公式，两侧对 x 求导可以得到 (我们将在下半学期介绍更多知识后**证明**)

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)y'(x)$$

这里的 $\frac{\partial}{\partial x}$ 表示将 y 看为常数时 $g(x,y)$ 对 x 求导的结果，$\frac{\partial}{\partial y}$ 表示将 x 看为常数时 $g(x,y)$ 对 y 求导的结果。由此结果**一定是**关于 $y'(x)$ 的一元一次方程，两边求导的方法是可以通用的。

接下来是参数方程的情况：

题 89. 设 $y=f(x)$ 是由

$$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$$

确定的函数，计算 $f''(x)$。

解答:

由于 x 是 t 的函数，上述两式事实上可以改写为

$$\begin{cases}x(t)=\ln(1+t^2)\\ f(x(t))=t-\arctan t\end{cases}$$

由此利用复合函数求导公式即得 (注意下式中第一个、第三个求导是对 t，第二个求导是对 x，这样写是没有歧义的，因为 f 是 x 的函数，而 $f(x(t))$ 与 $x(t)$ 都是 t 的函数)

$$(f(x(t)))'=f'(x(t))x'(t)$$

从而

$$f'(x(t))=\frac{(f(x(t)))'}{x'(t)}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2}t$$

* 也即我们只需把 y 的表达式对 t 求导**除以** x 的表达式对 t 求导，就得到了 y 对 x 求导的结果。这是对参数方程求导的一般方法。

这时我们得到了新的参数方程

$$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ f'(x)=\frac{1}{2}t\end{cases}$$

从而将 $f'(x)$ 的表达式对 t 求导除以 x 的表达式对 t 求导，即得到 $f'(x)$ 对 x 的导数——也就是 $f''(x)$，计算知 ($t\neq 0$ 时)

$$f''(x(t))=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

* 同样，这类题目**无需讨论** $t=0$ 时二阶导数的存在性问题。

对于其他未显式给出 y 的情况，往往也可以通过**复合函数求导**技巧推导出导数的形式。

5.3.3 微分

* 注意本节内容**与考试无关**：对于微分可以直接理解成将 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=f'(x)$ **形式上**写为 $\mathrm{d}f=f'(x)\mathrm{d}x$，不会影响做任何题。

为了解释微分究竟是何种含义，我们先定义**差分**。对于以 t 为自变量的函数 $f(t)$，对任何实数 h，定

义 $\Delta_h^t f$ (可以称为 f 对 t 距离为 h 的向前差分) 为另一个关于 t 的函数：

$$(\Delta_h^t f)(t) = f(t+h) - f(t)$$

若两个关于差分的式子在 $h \to 0$ 时是**等价无穷小**，我们就可以将所有 Δ_h^t 换成 d^t，并将**等价**记号改为**等于号**——这就是**微分等式**的定义。无歧义时可以**省略上标** t，且将 $(\Delta_h^t f)(t)$ 记作 $\Delta_h^t f(t)$。

先以一个简单的微分等式作为例子：

题 90. 利用上述微分定义证明 f 在 x 的邻域内可导时

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$$

解答：

这里 d 对应的 Δ_h 自然是指对于 x 的差分，由此我们需要证明

$$\Delta_h^x f(x) \sim f'(x)\Delta_h^x x \quad (h \to 0)$$

根据定义，$\Delta_h^x f = f(x+h) - f(x)$，而右侧由于 x 也是一个关于 x 的函数，有

$$\Delta_h^x x = (x+h) - x = h$$

从而原式化为

$$(f(x+h) - f(x)) \sim f'(x)h \quad (h \to 0)$$

由导数定义得证。

* 虽然严格意义上来说，只在 $f'(x) \neq 0$ 时上述等价性成立，但此处的"等价无穷小"是针对**一般的** x，就像我们之前计算参数方程或隐函数求导时不精细讨论分母为 0 的情况，我们此处也不讨论 $f'(x) = 0$ 的特殊情况。

对于更高阶的情况，若微分等式中出现 $\mathrm{d}^2 f$，其应替换为 $(\Delta_h^t)^2 f$，也即对 f 进行**两次**差分后得到的函数：

题 91. 利用上述微分定义证明 f 在 x 的邻域内可二阶导时

$$\mathrm{d}^2 f(x) = f''(x)(\mathrm{d}x)^2$$

解答：

这里 d 对应的 Δ_h 仍为对于 x 的差分，由此我们需要证明

$$(\Delta_h^x)^2 f(x) \sim f''(x)(\Delta_h^x x)^2 \quad (h \to 0)$$

题 90 中已经证明了右侧是 $f''(x)h^2$ 接下来研究左侧。

由于

$$\Delta_h^x f(x) = f(x+h) - f(x)$$

再次代入有

$$\begin{aligned}(\Delta_h^x)^2 f(x) &= \Delta_h^x(f(x+h) - f(x)) \\ &= (f(x+h+h) - f(x+h)) - (f(x+h) - f(x)) \\ &= f(x+2h) + f(x) - 2f(x+h)\end{aligned}$$

从而原式化为

$$f(x+2h)+f(x)-2f(x+h)\sim f''(x)h^2\quad(h\to 0)$$

至此我们需要证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)+f(x)-2f(x+h)}{h^2f''(x)}=1$$

很遗憾，目前我们尚无法严谨证明，但在利用微分中值定理证明**洛必达法则**后，我们即可以计算出结论。

* 这里出一个对上式正确性的直观理解：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)+f(x)-2f(x+h)}{h^2}=\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h}$$

从而其会“类似”于 $\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$——但这种类似只是形式上的，严谨证明仍然困难。

* 同样，这里不讨论 $f''(x)=0$ 的特殊情况。

由此我们即可以解决所有的微分等式问题，事实上可以证明对任何正整数 n 有

$$\mathrm{d}^n f(x)=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x$$

这里上标 (n) 表示求 n 阶导数，**此结论足以进行任何微分相关的计算**。

接下来即可以介绍**一阶微分的形式不变性**，它可以归结为如下定理：

题 92. 证明，若 y 是 x 的函数，x 是 t 的函数，有

$$\mathrm{d}^t y(x(t))=y'(x(t))\mathrm{d}^t x(t)$$

解答：

由于已经证明了

$$\mathrm{d}^t y(x(t))=(y(x(t)))'\mathrm{d}^t t$$

利用复合函数求导公式可知

$$\mathrm{d}^t y(x(t))=y'(x(t))x'(t)\mathrm{d}^t t$$

又由于 $\mathrm{d}^t x(t)=x'(t)\mathrm{d}^t t$，我们写出其定义

$$\Delta_h^t x(t)\sim x'(t)\Delta_h^t t\quad(h\to 0)$$

利用乘积极限性质，只要 $y'(x(t))$ 不为 0，两边同乘 $y'(x(t))$ 仍然等价 (事实上即使为 0，若认为 0 与 0 等价也能得到仍然等价)，从而

$$y'(x(t))\Delta_h^t x(t)\sim y'(x(t))x'(t)\Delta_h^t t\quad(h\to 0)$$

这就证明了

$$y'(x(t))\mathrm{d}^t x(t)=y'(x(t))x'(t)\mathrm{d}^t t$$

利用等价无穷小的**传递性** (即趋于某点时 $f\sim g$、$g\sim h$ 则 $f\sim h$) 即可最终得到

$$\mathrm{d}^t y(x(t))=y'(x(t))\mathrm{d}^t x(t)$$

由于我们知道 $\mathrm{d}^x y(x)=y'(x)\mathrm{d}^x x$，上面的定理说明了**一阶微分的等式改变取微分的变量后仍然成立**，

而对高阶微分此结论并不成立，以二阶微分为例：

题 93. 证明，若 y 是 x 的函数，x 是 t 的函数，一般情况下

$$(\mathrm{d}^t)^2 y(x(t)) \neq y''(x(t))(\mathrm{d}^t x(t))^2$$

解答:

利用已经证明的结论有

$$(\mathrm{d}^t)^2 y(x(t)) = (y(x(t)))''(\mathrm{d}^t t)^2$$

由复合函数求导公式可知

$$(\mathrm{d}^t)^2 y(x(t)) = (y'(x(t))x''(t) + y''(x(t))(x'(t))^2)(\mathrm{d}^t t)^2$$

再利用 $x''(t)(\mathrm{d}^t t)^2 = (\mathrm{d}^t)^2 x(t)$、$x'(t)\mathrm{d}^t t = \mathrm{d}^t x(t)$ 可得

$$(\mathrm{d}^t)^2 y(x(t)) = y'(x(t))(\mathrm{d}^t)^2 x(t) + y''(x(t))(\mathrm{d}^t x(t))^2$$

* 这里我们仅仅做了**形式上的替换**，展开为微分的定义后，上式到下式实际上可类似**题 92** 利用极限的四则运算的严格证明。

可以发现此结果比起 $y''(x(t))(\mathrm{d}^t x(t))^2$ 还多出了一项 $y'(x(t))(\mathrm{d}^t)^2 x(t)$，从而这项非零时不等号成立。

* 除了差分极限以外，微分也有其他的理解，例如一个更本质的理解是在每点处将 $\mathrm{d}x$ 视为某个线性空间的基，这样微分等式中的等号就是严谨的。不过，这些就远不在本课程讨论的范围内了。

六　微积分基本定理

本次习题课以讲解为主，主要介绍了原函数、定积分的概念，它们的本质理解、联系与区别。由于会从头开始介绍，知识基础仅为导数部分的结论，无需先学过积分。**非常推荐阅读本次讲义**以了解积分的更本质观点。

§6.1　作业解答

1. (习题 1.4.5) 给出以下极限严格定义：

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

解答：

定义为

$$\forall M\in\mathbb{R},\quad \exists\delta>0,\quad \forall x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta),\quad f(x)>M$$

* 一定注意**挖去 a 点**。

(2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

解答：

定义为

$$\forall M\in\mathbb{R},\quad \exists M_0\in\mathbb{R},\quad \forall x<M_0,\quad f(x)<M$$

* 不少同学将 $M\in\mathbb{R}$ 写为 $M>0$ 或 $M<0$，这也是等价的定义。

2. (习题 1.5.4) 适当选取 a 使下列函数在 $\mathbb{R}$ 上连续：

(1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x^2} & x<0\\ a+x & x\geq 0\end{cases}$

解答：

利用初等函数连续性可知 $f(x)$ 在 0 以外的点连续，0 处函数值与左极限为 1，右极限为 a，从而连续当且仅当 $a=1$。

(2) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x) & x\geq 1\\ a\cos(\pi x) & x<1\end{cases}$

解答：

利用初等函数连续性可知 $f(x)$ 在 1 以外的点连续，1 处函数值与右极限为 $\ln 2$，左极限为 $a\cos\pi=a$，从而连续当且仅当 $a=\ln 2$。

* 注意一点函数连续需要**左极限**、**右极限**、**函数值**三者相等，而非只要左右极限相等。

3. (习题 1.5.5) 利用初等函数连续性与复合函数极限结论计算：

(2) $\lim_{x\to 2} x^{\sqrt{x}}$

解答：

由于 x 在 2 的一个邻域内为正，利用指数函数与对数函数性质有

$$\lim_{x\to 2} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 2}\mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x}$$

而此时右侧已经是初等函数的形式，且在 2 有定义，从而由初等函数知极限为

$$\mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln 2}=2^{\sqrt{2}}$$

(5) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})|x|}$

解答：

利用分子有理化技术将其写为 (由于无穷的一个邻域中 x 不为 0，可以分子分母同除以 $|x|$)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}}|x|}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-2/x^2}}}$$

由于 $\frac{1}{x}$ 在 $x\to\infty$ 时为 0，而上式右侧是 $\frac{1}{x}$ 的初等函数，利用复合函数极限结论即得极限为

$$\sqrt{\frac{3}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

4. (习题 1.5.7) 指出下列函数的间断点与类型，若为可去间断点，去除使得其为连续函数：

(1) $f(x)=\cos(\pi(x-[x]))$

解答：

将其写为**分段函数**的形式：

$$\forall k\in\mathbb{Z},\quad f(x)=\cos(\pi(x-k)),\quad x\in[k,k+1)$$

利用初等函数连续性可知 $f(x)$ 在 $k\in\mathbb{Z}$ 以外的点都连续,在 k 处函数值与右极限为 $\cos(\pi(k-k))=1$，左极限为 $\cos(\pi(k-(k-1)))=-1$。

由此所有 $k\in\mathbb{Z}$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，且由 $1\neq-1$ 不可去。

(2) $\operatorname{sgn}(\sin x)$

解答：

将其写为**分段函数**的形式：

$$f(x)=\begin{cases}1 & \sin x>0\\ 0 & \sin x=0\\ -1 & \sin x<0\end{cases}$$

再由 $\sin x$ 的性质可进一步写为

$$\forall k\in\mathbb{Z},\quad f(x)=\begin{cases}0 & x=2k\pi\\ 1 & x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)\\ 0 & x=2k\pi+\pi\\ -1 & x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)\end{cases}$$

利用初等函数连续性知 $f(x)$ 在所有 $\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 以外的点都连续，在 $k\pi$ 处函数值为 0，若 k 为偶数则左极限 -1 右极限 1，否则左极限 1 右极限 -1。

由此所有 $\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 中的点是 $f(x)$ 的第一类间断点，且由 $1\neq-1$ 不可去。

5. (1.6 节例 3) 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，且为单射，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 严格单调。

解答：

利用**题 68** 可以证明 $f(x)$ 在 (a,b) 中的任何一个闭区间严格单调，任取 $a<a_1<b_1<b$，由单射可知 $f(a_1)\neq f(b_1)$，假设 $f(a_1)<f(b_1)$，下证 $f(x)$ 在 (a,b) 严格单调增 (若 $f(a_1)>f(b_1)$ 可同理证明单调减)。

对任何 $a<x<y<b$，记 $x_1=\min\{a_1,x\}$、$y_1=\max\{b_1,y\}$，根据定义可发现 $a<x_1<y_1<b$，且 $x,y\in[x_1,y_1]$、$[a,b]\subset[x_1,y_1]$。由于 $f(x)$ 在 $[x_1,y_1]$ 严格单调，且 $a_1<b_1$、$f(a_1)<f(b_1)$，其必然严格单调增，这就可以从 $x<y$ 得到 $f(x)<f(y)$，得证。

* 仍然注意**题 68** 的注释，教材上的证明省去第一部分是**错误**的。

6. (习题 1.6.1) 证明奇数次实系数多项式必有实根。

解答:

设其次数为 $2n-1$，$n\in\mathbb{N}^*$，则可以设其为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2n-1}a_kx^k$$

其中 $a_{2n-1}\neq 0$。直接计算可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{2n-1}}=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{2n-1}a_k\frac{1}{x^{2n-1-k}}=a_{2n-1}$$

若 $a_{2n-1}>0$，利用极限保序性可知存在 $M>0$ 使得 $|x|>M$ 时 $\frac{f(x)}{x^{2n-1}}>0$，于是再利用 x^{2n-1} 与 x 同号即得 $f(M+1)>0$、$f(-M-1)<0$，利用介值定理可知 $f(x)$ 存在实根。若 $a_{2n-1}<0$ 可同理证明。

* 极限**保序性**常用于将极限结论**转化为非极限点**处的结论。

7. (习题 1.6.2) 设 $\varepsilon\in(0,1)$，证明方程 $y_0=x-\varepsilon\sin x$ 对任何 $y_0\in\mathbb{R}$ 存唯一实数解。

解答:

记 $f(x)=x-\varepsilon\sin x$，分两部分证明:

– **存在性**

  由 $|\sin x|\leq 1$ 可知 $|\varepsilon\sin x|<1$，从而

$$f(y_0-1)=y_0-1-\varepsilon\sin(y_0-1)<y_0$$

$$f(y_0+1)=y_0+1+\varepsilon\sin(y_0+1)>y_0$$

  由此利用介值定理即得存在 $\xi\in(y_0-1,y_0+1)$ 使得 $f(\xi)=y_0$。

– **唯一性**

  若有 ξ_1、ξ_2 满足 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=y_0$，作差可知

$$(\xi_1-\xi_2)-\varepsilon(\sin\xi_1-\sin\xi_2)=0$$

  移项取绝对值可得

$$|\xi_1-\xi_2|=\varepsilon|\sin\xi_1-\sin\xi_2|$$

  在本讲义 3.3.4 已经证明了 $|\sin\xi_1-\sin\xi_2|<|\xi_1-\xi_2|$ 对 $\xi_1\neq\xi_2$ 成立，从而右侧绝对值等于左侧只能 $\xi_1=\xi_2$，这就证明了唯一性。

  * 需要熟悉 sin 相关的**基本估算结果**。

* 这题作业与上一题都有人用**极限版本的介值定理** (也即直接通过连续函数 $f(x)$ 在正无穷处极限为正无穷、负无穷处极限为负无穷推出 $f(x)=y_0$ 对任何 y_0 有解) 操作。由于教材未给出此版本，最好还是用更直接的方法说明 (或先证明此结论)。

8. (习题 2.1.6) 考虑物理上离地心 $r\in[0,+\infty)$ 处的重力加速度函数 (G、M、R 均为正):

$$g(r)=\begin{cases}\frac{GMr}{R^3} & r<R\\ \frac{GM}{r^2} & r\geq R\end{cases}$$

(1) 判断 $g(r)$ 是否连续。

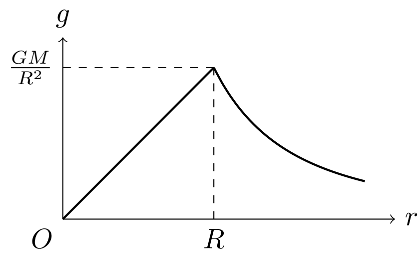
解答：

利用初等函数连续性可知 $g(r)$ 在 R 以外的点连续，r 处右极限与函数值为 $\frac{GM}{R^2}$，左极限为 $\frac{GMR}{R^3}=\frac{GM}{R^2}$，因此连续。

(2) 作出 $g(r)$ 的草图。

解答：

示意图如下：



* 推荐一个好用的在线画函数图像网站：www.desmos.com/calculator。

(3) 判断 $g(r)$ 是否可导。

解答：

利用初等函数导数结果可知 $g(r)$ 在 R 以外的点可导，r 处左导数为 $\frac{GM}{R^3}$，右导数为 $-\frac{2GM}{R^3}$，它们不相等，因此不可导。

* 注意**不要混淆左/右导数与导数的左/右极限**。导数存在当且仅当左右导数存在且相等，这是由函数极限定义决定的，而导数的左右极限性质我们尚未学到。

9. (习题 2.1.10) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 上可导，且为偶函数，证明 $f'(0)=0$。

解答：

* 事实上利用复合函数导数结论可以直接得到结果，出于课程顺序，这里我们通过**定义**说明。

由条件可知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

将 x 换元为 $-x$ 可得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)-f(-x)}{x}$$

两式相加并利用偶函数即得

$$2f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

这就得到了证明。

10. (习题 2.1.13) 求函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的左右导数。

解答：

由于 $x\to 0^+$ 时 $\frac{1}{x}\to+\infty$，利用推广的复合函数极限结论可知 $\mathrm{e}^{1/x}\to+\infty$，可知**右导数**为 ($x$ 与除以 x 抵消)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}=0$$

同理，由于 $x\to 0^-$ 时 $\frac{1}{x}\to-\infty$ 可知 $\mathrm{e}^{1/x}\to 0$，从而**左导数**为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}=1$$

* 应当记忆**基本初等函数在无穷处的极限情况**。

11. (2.2 节例 11) 求函数 $y=x^x$ 的导数，其中 $x>0$。

解答：

由于 $x>0$ 时 $x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}$，直接利用复合函数求导公式计算可知 $x>0$ 时

$$y'=(x\ln x)'\mathrm{e}^{x\ln x}=(\ln x+1)\mathrm{e}^{x\ln x}=(\ln x+1)x^x$$

12. (2.2 节例 12) 求函数

$$y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2(x-4)}}$$

的导数。

解答：

此函数在 $x\notin\{3,4\}$ 有定义，由于其为乘积形式，可考虑取绝对值后加 ln 得到

$$\ln|y|=\left|\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2(x-4)}}\right|$$

注意 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$ 对一切 $x\neq 0$ 成立，当 y 有定义且非零时 (也即 $x\notin\{-1,2,3,4\}$) 即有

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2-x}+\frac{2}{3-x}-\frac{1}{x-4}\right)$$

从而

$$y'=\frac{y}{3}\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2-x}+\frac{2}{3-x}-\frac{1}{x-4}\right)$$

* 与之前类似，这类题目无需讨论 x 为 -1 或 2 时导数的存在性问题，事实上可以**证明**此时导数不存在：以 $x=2$ 为例，由于 y 在 2 处为 0，导数定义为

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(2+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sqrt[3]{\frac{(h+3)^2(-h)}{(1-h)^2(-2+h)}}$$

可发现其为

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(2+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}h^{-2/3}\sqrt[3]{\frac{(h+3)^2}{(1-h)^2(2-h)}}$$

由于 $h^{-2/3}$ 在 0 处极限为无穷，右侧部分在 0 处极限为 $\sqrt[3]{9/2}\neq 0$，利用无穷极限组合的结论即得此极限为 ∞，即导数不存在。

13. (习题 2.2.3) 计算导数：

(8) $y=\cos\sqrt[5]{1+x^2}$

解答：

利用复合函数求导公式可知

$$y'=-\frac{2}{5}x(1+x^2)^{-4/5}\sin\sqrt[5]{1+x^2}$$

(9) $y=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|$

解答：

利用复合函数求导公式可知

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

* 直接计算导数类题目一般**无需讨论定义域**。

14. (习题 2.2.4) 计算导数：

(5) $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$，其中 $a>0$。

解答：

直接计算可知

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

后两项合并即发现可进一步化简为

$$y' = \sqrt{a^2-x^2}$$

(6) $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，其中 $a>0$。

解答：

直接计算可知 (第三项的计算过程相对复杂)

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2+x^2}}$$

后两项合并即发现可进一步化简为

$$y' = \sqrt{a^2+x^2}$$

(8) $y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$，其中 $a>b\geq 0$。

解答：

直接计算可知

$$y' = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}\right)^{-1}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}$$

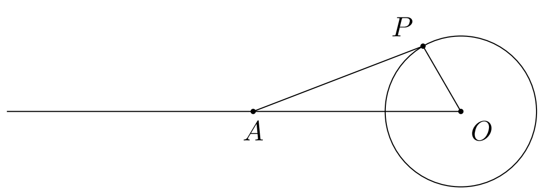
进一步化简可得到

$$y' = \frac{1}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2}+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}}$$

由此展开后再利用二倍角公式得到

$$y' = \frac{1}{a+b\cos x}$$

15. (习题 2.2.6) 如图所示：



圆的半径 OP 为 2m，点 P 在圆上顺时针旋转，带动点 A 在水平线上运动，且长度 PA 固定为 6m。已知 P 每秒顺时针旋转四圈，求角 AOP 为 $\frac{\pi}{2}$ 且 P 在水平线上方时，点 A 向右运动的瞬时速度。

解答：

以下省略长度单位 m 与时间单位 s。

设 OA 长度为 x，角 AOP 为 α (这里角度指 AO **顺时针**旋转到 OP 所过的角度)，它们都是 t 的函数，利用余弦定理可知

$$36 = 4 + x^2(t) - 4x(t)\cos\alpha(t)$$

两侧同时对 t 求导可知

$$2x'(t)x(t) - 4x'(t)\cos\alpha(t) + 4\alpha'(t)x(t)\sin\alpha(t) = 0$$

假设 t_0 时 $\alpha(t_0) = \frac{\pi}{2}$，代入可发现

$$2x'(t_0)x(t_0) + 4\alpha'(t_0)x(t_0) = 0$$

由几何关系 $x(t_0) \neq 0$，消去可得

$$x'(t_0) = -2\alpha'(t_0)$$

利用条件，由于 P 在顺时针旋转，$\alpha'(t_0)$ 为正，且根据条件可知角速度恒定为 8π，因此即得

$$x'(t_0) = -16\pi$$

注意这意味着 OA 瞬时以 $16\pi\,\mathrm{m/s}$ 的速度缩短，对应点 A 向右运动，于是 A 向右运动的顺时速度为 $16\pi\,\mathrm{m/s}$。

16. (习题 2.5.1) 判断 $x \to 0$ 时以下无穷小量关于 x 的阶数：

(1) $y = x + 10x^2 + 100x^3$

解答：

由于 $x \to 0$ 时 x^2 与 x^3 衰减将更快，可**感受**出 y 是 x 的一阶无穷小，由此尝试证明：

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + 10x + 100x^2) = 1$$

从而的确为一阶无穷小。

(2) $y = (\sqrt{x+2} - \sqrt{2})\sin x$

解答：

由基本等价无穷小结论 $x \to 0$ 时 $\sin x \sim x$，$(\sqrt{x+1} - x) \sim \frac{1}{2}x$，可**感受**出 y 是 x 的二阶无穷小，由此尝试证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{x}{2}+1} - 1\right)}{x}\frac{\sin x}{x}$$

利用等价无穷小替换可知上方分子上的 $\sqrt{\frac{x}{2}+1} - 1$ 可替换为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{4}$，由此进一步计算得

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

从而的确为二阶无穷小。

* 注意 $\sqrt{x+c} - \sqrt{c}$ 在 $c \neq 0$ 时是**一阶**无穷小，否则其为 $\sqrt{x}$，是 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小。

(3) $y = x(1 - \cos x)$

解答：

有基本等价无穷小结论 $x \to 0$ 时 $(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2$，从而直接有

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

由此 y 为 x 的三阶无穷小。

* 未知阶数时需要先分析**估算出阶数**，若证明过程中发现有问题再调整。

17. (习题 2.5.8(3)) 求以下方程确定的隐函数 $y(x)$ 的导数：

$$\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

解答：

两侧对 x 求导可发现

$$\frac{1}{(y/x)^2+1}\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

注意两边分母相同，且由原式有 $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 可知 $x^2+y^2\neq 0$，消去分母即得到 ($x\neq y$ 时)

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

* 求导时务必注意**不要忘记 y 是 x 的函数**。此外，这类题目无需进一步讨论 $x=y$ 时的可导性。

18. (习题 2.5.9(2)) 求以下方程确定的隐函数在 $\left(\frac{\mathrm{e}}{10},\frac{20}{\mathrm{e}^2}\right)$ 的导数：

$$\mathrm{e}^{xy}-5x^2y=0$$

解答：

两侧对 x 求导可发现

$$(y+xy')\mathrm{e}^{xy}-5x^2y'-10xy=0$$

由条件 $\mathrm{e}^{xy}=5x^2y$ 代入并消去 $5x$ 可进一步化简为

$$xy^2+x^2yy'-xy'-2y=0$$

也即 ($x^2y-x\neq 0$ 时)

$$y'=\frac{2y-xy^2}{x^2y-x}$$

代入即可得到这点处导数为 0。

19. (习题 2.5.10(2)) 计算以下参数方程确定的函数 $y(x)$ 的导数：

$$\begin{cases}x=t\ln t\\ y=\mathrm{e}^t\end{cases}$$

解答：

代入公式 (推导可见本讲义 5.3.2) 可得导数为 ($1+\ln t\neq 0$ 时)

$$y'(x)=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{e}^t}{1+\ln t}$$

20. (习题 2.5.11) 求椭圆周

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,b>0$$

上一点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程与法线方程。证明从一个焦点出发射向 M 的光线将通过另一个焦点。

解答：

椭圆方程两侧对 x 求导可得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$$

从而可知

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

由此可知 M 处的切线斜率为 $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，由斜率乘积为 -1 的直线垂直可知法线斜率为 $\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$，从而切线、法线方程分别为 (虽然上述推导中默认了 x_0、y_0 非零，单独讨论可以发现当其中某个为 0 时下方也仍然为切线或法线的方程)

$$a^2y_0(y-y_0)+b^2x_0(x-x_0)=0$$

$$b^2x_0(y-y_0)-a^2y_0(x-x_0)=0$$

接下来证明反射性质。

不妨设 $a>b>0$，记 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则焦点为

$$F_1(-c,0),\quad F_2(c,0)$$

向量 F_1M、F_2M 分别为

$$\alpha=(x_0+c,y_0),\quad \beta=(x_0-c,y_0)$$

任取法线上两点 (如 (x_0,y_0) 与 $\big(x_0+b^2x_0,y_0+a^2y_0\big)$) 连线，可得法线的方向向量

$$\gamma=(b^2x_0,a^2y_0)$$

要证明 MF_1、MF_2 互为反射光线只需证明它们与法线夹角相等，这又等价于夹角 cos 值相等，利用向量内积的性质可得也即

$$\frac{\alpha\cdot\gamma}{|\alpha||\gamma|}=\frac{\beta\cdot\gamma}{|\beta||\gamma|}$$

由点在椭圆上 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，从而

$$(x_0\pm c,y_0)\cdot\gamma=b^2(a^2\pm cx_0)$$

由此

$$\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma}=\frac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}$$

再代入

$$y_0^2=\frac{a^2b^2-b^2x_0^2}{a^2}=\frac{a^2-x_0^2}{a^2}(a^2-c^2)$$

可发现

$$|(x_0\pm c,y_0)|=\sqrt{x_0^2+c^2\pm 2cx_0+\frac{a^2-x_0^2}{a^2}(a^2-c^2)}=\frac{1}{a}\sqrt{a^4+c^2x_0^2\pm 2cx_0a^2}=\frac{1}{a}|a^2\pm cx_0|$$

注意由 $|x_0|\le a$ 与 c 的定义有 $a^2\pm cx_0>0$ 即可得证。

21. (2.6 节例 6) 设 $y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 所确定的隐函数，求 y''。

解答:

方程两边同时求导得到

$$3x^2+3y^2y'-3xy'-3y=0$$

从而

$$y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

由此利用复合函数求导再次求导可知

$$y'' = \frac{(y'-2x)(y^2-x)-(2yy'-1)(y-x^2)}{(y^2-x)^2}$$

代入 y' 得到

$$y'' = \frac{(y-x^2-2x(y^2-x))(y^2-x)-(2y(y-x^2)-(y^2-x))(y-x^2)}{(y^2-x)^3}$$

分子展开可得

$$y'' = \frac{-2xy^4+6x^2y^2-2yx^4-2xy}{(y^2-x)^3}$$

注意 $-2xy^4+6x^2y^2-2yx^4 = -2xy(y^3+x^3-3xy) = 0$，从而最终化为

$$y'' = -\frac{2xy}{(y^2-x)^3}$$

* 考试的时候一般不会因为化不到最简扣分，但除非时间不够，否则请**尽量化简**以避免助教看错。

22. (2.6 节例 7) 设 $y(x)$ 是由参数方程

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

确定的函数，求 y''。

解答：

代入公式可得

$$y' = \frac{-\sin t}{1-\cos t}$$

将此与 $x = t - \sin t$ 组合看作新的参数方程，再次代入公式得到

$$y'' = \left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)' \frac{1}{1-\cos t}$$

直接计算并化简即得到

$$y'' = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}$$

23. (习题 2.6.8) 设 $y = x^2\ln(1+x)$，求 $y^{(50)}$。

解答：

由于 y 为 x^2 与 $\ln(1+x)$ 的乘积，利用乘积的 n 阶导数公式，由于 x^2 求 3 阶及以上导数为 0 即得

$$y^{(50)} = x^2(\ln(1+x))^{(50)} + 50\cdot 2x(\ln(1+x))^{(49)} + \frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2(\ln(1+x))^{(48)}$$

直接递推计算可发现 $n>1$ 时

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}$$

由此可得

$$y^{(50)} = -49!\frac{x^2}{(1+x)^{50}} + 100\cdot 48!\frac{x}{(1+x)^{49}} - 50\cdot 49\cdot 47!\frac{1}{(1+x)^{48}}$$

24. (习题 2.7.2) 计算

$$\int (1+\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x$$

解答：

展开后利用幂函数导数结论即得

$$\int(1+2\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x=x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2+C$$

* 不定积分题目同样**一般无需严格说明定义域**，其实际影响本章中将介绍。

25. (习题 2.7.4) 计算

$$\int\tan^2 t\mathrm{d}t$$

解答：

由于 $\tan^2 t=\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$，而我们知道 $\tan t$ 的导数为 $\frac{1}{\cos^2 t}$，可以想到将原式配凑为

$$\int(\tan^2 t+1-1)\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)\mathrm{d}t=\tan t-t+C$$

* 由以上两题可发现 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int f(t)\mathrm{d}t$ 是**不同**的，分别是 x 与 t 的函数。

26. (习题 2.7.6) 计算

$$\int\frac{x^2+3}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

解答：

我们优先将分式**分离出整式部分**得到其为

$$\int\left(1+\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=x+2\arctan x+C$$

* 此方法的原理和更多应用将在介绍有理函数不定积分时介绍。

27. (习题 2.7.8) 计算

$$\int(1+\cos^2 x)\sec^2 x\mathrm{d}x$$

解答：

直接展开得到其为

$$\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)\mathrm{d}x=\tan x+x+C$$

* 个人建议计算中尽量**将三角函数优先化为** $\sin$ **与** $\cos$，这样可以看出问题的实际形式。

28. (习题 2.7.10) 计算

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)\mathrm{d}x$$

解答：

直接由幂函数与对数函数导数结论得其为

$$\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}+C$$

29. (习题 2.7.12) 计算

$$\int(2\cosh x-\sinh x)\mathrm{d}x$$

解答：

直接展开得到其为

$$\int\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}+C$$

等号是利用了指数函数导数结论。

* 同样，计算中**双曲函数也优先展开**，因为指数函数是易于处理的。

30. (习题 2.7.14) 计算

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x$$

解答：

由于分子实际上是 $\sin^2 x + \cos^2 x$，可以将其展开为

$$\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) \mathrm{d}x$$

这样即可以通过三角函数导数结论得到结果为

$$-\cot x + \tan x + C$$

31. (习题 2.7.16) 计算

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} \mathrm{d}x$$

解答：

注意到 $1 + x^2 - x^2 = 1$，由此可以想到裂项得上式为

$$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

32. (习题 2.7.18) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中某区间满足微分方程

$$xf'(x) + f(x) = x^3 + 1$$

求所有可能的 $f(x)$。

解答：

观察得到左侧为 $(xf(x))' = x^3 + 1$，由此即可得到存在 $C \in \mathbb{R}$ 使得

$$xf(x) = x^4 + x + C$$

若此区间不包含 0，上式可以直接得到

$$f(x) = x^3 + 1 + \frac{C}{x}$$

若包含 0，代入 $x = 0$ 可知 $C \neq 0$ 时无解，从而只能

$$f(x) = x^3 + 1$$

33. (习题 2.8.1(2)) 用定义计算

$$\int_a^b x \mathrm{d}x$$

解答：

* 教材中这类题目直接应用了**连续函数可积**，从而直接取特定分点进行了证明，我们此处给出一个不默认可积的证明方式。

利用面积的直观感受可以得到结果为 $\frac{b^2-a^2}{2}$，下面证明此结果。

对划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，由定义得需要考虑以下求和

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k (x_k - x_{k-1})$$

其中 $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$。为了配凑出 $\frac{b^2-a^2}{2}$，我们发现它可以看作裂项求和

$$\frac{b^2-a^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}+x_k}{2}(x_k - x_{k-1})$$

从而有估算

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k(x_k - x_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right| \\
=&\left|\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k - \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)(x_k - x_{k-1})\right| \\
\leq&\sum_{k=1}^{n} \left|\xi_k - \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right|(x_k - x_{k-1}) \\
\leq&\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) \\
=&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})^2
\end{aligned}$$

这里最后一个 $\leq$ 号是由于 ξ_k 的范围限制。

设 $\lambda(T)$ 为 T 最长分段的长度，则对任何 k 有 $(x_k - x_{k-1})^2 \leq \lambda(T)(x_k - x_{k-1})$，从而进一步放缩得到

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k(x_k - x_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})^2 \leq \frac{1}{2}\lambda(T)\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{2}\lambda(T)$$

由此即可以利用定积分定义证明 $\lambda(T)$ 趋于 0 时左侧极限为 0，得证。

34. (习题 2.8.6) 判断下列各题中定积分值的大小：

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$

解答：

左减右得

$$\int_0^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x^2})\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^{x^2-x})\mathrm{d}x$$

由 $(0,1)$ 上 $x^2 - x < 0$ 可知上式被积函数在 $(0,1)$ 恒正，又由连续且恒正可知积分大于 0，从而左大于右。

(2) $\int_0^{\pi/2} x^2 \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \mathrm{d}x$

解答：

左减右得

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 - \sin^2 x)\mathrm{d}x$$

由三角函数估算结论 $x > 0$ 时 $x > \sin x$ 可知上式被积函数在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 恒正，又由连续且恒正可知积分大于 0，从而左大于右。

(3) $\int_0^1 x \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \mathrm{d}x$

解答：

左减右得

$$\int_0^1 (x - \sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$$

由 $(0,1)$ 上 $x < 1 < \sqrt{1+x^2}$ 可知上式被积函数在 $(0,1)$ 恒负，又由连续且恒负可知积分小于 0，从而左小于右。

* 注意从开区间恒正推出积分值为正的过程**需要被积函数连续**。虽然教材未对此进行说明，本章**题 109** 将介绍证明过程。

§6.2　积分

6.2.1　不定积分定义

首先，给定函数可以计算导函数，那么，给定某开区间 (可能含无穷) 上的函数 $f(x)$，我们自然也希望能求解出**原函数**，也即满足 $F'(x) = f(x)$ 处处成立的函数 F。

为了说明原函数的性质，我们需要如下的关键定理：

题 94. 若函数 $f(x)$ 在某开区间 (可能含无穷) 上可导且 $f'(x)$ 恒为 0，证明 $f(x)$ 为常数。
* 此结论的逆命题即开区间**常函数导数为 0**，可由导数定义直接得到，从而成立。

解答：

我们会自然想到反证的思路：若此区间中有 $a < b$ 使得 $f(a) \neq f(b)$，我们希望证明 $[a, b]$ 中有一点使得 $f'(x) \neq 0$。

截至目前，我们学过的唯一一个函数值和导数相关的结论是高中时期的**函数极值点导数为 0**，接下来我们先用导数的严谨性证明此结论，再利用它做出本题：

– **极值点性质**

若存在 $\delta > 0$ 使得只要 $|x - x_0| < \delta$ 就有 $f(x) \leq f(x_0)$，则称 x_0 为 f 的**极大值点**，我们将证明，若 f 在 x_0 可导，则 $f'(x_0) = 0$。

若 $f'(x_0) > 0$，利用极限保序性可知存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$\forall 0 < |h| < \delta_0, \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

由此对任何 $h \in (0, \delta_0)$ 都有 $f(x_0 + h) > f(x_0)$，与极大值定义矛盾。

反之，若 $f'(x_0) < 0$，利用极限保序性可知存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$\forall 0 < |h| < \delta_0, \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$$

由此对任何 $h \in (-\delta_0, 0)$ 都有 $f(x_0 + h) > f(x_0)$，与极大值定义矛盾。

* 同理可定义**极小值点**，并证明极小值点若可导则导数为 0。

– **函数构造**

* 这步的过程有一定技巧性，可以学习思想。

用刚才证明的结论可以找到导数为 0 的点，但我们的反证法需要构造 $f'(x)$ 不为 0 的点，由此可以想到利用**差的导数是导数的差**，只要我们构造另一个**导数不为 0** 的函数 $g(x)$，使得 $f(x) - g(x)$ 在某点导数为 0，就可以得到 $f(x)$ 在这点的导数非零 0。

由此，我们考虑最简单的导数非零的函数，**一次函数**，记

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

可发现由条件 $g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0$，且 $g(a) = f(a)$、$g(b) = f(b)$。

我们记 $h(x) = f(x) - g(x)$，则 $h(a) = h(b) = 0$。我们下面证明存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $h'(x_0) = 0$，则有

$$f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0$$

这样就得到了矛盾。

– **最终证明**

考虑区间 $[a,b]$，由于 f、g 都是连续函数（f 可导于是连续），h 在 $[a,b]$ 上连续，由此利用连续函数最值性质（可见**题 20**），h 在 $[a,b]$ 上存在最大值 M 与最小值 m。利用条件有 $h(a)=h(b)=0$，于是 $M\geq 0\geq m$。

若 $M=m=0$，h 在 $[a,b]$ 上恒为 0，任取 $x_0\in(a,b)$ 均符合要求。否则，不妨设 $M>0$（$m<0$ 同理），假设 h 在 x_0 处取到最大值 M，利用两端为 0 可知 $x_0\in(a,b)$。记 $\delta=\min(x_0-a,b-x_0)$，即可由极大值点定义发现 x_0 是 h 的极大值点，从而 $h'(x_0)=0$，得证。

* 这里最后一段证明了闭区间中不在两端的**最值点**若可导则一定导数为 0。从几何直观可以感受到最值点一定是极值点，因此结论是自然的。

* 我们实质上证明了，对任何 $[a,b]$ 上连续、(a,b) 上可导的函数 f，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，这是**微分中值定理**的重要形式。

有了此定理后，我们可以马上得到结论：给定某开区间（可能含无穷），若 $f(x)$ 在其上的一个原函数为 $F(x)$，则全部原函数为

$$\{F(x)+C\mid C\in\mathbb{R}\}$$

这是由于 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数**当且仅当** $(G(x)-F(x))'=0$。
* 或许有的同学会注意到，此结论与证明方式和线性代数上 “非齐次线性方程组的通解是对应齐次线性方程组通解加原方程组特解” 非常类似。事实上在学到线性空间与线性映射后可以发现这两个结论**本质是相同的**。

不过，对于一般情况，原函数可能会更加复杂，也可能并不存在，我们以下面两个例子进行介绍：

题 95. 求所有定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 使得 $f'(x)=\frac{1}{x}$。

解答：

直接计算导数可以发现

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\ln(-x))'=\frac{1}{x}$$

从而再考虑定义域可知 $f(x)=\ln|x|$ 满足要求。对于 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 分别使用区间上的原函数结论可知满足条件的所有 $f(x)$ 可以写成

$$f(x)=\begin{cases}\ln(-x)+C_1 & x<0\\ \ln x+C_2 & x>0\end{cases}$$

的形式，其中 C_1、C_2 为任意常数。
* 由于定义域的中断，无需 $C_1=C_2$，可以直接计算验证上述 $f(x)$ 都符合要求。

从这个例子中可以看出，若 $f(x)$ 的定义域是不同的区间拼接而成的，导数为 $f(x)$ 的函数 $F(x)$ 应可以**在每个区间加不同的任意常数** C。
* 此时我们仍然将导数为 $f(x)$ 的函数 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的原函数。

题 96. 证明不存在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$，其中

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

解答：

假设存在，由于 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上导数为 0，由**题 94** 可知其在 $(-\infty,0)$ 上为常数，同理其在 $(0,+\infty)$ 上为常数，从而

$$F(x)=\begin{cases}C_1 & x<0\\ C_2 & x=0\\ C_3 & x>0\end{cases}$$

由于 $F(x)$ 在 0 处可导，其必然连续，利用定义可知 $C_1=C_2=C_3$，这样即可得到 $F(x)$ 为常函数，从而 $F'(0)=0$，与 $f(0)=1$ 矛盾。

这个例子也可以推广：若 $f(x)$ 在某开区间 (可能含无穷) 上存在原函数，我们可以证明改变 $f(x)$ 某点的值后其一定不存在原函数。

* 假设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，$f(x)$ 改变某点值后为 $g(x)$，若 $g(x)$ 有原函数 $G(x)$，根据定义 $(F(x)-G(x))'$ 在区间内只有一点非零，其他点均为 0，与上方例子同理证得矛盾。

至此，我们可以给出**原函数**的严谨定义：任给函数 $f(x)$，假设 $f(x)$ 的定义域为 E，我们将 E 中所有**有邻域的点** (即存在 δ 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\in E$) 的集合记为 E°。若定义在 E° 上的 $F(x)$ 满足对 E° 任何点都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数。

补充一些注释：

- 当 $E=[a,b]$ 时，利用定义可发现 $E^\circ=(a,b)$，由此闭区间的原函数**无需考虑端点处**。例如，$f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，当我们在说 $F(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}$ 是 $f(x)$ 的原函数时，我们只考虑了 $(0,+\infty)$ 上每一点 $F(x)$ 的导数。
- 一般情况下不定积分题目无需特别考虑定义域问题，只要**形式上求导得到的结果符合**，我们就可以认为是一个原函数。
- 务必记住**所有基本初等函数的导数**，它们是最基本的反推原函数的方式 (称为**基本积分表**)。

不过，有了原函数后，我们尚未解决不定积分的定义问题。直觉的不定积分定义是，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(x)+C$ 应为所有原函数 (这里 C 为任意常数)，从而可记

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

但是，此定义有三个奇怪之处：

1. 这里的 C 代表的“任意常数”，似乎与普通的常数不同，因为根据定义

$$\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+C,\quad \int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+1+C$$

都是正确的。但是，联立两式可以得到 $\frac{1}{2}x^2+C=\frac{1}{2}x^2+1+C$，这又貌似是错误的。我们当然希望**等式是可以联立的**，因此上述过程必然有什么地方出了问题。

2. C 还有另一个奇怪之处，根据不定积分定义可以写出

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

但是我们已经知道 $\frac{1}{x}$ 的全部原函数为

$$\begin{cases} \ln(-x) + C_1 & x < 0 \\ \ln x + C_2 & x > 0 \end{cases}$$

若我们真的希望 $\ln|x| + C$ 是 $\frac{1}{x}$ 的全部原函数，此处一个 C 需要表示两个不同的任意常数。

3. 此外，如果我们将 F 作为 f 的**原函数**进行理解，那么 $f(x) = \frac{x^2}{2}$ 与 $f(t) = \frac{t^2}{2}$ 应当表示**同一个函数**(即使将 t 换为 $2x$ 整体也不影响)，由此通过

$$\int t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C$$

$$\int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$$

可知右侧应当相等，但由于右侧 x、t 都是任意的，我们可以任取，如取 $t = 2x$ 时右侧自然并不相等。

虽然上述问题看起来有点 “无理取闹”，但对理解不定积分来说又是必要的。否则，我们将难以理解一些更加复杂的计算过程 (如教材 3.2 节例 8 得到的关于不定积分的 “方程式”)。

我们现在来通过严谨定义一步步解决这三个问题：

- 首先，对第三个问题，我们必须注意不定积分的结果**不是函数而是表达式**。

  何为表达式？最简单的例子是，$f(x) = x$ 与 $f(t) = t$ 代表同一个函数 (只要定义域相同，这两个函数都表示把每一点映射到自身)，但 x 与 t 是两个**不同**的表达式。事实上，$f(x) = x$ 是**用表达式定义了函数**，而不定积分

$$\int f(x)\mathrm{d}x, \quad \int f(t)\mathrm{d}t$$

  的结果分别是含 x、含 t 的**表达式**，因此不同。

  在不会引起歧义时，我们往往并不区分函数和表达式，例如我们会允许 $(\sin x)' = \cos x$ 这样的式子。虽然严谨来说我们只能写

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$$

  或

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x$$

  但当表达式里的变量唯一时，我们默认 $(f(x))'$ 表示 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$。

  更进一步地，$f'(x)$ 事实上指的是，将对 f 求导形成的新的函数**代入** x 后形成的表达式。由此，当我们写下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$$

  时，实际上进行了三个步骤：

  1. 定义函数 $f(x) = \sin x$；
  2. 计算函数 f 的导函数 f'，它满足 $f'(t) = \cos t$；
  3. 在 f' 里代入 x 形成新的表达式 $\cos x$，以此作为结果。

这样就可以解释不定积分了，例如

$$\int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$$

表示类似的三个步骤：

1. 定义函数 $f(x) = x$；
2. 计算函数 f 的一个原函数 F，它满足 $F(t) = \frac{t^2}{2}$；
3. 在 F 里代入 x 形成新的表达式 $\frac{x^2}{2}$，以 $\frac{x^2}{2} + C$ 作为结果。

一句话总结上述过程：**对某个变量 a 进行不定积分得到的是含 a 的表达式**，将表达式中的变量替换会得到不同表达式，由此 $\int f(x)\mathrm{d}x \neq \int f(t)\mathrm{d}t$。

- 对于第一个问题，它的解决方案本质是**线性代数**知识 (也即商空间中的元素)，我们这里以当前能理解的方式进行介绍。

  以定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 为例，我们认为不定积分

  $$\int f(x)\mathrm{d}x$$

  的结果并不是一个元素，而是一个**表达式集合**：

  $$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

  由此，$F(x) + C$ 事实上是 $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ 的简写。这样，我们就的确可以自信地写出

  $$F(x) + C = F(x) + 1 + C$$

  了，因为

  $$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} = \{F(x) + C + 1 \mid C \in \mathbb{R}\}$$

  * 证明是简单的，左边的每个 $F(x) + C$ 都可以对应右边的 $F(x) + (C - 1) + 1$，因此左包含于右，同理右包含于左。

  由此，这里的 $+C$ 实际上是**表达集合的形式记号**，当我们写 $+C$ 时默认其表示集合，这就是 “任意常数” 的含义。

- 对于第二个问题，既然 $+C$ 只是一个形式记号，它所表达的集合当然可以不止是 $F(x) + C$，例如，在我们写出

  $$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

  时，有

  $$\ln|x| + C = \left\{ f(x) \mid f(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & x < 0 \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

  由此，当 $f(x)$ 定义域有多个区间时，$F(x) + C$ 事实上表示 $F(x)$ **每个区间加一个不同实数所能构成的所有表达式的集合**。

- 解决这三个问题后，为了使以下符合直觉的的运算法则成立 (下方 c 为实数)：

  $$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x, \quad c\int f(x)\mathrm{d}x = \int cf(x)\mathrm{d}x$$

  我们还需要定义**表达式集合的运算**。假设 A、B 为表达式集合，r 为某表达式，我们定义运算如下 (这些定义还是相对**符合直觉**的，大家可以在下面的过程里进行感受)：

  $$r + A = A + r = \{a + r \mid a \in A\}$$

$$A+B=\{a+b\mid a\in A,b\in B\}$$

$$rA=\{ra\mid a\in A\}$$

由此即可证明上方的运算律。

* 我们以第一式为例，简单起见设 $f(x)$、$g(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$。假设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$、$g(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$，可发现 $f(x)+g(x)$ 的一个原函数为 $F(x)+G(x)$，由此只需证明

$$F(x)+G(x)+C=(F(x)+C)+(G(x)+C)$$

利用定义此即代表

$$\{F(x)+G(x)+C\mid C\in\mathbb{R}\}=\{F(x)+C\mid C\in\mathbb{R}\}+\{G(x)+C\mid C\in\mathbb{R}\}$$

利用定义展开右侧，由于第一个集合中某元素是 $F(x)+C_1$、第二个集合中某个元素是 $G(x)+C_2$，上式等价于

$$\{F(x)+G(x)+C\mid C\in\mathbb{R}\}=\{F(x)+C_1+G(x)+C_2\mid C_1,C_2\in\mathbb{R}\}$$

左边的每个元素都可以在右侧令 $C_1=C$、$C_2=0$ 得到，从而左包含于右；右边的每个元素都可以在左侧令 $C=C_1+C_2$ 得到，从而右包含于左。这样就得到了证明。

正如之前所说，不定积分相关的大部分严谨性问题我们都可以通过**直觉**来解决，但这些严谨定义对于理解复杂过程是必要的。现在，大家可以严谨证明为何教材 3.2 节例 8 得到的方程式

$$J=\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$$

$$J=\left(\frac{1}{a}\cos(bx)+\frac{b}{a^2}\sin(bx)\right)\mathrm{e}^{ax}-\frac{b^2}{a^2}J$$

的解只有

$$J=\frac{1}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+b\sin(bx))\mathrm{e}^{ax}+C$$

了。

* 注意不能对方程直接移项，因为本来左右都是集合，将 $-\frac{b^2}{a^2}J$ 移到左侧会形成“集合与数相等”的形式，这是荒谬的。

题 97 (**附加**)**.** 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 g，其存在原函数。若

$$J=\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

且存在不相等的实数 a、b 与 $\mathbb{R}$ 上的函数 F 使得

$$aJ=F(x)+bJ$$

证明

$$J=\frac{1}{a-b}F(x)+C$$

解答:

设 g 的一个原函数为 $G(x)$，则 $J=G(x)+C$，利用表达式集合的运算定义可发现方程变为

$$\{aG(x)+aC \mid C\in\mathbb{R}\}=\{F(x)+bG(x)+bC \mid C\in\mathbb{R}\}$$

由两集合相等可知左侧包含于右侧，也即

$$\forall C_1\in\mathbb{R},\quad \exists C_2\in\mathbb{R},\quad aG(x)+aC_1=F(x)+bG(x)+bC_2$$

将其重新写为

$$\forall C_1\in\mathbb{R},\quad \exists C_2\in\mathbb{R},\quad G(x)=\frac{1}{a-b}F(x)+\frac{bC_2-aC_1}{a-b}$$

取定 $C_1=0$，取出此时的 C_2，由于 $\frac{bC_2}{a-b}$ 为实数，可知存在 $C_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$G(x)=\frac{1}{a-b}F(x)+C_0$$

与之前类似通过两方面包含可验证此时 $J=G(x)+C$ 的确满足

$$aJ=F(x)+bJ$$

从而有 (加实数 C_0 不影响任意常数，这已经在之前讨论中证明)

$$J=\frac{1}{a-b}F(x)+C_0+C=\frac{1}{a-b}F(x)+C$$

* 注意我们上述的所有推导都是以 $g(x)$ **存在原函数**为前提，由此教材 3.2 节例 8 得到 J 的形式后必须**求导验证**其确为原函数才能成立，教材漏掉了这一步。

6.2.2 定积分定义

对于定积分，我们需要先定义划分：我们将满足 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 的 $x_0,\dots,x_n$ 称为 $[a,b]$ 的一个**划分**，记为

$$T=(x_0,\dots,x_n)$$

用 $|T|$ 表示划分出的区间个数 n，$\lambda(T)$ 表示最长区间长度 $\max_{i=1,\dots,n-1}\{x_i-x_{i-1}\}$。

若某个 T 的函数 $E(T)$ 满足

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall\lambda(T)<\delta,\quad |E(T)-l|<\varepsilon$$

则可以记

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+}E(T)=l$$

对于闭区间 $[a,b]$ 上有定义的函数 f，对任何划分 T 考虑**任取中间点**后乘长度求和得到**黎曼和**

$$R_T^{\xi}(f)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$

这里上标 ξ 表示中间点向量 $(\xi_1,\dots,\xi_n)$。若给定 f 后 (下式可记为 $\int_{\lambda(T)\to 0^+}R_T^{\xi}(f)=l$，也即黎曼和在划分充分精细时逼近 l)

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall\lambda(T)<\delta,\quad \forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,\dots,n),\quad |R_T^{\xi}(f)-l|<\varepsilon$$

则称 f 在 $[a,b]$ **黎曼可积** (简称可积)，并将上述值定义为**定积分**结果

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

* 注意此处的定积分定义比起上方 $E(T)$ 极限定义还增添了 ξ_i 可任取的要求。

直观来看，这个定义表示以**一系列矩形面积和**估计函数图像的面积 (此处面积指有向面积，x 轴上方为正下方为负)。不过，此处事实上会出现一个非常奇怪的问题：到底**什么是面积**？

首先，矩形的面积等于长乘宽是一个自然的定义，它也可以严格证明，大致思路为：定义 1×1 的正方形面积为 1，且要求若 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B$ 的面积为 A 的面积加 B 的面积 (这也是自然的)，则考虑拼接可知边长为正整数的矩形面积为长乘宽 (此处事实上还需要证明线段面积为 0，这是面积的另一个假设，即**连续性**所保证的)，再划分边长为正整数的矩形可发现边长为有理数的矩形面积为长乘宽。利用连续性即得到任意边长的矩形面积都为长乘宽。

然而，如果我们认为一个图形的面积就是用矩阵面积和估计的结果，这就变成了面积通过定积分定义，从而陷入了循环定义的怪圈。为了给它一个更好的解释，我们将从可积函数的一个基本性质说起：**可积一定有界、有界未必可积**。

* 接下来的内容是对可积性较为深入的理解，**考试几乎不会考证明可积**，但可能会考**利用定积分定义证明其他问题**，如本讲义 7.1 第 6 题等。由此，下面未标注附加的题目还是需要阅读证明的。

题 98. 证明 $[a,b]$ 上的可积函数必然**有界**。

解答:

我们证明其逆否命题，即从**无界**推出**不可积**。若否，设

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$$

我们考虑 T_n 表示区间 $[a,b]$ 的 n 等分构成的分割，也即其对应的

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

* 由于无界，直观上我们只要说明取分点求和可以**任意大**就能证明不可积。接下来我们将通过更具体的取点方式使这个“任意大”可以达到。

具体来说，由定义可知 T_n 下的黎曼和可以写成

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i), \quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$

我们先考虑所有的右端点，记

$$M_1 = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n |f(x_i)|$$

由无界定义，对任何 M，存在 $\xi_0\in[a,b]$ 使得 $|f(\xi_0)|>M$，假设 ξ_0 在第 k 个区间，我们在第 k 个区间中取中间点 ξ_0，其他仍取为 x_i，得到的黎曼和为

$$\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i\neq k} f(x_i) + f(\xi_0)\right)$$

利用三角不等式可以进行估算

$$\begin{aligned}
\left|\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i\neq k} f(x_i) + f(\xi_0)\right)\right| &\geq \frac{b-a}{n}|f(\xi_0)| - \left|\frac{b-a}{n}\sum_{i\neq k} f(x_i)\right| \\
&\geq \frac{b-a}{n}|f(\xi_0)| - \frac{b-a}{n}\sum_{i\neq k} |f(x_i)| \\
&\geq \frac{b-a}{n}|f(\xi_0)| - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n |f(x_i)| \\
&> \frac{b-a}{n}M - M_1
\end{aligned}$$

由此，我们取

$$M=\frac{n}{b-a}(M_1+|A|+1)$$

即可得到存在 ξ_0 使得

$$\left|\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i\neq k}f(x_i)+f(\xi_0)\right)\right|>|A|+1$$

也即对任何 T_n，存在中间点向量 ξ 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\right|>|A|+1$$

而根据定积分为 A 的定义，存在 $\delta>0$ 使得 $\lambda(T)<\delta$ 时对任何分割 T (假设 T 的段数 $|T|=K$) 与中间点向量 ξ 有

$$\left|\sum_{i=1}^{K}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<1$$

取 n 使得 $\frac{1}{n}<\delta$ 即由三角不等式得矛盾。

* 上述的从可积出发**取出特定分割**进行估计是定积分的常见应用方式。

题 99. 证明 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任何闭区间不可积。

解答:

根据**稠密性**结论，任何子区间中都有有理数与无理数，由此对任何划分 T，在每个子区间中取中间点为有理数可得黎曼和

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=b-a$$

在每个子区间中取中间点为无理数可得黎曼和

$$\sum_{i=1}^{n}0=0$$

由于无论 $\lambda(T)$ 多小，对 T 都可以取出如上两个黎曼和 $R_T^{\xi^{(1)}}(f)=b-a$、$R_T^{\xi^{(2)}}(f)=0$，由此假设极限存在可由定义推出矛盾：设极限为 A，则对任何 $\varepsilon>0$，当 $\lambda(T)$ 充分小时应对任何划分与中间点都应有 $|R_T^{\xi}(f)-A|<\varepsilon$，取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$，无论 A 取何值都可由 $R_T^{\xi^{(1)}}(f)$、$R_T^{\xi^{(2)}}(f)$ 得矛盾。

由于我们已经知道 f 可积时必然有界，接下来只需要研究**有界时**何时可积即可。下面这道教材习题可以提供关键的观察：

题 100. 设 f 在 $[a,b]$ 的每个闭子区间上有最大、最小值。对分割

$$T:x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

记 m_i 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最小值，M_i 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值，证明 f 在 $[a,b]$ 可积当且仅当以下两极限存在且相等 (这里 $\lambda(T)$ 表示 x_i-x_{i-1} 的最大值)：

$$\lim_{\lambda(T)\to0^+}\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1}),\quad \lim_{\lambda(T)\to0^+}\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$$

解答：

分为两边证明：

- **可积推极限存在且相等**

  设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$。

  对任何 $\varepsilon > 0$，由于固定 T 时

  $$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

  都是某种 T 下的黎曼和结果 (前者 ξ_i 取 $[x_{i-1}, x_i]$ 上最小值点，后者取最大值点)，根据定积分定义可取 $\delta > 0$ 使得

  $$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

  对任何 $\lambda(T) < \delta$ 的 T 与中间点 ξ 成立，即有 $\lambda(T) < \delta$ 时也满足

  $$\left|\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon,\quad \left|\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

  利用 $\lambda(T) \to 0^+$ 时的极限定义即得

  $$\lim_{\lambda(T)\to 0^+} \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\lambda(T)\to 0^+} \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = A$$

  从而得证极限存在且相等。

- **极限存在且相等推可积**

  设相等的极限值为 A。

  由最大值、最小值定义，固定 T 时无论如何取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有

  $$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

  由定义，对任何 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta_1 > 0$、$\delta_2 > 0$ 使得只要 $\lambda(T) < \delta_1$ 就有

  $$\left|\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

  只要 $\lambda(T) < \delta_2$ 就有

  $$\left|\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

  取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，当 $\lambda(T) < \delta$ 时即有

  $$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| \le \max\left\{\left|\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) - A\right|, \left|\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - A\right|\right\} < \varepsilon$$

  由此即符合了定积分为 A 的定义。

  * 最后一步是由于

  $$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) - A \le \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \le \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - A$$

  讨论符号即可发现位于中间的数绝对值一定不超过两边绝对值较大的。

* 这道题**本质上是简单的**，因为分点任意性可以被 m_i 与 M_i 控制住。只要**按照定义**写出严谨的形式，发现式子之间的关系后放缩出结果并不困难。

这题的结论是有鲜明的几何意义的。假设 $f(x) \geq 0$ (事实上，由于已知 $f(x)$ 有界，我们可以给它加上一个常数 M 使得它大于 0，这样下面的讨论对一般的可积函数也成立，下面将讨论)，这样 $f(x)$ 的有向面积就是通常的面积，$m_i(x_i - x_{i-1})$ 对应在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上包含在 $f(x)$ 这段图像中的矩形的最大面积，而 $M_i(x_i - x_{i-1})$ 表示包含 $f(x)$ 这段图像的矩形的最小面积。即使 $f(x)$ 的条件从每个闭子区间上有最大、最小值弱化到有界，也可以有类似的结果：

题 101 (附加)**.** 设 f 在 $[a, b]$ **有界**。对分割

$$T : x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

记 m_i 为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**下确界**，M_i 为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**上确界**，证明 f 在 $[a, b]$ 可积当且仅当以下两极限存在且相等 (这里 $\lambda(T)$ 表示 $x_i - x_{i-1}$ 的最大值)：

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad \lim_{\lambda(T)\to 0^+} \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

* 集合上下确界的定义见**题 20** 。当我们说 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上/下确界时，我们指的是 f 在其上**值域**

$$\{y \mid \exists \xi \in [x_{i-1}, x_i], f(\xi) = y\}$$

的上/下确界。由于 f 在 $[a, b]$ 有界，任何子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上也必然有界，从而根据**题 20** 的结论的确存在上下确界。

解答：

注意求和

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

不再需要取分点，而是只与划分 T、函数 f 有关。我们将它们分别记作 $m_T(f)$ 与 $M_T(f)$。此外，我们记黎曼和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

为 $R_T^{\xi}(f)$。

此处的证明比起**题 100** 要难，因为上下确界**未必可取到**。我们先证明一个关键的估算，再分为两边证明：

- **关键估算**

  我们先证明，给定 T 后，对任何中间点 ξ 有

  $$m_T(f) \leq R_T^{\xi}(f) \leq M_T(f)$$

  且对任何 $\gamma > 0$，存在中间点 ξ 使得

  $$R_T^{\xi}(f) < m_T(f) + \gamma$$

  存在中间点 ξ 使得

  $$R_T^{\xi}(f) > M_T(f) - \gamma$$

  第一式直接由上/下确界是值域上/下界可由定义知成立。我们主要证明第二式，第三式完全同理即得。

对第二式，假设 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 f 的下确界是 m_i，则必然存在 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 使得 $f(\xi_i) < m_i + \frac{\gamma}{b-a}$，否则 $m_i - \frac{\gamma}{b-a}$ 会是 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的下界，与下确界的**最小下界**定义矛盾。取出所给的 ξ_i，即得黎曼和 (这里最后一个等号直接将左侧展开即得)

$$R_T^\xi(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \left(m_i + \frac{\gamma}{b-a}\right)(x_i - x_{i-1}) = m_T(f) + \gamma$$

从而得证。

* 这里体现了下确界的重要应用：虽然下确界本身未必能取到，**比它大任意小都可取到**。

– **可积推极限存在且相等**

设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$。

对任何 $\varepsilon > 0$，由条件知存在 $\delta > 0$ 使得只要 $\lambda(T) < \delta$，对任何 T 与中间点 ξ 都有

$$|R_T^\xi(f) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

而利用关键估算又可取定中间点 ξ 使得

$$|R_T^\xi(f) - m_T(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由此即得 $\lambda(T) < \delta$ 时

$$|m_T(f) - A| \le |R_T^\xi(f) - A| + |R_T^\xi(f) - m_T(f)| < \varepsilon$$

这就从定义得到了

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+} m_T(f) = A$$

对 $M_T(f)$ 完全同理得证。

– **极限存在且相等推可积**

设相等的极限值为 A，由于仍然对任何中间点 ξ 有

$$m_T(f) \le R_T^\xi(f) \le M_T(f)$$

与**题 100** 完全相同可证明存在。

由此，我们可以仔细思考面积的定义了。仍然假设 $f(x) \ge 0$，左侧的求和 $\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ 表示分割后每一段取包含在 $f(x)$ 中的最大面积，而极限又表示对任何分段长度趋近于 0 的分割成立，由此事实上左侧极限大致上表示**包含在 $f(x)$ 图像中的有限个矩形面积之和的上确界** (这称为 **Jordan 内测度**，也即从内部估计的面积)，右侧极限大致上表示**包含 $f(x)$ 图像的有限个矩形面积之和的下确界** (这称为 **Jordan 外测度**，也即从外部估计的面积)。因此，我们的面积定义实际上是指，若 Jordan 内外测度**存在且相等**，我们就认为此函数图像的面积 (称为 **Jordan 测度**) 存在，这也就是**非负函数定积分**的定义。

至此，我们需要补充说明为何需要内外**两方向逼近**。假设我们将 Jordan 内测度作为面积的定义，设 $f(x)$ 为 Dirichlet 函数，考虑集合 A 为所有满足 $x \in [0,1]$、$y \in [0, f(x)]$ 的点，B 为所有满足 $x \in [0,1]$、$y \in (f(x), 1]$ 的点。利用有理数、无理数的稠密性，A、B 的内部都无法画出矩形，A、B 的面积应均为 0，但 A 与 B 拼起来即为 1×1 的小正方形，面积为 1，这就**不符合面积定基本要求**了。

对于一般 $[a,b]$ 上的有界函数，设 $|f(x)| \le M$，我们可以用上述方式定义 $f(x)+M$ 在 $[a,b]$ 的定积分，而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的定积分即为 $f(x)+M$ 的定积分减去 $M(b-a)$。由此最终得到，我们的**任意划分任意取点**的定积分定义，实质上是为了使**从内部估计与外部估计结果相同**。

* 由于这并不是数学分析，我们不会讨论过于严格的证明，这里对于内外测度的定义也不是严格的，只要大致理解就好。
* 之所以测度的前面要加上人名 Jordan，是因为面积还存在不同的定义方式。一个更好的定义方式是 Lebesgue 给出的，他将上面所说的 "有限个矩形" 换成了 "可数个矩形" (即一列矩形)，所定义的面积自然就称为 **Lebesgue 测度**，以此面积定义也可以定义新的积分方式，称为 **Lebesgue 积分**。

最后，让我们证明一个可积性理论中非常重要的中间结论，**可积当且仅当平均振幅极限为 0**。这是指如下定理：

题 102 (附加)**.** 设 f 在 $[a,b]$ **有界**。对分割

$$T: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

记 m_i 为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**下确界**，M_i 为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**上确界**，证明 f 在 $[a,b]$ 可积当且仅当

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

* 这里 $M_i - m_i$ 称为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**振幅**，上述求和可看作某种意义上的平均振幅。

解答：

沿用**题 101** 的记号，上述条件可以写为

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+} (M_T(f) - m_T(f)) = 0$$

首先，若 f 在 $[a,b]$ 可积，**题 101** 中已证明 $M_T(f)$、$m_T(f)$ 极限存在且相等，上式自然成立 (由定义可直接证明差的极限为极限的差)。由此，我们只需要从上式推出 f 的可积性。

事实上，只需证明 $M_T(f)$、$m_T(f)$ 极限存在，利用条件即可说明极限相等，由此再利用**题 101** 可得到可积性。为了说明未知的极限存在，我们往往需要利用类似**单调有界**的性质，这就有了下面四步的证明过程：

– **单调性结论**

利用几何关系可以看出，当划分逐渐精细时，$m_T(f)$ 应当会逐渐增大，而 $M_T(f)$ 会逐渐减小。我们首先严谨给出此结论：若 T 的所有分点 x_i 都是 T_0 的某个分点，我们称 T_0 是 T 的一个**精细化**，此时有

$$m_T(f) \le m_{T_0}(f), \quad M_T(f) \ge M_{T_0}(f)$$

我们以第一式为例进行证明，第二式同理。对 T 中的某个区间 $[x_{i-1}, x_i]$，我们假设它在 T_0 中被划分为了

$$x_{i-1} = y_{k_{i-1}} < y_{k_{i-1}+1} < \cdots < y_{k_i} = x_i$$

设 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的下确界为 m_i、在 $[y_{t-1}, y_t]$ 的下确界为 z_t，则由于下确界为全区间下界可知它也为每个子区间下界，从而

$$m_i \le \min\{z_{ki-1+1}, \dots, z_{k_i}\}$$

由此有

$$\sum_{t=k_{i-1}+1}^{k_i} z_t(x_t - x_{t-1}) \ge \sum_{t=k_{i-1}+1}^{k_i} m_i(x_t - x_{t-1}) = m_i(x_i - x_{i-1})$$

左右再对 T 的每个区间求和，右侧即为 $m_T(f)$，左侧由于 t 将取遍 T_0 中的所有分点即为 $m_{T_0}(f)$，从而得结论。

* 事实上这个结论非常符合直觉：以非负的 f 为例，由于 $m_i(x_i - x_{i-1})$ 是 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底的包含在图像中的最大矩形的面积，将 $[x_{i-1}, x_i]$ 进行切分后每部分至少能画出 m_i 的高度，从而总面积不会降低。

– **构造子列极限**

考虑 T_k 为区间 $[a, b]$ 的 k 等分构成的分割，记

$$p_n = m_{T_{2^n}}(f), \quad q_n = M_{T_{2^n}}(f)$$

由于 2^n 等分为 2^{n-1} 等分的精细化 (每个区间平分为两份)，利用前一部分结论有

$$p_1 \le p_2 \le p_3 \le \dots$$

$$q_1 \ge q_2 \ge q_3 \ge \dots$$

从而 p_n **单调增**、q_n **单调减**。

利用定义可发现任何 T 有 $M_T(f) \ge m_T(f)$，从而 $p_n \le q_n \le q_1$，又由 $p_n \ge p_1$ 得到 p_n **有界**，从而极限存在，设为 p。同理 q_n 极限存在，设为 q。我们接下来利用条件证明 $p = q$。

由条件可知对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $\lambda(T) < \delta$ 就有 $|M_T(f) - m_T(f)| < \varepsilon$，而取 N 使得 $2^{-N}(b-a) < \delta$，即有 $n > N$ 时 $\lambda(T_{2^n}) < \delta$，从而

$$|p_n - q_n| = |M_{T_{2^n}}(f) - m_{T_{2^n}}(f)| < \varepsilon$$

这就得到了

$$\lim_{n\to\infty}(p_n - q_n) = 0$$

又由两数列极限都存在可知 $p = q$，我们将此共同的极限记为 A。

– **证明大小关系**

我们接下来证明，对任何 T 有 $M_T(f) \ge A \ge m_T(f)$。我们只证明 $A \ge m_T(f)$，对 $M_T(f)$ 同理。

* 这里是**最有技巧性**的一步，需要想到从任何划分构造数列说明。能想到证明这件事的原因为，若 A 会被 $M_T(f)$ 与 $m_T(f)$ 夹在中间，从 $M_T(f)$ 与 $m_T(f)$ 充分接近得到它们都与 A 充分接近。

这里的证明又分为三步：

1. **构造数列**

   对于任何划分 T，我们记 $T \cup T_{2^n}$ 为 T 与所有 2^n 等分点放在一起 (不重复计算同一个点) 形成的划分，则它是 T 的精细化，也是 T_{2^n} 的精细化，有

   $$m_T(f) \le m_{T\cup T_{2^n}}(f), \quad m_{T_{2^n}}(f) \le m_{T\cup T_{2^n}}(f)$$

   记 $r_n = m_{T\cup T_{2^n}}(f)$。

2. **证明估算**

   并用 $|T|$ 表示 T 的分段个数、F 表示 $|f|$ 的上界 (由 f 有界其存在)，我们将证明估算结论 (p_n 同前定义为 $m_{T_{2^n}}(f)$)

   $$|r_n - p_n| < \frac{b-a}{2^{n-1}}F(|T|-1)$$

我们将 $T\cup T_{2^n}$ 看作 T_{2^n} 的一个精细化。由于 T 在中间有 $|T|-1$ 个分点，它至多将 2^n 等分中的 $|T|-1$ 个区间进行了更精细的划分了。

将 x_i 记为 $[a,b]$ 的 n 等分点，对于未被更精细划分的区间 $[x_{i-1},x_i]$，$m_i(x_i-x_{i-1})$ 应完全不变。而对于重新划分的区间 $[x_{i-1},x_i]$，我们假设划分后为

$$x_{i-1}=y_{k_{i-1}}<y_{k_{i-1}+1}<\cdots<y_{k_i}=x_i$$

设 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的下确界为 m_i、在 $[y_{t-1},y_t]$ 的下确界为 z_t，利用单调性部分的证明有

$$\sum_{t=k_{i-1}+1}^{k_i} z_t(x_t-x_{t-1})\ge m_i(x_i-x_{i-1})$$

由于 $-F$ 是 f 的下界，F 是 f 的上界，可进一步得到 (下确界大于等于全局下界、下确界不超过全局上界都是由定义可直接说明的)

$$m_i(x_i-x_{i-1})\ge -F(x_i-x_{i-1})$$

$$\sum_{t=k_{i-1}+1}^{k_i} z_t(x_t-x_{t-1})\le \sum_{t=k_{i-1}+1}^{k_i} F(x_t-x_{t-1})=F(x_i-x_{i-1})$$

从而可知 (x_i-x_{i-1} 即为区间长度的 $\frac{1}{2^n}$)

$$\left|\sum_{t=k_{i-1}+1}^{k_i} z_t(x_t-x_{t-1})-m_i(x_i-x_{i-1})\right|\le 2F(x_i-x_{i-1})=\frac{b-a}{2^{n-1}}F$$

由此，在 $m_{T_{2^n}}(f)$ 上的每个区间对比它与 $m_{T\cup T_{2^n}}(f)$ 的差距，有至多 $|T|-1$ 个区间改变了至多 $\frac{b-a}{2^{n-1}}F$，其他区间改变为 0，这就得到了结论。

3. **判断大小**

利用上方的估算与夹逼定理可发现

$$\lim_{n\to\infty}(r_n-p_n)=0$$

又由于

$$\lim_{n\to\infty}p_n=A$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}r_n=A$$

另一方面，根据定义可知 $r_0=m_{T\cup T_1}(f)=m_T(f)$，且 r_n 每一项对应的划分为前一项的精细化，因此 r_n 单调递增。

由单调递增数列极限为 A 可知 $r_0\le A$ (否则极限将大于等于 r_0，从而大于 A，矛盾)，这就得到了证明。

有了此结论以后，最终的放缩就并不困难了。

– **最终放缩**

根据定义，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得只要 $\lambda(T)<\delta$ 就有 $|M_T(f)-m_T(f)|<\varepsilon$，而由于已知

$$M_T(f)\le A\le m_T(f)$$

可以直接得到 $\lambda(T)<\delta$ 时

$$|M_T(f)-A|\le|M_T(f)-m_T(f)|<\varepsilon$$

$$|m_T(f) - A| \le |M_T(f) - m_T(f)| < \varepsilon$$

从而直接由极限定义有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+} m_T(f) = \lim_{\lambda(T)\to 0^+} M_T(f) = A$$

根据**题 101** 可得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分存在，为 A。

* 从本题的证明过程可以进一步得到，固定 f，$\lambda(T)\to 0^+$ 时 $M_T(f)$ 的极限的确为 T 改变时所有 $M_T(f)$ 构成集合的下确界。这展现了前一段讨论中的 “大致上表示” 的合理性。
* 利用此结论与闭区间上的连续函数必然一致连续 (这并不在我们的学习范围内，但证明起来并不困难) 可以推出**闭区间上的连续函数可积**。
* 此结论再经过复杂的讨论可以说明可积性的最终结论，即 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积当且仅当其在 $[a,b]$ 上**有界**且**不连续点集合** “长度为 0” (准确来说应称为 **Lebesgue 零测**)。

至此，我们终于可以证明一个教材上直接承认的结论了：

题 103 (**附加**)**.** 证明若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 也可积。

解答:

利用**题 102** 的结论与记号，从 f 在 $[a,b]$ 可积可推出 f 有界且

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+} (M_T(f) - m_T(f)) = 0$$

考虑某划分 T 下的区间 $[x_{i-1}, x_i]$，设 f 在其上上确界为 M_i、下确界为 m_i，$|f|$ 在其上上确界为 M_i^*、下确界为 m_i^*。由于

$$\forall \xi \in [x_{i-1}, x_i], \quad m_i \le f(\xi) \le M_i$$

分类讨论：

– 若 $m_i \ge 0$，则 $|f(\xi)| = f(\xi)$ 在区间上成立，从而 $M_i^* = M_i$、$m_i^* = m_i$，有

$$M_i^* - m_i^* = M_i - m_i$$

– 若 $M_i \le 0$，则 $|f(\xi)| = -f(\xi)$ 在区间上成立，从而 $-M_i$ 为 $|f|$ 下界，下确界 $m_i^* \ge -M_i$，$-m_i$ 为 $|f|$ 上界，上确界 $M_i^* \le -m_i$，从而有

$$M_i^* - m_i^* \le (-m_i) - (-M_i) = M_i - m_i$$

– 若 $M_i > 0 > m_i$，根据绝对值定义 $\max\{M_i, -m_i\}$ 为 $|f|$ 上界，上确界 $M_i^* \le \max\{M_i, -m_i\}$；而 $|f|$ 有下界 0，因此下确界 $m_i^* \ge 0$，从而有

$$M_i^* - m_i^* \le \max\{M_i, -m_i\} \le M_i + (-m_i) = M_i - m_i$$

由此，对所有区间求和即可发现

$$M_T(|f|) - m_T(|f|) \le M_T(f) - m_T(f)$$

由上下确界定义 $M_T(|f|)-m_T(|f|)\geq 0$，于是对任何 $\varepsilon>0$，当 $|M_T(f)-m_T(f)|<\varepsilon$ 时必然也有 $|M_T(|f|)-m_T(|f|)|<\varepsilon$，利用极限定义即可说明

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+}(M_T(|f|)-m_T(|f|))=0$$

根据**题 102** 的结论得可积。

* 由此可见，这个看似简单的结论想要从可积性说明需要经历非常复杂的过程，这体现了**黎曼可积的概念本质上是非常困难的**。

当然，我们的考试中不会用到这么复杂的可积性判定，大家只要记住**闭区间上的连续函数与单调函数必然可积**与**在 $[a,b]$、$[b,c]$ 都可积的函数在 $[a,c]$ 可积**就好。

除了上面这些讨论外，还有一些定积分的基本性质需要记忆：

1. 若 $a<b$，我们对在 $[a,b]$ 可积的函数 f 定义

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0,\quad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

2. 若 f 在 $[a,b]$ 可积且非负，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$$

* 由此，若区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\leq g(x)$ 且均可积，$f(x)$ 的积分也不超过 $g(x)$ 的积分。

* 此结论可以进一步推出很多**估算结论**，例如任何函数 f 在区间上的积分绝对值不会超过 $|f|$ 在区间上的积分。

3. 定积分是**线性**的，也即对在 $[a,b]$ 可积的函数 f、g 与实数 c、d 有

$$\int_a^b(cf(x)+dg(x))\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+d\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

4. 对实数 a、b、c，假设 f 在 $[\min\{a,b,c\},\max\{a,b,c\}]$ 可积，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

* 注意上式成立 c 无需在 $[a,b]$ 当中，也不需要 $a<b$。

5. **改变有限个点不影响积分值**，由此事实上 f 在开区间 (a,b) 有定义就可以考虑积分了。

如果大家能看完上面的附加题，这些结论的证明思路应当都是简单的，只要写出定义后估算即可。

6.2.3　本质差异

聊到这里，我们已经定义完了不定积分和定积分。不过，必须说明的是，这两种“积分”本质上是**完全不同**的，只是基于一些**重要的联系** (即之后要聊到的微积分基本定理)，我们使用了相同的记号。

首先，对于同一个函数，不定积分与定积分的**存在性**情况可以完全不同：

题 104. 计算以下函数在任何闭区间 $[a,b]$ 的积分：

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

解答:

根据定积分的性质，改变有限个点不影响定积分的结果，因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分结果应与 0 在 $[a,b]$ 上的定积分结果相同，由定义为 0。

* 根据**题 96**，此函数在包含 0 的开区间没有原函数。

题 105. 考虑函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

证明 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且 $F'(x)$ 在包含 0 的闭区间不可积。

解答:

在 0 以外的点，直接计算可知

$$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

在 0 处有

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}$$

由有界量乘无穷小等于无穷小即得 $F'(0)=0$，从而 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导。

另一方面，对任何 $n\in\mathbb{N}^*$，直接计算有

$$F'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\sin(2n\pi)\mp 2\sqrt{2n\pi}\cos(2n\pi)=\mp 2\sqrt{2n\pi}$$

从而

$$\left|F'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)\right|=2\sqrt{2n\pi}$$

对任何包含 0 的区间 $[a,b]$，由于 0 至多为其一端，必然存在 $\delta>0$ 使得 $(0,\delta)\in[a,b]$ 或 $(-\delta,0)\in[a,b]$。无论是哪种，都存在 N 使得 $n>N$ 时 $\pm\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ 至少有一个落在 $[a,b]$ 中，这就得到了 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上**无界**，从而不可积。

* 这里仍然采用了对三角函数常用的**取子列**思路证明无界。

* 由此，$F'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有原函数，但在包含 0 的闭区间不可积，这本质是由于 $F'(x)$ 在 0 处**不连续**。

其次，正如之前所说，不定积分的结果是**表达式集合**，而定积分的结果是一个**数**，由此会有 (假设下方的式子都可定义)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\neq\int f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

因此，即使它们有相似的一些性质与定理 (如分部积分)，也**千万不能混用**。即使介绍了微积分基本定理后，我们还是会发现各种无法直接处理的情况。

§6.3 微积分基本定理

6.3.1 变限积分的导数

了解了不定积分与定积分的定义和本质区别后，我们终于可以开始研究它们的联系了。必须指出的是，虽然教材只把**用原函数计算定积分**称为微积分基本定理，事实上本部分介绍的**变限积分的导数**也是微积分基本定理的一部分 (或者说等价形式)。在本章最后，我们将聊聊它的 “基本” 性体现在哪里。

变限积分的导数是指如下的重要结论：

题 106. 证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则对 $x\in(a,b)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

解答:

由于 f 在 $[a,x]$ 连续，根据定积分的性质可知定积分存在，写出导数的**定义**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$$

由定积分性质可知右式可以写为

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$$

为了对此进行估算，利用 $f(x)$ 连续的定义可知对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $|h|<\delta$ 时 $|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$。再利用 (注意 $f(x)$ 对 t 来说是**常数**)

$$\int_x^{x+h}f(x)\mathrm{d}t=hf(x)$$

即可发现

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-f(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\mathrm{d}t\right|$$

当 $h>0$ 时，利用定积分的性质与 $f(t)-f(x)\le|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 即得

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\mathrm{d}t\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

同理由 $f(x)-f(t)<\frac{\varepsilon}{2}$ 得

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(x)-f(t))\mathrm{d}t\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

综合两式可得

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(x)-f(t))\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$$

当 $h<0$ 时，同理估算可知

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x}(f(t)-f(x))\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x}\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

上述推导说明 $0<|h|<\delta$ 时差得绝对值小于 ε 恒成立，这已经符合

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

的定义，从而得证。

* 事实上我们还可以证明 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，见之后**题 110** 的证明过程。

这个结论的重要性在于，虽然证明连续函数在闭区间可积非常困难 (见**题 102** 后的注释)，但只要完成了证明，我们很快就可以得到**闭区间上的连续函数必然在开区间存在原函数**。我们还可以将结论改进到**开区间**：

题 107. 证明若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，任取 $c\in(a,b)$，设

$$F(x)=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$$

则 $x_0\in(a,b)$ 有 $F'(x_0)=f(x_0)$。

解答：

对任何 $x_0>c$，由于 f 在 $[c,x_0]$ 连续，利用**题 106** 的结论可直接得要证得式子成立。

当 $x_0\leq c$ 时，取 $s=\frac{x_0+a}{2}$，则 f 在 $[s,x_0]$ 连续，设

$$G(x)=\int_s^x f(t)\mathrm{d}t$$

利用**题 106** 有 $G'(x_0)=f(x_0)$，于是

$$F'(x_0)=G'(x_0)+(F-G)'(x_0)=f(x_0)$$

这就得到了证明。最后一步是由于 $F-G$ 为 f 从 c 到 s 的定积分，其为常数，因此导数为 0。

这样，我们就可以从初等函数在定义域的连续性直接得到**初等函数存在原函数**。

利用变上限积分的导数结论，我们可以进行一些基本的计算，可见本讲义 7.1 前 3 题。事实上，结合其他技巧，除了直接的变上限积分，我们还能计算更复杂的导数：

题 108 (附加). 计算导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(xt)\mathrm{d}t$$

解答：

我们仍然用定义将其写为

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\int_0^{x+h}\sin((x+h)t)\mathrm{d}t-\int_0^x\sin(xt)\mathrm{d}t\right)$$

由于此时无法直接进行计算，我们希望进行**拆分**以得到可以计算的形式，由此想到将其写为

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\int_0^{x+h}\sin((x+h)t)\mathrm{d}t-\int_0^{x+h}\sin(xt)\mathrm{d}t+\int_0^{x+h}\sin(xt)\mathrm{d}t-\int_0^x\sin(xt)\mathrm{d}t\right)$$

由此其可进一步化简为

$$\lim_{h\to0}\left(\int_0^{x+h}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)}{h}\mathrm{d}t+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\sin(xt)\mathrm{d}t\right)$$

我们一步步计算此式：

- **第二部分极限**

  利用与**题 106** 完全相同的过程，我们可以说明第二部分的极限为 $\sin(x^2)$ (本质上我们将积分中的 t 更换为了 x)。

– **第一部分化简**

我们先证明

$$\lim_{h\to 0}\int_x^{x+h}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)}{h}\mathrm{d}t=0$$

过程是直接的：利用 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ 即可放缩得到 (与**题 106** 类似分 h 正负讨论发现结论一致)

$$\begin{aligned}\left|\int_x^{x+h}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)}{h}\mathrm{d}t\right|&\le\left|\int_x^{x+h}\left|\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)}{h}\right|\mathrm{d}t\right|\\&\le\left|\int_x^{x+h}|t|\mathrm{d}t\right|\\&\le|h|\max\{|x+h|,|h|\}\end{aligned}$$

最后一步是由于区间上 $|t|$ 一定不超过两端点绝对值中较大的。

当 $h\to 0$ 时，第一项为无穷小，第二项有界，从而乘积极限为 0。

* 最常用的积分估算方式即为**放大为绝对值后进行估算**。

利用此结论有

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{x+h}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)}{h}\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0}\int_0^{x}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)}{h}\mathrm{d}t$$

– **第一部分进一步计算**

为了计算

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{x}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)}{h}\mathrm{d}t$$

我们可以发现，若对内部取极限，可利用 $\sin(xt)$ 对 x 求导为 $t\cos(xt)$ 的定义得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)}{h}=t\cos(xt)$$

由此，我们希望能够证明此极限结果与先对内部取极限相同，也即

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{x}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)}{h}\mathrm{d}t=\int_0^x t\cos(xt)\mathrm{d}t$$

左减右得到要证

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{x}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)-th\cos(xt)}{h}\mathrm{d}t=0$$

我们试着对分母进行估算。展开有

$$\sin((x+h)t)=\sin(xt)\cos(ht)+\cos(xt)\sin(th)$$

从而分母为

$$-\sin(xt)(1-\cos(ht))+\cos(xt)(\sin(th)-th)$$

通过**题 73** 中已经使用过的渐近结果，在 $h\to 0$ 时 $(h-\sin h)\sim\frac{1}{6}h^3$，我们可以利用**等价无穷小替换**计算出

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{\sin((x+h)t)-\sin(xt)-th\cos(xt)}{h^2}\\=&-\lim_{h\to 0}\frac{\sin(xt)(1-\cos(ht))}{h^2}+\lim_{h\to 0}\frac{\cos(xt)(\sin(th)-th)}{h^2}\\=&-\lim_{h\to 0}\frac{\sin(xt)\frac{1}{2}(ht)^2}{h^2}+\lim_{h\to 0}\frac{\cos(xt)(-\frac{1}{6})(ht)^3}{h^2}\\=&-\frac{1}{2}t^2\sin(xt)\end{aligned}$$

由此，利用绝对值函数的连续性可知两侧取绝对值极限仍成立，通过极限定义即知存在 $\delta_0 >$ 使得 $0 < |h| < \delta_0$ 时

$$\frac{|\sin((x+h)t) - \sin(xt) - th\cos(xt)|}{h^2} < \left|\frac{1}{2}t^2\sin(xt)\right| + 1 \leq \frac{1}{2}t^2 + 1$$

也即

$$\frac{|\sin((x+h)t) - \sin(xt) - th\cos(xt)|}{|h|} < \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)|h|$$

由此可知 $0 < |h| < \delta_0$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^x \frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt) - th\cos(xt)}{h}\mathrm{d}t\right| \\
\leq &\left|\int_0^x \left|\frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt) - th\cos(xt)}{h}\right|\mathrm{d}t\right| \\
\leq &\left|\int_0^x \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)|h|\mathrm{d}t\right| \\
= &|h|\left|\int_0^x \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{2}t^2$ 连续，右侧积分必然存在，设其绝对值为 M (注意由于 x 可能为负，积分未必为正)。对任何 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{M}\}$，即可发现 $0 < |h| < \delta$ 时

$$\left|\int_0^x \frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt) - th\cos(xt)}{h}\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

这就证明了其极限为 0。

综合以上，我们最终得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(xt)\mathrm{d}t = \int_0^x t\cos(xt)\mathrm{d}t + \sin(x^2)$$

* 从以上过程中能看出我们常用的两个对任何实数 a、b (未必 $a < b$) 成立的估计结论：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right|$$

以及若 $|f(x)| \leq M$，有

$$\left|\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^b M\mathrm{d}x\right| = |a-b|M$$

这两个结论都可以通过讨论 a、b 的正负性证明，方法类似**题 106**。注意若 $f(x) \leq g(x)$，我们**无法推出** f 积分绝对值不超过 g 积分绝对值。

* 虽然本题过程相对复杂，它是对**定积分相关估算技巧**的一个很好的练习。在学完**积分中值定理**后，本题的估算可以用更简单的方式证明，不过，积分中值定理只能对连续函数使用，因此掌握更一般的估算技巧是有意义的。

虽然上题在学过定积分换元后有更简单的解法，但这样的思想可以用于证明一般的 $f(x,t)$ 对 t 积分后对 x 求导的结果，我们将在下学期用到。

最后我们补充一个结论，它可以将积分估算 (本讲义 6.2.2 结尾第 2 条性质) 从不严格的比较改进为**严格比较，可以直接使用：**

题 109. 证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续非负且不恒为 0，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$$

解答:

我们介绍两种方法:

– **连续函数定义**

由条件可知存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) > 0$，从而由连续性可知存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall x \in [a,b] \cap (\xi-\delta, \xi+\delta), \quad |f(x) - f(\xi)| < \frac{f(\xi)}{2}$$

利用 f 的连续性，对上式的 x 在 $\xi-\delta$ 与 $\xi+\delta$ 处取极限 (若其在 $[a,b]$ 中) 可发现

$$\forall x \in [a,b] \cap [\xi-\delta, \xi+\delta], \quad |f(x) - f(\xi)| \le \frac{f(\xi)}{2}$$

构造 $g(x)$ 满足

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(\xi)}{2} & x \in [a,b] \cap [\xi-\delta, \xi+\delta] \\ 0 & x \notin [a,b] \cap [\xi-\delta, \xi+\delta] \end{cases}$$

根据上方条件与 f 非负性可知 $f(x) \ge g(x)$，且由于 $\xi \in [a,b]$，必然有 $b > a$、$\xi+\delta > a$、$b > \xi-\delta$、$\xi+\delta > \xi-\delta$，从而

$$[a,b] \cap [\xi-\delta, \xi+\delta] = [\max\{a, \xi-\delta\}, \min\{b, \xi+\delta\}]$$

必然是一个长度非零的区间，记 $l = \min\{b, \xi+\delta\} - \max\{a, \xi-\delta\} > 0$。

利用定积分性质有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\max\{a,\xi-\delta\}} g(x)\mathrm{d}x + \int_{\max\{a,\xi-\delta\}}^{\min\{b,\xi+\delta\}} g(x)\mathrm{d}x + \int_{\min\{b,\xi+\delta\}}^b g(x)\mathrm{d}x$$

由于 $g(x)$ 在中间区间之外的部分为 0，中间区间为 $\frac{f(\xi)}{2}$，利用常数的定积分结果可知

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \frac{f(\xi)l}{2}$$

从而有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \frac{f(\xi)l}{2} > 0$$

得证。

* 此方法的思路来源是，我们的比较只能提供大于等于，而目前我们会算的定积分只有常数情况，由此想到我们必须将 $f(x)$ 的积分**缩小为非零的分段常值函数**。这样就可以结合条件与连续性定义构造点了。

– **原函数思路**

我们证明其逆否命题，即从 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 恒为 0。考虑

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

对 $a \le x \le y \le b$，利用 f 的非负性有

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(x)\mathrm{d}x \ge 0$$

从而 F 在 (a,b) 单调增，又由定积分定义 $F(a)=0$ 与条件 $F(b)=0$ 即得到 F 在 (a,b) 恒为 0，于是

$$\forall x\in(a,b),\quad f(x)=F'(x)=0$$

再由 $f(x)$ 连续性即得 $f(x)$ 在 a 处与 b 处也为 0，即 $[a,b]$ 上 $f(x)=0$，得证。

6.3.2　导函数的积分

利用上述变限积分的导数结论，我们就可以证明如下的**积分与原函数的关系**了，它是**定积分的基本计算方法**：

题 110. 证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且存在 $F(x)$ 满足 $[a,b]$ 上 F 连续、(a,b) 上 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

解答：

分为两部分：

- **原函数构造**

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，设

$$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

利用**题 106** 可知在 (a,b) 上 $G'(x)=f(x)$，又由于 $F'(x)=f(x)$，利用原函数的性质可得

$$\exists C\in\mathbb{R},\quad\forall x\in(a,b),\quad F(x)-G(x)=C$$

由此，任取 $a<a_0<b_0<b$ 可知

$$F(a_0)-G(a_0)=F(b_0)-G(b_0)$$

移项化简即得

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\mathrm{d}x=F(b_0)-F(a_0)$$

- **边界处理**

我们下面证明

$$\lim_{b_0\to b^-}\int_{a_0}^{b_0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a_0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

利用定积分性质可知

$$\int_{a_0}^{b} f(x)\mathrm{d}x-\int_{a_0}^{b_0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{b_0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

由 f 在闭区间连续，其有界，设 $|f|\le M$，则在 $b_0<b$ 时有

$$\left|\int_{b_0}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_{b_0}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x\le\int_{b_0}^{b}M\,\mathrm{d}x=M(b_0-b)$$

从而对任何 $\varepsilon>0$，只要 $0<b_0-b<\frac{\varepsilon}{M+1}$，即可保证

$$\left|\int_{a_0}^{b} f(x)\mathrm{d}x-\int_{a_0}^{b_0} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

这已经符合了右极限的定义。

利用 F 的连续性，在第一部分证明结尾式中取 $b_0\to b^-$ 可知

$$\int_{a_0}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a_0)$$

再取 $a_0\to a^-$ 即同理可得

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

这就得到了证明。

* 必须注意，若将 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续改为在 (a,b) 连续，结论将**不再成立**，**题 105** 中考虑区间 $[0,1]$ 即为反例。
* 我们也常将 $F(b)-F(a)$ 写为 $F\big|_a^b$，或无歧义时 $F(x)\big|_a^b$。

之后的两章中，我们将介绍不定积分与定积分的各种技巧与应用。这里必须先指出的是，**积分技巧并不只能对积分问题使用**，例如以下问题：

题 111. 证明对 $s>1$，极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$$

存在。

解答:

由于此数列每一项比前一项加了正数，其必然单调且有下界 0，为了证明极限存在，只需证明**存在上界**。

在学习完定积分后，我们可以利用**积分**进行估算了。考虑函数

$$f(x)=\frac{1}{x^s}$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恒正且单调减，其在区间 $[k-1,k]$ 上必然大于等于 $\frac{1}{k^s}$，从而 $k\geq 2$ 时有

$$\frac{1}{k^s}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^s}\mathrm{d}x\leq\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x$$

由此有估算

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^s}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^s}\mathrm{d}x$$

* 注意这里不能把 $k=1$ 也放入估算，因为 f 在 $[0,1]$ **无界**，无法计算 $[0,1]$ 上的积分。

利用定积分的性质与微积分基本定理 (由于 $s>1$，x^{-s} 的一个原函数为 $\frac{1}{1-s}x^{1-s}$，且可验证在区间上符合微积分基本定理条件) 即得

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^s}\mathrm{d}x=\int_{1}^{n}\frac{1}{x^s}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-s}n^{1-s}-\frac{1}{1-s}<\frac{1}{s-1}$$

最后一个小于号是由于条件 $1-s<0$。由此可得估算

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}\leq 1+\frac{1}{s-1}=\frac{s}{s-1}$$

这就证明了有界性。

* 我们之后将学到，若 f 是**单调**函数，求和 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ 的极限往往可以通过积分放缩进行估算。

最后，让我们来计算两个极限：

题 112. 计算极限

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \ln t\mathrm{d}t$$

$$\lim_{x\to +\infty}\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

解答：

- 直接计算可发现 $\ln t$ 的一个原函数为 $t(\ln t-1)$ (计算技巧将在下一章介绍)，且可验证 $x>0$ 时在 $[x,1]$ 符合微积分基本定理条件，从而

$$\int_x^1 \ln t\mathrm{d}t = 1(\ln 1-1)-x(\ln x-1) = -1+x-x\ln x$$

在计算函数极限时我们已经证明过

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

由此有

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \ln t\mathrm{d}t = -1+0-0 = -1$$

- 直接计算可发现 e^{-t} 的一个原函数为 $-\mathrm{e}^{-t}$，且可验证 $x>1$ 时在 $[1,x]$ 符合微积分基本定理条件，从而

$$\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}-(-\mathrm{e}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{-x}$$

由此利用指数函数极限有

$$\lim_{x\to +\infty}\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

可以发现，虽然 $\ln x$ 在 $[0,1]$ 无界导致定积分无法定义，但 $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ 在这个视角下似乎是存在的，只要把它理解为极限即可。此外，虽然定积分的定义只在有限区间上，第二个极限似乎告诉我们可以定义 $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$。事实上，这两种情况都称为**广义积分**，它是定积分的推广，我们将在下学期学到。

6.3.3　互逆性的理解

* 本部分的讨论**与考试无关**，仅用来帮助大家更好理解。

最后，让我们讨论一下微积分基本定理的重要性，它意味着积分与微分运算一定程度上的**互逆性**。

何为互逆？在反函数的定义中，我们已经看到，若 $f(g(x)) = g(f(x)) = x$，这两个函数就互为反函数。更一般的互逆性事实上也是如此定义的：若对两个集合 A、B 与 $A\to B$ 的映射 f、$B\to A$ 的映射 g 有

$$\forall a\in A,\quad g(f(a)) = a$$

$$\forall b\in B,\quad f(g(b)) = b$$

现在，我们就可以开始讨论微积分基本定理中的互逆性了。为了避免**闭区间端点处的复杂讨论** (见**题 110** 后的第一条注释)，此处仅以开区间为例。

以下用 $\mathcal{C}(a,b)$ 表示定义在开区间 (a,b) 上的所有连续函数，$\mathcal{C}^1(a,b)$ 表示定义在开区间 (a,b) 上的所有可导且**导函数连续**的函数。

考虑**求导**作为函数到函数的映射

$$\varphi(f) = f'$$

根据定义可发现对任何 $f \in \mathcal{C}^1(a,b)$ 有 $f' \in \mathcal{C}(a,b)$，从而 φ 是 $\mathcal{C}^1(a,b)$ 到 $\mathcal{C}(a,b)$ 的映射。固定某 $c \in (a,b)$，从 c 到 x 的**变上限积分**也是一个函数到函数的映射：

$$\psi(f)(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

* 注意这里 $\psi(f)$ 是一个函数。

在变上限积分的导数中，我们已经证明了若 f 连续，则 $\psi(f)$ 的导函数即为 f，其连续，从而 $f \in \mathcal{C}(a,b)$ 时 $\psi(f) \in \mathcal{C}^1(a,b)$，且有

$$\forall f \in \mathcal{C}(a,b), \quad \phi(\psi(f)) = f$$

然而，上方的 ϕ 与 ψ 未必满足对任何 $f \in \mathcal{C}^1(a,b)$ 有 $\psi(\phi(f)) = f$。例如，考虑 $f(x) = 1$，由于 $f'(x) = 0$，根据定义必然有 $\psi(\phi(f))$ 恒为 0，因此，必须进行更好的构造。

可以发现，上述过程的主要问题在于，利用微积分基本定理可知

$$\psi(\phi(f))(x) = \psi(f')(x) = \int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(c)$$

它未必与 $f(x)$ 相等，必须将相差的常数纳入考虑。但是，我们不可能只提供 f' 的信息就知道 $f(c)$ 的值，因此**无论怎样修改** ψ，也无法使得 ψ 与 ϕ 互逆。

为了解决此问题，就像不定积分定义一样，我们要使用线性代数中**商空间**的思想，把相差常数的函数**打包为一个整体**。

具体来说，考虑 $\mathcal{C}^1(a,b)/\mathbb{R}$，它是指将 $\mathcal{C}^1(a,b)$ 相差常数的函数 "打包" 得到的集合，其中的元素不再是可导且导函数连续的函数 f，而是一个个如下所述的集合：

$$\{f + C \mid C \in \mathbb{R}\}, \quad f \in \mathcal{C}^1(a,b)$$

我们可以定义映射 $\tilde{\phi}$，满足

$$\tilde{\phi}(\{f + C \mid C \in \mathbb{R}\}) = f'$$

由于相差常数不影响导函数，此集合中所有函数的导函数是相同的，因此 $\tilde{\phi}$ 是一个 $\mathcal{C}^1(a,b)/\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{C}(a,b)$ 的函数。

另一方面，取定 $c \in (a,b)$ 后，可以定义

$$\tilde{\psi}(f) = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}, \quad F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

* 注意 $\tilde{\psi}(f)$ 此时为函数集合，并非函数，不能写 $\tilde{\psi}(f)(x)$ 一类式子。

由于已知 $F \in \mathcal{C}^1(a,b)$，$\tilde{\psi}$ 是一个 $\mathcal{C}(a,b)$ 到 $\mathcal{C}^1(a,b)/\mathbb{R}$ 的映射。

我们现在可以验证 $\tilde{\psi}$ 与 $\tilde{\phi}$ 的**互逆性**了：利用变上限积分的导数结论与 $\tilde{\psi}$、$\tilde{\phi}$ 的定义，我们仍然可以得到对任何 $f \in \mathcal{C}(a,b)$ 有 (F 定义同前)

$$\tilde{\phi}(\tilde{\psi}(f)) = (\tilde{\phi}(\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\})) = F' = f$$

另一方面，对任何 $\{f + C \mid C \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{C}^1(a,b)/\mathbb{R}$，根据定义可发现

$$\tilde{\psi}(\tilde{\phi}(f)) = \{f_0 + C \mid C \in \mathbb{R}\}, \quad f_0(x) = \int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(c)$$

由此再利用定义不定积分时已经证明的 $\{f-f(c)+C \mid C\in\mathbb{R}\}=\{f+C \mid C\in\mathbb{R}\}$ 即可得到

$$\forall\{f+C \mid C\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{C}^1(a,b)/\mathbb{R},\quad \tilde{\psi}(\tilde{\phi}(f))=f$$

由此，我们最终通过微积分基本定理构造出了 $\mathcal{C}^1(a,b)/\mathbb{R}$ 与 $\mathcal{C}(a,b)$ 之间的一对**互逆**映射 $\tilde{\phi}$、$\tilde{\psi}$。事实上，这可以说明 $\mathcal{C}^1(a,b)/\mathbb{R}$ 与 $\mathcal{C}(a,b)$ 某种意义上具有相同的结构 (称为**同构**)，记作

$$\mathcal{C}^1(a,b)/\mathbb{R}\cong\mathcal{C}(a,b)$$

* 变上限积分的导数证明了 $\tilde{\phi}(\tilde{\psi}(f))=f$、积分与原函数的关系证明了 $\tilde{\psi}(\tilde{\phi}(f))=f$，它们共同完成了上述的同构关系，此同构关系事实上才是真正的**微积分基本定理**。

* 由此可发现，微分与积分的互逆关系必须**限定在连续函数**中才能成立，对于更一般的函数，两者还是会有本质不同的。

七　积分计算

本次习题课将介绍不定积分与定积分的各种**计算技巧**，知识基础为一些基本的不定积分、定积分结论，积分相关的更多内容见下一章。需要注意的是，这部分虽然有各种不同的计算技巧，本质上仍然是**套路化**的：只要**多做题**即能掌握正确的处理方式，且几乎不会有本质困难的内容。

此外，习题课讲义中**不会单独介绍 3.5 节的公式**，但这些基本结论还是需要记忆的，一些应用可见本讲义 8.1 节。

§7.1　作业解答

1. (2.9 节例 3) 求函数

$$F(x)=\int_{x^2}^{x}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}x$$

的导数。

解答：

将其拆分为**变上限积分的差**

$$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}x-\int_0^{x^2}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}x$$

第一部分的求导可直接通过变上限积分定义得到，对第二部分，我们考虑

$$G(s)=\int_0^s\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t,\quad H(x)=x^2$$

则第二部分为 $-G(H(x))$，可通过复合函数求导公式得到，综合可知导数为

$$F'(x)=\sqrt{1+x}-2x\sqrt{1+x^2}$$

2. (2.9 节例 4) 求函数

$$G(x)=\int_1^x xf(t)\,\mathrm{d}t$$

其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，求 $G'(x)$。

解答：

由 $G(x)$ 实质上是 $x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$，由乘积求导公式可知

$$G'(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)$$

* 积分中有 x 的更一般情况在本讲义 6.3.1 进行了一定介绍。

3. (习题 2.9.1) 计算导数：

(2) $G(x)=\int_0^{1+x^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t$

解答：

与例题相同看作复合函数可得导数为

$$G'(x)=2x\sin(1+x^2)^2$$

(4) $L(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

解答：

与例题相同分解后看作复合函数可得导数为

$$L'(x)=\left(\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)'-\left(\int_0^{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)'=2x\mathrm{e}^{-x^4}-\mathrm{e}^{-x^2}$$

4. (习题 2.9.6) 求函数

$$G(x)=\int_0^x\left(\mathrm{e}^t\int_0^t\sin z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x$$

的二阶导数。

解答:

第一层积分中整体为一个 t 的函数，且由 $\sin z$ 连续可知中间部分可导，从而**连续**，由此根据变上限积分的导数定理得

$$G'(x)=\mathrm{e}^x\int_0^x\sin z\,\mathrm{d}z$$

再由乘积求导公式即得

$$G''(x)=\mathrm{e}^x\left(\int_0^x\sin z\,\mathrm{d}z+\sin x\right)$$

* 注意应用定理前确认符合定理条件。

5. (2.10 节例 2) 验证

$$F(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)$$

是 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$ 的原函数，由此计算

$$\int_0^1\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$$

解答:

直接求导即可验证。由区间 $[0,1]$ 上 f、F 连续且 F 处处导数为 f。利用微积分基本定理即得积分为

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\frac{1}{2}\mathrm{e}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}$$

* 同样需要确认条件**导函数处处存在且连续**。

6. (2.10 节例 4) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}+1\right)^3\frac{1}{n}$$

解答:

考虑 $f(x)=(1+x)^3$，将区间 $(0,1)$ 进行 n 等分后，记 $x_i=\frac{i}{n}$，可发现上式为

$$\sum_{k=1}^n f(x_i)(x_i-x_{i-1})$$

由于 $f(x)$ 在 0 到 1 的定积分存在，而 $n\to\infty$ 时区间长度趋于 0，利用定积分定义可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}+1\right)^3\frac{1}{n}=\int_0^1(1+x)^3\,\mathrm{d}x$$

利用幂函数求导公式与复合函数求导可以发现 $(1+x)^3$ 的原函数是 $\frac{1}{4}(1+x)^4$，从而再由微积分基本定理算出结果为 $\frac{15}{4}$。

7. (2.10 节例 5) 求定积分

$$\int_{-1}^{2}|x|[x]\mathrm{d}x$$

解答:

将被积函数 $f(x)=|x|[x]$ 写为**分段函数** (注意第一段为 $-(-x)=x$)

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in[-1,0)\\ 0 & x\in[0,1)\\ x & x\in[1,2)\end{cases}$$

由

$$\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$$

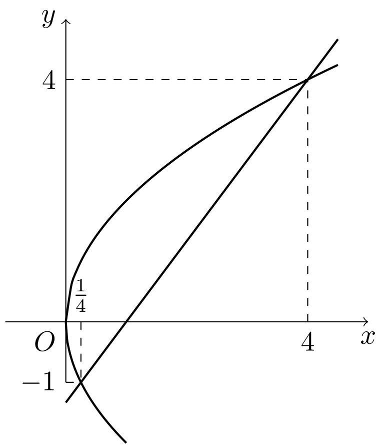
对**每段**利用微积分基本定理即可算出结果为 1。

* 这是对含有绝对值、取等等函数的积分的通常计算方法。

8. (2.10 节例 7) 求由曲线 $y^2=4x$ 和直线 $4x-3y=4$ 围成图形的面积。

解答:

联立两方程可求解得**交点**为 $(\frac{1}{4},-1)$ 与 $(4,4)$，作出图像:



可发现围成的图形分为两段: $x\in(0,\frac{1}{4})$ 时上下都是 $y^2=4x$ (事实上上方为 $y=2\sqrt{x}$、下方为 $-2\sqrt{x}$)，$x\in(\frac{1}{4},1)$ 时上方为 $y^2=4x$ (事实上为 $y=2\sqrt{x}$)、下方为 $4x-3y=4$ (即 $y=\frac{4}{3}(x-1)$)，由此写出积分

$$\int_{0}^{1/4}(2\sqrt{x}-(-2\sqrt{x}))\mathrm{d}x+\int_{1/4}^{4}\left(2\sqrt{x}-\frac{4}{3}(x-1)\right)\mathrm{d}x$$

利用 $\sqrt{x}$ 的原函数为 $\frac{2}{3}x^{3/2}$、$x-1$ 的原函数为 $\frac{1}{2}(x-1)^2$，即可用微积分基本定理算得结果为

$$\frac{1}{3}+\frac{117}{24}=\frac{125}{24}$$

* 事实上"横过来看"此图后对 y 积分将更为简单，不过事实上我们之后才会学到此技巧的本质。

9. (习题 2.10.2) 验证 $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$ 是 $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$ 的一个原函数，并计算积分

$$\int_{2}^{4}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

说明以下两式是否相等:

$$\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x,\quad \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

解答：

直接求导即可验证。由于在 $[2,4]$ 区间 $f(x)$ 连续且 $F(x)$ 处处导数为 $f(x)$，由微积分基本定理可知积分为

$$F(4)-F(2)=\frac{25}{4}$$

下面两式并不等，这是由于 $[-1,1]$ 区间 $f(x)$ **不连续**，不满足为微积分基本定理使用条件。

* 并不只有不连续会导致不满足使用条件，注意**题 126** 这类情况。

10. (习题 2.10.3(3)) 视为适当函数的黎曼和极限以计算极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

解答：

为了配凑出黎曼和，我们需要先**提出** $\frac{1}{n}$ 将其写为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

考虑 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，将区间 $(0,1)$ 进行 n 等分后，记 $x_i=\frac{i}{n}$，可发现上式为

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_i)(x_i-x_{i-1})$$

由于 $f(x)$ 在 0 到 1 的定积分存在，而 $n\to\infty$ 时区间长度趋于 0，利用定积分定义可知 (由 $\frac{1}{1+x}$ 的一个原函数为 $\ln(1+x)$)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$$

* 配成黎曼和本质上需要配凑为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

的形式，更多技巧将在下一章介绍。

11. (习题 2.10.4(3)) 看作分段函数以计算

$$\int_0^1 x\left|\frac{1}{2}-x\right|\mathrm{d}x$$

解答：

将被积函数 $f(x)$ 写为分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-x^2 & x\in[0,\frac{1}{2}]\\ x^2-\frac{1}{2}x & x\in(\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

由

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{1/2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1/2}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

展开后通过幂函数原函数结论，对每段利用微积分基本定理即可算出结果为 $\frac{1}{8}$。

12. (3.1 节例 8) 计算

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

解答：

这里我们采用一个有一定技巧性的方式 (事实上之后可学到本质原因)：分子分母同乘 $\sin x$ 将其化为

$$\int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$

分子实际上是 $-\mathrm{d}\cos x$，而分母也可以化为 $1-\cos^2 x$，由此代换 $t=\cos x$ 可发现

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{-\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

此时已经可以裂项计算

$$\int \frac{-\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln|t-1| - \ln|t+1|) + C$$

将 t 代换回 x 可得到

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|\cos x - 1|}{|\cos x + 1|} + C$$

* 注意 $\frac{1}{x}$ 的积分**不要忘记绝对值**。虽然我们并不会严格讨论不定积分的定义范围，但积分完后的定义域应为与原本相同 (或至多挖去一些点)，本章将部分进行讨论。

* 对某变量的不定积分得到的是该变量的函数，因此换元后需要换回来。这与之后学习的定积分换元方式有本质差别。

13. (3.1 节例 14) 已知常数 $a>0$，计算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

解答：

分为三步：

- **化简**

  利用三角函数关系，代入 $x=a\frac{1}{\cos t}$ (即 $t=\arccos\frac{a}{x}$，由 x 定义域其可行) 可消除根号项得到

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a|\tan t|}$$

  从而 (在 arccos 的值域 $[0,\pi]$ 内 $\sin t$ 恒非负)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{-\sin t \mathrm{d}t}{|\sin t \cos t|} = \int \frac{\mathrm{d}t}{|\cos t|}$$

  对 $x>a$ 的范围，对应的 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$，由此上式为 $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$，否则上式为 $-\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$。

- **计算积分**

  与前一题思路完全相同，代入 $s=\sin t$ 可得

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \frac{\cos t \mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{1}{1-s^2}\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\ln\frac{|s-1|}{|s+1|} + C$$

  将负号合并到 ln 中最终得到

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \frac{1}{2}\ln\frac{|\sin t + 1|}{|\sin t - 1|} + C$$

- **计算三角**

  在进行最终化简前，我们需要计算 $\sin\arccos y$。根据定义，它指的是 cos 一个角为 y 时这个角的 sin 值，且由 arccos 值域 $[0,\pi]$ 可知 sin 值为正，因此有

$$\sin\arccos y = \sqrt{1-y^2}$$

从而进一步可知 (分子分母同乘 $|x|$)

$$\frac{\sin t+1}{\sin t-1}=\frac{\sin\arccos\frac{a}{x}+1}{\sin\arccos\frac{a}{x}-1}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}+|x|}{\sqrt{x^2-a^2}-|x|}$$

进行分母有理化即可发现

$$\frac{\sin t+1}{\sin t-1}=\frac{(\sqrt{x^2-a^2}+|x|)^2}{-a^2}$$

从而

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|\sin t-1|}{|\sin t+1|}+C=\ln|\sqrt{x^2-a^2}+|x||-\ln a+C$$

常数部分 $-\ln a$ 可合并到常数中，得到 (这里 C 为任意常数，但与之前的 C 含义不同，详见本讲义 6.2.1 的讨论)

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}=\ln|\sqrt{x^2-a^2}+|x||+C$$

– **合并**

由上述讨论，分 $x>a$ 与 $x<-a$，我们最终得到原不定积分的结果为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\begin{cases}\ln|\sqrt{x^2-a^2}+x|+C & x>a\\ -\ln|\sqrt{x^2-a^2}-x|+C & x<-a\end{cases}$$

最后，再次使用分子有理化有

$$-\ln|\sqrt{x^2-a^2}-x|=\ln\frac{1}{|\sqrt{x^2-a^2}-x|}=\ln|\sqrt{x^2-a^2}+x|-2\ln a$$

从而与之前类似将 C 代换为 $-2\ln a+C$ 即得最终统一为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|\sqrt{x^2-a^2}+x|+C$$

* 遇到 $\sqrt{\pm x^2\pm a^2}$ 类式子应优先使用**三角换元**化简。

* 不定积分一定要**记忆**一些重要结论 (像此题几乎不可能现推出来)，具体将在本章介绍。

14. (习题 3.1.4) 计算

$$\int(2x^{3/2}+1)^{2/3}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

解答：

由于内部都和 $\sqrt{x}$ 有关，我们先设 $t=\sqrt{x}$，即 $x=t^2$，上述不定积分即改为

$$\int 2(2t^3+1)^{2/3}t^2\,\mathrm{d}t$$

注意这里 $t^2\mathrm{d}t$ 可以凑出 t^3，由此进一步设 $s=2t^3$ (直接设 t^3 也可以，这里直接进行了简化) 得到

$$\int\frac{1}{3}(s+1)^{2/3}\mathrm{d}s$$

利用幂函数求导公式可直接得上式为

$$\frac{1}{5}(s+1)^{5/3}+C$$

代回 x 即得不定积分结果

$$\frac{1}{5}(2x^{3/2}+1)^{5/3}+C$$

* 注意设 $t=\sqrt{x}$ 时需要关注**定义域**是否保证了 $x\geq 0$。

15. (习题 3.1.8) 计算

$$\int \frac{1}{\sqrt{7-3x^2}}\mathrm{d}x$$

解答：

由于已知 $\arcsin x$ 的导数为 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，我们设法向这个方向凑，可发现原式为

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{3/7}x)^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{3/7}x)^2}}\mathrm{d}(\sqrt{3/7}x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{7}}x\right)$$

* 利用**一次函数** (即 $ax+b$ 的形式) 进行配凑是不定积分最基本的配凑方式。

16. (习题 3.1.12) 计算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$$

解答：

利用 $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$，如果原式**可以看成** e^x **的函数**，直接进行换元 $t=\mathrm{e}^x$ 即可得到 x 的函数，对本题来说效果为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-t|}{|1+t|}+C$$

这里最后一步计算在本部分第 13 题已经进行了。由此可得最终结果为

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|1-\mathrm{e}^x|}{|1+\mathrm{e}^x|}+C$$

17. (习题 3.1.16) 计算

$$\int \frac{x^{14}\mathrm{d}x}{(x^5+1)}$$

解答：

从形式可观察出希望将 x^5 作为整体，而分子的 x 次数又保证了这件事的可行性。令 $t=x^5$ 可将原式化为

$$\frac{1}{5}\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(t+1)^4}$$

由于分母的 $t+1$ 相对难处理，我们将它看作整体，令 $s=t+1$ 将原式化为

$$\frac{1}{5}\int \frac{(s-1)^2\mathrm{d}s}{s^4}$$

这样就可以直接展开算出积分结果为

$$\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{3s^3}\right)$$

代回 x 即得不定积分结果

$$\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{x^5+1}+\frac{1}{(x^5+1)^2}-\frac{1}{3(x^5+1)^3}\right)$$

18. (习题 3.1.20) 计算

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

解答：

这题最关键的是将它**拆分**为两部分

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

分别处理。

对第一部分，利用 $\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}\arctan x$ 可以直接得到其为

$$\mathrm{e}^{\arctan x} + C$$

对第二部分，由于除了 $x\mathrm{d}x$ 外其他部分均为 x^2，将 $1+x^2$ 看作整体，令 $t=1+x^2$ 换元后得到其为 (注意 $t>0$，无需绝对值)

$$\frac{1}{2}\int \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \ln t\,\mathrm{d}\ln t = \frac{1}{4}\ln^2 t + C$$

两部分合并即得到不定积分结果

$$\mathrm{e}^{\arctan x} + \frac{1}{4}\ln^2(x^2+1) + C$$

19. (习题 3.1.24) 计算

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

解答:

本题同样直接拆分即可：原式为

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C$$

进一步计算，将分母中的 $1-x^2$ 看作整体，令 $t=1-x^2$ 进一步化简得到其为

$$-\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - \arcsin x + C = -2\sqrt{t} - \arcsin x + C = -2\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + C$$

20. (习题 3.1.28) 已知常数 $a>0$，计算

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

解答:

在教材 3.1 节例 12 中已经算出

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

与本部分第 15 题完全相同可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

向这两个形式去配凑可发现原式为

$$\int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x - \int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$

代入即得结果为

$$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

21. (习题 3.1.32) 计算

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt[3]{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$$

解答:

如本部分第 16 题所说，这类题目可以直接换元 $t=\mathrm{e}^x$，由分母形式我们再换元 $s=t+1$，即得

$$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt[3]{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x=\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1+t}}=\int\frac{(s-1)\mathrm{d}s}{\sqrt[3]{s}}$$

直接利用幂函数原函数即得到积分为

$$\frac{3}{5}s^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}s^{\frac{2}{3}}+C$$

代回 x 即得不定积分结果

$$\frac{3}{5}(\mathrm{e}^x+1)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}(\mathrm{e}^x+1)^{\frac{2}{3}}+C$$

22. (3.2 节例 8) 已知常数 a、b 大于 0，计算

$$\int\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x$$

解答：

由于

$$(f(x)\mathrm{e}^{ax})'=(af(x)+f'(x))\mathrm{e}^{ax}$$

而 $\cos(bx)$ 导数为 $-b\sin(bx)$、$\sin(bx)$ 导数为 $b\cos(bx)$，可以想到待定系数求解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c_1\sin(bx)+c_2\cos(bx))\mathrm{e}^{ax}=\cos(bx)\mathrm{e}^{ax}$$

通过此式对比左右 $\cos(bx)\mathrm{e}^{ax}$ 与 $\sin(bx)\mathrm{e}^{ax}$ 的系数可解出

$$c_1=\frac{b}{a^2+b^2},\quad c_2=\frac{a}{a^2+b^2}$$

由此最终结果为

$$\frac{a\cos(bx)+b\sin(bx)}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}+C$$

* 教材方法的**严谨性**需要非常复杂的说明，详见本讲义 6.2.1。

* 另一个可以考虑的计算方法是**复数**，但**仅能用于得出结果**，以此写过程将被扣分，本章将介绍一些相关的技巧。

23. (习题 3.2.3) 计算

$$\int x\sin(2x)\mathrm{d}x$$

解答：

由于 $\sin(2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}\cos(2x)$，分部积分可得原式为

$$-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\cos(2x)=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{2}\int\cos(2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)$$

24. (习题 3.2.6) 计算

$$\int\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\mathrm{d}x$$

解答：

直接由本部分第 22 题结论可知积分结果为

$$\frac{2\cos(3x)+3\sin(3x)}{13}\mathrm{e}^{2x}$$

25. (习题 3.2.9) 计算

$$\int\sqrt{1+9x^2}\mathrm{d}x$$

解答:

在教材 3.2 节例 6 中已经算出

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C$$

从而有

$$\int\sqrt{1-9x^2}\mathrm{d}x=3\int\sqrt{1/3^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\ln\left|x+\sqrt{\frac{1}{9}+x^2}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{1+9x^2}+C$$

* 也可加常数 $\frac{1}{6}\ln 3$ 进一步化简 ln 中的表达式，不过上式已经足以作为结果。

26. (习题 3.2.12) 计算

$$\int\arccos^2 x\,\mathrm{d}x$$

解答:

当遇到整体不好处理的式子时，可以尝试**直接分部**，也即将积分改写为

$$x\arccos^2 x-\int x\,\mathrm{d}\arccos^2 x=x\arccos^2 x+\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\,\mathrm{d}x$$

为了进一步计算，换元 $t=1-x^2$ 可以直接得到

$$\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=-2\sqrt{t}=-2\sqrt{1-x^2}$$

* 这步的目的是计算出的 $\arccos x$ **外的部分的原函数**，以进一步进行分部。

由此有

$$\begin{aligned}\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\,\mathrm{d}x&=\int\arccos x\,\mathrm{d}(-2\sqrt{1-x^2})\\&=-2\sqrt{1-x^2}\arccos x+2\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\arccos x\\&=-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2\int 1\mathrm{d}x=-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+C\end{aligned}$$

从而最终结果为

$$x\arccos^2 x-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+C$$

27. (习题 3.2.15) 计算

$$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$$

解答:

保留 $\arcsin x$ 合并其他部分由分部积分可得此为

$$-\int\arcsin x\,\mathrm{d}\frac{1}{x}=-\frac{\arcsin x}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

下面考虑剩下的积分，由于除了分母的 x 外均为 x 的奇数次方，可以想到分子分母同乘 x 配凑为 $\mathrm{d}x^2$，设 $t=x^2$ 可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t}}$$

由于 $\sqrt{1-t}$ 难以处理，设为整体 $s=\sqrt{1-t}$，则 $t=1-s^2$，计算可得

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t}}=-\int\frac{\mathrm{d}s}{1-s^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{|s-1|}{|s+1|}$$

最终代入可得到不定积分为

$$-\frac{\arcsin x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{|\sqrt{1-x^2}-1|}{|\sqrt{1-x^2}+1|}+C$$

* 由于 $x\neq 0$，$|\sqrt{1-x^2}-1|\neq 0$，也可以对 ln 中的部分进行分母有理化化简，得到

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|\sqrt{1-x^2}-1|}{|\sqrt{1-x^2}+1|}=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)^2}{x^2}=\ln\frac{|\sqrt{1-x^2}-1|}{|x|}$$

28. (习题 3.2.18) 计算

$$\int x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$$

解答：

直接计算可发现 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 导数为 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，从而保留 ln 部分由分部积分可知原式为

$$\frac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

与本部分第 20 题类似，利用 $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，由 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 导数为 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 与教材 3.2 节例 6 可得

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

从而最终结果为

$$\frac{1}{2}x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{x}{4}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

* **反三角函数**、**对数函数**求导后就将成为幂函数的加减乘除与复合，从而都常用分部积分处理。

§7.2 不定积分

7.2.1 换元与配凑

不定积分最基本的方法是**换元法**，分为两种情况 (默认里面提及导数的函数都可导)：

- **凑微分**，即若原不定积分能看成

  $$\int g(f(x))f'(x)\mathrm{d}x$$

  的形式，我们代入 $t=f(x)$ 可发现上式为

  $$\int g(f(x))\mathrm{d}f(x)=\int g(t)\mathrm{d}t$$

- **代入换元**，即对任何不定积分

  $$\int g(x)\mathrm{d}x$$

  我们可以直接代入 $x=h(t)$ 使得其化为

  $$\int g(h(t))\mathrm{d}h(t)=\int g(h(t))h'(t)\mathrm{d}t$$

当然，为了知道配凑成何种形式就可以算出了，大家**必须**记熟基本初等函数的导数结果，且**非常推荐**记忆教材 3.2 节结尾列出的不定积分公式。

不过，值得注意的额是，上述做法事实上存在诸多严谨性问题：

- $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$ 是针对**微分**而言的，而我们从来没有解释过不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $\mathrm{d}x$ 和微分 $\mathrm{d}x$ 有什么关系。
- 以凑微分为例，假设 $g(t)$ 的一个原函数是 $G(t)$，有 $(G(f(x)))' = G'(f(x))f'(x) = g(f(x))f'(x)$，这样可以从形式上证明换元的正确性，但即使如此，我们在上述讨论中**几乎完全忽略了定义域问题**，这可能导致一些非常麻烦的情况。

由于不定积分在本课程要求中只需学会计算技巧，目前我们只强调一件事，即换元 $x = h(t)$ 时应**保证存在函数 g 使得 $g(h(t)) = x$** (事实上如果有部分端点不满足此式也问题不大)。可以证明，在做到这件事后，不定积分换元计算**在区间上**能得到正确的结果。

* 由此建议大家**优先使用凑微分**，因为这几乎不会遇到严谨性问题。

* 当然，实际做题时也可能会出现一些特殊的情况，由此还是建议大家养成计算完不定积分后**求导检验结果与结果定义域**的习惯。

最后，仍然注意对 x 不定积分得到的是含 x 的表达式，对 t 不定积分得到的是含 t 的表达式，最后**须把 t 代换回 x**。

我们来做一些基本的练习：

题 113. 计算

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x$$

解答：

由于 $\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，我们可以直接将其配凑为

$$\int \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{e}^x}$$

由于 $\mathrm{e}^x \neq 0$，这样做也不会影响定义域。设 $t = \mathrm{e}^x$ 即有上式为

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + C$$

代入即得原积分为

$$\ln|\mathrm{e}^x - 1| - x + C$$

* 所有 $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ 均可类似处理。

题 114. 计算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

解答：

介绍两种不同的换元思路：

– **凑微分思路**

由于分母除了 x^2 相关的项只有 x，想到分子分母同乘 x，换元 $t=x^2$ 得到原式为

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t-1}}$$

由于 $\sqrt{t-1}$ 难以处理，我们考虑将其看作整体，而恰好有

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}=2\mathrm{d}\sqrt{t-1}$$

从而再令 $s=\sqrt{t-1}$，有 $t=s^2+1$，将其进一步写为

$$\int\frac{\mathrm{d}s}{s^2+1}=\arctan s+C$$

代入即得原积分为

$$\arctan\sqrt{x^2-1}+C$$

* 这里有两个基本技巧，一个是熟悉**基本初等函数**的导数，另一个是由**复合函数导数**有 $\mathrm{d}f(ax+b)=af'(ax+b)\mathrm{d}x$，因此若看到 f' 复合**一次函数**的形式，也可以直接配为 $f(ax+b)$ 的微分。这里对 $\sqrt{t-1}$ 就是如此处理的。

– **代入换元思路**

由于分母出现了 $\sqrt{x^2-1}$，我们尝试使用三角换元，设 $x=\frac{1}{\cos t}$ (此时利用定义域可发现 $t=\arccos\frac{1}{x}$，符合换元要求)，代入并计算可发现积分化为

$$\int\frac{\sin t\mathrm{d}t}{\cos t\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}\mathrm{d}t=\int\frac{\tan t}{|\tan t|}\mathrm{d}t$$

当 $x>1$ 时，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，对应积分即为 $\int 1\mathrm{d}t=t+C$，结果为

$$\arccos\frac{1}{x}+C$$

当 $x<-1$，$t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，对应积分即为 $\int(-1)\mathrm{d}t=-t+C$，结果为

$$-\arccos\frac{1}{x}+C$$

* 由此可见，为了过程的严谨性，**当 x 定义域分为多段时最好分别讨论。**

* 注意到两种做法得出的结果形式上并不同，涉及反三角函数与 ln 时尤其容易出现这类情况，仍然注意**求导验算**。

* 本题事实上还有换元 $x=\frac{1}{t}$ 等做法，大家可以自己尝试，积分计算的方法往往是灵活的。

涉及**三角**时，情况往往会更加复杂：

题 115. 计算

$$\int\sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x$$

解答：

介绍两种方法：

– **观察结构**

如果大家对二倍角公式足够敏感，可以发现

$$1+\sin x=1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$$

由此原积分实质上是

$$\int\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x$$

不过，我们并未学过任何绝对值相关的积分结论。至此有两种不同思路：

1. 回到**微积分基本定理**：由于此函数在 $\mathbb{R}$ 上连续，它的所有原函数可以写为

$$\int_0^x\left|\sin\frac{s}{2}+\cos\frac{s}{2}\right|\mathrm{d}s+C$$

只要分段讨论计算此积分即可，由于我们这里介绍的是不定积分计算技巧，不详细介绍此思路。

2. 还是利用**原函数**的思路计算，设它的一个原函数为 $F(x)$。首先，为了确定绝对值何时取正，我们将其进行一些配凑 (这理应是高中阶段的三角函数技巧)

$$\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{2}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

由此，利用三角函数性质，此函数可以进一步写为

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left[-\frac{\pi}{2}+4k\pi,\frac{3\pi}{2}+4k\pi\right)\\ -\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left[\frac{3\pi}{2}+4k\pi,\frac{7\pi}{2}+4k\pi\right)\end{cases},\quad\forall k\in\mathbb{Z}$$

直接利用复合一次函数的结论可知

$$\int\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C$$

由此考虑每个开区间可知，必然存在常数 C_k、D_k $(k\in\mathbb{Z})$ 使得

$$F(x)=\begin{cases}-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C_k & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+4k\pi,\frac{3\pi}{2}+4k\pi\right)\\ 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+D_k & x\in\left(\frac{3\pi}{2}+4k\pi,\frac{7\pi}{2}+4k\pi\right)\end{cases},\quad\forall k\in\mathbb{Z}$$

由于 F 在 $\mathbb{R}$ 上可导，必然连续，考虑所有

$$\frac{3\pi}{2}+4k\pi$$

处的左右极限可以发现

$$-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+C_k=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+D_k$$

从而 $D_k=C_k+4\sqrt{2}$，而考虑所有 $\frac{7\pi}{2}+4k\pi$ 处可发现

$$-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+C_{k+1}=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+D_k$$

从而 $C_{k+1}=D_k+4\sqrt{2}$。

由于 $F(x)$ 加实数仍为原函数，可不妨设 $C_0=0$，从以上两式可递推出 $C_k=8\sqrt{2}k$、$D_k=8\sqrt{2}k+4\sqrt{2}$，再结合 $F(x)$ 连续性最终得到表达式

$$F(x)=\begin{cases}-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+8\sqrt{2}k & x\in\left[-\frac{\pi}{2}+4k\pi,\frac{3\pi}{2}+4k\pi\right)\\ 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+8\sqrt{2}k+4\sqrt{2} & x\in\left[\frac{3\pi}{2}+4k\pi,\frac{7\pi}{2}+4k\pi\right)\end{cases},\quad\forall k\in\mathbb{Z}$$

可以由定义验证在所有区间分界点处 F 的导数的确为 0，从而 F 是其在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数，因此

$$\int\sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x=F(x)+C$$

– **直接操作**

本题的一个容易想到的方法是，利用**将不会处理的部分看作整体**的思路，设 $t=1+\sin x$。为了实现凑微分，我们必须凑出一个 $\cos x$ 才能如此换元，由此我们将原式写为

$$\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}\cos x\mathrm{d}x$$

然而，$\cos x$ 与 $\sin x$ 的关系**并不固定**，必须确定区间才能进行换元。例如，对 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，有 $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$，从而换元后可得

$$\int\sqrt{t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(t-1)^2}}=\int\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{2-t}}=-2\sqrt{2-t}+C$$

再代入可发现 $\sqrt{1+\sin x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的一个原函数为

$$-2\sqrt{1-\sin x}$$

类似可以得到 $\sqrt{1+\sin x}$ 在 $\sin x$ 的每个**单调区间**的原函数。不过，为了得到 $\mathbb{R}$ 上的原函数，仍然需要类似上一种方法的计算。

* 一定注意**非初等函数的原函数可能涉及复杂的讨论**，这里出现的绝对值就是例子。

* 本题也体现了**检验定义域**的重要性，如果只给出绝对值中大于 0 与小于 0 的不同原函数而不进行组合，我们的原函数定义域将无法是 $\mathbb{R}$，实际上并不符合 $\mathbb{R}$ 上原函数的定义。

题 116. 计算

$$\int\frac{\cos x}{2\cos x+5\sin x}\mathrm{d}x$$

解答：

介绍两种方法：

– **直接换元**

对这类有 sin 与 cos 的式子，一个**经验**是尝试设 $t=\sin x$ 或 $\cos x$ 或 $\tan x$。

由于此式中 sin 与 cos **齐次**，分子分母同除以 $\cos x$ 得到其为

$$\int\frac{1}{2+5\tan x}\mathrm{d}x$$

令 $t=\tan x$，可得原式化为

$$\int\frac{1}{(2+5t)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

此时可利用之后介绍的**有理函数**积分方法得到积分结果。这里写出一个简单的过程：待定系数可得

$$\int\frac{1}{(2+5t)(1+t^2)}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{29}\left(\frac{25}{2+5t}+\frac{2-5t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

从而利用

$$\int\frac{1}{2+5t}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\ln|2+5t|$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan t$$

$$\int \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t^2}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

并代入 $t=\tan x$ 可得到形式上的结果

$$\frac{1}{29}\left(5\ln|2+5\tan x| + 2\arctan\tan x - \frac{5}{2}\ln(1+\tan^2 x)\right) + C$$

我们自然会产生疑问，令 $t=\tan x$ 是否会导致定义域问题？答案是否定的，因为这样的换元是分子分母同乘 $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ 后进行的，换元前已经写成了

$$\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{(2+5\tan x)(1+\tan^2 x)}$$

由于**所有部分都是** $\tan x$ **的函数**，换元不会出现问题。

但是，此处的问题出在更前：由于 $\cos x$ 可能为 0，分子分母同除以 $\cos x$ 将导致**原本连续的点从原函数定义域中被剥离了**。为了解决此问题，我们可以将结果写为

$$\frac{5}{29}\ln\frac{|2+5\tan x|}{\sqrt{1+\tan^2 x}} + \frac{2}{29}\arctan\tan x + C$$

并将左侧分子分母同乘 $|\cos x|$、右侧 $\arctan\tan x$ 改写为 x (注意这实际上未必成立，x 在不同区间时 $\arctan\tan x$ 结果不同)，得到一个**形式上消去了** $\tan x$ **的结果**

$$\frac{5}{29}\ln|2\cos x + 5\sin x| + \frac{2}{29}x + C$$

可以发现此结果的定义域与 $\frac{\cos x}{2\cos x+5\sin x}$ 相同，且求导的确为 $\frac{\cos x}{2\cos x+5\sin x}$，从而这就是不定积分的结果。

* 这里的形式上消去如果想要严格书写，需要利用原函数的连续性在每个 $\cos x = 0$ 的点进行讨论，将非常复杂。当自己做题遇到这种情况时同样建议**先形式上化简再检验**。

– **配凑**

本题事实上可以通过巧妙地配凑解决：可以发现

$$\int \frac{2\cos x+5\sin x}{2\cos x+5\sin x}\mathrm{d}x = x + C$$

$$\int \frac{5\cos x-2\sin x}{2\cos x+5\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\cos x+5\sin x}\mathrm{d}(2\cos x+5\sin x) = \ln|2\cos x+5\sin x| + C$$

由此待定系数即可得到

$$\int \frac{\cos x}{2\cos x+5\sin x}\mathrm{d}x = \frac{2}{29}\int \frac{2\cos x+5\sin x}{2\cos x+5\sin x}\mathrm{d}x + \frac{5}{29}\int \frac{5\cos x-2\sin x}{2\cos x+5\sin x}\mathrm{d}x$$

从而直接得结果

$$\int \frac{\cos x}{2\cos x+5\sin x}\mathrm{d}x = \frac{2}{29}x + \frac{5}{29}\ln|2\cos x+5\sin x| + C$$

* 由此可见，虽然不定积分往往有多种方法可以算出，但不同方法往往难度差别巨大。但是，在时间有限时，**与其追求巧妙方法不如用熟悉的笨方法算出结果**——因为思考巧妙方法本身就会花费大量时间。

此外，对于三角函数相关的问题，还常用一个重要的公式，即**等差数列的正弦求和公式**：对任何实数 k、b，有

$$\sum_{t=0}^{n}\sin(kt+b)=\frac{\sin\frac{(n+1)k}{2}\sin(\frac{nk}{2}+b)}{\sin\frac{k}{2}}$$

其证明为，左侧乘 $\sin\frac{k}{2}$ 可得

$$\sum_{t=0}^{n}\sin(kt+b)\sin\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{n}\left(\cos\left(kt-\frac{k}{2}+b\right)-\cos\left(kt+\frac{k}{2}+b\right)\right)$$

裂项相消即得到

$$\sum_{t=0}^{n}\sin(kt+b)\sin\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{k}{2}+b\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}k+b\right)$$

再重新利用和差化积公式展开得结论。

* 只要将上方的 b 改为 $\frac{\pi}{2}+b$ 即可得到 cos 求和的结果。

利用此公式可以方便地计算一些问题：

题 117. 对正整数 $n\geq 2$ 计算

$$\int\frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$$

解答：

介绍三种方法：

– **直接方法**

利用等差数列的正弦求和公式

$$\sum_{t=0}^{m}\sin(kt+b)=\frac{\sin\frac{(m+1)k}{2}\sin(\frac{mk}{2}+b)}{\sin\frac{k}{2}}$$

取 $k=2x$、$m=n-1$、$b=-(n-1)x+\frac{\pi}{2}$，即得

$$\frac{\sin(nx)}{\sin x}=\sum_{t=0}^{n-1}\sin\left(2xt-(n-1)x+\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{t=0}^{n-1}\cos((2t-(n-1))x)$$

* 注意可能 $2t=n-1$ 的项，因此不能直接认为每项积分是 $\frac{1}{2t-(n-1)}\sin((2t-(n-1))x)$。

可以发现此求和实际上是

$$\cos(-(n-1)x)+\cos(-(n-3)x)+\cdots+\cos((n-3)x)+\cos((n-1)x)$$

利用 $\cos(-x)=\cos x$，分奇偶讨论。对正整数 k，当 $n=2k+1$ 时上式为

$$1+2\cos(2x)+\cdots+2\cos(2kx)$$

从而原函数为

$$x+\sin(2x)+\cdots+\frac{1}{k}\sin(2kx)+C$$

当 $n=2k$ 时上式为

$$2\cos x+\cdots+2\cos((2k-1)x)$$

从而原函数为

$$2\sin x+\cdots+\frac{2}{2k-1}\sin((2k-1)x)+C$$

– **递推方法**

如果无法直接想起等差数列的正弦求和公式，利用归纳的思路，我们试着将

$$\int \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

与更小的 n 建立联系。

一个直接的想法是拆分，将 $\sin(nx)$ 看作 $\sin((n-1)x)\cos x+\cos((n-1)x)\sin x$，这样就有原式为

$$\int \frac{\sin((n-1)x)\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int \cos(n-1)x\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sin((n-1)x)\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x+\frac{\sin((n-1)x)}{n-1}+C$$

利用不定积分作为表达式集合的定义，我们可以将右侧的 $+C$ 删去，将结果写为

$$\int \frac{\sin((n-1)x)\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x+\frac{\sin((n-1)x)}{n-1}$$

不过，左侧仍然不是可以计算的形式，我们尝试再分裂一次，这样即将原式写为了

$$\int \frac{\sin((n-2)x)\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int (\cos(n-2)x)\cos x\,\mathrm{d}x+\frac{\sin((n-1)x)}{n-1}$$

可以发现，由于左边出现了 $\cos^2 x$，我们将其拆为 $1-\sin^2 x$ 就能得到 $n-2$ 的情况，也即原积分最终写为了

$$\int \frac{\sin((n-2)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x-\int \sin((n-2)x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int (\cos(n-2)x)\cos x\,\mathrm{d}x+\frac{\sin((n-1)x)}{n-1}$$

可以发现，二三两项不定积分可以合并为 $\cos((n-1)x)$ 的不定积分，从而即最终得到等式

$$\int \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sin((n-2)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x+2\frac{\sin((n-1)x)}{n-1}$$

由此可以递推到 $n=0$ (积分为 C) 或 $n=1$ (积分为 $x+C$) 的情况，从而得到与第一种方法相同的结果。

* 对三角函数相关的问题，常见需要**两次**拆分/化简的情况，本质上是由于 sin 或 cos 求两次导才会出现自身。

– **复数方法**

利用**欧拉公式**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

有

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

从而原积分可以形式上写为

$$\int \frac{\mathrm{e}^{n\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x$$

注意 $\mathrm{e}^{n\mathrm{i}x}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n$、$\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}x}=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^n$，由此从 a^n-b^n 的因式分解可知上式进一步改写为

$$\int \sum_{r=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^r(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^{n-1-r}\,\mathrm{d}x=\int \sum_{r=0}^{n-1}\mathrm{e}^{(2r-(n-1))\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$$

由于 $\frac{\sin(nx)}{\sin x}$ 为实数，上式的虚部必然可以抵消，从而再用欧拉公式展开后提取实部得到原不定积分化为

$$\int \sum_{r=0}^{n-1}\cos((2r-(n-1))x)\,\mathrm{d}x$$

此后与第一种方法完全相同。

* 注意此方法是严格的，因为我们**仅用复数方法证明了三角恒等式，并未真的进行复函数的求导或积分。**

一定要注意三角换元过程的严谨性：若换元 $t=g(x)$ 前我们已经将它配凑为了 $f(g(x))\mathrm{d}g(x)$ 的形式，直接换元是不会产生严谨性问题的，否则必须进行更复杂的讨论。

最后，我们来求解一个微分方程：

题 118 (附加). 已知 $r^3-4r^2+5r-2=(r-1)^2(r-2)$，求所有函数 $f(x)$ 使得其在 $\mathbb{R}$ 上满足

$$f'''(x)-4f''(x)+5f'(x)-2f(x)=0$$

解答：

- **基本分析**

这里最重要的步骤是一个**线性代数**的观察：

$$f'''(x)-4f''(x)+5f'(x)-2f(x)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2\right)f(x)$$

这里对任何函数 $g(x)$，我们定义

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+c\right)g(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)+cg(x)$$

且左侧的"乘法"代表复合，平方代表与自己复合。

由此，我们可以将

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2\right)f(x)$$

解释为：$f(x)$ 对 x 求导后减两倍自身得到 $f_1(x)$，$f_1(x)$ 对 x 求导后减自身得到 $f_2(x)$，$f_2(x)$ 对 x 求导后减自身得到结果。大家可以验算其的确与 $f'''(x)-4f''(x)+5f'(x)-2f(x)$ 相等。

* 至于为何求导可以与多项式一样进行因式分解，本质上是由于求导运算可以一定程度看成**线性变换**，从而它具有多项式运算相似的交换律、结合律、分配律。后续的线性代数课程中将学到。

- **回溯计算**

我们沿续上方定义 $f_1(x)=f'(x)-2f(x)$、$f_2(x)=f_1'(x)-f_1(x)$，可发现方程化为

$$f_2'(x)-f_2(x)=0$$

接下来我们要用最重要的配凑，对于 $g'(x)+ag(x)$ 一类的式子，我们可以**乘 e^a 将整体配为导数。**

方程两侧乘 e^{-x} 得到

$$\mathrm{e}^{-x}f_2'(x)-\mathrm{e}^{-x}f_2(x)=0$$

可以发现左侧即为 $(\mathrm{e}^{-x}f_2(x))'$，从而可知存在 $C_2\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{e}^{-x}f_2(x)=C_2$$

也即

$$f_2(x) = C_2 \mathrm{e}^x$$

进一步计算，由于 $f_2(x) = f_1'(x) - f_1(x)$ 可得

$$f_1'(x) - f_1(x) = C_2 \mathrm{e}^x$$

同样两侧乘 e^{-x} 得到

$$(\mathrm{e}^{-x} f_1(x))' = C_2$$

从而可知存在 $C_1 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{e}^{-x} f_1(x) = C_2 x + C_1$$

也即

$$f_1(x) = (C_2 x + C_1)\mathrm{e}^x$$

最后，由于 $f_1(x) = f'(x) - 2f(x)$ 可得

$$f'(x) - 2f(x) = (C_2 x + C_1)\mathrm{e}^x$$

两侧乘 e^{-2x} 得到

$$(\mathrm{e}^{-2x} f(x))' = (C_2 x + C_1)\mathrm{e}^{-x}$$

– **最终不定积分**

我们现在来计算

$$\int (C_2 x + C_1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

这里的关键观察是，利用 $(g(x)\mathrm{e}^{-x}) = (g'(x) - g(x))\mathrm{e}^{-x}$，取 $g(x) = ax + b$，a、b 为实数，有

$$((ax+b)\mathrm{e}^{-x})' = (a - ax - b)\mathrm{e}^{-x}$$

从而令 $a - b = C_1$、$-a = C_2$，我们就得到了不定积分结果为

$$\int (C_2 x + C_1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (-C_2 x + C_2 - C_1)\mathrm{e}^{-x} + C$$

* 除了待定系数，这个不定积分也可通过分部积分计算。

因此存在 $C_3 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{e}^{-2x} f(x) = (-C_2 x - C_2 - C_1)\mathrm{e}^{-x} + C_3$$

也即

$$f(x) = (-C_2 x - C_2 - C_1)\mathrm{e}^x + C_3 \mathrm{e}^{2x}$$

将 $-C_2$ 看作新的常数 D_2，$-C_2 - C_1$ 看作新的常数 D_1，即得微分方程的全部解为

$$f(x) = (D_1 + D_2 x)\mathrm{e}^x + C_3 \mathrm{e}^{2x}, \quad D_1, D_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

* 最后一步事实上需要说明 D_1, D_2 与 C_1, C_2 只要确定一组，另一组也唯一确定。这可以直接求解得到。

* 利用这种方法可以计算出 $f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + f(x) = 0$ 的全部解，这里 a_i 均为实数。

7.2.2　分部积分

无论是不定积分还是定积分，**分部积分**的公式都是非常重要的，它对不定积分写为

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

利用乘积求导公式，此公式在 f、g 均可导且两侧的不定积分至少有一侧存在时是可直接证明的。
* 分部积分的重要性暗示了乘积求导公式是求导非常**本质**的性质。即使数学学习更深入后导数可以进行各种各样的推广，我们也仍然至少希望乘积求导公式是成立的。

有了分部积分后，相关的计算可以更加灵活：

题 119. 计算

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

解答：

由于 $\mathrm{e}^{\arctan x}$ 难以处理，我们将 $\arctan x$ 看作整体，设 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$，计算可得原式化为

$$\int \frac{\mathrm{e}^t}{|\cos t|^{-3}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\int \mathrm{e}^t|\cos t|\mathrm{d}t$$

* 注意此处换元是可以无条件进行的，这是由于 $\arctan x$ 是 $\mathbb{R}$ 上的严格单调连续函数，对任何 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 都可以确定唯一的 x，符合换元法条件。

由于换元后 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$\cos t\geq 0$，从而上式改写为

$$\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$$

由本讲义 7.1 第 22 题可直接得到结果，这里我们介绍一个**两次分部积分**的证法。

由于 $\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{d}\mathrm{e}^t$，它常常被用来分部积分，也即

$$\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t=\int \cos t\mathrm{d}\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t\cos t+\int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t$$

虽然这样尚没有做完，但我们可以对右侧的不定积分再次分部积分得到

$$\int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=\int \sin t\mathrm{d}\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t\sin t-\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$$

由此可发现

$$\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)-\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$$

由**题 97** 即解得

$$\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)+C$$

从而原积分即为

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}(\cos(\arctan x)+\sin(\arctan x))+C$$

题 120. 计算

$$\int \frac{x\tan x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

解答：

若删去 x，本题将是十分好处理的：

$$\int\frac{\tan x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^3 x}=\frac{1}{2\cos^2 x}$$

由此，我们尝试将**可以积分的部分整体放入分部积分**，也即利用上式进行计算

$$\int\frac{x\tan x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{2\cos^2 x}=\frac{x}{2\cos^2 x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 x}$$

这样就可以直接得到结果为

$$\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\tan x+C$$

题 121. 计算

$$\int\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$$

解答：

这里出现了最外层的无法处理的 ln，我们尝试将其**整体分部**，计算得到

$$\int\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x=x\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})-\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

但是，这里出现的 ln 仍然无法处理，由此我们还是先计算

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}$$

这样就可以分部积分得到

$$\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int 1\,\mathrm{d}x$$

也即

$$\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-2x+C$$

最终合并即得到原积分为

$$x\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})-2\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+2x+C$$

当然，分部积分也可以用于构造**递推公式**：

题 122. 求出不定积分

$$\int\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

关于正整数 n 的递推公式。

解答：

* 本题的想法相对反直觉，建议理解为某种**尝试的结果**。

我们尝试分出一个 $\sin x$ 进行分部积分，计算导数得到原式为

$$-\int \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}\cos x = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x$$

此时右侧已经出现了 $\cos^2 x$，将它重新写为 $1-\sin^2 x$ 即得

$$-\int \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}\cos x = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$$

由于上式即

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$$

移项合并 (这可以利用不定积分的表达式集合定义严谨证明) 并同乘 $\frac{1}{n}$ 得到

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x$$

这就是所求的递推公式。

* 注意根据我们的证明过程，事实上

$$n\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x$$

对任何实数 n 成立，但当 $n=0$ 时左侧需要有 $+C$。

7.2.3 有理函数相关

有理函数是指满足

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

其中 $p(x)$ 为多项式、$q(x)$ 为非零多项式的函数。

教材 3.2 节给出了对于一般的有理函数进行不定积分的算法与将三角函数化为有理函数积分的**万能代换法**、将**根式**化为有理函数的算法。虽然对具体的问题**往往存在更好的处理方法**，但正如之前所说，这样的 “笨办法” 是最直接且一定能得到结果的，因此**必须掌握**。

接下来的例子我们都将介绍更好的方法与基本的配凑方法：

题 123. 计算

$$\int \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

解答：

- **有理函数基本做法**

  直接因式分解 $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$，从而待定系数可得

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{1-x+x^2}\right)$$

  再利用

$$\frac{x-2}{1-x+x^2} = \frac{x-2}{(x-1/2)^2+3/4} = \frac{1}{2}\frac{2(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

进一步配凑，将两项都配凑为可以计算的形式有 (第二项也可以直接通过记忆 $\frac{1}{a^2+x^2}$ 的积分结果得到)

$$\int \frac{x-2}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{2}{\sqrt{3}}x)}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}$$

从而得上述积分结果为

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

化简后与第一项结合也即

$$\frac{1}{3}\left(\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln(1-x+x^2)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

- **配凑做法**

  利用**题 116** 类似的思路，由 $(1+x^3)' = 3x^2$ 有

$$\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \ln|1+x^3|+C$$

  为了配凑出其他容易计算的形式，我们可以考虑 (第二式直接利用了 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 的积分结论)

$$\int \frac{1-x+x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln|1+x|+C$$
$$\int \frac{1+x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

  将上述三个积分称为 I_1、I_2、I_3，待定系数可发现我们要算的积分即

$$-\frac{1}{6}I_1+\frac{1}{2}I_2+\frac{1}{2}I_3 = -\frac{1}{6}\ln|1+x^3|+\frac{1}{2}\ln|1+x|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

  可验证实际与上一种做法结果相同。

题 124. 计算

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

解答:

- **有理函数基本做法**

  这里的分子因式分解需要一定的技巧性。最直接的做法是解出 $1+x^4$ 的四个根并按照共轭配对，但一个更好的做法是使用**平方差公式**得到

$$1+x^4 = 1+2x^2+x^4-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

  * 对于 ax^4+bx^2+c 类的式子，若 ax^2+bx+c 无实根，一定可以如上方配凑，这就规避了对二次方程求解后处理复数。

  由此进一步待定系数计算即得

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$$

将分母配方可知

$$x \pm \sqrt{2}x + 1 = \left(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

由此

$$\frac{x \pm \sqrt{2}}{x \pm \sqrt{2}x + 1} = \frac{x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}{(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\int \frac{x \pm \sqrt{2}}{x \pm \sqrt{2}x + 1} &= \int \frac{x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}{(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \mathrm{d}x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \pm \sqrt{2} \int \frac{1}{(\sqrt{2}x \pm 1)^2 + 1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \ln\left((x \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}\right) \pm \int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}x \pm 1)}{(\sqrt{2}x \pm 1)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2 \pm \sqrt{2}x + 1) \pm \arctan(\sqrt{2}x \pm 1) + C
\end{aligned}$$

由此原不定积分为

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x + 1) - \frac{1}{2}\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x - 1)\right) + C$$

化简得最终结果

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \arctan\frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2}\right) + C$$

* 这里 ln 利用了 $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ 进行化简，而由于 $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$，设 $a = \arctan c$、$d = \arctan d$ 即可发现

$$\arctan c + \arctan d = \arctan\frac{c + d}{1 - cd}$$

– **配凑做法**

这里给大家介绍一个有些神奇的配凑做法，它来自公式

$$\mathrm{d}\left(x \pm \frac{1}{x}\right) = 1 \mp \frac{1}{x^2}$$

由此可以进一步得到

$$\frac{x^2 \mp 1}{x^4 + 1}\mathrm{d}x = \frac{1 \mp \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\big(x \pm \frac{1}{x}\big)}{\big(x \pm \frac{1}{x}\big)^2 \mp 2}$$

从而有 (利用 $\int \frac{1}{a^2 \pm x^2}\mathrm{d}x$ 的积分结论)

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\big(x - \frac{1}{x}\big)}{\big(x - \frac{1}{x}\big)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x}$$

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\big(x + \frac{1}{x}\big)}{\big(x + \frac{1}{x}\big)^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + C$$

上方积分减下方积分除以 2 即得到原积分结果，利用反三角函数、对数函数性质即能验证结果一致。

* 此做法的参考价值或许在于含 $x + \frac{1}{x}$ 的式子的处理。

* 从以上两题也可以看出，对于 $ax^2 + bx + c$ 类的式子，我们一定可以**配方**为 $|a|(x^2 - h^2)$、$|a|(h^2 - x^2)$、

$a(x^2+h^2)$ 中的一种，从而可以用已知极限结论直接算出。此后我们将直接使用 $\frac{1}{a^2\pm x^2}$ 的积分结论。

题 125. 计算

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$$

解答：

– **有理函数基本做法**

* 若某三角函数的有理函数满足将 $\sin x$ 替换为 $-\sin x$、$\cos x$ 替换为 $-\cos x$ 值不变，则可以直接**用** $t=\tan x$ **换元**，而非 $t=\tan\frac{x}{2}$。我们这里使用此结论以简化过程，大家也可以尝试直接进行万能代换。

设 $t=\tan x$，则直接计算可知 $\sin^2 x=\frac{t^2}{t^2+1}$，从而再利用 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$ 我们可将此积分看作

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2)^2}(t^2+1)\mathrm{d}x=\int \frac{t^2+1}{(t^2)^2}\mathrm{d}t$$

算出积分再代回 $t=\tan x$ 得到结果为

$$-\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{3\tan^3 x}+C$$

– **迭代做法**

利用**题 122** 的结论过程 $n=0$、$n=-2$ 有

$$(-2)\int \sin^{-2}x\mathrm{d}x=-\sin^{-3}x\cos x+(-3)\int \sin^{-4}\mathrm{d}x$$

$$C=-\sin^{-1}x\cos x+(-1)\int \sin^{-2}\mathrm{d}x$$

由此从两式中消去 $\int \sin^{-2}x\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}+C$$

也即最终得到

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{3\tan x}-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}+C$$

§7.3 定积分

7.3.1 换元与配凑

定积分最基本的方法仍是换元与配凑。利用微积分基本定理，可以将定积分的换元归于如下定理：若 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 连续，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上**连续可导**。假设 $t\in[\alpha,\beta]$ 时 $\varphi(t)$ 变动范围在 $[A,B]$ 内，且 $\varphi(\alpha)=a$、$\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

* 连续可导是指，$\varphi(x)$ 在 (α,β) 上可导，且导函数在 $[\alpha,\beta]$ 连续——即存在 $[\alpha,\beta]$ 上的**连续函数** $\varphi_0(x)$ 使得 $\varphi'(x)$ 在 (α,β) 上与 $\varphi_0(x)$ 相等。此定义是为满足**微积分基本定理**条件，保证 $\int_\alpha^\beta \varphi'(x)\mathrm{d}x=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$。

上述形式上相当于进行了换元 $x=\varphi(t)$。注意此定义中实际上做了两个要求：$\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ **满足微积分基本定理条件**、$\varphi(t)$ **变动范围内** f **连续**。此外，**定积分不允许凑微分换元**，只能作 $x=\varphi(t)$ (此时并不要求反函数存在) 而不能换 $t=\psi(x)$，这也是定积分与不定积分的本质不同。

我们先来看一个无法直接换元的例子：

题 126. 计算

$$\int_0^{3\pi/4}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

解答：

- **失败的尝试**

  我们给出两种失败的尝试。

  第一种：由于凑微分会凑成 $-\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x}$，我们尝试代换 $x=\arccos t$。但 x 的范围 $[0,\frac{3\pi}{4}]$ 并不在 t 的变化范围中，

  第二种：我们可以形式上得到一个原函数 $\arctan\frac{1}{\cos x}$，但此函数在 $[0,\frac{3\pi}{4}]$ 上有间断点 $x=\frac{\pi}{2}$，并非积分区间内处处导数为 $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$，由此不满足微积分基本定理使用条件。

- **正确做法**

  利用**凑微分**可以得到

  $$\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x}=-\arctan\cos x+C$$

  从而 $-\arctan\cos x$ 是被积函数的一个原函数。由于此函数在 $[0,\frac{3\pi}{4}]$ 连续可导，利用微积分基本定理即可得到结果为

  $$-\arctan\cos\frac{3\pi}{4}+\arctan\cos 0=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}$$

  * 仍然注意凑微分只能对**不定积分**进行。

事实上，虽然微积分基本定理是定积分的基本做法，我们并不是一定要找到某个原函数才能化简定积分：

题 127. 对正数 t 计算

$$\int_0^t[\sqrt{x}]\mathrm{d}x$$

解答：

我们将 $[\sqrt{x}]$ 在 $[0,+\infty)$ 上写为**分段函数**：

$$[\sqrt{x}]=k,\quad x\in[k^2,(k+1)^2)$$

由此，我们假设 $t\in[n^2,(n+1)^2)$，可将原积分写为

$$\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_1^4 1\mathrm{d}x+\cdots+\int_{(n-1)^2}^{n^2}(n-1)\mathrm{d}x+\int_{n^2}^t n\mathrm{d}x$$

也即

$$\sum_{k=0}^{n-1}((k+1)^2-k^2)k+n(t-n^2)$$

利用平方求和的公式即得其为

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k^2+k)+n(t-n^2)=\frac{1}{3}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n+n(t-n^2)$$

题 128. 对正整数 n 计算

$$\int_0^\pi \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\mathrm{d}x$$

解答:

利用等差数列的正弦求和公式可以证明

$$\frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)} = \sum_{k=-n}^{n}\cos(nx) = 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(nx)$$

* 直接想到此式并不那么容易，核心仍然是**向等差数列正弦求和配凑**，类似**题 117** 。

由于 $n \neq 0$ 时 $\cos(nx)$ 的一个原函数为 $\frac{1}{n}\sin(nx)$，它在 π 与 0 处均为 0，即可发现原积分为

$$\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x = \pi$$

7.3.2 分部与递推

定积分也存在**分部积分**公式，也即 $u(x)$、$v(x)$ 在 $[a,b]$ 上**连续可导**时

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

* 注意我们也可以形式上将左侧写为 $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x)$，但事实上我们并不知道它的严格定义 (这实际上称为 Riemman-Stieltjes 积分)。

结合换元与分部积分，我们可以计算更加多样的定积分：

题 129. 计算

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$$

解答:

首先，由于 (第二步为函数极限经典结论)

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\sin x = \lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$$

被积函数可以看作 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的连续函数，从而定积分存在。

但是，若尝试直接分部，将 $\sin x$ 看作 $-\cos x$ 的导数，无法使用分部积分定理——因为 $\ln\sin x$ 并不在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 连续可导。由此，我们还是先从**找原函数**的角度进行分部积分计算，得到

$$\int \sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\int \ln\sin x\,\mathrm{d}\cos x = -\cos x\ln\sin x + \int\frac{\cos^2 x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

但是，$\cos x\ln\sin x$ 在 0 处极限并不存在，上述分部的方法会导致后续难以计算，由此我们重新将其配成

$$\int \sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\int\ln\sin x\,\mathrm{d}(1-\cos x) = (1-\cos x)\ln\sin x - \int\frac{\cos x(1-\cos x)}{\sin x}\mathrm{d}x$$

由于 $1-\cos x$ 可以替换为等价无穷小 $\frac{x^2}{2}$，进一步替换为 $\frac{x}{2}\sin x$，从而根据 $\sin x\ln\sin x$ 在 0 处极限为 0 可知 $(1-\cos x)\ln\sin x$ 在 0 处极限为 0，这就可以计算了。

对第二项，我们用三角函数与有理函数的通常积分方法，令 $t=\cos x$ (注意由于分母已有 $\sin x$，分子分母同乘 $\sin x$ 不影响定义域) 即可得到上式右侧的积分为

$$\int \frac{\cos x(1-\cos x)\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{t(1-t)\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t} = -t+\ln|1+t|+C$$

由此最终得到不定积分为

$$(1-\cos x)\ln\sin x+\cos x-\ln(1+\cos x)+C$$

取 $C=0$，可发现此原函数与 $\sin x\ln\sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 符合微积分基本定理条件，从而定积分结果为

$$(1-0)\ln 1+0+\ln(1+0)-0-\cos 0+\ln(1+\cos 0)=-1+\ln 2$$

* 事实上从 $\sin x\ln\sin x\mathrm{d}x=\ln\sin x\mathrm{d}(1-\cos x)$ 可以形式上直接对定积分进行分部积分后计算，但这并不符合我们学过的定理使用条件。

* 由此可发现定积分的换元、分部条件往往比不定积分更加**严格**，由此从构造符合微积分基本定理的原函数出发是更**安全**的。

此外，与不定积分类似，分部积分也可以用于构造定积分的**递推**：

题 130. 对正整数 m、n 计算

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

解答：

当 $n=1$ 时，可以直接看出此式为 $\frac{1}{m}$，但对一般的 n，此式看起来难以计算。设 $n>1$，我们尝试将易于操作的 x^{m-1} 放入 $\mathrm{d}x$ 看看能得到什么，可以发现上式为

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\int_0^1(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x^m &= 1^m(1-1)^{n-1}-0^m(1-0)^{n-1}-\frac{1}{m}\int_0^1 x^m(-(n-1))x^{n-2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此，我们可以得到

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\mathrm{d}x$$

重复此过程，我们可以将 n 下降到 1 后直接计算，由于 x 的次数与 $1-x$ 的次数和不变，乘积的最后一项应为 $\frac{1}{m+n-2}$，而最终的次数为 $x^{m+n-2}(1-x)^0$ 从而可得积分结果为

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\mathrm{d}x &= \frac{n-1}{m}\frac{n-2}{m+1}\dots\frac{1}{m+n-2}\int_0^1 x^{m+n-2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-2)(m+n-1)}\\ &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}\end{aligned}$$

* 最后这步若想不清楚系数，可以尝试用具体的 m、n 进行计算。

题 131. 对正整数 m、n 计算

$$\int_0^1 x^m \ln^n x \mathrm{d}x$$

解答:

类似证明 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ 的方式可以证明对任何正整数 m、n 都有

$$\lim_{x\to 0^+} x^m \ln^n x = 0$$

从而被积函数可以看作 $[0,1]$ 上的连续函数，定积分存在。

由于 ln 难以直接处理，将 x^m 放入 $\mathrm{d}x$ 得到原式为 (再次利用上述极限为 0)

$$\frac{1}{m+1}\int_0^1 \ln^n x \mathrm{d}x^{m+1} = \frac{1}{m+1}(1\ln 1 - 0) - \frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\frac{n}{x}\ln^{n-1} x \mathrm{d}x$$

整理化简即得

$$\int_0^1 x^m \ln^n x \mathrm{d}x = -\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m \ln^{n-1} x \mathrm{d}x$$

从而递推 n 次可得

$$\int_0^1 x^m \ln^n x \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n}\int_0^1 x^m \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

* 事实上若定义 $0! = 1$，上式对 $n = 0$ 也成立。

题 132. 对正整数 m、n，设

$$I_{n,m} = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos(mx) \mathrm{d}x$$

计算它对 m、n 的递推公式。

解答:

为了能够计算，我们将相对难以处理的 $\cos(mx)$ 放入 $\mathrm{d}x$ 中并分部积分，利用 $\cos x$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处为 0、$\sin(mx)$ 在 0 处为 0 可化简得

$$I_{n,m} = \frac{1}{m}\int_0^{\pi/2} \cos^n x \mathrm{d}\sin(mx) = \frac{n}{m}\int_0^{\pi/2} \sin(mx)\cos^{n-1} x \sin x \mathrm{d}x$$

为了重新获得 $\cos(mx)$，我们将 $\sin(mx)$ 也放入 $\mathrm{d}x$ 进行分部积分，若 $n > 1$，可利用 $\cos x$、$\sin x$ 分别在 $\frac{\pi}{2}$、0 处为 0 得到

$$I_{n,m} = -\frac{n}{m^2}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin x \mathrm{d}\cos(mx) = \frac{n}{m^2}\int_0^{\pi/2} \cos(mx)(\cos^n x - (n-1)\cos^{n-2} x \sin^2 x)\mathrm{d}x$$

将 $\sin^2 x$ 写为 $1 - \cos^2 x$ 即得

$$I_{n,m} = \frac{n^2}{m^2} I_{n,m} - \frac{n(n-1)}{m^2} I_{n-2,m}$$

从而

$$I_{n,m} = \frac{n(n-1)}{n^2 - m^2} I_{n-2,m}$$

* 由此可再由 $n = 1$、$n = 0$ 的情况计算出最终结果。

7.3.3　对称性

除了上面介绍的这些内容外，还有一个独属于定积分的技巧，也就是**利用对称性化简**。它的一个基本形式是，将 x 换元为 $t=a+b-x$ 可发现

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t$$

而由于定积分结果是一个数，将 t 更改为 x 不影响，可以进一步写为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

从而有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (f(x)+f(a+b-x))\mathrm{d}x$$

若 $f(x)+f(a+b-x)$ 的形式比 $f(x)$ 简单，我们就可以考虑如此化简。

题 133. 计算

$$\int_{-2}^{2} x\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$$

解答:

设 $f(x)=x\ln(1+\mathrm{e}^x)$，有

$$f(x)+f(-x)=x\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\ln(1+\mathrm{e}^{-x})=x\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}}=x\ln\mathrm{e}^x=x^2$$

于是即得

$$\int_{-2}^{2} x\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$$

题 134. 对实数 a 计算

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}$$

解答:

由于 $x\to\frac{\pi}{2}^-$ 时 $\tan x\to+\infty$，无论 a 是正是负都可以得到 $\frac{\pi}{2}^-$ 处极限存在，从而被积函数可看作 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的连续函数，定积分存在。

设 $f(x)=\frac{1}{1+\tan^a x}$，则

$$f(x)+f(\pi/2-x)=\frac{1}{1+\tan^a x}+\frac{1}{1+\tan^{-a} x}=\frac{1}{1+\tan^a x}+\frac{\tan^a x}{\tan^a x+1}=1$$

于是即得

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

题 135. 计算

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

解答:

设 $f(x)=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$，有

$$f(x)+f(\pi-x)=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}$$

从而即得

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$$

此时右侧可方便地看出原函数，直接计算可发现

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=-\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x}=-\arctan\cos x+C$$

可验证其在 $[0,\pi]$ 符合微积分基本定理条件，从而定积分结果为

$$\frac{\pi}{2}(-\arctan\cos\pi+\arctan\cos 0)=\frac{\pi^2}{4}$$

注意上方这些例子中或许并不能直接观察得到对称性，由此遇到定积分**先尝试计算** $f(x)+f(a+b-x)$ **往往是有意义的**。

八　积分与证明

本次习题课将介绍定积分相关的各种证明题与相应的技巧，知识基础为基本的不定积分、定积分计算，与定积分的定义、基本性质。请大家尤其关注我们如何从**题目最难处理的部分**分析出入手方式。

§8.1　作业解答

1. (3.3 节例 1) 计算

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,\mathrm{d}x$$

解答：

分母提取出 x 后求根可因式分解为 $x(x-1)(x-3)$，由于分母次数更高，待定系数可算出

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{x-3}$$

从而原不定积分为

$$-\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-3|+C$$

2. (3.3 节例 2) 计算

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$$

解答：

由于分母次数更高，由分母形式待定系数可算出

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

从而原不定积分为

$$-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C$$

3. (3.3 节例 3) 计算

$$\int \frac{4}{x^3+4x}\,\mathrm{d}x$$

解答：

分母可因式分解为 $x(x^2+4)$，由于 x^2+4 无实根，无法再分解，由于分母次数更高，待定系数可算出

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}$$

从而原不定积分为

$$\ln|x|-\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+4}=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2+4}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$$

4. (3.3 节例 4) 计算

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

解答：

由于分母次数更高，由分母形式待定系数可算出

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2+2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+2}-\frac{2}{(x^2+2)^2}$$

计算可得 (第三部分直接使用了 $\frac{1}{a^2+x^2}$ 的不定积分结论，第四部分利用分部积分或由教材 3.2 节已经计算的递推)

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$$

$$\int\frac{x}{x^2+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2+2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$$

$$\int\frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x&=-\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}\frac{1}{x^2+2}\\&=-\frac{1}{2x(x^2+2)}-\int\frac{1}{2x^2(x^2+2)}\\&=-\frac{1}{2x(x^2+2)}-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2x(x^2+2)}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C\\&=\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C\end{aligned}$$

* 这里第四部分能想到分部积分是由于 $\frac{1}{(x^2+2)^2}$ 应与 $\frac{1}{x^2+2}$ 的导数形式接近，从而向其配凑。注意第一步中分子分母同乘 $2x$ **影响了定义域**，最后一步应通分消去分母上的 x 使得其定义在 $\mathbb{R}$ 上后验证为原函数。不过，本题由于被积函数的定义域要求了 $x\neq 0$，不进行最后一步也无影响。

综合化简即得积分结果为

$$\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{2(x^2+2)}+C$$

5. (3.3 节例 5) 计算

$$\int\frac{x^3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$$

解答：

由于分子次数更高，先分离出整式部分得到

$$\frac{x^3}{x^2+x-2}=x-1+\frac{3x-2}{x^2+x-2}$$

分母可因式分解为 $(x-1)(x+2)$，进一步待定系数可算出

$$\frac{x^3}{x^2+x-2}=x-1+\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{8}{3}\frac{1}{x+2}$$

从而原不定积分为

$$\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{8}{3}\ln|x+2|+C$$

6. (3.3 节例 6) 计算

$$\int\frac{\cot x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x-1}$$

解答：

考虑万能代换

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

由于它需要分子分母同乘 $\frac{2}{1+t^2}$，**一定不会影响定义域**，直接计算可发现上述积分转化为

$$\int \frac{1+t}{2t^2}\mathrm{d}t$$

从而不定积分为

$$-\frac{1}{2t} + \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

代入原式也即

$$-\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

7. (3.3 节例 7) 计算

$$\int \frac{\sin x\cos x\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$$

解答：

由于 $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x$，令 $t = \sin x$ 即得原式为

$$\int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$$

从而不定积分为

$$\frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x) + C$$

8. (3.3 节例 8) 计算

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$$

解答：

仿照**题 116** 的思路，可以配凑得到

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = x + C$$

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \ln|\sin x + \cos x| + C$$

从而两式相加并除以 2 即得原不定积分结果为

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C$$

9. (3.3 节例 9) 计算

$$\int \sin^4 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

解答：

将被积函数看作 $\sin^4 x - \sin^6 x$，由**题 122** 可递推得到

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + C$$

$$\int \sin^4 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$\int \sin^4 x\mathrm{d}x - \int \sin^6 x\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{1}{6}\int \sin^4 x\mathrm{d}x$$

由此联立即得原不定积分为

$$\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{1}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{1}{16}\sin x\cos x + \frac{1}{16}x + C$$

* 教材上的利用**倍角公式**降低方幂次数事实上更具技巧性。

10. (3.3 节例 10) 计算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+\sqrt[3]{3x+2}}$$

解答:

遵循**将难以处理的部分设为整体**的原则，设 $t=\sqrt[3]{3x+2}$，则 $x=\frac{1}{3}(t^3-2)$，由此即化为了有理函数积分

$$\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t^3+t-2}$$

可以看出分母有根 $t=1$，利用待定系数或多项式除法可分解出 $t^3+t-2=(t-1)(t^2+t+2)$，发现第二部分无实根后即可进一步待定系数算出

$$\frac{t^2}{t^3+t-2}=\frac{1}{4}\frac{1}{t-1}+\frac{1}{4}\frac{3t+2}{t^2+t+2}$$

进一步由于 $t^2+t+2=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}$ 与 $\frac{1}{a^2+x^2}$ 积分结论可得

$$\int \frac{1}{t^2+t+2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}$$

而配凑可得

$$\int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+t+2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t+\frac{1}{2})^2}{t^2+t+2}=\frac{1}{2}\ln\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)+C=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+2)+C$$

由此利用

$$\frac{t^2}{t^3+t-2}=\frac{1}{4}\frac{1}{t-1}+\frac{3}{4}\frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+t+2}+\frac{1}{8}\frac{1}{t^2+t+2}$$

组合并代入 $t=\sqrt[3]{3x+2}$ 可得最终结果为

$$\frac{1}{4}\ln|\sqrt[3]{3x+2}-1|+\frac{3}{8}\ln(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+\sqrt[3]{3x+2}+2)+\frac{1}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{7}}+C$$

11. (3.3 节例 11) 计算

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$$

解答:

将 $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 视为整体 t，则 $x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$，由此满足换元条件，换元后可得到原积分化为

$$\int \frac{4t^2(1+t^2)}{(1-t^2)^3}\mathrm{d}t$$

分母可因式分解为 $-(t+1)^3(t-1)^3$，由于分母次数更高，待定系数可得到

$$\frac{4t^2(1+t^2)}{(1-t^2)^3}=\frac{1}{2(t+1)}-\frac{3}{2(t+1)^2}+\frac{1}{(t+1)^3}-\frac{1}{2(t-1)}-\frac{3}{2(t-1)^2}-\frac{1}{(t-1)^3}$$

由此积分可得结果

$$\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{3}{2(t+1)}-\frac{1}{2(t+1)^2}-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{3}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t-1)^2}+C$$

* 注意如果在试卷中直接以此式代入 $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 作为结果是大概率会被扣分的，因为形式**过于复杂**。

为了进行化简，我们先将有无 ln 的部分分别合并得到

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|t+1|}{|t-1|}+\frac{3t^3-t}{(t^2-1)^2}+C$$

含 ln 的部分代入 t 的表达式后进行分母有理化可得

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|t+1|}{|t-1|}=\frac{1}{2}\ln\frac{|\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x+1|}|}{|\sqrt{|x-1|}-\sqrt{|x+1|}|}=\ln\frac{\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{2}}$$

* 注意 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 由于未确定分子分母**正负**，只能拆成 $\frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}}$，不能去掉绝对值。但是，由于定义域内 $x+1$、$x-1$ 必然同号，$||x-1|-|x+1||$ 只能为 2。

将 $\ln\sqrt{2}$ 合并到常数中即得

$$\ln(\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x+1|})+\frac{3t^3-t}{(t^2-1)^2}+C$$

第二部分可进一步化简得

$$\frac{3t^2-1}{(t^2-1)^2}t=\frac{1}{2}(x-2)(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

同样，由于 $x+1$ 正负未定，进一步计算最终得到结果为

$$\ln(\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x+1|})+\frac{\mathrm{sign}(x+1)}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1}+C$$

这里 sign 表示正数为 1、负数为 -1、0 处为 0 的符号函数。

12. (3.4 节例 2) 对整数 $n\geq 2$，计算

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

解答:

类似**题 122**，直接分部得到 (由 $\sin x$ 在 0 处为 0，$\cos x$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处为 0)

$$I_n=-\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}\cos x=\int_0^{\pi/2}\cos x(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,\mathrm{d}x$$

整理即得

$$I_n=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

由此

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

直接计算可知 $I_0=\frac{\pi}{2}$、$I_1=1$，从而递推可知 n 为奇数时

$$I_n=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}$$

n 为偶数时

$$I_n=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

13. (3.4 节例 7) 计算

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

解答:

利用**对称性**结论 (可见本讲义 7.3.3)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b(f(x)+f(a+b-x))\,\mathrm{d}x$$

将 $f(x)$ 取为被积函数，可发现

$$f(x)+f(-x)=\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{\mathrm{e}^x\sin^2 x}{\mathrm{e}^x+1}=\sin^2 x$$

从而原积分即为 (最后这步的计算方式与上题完全相同)

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

14. (3.4 节例 8) 计算

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

解答：

设被积函数为 $f(x)$ 可发现 $f(x)+f(-x)=0$，从而原积分为

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}0\,\mathrm{d}x=0$$

15. (3.4 节例 10) 计算

$$\int_{-2}^{2}(x\sin^4 x+x^3-x^4)\mathrm{d}x$$

解答：

设被积函数为 $f(x)$ 可发现 $f(x)+f(-x)=-2x^4$，从而原积分为

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(-2x^4)\mathrm{d}x=-\frac{64}{5}$$

16. (3.4 节例 12) 计算

$$\int_{\pi/2}^{\pi}|\sin(2x)|\mathrm{d}x$$

解答：

利用三角函数性质可发现 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时 $\sin(2x)\le 0$，从而原积分为

$$-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\cos(2\pi)-\cos\pi)=1$$

* 教材中使用的**拆分周期函数**是本质的证明方法，本章就将介绍，不过计算时未必比直接计算简便。

17. (习题 3.4.17) 计算

$$\int_{0}^{\pi}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\mathrm{d}x$$

解答：

* 注意被积函数 $f(x)$ 有对称性 $f(x)+f(-x)=2\ln a$，但此处区域为 $[0,\pi]$，此对称性无法有效使用。

由于被积函数的**导数**容易计算，直接进行分部积分得到原积分为

$$\pi\ln(\pi+\sqrt{\pi^2+a^2})-\int_0^{\pi}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

进一步配凑并换元 $t=x^2$ 即得

$$\int_0^{\pi}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int_0^{\pi^2}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t+a^2}}=\sqrt{\pi^2+a^2}-|a|$$

从而最终结果为

$$\pi\ln(\pi+\sqrt{\pi^2+a^2})-\sqrt{\pi^2+a^2}+|a|$$

18. (习题 3.4.21) 利用分部积分证明对 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f 有

$$\int_0^x\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$$

解答：

考虑被积函数

$$F(t)=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

由变上限积分导数性质可知其**导数**为 $f(t)$，从而直接整体分部可得左侧为

$$xF(x)-0F(0)-\int_0^x tF'(t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

由于定积分结果为常数，可以将第一个积分中的 s 更换为 t，即得到上式为

$$x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$$

从而得证。

19. (习题 3.4.23) 计算

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

解答：

见**题 135**，结果为 $\frac{\pi^2}{4}$。

§8.2 积分与极限

8.2.1 极限计算

正如本讲义 7.1 第 6 题、第 10 题，积分可以用来估算乃至计算数列极限。我们先做一道颇具技巧性的数列极限练习题：

题 136. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0$$

解答：

由于对阶乘并无很好的处理方法，我们尝试将分子分母都写成 n 项相乘，则有

$$\frac{2^n n!}{n^n}=\frac{(2\cdot 1)(2\cdot 2)\dots(2\cdot n)}{n^n}$$

为了估算此式的分母，我们可以想到利用**基本不等式**得到

$$2k\cdot 2(n+1-k)\le (n+1)^2$$

由此，将分子首尾配对 (可讨论 n 奇偶性，若 n 为奇数会多出 $2\frac{(n+1)}{2}=n+1$ 一项，一定能配出 n 个 $n+1$)，即得到

$$\frac{2^n n!}{n^n}\le\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

但是，右侧极限为 e，无法利用夹逼直接得到 0，因此我们还需要**更好的估算**。

一个重要的想法是，由于 k 很小时，$2k\cdot 2(n+1-k)$ 事实上会比 $(n+1)^n$ **小很多**，我们尝试只放大 $2\cdot 2$ 到 $2(n-1)$ 的乘积，保留首尾两项，即得到 $n\geq 3$ 时有

$$\frac{2^n n!}{n^n}\leq\frac{(n+1)^{n-2}(2\cdot 1)(2n)}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}\frac{4}{n}$$

利用数列极限知识可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}\frac{4}{n}=\mathrm{e}\cdot 0=0$$

从而再由 $\frac{2^n n!}{n^n}\geq 0$ 即可由**夹逼定理**得到极限为 0。

可以看出，这里对 $n!$ 的估算是很具技巧性的放缩，但是，在有了积分后，我们事实上能得到更严格的估算：

题 137. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

并以此证明对 $t\in(0,\mathrm{e})$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^n n!}{n^n}=0$$

解答：

分为四个部分：

- **黎曼和形式**

  由于此式为连乘形式，**取对数**即能得到求和，从而我们尝试取对数，利用对数函数连续性与归结定理，只需证明

  $$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=-1$$

  也即

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k-\ln n=-1$$

  由于这里出现了 $\frac{1}{n}$，我们尝试将其配凑为黎曼和形式，可法现上式等价于要证

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=-1$$

  然而，以黎曼积分定义，上式左侧应当为

  $$\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x$$

  但此积分**不存在**。不过，在**题 112** 中我们已经算出了

  $$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\ln x\,\mathrm{d}x=-1$$

  我们接下来希望利用此极限得到结论。

- **放缩求和**

  由于无法直接使用积分结论，我们尝试对求和进行**放缩**。

  * 以下放缩的过程非常建议大家**结合图像**理解。

由于 $\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}$ 可以看作是 $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ 区间内对常数 $\ln\frac{k}{n}$ 的积分，而由 $\ln x$ 的单调增性质，即得

$$\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}\geq\int_{(k-1)/n}^{k/n}\ln x\mathrm{d}x$$

不过，$k=1$ 时右侧积分不存在，上述估算无法成立，因此，我们只能从 $k=2$ 开始放缩，求和即得到 (这里利用了 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 以化简)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}\geq\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\int_{1/n}^{1}\ln x\mathrm{d}x$$

同理，再次利用 $\ln x$ 的单调增性质可以得到**另一边**的放缩

$$\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}\leq\int_{k/n}^{(k+1)/n}\ln x\mathrm{d}x$$

此放缩可以对 $k=1$ 开始进行，求和得到 (同理合并积分限化简)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}\leq\int_{1/n}^{1+1/n}\ln x\mathrm{d}x$$

综合以上有

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\int_{1/n}^{1}\ln x\mathrm{d}x\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}\leq\int_{1/n}^{1+1/n}\ln x\mathrm{d}x$$

* 这种将常数分别看作**左侧**区间、**右侧**区间积分的方法十分常用。

– **夹逼定理**

利用归结原理可知 (第二式为经典函数极限结论)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1}\ln x\mathrm{d}x=\lim_{t\to0^+}\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x=-1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\int_{1/n}^{1}\ln x\mathrm{d}x=-1$$

而再利用原函数连续性可知

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1}^{1+1/n}\ln x\mathrm{d}x=0$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^{1+1/n}\ln x\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{1/n}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_{1}^{1+1/n}\ln x\mathrm{d}x\right)=-1$$

从而最终利用**夹逼定理**可知原极限为 -1，得证。

– **极限证明**

我们最后用此极限结论证明题干的第二式。

由于已知

$$lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

可得对任何 $0<\delta<\frac{1}{\mathrm{e}}$ (这是为了保证下方区间左侧为正)，存在 N 使得 $n>N$ 时

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\delta,\frac{1}{\mathrm{e}}+\delta\right)$$

同作 n 次方并乘 t^n 可得 $n>N$ 时

$$\frac{t^n n!}{n^n}\in\left(\left(\frac{t}{\mathrm{e}}-\delta t\right)^n,\left(\frac{t}{\mathrm{e}}+\delta t\right)^n\right)$$

由于 $\frac{t}{\mathrm{e}}<1$，可取充分小的 δ 使得 $\frac{t}{\mathrm{e}}+\delta t<1$，这样上方区间左右极限均为 0，由**夹逼定理**得最终结论。

* 注意本部分使用的**基本放缩技巧**。注意极限为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 不能直接把极限计算中其 n 次方替换为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 的 n 次方，这与等价无穷小替换**不同**。

除了用积分估算数列极限以外，关于**积分本身的极限**也是一个重要话题，且这类问题往往方法非常灵活，我们这里展示**变限积分**、**拆分**、**分段**三类一般技巧：

题 138. 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，证明对任何 a、b 有

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

解答：

* 注意即使 f 可导，这题也**不能交换积分与极限**，因为积分本质是一个无穷求和，会面临试图交换无穷求和与极限时相同的严谨性问题。

由于这里最难处理的部分是 $f(x+h)$，我们通过**变量代换** $y=x+h$ 得到

$$\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{a+h}^{b+h}f(y)\mathrm{d}y$$

由于定积分结果为常数，将右侧 y 替换为 x 无影响，从而有

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

此形式可以想到用原函数的性质，设

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

则上式为

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}(F(b+h)-F(a+h)-(F(b)-F(a)))=\lim_{h\to0}\frac{F(b+h)-F(b)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

上述等号是为了将其配凑为**变上限积分的导数**的形式。

利用导数定义可发现右侧即为 $F'(b)-F'(a)$，再利用变上限积分的导数结论即得其为 $f(b)-f(a)$，得证。

题 139. 若 $f(x)$ 以 T 为周期且在 $\mathbb{R}$ 上任何闭区间都可积，证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

解答：

分为两步：

– 由于 f 是一个周期函数，可以想到将积分**拆分到周期上**。不过，0 到 x 未必是完整的周期，我们试着分出完整的周期。

由计算正无穷处极限可不妨设 $x \geq T$，设 $x \in [nT, (n+1)T)$，其中 $n \in \mathbb{N}^*$，则**拆分积分限**得到

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\mathrm{d}T + \int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t$$

将 t 换元为 $t - kT$，再利用周期函数的性质 $f(t - kT) = f(t)$ 有

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t - kT)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

* 这里所谓的换元 x 为 $x - kT$ 实际上是先令 $y = x - kT$ 进行换元，再由定积分结果为常数重新将 y 写为 x。此后我们将直接进行这样的换元。

同理将 t 换元为 $t - nT$，

$$\int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x-nT} f(t - nT)\mathrm{d}t = \int_0^{x-nT} f(t)\mathrm{d}t$$

从而得到

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^{x-nT} f(t)\mathrm{d}t$$

– 在上式两侧同取极限，利用极限的四则运算结论，为了得到最终结果还需证明

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n}{x} = \frac{1}{T}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^{x-nT} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

第一式由 $nT \leq x < (n+1)T$ 可通过夹逼定理直接得到。

对于，第二式利用 f 可积则 $|f|$ 可积，可知

$$\left|\int_0^{x-nT} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{x-nT} |f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^{x-nT} |f(t)|\mathrm{d}t + \int_{x-nT}^T |f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^T |f(t)|\mathrm{d}t$$

最后一个不等号成立是由于 $x - nT \in [0, T)$。由上式得分子有界，再通过 $\frac{1}{x}$ 极限为 0 可得乘积极限为 0，综合得证。

题 140. 计算极限 (这里 0 处 $\frac{\sin x}{x}$ 定义为 1，从而其成为 $[-1, 1]$ 上的**连续函数**)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^1 \frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\right)^{1/n}$$

解答:

– **分析**

设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(f(0) = 1)$，利用三角函数性质可知 $f(x)$ 其在 $[-1, 1]$ 恒正，且最大值在 0 处取到，为 1。此题的极限即要算

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^1 f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}$$

利用积分看成**求和**的思想，我们在数列极限其实做过一道类似的习题，即**题 62** 中 $x \to +\infty$ 的情况。

此题无法用那道题的结论直接得到，因为**无穷求和与极限不能交换**，我们不能将积分写为求和极限后先对 n 取极限。不过，我们仍然可以使用类似的思路。将 a、b 均放大为 $\max\{a,b\}$ 对应本题中将 $f(x)$ 放大为最大值，这是一定可行的，但将除了最大值外的位置缩小为 0 对于积分则是不可行的：只有一点处非零的函数积分仍然是 0。由此，我们需要更好的放缩方式，也就是**分段放缩**。

– **分段放缩**

对于积分的放缩，最常用的方法是将其放缩为**分段常值函数**，因为它的积分是容易计算的。本题中，我们为了保证结果接近最大值，考虑**最大值周边的小区域**。

具体来说，由于已知 $f(0)=1$ 且 f 在 0 处连续，对任何 $0<\varepsilon<1$，存在 $0<\delta<1$ (若根据极限定义取到的 δ 大于 1，将它与 $\frac{1}{2}$ 取 min 即可) 使得 $|x|<\delta$ 时 $f(x)>1-\varepsilon$。又由 $f(x)$ 非负，我们可以将 $[-\delta,\delta]$ 以外的部分缩小为 0，这样就得到

$$\int_{-1}^{1} f^n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\delta}^{\delta} f^n(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{1} f(x)\mathrm{d}x\geq\int_{-\delta}^{\delta} f^n(x)\mathrm{d}x\geq 2\delta(1-\varepsilon)^n$$

由此即得

$$\left(\int_{-1}^{1} f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}\geq\sqrt[n]{2\delta}(1-\varepsilon)$$

当然，将 $f(x)$ 放大为 1 还可以得到

$$\int_{-1}^{1} f^n(x)\mathrm{d}x\leq\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x=2$$

从而综合两边得到对任何 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $\delta\in(0,1)$ 使得

$$\sqrt[n]{2\delta}(1-\varepsilon)\leq\left(\int_{-1}^{1} f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}\leq\sqrt[n]{2}$$

– **夹逼放缩**

必须注意的是，由于**不确定目标极限是否存在**，我们不能在上式两边同取 $n\to\infty$ 得到极限 $\in[1-\varepsilon,1]$。

我们退而求其次：由于已知 $\sqrt[n]{2\delta}$ 与 $\sqrt[n]{2}$ 极限均为 1，我们可以取出 N 使得 $n>N$ 时 $\sqrt[n]{2}<1+2\varepsilon$、$\sqrt[n]{2\delta}>\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}$ (第二式是由于 $\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}<1$，由极限保序性)，从而 $n>N$ 时

$$1-2\varepsilon<\left(\int_{-1}^{1} f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}<1+2\varepsilon$$

也即对任何 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 N 使得 $n>N$ 时

$$\left|\left(\int_{-1}^{1} f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}-1\right|<2\varepsilon$$

利用极限定义即可发现这意味着所求极限为 1。

* 这里虽然由于多了 ε 的不确定项，无法直接用夹逼定理放缩，但放缩思想是完全相同的。

8.2.2 积分中值定理

在之前的原函数相关证明中，我们一直规避了积分中值定理，接下来我们将中值定理出发证明一些**存在性问题**。首先是积分中值定理的一般形式：

题 141. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积且不变号 (恒 ≥ 0 或恒 ≤ 0)，证明存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

解答：

不妨设 $g(x) \geq 0$ 恒成立，对 $g(x) \leq 0$ 的情况可类似证明。由于目前只有**介值定理**可以取出中间点，我们必须把此式放缩到能使用介值定理的形式。

由连续函数**最值定理**，可设 $f(c) = m$ 是区间上的最小值，$f(d) = M$ 是区间上的最大值，则由 $f(x)$ 非负有

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

至此需要分类讨论：

- 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$，上述不等式可说明 $\int_a^b f(x)g(x) = 0$，从而任取 $\xi \in [a,b]$ 均可。
- 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \neq 0$，由非负性可知其大于 0，从而上方不等式可化为

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq M$$

利用介值定理，存在 c、d 之间的 ξ 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

又由于 c、d 都在 $[a,b]$ 中，必然有 $\xi \in [a,b]$，变形即得证明。

* 此定理一般可以直接使用，教材上介绍的是 $g(x) = 1$ 的特殊版本。

此定理最直观的应用即是如介值定理一样解决一些**零点**相关问题：

题 142. 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 连续，且

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$$

证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 中至少有两个零点。

解答：

- **分析**

此题看上去可以直接使用积分中值定理：由于 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 不变号，存在 $\xi \in [0,\pi]$ 使得

$$0 = \int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = f(\xi)\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2f(\xi)$$

但是，此做法甚至无法说明 $\xi \in (0,\pi)$，更不用说找到第二个零点了。

为了说明内部存在零点，一个常用方法是考虑**变号**次数：若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 至少变号一次 (存在为正的点与为负的点)，即能用介值定理说明内部至少存在一个零点了。更进一步，若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 至少变号两次 (也即先后存在正、负、正或负、正、负三个点)，就能通过介值定理说明内部至少存在两个零点。当然，若 f 在某段恒为 0，

– $(0,\pi)$ **上至少一个零点**

若否，利用连续性，$f(x)$ 应在 $[0,\pi]$ 上恒 ≥ 0 或恒 ≤ 0。由于 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上 ≥ 0，可知 $f(x)\sin x$ 不变号，又由其连续，利用**题 109** 可知只能

$$\forall x\in[0,\pi],\quad f(x)\sin x=0$$

于是 $\sin x$ 非零的点均为 $f(x)$ 零点，与至少一个零点矛盾。

– $(0,\pi)$ **上至少两个零点**

上方我们实际上证明了，若 $f(x)\geq 0$ 或 $f(x)\leq 0$，则它只能在 $(0,\pi)$ 上恒为 0 ($\sin x$ 零点为 0 与 π)，这种情况自然至少两个零点。

排除这种情况后，必然存在 $x_1\in[0,\pi]$ 使得 $f(x_1)>0$、存在 $x_2\in[0,\pi]$ 使得 $f(x_2)<0$，利用介值定理可知存在 x_1,x_2 之间的 $\xi\in(0,\pi)$ 使得 $f(\xi)=0$。

我们不妨设 $x_1<x_2$ ($x_1>x_2$ 时证明类似)，若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 中只有 ξ 一个零点，利用介值定理可知 f 无零点的部分同号，从而必然有

$$\forall x\in[0,\xi],\quad f(x)\leq 0;\quad \forall x\in[\xi,\pi],\quad f(x)\geq 0$$

由此，我们可以想到进一步**构造** $g(x)=\sin(x-\xi)$，有

$$\int_0^\pi f(x)g(x)=\cos\xi\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x-\sin\xi\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$$

利用三角函数性质可发现

$$\forall x\in[0,\xi],\quad g(x)\leq 0;\quad \forall x\in[\xi,\pi],\quad g(x)\geq 0$$

从而 $f(x)g(x)$ 非负，再次利用**题 109** 可知只能 $f(x)g(x)=0$ 恒成立，于是 $g(x)$ 非零的点 (由 $\xi\in(0,\pi)$，实际上 ξ 以外所有点都满足此性质) $f(x)$ 必须为 0，与零点唯一矛盾。

* 本题的核心思路是从条件里**组合出与 $f(x)$ 变号情况相同的函数**，再由非负连续函数积分为 0 得到恒为 0 推出矛盾。虽然本题并未直接使用积分中值定理，但实际思想就是积分中值的思想。

题 143. 若 $f(x)$ 以 T 为周期且在 $\mathbb{R}$ 上连续，假设其满足

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$$

证明对任何 $x_0\in\mathbb{R}$，$f(x)$ 在 $[x_0,x_0+T]$ 中至少有两个零点。

解答:

– **周期性质**

我们先证明

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)\mathrm{d}t=0$$

从而根据积分中值定理可知 $[x_0,x_0+T]$ 中至少有一个零点。

由条件，存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $x_0\leq kT\leq x_0+T$，于是

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{kT} f(t)\mathrm{d}t+\int_{kT}^{x_0+T} f(t)\mathrm{d}t$$

为了凑出一个周期，我们在第一式中将 t 换元成 $t-(k-1)T$、第二式中将 t 换元成 $t-kT$ 可得上式为

$$\int_{x_0-(k-1)T}^{T} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{x_0-(k-1)T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$$

– **至少两个零点**

若 $f(x_0)$ 或 $f(x_0+T)=0$，利用**周期性**可得另一点也为 0，从而已经有两个零点；若 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+T]$ 上不变号，由 f 连续与积分为 0 可知 $f(x)$ 恒为 0，从而也已经有两个零点。

接下来设第一部分找到的零点 $\xi\in(x_0,x_0+T)$，且 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+T]$ 中存在大于 0 的点与小于 0 的点。

利用介值定理，f 无零点的部分必然同号，由此，若 f 在 $[x_0,x_0+T]$ 上零点只有 ξ，它或满足

$$\forall x\in[x_0,\xi),\quad f(x)>0;\quad \forall x\in(\xi,x_0+T],\quad f(x)<0$$

或满足

$$\forall x\in[x_0,\xi),\quad f(x)<0;\quad \forall x\in(\xi,x_0+T],\quad f(x)>0$$

无论哪种都能得到 $f(x_0)$ 与 $f(x_0+T)$ 一正一负，但两者相等，矛盾。

不过，它也可以用来进行更复杂的估算，希望大家**仔细阅读**接下来这题的过程，观察它使用的技巧：

题 144. 若 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续，$g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续非负且以 2π 为周期，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x\int_0^{2\pi} g(x)\mathrm{d}x$$

解答：

分为两步：

– 首先，$g(x)$ 的周期性对这题自然有重要的作用，由此我们想到用**周期**进行拆分。不过，直接拆分计算不太方便，我们可以想到先**延长区间**，换元 $t=\frac{x}{n}$ 得到左侧积分为

$$\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\mathrm{d}t$$

将其**按周期拆分**得到其为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\mathrm{d}t$$

为了按周期配凑，我们在上方第 k 项将 t 换元为 $t-2\pi k$，可以让所有的积分都统一到 0 到 2π，得到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{t+2\pi k}{n}\right)g(t)\mathrm{d}t$$

– 可以发现，这个形式事实上有点类似**黎曼和**，从而想到能不能将 $g(t)$ 提出。由非负性，我们可以用**积分中值定理**得到存在 $t_k\in[0,2\pi]$ 使得上式为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{t_k+2\pi k}{n}\right)\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t$$

记 $\xi_k=\frac{t_k+2\pi k}{n}$，可发现 $\xi_k\in[\frac{2\pi k}{n},\frac{2\pi(k+1)}{n}]$，从而它可以看作将 0 到 2π 进行 n 等分后每个区间中取的中间点。

由此，根据 n 等分每个区间长度都为 $\frac{2\pi}{n}$，我们最终将上式改写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t\left(\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\right)$$

括号外的部分为常数，而括号内的部分是一个黎曼和，当 $n\to\infty$ 时区间长度趋于 0，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)=\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

这就得到了证明。

§8.3 等式与不等式

除了极限以外，另一类常出现的积分证明题是等式与不等式相关的证明、估算。等式的证明往往是**计算性**的，而不等式则会相对灵活很多。

8.3.1 等式证明

我们先用以下三个等式证明来熟悉基本的**配凑**技巧，事实上等式证明基本都可以从此技巧得到：

题 145. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续且 $f(x)f(a-x)=1$，若 $f(x)\neq -1$ 恒成立，计算

$$\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\mathrm{d}x$$

解答：

由于条件是关于 $f(x)$ 与 $f(a-x)$，想到利用**对称性**得到

$$\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\mathrm{d}x+\int_0^a \frac{1}{f(a-x)+1}\mathrm{d}x\right)$$

直接代入 $f(a-x)=\frac{1}{f(x)}$ 可得

$$\frac{1}{f(a-x)+1}=\frac{f(x)}{1+f(x)}$$

从而结果即为

$$\frac{1}{2}\int_0^a \frac{1+f(x)}{f(x)+1}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$$

题 146. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，对 $a>1$ 证明

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

解答：

由于 f 中的部分难以处理，我们必须进行换元。在左侧换元 $t=x^2$ (由区间不过 0，此换元可行) 可得

$$\int_1^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{2t}$$

当然，由于此为定积分，我们可以将 t 换回 x 得到

$$\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

此时左右的被积函数 (记为 $g(x)$) 已经完全相同，从而要证式子变为

$$\frac{1}{2}\int_1^{a^2} g(x)\mathrm{d}x = \int_1^a g(x)\mathrm{d}x$$

利用

$$\int_1^{a^2} g(x)\mathrm{d}x = \int_1^a g(x)\mathrm{d}x + \int_a^{a^2} g(x)\mathrm{d}x$$

我们只需证明

$$\int_1^a g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a^2} g(x)\mathrm{d}x$$

想让 $[1,a]$ 成为 $[a,a^2]$，可以考虑左侧将 x 换元为 ax 或将 x 换元为 $\frac{a^2}{x}$。经尝试发现后者更加方便，换元 $s=\frac{a^2}{x}$ 可得

$$\int_1^a g(x)\mathrm{d}x = \int_{a^2}^a g\left(\frac{a^2}{s}\right)\left(-\frac{a^2}{s^2}\right)\mathrm{d}s = \int_a^{a^2} g\left(\frac{a^2}{s}\right)\frac{a^2}{s^2}\mathrm{d}s$$

进一步计算可发现

$$g\left(\frac{a^2}{s}\right)\frac{a^2}{s^2} = f\left(\frac{a^2}{s}+s\right)\frac{s}{a^2}\frac{a^2}{s^2} = f\left(\frac{a^2}{s}+s\right)\frac{1}{s} = g(s)$$

这就得到了

$$\int_1^a g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a^2} g(x)\mathrm{d}x$$

从而原式成立。

* 这题虽然过程相对复杂，但实际做法就是不断**向目标形式配凑**。

题 147. 证明

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = 0$$

解答:

记被积函数

$$F(x) = \int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

利用变上限积分结论可知 $F'(x) = -\frac{\sin x}{x}$，由于其导数容易计算，直接**分部积分**可得原积分为

$$2\pi F(2\pi) - 0F(0) - \int_0^{2\pi} xF'(x)\mathrm{d}x$$

由于 $F(2\pi)=0$，上式即为

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x = 0$$

8.3.2　单调性

接下来我们将介绍不等式问题。首先，我们现在已经可以部分**求导证明单调性**了，例如下面这题：

题 148. 证明对 $x \in [0,1]$ 有

$$\ln(1+x) \le \arctan x$$

解答：

直接计算得 $\ln(1+0) = \arctan 0 = 0$，而根据微积分基本定理可知 $x \in [0,1]$ 时

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t, \quad \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

由于 $t \in [0,1]$ 时 $\frac{1}{1+t} \le \frac{1}{1+t^2}$，右减左，利用非负函数积分非负即有

$$\ln(1+x) \le \arctan x$$

可以发现，当前所学的知识已经足以在**导函数连续**时从导函数 ≥ 0 得到单调增——一般的情况要等到期中后证明。对于单调函数，有如下引理：

题 149. 对实数 a，若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且有界，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

必然存在。

解答：

此形式非常类似数列的单调有界定理，由此想到用数列证明。

不妨设 f 单调增 (单调减可类似证明)，利用 $[x] \le x < [x]+1$ 可得

$$f([x]) \le f(x) \le f([x]+1)$$

设 $a_n = f(n)$，由 f 单调有界可知 a_n 单调有界，从而极限存在，设为 A，由条件可知对任何 ε，存在 N 使得 $n > N$ 时 $|f(n) - A| < \varepsilon$，从而 $x > N+1$ 时利用 $[x] > N$、$[x]+1 > N$ 有

$$A - \varepsilon < f([x]) \le f(x) \le f([x]+1) < A + \varepsilon$$

根据函数极限定义可知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

利用它可以证明一些更复杂的性质：

题 150. 已知 f 在 $[1,+\infty]$ 上连续，且在 $(1,+\infty)$ 上可导，导函数满足

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

存在。

解答：

分两部分证明：

- **单调性**

  由于 $f(x)$ 连续，可知 $\frac{1}{x^2+f^2(x)}$ 连续，从而 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 连续。记 $g(x)=f'(x)$ 补充定义 $g(1)=\frac{1}{1+f^2(1)}$，则 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续，由此对 $y\geq x\geq 1$ 利用微积分基本定理可发现

  $$f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t$$

  由条件可知 $f'(t)>0$，从而积分 ≥ 0，这就说明了 $x\geq 1$ 时 $f(x)$ 单调增。

- **有界性**

  由**题 149**，只需证明 $f(x)$ 有界。而有

  $$f(x)-f(1)=\int_1^x \frac{1}{t^2+f^2(t)}\mathrm{d}t\leq\int_1^x\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=1-\frac{1}{x}<1$$

  再利用单调性可知 $x\geq 1$ 时 $f(x)\in[f(1),f(1)+1)$，这就证明了有界性，从而极限存在。

题 151. 设 (这称为 f 在 $[0,x]$ 的**积分平均**)

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调增连续函数，证明 $F(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调增函数；若 f 在 $+\infty$ 处的极限为 l，证明 F 在 $+\infty$ 处的极限也为 l。

解答：

- **证明单调**

  由于

  $$F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}f(x)$$

  由原函数性质可知其在 $(0,+\infty)$ 上连续。与**题 150** 完全类似，只要说明 $F'(x)\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立即能说明单调增。

  利用 f 的单调增性可知 $t\in[0,x]$ 时 $f(x)\geq f(t)$，从而直接计算可得

  $$F'(x)=\frac{1}{x^2}\left(xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{x^2}\int_0^x(f(x)-f(t))\mathrm{d}t\geq 0$$

  得证 F 单调增。

- **极限为 l**

  由于此形式类似**数列平均极限**结论，我们尝试利用相同的分段放缩方式证明。直接计算可知

  $$F(x)-l=\frac{1}{x}\int_0^x(f(t)-l)\mathrm{d}t$$

  根据定义有

  $$\forall\varepsilon>0,\quad\exists M>0,\quad\forall x>M,\quad|f(x)-l|<\varepsilon$$

则对 $F(x)$，当 $x>M$ 时拆分为 $x<M$ 与 $x>M$ 两段进行积分可得

$$F(x)-l=\frac{1}{x}\int_0^M(f(t)-l)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_M^x(f(t)-l)\mathrm{d}t$$

进一步放缩

$$|F(x)-l|\le\frac{1}{x}\int_0^M|f(t)-l|\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_M^x|f(t)-l|\mathrm{d}t\le\frac{1}{x}\int_0^M|f(t)-l|\mathrm{d}t+\frac{x-M}{x}\varepsilon$$

第二项不会超过 ε，而第一项由于积分为固定值，存在 M_0 使得 $x>M_0$ 时第一项不超过 ε，于是 $x>\max\{M,M_0\}$ 时

$$|F(x)-l|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

由于上述 $\max\{M,M_0\}$ 对任何 $\varepsilon>0$ 都存在，根据定义即得 $F(x)$ 极限为 l。

* 类似**题 55** 直接通过数列平均极限结论也可证明。

对于单调函数，之前介绍的**分段估算**是相对简单的：

题 152. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

解答:

* 仍注意**积分与极限不能交换**。

记 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f(0)=1$、f 非负且 f 在 $[0,1]$ 严格单调减。由于 $f(x)<1$ 的部分在取 n 次方后趋于 0，我们希望能尽量可以想到**分段估算**。考虑图像上一点 $(\varepsilon\in(0,1))$

$$(\varepsilon,\delta),\quad \delta=\frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

我们可以在 $(0,\varepsilon)$ 段把 $f(x)$ 放大为 1，$(\varepsilon,1)$ 段把 $f(x)$ 放大为 δ，即得

$$\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x\le\int_0^\varepsilon 1^n\mathrm{d}x+\int_\varepsilon^1\delta^n\mathrm{d}x=\varepsilon+\delta^n(1-\varepsilon)$$

由于 $\delta<1$，存在 N 使得 $n>N$ 时 $\delta^n<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$，又由 f 非负可知 $n>N$ 时

$$0\le\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x<2\varepsilon$$

对任何 $\varepsilon\in(0,1)$ 都存在上述 N，利用数列极限定义即得所求极限为 0。

8.3.3 抽象函数

最后我们来介绍一些更一般的积分不等式，这些题目往往没有通用的技巧，需要根据函数特点进行研究。例如下方**柯西不等式**的证明与应用：

题 153. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

解答：

* 证明柯西不等式需要使用一个**相对特殊的技巧**，其几乎只在证明柯西不等式时使用，大家了解即可。

考虑

$$\int_a^b (f(x)-\lambda g(x))^2 \mathrm{d}x$$

由定积分性质可知其 ≥ 0，且其为 λ 的二次函数，于是

$$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\lambda^2 - 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

若二次项 $\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = 0$，由 g 连续利用**题 109** 可知 g 恒为 0，从而要证的不等式左右均为 0，成立。

否则，二次项不为 0，由二次函数知识可知须**判别式** ≤ 0 才可能二次函数恒 ≥ 0，而判别式 ≤ 0 即能移项化简为

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

从而要证的不等式成立。

题 154. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且恒正，证明

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

解答：

由 f 连续恒正，利用**题 109** 可知积分大于 0，从而此不等式可写为

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq 1$$

由 $f(x)>0$，利用柯西不等式即得左侧大于等于

$$\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{f(x)}}\sqrt{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2 = 1^2 = 1$$

从而得证。

* 当看到积分乘积时，可以想到向**柯西不等式**配凑。

对于 $|f'(x)|$ 积分 (这事实上称为**全变差**) 相关的估算：

题 155. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且导函数连续，若 $a<b$ 且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \geq 2(M-m)$$

这里 M、m 表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值。

解答：

* 利用微积分基本定理，可以想象 $\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$ 相当于将 f 所有下降的部分拉升后从 a 到 b 升高的高度，这就是**全变差的几何意义**。

由 $|f'(x)|$ 连续性，对其的**最重要估算**在于，对任何 $c<d$ 都有

$$|f(c)-f(d)|=\left|\int_c^d f'(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_c^d |f'(t)|\mathrm{d}t$$

假设 f 在 $[a,b]$ 的最大值在 c_1 取到，最小值在 c_2 取到，由 $f(a)=f(b)=0$ 可知 $M\geq 0$、$m\leq 0$。不妨设 $c_1\leq c_2$ (若 $c_1>c_2$ 证明类似)，则要证的不等式左侧为

$$\int_a^{c_1}|f'(x)|\mathrm{d}x+\int_{c_1}^{c_2}|f'(x)|\mathrm{d}x+\int_{c_2}^{b}|f'(x)|\mathrm{d}x\geq|f(c_1)-f(a)|+|f(c_2)-f(c_1)|+|f(c_2)-f(b)|$$

又由 $M\geq 0$、$m\leq 0$、$f(a)=f(b)=0$ 即得右侧为

$$M+(M-m)+(-m)=2M-2m$$

从而得证。

* 类似可以证明，去掉 $f(a)=f(b)=0$ 条件后全变差将至少为 $M-m$。

微分方程定性理论中常用的 **Gronwall 不等式**：

题 156 (附加). 已知定义在 $[0,+\infty)$ 连续**非负**的函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足

$$f(x)\leq A+\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

其中 $A\geq 0$，证明

$$f(x)\leq A\exp\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)$$

解答：

若 f 连续可导，这题可以比较方便地用导数估算，但此处只有**连续性**条件，处理起来就更具技巧性。分为两步：

- 方便起见，我们记

$$G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

我们要证明 $f(x)\leq A\mathrm{e}^{G(x)}$，由于想要制造出 $\mathrm{e}^{G(x)}$，我们考虑

$$h(x)=\frac{Af(x)}{\mathrm{e}^{G(x)}}$$

则要证 $h(x)\leq 1$，而条件可化为

$$h(x)\mathrm{e}^{G(x)}\leq 1+\int_0^x h(t)\mathrm{e}^{G(t)}g(t)\mathrm{d}t$$

利用变上限积分的导数结论可发现 $\mathrm{e}^{G(t)}g(t)=(\mathrm{e}^{G(t)})'$，从而 $\mathrm{e}^{G(t)}g(t)$ 的积分易于算出，又由非负性条件，想到**积分中值定理**可得存在 $\xi\in[0,x]$ 使得

$$h(x)\mathrm{e}^{G(x)}\leq 1+h(\xi)\int_0^x\mathrm{e}^{G(t)}g(t)\mathrm{d}t=1+h(\xi)\big(\mathrm{e}^{G(x)}-\mathrm{e}^{G(0)}\big)=1+h(\xi)\big(\mathrm{e}^{G(x)}-1\big)$$

- 由连续性，对任何区间 $[0,M]$，$h(x)$ 在其上存在**最大值**，假设在 x_0 处取到，我们下面证明 $h(x_0)\leq 1$，这就得到了结论。

对 x_0 取出对应的 $\xi_0 \in [0, x_0]$ 有

$$h(x_0)\mathrm{e}^{G(x_0)} \leq 1 + h(\xi_0)\big(\mathrm{e}^{G(x_0)} - 1\big)$$

由 $g(x_0)$ 非负可知 $G(x_0)$ 非负。若其为 0 则可直接推出 $h(x_0) \leq 1$，已经得证，否则其为正，可化简得到

$$h(\xi_0) \geq \frac{h(x_0)\mathrm{e}^{G(x_0)} - 1}{\mathrm{e}^{G(x_0)} - 1}$$

若 $h(x_0) > 1$，可发现

$$h(\xi_0) > \frac{h(x_0)\mathrm{e}^{G(x_0)} - h(x_0)}{\mathrm{e}^{G(x_0)} - 1} = h(x_0)$$

与 x_0 是 $[0, M]$ 上最大值矛盾，这就证明了结论。

* 证明闭区间上连续函数的界只需证明其**最值点**的界。

还有 **Opial 不等式**:

题 157 (**附加**). 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且导函数连续，且 $f(0) = 0$，证明对 $a \geq 0$ 有

$$\int_0^a |f(x)f'(x)| \mathrm{d}x \leq \frac{a}{2}\int_0^a |f'(x)|^2 \mathrm{d}x$$

解答:

– **初步化简**

由于大部分量都只与 $|f'(x)|$ 相关，我们记 $g(x) = |f'(x)|$，则其连续，且除了 $f(x)$ 外的量都只与 $g(x)$ 相关。进一步地，为处理 $f(x)$，根据 $f(0) = 0$ 利用微积分基本定理可知

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

从而只要证明了

$$\int_0^a g(x)\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leq \frac{a}{2}\int_0^a g^2(x)\mathrm{d}x$$

即能由

$$\int_0^a |f(x)f'(x)| \mathrm{d}x \leq \int_0^a g(x)\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

得到结论。

* 想到将 $f(x)$ 放大到 $|f'(x)|$ 的积分是因为其他所有项都与 $f'(x)$ 的正负性无关，而其不变号能使左侧的 $|f(x)|$ 尽量大，从而使左侧尽量大。

– **结论证明**

记

$$G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

则由微积分基本定理 $G'(x) = g(x)$，由此想到利用**分部积分**得到左侧的

$$\int_0^a g(x)G(x)\mathrm{d}x = \int_0^a G(x)\mathrm{d}G(x) = G^2(a) - G^2(0) - \int_0^a G(x)g(x)\mathrm{d}x$$

从而再由 $G(0) = 0$ 即得

$$\int_0^a g(x)G(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}G^2(a) = \frac{1}{2}\left(\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

利用**柯西不等式**即得

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^a 1^2\mathrm{d}x\int_0^a g^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int_0^a g^2(x)\mathrm{d}x$$

这就完成了证明。

* 柯西不等式中将 $f(x)$ 取为 1 也是常用的估算方式。

九 期中复习

本次习题课为期中复习课。与线性代数不同，高等数学并没有那么多零碎的知识点，但对于看起来类似的题目也可能需要用到完全不同的**技巧**进行处理。本次课没有讲解，只有按照**题型**进行分类的题目，以避免过早揭示所用的技巧。请大家特别关注如何从题目特征**确定处理方向**的过程。

§9.1 作业解答

* 这段作业解答恰好是**定积分计算几何量**，由于高等数学 A 课程往年期中并未考过，我们不在之后进行整理，但仍然建议记忆基本公式 (**参数曲线的弧长、截面积计算体积、参数方程的旋转体侧面积、极坐标下的面积**)。

1. (3.5 节例 1) 在 Oxy 平面上有一半径为 R 的圆盘，其边缘上固定一点 A。开始时点 A 与原点重合，且圆盘中心位于 $(0,R)$。当圆盘沿 x 轴正方向无滑动滚动时，点 A 的运动轨迹称**旋轮线**。求圆盘滚动一圈时点 A 运动的距离。

解答：

当圆盘滚动角度为 θ 时，由无滑动滚动定义应前进了 $R\theta$，从而圆心 $(R\theta,R)$。再结合点 A 相对圆心顺时针旋转了 θ (注意初始在正下方) 即得点 A 轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\theta - R\sin\theta \\ y = R - R\cos\theta \end{cases}$$

转一圈对应 $\theta\in[0,2\pi]$，利用弧长公式可知弧长为

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta = R\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

利用二倍角公式有

$$\sqrt{2-2\cos\theta} = \sqrt{2-2(1-2\sin^2(\theta/2))} = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

从而换元 $t=\frac{\theta}{2}$ 即得积分为

$$4R\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t = 4R\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = 8R$$

2. (习题 3.5.4) 给定 $a>0$，求 $y=0$ 与

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases},\quad t\in[0,2\pi]$$

围成的面积。

解答：

由于此即为半径为 a 的圆盘对应的一个周期内的旋轮线，要计算其下方的面积即要计算

$$\int_0^{2\pi a} y(x)\,\mathrm{d}x$$

由参数方程形式，换元 $x=x(t)$，利用 t 范围 $[0,2\pi]$ 即得其事实上为

$$\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$$

直接计算

$$\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos t\mathrm{d}t = 0$$

利用分部积分得

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos t\mathrm{d}\sin t = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\mathrm{d}t$$

从而再由 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ 可知

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\mathrm{d}t = \pi$$

综合以上即得结果为

$$a^2(2\pi - 2\cdot 0 + \pi) = 3\pi a^2$$

3. (习题 3.5.16) 求曲线

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

在 $x = 1$ 到 $x = 3$ 之间部分的弧长

解答:

由弧长公式可知弧长为

$$\int_1^3 \sqrt{(y'(x))^2 + 1}\mathrm{d}x = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2 + 1}\mathrm{d}x$$

直接配方可发现根号中事实上为 $(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2})^2$，从而此积分即为

$$\int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{3^3}{6} - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1^3}{6} + \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{14}{3}$$

4. (习题 3.5.18) 给定 $a > 0$，求星形线

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

的全长。

解答:

由于 x 与 y 对 t 的**最小正周期**均为 2π，参数范围应考虑一个周期 $[0, 2\pi]$。由此，利用弧长公式即得所求全长为

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t = a\int_0^{2\pi} \sqrt{9(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)}\mathrm{d}t$$

利用三角函数性质可将其直接化简为

$$\sqrt{3}a\int_0^{2\pi} |\sin t\cos t|\mathrm{d}t = \frac{3}{2}a\int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\mathrm{d}t$$

换元 $s = 2t$ 得到其为

$$\frac{3}{4}a\int_0^{4\pi} |\sin s|\mathrm{d}s$$

由于 $|\sin s|$ 周期为 π，直接计算得其在 0 到 π 上积分为 2，从而四个周期上积分应为 8 (可见教材 3.4 节命题 2)，因此最终结果为 $6a$。

5. (习题 3.5.19) 给定 $a > 0$ 求心形线

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

的全长。

解答:

由极坐标定义写出参数方程

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

由极坐标方程形式，当 $\theta \in [0, 2\pi]$ 时恒有 $r > 0$，从而**有效的参数范围**是 $\theta \in [0, 2\pi]$。利用弧长公式即得所求全长为

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

由二倍角公式 $\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1$，从而积分化为

$$2a\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta$$

换元 $t = \frac{\theta}{2}$ 即得其为

$$4a\int_0^{\pi} |\cos\theta|\mathrm{d}\theta$$

分段 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 与 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 可最终算出结果为 $8a$。

* 建议**只记忆参数方程弧长公式**，其他都容易直接推得。

6. (3.5 节例 3) 考虑椭圆周

$$4(x-4)^2 + 9y^2 = 9$$

围成的区域 D，求 D 绕以下直线旋转一周形成的旋转体体积：

(1) x 轴；

解答：

由定义可发现椭圆与 x 轴**对每个有意义的 x 有交点**。计算可将方程化为

$$y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{9-4(x-4)^2}$$

从而 x 的范围是 $[\frac{5}{2}, \frac{11}{2}]$，且对每个 x，两侧的 y 等长，从而截面积为 $\pi y^2(x)$ (这里 y 取正负无影响)，体积为

$$\int_{5/2}^{11/2} \pi y^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{9}\int_{5/2}^{11/2} (9-4(x-4)^2)\mathrm{d}x = 2\pi$$

(2) y 轴；

解答：

由定义可以发现椭圆与 y 轴**无交点**。计算可将方程化为

$$x = 4 \pm \frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}$$

从而 y 的范围是 $[-1, 1]$，且对每个 y，对应的旋转体截面为一个圆环，面积是

$$\pi\left(4+\frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 - \pi\left(4+\frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 = 24\pi\sqrt{1-y^2}$$

由此即得体积为

$$\int_{-1}^{1} 24\pi\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y = 12\pi^2$$

最后一步将 y 换元成 $\sin\theta$ 可得到，或直接将 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$ 视为单位圆上半部分的面积。

(3) 直线 $x=1$；

解答：

由定义可发现椭圆与 $x=1$ **无交点**，仍然利用

$$x=4\pm\frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}$$

将其改造成

$$x-1=3\pm\frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}$$

从而 y 的范围是 $[-1,1]$，且对每个 y，对应的旋转体截面为一个圆环，面积是

$$\pi\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right)^2-\pi\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right)^2=18\pi\sqrt{1-y^2}$$

由此即得体积为

$$\int_{-1}^{1}18\pi\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=9\pi^2$$

7. (3.5 节例 4) 空间中一个物体 Ω 放在 Oxy 平面上，其底座所占的区域是 $y=\sin x, x\in[0,\pi]$ 和 x 轴围成的图形，垂直于 x 轴的横截面都是等边三角形，求 Ω 的体积。

解答：

利用几何关系可发现边长 a 的等边三角形面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，从而对给定的 x 截面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x$，这就可以得到体积为

$$\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x\mathrm{d}x$$

与本部分第 2 题完全类似可知

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

从而最终结果为 $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$。

8. (3.5 节例 5) 求抛物线段

$$y^2=4(4-x),\quad x\in\left[-1,\frac{7}{2}\right]$$

绕 x 轴旋转一周所形成曲面的面积。

解答：

由于 $y=2\sqrt{4-x}$、$y=-2\sqrt{4-x}$ 关于 x 轴对称，相当于只需考虑 $y=2\sqrt{4-x}$ 旋转一周的情况。利用侧面积公式即得所求面积为

$$2\pi\int_{-1}^{7/2}y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x=4\pi\int_{-1}^{7/2}\sqrt{5-x}\mathrm{d}x=14\sqrt{6}\pi$$

最后一步直接由 $\sqrt{5-x}$ 的一个原函数为 $-\frac{2}{3}(5-x)^{3/2}$ 得到。

9. (3.5 节例 6) 求圆周 $x^2+(y-h)^2=r^2$ $(h>r>0)$ 绕 x 轴旋转一周形成的圆环面面积。

解答：

此曲线可以由参数方程

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=h+r\sin\theta\end{cases}$$

表示，其中 $\theta\in[0,2\pi]$，由侧面积公式即得所求面积为

$$2\pi\int_0^{2\pi}y(\theta)\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^{2\pi}(h+r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta=4\pi^2hr$$

* 同样，侧面积也只建议记忆**参数方程**形式的公式。

10. (3.5 节例 7) 给定 $a>0$，求三叶玫瑰线 $r=a\sin(3\theta)$ 围成的面积。

解答：

* 务必注意**极坐标方程的实际参数范围需要 r 非负。**

利用三角函数的性质可知当 $\theta\in[0,2\pi]$ 时，$r\geq 0$ 当且仅当

$$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$$

从而由极坐标面积公式可知面积为

$$\frac{1}{2}a^2\left(\int_0^{\pi/3}\sin^2(3\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{2\pi/3}^{\pi}\sin^2(3\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{4\pi/3}^{5\pi/3}\sin^2(3\theta)\mathrm{d}\theta\right)$$

利用周期性可将此积分化为

$$\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/3}\sin^2(3\theta)\mathrm{d}\theta$$

再换元 $t=3\theta$ 得到其为

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2\pi}{4}$$

最后一步已在本部分第 7 题计算过。

11. (习题 3.5.8) 给定 $a>0$，求双扭线

$$r^2=a^2\cos(2\theta)$$

围成的面积。

解答：

利用三角函数的性质可知 $\theta\in[0,2\pi]$ 时，$\cos(2\theta)\geq 0$ 当且仅当

$$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$$

由极坐标面积公式可知面积为

$$\frac{1}{2}a^2\left(\int_0^{\pi/4}\cos(2\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\cos(2\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{7\pi/4}^{2\pi}\cos(2\theta)\mathrm{d}\theta\right)$$

直接计算可知结果为

$$\frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)=a^2$$

12. (习题 3.5.9(2)) 求 $y=\mathrm{e}^x-1$、$x=\ln 3$、$y=0$ 围成的图形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体体积。

解答：

可以发现 x 的范围是 $[0,\ln 3]$，且对每个 x，旋转体截面积为

$$\pi y^2=\pi(\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1)$$

从而所求体积为

$$\int_0^{\ln 3}\pi(\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1)=\pi\left(\frac{1}{2}3^2-2\cdot 3+\ln 3-\frac{1}{2}1^2+2\cdot 1+0\right)=\pi\ln 3$$

13. (习题 3.5.23) 给定 $0<h<a$，计算圆弧

$$x^2+y^2=a^2,\quad y\in[a-h,a]$$

绕 y 轴旋转一周所得球冠的面积。

解答：

由 $x=\pm\sqrt{a^2-y^2}$，利用对称性，此球冠实际上相当于 $x=\sqrt{a^2-y^2}$ 在此范围内绕 y 轴旋转一周，从而利用侧面积公式即得所求面积为

$$2\pi\int_{a-h}^{a}x(y)\sqrt{(x'(y))^2+1}\mathrm{d}y=2\pi\int_{a-h}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-y^2}}\mathrm{d}y=2\pi ha$$

14. (习题 3.5.24) 给定 $a>0$，求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转一周所得曲面的面积。

解答：

将其写为参数方程

$$\begin{cases}x=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$$

可发现 $x(\theta)=x(2\pi-\theta)$、$y(\theta)=-y(2\pi-\theta)$，从而此曲线关于极轴对称，所得曲面相当于 $\theta\in[0,\pi]$ 部分绕极轴旋转一周，从而利用侧面积公式即得所求面积为

$$2\pi\int_0^{\pi}y(\theta)\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta=4\pi a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta$$

这里的化简过程见本部分第 4 题。由于范围内 $\cos\frac{\theta}{2}\geq 0$，可以去掉绝对值，进一步换元 $t=\frac{\theta}{2}$ 得到面积为

$$8\pi a^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2t))\sin(2t)\cos t\mathrm{d}t$$

进一步展开得到

$$32\pi a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin t\mathrm{d}t$$

从而将 $\sin t\mathrm{d}t$ 写成 $-\mathrm{d}\cos t$ 即得总面积为

$$\frac{32}{5}\pi a^2$$

* 注意计算旋转体侧面积时很有可能出现**由于对称性需要计算一半**的情况。

15. (习题 3.5.32) 水闸门的边界线为抛物线，沿水平面宽度为 48m，最低点在水平面下 64m 处，求水对闸门的压力。

解答：

以下省略单位 m。以水平面中心为原点，水平方向为 x 轴，则对应抛物线方程为

$$y=\frac{1}{9}x^2-64$$

也即

$$x=\pm 3\sqrt{y+64}$$

利用压强公式可知 $p=\rho g(-y)$ (g 为重力加速度，ρ 为水的密度)，从而给定的 y 处压强对直线的累计为

$$(3\sqrt{y+64}-(-3)\sqrt{y+64})\rho g(-y)$$

由此再对 y 积分即得最终压力结果 (换元 $t=\sqrt{64+y}$)

$$\int_{-64}^{0}\rho g(-y)6\sqrt{y+64}\mathrm{d}y=6\rho g\int_{0}^{8}(64-t^2)t(2t)\mathrm{d}t=\frac{262144}{5}\rho g$$

* 这里“对直线的累计”实际上是不严谨的，本题理应利用**重积分**，我们将在下学期学到。

* 考试不会出物理题，请放心。

§9.2 数列

9.2.1 极限计算

直接计算极限

题 158. 计算

$$\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi\sqrt{n^2+1})|$$

解答：

由于 $n\to\infty$ 时 $\sqrt{n^2+1}$ 应接近 n，而 $|\cos(n\pi)|=1$，可猜测极限为 1，接下来进行证明。

由于 $|\cos(x+\pi)|=|\cos x|$，有

$$|\cos(\pi\sqrt{n^2+1})|=|\cos(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)|$$

利用**分子有理化**进一步化为

$$\left|\cos\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|$$

由此利用归结原理与余弦函数、绝对值函数连续性可知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\cos\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|=\lim_{x\to+\infty}\left|\cos\frac{\pi}{\sqrt{x^2+1}+x}\right|=|\cos 0|=1$$

* 这里我们跳过了 $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$ 的证明过程，这类简单的估算在考试时一般可以直接使用，无需再放大到 $\frac{\pi}{2x}$ 详细说明。

题 159. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\dots\cos\frac{1}{2^n}$$

解答：

* 事实上对连乘的常用处理方法是**取对数**化为求和。但尝试可发现本题取对数并不容易处理，从而需要思考从乘积本身入手的方式。

由于这里的形式出现了 $\cos x$、$\cos(2x)$、$\cos(4x)$，可以想到利用 $\sin x\neq 0$ 时

$$\cos x=\frac{\sin(2x)}{2\sin x}$$

由此即得

$$\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\dots\cos\frac{1}{2^n}=\frac{\sin 1}{2\sin\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{4}}\dots\frac{\sin\frac{1}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{1}{2^n}}=\frac{\sin 1}{2^n\sin\frac{1}{2^n}}$$

为了进一步计算极限，将难以计算的 sin 中内容看成整体，可通过归结原理得到 (考虑换元 $t=2^{-x}$，则 $x\to+\infty$ 时 $t\to 0^+$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1}{2^n\sin\frac{1}{2^n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 1}{2^x\sin\frac{1}{2^x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin 1}{\frac{1}{t}\sin t}=\sin 1$$

* 注意对**归结原理**的灵活运用：将 $n\to\infty$ 的数列极限转化为 $x\to+\infty$ 的函数极限后，我们即可以使用连续性与等价无穷小等工具进行操作。不过，并不是所有数列极限都可以如此算出，化简到何种形式后可以转化是需要一定经验的。

求和极限的计算

题 160. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)$$

解答：

我们提供两种方法：

– **直接看成黎曼和**

直接估算可发现 $\frac{1}{kn^k}\in(0,\frac{1}{n}]$，从而有

$$\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$$

它是将 $[0,1]$ 等分为 n 个区间后在第 k 个区间中取点得到的关于 $\cos x$ 的估算，从而原式为 $\cos x$ 在区间 $[0,1]$ 上的黎曼和，且当 $n\to\infty$ 时区间长度 $\frac{1}{n}$ 趋于 0，因此由 $\cos x$ 的可积性与**定积分定义**结果即为

$$\int_0^1\cos x\,\mathrm{d}x=\sin 1$$

– **作差估算**

利用 $\cos x$ 的可积性与定积分定义，我们可以得到如下每个区间取右端点的黎曼和极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}=\int_0^1\cos x\,\mathrm{d}x=\sin 1$$

由此，我们只需要估算

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)-\cos\frac{k}{n}\right)$$

利用三角函数的性质 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$，将 x、y 都加 $\frac{\pi}{2}$ 可发现对 $\cos$ 也成立，从而

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)-\cos\frac{k}{n}\right)\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)-\cos\frac{k}{n}\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn^k}$$

由于求和中每一项都不超过 $\frac{1}{n}$，我们可以得到

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)-\cos\frac{k}{n}\right)\right|\le\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

于是由夹逼定理左侧极限为 0，最终算出原极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)-\cos\frac{k}{n}\right)=\sin 1+0=\sin 1$$

* 本题虽然第一种方法要显著简单，但第二种方法是**更具一般性**的。

题 161. 计算
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{1}{2}\ln n\right)$$

解答:

从原式的形式中，我们可以尝试配凑出黎曼和
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

直接计算可以发现
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k(\ln(n+k)-\ln n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)-\frac{1+\cdots+n}{n^2}\ln n$$

由于上方第二项为 $\frac{n+1}{2n}\ln n$，原式可以写为
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{\ln n}{2n}$$

利用数列极限的阶估算结论 (可见**题 11**)，上方第二项极限为 0，从而通过 $x\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 可积，由**定积分定义**得到原极限为 (第二个等号利用了分部积分)
$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x^2\\&=\frac{1}{2}\left(\ln 2-0-\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

题 162. 已知定义在 $[-1,1]$ 上的函数 f 满足 $f'(0)$ 存在，计算
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)$$

解答:

– **导数估算**

  * 本题最重要的观察是，即使 k 取到最大的 n，$\frac{k}{n^2}$ 在 $n\to\infty$ 也趋于 0，因此可以使用**导数的近似性质**。

  根据导数定义可知
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

  也即对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $0<|x|<\delta$ 时
$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right|<\varepsilon$$

变形并讨论 0 处即得 $|x|<\delta$ 时均有

$$|f(x)-f(0)-xf'(0)|<\varepsilon|x|$$

– **作差放缩**

由于 $f(x)-f(0)$ 应与 $xf'(0)$ 十分接近，我们先考虑

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)-\frac{k}{n^2}f'(0)\right)$$

对任何 $\varepsilon>0$，取出上一部分证明中的 δ，设 N 使得 $N>\frac{1}{\delta}$，则 $n>N$ 时所有 $\frac{k}{n^2}\leq\frac{1}{n}<\delta$，于是

$$|x_n|\leq\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)-\frac{k}{n^2}f'(0)\right|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{n+1}{2n}\varepsilon\leq\varepsilon$$

这样我们就从定义证明了 x_n 极限为 0。

– **极限结论**

最后，计算可发现

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}f'(0)=\frac{1}{2}f'(0)$$

于是原极限为

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)\right)=\frac{1}{2}f'(0)$$

* 证明**累计误差可控**是计算求和极限的本质手段，这里是通过导数的性质进行了证明。**题 82** 使用了类似的技巧。

题 163. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+k)^3}$$

解答:

提供两种思路:

– **黎曼和配凑**

我们希望将其配凑成黎曼和的形式，从而计算得其可化为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{(1+k/n)^3}$$

利用 $\frac{x}{(1+x)^3}$ 在 $[0,1]$ 的可积性与定积分定义可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{(1+k/n)^3}=\int_0^1\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$$

而原极限为上式乘 $\frac{1}{n}$ 后的极限，由乘积极限结论即得原极限为 0。

– **直接放缩**

* 利用**阶估算**的想法，分母为三阶，而求和中单个 k 至多一阶，求和后仍至多二阶，极限必然为 0。

直接放缩可知

$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+k)^3}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^3}=n\cdot\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n}$$

从而由夹逼定理得所求极限为 0。

* 由此，并不是看到求和极限一定要利用黎曼和计算，**适当放缩**也可能成为好的思路，常见放缩方式如将分母全放为第一项/最后一项的分母。

迭代数列的极限

* 对基本方法的讨论可见本讲义 5.1.2，一般流程是**证明极限存在后同取极限**。在未知极限时，极限存在性往往归于**单调有界**。

题 164. 设 $0<b_1<a_1$，且

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

证明以下两极限存在且相等：

$$\lim_{n\to\infty}a_n,\quad \lim_{n\to\infty}b_n$$

解答：

首先，根据 $0<b_1<a_1$，归纳可得 a_n、b_n 均为正。利用基本不等式可得对任何 $n\ge 2$ 有 $a_n\ge b_n$，再结合条件可知 $a_n\ge b_n$ 恒成立。

* 一些较简单的性质可以无需详细证明，如本题中的 a_n、b_n 恒正。

由此，进一步估算有

$$a_{n+1}\le\frac{a_n+a_n}{2}=a_n,\quad b_{n+1}\ge\sqrt{b_n^2}=b_n$$

也即 a_n 单调减、b_n 单调增，由 $a_n\ge b_n$ 又可以得到

$$b_1\le b_n\le a_n\le a_1$$

从而 a_n、b_n 均以 $[b_1,a_1]$ 为界，极限存在。

最后说明两数列极限相等。设 a_n 极限为 a，b_n 极限为 b，在第一个递推式两侧同取极限可知

$$a=\frac{a+b}{2}$$

这就证明了 $a=b$。

题 165. 设 $x_1>0$，且

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$$

证明极限存在并计算

$$\lim_{n\to\infty}x_n$$

解答：

* 本题的思路来自**尝试取不同初值计算几项**后发现 x_n 从第二项开始单调递减，从而可向这个目标证明。

首先，由 $x_1>0$ 可归纳得出 x_n 恒正，根据基本不等式可知当 $n\geq 2$ 时有

$$x_n\geq\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{1}{x_{n-1}}}=1$$

而另一方面 $x_n\geq 1$ 时有

$$x_{n+1}\leq\frac{1}{2}\left(x_n+1\right)\leq\frac{1}{2}(x_n+x_n)=x_n$$

从而数列 x_n 从第二项开始单调递减，于是对 $n\geq 2$ 有 $1\leq x_n\leq x_2$。

由数列极限定义**删去有限项不影响数列极限**，而 x_n 删去第一项后由单调有界可知极限存在，从而 x_n 极限存在。

* 这类小结论在过程中同样可以直接使用。

设 x_n 极限为 x，递推式两侧同取极限得到

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

解得 $x=\pm 1$，又由 $x_n>0$ 恒成立可知极限非负，从而极限为 1。

9.2.2 极限证明

存在性问题

* 存在性问题的一些处理技巧可见本讲义 2.3.1。

题 166. 证明或否定：存在数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad\lim_{n\to\infty}a_n^n=1.001$$

解答:

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

而 n 次方内极限为 1，从直觉上应存在这样的 a_n。事实上直接由 e 构造即可。对 $c>0$，设

$$a_n=1+\frac{c}{n}$$

则第一式已经满足，而利用归结定理计算可发现

$$\lim_{n\to\infty}a_n^n=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{c}{x}\right)^{x/c}\right)^c$$

换元 $t=\frac{x}{c}$ 进一步得到极限为

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^c=\mathrm{e}^c$$

最后一步利用了幂函数 $f(s)=s^c$ 的连续性。由此，取 $c=\ln 1.001$ 即符合要求，这样的数列的确**存在**。

题 167. 证明或否定：对 $f(x)=x\ln x$，存在数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\mathrm{e}^n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}(f(a_n)-f(\mathrm{e}^n))\neq 0$$

解答:

- **分析与构造**

  我们不妨设 $b_n=a_n-\mathrm{e}^n$，则条件变为 b_n 极限为 0，我们需要判断是否能使得

  $$\lim_{n\to\infty}(f(b_n+\mathrm{e}^n)-f(\mathrm{e}^n))\neq 0$$

  * 由于 $n\to\infty$ 时 e^n 很大、b_n 很小，利用导数的近似性质应有 $f(b_n+\mathrm{e}^n)-f(\mathrm{e}^n)\approx b_nf'(\mathrm{e}^n)=(n+1)b_n$，由此可以进一步**尝试**。

  我们取 $b_n=\frac{1}{n}$，下面证明

  $$\lim_{n\to\infty}(f(b_n+\mathrm{e}^n)-f(\mathrm{e}^n))\neq 0$$

  于是这样的数列的确**存在**。

- **极限证明**

  将要算的极限展开为

  $$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}+\mathrm{e}^n\right)\ln\left(\frac{1}{n}+\mathrm{e}^n\right)-n\mathrm{e}^n\right)$$

  直接将 $n\mathrm{e}^n$ 合并到前一部分可发现

  $$\left(\frac{1}{n}+\mathrm{e}^n\right)\ln\left(\frac{1}{n}+\mathrm{e}^n\right)-n\mathrm{e}^n=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}+\mathrm{e}^n\right)+\mathrm{e}^n\ln\left(1+\frac{1}{n\mathrm{e}^n}\right)$$

  进一步写为

  $$\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}+\mathrm{e}^n}+\mathrm{e}^n\ln\left(1+\frac{1}{n\mathrm{e}^n}\right)$$

  由于

  $$\mathrm{e}^n<\mathrm{e}^n+\frac{1}{n}<2\mathrm{e}^n$$

  利用夹逼定理即得求和的第一部分极限为 $\ln\mathrm{e}=1$，而通过**归结原理**与等价无穷小替换 $\ln(1+t)\sim t$ 即可知

  $$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^n\ln\left(1+\frac{1}{n\mathrm{e}^n}\right)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\ln\left(1+\frac{1}{x\mathrm{e}^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x}=0$$

  * 注意这里的替换本质都是依赖**函数极限**。

  综合以上得到

  $$\lim_{n\to\infty}(f(b_n+\mathrm{e}^n)-f(\mathrm{e}^n))=1\neq 0$$

  这就得到了证明。

题 168. 证明或否定：若存在 $l\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=l$$

则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

解答：

此结论**正确**。记 $S_n=\sum_{k=1}^n a_k$，则有

$$a_n=S_{n+1}-S_n$$

利用数列极限定义可发现

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n=l$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}-\lim_{n\to\infty}S_n=0$$

* 本题需要注意利用 $a_n=S_{n+1}-S_n$ 的性质，此拆分对**数列平均极限**的应用也有重要作用 (可参考**题 55**)。

* 这类问题务必**清晰写出结论**，哪怕只是猜到答案也会有答案分。

从定义证明数列极限

题 169. 对 $\lambda\in(0,1)$ 与极限为 a 的数列 a_n，证明

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2a_{n-2}+\cdots+\lambda^na_0)=\frac{a}{1-\lambda}$$

解答：

– **问题简化**

首先，由 $\lambda\in(0,1)$ 利用等比数列求和公式可发现

$$\lim_{n\to\infty}(a+a\lambda+\cdots+a\lambda^n)=\frac{a}{1-\lambda}$$

由此只需证明

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-a+\lambda(a_{n-1}-a)+\lambda^2(a_{n-2}-a)+\cdots+\lambda^n(a_0-a))=0$$

即可从和的极限是极限的和得到结论。由此记 $b_n=a_n-a$，则 b_n 极限为 0，命题变为要证

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n+\lambda b_{n-1}+\lambda^2b_{n-2}+\cdots+\lambda^nb_0)=0$$

* 这种将未知极限的数列“平移”至 0 处以**减少未知数**的手段是常用的。

– **分段放缩**

观察可以发现，求和中当 b_n 接近 0 时 λ 的次方较小，而 b_n 无法控制 (如 b_0、b_1) 时 λ 的次方则趋于 0，由此想到进行**分段**放缩。对任何 $\varepsilon>0$，存在 N 使得 $n>N$ 时 $|b_n|<\varepsilon$，从而当 $n>N$ 时有

$$\left|\sum_{k=0}^n b_k\lambda^{n-k}\right|\le\sum_{k=0}^N|b_k|\lambda^{n-k}+\sum_{k=N+1}^n|b_k|\lambda^{n-k}<\sum_{k=0}^N|b_k|\lambda^{n-k}+\sum_{k=N+1}^n\varepsilon\lambda^{n-k}$$

直接计算等比数列求和可进一步将第二项放缩得到

$$\left|\sum_{k=0}^n b_k\lambda^{n-k}\right|<\sum_{k=0}^N|b_k|\lambda^{n-k}+\frac{\varepsilon}{1-\lambda}(1-\lambda^{n-N})<\sum_{k=0}^N|b_k|\lambda^{n-k}+\frac{\varepsilon}{1-\lambda}$$

由于已经固定了 N，记

$$M=\sum_{k=0}^{N}|b_k|\lambda^{-k}$$

则可发现

$$\left|\sum_{k=0}^{n}b_k\lambda^{n-k}\right|<M\lambda^n+\frac{\varepsilon}{1-\lambda}$$

由于右侧第一项极限第一项在 $n\to\infty$ 时趋于 0，存在 N_0 使得 $n>N_0$ 时其不超过 ε，从而 $n>\max\{N,N_0\}$ 时有

$$\left|\sum_{k=0}^{n}b_k\lambda^{n-k}\right|<\varepsilon+\frac{\varepsilon}{1-\lambda}=\frac{2-\lambda}{1-\lambda}\varepsilon$$

由于 $\lambda\in(0,1)$ 是固定常数，且对任何 $\varepsilon>0$ 都可取出上述的 $\max\{N,N_0\}$，利用数列极限定义即可得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}b_k\lambda^{n-k}=0$$

从而原命题得证。

题 170 (附加)**.** 给定 $\beta\geq 0$，已知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^\beta}=1$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^{1+\beta}}$$

解答：

– **定积分计算**

我们首先观察 $a_n=n^\beta$ 时的情况，即要计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\cdots+n^\beta}{n^{1+\beta}}$$

将它用求和符号写出，得到要计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\beta}}\sum_{k=1}^{n}k^\beta$$

由于它实际上可以配凑为一个黎曼和，利用 x^β 在 $[0,1]$ 的可积性由定积分定义即得其为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\beta=\int_0^1 x^\beta\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\beta}$$

* 用**求和符号**写出求和会更方便观察如何配凑黎曼和。

– **极限估计**

由条件，我们自然希望证明原极限也是 $\frac{1}{1+\beta}$，即希望证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-1)+\cdots+(a_n-n^\beta)}{n^{1+\beta}}=0$$

记 $b_n=a_n-n^\beta$，可发现条件变为 $\frac{b_n}{n^\beta}$ 的极限为 0。

我们**拆分估算**，对任何 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得 $n > N$ 时

$$\frac{|b_n|}{n^\beta} < \varepsilon$$

也即

$$|b_n| < \varepsilon n^\beta$$

从而 $n > N$ 时将求和拆为

$$\left|\frac{1}{n^{1+\beta}}\sum_{k=1}^n b_k\right| \le \frac{1}{n^{1+\beta}}\left(\sum_{k=1}^N |b_k| + \sum_{k=N+1}^n |b_k|\right) < \frac{1}{n^{1+\beta}}\left(\sum_{k=1}^N |b_k| + \varepsilon\sum_{k=N+1}^n k^\beta\right)$$

我们尝试将右侧**配凑成可以计算的形式**得到其为

$$\frac{1}{n^{1+\beta}}\sum_{k=1}^N(|b_k| - \varepsilon k^\beta) + \varepsilon\frac{1}{n^{1+\beta}}\sum_{k=1}^n k^\beta$$

第一部分分子上为常数，从而极限为 0，第二部分极限为 $\frac{\varepsilon}{1+\beta}$，由此极限最终为 $\frac{\varepsilon}{1+\beta}$。利用极限定义，存在 N_0 使得 $n > N_0$ 时

$$\frac{1}{n^{1+\beta}}\left(\sum_{k=1}^N |b_k| + \varepsilon\sum_{k=N+1}^n k^\beta\right) < \frac{2\varepsilon}{1+\beta}$$

从而 $n > \max\{N, N_0\}$ 时即得

$$\left|\frac{1}{n^{1+\beta}}\sum_{k=1}^n b_k\right| < \frac{2\varepsilon}{1+\beta}$$

由于对任何 $\varepsilon > 0$ 都能取出上述的 $\max\{N, N_0\}$，利用数列极限定义即得到左式极限为 0，从而得证。

* 事实上最后这部分估算如果允许直接使用**数列平均极限**会更容易得到：

$$\left|\frac{1}{n^{1+\beta}}\sum_{k=1}^n b_k\right| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{|b_k|}{n^\beta} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{|b_k|}{k^\beta}$$

而 $\frac{b_k}{k^\beta}$ 极限为 0，这就直接得到了结果。

题 171. 若数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k = a, \quad \lim_{n\to\infty} n(x_n - x_{n-1}) = 0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

解答：

由于第二个极限相当于说明对任何 ε，存在 N 使得 $n > N$ 时

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{n}$$

为了能应用此式，我们考虑极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k - x_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k - x_n)$$

只要能说明其为 0，即得原式成立。

我们希望能将它拆分为相邻两项的差，由此有 (第二个等号来自计数 $x_k - x_{k+1}$ 出现了多少次)

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n-1}(x_j - x_{j+1}) = \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})$$

值得注意的是，化简到此处后我们已经**无需由定义证明**，通过**数列平均极限**结论 (证明可见**题 170** 的 $\beta = 0$ 情况) 可直接得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} n(x_n - x_{n-1}) = 0$$

从而再由 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$ 与乘积极限结论得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1}) = 0$$

这就得到了证明。

* 数列平均极限结论有必要记忆，但**最好不要直接使用**，应学习其分段放缩的思路与证明细节。

§9.3 函数

9.3.1 极限与连续性

极限的计算

* 计算函数极限时若已知 $f(x)$ 极限为某**非零**常数 l，且所求为 $f(x)$ **乘除某些量**的极限，则可将 $f(x)$ 替换为 l。只有非零且在乘除中才能替换是因为此替换本质上利用了乘除极限，**与等价无穷小替换一致**，证明类似**题 12**。

题 172. 求实数 a、b 使得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)} = \frac{4}{9}$$

解答：

我们先将极限**换到 0 处**，令 $t = x - 1$ 得到上述极限为

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2+(2+a)t+1+a+b}{\sin(t^2+2t)}$$

由于 $t^2 + t \to 0$，我们可以直接对乘积中的**等价无穷小**进行替换得到此极限为

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2+(2+a)t+1+a+b}{t^2+2t}$$

分子 0 处极限为 $1+a+b$，分母极限为 0，若 $1+a+b \neq 0$ 极限应不存在，从而由条件可知必然 $1+a+b=0$。此时上式进一步化为

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2+(2+a)t}{t^2+2t} = \lim_{t\to 0}\frac{t+2+a}{t+2} = \frac{2+a}{2}$$

从而可得 $\frac{2+a}{2}=\frac{4}{9}$，最终解出

$$a=-\frac{10}{9},\quad b=\frac{1}{9}$$

题 173. 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2\sin^2 x}{\cos(2x)}\right)^{\csc^2 x}$$

解答:

由于对指数难以处理，我们先**取对数**得到原极限为

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\csc^2 x\ln\frac{1+2\sin^2 x}{\cos(2x)}}$$

利用指数函数的连续性，只需计算极限

$$\lim_{x\to 0}\csc^2 x\ln\frac{1+2\sin^2 x}{\cos(2x)}$$

再做 e 指数即可。将 $\csc^2 x$ 重新写为 $\frac{1}{\sin^2 x}$，利用等价无穷小替换可化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{1+2\sin^2 x}{\cos(2x)}$$

而由于 $x\to 0$ 时 $\frac{1+2\sin^2 x}{\cos(2x)}\to 1$，设 $t=\frac{1+2\sin^2 x}{\cos(2x)}-1$，则 $\ln(1+t)$ 与 t 等价，从而可将乘积中的 $\ln(1+t)$ 替换为 t，得到上式为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1+2\sin^2 x}{\cos(2x)}-1\right)$$

利用 $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$，此式为 (最后一步应用了 $x\to 0$ 时 $\sin x\sim x$ 与 $\cos(0)=1$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{4\sin^2 x}{\cos(2x)}=4$$

由此原极限为 e^4。

* 当 $s\to 1$ 时有 $\ln s\sim(s-1)$，这是指数函数取完 ln 后的**常用替换手段**。

题 174. 给定 $a>0$，计算

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$$

解答:

仍然先**换到 0 处**，换元 $t=x-a$ 得到极限为

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^{a+t}-(a+t)^a}{t}$$

提取出 a^a 得到其为

$$a^a\lim_{t\to 0}\frac{a^t-(1+t/a)^a}{t}$$

$t\to 0$ 时，我们学过等价无穷小 $(a^t-1)\sim t$、$((1+t)^\alpha-1)\sim\alpha t$，**向此目标配凑**可想到拆分

$$\frac{a^t-(1+t/a)^a}{t}=\frac{a^t-1}{t}-\frac{(1+t/a)^a-1}{t}$$

第一项极限即为 $\ln a$，第二项将分子换为等价无穷小 $a\frac{t}{a}$ 可知极限为 1，从而最终利用极限四则运算得到原极限为

$$a^a(\ln a-1)$$

题 175. 计算 (这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

$$\lim_{x\to+\infty}\sin((\sqrt{x^2+[x]}-\sqrt{x^2-[x]})\pi)$$

解答:

利用**分子有理化**得到

$$\sqrt{x^2+[x]}-\sqrt{x^2-[x]}=\frac{2[x]}{\sqrt{x^2+[x]}+\sqrt{x^2+[x]}}$$

从阶估算的角度，上下均为一阶无穷大，由此只需算出此式极限即可利用正弦函数连续性得到结论。由 $[x]$ 定义可发现

$$x-1<[x]\le x$$

两侧同除以 x 即可由**夹逼定理**得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$$

从而分子分母同除以 x，由 $x\to+\infty$ 可不妨设 $x>0$，进一步得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2[x]}{\sqrt{x^2+[x]}+\sqrt{x^2+[x]}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2[x]/x}{\sqrt{1+[x]/x^2}+\sqrt{1+[x]/x^2}}$$

利用乘积极限可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

于是即由初等函数**连续性**最终得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2[x]}{\sqrt{x^2+[x]}+\sqrt{x^2+[x]}}=\frac{2\cdot 1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=1$$

从而最后由正弦函数连续性得所求极限为 $\sin(1\cdot\pi)=0$。

* 函数极限的基本方法是**换到 0 处**、**对指数取对数**后向熟悉的等价无穷小配凑，但有时也有更灵活的结合估算的习题。

介值定理相关证明

题 176. 证明 $x^{18}+x^{12}-\cos x=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上有且只有两个根。

解答:

设等号左侧为 $f(x)$。为了证明仅有两个根，我们往往需要进行**单调性**分析。直接计算可发现其导数为

$$f'(x)=18x^{17}+12x^{11}+\sin x$$

$x\in(0,\pi]$ 时由 $\sin x$ 非负可知 $f'(x)>0$，$x>\pi$ 时则可利用 $x^{11}>1$ 得到 $f'(x)>12-1>0$，从而最终得到 $x>0$ 时 $f'(x)>0$；又由其为奇函数，$x<0$ 时 $f'(x)<0$。

对 $x_2 > x_1 \geq 0$，由 $f'(x)$ 连续性通过微积分基本定理可知

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\mathrm{d}x$$

由 $f'(x)$ 恒大于 0 且连续，利用连续函数性质 (见**题 109**，此结论可直接使用) 可知右侧积分大于 0，从而 $f(x_2) - f(x_1) > 0$，于是 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ **严格单调增**，同理 $x \leq 0$ 时 $f(x)$ 严格单调减。

* 注意我们**用积分证明导函数与单调性关系的方法**。

由于 $f(0) = -1 < 0$、$f(1) = 2 - \cos 1 > 0$，利用**介值定理**可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中有一根，又由严格单调性即得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 仅有一根。同理 (或直接利用 f 为偶函数) 可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 仅有一根。这就说明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上有且仅有两个根。

* 介值定理估算根是其最基本的应用，重点是**观察函数性质**，也可见**题 70**。

题 177. 设 $f(x)$ 在开区间 (c,d) 连续，证明对任何 $x_1,\dots,x_n \in (c,d)$，存在 $\xi \in (c,d)$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

解答:

* 这类题目的核心思路是**放缩到某个 f 值**，最大值、最小值是常用的。

设 $f(x_i) = m$ 是 $f(x_1),\dots,f(x_n)$ 中的最小值，$f(x_j) = M$ 是 $f(x_1),\dots,f(x_n)$ 中的最大值，则直接放缩有

$$f(x_i) = m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M = M = f(x_j)$$

从而由介值定理，在 x_i、x_j 中有一点 ξ 满足

$$f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

又由于 x_i、x_j 都在 (c,d) 中即得 $\xi \in (c,d)$，得证。

题 178. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且

$$f(0) = g(0), \quad \sin(f(1)) = \sin(g(1)), \quad \cos(f(1)) = \cos(g(1))$$

且

$$\forall x \in [0,1], \quad (\cos f(x) + \cos g(x))^2 + (\sin f(x) + \sin g(x))^2 > 0$$

证明 $f(1) = g(1)$。

解答:

由于本题乍一看十分奇怪，我们先尝试化简条件。利用三角函数性质有

$$\sin(f(1)) = \sin(g(1)), \quad \cos(f(1)) = \cos(g(1))$$

当且仅当存在整数 k 使得 $f(1) = g(1) + 2k\pi$ (可通过单位圆上一点是 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 理解，当 θ 相差不为 2π 整数倍时对应单位圆不同点)。

而另一个条件

$$\forall x \in [0,1], \quad (\cos f(x) + \cos g(x))^2 + (\sin f(x) + \sin g(x))^2 > 0$$

等价于对任何 $x \in [0,1]$ 有 $\cos f(x) + \cos g(x)$ 与 $\sin f(x) + \sin g(x)$ 不同时为 0。
这事实上意味着 $\cos f(x) = \cos(g(x) + \pi)$、$\sin(f(x) = \sin(g(x) + \pi))$，从而它等价于对任何 $x \in [0,1]$ 与整数 k 有 $f(x) \neq g(x) + (2k+1)\pi$。
综合以上，我们记 $h(x) = f(x) - g(x)$，条件化简为了

$$h(0) = 0, \quad \exists k_0 \in \mathbb{Z}, \quad h(1) = 2k_0\pi$$

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad h(1) \neq (2k+1)\pi$$

由此，若 $k_0 > 0$，利用介值定理存在 $\xi \in [0,1]$ 使得 $h(\xi) = \pi$，同理若 $k_0 < 0$，存在 $\xi \in [0,1]$ 使得 $h(\xi) = -\pi$，这都与条件矛盾。这就得到了 $k_0 = 0$，于是 $h(1) = 0$，得证。
* 面对陌生的题目，只要**按照常规化简思路处理**，往往能在过程中得到思路。

9.3.2 导函数

导函数定义

题 179. 对给定实数 k，证明或否定以下两句话：
若 $f'(a)$ 存在，则 $\lim_{h\to0} \frac{f(a+kh)-f(a-h)}{h}$ 存在。
若 $\lim_{h\to0} \frac{f(a+kh)-f(a-h)}{h}$ 存在，则 $f'(a)$ 存在。

解答：

- **第一句正确**

  为了能用导数定义计算此极限，我们想到进行**拆分**，有

$$\frac{f(a+kh)-f(a-h)}{h} = \frac{f(a+kh)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

  假设 $k \neq 0$，第一式中换元 $t = kh$、第二式中换元 $s = -h$，即可利用导数定义得到 (第一项为 $kf'(a)$、第二项为 $f'(a)$)

$$\lim_{h\to0} \frac{f(a+kh)-f(a-h)}{h} = \lim_{t\to0} \frac{f(a+t)-f(a)}{h/k} + \lim_{s\to0} \frac{f(a)-f(a+s)}{(-s)} = (k+1)f'(a)$$

  若 $k = 0$，第一项直接为 0，仍然额可以得到极限为 $(k+1)f'(a)$。从而目标极限恒存在，为 $(k+1)f'(a)$。

- **第二句当 $k = 0$ 时正确**

  假设此极限为 l。当 $k = 0$ 时，我们在

$$\lim_{h\to0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h} = l$$

  中换元 $s = -h$，即可得到

$$\lim_{s\to0} \frac{f(a+s)-f(a)}{s} = l$$

  即 $f'(a) = l$。

– **第二句当 $k \neq 0$ 时错误**

为构造反例，我们不妨设 $a = 0$。

我们需要构造 f 使得

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(kh) - f(-h)}{h} = l$$

但

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

不存在。

由于第一式中一定不会涉及 $f(0)$，我们考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

在 0 的任何**去心邻域**中，由 $k \neq 0$ 可知 $kh \neq 0$、$-h \neq 0$，从而第一式极限为 0。第二式为

$$\lim_{h\to 0} \frac{0-1}{h}$$

极限不存在。

* 构造反例仍然依赖对原式进行充分**观察**，并尝试从**简单的函数**出发。

题 180. 定义

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

已知 $f''(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，求实数 m 的取值范围。

解答:

分为五步：

– **初步分析**

当 $x \neq 0$ 时，直接计算可发现

$$f'(x) = mx^{m-1} \sin \frac{1}{x} - x^{m-2} \cos \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2} \sin \frac{1}{x} - mx^{m-3} \cos \frac{1}{x} - (m-2)x^{m-3} \cos \frac{1}{x} - x^{m-4} \sin \frac{1}{x}$$

利用初等函数连续性，$x \neq 0$ 时 $f''(x)$ 必然连续，从而 $f''(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续等价于

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = f''(0)$$

也即

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$$

由此我们需要细分为 $f'(0)$ 存在、等号右侧极限存在、等号左侧极限存在、两侧极限相等四步进行讨论。

– **导数存在性**

由定义可知零处导数为

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{m-1} \sin \frac{1}{x}$$

我们下面证明此极限存在当且仅当 $m>1$。

若 $m>1$，x^{m-1} 极限为 0，由**有界量乘无穷小为无穷小**可知右侧极限为 0，因此存在。否则，考虑

$$a_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\quad b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}$$

则利用定义可发现

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

且 $\sin\frac{1}{a_n}=1$、$\sin\frac{1}{b_n}=-1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{m-1}\sin\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n^{m-1},\quad \lim_{n\to\infty}b_n^{m-1}\sin\frac{1}{b_n}=-\lim_{n\to\infty}b_n^{m-1}$$

当 $m=1$ 时左侧极限为 1，右侧极限为 -1，**与归结原理矛盾**，从而极限不存在；否则，左侧极限已经不存在，仍然通过归结原理可知极限不存在。

– **二阶导存在性**

利用上方的证明，$f'(0)$ 存在当且仅当 $m>1$，且此时 $f'(0)=0$，于是有

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=mx^{m-2}\sin\frac{1}{x}-x^{m-3}\cos\frac{1}{x}$$

与刚才类似，我们证明此极限存在当且仅当 $m>3$。

若 $m>3$，x^{m-2} 与 x^{m-3} 极限均为 0，由有界量乘无穷小为无穷小可知右侧极限为 0，因此存在。否则，考虑

$$a_n=\frac{1}{2n\pi},\quad b_n=\frac{1}{2n\pi+\pi}$$

直接计算可发现

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

且

$$f'(a_n)=-a_n^{m-3},\quad f'(b_n)=b_n^{m-3}$$

当 $m=3$ 时，令 $n\to\infty$，则左侧极限为 -1，右侧极限为 1，与归结原理矛盾；否则，左侧极限已经不存在，仍然通过归结原理可知极限不存在。

– **二阶导极限存在性**

等号左侧极限存在意味着下方极限存在：

$$\lim_{x\to0}\left(m(m-1)x^{m-2}\sin\frac{1}{x}-mx^{m-3}\cos\frac{1}{x}-(m-2)x^{m-3}\cos\frac{1}{x}-x^{m-4}\sin\frac{1}{x}\right)$$

由于前两部分讨论已经得到了 $m>3$，利用之前讨论，上述极限可直接化简为

$$-\lim_{x\to0}x^{m-4}\sin\frac{1}{x}$$

从而利用 $f'(0)$ 存在性中的讨论可知此极限存在当且仅当 $m>4$。

– **最终综合**

综合以上的讨论，目标式的等号两侧均有意义当且仅当 $m>4$，且讨论中已经说明了此时等号两侧均为 0，等号必然成立。由此，$f''(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续**当且仅当** $m>4$。

* 注意本题**利用周期性的取点**与**利用归结原理证明极限不存在**。

题 181. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且 $f''(x_0)$ 存在，证明存在 $\delta>0$ 使得 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 f 连续。

解答:

由二阶导数

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

可以定义，必然 $f'(x_0)$ 存在，且存在 $\delta>0$ 使得 x_0 的某**去心**邻域 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 中 $f'(x)$ 存在，这就得到了 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中 $f'(x)$ 存在，又由**可导点必然连续**得结论。

* 只从一阶可导**无法推出**邻域连续，见**题 81** 。

导函数计算

* 除了下方例子外，还需要掌握**隐函数求导**、**参数方程求导**的基本方法，可参考本讲义 5.3。

题 182. 对

$$f(x)=\int_0^{x^3}t\sin x\sin\frac{x}{t}\mathrm{d}t$$

计算 $f'(x)$。

解答:

为了**能利用变上限积分求导**公式，我们尝试将它向变上限积分转化。提取出相对 t 的常数 $\sin x$ 有

$$f(x)=\sin x\int_0^{x^3}t\sin\frac{x}{t}\mathrm{d}t$$

当 $x=0$ 时可发现 $f(x)=0$，否则换元 $s=\frac{t}{x}$ 以消去 t，最终得到积分为

$$f(x)=x^2\sin x\int_0^{x^2}s\sin\frac{1}{s}\mathrm{d}s$$

综合 $x=0$ 与 $x\neq0$ 情况可发现无论 x 是否为 0 都有上式成立。

由有界量乘无穷小是无穷小，$s\sin\frac{1}{s}$ 在 0 处极限为 0，因此上述定积分存在。由此可利用变上限积分求导公式计算导数 (注意计算中需要将 $\int_0^{x^2}f(s)\mathrm{d}s$ 看作 $\psi(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$ 与 $\varphi(x)=x^2$ 的**复合**)

$$f'(x)=(2x\sin x+x^2\cos x)\int_0^{x^2}s\sin\frac{1}{s}\mathrm{d}s+x^2\sin x\cdot(2x)\cdot x^2\sin\frac{1}{x^2}$$

也即最终得到导数为 (0 处考虑 $s\sin\frac{1}{s}$ 极限可得导数为 0)

$$(2x\sin x+x^2\cos x)\int_0^{x^2}s\sin\frac{1}{s}\mathrm{d}s+2x^5\sin x\sin\frac{1}{x^2}$$

题 183. 对

$$f(x)=(x^2-3x+2)^{100}\cos\frac{\pi x^2}{4}$$

计算 $f^{(50)}(1)$、$f^{(100)}(1)$、$f^{(101)}(2)$。

解答:

记 $g(x)=(x^2-3x+2)^{100}=(x-1)^{100}(x-2)^{100}$、$h(x)$，利用乘积高阶导数公式 (见**题 83**，可直接使用) 可得

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k g^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x)$$

再记

$$g_1(x)=(x-1)^{100},\quad g_2(x)=(x-2)^{100}$$

可发现

$$g^{(k)}(x)=\sum_{r=0}^{k}C_k^r g_1^{(r)}(x)g_2^{(k-r)}(x)$$

由于

$$g_1^{(r)}(x)=100\cdot 99\cdot\dots\cdot(101-r)(x-1)^{100-r}$$
$$g_2^{(r)}(x)=100\cdot 99\cdot\dots\cdot(101-r)(x-2)^{100-r}$$

可发现当 $r\neq 100$ 时 $g_1^{(r)}(1)=0$、$g_2^{(r)}(2)=0$，由此即得 $k<100$ 时 $g^{(k)}(1)=g^{(k)}(2)=0$。接下来进行计算：

- 若 $n=50$，1 处的 n 阶导求和中 $g^{(k)}(x)$ 只会出现 $0\le k\le 50$ 的项，无论哪个都能得到 $g^{(k)}(1)=0$，于是 $f^{(50)}(1)=0$。
- 若 $n=100$，1 处的 n 阶导为

$$\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k g^{(k)}(1)h^{(100-k)}(1)$$

  由于 $k=0,\dots,99$ 时第一项均为 0，上述求和化简为

$$g^{(100)}(1)h(1)=h(1)\sum_{r=0}^{100}C_{100}^r g_1^{(r)}(1)g_2^{(100-r)}(1)$$

  再由 $r=0,\dots,99$ 时第一项为 0 进一步化简为

$$h(1)g_1^{(100)}(1)g_2(1)$$

  由此直接计算得结果为 $\frac{\sqrt{2}}{2}100!$。
- 若 $n=101$，类似上方可知 2 处的 n 阶导为

$$C_{101}^{100}g^{(100)}(2)h'(2)+C_{101}^{101}g^{(101)}(2)h(2)$$

  直接计算可发现 $h'(2)=0$、$h(2)=-1$，从而上式化为

$$-g^{(101)}(2)=-\sum_{r=0}^{101}C_{101}^r g_1^{(r)}(2)g_2^{(101-r)}(2)$$

  由于 $g_2^{(r)}(2)$ 在 $r\neq 100$ 时均为 0，可得结果为

$$-C_{101}^1 g_1'(2)g_2^{(100)}(2)=-101\cdot 100\cdot 100!=-100\cdot 101!$$

* 这类题目一般需要通过**多项式的性质**进行计算，注意计算过程严谨性，可先尝试较小的次方数。
* 务必**熟悉求和符号的基本操作**，高等数学中可能会多次涉及含求和符号的变换。

题 184. 设 $f(x)=x^n(1-x)^n$

$$F(x)=f(x)-f''(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x)$$

计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F'(x)\sin x-F(x)\cos x)$$

解答:

直接计算可发现

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F'(x)\sin x-F(x)\cos x)=(F''(x)+F(x))\sin x$$

而

$$F''(x)=f''(x)-f^{(4)}(x)+f^{(6)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n+2)}(x)$$

从而对比系数可发现

$$F''(x)+F(x)=f(x)+(-1)^n f^{(2n+2)}(x)$$

由于 $f(x)$ 是一个 $2n$ 次多项式，它的 $2n+2$ 阶导数应为 0，从而最终结果为

$$x^n(1-x)^n\sin x$$

* 注意 n 次多项式的 k 阶导在 $k>n$ 时**必然为 0**，此结论在高阶导数计算中常用。

§9.4 积分

9.4.1 积分计算

不定积分

题 185. 计算

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$$

解答:

由于**去掉 x 后积分较容易算出**，我们先算出

$$\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}=\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}=2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$$

从而分部积分有

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$$

* 这是常见的需要使用分部积分的情况。

进一步计算，设 $t=\mathrm{e}^x$ 可得

$$\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{t-1}}{t}\mathrm{d}t$$

由于 $\sqrt{t-1}$ 难以处理，将其设为整体 s，则 $t=s^2+1$，从而进一步将积分化为

$$2\int\frac{s^2}{s^2+1}\mathrm{d}s=2\int 1\mathrm{d}s-2\int\frac{\mathrm{d}s}{s^2+1}=2s-2\arctan s+C$$

综合以上得到原积分为

$$2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$$

题 186. 计算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}$$

解答:

为了方便计算，将被积函数写为

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{(x-1)^2}$$

由此将难以处理的部分设为整体，设

$$t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$$

则

$$x=\frac{1+t^3}{1-t^3}$$

* 这里改变形式后换元是为了能将 x 写为 t 的**有理函数**，从而之后一定可以算出结果。

从而可进行换元，换元后计算得到原不定积分变为

$$\int \frac{3}{2t^3}\mathrm{d}t=-\frac{3}{4t^2}+C$$

代入得最终结果为

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}+C$$

定积分

题 187. 计算

$$\int_0^2 |x^2-1|\mathrm{e}^{-|x-1|}\mathrm{d}x$$

解答:

首先，利用定积分的性质，将被积函数**写为分段函数**可将上述积分写为

$$\int_0^1 (1-x^2)\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x+\int_1^2 (x^2-1)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$$

至此已经可以直接计算。不过我们还可以进一步化简：由于 $x\in[0,1]$ 时 $x-1$ 从 -1 变化到 0，$x\in[1,2]$ 时 $1-x$ 从 0 变化到 -1，我们事实上可以**合并** e 的指数。

在第一式中换元 $t=x-1$，第二式中换元 $t=1-x$，这样两边的 e 指数均成为 t，且积分区域均为 $[-1,0]$，直接计算可发现上式变成

$$\int_{-1}^0(-t^2-2t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{-1}(t^2-2t)\mathrm{e}^t(-1)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0(-t^2-2t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_{-1}^0(t^2-2t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=-4\int_{-1}^0 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

直接分部积分有

$$\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t=t\mathrm{e}^t-\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=(t-1)\mathrm{e}^t+C$$

从而最终算出定积分结果为

$$-4\Big((0-1)\mathrm{e}^0-(-1-1)\mathrm{e}^{-1}\Big)=4-\frac{8}{\mathrm{e}}$$

* 当然，考试时，如果想不到之后这样有一定技巧性的配凑，**直接计算**反而可能比思考化简方式更快。

题 188. 计算

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x^4\arcsin x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

解答：

设被积函数为 $f(x)$，直接计算可发现

$$f(x)+f(-x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$$

从而利用**对称性** (见本讲义 7.3.3，此结论可直接使用) 可得原积分为

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=2-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=2-\frac{\pi}{2}$$

最后一个等号利用了 $\arctan(\pm1)=\pm\frac{\pi}{4}$。

* 对一般的定积分建议**先尝试对称性**。

题 189. 计算

$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{x}\frac{\cos^2 t}{\pi-t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

解答：

记被积函数

$$f(x)=\int_0^{x}\frac{\cos^2 t}{\pi-t}\mathrm{d}t$$

由于被积函数的**导数形式较简单** (利用变上限积分的导数结论)，直接分部积分可得原积分为

$$\pi f(\pi)-0f(0)-\int_0^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 t}{\pi-t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}x\frac{\cos^2 x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$

由于定积分结果为常数，将 t 更换为 x 不影响结果，从而进一步合并得原积分为

$$\int_0^{\pi}(\pi-x)\frac{\cos^2 x}{\pi-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

可直接利用 $\cos x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ 得到

$$\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$$

从而可得最终结果为 $\frac{\pi}{2}$。

* 这是另一种常用分部积分处理的情况。

非显式的积分计算

题 190. 已知 $y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 确定的隐函数，求

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2(x)}$$

解答：

给出两种做法：

– **直接计算**

直接利用求根公式可**求解**出 (注意解存在意味着 $y \le 0$ 或 $y \ge 4$)

$$x = \frac{y^2 \pm \sqrt{y^4 - 4y^3}}{2}$$

从而

$$\mathrm{d}x = \left(y \pm \frac{y^3 - 3y^2}{\sqrt{y^4 - 4y^3}}\right)\mathrm{d}y$$

进一步得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2} = \int \left(\frac{1}{y} \pm \frac{y-3}{\sqrt{y^4 - 4y^3}}\right)\mathrm{d}y$$

分 $y < 0$ (由不定积分定义域，不可能 $y = 0$) 与 $y \ge 4$ 讨论。以 $y \ge 4$ 为例，此时上式化为

$$\ln|y| \pm \int \frac{y-3}{y\sqrt{y^2 - 4y}}\mathrm{d}y = \ln|y| \pm \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - 4y}}\mathrm{d}y \mp 3\int \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 4y}}\mathrm{d}y$$

由于 $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$ 直接由积分公式可知

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2 - 4y}}\mathrm{d}y = \ln|\sqrt{(y-2)^2 - 4} + y - 2| + C = \ln|\sqrt{y^2 - 4y} + y - 2| + C$$

而第二部分记 $t = \sqrt{\frac{y-4}{y}}$，则 $y = \frac{4}{1-t^2}$，有

$$\int \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 4y}}\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}y}{ty^2} = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y-4}{y}} + C$$

* 这里换元 t 的逻辑与**题 186** 完全相同。

综合以上得到不定积分为

$$\ln|y| \pm \ln|\sqrt{y^2 - 4y} + y - 2| \mp \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y-4}{y}} + C$$

当 $y \le -2$ 时同理得到不定积分为

$$\ln|y| \mp \ln|\sqrt{y^2 - 4y} + y - 2| \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y-4}{y}} + C$$

* 此处有两个结果是合理的，因为此曲线从 y 轴来看每个 y 对应两个 x。

* 事实上配方可发现定义域内有 $\ln|\sqrt{y^2 - 4y} + y - 2| = 2\ln|\sqrt{|y|} + \sqrt{|y-4|}| - \ln 2$，由此可进一步化简。

– **配凑**

由原式，我们希望将 x、y 写为**同一个参数的有理函数**，这样即可通过有理函数积分得到结果。

由于原方程左侧为三次**齐次**，右侧为二次**齐次**，可化为

$$x - y = \frac{x^2}{y^2}$$

从而设 $\frac{x}{y} = t$，则 $x = ty$，且

$$y = \frac{t^2}{t-1}$$

进一步得到 $x = \frac{t^3}{t-1}$，即算得原积分为

$$\int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}\right)\mathrm{d}t = 2\ln|t| + \frac{3}{t} + C$$

也即结果为

$$2\ln|x| - 2\ln|y| + \frac{3y}{x} + C$$

* 左右分别齐次时设 $t = \frac{x}{y}$ 一般可以得到形式较好的的参数方程。

* 进一步计算化简事实上可以得到两种情况算出的结果一致。

题 191. 求所有在 $\mathbb{R}$ 上满足

$$g(x) + g'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

的 $g(x)$。

解答:

* 注意**常用配凑** $f(x)\mathrm{e}^{ax}$ 求导为 $(f'(x) + af(x))\mathrm{e}^{ax}$。

两侧同乘 e^x 即得

$$\mathrm{e}^x(g(x) + g'(x)) = \mathrm{e}^x + 1$$

而左侧为 $\mathrm{e}^x g(x)$ 对 x 求导的结果，由此积分可知存在 $C \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{e}^x g(x) = \int(\mathrm{e}^x + 1)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x + C$$

于是可知 $g(x)$ 符合要求当且仅当存在 $C \in \mathbb{R}$ 使得

$$g(x) = 1 + (x + C)\mathrm{e}^{-x}$$

题 192 (附加)**.** 求所有在 $\mathbb{R}$ 上满足

$$h(x) - h''(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

的 $h(x)$。

解答:

此处的配凑需要一定观察力：设 $g(x) = h(x) - h'(x)$，可发现要求的式子化为

$$g(x) + g'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

从而由**题 191** 结论可知存在 $C \in \mathbb{R}$ 使得

$$g(x) = 1 + (x + C)\mathrm{e}^{-x}$$

由此要求解的方程变为

$$h(x) - h'(x) = 1 + (x + C)\mathrm{e}^{-x}$$

仿照**题 191**，两侧同乘 e^{-x} 即得

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(h(x)\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} + (x + C)\mathrm{e}^{-2x}$$

直接分部积分可得

$$\int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}(2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + C$$

从而最终得到 h 满足条件当且仅当存在 $C\in\mathbb{R}$、$C_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$h(x)=1+\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}C+\frac{1}{4}\right)+C_0\mathrm{e}^{x}$$

合并常数部分得当且仅当存在 $C_1\in\mathbb{R}$、$C_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$h(x)=1+\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}x+C_1\right)+C_0\mathrm{e}^{x}$$

* 这类题往往需求较好的配凑能力，没有固定方法。

9.4.2 积分应用

等式与存在性

题 193. 设

$$A(r)=\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x$$

证明对 $r\in(-1,1)$ 有 $A(r^2)=2A(r)$，再通过证明 $A(r)$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 有界计算 $A(r)$。

解答:

- **恒等式证明**

  本题的关键难点在于在于如何将 $A(r)$ 与 $A(r^2)$ 建立联系。由于 $\cos x$ 的对称性，可以想到将 $\cos x$ 替换为 $-\cos x$ 进行配凑，尝试后可发现

  $$(1-2r\cos x+r^2)(1+2r\cos x+r^2)=1+r^4+2r^2-4r^2\cos x=1-2r^2\cos(2x)+r^4$$

  * 此式的确非常难想，可能需要经过各种方向的**尝试**。即使要证式子中的两倍可以联想到对称性，下方两次折半的操作也是不容易得到的。

  首先，利用 $\cos x=\cos(2\pi-x)$，我们可以进行初步的化简，也即根据

  $$A(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x$$

  将后一部分的 x 换元为 $2\pi-x$ 即可得到与前一部分相同的形式，从而有初步化简结果

  $$A(r)=2\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x$$

  由于 $\cos(\pi-x)=-\cos x$，我们可以利用**对称性** (见本讲义 7.3.3) 得到

  $$A(r)=\int_0^{\pi}(\ln(1-2r\cos x+r^2)+\ln(1-2r\cos(\pi-x)+r^2))\,\mathrm{d}x$$

  这里 $-2r\cos(\pi-x)$ 即为 $2r\cos x$，从而利用之前得到的恒等式可知

  $$A(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r^2\cos(2x)+r^4)\,\mathrm{d}x$$

  换元 $t=2x$ 即得到

  $$2A(r)=\int_0^{2\pi}\ln(1-2r^2\cos t+r^4)\,\mathrm{d}t$$

  右侧即为 $A(r^2)$ 的表达式。

– **有界性**

由于

$$(r-1)^2 = 1-2r+r^2 \le 1-2r\cos x+r^2 \le 1+2r+r^2 = (r+1)^2$$

当 $r \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 时利用二次函数性质可知

$$1-2r\cos x+r^2 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right]$$

从而

$$\ln(1-2r\cos x+r^2) \in [-\ln 4, \ln 9-\ln 4]$$

利用定积分性质即得

$$A(r) \in [-2\pi\ln 4, 2\pi(\ln 9-\ln 4)]$$

因此有界。我们将此界记为 M，即 $r \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 时 $|A(r)| \le M$。

– **结果计算**

我们下面证明对任何 $r \in (-1,1)$ 都有 $A(r)=0$。记上一部分得到的界为 $|A(r)| \le M$。

若否，设 $r_0 \in (-1,1)$ 使得 $A(r_0) \ne 0$，考虑 $r_{k+1} = r_k^2$，则直接计算有

$$r_k = r_0^{2^k}$$

且由 $A(r_{k+1}) = 2A(r_k)$ 可知 $A(r_k) = 2^k A(r_0)$。

由数列极限知识可知

$$\lim_{k\to\infty} r_0^{2^k} = \lim_{n\to\infty} r_0^n = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} A(r_k) = \infty$$

于是存在 N_1 使得 $n > N_1$ 时 $|r_n| < \frac{1}{2}$，存在 N_2 使得 $n > N_2$ 时 $|A(r_n)| > M$。

取 $n > \max\{N_1, N_2\}$，可发现

$$r_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad |A(r_n)| > M$$

与上一部分结果矛盾。

* 这种**构造迭代**的思路可以有效用于反证。

题 194. 利用 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x} = \frac{4(3-\sin^2 x)}{(3+\sin^2 x)\sqrt{9-\sin^2 x}}$$

证明

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x+\sin^2 x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x+2\sin^2 x}}$$

解答：

首先寻找相似的形式，可发现

$$\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x+2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\sqrt{9\cos^2 x+8\sin^2 x} = \frac{1}{2}\sqrt{9-\sin^2 x}$$

且

$$\sqrt{4\cos^2 x+\sin^2 x}=\sqrt{4-3\sin^2 x}$$

设

$$x=\arcsin\frac{4\sin t}{3+\sin^2 t}$$

由求导结果，x 在定义域关于 t 单调增，且 t 为 0 时 x 为 0，t 为 $\frac{\pi}{2}$ 时 x 为 $\frac{\pi}{2}$，从而可以直接在左侧将 x 换为 t，计算得积分变为

$$\int_0^{\pi/2}\frac{4(3-\sin^2 t)}{(3+\sin^2 t)\sqrt{9-\sin^2 t}}\frac{1}{\sqrt{4-3\frac{(4\sin t)^2}{(3+\sin^2 t)^2}}}\mathrm{d}t$$

通分计算可以发现

$$4-3\frac{(4\sin t)^2}{(3+\sin^2 t)^2}=4\frac{(3-\sin^2 t)^2}{(3+\sin^2 t)^2}$$

从而此式即为

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\sqrt{9-\sin^2 t}}\mathrm{d}t$$

利用上方的恒等式即得这就是右侧的表达式。

* 这类乍一看找不到规律的题目仍需要设法**配凑**到另一边。

题 195. 设 $[0,1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足

$$\int_0^1 f(x)=\int_0^1 xf(x)=\int_0^1 x^2f(x)=\cdots=\int_0^1 x^nf(x)=0$$

证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有 $n+1$ 个不同零点。

解答：

* 此题讨论**变号**的思想类似**题 142**，我们这里将直接进行一般情况的证明，若难以想清楚可以先研究 $n=1$ 时的**简单情况**。

过程分为两步：

– **变号刻画**

若否，假设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的零点个数为 $k\le n$ 个，设它们为

$$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_k<1$$

我们记 $\xi_0=0$，$\xi_{k+1}=1$，利用介值定理，每个 (ξ_i,ξ_{i+1}) 中 $f(x)$ 必然恒大于 0 或恒小于 0 (由于其中无零点)，这里 $i=0,1,\dots,k$。

我们取出 $\{\xi_1,\dots,\xi_k\}$ 的子集

$$\xi_{m_1}<\xi_{m_2}<\cdots<\xi_{m_t}$$

使得它们是 $f(x)$ 的全部**变号**零点，也即 (ξ_{m_j-1},ξ_{m_j}) 与 $(\xi_{m_j},\xi_{m_j}+1)$ 上 $f(x)$ 符号不同。

考虑一系列区间

$$I_1=[0,\xi_{m_1}],\quad I_2=[\xi_{m_1},\xi_{m_2}],\quad\cdots,\quad I_t=[\xi_{m_{t-1}},\xi_{m_t}],\quad I_{t+1}=[\xi_{m_t},1]$$

可发现 $f(x)$ 在每个闭区间上均 ≥ 0 或 ≤ 0 (由 $f(x)$ 零点个数有限，每个区间内均有 $f(x)$ 的非零点，此符号可**唯一确定**)，且相邻两个闭区间 f 的符号相反。

- **函数构造**

  不妨设 f 在 I_{t+1} 上非负，若恒 ≤ 0 类似证明即可。设

$$g(x)=(x-\xi_{m_1})(x-\xi_{m_2})\dots(x-\xi_{m_t})$$

  可发现 I_{t+1} 上 $g(x)$ 乘积每项都大于 0，因此大于 0。每向左移动一个区间，$g(x)$ 的某一项将从正变为负，因此 $g(x)$ 变号，于是 $g(x)$ 在每个 I_j 上的正负情况与 $f(x)$ 完全相同，而所有这些区间并集是 $[0,1]$，从而有

$$\forall x\in[0,1],\quad f(x)g(x)\ge 0$$

  由于 $f(x)$、$g(x)$ 零点都有限，一定存在 $[0,1]$ 上 $f(x)g(x)>0$ 的点。又由 $f(x)g(x)$ 为连续函数的乘积，其连续，利用连续函数性质 (**题 109**，可直接使用) 可知

$$\int_0^1 f(x)g(x)>0$$

  但是，由于 $g(x)$ 次数为 t，利用定义可发现 $t\le k\le n$，重新设其为

$$g(x)=a_tx^t+a_{t-1}x^{t-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

  则利用定积分性质有

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{t}a_j\int_0^1 f(x)x^j\,\mathrm{d}x=0$$

  这就得到了矛盾。

* 虽然本题的严谨说明较为复杂 (主要是由于零点附近可能不变号，需要选出所有变号的零点)，**作示意图**可以发现思想是很清晰的。我们试图构造一个变号情况与 $f(x)$ 完全相同的多项式使得乘积积分非零。

积分估算

题 196. 证明对 $[a,b]$ 上的单调增函数 $f(x)$ 有

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

解答:

由于这里出现了 $\frac{1}{2}$，想到利用**对称性**进行构造。不过，即使左侧变为 $xf(x)+(a+b-x)f(a+b-x)$ 的积分，仍然难以说明结论，因此需要使用别的方式进行对称。

我们考虑将区间**拆成两半**：对任何可积函数 $g(x)$ 有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^{(a+b)/2}g(x)\mathrm{d}x+\int_{(a+b)/2}^b g(x)\mathrm{d}x$$

在后一部分中将 x 换元为 $a+b-x$，可发现积分变为

$$\int_a^{(a+b)/2}g(x)\mathrm{d}x+\int_a^{(a+b)/2}g(a+b-x)\mathrm{d}x=\int_a^{(a+b)/2}(g(x)+g(a+b-x))\mathrm{d}x$$

回到原式的证明。将左右都进行这样的折半，可得要证的命题变为

$$\int_a^{(a+b)/2}(xf(x)+(a+b-x)f(a+b-x))\mathrm{d}x\geq\frac{a+b}{2}\int_a^{(a+b)/2}(f(x)+f(a+b-x))\mathrm{d}x$$

左减右并化简得到要证

$$\int_a^{(a+b)/2}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(f(a+b-x)-f(x))\geq 0$$

而由 x 范围可知 $f(a+b-x)\geq f(x)$、$\frac{a+b}{2}\geq x$，这就得到了被积函数非负，从而积分非负，得证。

* 由此题与之前 $A(r)$ 的等式证明可见，对称性除了能用来进行全局的化简，还能用来**折半计算**。

题 197. 证明对 $[0,1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=0$$

解答:

本题证明最具**技巧性**的部分见**题 144** 。由其结论，对任何连续非负的 2π 周期函数 $g(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}g(x)\mathrm{d}x$$

虽然 $\sin x$ 并不非负，但一个巧妙的做法是将其拆成**两个非负函数的差**：考虑

$$g_1(x)=\frac{1}{2}(|\sin x|+\sin x),\quad g_2(x)=\frac{1}{2}(|\sin x|-\sin x)$$

由绝对值性质可知 $g_1(x)$、$g_2(x)$ 均连续非负，从而有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)g_1(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}g_1(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)g_2(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}g_2(x)\mathrm{d}x$$

又由 $g_1(x)-g_2(x)=\sin x$，以上两式相减得结论。

* 利用此方法可将**题 144** 中 $g(x)$ 非负的条件去除。

* 考场上从头研究出这道题的上述做法是**几乎不可能**的，因为其中的几个细节都颇具技巧性。不过，如果有非常好的分析功底，或许有机会从定义估算出结论。

题 198. 对 $[0,1]$ 上的可积函数 $f(x)$ 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

解答:

设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$。

由于条件只有可积，我们只能设法将其向**黎曼和**配凑。一个想法是先“假装”系数不存在，则利

用定积分定义可知

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$$

为了计算原极限，我们只需要计算出它们的差的极限，也即计算

$$\lim_{n\to\infty}b_n,\quad b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(1-(-1)^k)f\left(\frac{k}{n}\right)$$

由于 $1-(-1)^k$ 在 k 为奇数时为 2，否则为 0，我们可以将其改写为

$$b_n=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}f\left(\frac{2k+1}{n}\right)$$

可以发现，此形式**非常接近**黎曼和：$\frac{2k+1}{n}$ 相当于在 $[\frac{2k}{n},\frac{2k+2}{n}]$ 的中点取点，而这个区间的长度正好是 $\frac{2}{n}$。不过，在 n 为奇数时，最后一个区间是 $[\frac{n-1}{n},1]$，其长度应为 $\frac{1}{n}$，但求和中最后一项是 $\frac{2}{n}f(1)$，比区间长度略大。

为了解决这个误差，我们设数列 c_n 当 n 为奇数时为 $-\frac{1}{n}f(1)$，当 n 为偶数时为 0，则可验证 b_n+c_n 的确成为了黎曼和，且最大区间长度为 $\frac{2}{n}$。由于最大区间长度在 $n\to\infty$ 时趋于 0，利用定积分定义可知

$$\lim_{n\to\infty}(b_n+c_n)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$$

由 c_n 定义可发现其奇数项子列、偶数项子列均趋于 0，由此利用数列极限定义可知

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0$$

这就得到

$$\lim_{n\to\infty}b_n=A$$

由于所求极限即为 a_n-b_n 的极限，最终得到其为 $A-A=0$。

* 这题的思路仍然是**向容易计算的部分配凑**。事实上按 k 为奇数/偶数直接拆分原求和为两部分也可以证明极限为 0，但一定注意严谨性，只有一个求和是**完整的黎曼和**时我们才能说极限趋于积分。

题 199. 设 $A(x)$、$B(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且对定义域内任何 x 有 $A(x)\in[0,1]$。对 $[0,1]$ 上的连续函数 f，定义

$$T_f(x)=B(x)+\int_0^x A(t)f(t)\mathrm{d}t$$

证明满足 $T_f=f$ 的 f 至多唯一。

[**附加**] 证明满足 $T_f=f$ 的 f 存在唯一。

解答:

直接的唯一性证明分为两步：

- **基本化简**

  为说明至多唯一，我们假设 $T_f=f$、$T_g=g$，下面证明 $f=g$。

  将两式展开写为

$$f(x)=B(x)+\int_0^x A(t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$g(x)=B(x)+\int_0^x A(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

为了消去 $B(x)$，作差即得到

$$f(x)-g(x)=\int_0^x A(t)(f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t$$

设 $h(x)=f(x)-g(x)$，有

$$h(x)=\int_0^x A(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

我们下面要证明 $h(x)=0$ 恒成立。

– **估算证明**

由于 $h(x)$ 为连续函数，根据定义它在区间 $[0,1]$ 上有最大、最小值。设最大值在 c 取到，且 $h(c)=M$。

由定义 $h(0)=\int_0^0 A(t)h(t)\,\mathrm{d}t=0$，因此 $M\geq 0$。若 $M>0$，利用 $A(t)h(t)\leq 1\cdot M=M$ 有

$$M=h(c)=\int_0^c A(t)h(t)\,\mathrm{d}t\leq\int_0^c M\,\mathrm{d}t=cM$$

由此两侧同除以 M 可发现 $1\leq c$，又由定义域即得 $c=1$。

此时，由于上方左右侧取等，必然有

$$\int_0^1 A(t)h(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 M\,\mathrm{d}t$$

作差可得

$$\int_0^1 (M-A(t)h(t))\,\mathrm{d}t=0$$

由于 $M-A(t)h(t)$ 是**非负连续函数**，从其积分为 0 可得恒为 0 (**题 109**)，但 $h(0)=0$，于是 $M-A(0)h(0)=M\neq 0$，矛盾。

根据上述讨论，我们证明了 $M=0$，同理可证明 $m=0$，即得到 h 恒为 0。

* 这里仍然使用了连续函数**利用最值点估算**的技巧。

不过，我们事实上可以直接证明对任何连续函数 $A(x)$ (去除范围在 $[0,1]$ 限制) 都**存在唯一** $f(x)$ 符合条件，方法是直接**求解方程**

$$f(x)=B(x)+\int_0^x A(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

这也分为两步：

– **基本化简**

首先，由于这里出现了变上限积分，我们希望能对等式两边求导。但是，由于 $B(x)$ 仅保证了连续，未必可导，我们需要**先代换** $p(x)=f(x)-B(x)$，将方程改写为

$$p(x)=\int_0^x A(t)(p(t)+B(t))\,\mathrm{d}t$$

由于 p 连续，右侧可导，从而左侧必然可导，两侧求导得到

$$p'(x)=A(x)p(x)$$

此外，代入 $x=0$ 可以发现 $p(0)=0$。

我们下面证明只要 $p'(x)=A(x)(p(x)+B(x))$，且 $p(0)=0$，则 p 一定满足原积分方程。

由于 $p'(x)=A(x)(p(x)+B(x))$，而 $A(x)(p(x)+B(x))$ 在 $[0,1]$ 连续，符合**微积分基本定理**条件，两侧积分即得

$$p(x)-p(0)=\int_0^x A(t)(p(t)+B(t))\mathrm{d}t$$

再由 $p(0)=0$ 可知结论。

从而，问题变为寻找 $p'(x)=A(x)(p(x)+B(x))$、$p(0)=0$ 的 $p(x)$。

– **配凑微分**

将第一个方程整理为

$$p'(x)-A(x)p(x)=A(x)B(x)$$

由于 $A(x)$ 为常数 A 时左侧乘 e^{-A} 即可配凑微分，我们尝试函数 $\mathrm{e}^{-q(x)}p(x)$，可发现

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-q(x)}p(x))=\mathrm{e}^{q(x)}(p(x)-q(x)p'(x))$$

由此，只要取 $q(x)$ 使得 $q'(x)=A(x)$，即可将左侧配凑为积分。由此，可取 $q(x)=\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$。在第一个方程两侧同乘 $\mathrm{e}^{-q(x)}$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-\int_0^x A(t)\mathrm{d}t}p(x))=\mathrm{e}^{-\int_0^x A(t)\mathrm{d}t}(p'(x)-A(x)p(x))=\mathrm{e}^{-\int_0^x A(t)\mathrm{d}t}A(x)B(x)$$

由于 $\mathrm{e}^{-\int_0^x A(t)\mathrm{d}t}A(x)B(x)$ 连续，变上限积分为其原函数，从而可知存在 $C\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{e}^{-\int_0^x A(t)\mathrm{d}t}p(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-\int_0^s A(t)\mathrm{d}t}A(s)B(s)\mathrm{d}s+C$$

代入 $p(0)=0$ 可发现 $C=0$，最终得到

$$p(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x A(t)\mathrm{d}t}\int_0^x \mathrm{e}^{-\int_0^s A(t)\mathrm{d}t}A(s)B(s)\mathrm{d}s$$

于是我们有

$$f(x)=B(x)+\mathrm{e}^{\int_0^x A(t)\mathrm{d}t}\int_0^x \mathrm{e}^{-\int_0^s A(t)\mathrm{d}t}A(s)B(s)\mathrm{d}s$$

由于上述每一步都是**充分必要**的，求解出了唯一结果自然得到存在唯一满足方程的 p，于是 f 也存在唯一。

题 200. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$$

解答:

观察可以发现 $\frac{n}{1+n^2x^2}$ 在 0 处将越来越**陡峭**，最后几乎全部集中到 0 处。由此分为三步证明：

– **平移到 0 处**

若 $f(x)$ 恒为 1，计算可发现

$$\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\int_0^n \frac{\mathrm{d}(nx)}{1+n^2x^2}=\arctan n-\arctan 0=\arctan n$$

从而根据反三角函数性质有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

利用上述极限结果，将原式减去上式的 $f(0)$ 倍可知原命题等价于要证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}(f(x)-f(0))\mathrm{d}x = 0$$

记 $g(x)=f(x)-f(0)$，则 $g(x)$ 连续且在 0 处为 0，要证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}g(x)\mathrm{d}x = 0$$

– **分段估算**

由形式启发，我们直接换元 $t=nx$ 得到

$$\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}g(x)\mathrm{d}x = \int_0^n g\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

对任何 $\varepsilon>0$，由 g 连续性，存在 $\delta\in(0,1)$ 使得 $x\in[0,\delta)$ 时 $|g(x)|<\varepsilon$，从而有估算

$$\left|\int_0^n \frac{g(x/n)\mathrm{d}x}{1+x^2}\right| \le \int_0^{n\delta}\frac{|g(x/n)|}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{n\delta}^n \frac{|g(x/n)|}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

虽然对第二部分我们并没有特殊的控制方式，但连续函数必然**有界**，从而可设对任何 $x\in[0,1]$ 有 $|g(x)|\le M$，这就得到了估算

$$\left|\int_0^n \frac{g(x/n)\mathrm{d}x}{1+x^2}\right| \le \int_0^{n\delta}\frac{\varepsilon}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{n\delta}^n \frac{M}{1+x^2}\mathrm{d}x = \varepsilon\arctan(n\delta)+M(\arctan n-\arctan(n\delta))$$

– **夹逼放缩**

由反三角函数的性质，利用 $\delta>0$ 直接计算可知

$$\lim_{n\to\infty}(\varepsilon\arctan(n\delta)+M(\arctan n-\arctan(n\delta))) = \frac{\pi}{2}\varepsilon + M\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\varepsilon$$

从而存在 N 使得 $n>N$ 时

$$\varepsilon\arctan(n\delta)+M(\arctan n-\arctan(n\delta)) < \varepsilon\pi$$

这样就得到 $n>N$ 时

$$\left|\int_0^n \frac{g(x/n)\mathrm{d}x}{1+x^2}\right| < \varepsilon\pi$$

由于对任何 $\varepsilon>0$ 都可取出上述的 N，利用数列极限定义即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{g(x/n)\mathrm{d}x}{1+x^2} = 0$$

这就证明了原命题。

* **分段放缩**是估算极限的最常用方法之一，具体流程通常为以上三步，更多例子可见本讲义第八章。

十　从一元到多元

本次习题课为下半学期内容的引入，几乎不包含严谨的证明，内容仅作为介绍。

§10.1　期中

10.1.1　试题

1. 计算极限：

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^k}{\mathrm{e}^n+k^2}$$

2. 计算极限：

(1)
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^2(3x)}{\ln(1+x^2)+\sin(x^3)}$$

(2)
$$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{k}{n}}$$

3. 计算导数：

(1) 对正整数 n，求 $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$ 的 n 阶导数。

(2) 设 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 确定了隐函数 $y(x)$，求 y 对 x 的三阶导数。

4. 计算积分：

(1)
$$I=\int\frac{2\sin x+3\cos x}{2\sin x-3\cos x}\mathrm{d}x$$

(2)
$$I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})}$$

(3)
$$I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$$

5. 若 $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x^2}$、$y=0$、$x=a$ 围成的平面区域绕 x 轴旋转一周得到的旋转体体积是 $\frac{2}{9}\pi$，求正数 a 的值。

6. 设

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2)\mathrm{d}t$$

证明 $x > 1$ 时

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x}$$

10.1.2 解答

1. (1) 直接用平方差公式计算可发现

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

直接计算可发现

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

从而利用初等函数连续性与归结原理有原极限为

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{n+1}{2n}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

(2) 利用归结原理，我们只需计算

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^x$$

取 ln 即得到其为

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}$$

利用指数函数的连续性，只需计算

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})$$

由于 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ 在 $x\to+\infty$ 时趋于 0，$\ln(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})$ 可替换为**等价无穷小** $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，这就得到了

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

于是原极限为 e。

(3) 我们可以发现，只要将分母的 k^2 去掉，就能直接**等比数列求和**得到 (最后一个等号是利用 $\mathrm{e}^{-(n-1)}$ 极限是 0 进行极限的四则运算)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^k}{\mathrm{e}^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n+1}-\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-(n-1)}}{\mathrm{e}-1} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

可以发现，由于分母加 k^2 相比 e^n 的**阶数**更小，应当不影响极限。试着将分母的 k^2 都放大为 n^2，直接代数变形得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^k}{\mathrm{e}^n+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n+1}-\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)(\mathrm{e}^n+n^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\mathrm{e}}{1+n^2\mathrm{e}^{-n}}-\frac{1}{\mathrm{e}^n+n^2}}{\mathrm{e}-1}$$

由于 e^n+n^2 极限为 $+\infty$，分子的第二项极限为 0，而利用数列极限的阶估算结论 (**题 11**) 可知 $n^2\mathrm{e}^{-n}$ 极限也为 0，从而利用极限四则运算即得最终结果为

$$\frac{\frac{\mathrm{e}}{1+0}-0}{\mathrm{e}-1} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

由于 k 为 1 到 n 时

$$\frac{\mathrm{e}^k}{\mathrm{e}^n+n^2} \leq \frac{\mathrm{e}^k}{\mathrm{e}^n+k^2} \leq \frac{\mathrm{e}^k}{\mathrm{e}^n}$$

上述不等式对 k 从 1 到 n 求和，直接利用**夹逼定理**得结果仍为 $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$。

* 也可从等比数列极限 $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ 出发**作差**估算出结果，本质与夹逼一致。

2. (1) **估算阶数**；$x \to 0$ 时，分子 $\tan(3x) \sim 3x$，其平方为二阶，分母 $\ln(1+x^2) \sim x^2$ 为二阶，$\sin(x^3) \sim x^3$ 为三阶，和为二阶。

* 注意分母存在加减，**不能直接替换**。

由此，分子分母同除以 x^2 得到原极限为

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\tan(3x)}{x}\right)^2}{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \frac{\sin(x^3)}{x^2}}$$

直接利用等价无穷小替换可知

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

从而再由极限的四则运算可知原极限为

$$\frac{3^2}{1+0} = 9$$

(2) 先**换到 0 处**再**取对数**，换元 $t = x - 1$ 得到原极限为

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{2/\sqrt{t+1}-1} = \lim_{t\to 0} \mathrm{e}^{\frac{2}{\sqrt{t+1}-1}\ln(1+t)}$$

利用指数函数的连续性，只需计算

$$\lim_{t\to 0} \frac{2}{\sqrt{t+1}-1}\ln(1+t)$$

由等价无穷小结论可知 $(\sqrt{t+1}-1) \sim \frac{1}{2}t$、$\ln(1+t) \sim t$，从而直接替换即得上述极限为 4，原极限为 e^4。

(3) 我们可以发现，只要将分母的 $\frac{k}{n}$ 去掉，就能直接**化为黎曼和** ($\sin(\pi x)$ 在将区间 $[0,1]$ 进行 n 等分后取每个小区间右端点) 得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}(\cos(\pi) - \cos 0) = \frac{2}{\pi}$$

下面进行**作差**估算，直接计算有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^3+kn}\sin\frac{k\pi}{n}$$

可以发现此式分子不超过一阶，求和不超过二阶，而分母为三阶，应当趋于 0。由此，将分子放为最大、分母放为最小得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^3+kn}\sin\frac{k\pi}{n}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^3+kn} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n}$$

此时即可直接通过**夹逼定理**得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{k}{n}}\right) = 0$$

利用极限四则运算结论即得到所求极限仍为 $\frac{2}{\pi}$。

* 此题也可以直接分母放大为 $\frac{1}{n+1}$ 后利用夹逼定理证明。

3. (1) 先计算其一阶导数为

$$f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

为了能进行高阶导数计算，我们用**有理函数**的化简方法待定系数得其为

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

由此即可直接算出 (如果对 $\frac{1}{x}$ 的 n 阶导数不熟悉，可以尝试计算后归纳)

$$f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\frac{1}{x-1}+\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\frac{1}{x-2}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x-1)^n}+\frac{1}{(x-2)^n}\right)$$

定义 $0!=1$，则上式对 $n=1$ 也成立。

(2) 方程两侧同对 x 求导得到

$$\frac{2}{3}y^{-1/3}y'+\frac{2}{3}x^{-1/3}=0$$

从而化简得

$$y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

对其再求一阶导得到

$$y''=-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2/3}\frac{y'x-y}{x^2}$$

展开化简，利用 $xy^{1/3}+yx^{1/3}=x^{1/3}y^{1/3}(x^{2/3}+y^{2/3})=x^{1/3}y^{1/3}$ 得

$$y''=\frac{1}{3}\frac{x^{2/3}}{y^{2/3}}\frac{xy^{1/3}+yx^{1/3}}{x^2x^{1/3}}=\frac{1}{3}\frac{x^{2/3}}{y^{2/3}}\frac{x^{1/3}y^{1/3}}{x^2x^{1/3}}=\frac{1}{3}(x^4y)^{-1/3}$$

从而再计算导数得所求结果

$$y'''=-\frac{1}{9}(x^4y)^{-4/3}(4x^3y+x^4y')=-\frac{1}{9}(x^4y)^{-4/3}(4x^3y-x^{11/3}y^{1/3})$$

也即

$$y'''=-\frac{4}{9x^{7/3}y^{1/3}}+\frac{1}{9x^{5/3}y}$$

4. (1) 类似**题 116** 的方法，直接配凑：

$$I_1=\int\frac{2\sin x-3\cos x}{2\sin x-3\cos x}\mathrm{d}x=x+C$$

$$I_2=\int\frac{2\cos x+3\sin x}{2\sin x-3\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(2\sin x-3\cos x)}{2\sin x-3\cos x}=\ln|2\sin x-3\cos x|+C$$

从而待定系数发现结果

$$I=-\frac{5}{13}I_1+\frac{12}{13}I_2=-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}\ln|2\sin x-3\cos x|+C$$

(2) 利用**分子有理化**可得

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x^2}$$

直接配凑可发现

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

从而换元 $t=x^2$ 得

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}t}{2t\sqrt{t-1}}=\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{t-1}}{t}=\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{t-1}}{(\sqrt{t-1})^2+1}$$

由此可知上述不定积分为

$$\arctan\sqrt{t-1}+C=\arctan\sqrt{x^2-1}+C$$

于是最终可以得到被积函数的一个原函数是

$$\arctan x^2-1-\frac{1}{x}$$

利用微积分基本定理即得最终结果为

$$\arctan\sqrt{3}-\frac{1}{2}-\arctan 1+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{\pi}{12}$$

(3) 由于被积函数为

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

换元 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ 可得 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$，直接代入计算可发现原积分化为

$$\int -\frac{3}{2}\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$$

5. 首先，由定义可发现 $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x^2}$ 过 $(0,0)$ 且恒非负，因此围成区域应为 $x\in[0,a]$ 的函数图像下方到 x 轴的部分。对每个 $x\geq 0$，对应的旋转体截面积为

$$\pi y^2=\pi x\mathrm{e}^{-2x^2}$$

从而体积为 (换元 $x=\sqrt{t}$，即 $t=x^2$，由范围这可行)

$$\int_0^a \pi x\mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{a^2}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^{-2\cdot a^2}-\mathrm{e}^{-2\cdot 0})=\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-2a^2})$$

由于其为 $\frac{2}{9}\pi$，可知

$$1-\mathrm{e}^{-2a^2}=\frac{8}{9}$$

从而 $a=\sqrt{\ln 3}$。

6. 我们给出一个失败的尝试后再介绍成功的做法：

- **失败的尝试**

  原式也即要证明

$$\left|x\int_x^{x+1}\sin(t^2)\mathrm{d}t\right|\leq 1$$

  由于 $t\sin(t^2)$ 的原函数是**易于计算**的，而 x 很大时 $x\sin(t^2)$ 与 x 到 $x+1$ 范围的 $t\sin(t^2)$ 应接近，我们试着先计算 (换元 $s=t^2$)

$$\int_x^{x+1}t\sin(t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\sin s\mathrm{d}s=\frac{1}{2}(\cos((x+1)^2)-\cos(x^2))$$

  由此我们可以得到

$$\left|x\int_x^{x+1}\sin(t^2)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_x^{x+1}(x-t)\sin(t^2)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}(\cos((x+1)^2)-\cos(x^2))\right|$$

  但是，$\frac{1}{2}(\cos((x+1)^2)-\cos(x^2))$ 完全有可能是 1，而左侧 $x-t$ 为负，但 $\sin(t^2)$ 的符号无法保证，因此如此放缩无法得到结果。

- **成功的做法**

  细究上述尝试失败的根源，事实上在于 $t\sin(t^2)$ 在 x 到 $x+1$ 的积分本来就可能接近 1，这时再加上 $(x-t)\sin(t^2)$ 的积分就无法保证了。由此，必须**直接对原式**进行改写。仍然利用 $2t\sin(t^2)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}\cos(t^2)$，我们可以将 $f(x)$ 写成

$$\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}\cos(t^2)}{-2t}$$

  尝试直接分部积分可得

$$f(x) = \frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)} - \int_x^{x+1} \frac{\cos(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}x$$

  此时，左侧两项绝对值之和不超过

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x(x+1)}$$

  它比 $\frac{1}{x}$ 略小，这就有了成功估算的可能。事实上有

$$\left|\int_x^{x+1} \frac{\cos t^2}{2t^2}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_x^{x+1} \frac{|\cos(t^2)|}{2t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_x^{x+1} \frac{1}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x(x+1)}$$

  从而恰好有

$$\left|\frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)} - \int_x^{x+1} \frac{\cos(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2x(x+1)} = \frac{1}{x}$$

  这就得到了证明。

* 虽然我们部分解释了思路，但此做法实际上并不好想，因为处理的可能性有很多，但只有特定**方向**才能得到结果。本题的另一种常见做法是使用**第二积分中值定理**，由于这已经超出了本课程范围，这里不再介绍。

§10.2 泰勒展开

10.2.1 高阶逼近

在学完上半学期的内容后，我们已经知道了所有微积分的计算方式，那么，还有什么问题是需要解决的呢？

答案就在介绍导数的章节中。在介绍导数时，假设 f 在 x 可导，我们利用一阶导数的定义得到了如下的估算

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h) \quad (h \to 0)$$

我们可以这么理解这个式子：在 h 很小时，我们可以用 $f(x)$ 作为 $f(x+h)$ 的近似，这一般来说具有一阶误差，因为 $f'(x) \neq 0$ 时，$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + o(h)$ 是 h 的**一阶**无穷小。更进一步地，如果已知 $f'(x)$，$f(x) + hf'(x)$ 是对 $f(x+h)$ 的**更好**的近似，因为 $f(x+h) - f(x) - hf'(x) = o(h)$ 是比 h **高阶**的无穷小。

由此出发，我们自然会产生一些疑问：

- $f'(x) = 0$ 时，$f(x+h) - f(x)$ 是 h 的几阶无穷小？一般情况下 $f(x+h) - f(x) - hf'(x)$ 又是 h 的几阶无穷小？
- 对 $f(x+h)$，是否有比 $f(x) + hf'(x)$ 更好的近似方式？

直觉告诉我们，这或许会与**更高阶**的导数有关，但直接证明却会遇到障碍：为了确认 $f(x+h)-f(x)-hf'(x)$ 是 h 的几阶无穷小，我们需要计算

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h^\alpha}$$

由于已知分子是高于一阶的无穷小，我们可直接假设 $\alpha>1$。如果它真的与二阶导数有关，我们必须在分子中制造出 $f'(x+h_0)-f'(x)$ 这样的项，才能用二阶导数 $h_0f''(x)$ 进行估计。若 f' 在 x 的某邻域**连续**，$|h|$ 充分小时我们可以由微积分基本定理得到上方极限为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h f'(x+t)\mathrm{d}t-hf'(x)}{h^\alpha}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h (f'(x+t)-f'(x))\mathrm{d}t}{h^\alpha}$$

不过，即使这样我们还是无法得到正确的结果：利用积分中值定理可以将分母改写为 $h(f'(x+\xi)-f'(x))$，其中 $\xi\in[0,h]$ (且 ξ 与 h 有关，可记为 $\xi(h)$，若同一个 h 有多个 ξ 满足，**任取一个**即可，这实际上利用了**选择公理**)，这样原极限就变为了

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\xi(h))-f'(x)}{h^{\alpha-1}}$$

为了解决这一问题，我们需要引入更高级的积分中值定理形式，也即若 $f(t)$、$g(t)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $g(t)\neq 0$ 在 (a,b) 恒成立，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\frac{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

它的证明并不困难：由于 $g(t)$ 在区间上不变号 (利用连续性，非零则恒正或恒负，端点也满足)，利用我们已经证明的积分中值定理一般形式 (**题 141**)，存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b\frac{f(t)}{g(t)}g(t)\mathrm{d}t=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

由于 g 是连续函数且在 $[a,b]$ 不变号，利用**题 109** ，只要有一点非零，积分就非零，从而根据条件可知积分非零，而左侧即为 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，两侧同除以 $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ 得结论。

利用它，我们可以将原式进一步改写为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h (f'(x+h)-f'(x))\mathrm{d}t}{\int_0^h \alpha t^{\alpha-1}\mathrm{d}t}$$

从而存在 $\xi(h)\in[0,h]$ 使得上式化为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\xi(h))-f'(x)}{\alpha\xi^{\alpha-1}(h)}$$

由于 $\xi=0$ 时分母为 0，无意义，必然有 $\xi(h)\in(0,h]$。至此，我们似乎已经离结果很近了，但还有一个问题：由于 $\xi(h)$ 对 h 不连续 (它在 $h=0$ 时甚至没有定义)，无法使用复合函数极限结论。不过，这个问题事实上可以利用类似本讲义 11.1 第 6 题类似方法解决，于是最终将原极限化为

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{f'(x+\xi)-f'(x)}{\alpha\xi}$$

由此，若 $f''(x)$ 存在，我们最终得到 $\alpha=2$ 时极限结果为 $\frac{1}{2}f''(x)$。综合以上，我们证明了当 f' 在 x 附近**连续** (也即存在 x 的邻域使得其中 $f'(x)$ 连续)，且 $f''(x)$ **存在**时，有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+o(h^2)\quad(h\to 0)$$

也即这的确是一个二阶逼近。

* 注意 $f''(x)$ 存在仅能得出 f' 在 x 附近存在且 f' 在 x 连续，无法推出 f' 在 x 附近连续，因此条件的第一句话不能省略。

* 事实上，如果能猜到答案的形式，还存在更简单的证明方法：由于

$$f'(x+s)=f'(x)+sf''(x)+o(s)$$

已知 f' 在 x 附近的连续性，我们可以考虑两侧对 s 从 0 到 h 积分，当 $|s|$ 充分小时利用微积分基本定理有

$$f(x+h)-f(x)=sf'(x)+\frac{1}{2}s^2+\int_0^h o(s)\,\mathrm{d}s$$

由于 $o(s)=f'(x+s)-f'(x)-sf''(x)$ 在 s 充分小时是 s 的连续函数，再利用积分中值定理类似本讲义 11.1 第 6 题估算即可发现最后一项实际上为 $o(h^2)$。

10.2.2　微分中值定理

利用上述证明，可以发现我们似乎可以**用积分中值定理解决微分逼近的问题**。

不过，比起当 $f'(x)$ 存在时 (这时我们并未要求 f 在 x 附近连续)

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+o(h)\quad(h\to 0)$$

刚才得到的

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+o(h^2)\quad(h\to 0)$$

明显多了一个限制条件，$f'(x)$ 在 x 附近连续。我们需要追问，这个条件是否真的必要？也即，如果只有 $f''(x)$ 存在的条件，能否推出

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+o(h^2)\quad(h\to 0)$$

呢？

答案是肯定的。观察上方的证明过程，可以发现，我们只需要如下的定理：对 $[a,b]$ 上可导的函数 $f(t)$、$g(t)$，若 $g'(t)$ 在 (a,b) 恒正或恒负，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

* 若 f'、g' 连续，将左侧看作 $\frac{\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x}$，即化为已证明的形式。从而此定理是对已证明定理的**推广**。

利用它，我们可以直接写出 (将上方 $f(t)$ 取为 $f(x+t)-tf'(x)$，$g(t)$ 取为 t^α，考虑 0 处与 t 处)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h^\alpha}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\xi(h))-f'(x)}{\alpha\xi^{\alpha-1}(h)}$$

这样便能得到结论。

这个定理称为**柯西中值定理** (实际上条件可以比我们上方陈述的略弱)，从上方的讨论中可以看出，它实际上是**积分中值定理的推广**，将连续函数推广为了一般的导函数 (利用变上限积分的导数结论，区间上的连续函数一定是某个函数的导函数，反之未必)。

利用柯西中值定理，仿照上方的操作过程我们可以证明**洛必达法则**：若 $f(x)$、$g(x)$ 在 a 的某去心邻域有定义、可导，且 $g'(x)$ 在邻域中恒非零，则假设 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，且

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$$

必然有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

此结论可以用于高阶导数相关的极限证明。例如，还是考虑极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h^2}$$

利用洛必达法则 (大家可以自行验证条件，注意 $f''(x)$ 存在可以推出 f 在 x 的某邻域可导，而我们需要考虑上式对 h 在 0 附近的可导性，这是可以满足的) 可直接得到上式为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{2h}$$

从而即能直接看出若 $f''(x)$ 存在，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h^2}=\frac{1}{2}f''(x)$$

这就大幅简化了之前的复杂证明。

10.2.3　余项

在刚才的讨论中，我们已经得到了，若 $f''(x)$ 存在，有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+o(h^2)\quad(h\to 0)$$

完全类似地，我们重复利用洛必达法则可发现，若 $f'''(x)$ 存在，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{1}{2}h^2f''(x)}{h^3}=\frac{1}{6}f'''(x)$$

从而

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{6}h^3f'''(x)+o(h^3)\quad(h\to 0)$$

由此可以类似归纳证明，若 f 在 x 处的 k 阶导数存在 ($k\in\mathbb{N}$)，有估计

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\cdots+\frac{1}{k!}h^kf^{(k)}(x)+o(h^k)\quad(h\to 0)$$

也就是，我们得到了一个误差超过 k 阶无穷小的近似方式。我们将此近似公式称为**带 Peano 余项的泰勒展开**，这里 Peano 余项是指 $o(h^k)$ 这项，我们除了知道它是超过 k 阶的无穷小外，无法获得任何其他信息。

有了这个展开式后，我们就可以解决一些极限的问题了，例如前半学期提到的

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

现在就可以用 0 处的泰勒展开

$$\sin x=0+x+0-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

直接得到结果为 $-\frac{1}{6}$。事实上，Peano 余项在极限计算中还有更多作用，在证明了**唯一性**后，我们还可以反过来用泰勒展开式确定导数。

不过，Peano 余项并没有办法完全解决函数的近似问题，因为我们对余项的估计只有一个 “阶数高于 k”。如果我们想进行更具体的计算，就要给余项更精确的形式——而这就需要**更强的条件**。

若 $f^{(n+1)}$ 在 x 与 $x+h$ 之间连续，我们就可以用**积分**表示余项，得到

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\cdots+\frac{1}{k!}h^kf^{(k)}(x)+\frac{1}{n!}\int_x^{x+h}f^{(k+1)}(t)(x+h-t)^k\,\mathrm{d}t$$

这个式子只需要通过反复运用分部积分公式就可以证明，我们将在下一章进行严谨的证明。此余项的好处是，通过 $f^{(k+1)}$ 的连续性，我们对余项进行了完全精确的估计，但它的条件限制也很强，且并不容易从 $f^{(k+1)}$ 的性质看出 f 的对应性质。

值得一提的是，在 $k=0$ 时，此余项实际上就是微积分基本定理。因此，带此余项的泰勒公式可以**替代微积分基本定理**。

为了给出更弱条件限制的版本，我们对积分余项利用积分中值定理，可以得到存在 x 与 $x+h$ 之间的 ξ 使得

$$\int_x^{x+h} f^{(k+1)}(t)(x+h-t)^k\,\mathrm{d}t = f^{(k+1)}(\xi)\int_x^{x+h}(x+h-t)^k\,\mathrm{d}t = \frac{h^{k+1}}{k+1}f^{(k+1)}(\xi)$$

由此我们得到了**拉格朗日余项**

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \cdots + \frac{1}{k!}h^kf^{(k)}(x) + \frac{1}{(k+1)!}h^{k+1}f^{(k+1)}(\xi)$$

就像微分中值定理是积分中值定理的**推广**，利用微分中值定理，只需 $f^{(n+1)}$ 在 x 与 $x+h$ 之间**存在**，就可以得到拉格朗日余项的结论，这就比需要连续性的积分余项好用很多。

此外，在 $k=0$ 时，此余项实际上就是微分中值定理，因此，带此余项的泰勒公式可以**替代微分中值定理**。

综合以上，我们之前学过的所有一元微积分的重要定理都可以被特定余项的泰勒公式推出，因此可以说**泰勒公式统一了一元微积分**。理论来说，之前学过的任何题目都可以用泰勒公式的某种形式证明，这就让它成为了某种“通法”。在之后，我们将看到泰勒公式在解决之前熟悉或不熟悉的题目中如何发挥作用。

§10.3　一致性

在用泰勒公式统一一元微积分后，我们的重心就从一元微积分转向了多元微积分。更准确来说，本学期我们只会涉及多元函数的微分，不涉及积分。不难想到，一个二元函数 $f(x,y)$ 在固定 x 或 y 后即成为了一元函数，因此，我们必须先思考，有什么多元函数相关的问题是**无法用一元函数知识直接解决**的。

10.3.1　多元的估算

我们先从一个简单的问题开始，也即一元引入导数时所用的**误差估算**。对于二元函数 $f(x,y)$，假设自变量进行了偏移 $f(x+h,y+s)$，我们希望知道函数产生的误差。

固定一个自变量后，将二元函数看作一元函数进行求导称为求**偏导数**。我们将 f 对第一个、第二个变量的偏导数记为

$$\partial_1 f,\quad \partial_2 f$$

* 注意教材上事实上只有类似 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的代表对指定变量求偏导的记号，而没有类似 f' 的代表对函数求导的记号。我们这里引入的 ∂_1、∂_2 就类似上标 $'$。

值得注意的是，$\partial_1 f$ 应当是一个二元函数，因为 $\partial_1 f(x_0,y_0)$ 代表固定 f 的第二个分量为 y_0 后，看作第一个变量的函数在 x_0 处求导的结果。由偏导数的定义，假设 $\partial_1 f$、$\partial_2 f$ 处处存在，我们马上可以利用一元函数知识写出

$$f(x+h,y+s) = f(x+h,y) + s\partial_2 f(x+h,y) + o(s)\quad (s\to 0)$$

同理，再假设 $\partial_1(\partial_2 f)$ 存在，可以得到

$$f(x+h,y) = f(x,y) + h\partial_1 f(x,y) + o(h)\quad (h\to 0)$$

$$\partial_2 f(x+h,y) = \partial_1 f(x,y) + h\partial_2(\partial_1 f)(x,y) + o(h)\quad (h\to 0)$$

但是，当我们试图用下面的式子代换上面时，会发现一个问题，这里的 s 与 h 是两个**独立**的变量，因此，代换后我们必须标记成

$$f(x+h,y+s)=f(x,y)+h\partial_1 f(x,y)+s\partial_2 f(x,y)+sh\partial_2(\partial_1 f)(x,y)+o(s)+o(h)+o(h)s \quad (s\to 0,\quad h\to 0)$$

右边的记号表示**先**让 $s\to 0$，**再**让 $h\to 0$。此外，从上方 $o(s)$ 与 $o(h)$ 的定义可以发现，$o(s)$ 应是 s 与 h 的函数，而 $o(h)$ 则只是 h 的函数。

从各种意义上来说，这都是一个很不好的估算：原本条件里 s 与 h 是完全**对称**的，分别代表 x 与 y 的误差。但在估算后，反而变得不对称了。如果我们想要将它变得易于使用，必须要让估计式具有某种对称性。

事实上，如果只看一阶导数项，我们能发现一个很明显的对称的估算：

$$f(x+h,y+s)\approx f(x,y)+h\partial_1 f(x,y)+s\partial_2 f(x,y)$$

这也与一元函数的形式非常一致。在原估算中，除去 $o(s)$、$o(h)$ 这样已经被丢弃的高阶项外，剩下的 $hs\partial_2(\partial_1 f)(x,y)$ 也的确是更**高阶**的：如果将 h、s 都看作某个量的一阶无穷小，hs 将是二阶无穷小。

但是，要刻画这个估算的误差，将它写为某个与 h、s 相关的阶数，我们就必须设法让 h、s **一起**趋于 0，而非有先后。这又该如何定义呢？

首先，如果我们要刻画一个对 h、对 s 都是一阶的量，可以想到用 $\sqrt{h^2+s^2}$ 表示：它当且仅当在 $h=s=0$ 时为 0，且无论先用 h 趋于 0 还是先用 s 趋于 0 都是一阶无穷小。

* 当然，满足这样条件的量不止一种，如 $|h|+|s|$ 事实上也可以，且接下来的过程用 $|h|+|s|$ 定义将**完全等价**。不过，$\sqrt{h^2+s^2}$ 在**几何**上的意义更加明确：它是 (h,s) 与原点的距离。

由此，我们形式上可以写出 $f(x,y)$ 的一个估算：

$$f(x+h,y+s)=f(x,y)+h\partial_1 f(x,y)+s\partial_2 f(x,y)+o(\sqrt{h^2+s^2})\quad ((h,s)\to(0,0))$$

这里用 $o(\sqrt{h^2+s^2})$ 代表误差对 h、s 是超过一阶的无穷小，符合直觉。此外，右侧的 $(h,s)\to(0,0)$ 表示某种“一起趋于”。按照一元的情况，上式的定义应当是

$$\lim_{(h,s)\to(0,0)}\frac{f(x+h,y+s)-f(x,y)-h\partial_1 f(x,y)-s\partial_2 f(x,y)}{\sqrt{h^2+s^2}}=0$$

由此，我们只需要给出对于

$$\lim_{(h,s)\to(0,0)} g(h,s)$$

的定义，即可得到上述估计。

10.3.2 重极限与可微

首先，一个简单的想法是，既然 (h,s) 需要一起趋于 0，我们让 $h=s$ 不就好了？也就是说，我们如果认为

$$\lim_{(h,s)\to(0,0)} g(h,s)=\lim_{s\to 0} g(s,s)$$

能不能代表一起呢？

答案是否定的。考虑这样的函数：

$$g(x,y)=\begin{cases}1 & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}$$

如果按照上面的定义，它在原点处的极限应当为 1，但如果在 $y=0$ 这条直线上考虑 (此时 $g(x,0)$ 当且仅当 $x=0$ 时是 1，$x\neq 0$ 时是 0)，它在 $x\to 0$ 时的极限又成了 0，不符合我们对于重极限的直觉。也就是说，此处**一起并不代表同时**。

为了给出一个较好的重极限定义，一个思路是回到本讲义 3.2.2 的**归结原理**：

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

当且仅当对任何满足 $a_n\neq a$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ 的数列 a_n 有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=b$$

我们用以下三步进行定义：

1. 首先，对于向量列 (x_n,y_n) 极限是 (x,y)，我们其实可以非常简单地将其定义为各**分量**取极限：

   $$\lim_{n\to\infty} x_n=x,\quad \lim_{n\to\infty} y_n=y$$

   这很符合我们的直觉，从实际例子上也能感受到合理性。

2. 其次，我们定义

   $$\lim_{(a,b)\to(x,y)} g(a,b)=l$$

   当且仅当对任何满足 $(x_n,y_n)\neq(x,y)$ 且 $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x,y)$ 的向量列 (x_n,y_n) 有

   $$\lim_{n\to\infty} g(x_n,y_n)=l$$

3. 最后，我们将此定义进行**等价转化** (这部分证明将在之后学到时详细给出)，得到易于操作的形式

   $$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall 0<\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}<\delta,\qquad |g(a,b)-l|<\delta$$

   可以发现，此形式其实也很符合直觉，它的最大区别是将一元极限时的 $0<|a-x|<\delta$ 变为了 $0<\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}<\delta$，都是在强调两点的**距离**在 0 与 δ 之间。

利用

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall 0<\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}<\delta,\qquad |g(a,b)-l|<\delta$$

我们即可以给出下式的严格定义

$$\lim_{(h,s)\to(0,0)}\frac{f(x+h,y+s)-f(x,y)-h\partial_1 f(x,y)-s\partial_2 f(x,y)}{\sqrt{s^2+h^2}}=0$$

我们将这称为 f 在 (x,y) 处**可微**。不过，即使 $\partial_1 f(x,y)$、$\partial_2 f(x,y)$ 都存在，上式也未必成立：考虑

$$f(a,b)=\begin{cases}1 & ab=0\\ 0 & ab\neq 0\end{cases}$$

由于它在 x 轴、y 轴上均为 0，根据定义可发现 $\partial_1 f(0,0)=\partial_2 f(0,0)=0$，但可直接验证上述极限不存在。由此，**二元情况下可导与可微并不等价**。

到此处，我们终于可以引入**一致性**的概念了。对于一个二元函数，我们想将它看成一元函数其实很简单：只要选择一条**直线**，它在这条直线上的值就是一元函数。由此，如果考虑 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的极限，我们可以考虑任何一条过原点的直线 $(r\cos\theta,r\sin\theta)$ (θ 固定)，并能用极限

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

这称为 f 在 θ **方向**趋于 0 的极限，之后还将介绍类似的**方向导数**概念。

那么，如果 f 在任何方向趋于原点的极限都为 l，是否能推出 f 在原点的极限是 l 呢？虽然直觉上这似乎合理，但实际上是错误的。考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & y=x^2\\ 0 & y\neq x^2\end{cases}$$

可以发现，在任何方向，它都存在 0 的一个**去心邻域**使得其中恒为 0，因此

$$\forall\theta\in[0,2\pi],\quad \lim_{r\to 0}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$$

但实际上，按照之前的重极限定义可发现 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ **不存在**：因为无论距离 0 多近，都有为 0 的点与为 1 的点。

* 另一个经典例子是 $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$，它在 $(0,0)$ 处的极限不存在，但沿任何方向极限都为 0。

为了解释这两个概念的本质不同，我们将

$$\forall\theta\in[0,2\pi],\quad \lim_{r\to 0}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=l$$

写成等价表述

$$\forall\theta\in[0,2\pi],\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall r\in(0,\delta),\quad |f(r\cos\theta,r\sin\theta)-l|<\varepsilon$$

而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$$

则可以写成等价表述 (这里相当于将 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 转化为了**极坐标**)

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall\theta\in[0,2\pi],\quad \forall r\in(0,\delta),\quad |f(r\cos\theta,r\sin\theta)-l|<\varepsilon$$

对比两个表述可以看出，它们的核心不同在于 $\forall\theta\in[0,2\pi]$ 这句的**位置**不同。前一句中，它在 $\exists\delta>0$ 前，所以每个 θ 可以取出不同的 δ；后一句中，它在 $\exists\delta>0$ 后，所以需要对所有 θ 取出同一个 δ。这种对所有 θ 需要取出同一个 δ 的性质即称为**一致性**，此处可以称 δ 对 θ 一致。某种意义上，我们定义多元函数的极限、可微等内容时，最重要的一条就是要求它们**对不同方向一致**——而不是每个方向分别成立就可以，这就让多元函数相关的性质可能与一元函数存在**本质不同**。

10.3.3　一致连续性

从刚才的讨论中可以观察到，如果将某个“任意”挪到了“存在”之后，就是**添加了一致性**，而如果将某个“任意”挪到了“存在”之前，就是**破坏了一致性**。

考虑另一个简单的例子，在**数列极限定义**中如果添加一致性会如何呢？我们知道，数列 a_n 以 a 为极限的定义是

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\varepsilon$$

如果我们要求 N 对 ε **一致** (也就是将存在放到任意之前)，可以得到

$$\exists N,\quad \forall\varepsilon>0,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\varepsilon$$

这到底是什么意思呢？对任何 $\varepsilon>0$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 的话，事实上只能 $a_n=a$，所以上式可以等价写为

$$\exists N,\quad \forall n>N,\quad a_n=a$$

也就是 a_n 在某项后恒为 a。从这个角度，我们可以说，数列极限是某项后恒为常值的数列**破坏了一致性**的结果。

在我们之前学过的概念中，有一个概念常需要添加一致性，也就是是**连续**的概念。区间 I 上，函数 f 连续的定义可以写为 (相当于将 f 在每个 x_0 连续的定义展开写，注意此定义对开区间、闭区间都成立，闭区间**端点**处 $x\in I$ 的条件就相当于在说左/右极限)

$$\forall x_0\in I,\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x\in I,\quad |x_0-x|<\delta\Longrightarrow|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$$

若我们要求 δ 对 x_0 一致，就称为 f 在 I 上**一致连续**，也即定义为

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x_0\in I,\quad \forall x\in I,\quad |x_0-x|<\delta\Longrightarrow|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$$

这个定义事实上很直观：它代表对任何 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得区间上任何两个距离在 δ 以内的点，函数值距离都在 ε 以内。

* 更进一步地，连续性是一个**逐点**的概念 (就像可导一样)，即通过每点的任何一个邻域就可以确定，而一致连续是一个**整体**的概念 (就像可积一样)，必须通过整个区间才能确定。由此可见，**一致性的引入可以将逐点概念提升为整体概念**——就像将各个方向的极限提升为了多元函数的一点处极限。

为了展现一致性的强大，我们以一个本质上非常困难的结论证明结束本章，也作为上半学期的终结：

题 201 (**附加**). 证明闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 可积。

解答:

我们将证明分为两个核心步骤：

– **闭区间上的连续函数必然一致连续**

我们将用到**题 6** 附加部分中已经证明的**列紧性原理**：任何有界数列存在收敛子列。

若 $f(x)$ 不一致连续，我们写出命题的否定可以发现

$$\exists\varepsilon>0,\quad \forall\delta>0,\quad \exists x,y\in[a,b],\quad |x-y|<\delta,\quad |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$$

既然上式对任何 δ 成立，我们对所有 $\delta=\frac{1}{n}$ 取出上述的 x、y，并记为 x_n、y_n，也即满足

$$x_n,y_n\in[a,b],\quad |x_n-y_n|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$$

由于 $x_n\in[a,b]$，它必然存在**收敛子列**，设为 $x_{n_1},x_{n_2},\ldots$，并记

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$$

利用子列定义可发现 $n_k\geq k$，于是

$$|y_{n_k}-x_{n_k}|=\frac{1}{n_k}\leq\frac{1}{k}$$

利用夹逼定理即得

$$\lim_{k\to\infty}(y_{n_k}-x_{n_k})=0$$

从而再由 x_{n_k} 极限存在有

$$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$$

利用 $x_{n_k}\in[a,b]$ 与极限保序性可知 $x_0\in[a,b]$。由 f 连续，通过**归结原理**可以得到

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})=f(x_0)$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k})-f(y_{n_k}))=0$$

利用极限定义，这与 $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon$ 恒成立矛盾。从而原命题得证。

– **闭区间上的一致连续函数可积**

利用最值原理 (**题 20**)，闭区间上的连续函数必然有界。进一步利用**题 102** 的结论与记号，我们只需证明

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=0$$

对任何 $\varepsilon>0$，利用**一致连续性**，我们已经知道存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall x,y\in[a,b],\quad |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

由此，在 $\lambda(T)<\delta$ 时，对 $i=1,\ldots,n$，由于连续函数在每一段上都存在最大值与最小值，上确界 M_i 必然为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值，下确界 m_i 必然为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最小值，由 $x_i-x_{i-1}<\delta$ 即有 $0\le M_i-m_i<\varepsilon$。

从而可得

$$0\le\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(x_i-x_{i-1})=\varepsilon(b-a)$$

由于对任何 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 使得 $\lambda(T)<\delta$ 时上式成立，利用极限定义即可发现

$$\lim_{\lambda(T)\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=0$$

从而得证。

* 经过如此多的努力 (光是其中用到的列紧性原理、最值原理与**题 102** 三个基础结论都已经足够难证了)，我们终于证明了连续函数是可积的，这展现了分析工具如何**在无法直观感受的情境进行复杂的严谨推理**。
* 闭区间上的连续函数必然一致连续是一个数学分析中的重要结论。

由此，下半学期用泰勒展开统一一元微积分后，只要再把握好一致性的使用，就**足以解决多元微分相关的问题**了。

十一 微分中值定理

本次习题课从微分中值定理开始，介绍了泰勒展开的余项证明与应用。由于会从头开始介绍，知识基础仅为期中前的结论。

§11.1 作业解答

1. (4.1 节例 4) 证明 $x \neq 0$ 时 $\mathrm{e}^x > 1 + x$。

解答：

设 $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$，则 $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为负、在 $(0, +\infty)$ 上为正，于是 f 在 $(-\infty, 0]$ 严格单调减、在 $[0, +\infty)$ 严格单调增，又由 $f(0) = 0$，结合定义即得 $x \neq 0$ 时 $f(x) > 0$ 恒成立。

2. (习题 4.1.4) 应用拉格朗日中值定理证明不等式：

(1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$，其中 $x, y \in \mathbb{R}$。

解答：

当 $x = y$ 时，两侧均为 0，不等式成立。当 $x \neq y$ 时，由对称性可设 $x < y$，根据拉格朗日中值定理，由条件 $f(t) = \sin t$ 在 $[x, y]$ 连续且可导，于是存在 $\xi \in (x, y)$ 使得

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| = |\cos \xi| \leq 1$$

两边同乘 $|x - y|$ 即得证。

(2) $|\tan y - \tan x| \geq |y - x|$，其中 $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。

解答：

当 $x = y$ 时，两侧均为 0，不等式成立。当 $x \neq y$ 时，由对称性可设 $x < y$，根据拉格朗日中值定理，由条件 $f(t) = \tan t$ 在 $[x, y]$ 连续且可导，于是存在 $\xi \in (x, y)$ 使得

$$\left|\frac{\tan x - \tan y}{x - y}\right| = |\cos^{-2} \xi| \geq 1$$

两边同乘 $|x - y|$ 即得证。

(3) $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$，其中 $0 < a < b$。

解答：

根据拉格朗日中值定理，由条件 $f(t) = \ln t$ 在 $[a, b]$ 连续且可导，于是存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{\xi}$$

也即

$$\ln \frac{b}{a} = \frac{b - a}{\xi}$$

由 $\xi \in (a, b)$ 可知

$$\frac{b - a}{b} < \frac{b - a}{\xi} < \frac{b - a}{a}$$

这就得到了原结论的证明。

* 本题也可以考虑设 $x = \frac{b}{a}$ 以后将不等式写为 $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ 再进行分析，但这实际上是做复杂了。不过，考试遇到这类不等式时若想不到简单做法，直接利用熟悉的方法处理也是**有意义**的。

3. (习题 4.1.6) 设 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为任意实数，证明

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos(2x) + \cdots + c_n \cos(nx)$$

在 $(0, \pi)$ 内必有根。

解答：

- **微分中值定理做法**

  设
  $$F(x) = c_1 \sin x + \frac{1}{2} c_2 \sin(2x) + \cdots + \frac{1}{n} c_n \sin(nx)$$
  则 $F(0) = F(\pi) = 0$ 且 $F'(x) = f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 成立，从而由罗尔中值定理即得 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 有根。

  * 此构造的来源是，有了微分中值定理后，我们找到原函数的两个**相等的点**即可确定导函数的一个根，从而可尝试通过构造原函数证明。

- **积分中值定理做法**

  直接计算可发现，当 k 为正整数时有
  $$\int_0^\pi \cos(kx) \mathrm{d}x = 0$$
  从而可得
  $$\int_0^\pi f(x) = 0$$
  由于 $f(x)$ 是连续函数，若 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 无零点，它必然在 $(0, \pi)$ 恒大于 0 或小于 0，且 $[0, \pi]$ 上非负或非正。进一步利用**题 109** 可得积分不可能为 0，矛盾。

  * 事实上积分中值定理中的 ξ 也可**加强**为不在两端取到，因此这个做法实际上是利用了积分中值定理。

4. (习题 4.1.7) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a, b) 可微，且 $g(x)$ 恒非零。若

$$\forall x \in (a, b), \quad f(x)g'(x) - g(x)f'(x) = 0$$

证明存在常数 k 使得

$$\forall x \in (a, b), \quad f(x) = kg(x)$$

解答：

由于 $g(x)$ 非零，要证的结论等价于存在 k 使得

$$\forall x \in (a, b), \quad \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

利用教材或**题 94** 中已经证明的结论，这等价于

$$\forall x \in (a, b), \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0$$

由于 f、g 可微即得其等价于

$$\forall x \in (a, b), \quad \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0$$

由 $g(x) \neq 0$ 知上式等价于条件。

5. (习题 4.1.10) 证明不等式

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{2}{\pi}x < \sin x < x$$

解答：

记 $g(x) = \frac{\sin x}{x}$，并定义 $g(0) = 1$，则利用极限性质可知 g 成为了 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。

由于 (最后一步用了范围内 $x < \tan x$ 与 $\cos x > 0$)

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x - \tan x}{x^2 \cos x} < 0$$

可知 g 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 严格单调增，从而

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad 1 = g(0) < g(x) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

化简即得结论。

* 此做法有**一定程度的循环论证**，但由于三角函数相关的初始逻辑本身就并不清晰，我们姑且认为这样是可行的，也即基础的导数、极限、不等式结论可直接使用。

* 也可考虑 $x - \sin x$ 与 $\sin x - \frac{2}{\pi}x$ 两个函数进行求导估算，不过过程会相对复杂一些。

6. (习题 4.1.11) 已知 $f(x)$ 在区间 (a, b) 可微，对 $x_0 \in (a, b)$，若极限

$$l = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

存在，证明其为 $f'(x_0)$。

解答：

– **初步处理**

对任何 $\delta > 0$ (保证 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 在定义域内) 与 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，利用**微分中值定理**可知存在 $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ 使得 (由于 ξ 对每个 x 不同，我们记为 $\xi(x)$)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi(x))$$

我们下面证明在 $\xi(x) \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ 的条件下可推出

$$\lim_{x \to x_0} f'(\xi(x)) = l$$

* 注意即使 $x \to x_0$ 时 $\xi(x) \to x_0$，由于外层函数 $f'(u)$ 未必在 x_0 处连续，**无法直接使用复合函数极限结论**。在教材的知识体系下，本题所有**未使用极限定义的做法都是错误的**，而教材中事实上也在类似情况犯了相同错误。

– **极限证明**

由定义可知，对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时都有

$$|f'(x) - l| < \varepsilon$$

而利用 $\xi(x)$ 的条件讨论可发现 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $0 < |\xi(x) - x_0| < \delta$，从而有

$$|f'(\xi(x)) - l| < \varepsilon$$

因此根据极限定义即得

$$\lim_{x \to x_0} f'(\xi(x)) = l$$

– **最终结论**

在等式

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi(x))$$

两侧同取极限，利用定义与讨论即可发现

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f'(\xi(x))=l$$

这就得到了证明。

7. (4.2 节例 9) 计算

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

解答：

通分得到其为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

由于分子分母都在 $x\to 1$ 时为 0，且分子、分母均可导，计算上述极限只需计算 (由单调性下方分母在 1 的某空心邻域非零，符合洛必达条件)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$$

整理得需计算

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}$$

由于分子分母仍然在 1 处为 0，类似验证条件并使用洛必达法则可得只需计算

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+1+\ln x}=\frac{1}{2}$$

从而原极限为 $\frac{1}{2}$。

8. (4.2 节例 10) 计算

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

解答：

由指数函数连续性取 ln 得只需计算

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

由于分子分母在 0^+ 处极限都为 0，验证条件并使用洛必达法则可得只需计算

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x}\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$$

进行等价无穷小替换可得上式为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$

再次验证条件并使用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\sin x}{6x^2}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

从而原极限为

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$$

* 注意洛必达法则可以与等价无穷小替换**结合使用**，更多讨论见本讲义 11.3.1。

9. (4.2 节例 11) 计算

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\tan x)^{\cos x}$$

解答:

由指数函数连续性取 ln 得只需计算

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\cos x\ln\tan x$$

由于 ln 求导易于计算，将极限看作

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{\cos x}}$$

由于分子分母极限均为 $+\infty$，验证条件并使用洛必达法则可得只需计算

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0$$

从而原极限为 1。

* 若将极限看作

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\cos x}{\frac{1}{\ln\tan x}}$$

使用洛必达法则将难以求出结果，因为始终无法消除 $\ln\tan x$ 项。由此可见使用洛必达法则需要**观察可以求导化简的结构**。

10. (习题 4.2.8) 计算

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\tan x)^{2x-\pi}$$

解答:

由指数函数连续性取 ln 得只需计算

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(2x-\pi)\ln\tan x$$

由于 ln 求导易于计算，将极限看作

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}$$

由于分子分母极限均为 ∞，验证条件并使用洛必达法则可得只需计算

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}$$

接下来我们使用熟悉的**等价无穷小**思路处理：代换 $y=\frac{\pi}{2}-x$ 可将上方极限化为

$$\lim_{y\to0^+}\frac{\tan y\frac{1}{\sin^2 y}}{-\frac{2}{(2y)^2}}=-2\lim_{y\to0^+}\tan y\frac{y^2}{\sin^2 y}=-2\lim_{y\to0^+}y\frac{y^2}{y^2}=0$$

于是原极限为 1。

11. (习题 4.2.9) 已知常数 $a>0$，计算

$$\lim_{x\to\infty}(a^{1/x}-1)x$$

解答:

换元 $t=\frac{1}{x}$ 可将原极限化为

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}$$

利用导数定义可发现这就是 a^x 在 $x=0$ 处的导数，于是为 $\ln a$。

* 在能直接替换时，使用等价无穷小往往比洛必达法则**更快**。事实上前两道作业题也可以完全由等价无穷小替换解决，考虑时间因素，这类极限问题往往可以考虑**替换到无可替换后再使用洛必达法则**。

12. (习题 4.2.14) 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

解答：

由指数函数连续性取 ln 得只需计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}$$

由于分子分母极限均为 ∞ (分子为 $-\infty$，分母为 $+\infty$)，验证条件并使用洛必达法则可得只需计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}$$

直接利用三角函数知识可发现 $t>0$ 时

$$\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{t}=\arctan t$$

从而换元 $t=\frac{1}{x}$ 可将上方极限化为

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\arctan t}\frac{t^2}{t^2+1}}{t}$$

直接将 $\arctan t$ 等价无穷小替换为 t 可发现上方极限为 -1，从而原极限为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$。

13. (习题 4.2.18) 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$$

解答：

由指数函数连续性取 ln 得只需计算

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)$$

换元 $t=\frac{1}{x}$，与前一题相同利用三角函数知识将极限化为

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\ln\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan t\right)$$

对 ln 中等价无穷小替换并使用常用等价无穷小结论可得上方极限为

$$\lim_{t\to 0^+}\lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{2}{\pi}\arctan t}{t}=-\frac{2}{\pi}$$

从而原极限为

$$\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$$

14. (4.3 节例 8) 设 m 是大于 1 的整数，计算

$$\lim_{x\to\infty}\left((x^m+x^{m-1})^{1/m}-(x^m-x^{m-1})^{1/m}\right)$$

解答:

提取出一个 x 将极限化为

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/m}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/m}\right)$$

换元 $t=\frac{1}{x}$ 得到上式为

$$\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{1/m}-(1-t)^{1/m}}{t}$$

考虑 $f(x)=x^m$ 在 1 处的泰勒展开可知

$$(1+t)^{1/m}=1+\frac{t}{m}+o(t)\quad(t\to0)$$

$$(1-t)^{1/m}=1-\frac{t}{m}+o(-t)\quad(t\to0)$$

从而原极限为

$$\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{m}+o(t)+\frac{t}{m}-o(-t)}{t}=\frac{2}{m}+\lim_{t\to0}\frac{o(t)-o(-t)}{t}$$

利用定义即可发现第二项为 0，从而原极限为 $\frac{2}{m}$。

* 本章中将介绍更多 o 相关的**运算**性质。

15. (4.3 节例 9) 求函数

$$f(x)=\cos(2x)\ln(1+x)$$

在 $x=0$ 处的泰勒公式，展开到 x^4 项。

解答:

下方的讨论都在**极限条件** $x\to0$ 时，我们为了方便书写省略此条件。

由于 $\ln(1+x)\sim x$，其展开中的最低次项是 x，因此 $\cos(2x)$ 只需展开到三次即可，此时它对应的展开是

$$1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^3)=1-2x^2+o(x^3)$$

将 $\ln(1+x)$ 展开到四阶得到

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$$

将上方两式相乘，并**将高于四次的项合并到** $o(x^4)$ **中**，即可得到展开为 (这里将 $\ln(1+x)$ 展开的每一项乘了 $\cos(2x)$ 展开的每一项，并删除了高于四次的项)

$$(x-2x^3)+\left(-\frac{x^2}{2}+x^4\right)+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$$

也即结果为

$$x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+o(x^4)$$

* 这样计算展开的合理性需要用到泰勒展开的**唯一性**，而具体的展开方法则是结合**阶估算**的结果，本章中将给出例子。

16. (4.3 节例 10) 求函数

$$f(x)=\mathrm{e}^{\cos x}$$

在 $x=0$ 处的四阶导数。

解答:

我们从泰勒展开的角度出发计算。设 $t=\cos x$，则它在 $x\to 0$ 时极限为 1，考虑 e^t 在 1 处的泰勒展开有 (这里展开到二阶是因为 $x\to 0$ 时 $1-\cos x$ 是二阶无穷小，从而 $(t-1)^2$ 已经是四阶无穷小)

$$\mathrm{e}^t=\mathrm{e}+\mathrm{e}(t-1)+\mathrm{e}\frac{(t-1)^2}{2}+o((t-1)^2)\quad(t\to 1)$$

代入 $t=\cos x$，利用 $x\to 0$ 时 $(t-1)^2=(1-\cos x)^2$ 与 x^4 同阶可将上式改写为

$$f(x)=\mathrm{e}+\mathrm{e}(\cos x-1)+\mathrm{e}\frac{(\cos x-1)^2}{2}+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

进一步由 $\cos x$ 在 0 处的泰勒展开

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

可得 (事实上这里为了将 $\cos x$ 展开产生的 $o(x^4)$ 合并，我们还利用了 $o(x^4)$ 乘 x 的多项式仍为 $o(x^4)$)

$$f(x)=\mathrm{e}+\mathrm{e}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)+\mathrm{e}\frac{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)^2}{2}+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

整理并将四次以上的项合并得到

$$f(x)=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x^2+\frac{\mathrm{e}}{6}x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

利用泰勒展开**唯一性**可知必然有

$$f^{(4)}(0)=\frac{\mathrm{e}}{6}\cdot 4!=4\mathrm{e}$$

* 注意出现不同的极限条件时**不可省略**，本章也将给出更多计算复合函数展开的例子与严谨性论证。

§11.2　微分中值定理

11.2.1　极值的性质

11.2.2　微分与积分

11.2.3　导函数的性质

§11.3　阶估算 III

11.3.1　等价无穷小的反例

11.3.2　任意阶的展开

题 202. 计算 $\sin x$ 在 1 处带 Peano 余项的 n 阶泰勒展开。

题 203. 证明：若 $f(x)$ 在 x_0 处可求 n 阶导数，且存在多项式

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

使得

$$f(x)=p(x)+o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0)$$

则必然有

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=f'(x_0),\ldots,a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

题 204. 证明：若对某 x_0 邻域中有定义的函数 $f(x)$，存在多项式

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

使得

$$f(x) = p(x) + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0)$$

证明当 $n \geq 2$ 时未必有

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

11.3.3 等价性与复合

题 205. 计算 $\sin \ln(1 + x)$ 在 0 处带 Peano 余项的 5 阶泰勒展开。

题 206. 计算极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^3 x}{\ln \sqrt{1 + x^2} + \sin x^3}$$

11.3.4 余项的估算

题 207. 给出两个 $\mathbb{R}$ 上可求任意阶导数的函数，满足它们在零点处任意阶导数都相等 (也即任意阶带 Peano 余项泰勒展开式**形式相同**)。

解答:

见**题 86** 。

* 此结论同样意味着，即使 $f(x)$ 在 0 处可以求任意阶导数，仍然可能在 $x \neq 0$ 时有

$$f(x) \neq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

题 208. 对 $\mathbb{R}$ 上可以求二阶导数的函数 $f(x)$，若已知

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M_0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f''(x)| \leq M_2$$

证明存在 $M_1 > 0$ 使得

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq M_1$$

[**附加**] 证明可取 $M_1 = \sqrt{2M_0M_2}$。

解答:

十二　泰勒展开与证明

* 本章中在某区间 k **阶可微**指在区间**连续**，且**端点以外的点**存在 k 阶导数。

§12.1　作业解答

1. (4.4 节结论) 写出 e^x、$\sin x$、$\cos x$、$(1+x)^\alpha$、$\ln(1+x)$ 在 0 处带拉格朗日余项的泰勒公式。

解答:

以下省略极限条件 $x\to 0$，考虑展开到 $n\in\mathbb{N}^*$ 阶，且约定 $0!=1$:

– 对 $f(x)=\mathrm{e}^x$，存在 0 与 x 之间的 ξ 使得

$$f(x)=\sum_{t=0}^{n}\frac{1}{t!}x^t+\frac{x^{k+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^\xi$$

– 对 $f(x)=\sin x$，n 为奇数 ($n=2k-1$ 且 $k\in\mathbb{N}^*$) 时，存在 0 与 x 之间的 ξ 使得

$$f(x)=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}\frac{x^{2t-1}}{(2t-1)!}+\frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\sin\xi$$

n 为偶数 ($n=2k$ 且 $k\in\mathbb{N}^*$) 时，存在 0 与 x 之间的 ξ 使得

$$f(x)=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}\frac{x^{2t-1}}{(2t-1)!}+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k\cos\xi$$

– 对 $f(x)=\cos x$，n 为奇数 ($n=2k-1$ 且 $k\in\mathbb{N}^*$) 时，存在 0 与 x 之间的 ξ 使得

$$f(x)=\sum_{t=0}^{k-1}(-1)^{t}\frac{x^{2t}}{(2t)!}+\frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\cos\xi$$

n 为偶数 ($n=2k$ 且 $k\in\mathbb{N}^*$) 时，存在 0 与 x 之间的 ξ 使得

$$f(x)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^{t}\frac{x^{2t}}{(2t)!}+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^{k+1}\sin\xi$$

– 对 $f(x)=(1+x)^\alpha$，对 $x>-1$，存在 0 与 x 之间的 ξ 使得

$$f(x)=1+\sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-t+1)}{t!}x^t+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

– 对 $f(x)=\ln(1+x)$，对 $x>-1$，存在 0 与 x 之间的 ξ 使得

$$f(x)=\sum_{t=1}^{n}(-1)^{t-1}\frac{x^t}{t}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

上述所有结果均来自对高阶导数的直接计算或**归纳**计算。

2. (4.5 节例 1) 求 $f(x)=x^3-6x^2-15x+4$ 的极大值点与极小值点。

解答:

求导可得 $f'(x)=3(x+1)(x-5)$，从而 $f'(x)=0$ 当且仅当 $x=-1$ 或 $x=5$。进一步判断可发现 $x<-1$ 或 $x>5$ 时 $f'(x)>0$，$x\in(-1,5)$ 时 $f'(x)<0$。

由此，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$、$[5,+\infty)$ 严格单调增，$[-1,5]$ 严格单调减，因此 $x=-1$ 是极大值点，$x=5$ 是极小值点。

3. (4.5 节例 2) 求 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点。

解答:

求导可得 $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}$，从而 $f'(x)$ 在 0 以外的点有定义，$x<0$ 时 $f'(x)<0$、$x>0$ 时 $f'(x)>0$。

利用 $f(x)$ 的连续性可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 严格单调减，$[0,+\infty)$ 严格单调增，因此 $x=0$ 是唯一极值点，且为极小值。

4. (4.5 节例 3) 求 $f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x}$ 的极值点。

解答:

求导可得 $f'(x)=x^2(3-x)\mathrm{e}^{-x}$，从而 $f'(x)=0$ 当且仅当 $x=0$ 或 $x=3$。进一步判断可发现 $x<0$ 或 $x\in(0,3)$ 时 $f'(x)>0$，$x>3$ 时 $f'(x)<0$。

由此，$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$，$[0,3]$ 严格单调增 (因此在 $(-\infty,3]$ 严格单调增)，$[3,+\infty)$ 严格单调减，因此 $x=3$ 是唯一极值点，且为极大值。

5. (4.5 节例 4) 求 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值。

解答:

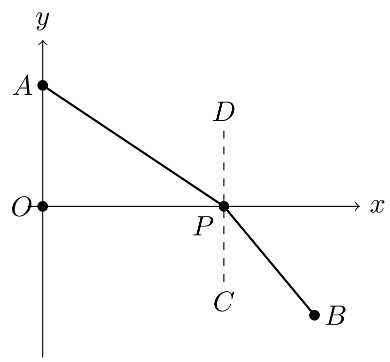
求导可得 $f'(x)=\frac{1}{3}(5x-2)x^{-1/3}$，从而 $f'(x)$ 在 0 以外的点有定义，且 $f'(x)=0$ 当且仅当 $x=\frac{2}{5}$。

对于 $[-1,1]$ 中的最值点，若它在 $(-1,1)$ 且可导，则导函数为 0，于是只需要比较 -1、0、$\frac{2}{5}$、1，四个点，分析可发现

$$f(-1)=-2,\quad ,\quad f(0)=0,\quad f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}},\quad f(1)=0$$

从而 $x=-1$ 时取到最小值 -2，$x=0$ 或 1 时取到最大值 0。

6. (4.5 节例 5) 在平面上考虑两点 $A(0,a)$、$B(d,-b)$，其中 $a,b,d>0$。光在 $y>0$ 部分的传播速度为 v_1、在 $y<0$ 部分的传播速度为 v_2，且光从 A 到 B 的路径由如图的线段 AP、PB 组成:



已知光的传播路径是所有可能路径中用时最短的，求证 (这里 CD 平行于 y 轴)

$$\frac{\sin\angle APD}{\sin\angle BPC}=\frac{v_1}{v_2}$$

解答:

7. (4.5 节例 6)

8. (习题 4.5.7)
9. (习题 4.5.9)
10. (4.6 节例 1)
11. (4.6 节例 3)
12. (习题 4.6.3)
13. (5.1 节例)
14. (习题 5.1.1)
15. (习题 5.1.3)
16. (习题 5.1.7)
17. (习题 5.1.8)

§12.2　微分中值定理

12.2.1　多项式的根

题 209. 证明

$$P(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

在 $(-1,1)$ 有 n 个不同实根。

解答:

题 210 (附加). 证明

$$C(x) = \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \mathrm{e}^{-x})$$

有 n 个不同的正实根。

解答:

题 211. 设函数

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

证明 $f(x) = 0$ 在 n 为奇数时有一个实根，n 为偶数时无实根。

解答:

题 212. 对 $a < b$，若 n 次多项式 $P(x)$ 满足 $P(x) - a$、$P(x) - b$ 都有 n 个不同实根，证明对 $c \in (a,b)$，$P(x) - c$ 也有 n 个不同实根。

解答:

12.2.2　一般的中值问题

题 213. 若 $\mathbb{R}$ 上可导的函数 $f(x)$ 有 a、b 两个零点，证明方程

$$f(x) + f'(x) = 0$$

在 (a, b) 至少有一个解。

解答:

题 214. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 一阶可微，证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

解答:

题 215. 若 $[a, b]$ 上二阶可微的函数 $f(x)$ 满足 $f(a) = f(b) = 0$，证明对任何 $x \in (a, b)$ 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(x - b)$$

解答:

§12.3　泰勒展开与估算

12.3.1　极限问题

题 216. 若 $[a, b]$ 上一阶可微的函数 $F(x)$ 满足导函数在 $[a, b]$ 可积 (由于有限个点不影响可积性，端点可任意定义)，证明

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

解答:

题 217. 若 $\mathbb{R}$ 上可导的函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

证明

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

解答：

题 218. 若 $\mathbb{R}$ 上可导的函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

证明存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $f'(\xi) = 0$。

解答：

题 219. 对 $q \in [0, 1)$，证明

$$x_n = (1+q)(1+q^2)\dots(1+q^n)$$

极限存在。

解答：

12.3.2 不等式问题

题 220. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 可导且无界，证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 无界。

解答：

题 221. 对 $[a, b]$ 上存二阶导数的函数 $f(x)$，若已知 $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$，且

$$\forall x \in (a, b), \quad |f''(x)| \leq M$$

证明

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \leq \frac{M}{16}(b-a)^2$$

解答：

题 222. 对 $[0, a]$ 上二阶可微的函数 $f(x)$，若已知

$$\forall x \in (0, a), \quad |f''(x)| \leq M$$

且 f 在区间 $[0, a]$ 上的最大值在 $(0, a)$ 中可取到，证明

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$$

解答：

题 223. 若 $[a,b]$ 上二阶可微的 $f(x)$ 满足 $f(a)=f(b)=0$ 与

$$\forall x\in(a,b),\quad f(x)f''(x)\geq 0$$

证明 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 恒为 0。

解答:

题 224. 若 $[0,+\infty)$ 上二阶可微的 $f(x)$ 满足

$$\forall x\geq 0,\quad f(x)\geq 0$$

$$\forall x>0,\quad f''(x)\leq 0$$

证明

$$\forall x>0,\quad f'(x)\geq 0$$

解答:

题 225 (附加). 对 $[0,+\infty)$ 上一阶可微的 $f(x)$，若 $f(0)=0$，且存在 $c>0$ 使得

$$\forall x>0,\quad |f'(x)|\leq c|f(x)|$$

证明 $f(x)$ 恒为 0。

解答:

题 226. 对 $[-1,1]$ 上三阶可微的 $f(x)$，若 $f(0)=f'(0)=0$、$f(1)=1$、$f(-1)=0$，证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使

$$f'''(\xi)\geq 3$$

解答:

十三　解析几何与拓扑

§13.1　作业解答

1. (习题 5.2.7)
2. (习题 5.2.9)
3. (习题 5.2.11)
4. (习题 5.2.14)
5. (习题 5.2.16)
6. (5.3 节例 1)
7. (5.3 节例 2)
8. (5.3 节例 3)
9. (5.3 节例 4)
10. (5.3 节例 5)
11. (5.3 节例 6)
12. (5.3 节例 7)
13. (5.3 节例 8)
14. (5.3 节例 9)
15. (5.3 节例 10)
16. (5.3 节例 11)
17. (5.3 节习题 11 改编)
18. (5.4 节结论) 写出所有**非退化**二次曲面的可能方程，并绘制草图。

    * 事实上平面、两相交平面、两平行平面均称为**退化**的二次曲面。教材上给出的 9 种曲面是全部非退化的二次曲面。
19. (习题 5.5.1)

    (2)

    (3)
20. (习题 5.5.2)

§13.2　空间的几何

13.2.1　直线与平面

13.2.2　曲线与曲面

13.2.3　高维情况

§13.3　空间的拓扑

13.3.1　开集与闭集

13.3.2　紧集的性质

13.3.3　连通性