1. (15 分) 设矩阵

$$U=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\1&1&2&2\\2&2&3&3\\2&2&3&3\end{pmatrix}$$

找一个正交矩阵 P 与对角矩阵 D 使得 $U=PDP^T$。

2. 在所有不超过 3 次的实系数多项式构成的线性空间 V 上定义

$$\forall f,g\in V,\quad (f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(a) (5 分) 证明这是 V 上的内积。

(b) (10 分) 已知 $1,x,x^2,x^3$ 构成 V 的一组基。计算此内积下的一组标准正交基。

3. (10 分) 已知 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是上三角的正交阵，求所有可能的 A。

4. 考虑 n 维欧几里得空间 V 中的**单位**向量 u，设 u 在一组标准正交基 $S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 下的坐标为 $x\in\mathbb{R}^n$。

(a) (5 分) 证明 x 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量。

(b) (5 分) 记 $\mathcal{P}_u$ 为到 $\langle u\rangle$ (表示 u 的生成子空间) 的正交投影，求其在基 S 下的矩阵表示。

(c) (5 分) 记 $\mathcal{H}_u=\mathcal{I}-2\mathcal{P}_u$，证明其为正交变换。

(d) (5 分) 对任何满足 $\|v\|=\|w\|$ 的 $v,w\in V$，证明存在 u 使得

$$\mathcal{H}_u(v)=w$$

5. (10 分) 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维酉空间 V 上的正规变换，证明若 $\mathcal{A}(\alpha_1),\dots,\mathcal{A}(\alpha_n)$ 构成 V 的标准正交基，则 $\mathcal{A}^*(\alpha_1),\dots,\mathcal{A}^*(\alpha_n)$ 构成 V 的标准正交基。这里 $\mathcal{A}^*$ 表示 $\mathcal{A}$ 的伴随变换。

6. 对复方阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$、$B\in\mathbb{C}^{p\times q}$，用 $A\otimes B$ 表示矩阵的克罗内克积

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B&\cdots&a_{1n}B\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}B&\cdot&a_{mn}B\end{pmatrix}$$

以下题目可直接使用性质：AC、BD 可乘时 $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$。

(a) (3 分) 若 A、B 为方阵且均可逆，证明 $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$。

(b) (6 分) 证明 $\operatorname{rank}(A\otimes B)=(\operatorname{rank}A)(\operatorname{rank}B)$。

(c) (9 分) 若 A 的特征多项式为 $x^3(x-1)^2(x-2)$，最小多项式为 $x(x-1)(x-2)$；B 的特征多项式为 $x^2(x-1)^3(x-2)^2$，最小多项式为 $x^2(x-1)^2(x-2)$，计算 $A\otimes B$ 的 Jordan 标准形。提示：先计算 A 与 B 的 Jordan 标准形。

7. (12 分) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 中的线性无关向量组，β_1,β_2,β_3 是 V 中的线性相关向量组，证明

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\otimes\alpha_i\neq\sum_{i=1}^{3}\beta_i\otimes\beta_i$$