黎曼几何引论 习题解答

原生生物

* 对应教材陈维桓、李兴校《黎曼几何引论》上册。

目录

1 第一次作业

1. 1.6

(1) 将 $\mathbb{C}P^n$ 中 z^k 不为 0 的元素集合记作 U_k，构造映射

$$\varphi_k : U_k \to \mathbb{C}^n, \quad \varphi_k([z]) = \frac{1}{z^k}(z^1, \ldots, z^{k-1}, z^{k+1}, \ldots, z^{n+1})$$

根据等价类定义可知 φ_k 良定。考虑 $\mathbb{C}^n$ 看作 $\mathbb{R}^{2n}$ 的拓扑，将所有 $\varphi_k^{-1}(U), k = 1, \ldots, n+1$ (其中 $U \subset \mathbb{C}^n$ 为开集) 作为拓扑基可生成 $\mathbb{C}P^n$ 的拓扑，由定义可知其保证了 φ_k 为同胚。此外，由于 $U_s \cap U_t$ 即 z^s, z^t 都不为 0 的 $\mathbb{C}P^n$ 中元素，可知 (不妨设 $s < t$) 在 $\{z \in \mathbb{C}^n \mid z^s \neq 0\}$ 上有

$$\varphi_s \varphi_t^{-1}(z^1, \ldots, z^n) = \left(\frac{z^1}{z^s}, \ldots, \frac{z^{s-1}}{z^s}, \frac{z^{s+1}}{z^s}, \ldots, \frac{z^{t-1}}{z_s}, \frac{1}{z^s}, \frac{z^t}{z^s}, \ldots \frac{z^n}{z^s}\right)$$

由于 $z^s \neq 0$ 可知光滑，且由定义可知所有 U_k 覆盖 $\mathbb{C}P^n$，由此即得到微分结构。

而 $z^k \neq 0$ 时

$$\varphi_k \pi(z^1, \ldots, z^{n+1}) = \left(\frac{z^1}{z^k}, \ldots, \frac{z^{k-1}}{z^k}, \frac{z^{k+1}}{z^k}, \ldots, \frac{z^n}{z^k}\right)$$

其在每个坐标卡光滑，于是光滑。

(2) 由于每个 $\mathbb{C}P^n$ 中的 $[z] = [z/\|z\|]$，可知其为满射。而不妨假设 $z^{n+1} > 0$，考虑坐标卡 U_1 上有

$$\varphi_{n+1}\tilde{\pi}(z^1, \ldots, z^{n+1}) = \left(\frac{z^1}{z^{n+1}}, \ldots, \frac{z^n}{z^{n+1}}\right)$$

而球面上 $z^{n+1} > 0$ 亦为坐标卡，对应映射

$$\psi_{n+1}(z^1, \ldots, z^{n+1}) = (z^1, \ldots, z^n)$$

于是记 $c = \sqrt{1 - \|z^1\|^2 - \cdots - \|z^n\|^2}$ 即有

$$\varphi_{n+1}\tilde{\pi}\psi_{n+1}^{-1} = \left(\frac{z^1}{c}, \ldots, \frac{z^n}{c}\right)$$

将 $x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n$ 记作 $\mathbf{t} = (t^1, \ldots, t^{2n})$，则求导即得 Jacobi 阵为

$$\frac{\partial t^i / c}{\partial t^j} = \frac{\delta_{ij}}{c} + \frac{t_i t_j}{c^3}$$

计算行列式为

$$c^{-2n} \det(I + \mathbf{t}\mathbf{t}^T / c^2) = c^{-2n}(1 + \mathbf{t}^T \mathbf{t} / c^2) = c^{-2n}(1 + (1 - c^2)/c^2) = c^{-2n+2} > 0$$

对其他坐标卡同理，由此可知 $\tilde{\pi}$ 局部为同胚，于是其为浸没。

由定义可知

$$\tilde{\pi}^{-1}([z]) = \{z_0 \in S^{2n+1} \mid \exists w \neq 0, z_0 = wz\}$$

由于要求了 $\|z\| = 1$，根据模长一致即得 w 只能为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，得证。

2. 1.7

直接计算验证可知 σ^2 为恒等映射，且 $\|\sigma(x)\| = \|x\|$，由此其为 $\mathbb{R}^3$ 与 S^2 上的双射。

由于 σ 与 $\sigma^{-1} = \sigma$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上光滑，其为 $\mathbb{R}^3$ 间的光滑同胚，而 S^2 到 $\mathbb{R}^3$ 的自然嵌入为光滑映射，于是其在 S^2 上的限制为 S^2 间的同胚。

3. 1.13

将等价类 $[(z^1,z^2)]$ 记作 $[z^1,z^2]$。

考虑球极投影：

$$f:\mathbb{R}^2\to S^2,\quad f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}(2x,2y,x^2+y^2-1)$$

由此定义映射

$$\varphi:\mathbb{C}P^1\to S^2,\quad \varphi([x+\mathrm{i}y,1])=f(x,y),\quad \varphi([1,0])=(0,0,1)$$

根据定义可知 $\mathbb{C}P^1$ 中的元素一定能被 $[x+\mathrm{i}y,1]$ 或 $[1,0]$ 唯一表示，又由球极投影的性质即知其为双射，而由于 $[z_1,z_2]$ 当 $z_2\neq 0$ 时，写成 $[x+\mathrm{i}y,1]$ 后自然投影到 (x,y)，仍根据球极投影性质可知其在 $\mathbb{C}P^1\backslash\{[1,0]\}\to S^2\backslash\{(0,0,1)\}$ 上为微分同胚。

在 $[1,0]$ 处，考虑 $\mathbb{C}P^1$ 上的坐标卡 $z_1\neq 0$，计算可知其上的映射为

$$\varphi([1,x+\mathrm{i}y])=\frac{1}{x^2+y^2+1}(2x,-2y,1-x^2-y^2)$$

与球极投影完全相同可验证微分同胚，由此将两局部拼合可得整体微分同胚，得证。

4. 1.15

若 $\mathcal{A}=\mathcal{A}'$，则由于光滑函数定义只依赖 M 与 $\mathcal{A}$，可知光滑函数集合相同。

反之，若 $\mathcal{A}\neq\mathcal{A}'$，可不妨设存在 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{A}$ 但 $\notin\mathcal{A}'$。若 φ_α 的每个分量在每点附近都是 $\mathcal{A}'$ 中 U_α 上的光滑函数，根据定义知其 $\in\mathcal{A}'$，矛盾，否则根据定理 3.3 即找到了 $\mathcal{A}$ 中光滑但 $\mathcal{A}'$ 中不光滑的函数。

5. 1.23

由于只需证明开集 A 的内点 x 满足 $f(x)$ 是 $f(A)$ 的内点，考虑包含 x 的某坐标卡 U 内，只需证明 $f(x)$ 是 $f(A\cap U)$ 的内点，再在 N 中选取坐标卡，利用定义可知可不妨设 $M=\mathbb{R}^m,\quad N=\mathbb{R}^n$，利用局部淹没定义得 $m\geq n$。

进一步利用欧氏空间的秩定理，即可知存在 x 的邻域 U 与 $f(x)$ 的邻域 V 使得其上可找到局部坐标使得 $f(x^1,\dots,x^n)=(x^1,\dots,x^m)$，由此利用投影映射为开与局部坐标系的同胚可知构成开映射。

6. 1.24

利用映射连续可知紧集的像为紧集，从而 $f(M)$ 是有界闭集，记 y 为 $f(M)$ 中模长最大的点 (利用紧性可知存在)，则其在 $f(M)$ 边界上。考虑其某原像 x，若 $f(x)$ 秩为 m，则由反函数定理必然有 x 某邻域到 y 某邻域为同胚，但 y 某邻域不全在 $f(M)$ 中，矛盾。

7. 1.28

* 条件应为 $q\in f(M)$ 而非 $q\in N$。

记 f 的秩为 r。考虑 $F^{-1}(q)$ 中任何一点 p，利用秩定理可知存在 p 在 M 中局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$ 与 q 在 N 中局部坐标系 $(V,\psi;y^\alpha)$，使得

$$f(U)\subset V,\quad x(p)=0,\quad y(q)=0,\quad \psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\dots,x^m)=(x^1,\dots,x^r,0,\dots,0)$$

于是

$$F^{-1}(q)\cap U=\varphi^{-1}(\{(0,\dots,0,x^{r+1},\dots,x^m)\})$$

利用同胚即可知 $F^{-1}(q)$ 任何一点局部与 $\mathbb{R}^{m-r}$ 微分同胚。利用 M 为 Hausdorff 空间，由子拓扑定义可知其子空间是 Hausdorff 的，于是 $F^{-1}(q)$ 是 $m-r$ 维拓扑流形。

将上述的 $F^{-1}(q)\cap U$ 记为 U_p，对应的 φ 记为 φ_p，限制在 $F^{-1}(q)\cap U\to\mathbb{R}^{m-r}$ 上称 φ_{0p}，利用欧氏空间投影映射的光滑性与光滑映射的限制仍光滑，可从交集上 $\varphi_p\circ\varphi_{p'}^{-1}$ 光滑得到 $\varphi_{0p}\circ\varphi_{0p'}^{-1}$ 光滑，从而得证其为 $m-r$ 维光滑流形，原结论成立。

8. 1.44

(1) 由乘法运算光滑性可知 L_a 光滑，而 $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$，由此其与其逆均光滑，得证，对 R_b 同理；利用乘法结合律可知 L_a 与 R_b 可交换。

(2) 由 $\mathfrak{X}$ 为李代数只需验证封闭性。由 $(L_a)_*$ 线性性可知对线性运算封闭，由此只需验证

$$(L_a)_*[X,Y] = [X,Y]$$

利用左不变性可知

$$(L_a)_*X_p = X_{a\cdot p}, \quad (L_a)_*Y_p = Y_{a\cdot p}$$

于是 (最右侧 $f \circ L_a$ 表示其从 p 附近延拓到 M 上成为的光滑函数)

$$((L_a)_*(X \circ Y)_p)(f) = (X \circ Y)_p(f \circ L_a) = X(Y(f \circ L_a))(p)$$

由 X 左不变进一步化简为

$$X((Y(f \circ L_a) \circ L_{a^{-1}}) \circ L_a)(p) = X(Y(f \circ L_a) \circ L_{a^{-1}})(a \cdot p)$$

而由于 Y 左不变，有

$$Y(f \circ L_a) \circ L_{a^{-1}}(q) = Y(f \circ L_a)(a^{-1}q) = Y(f)(q)$$

于是上式化为

$$X(Y(f))(a \cdot p) = (X \circ Y)_{a\cdot p}(f)$$

对 $Y \circ X$ 同理，从而得证相等。

* 做完这题才看到习题 1.41 定义了光滑同胚诱导光滑切向量场之间的映射，上述过程本质是证明了诱导方式即为逐点对应。

(3) 注意到上述定义导致了 $X_a = (L_a)_*X_e$，事实上 X 被 X_e 完全确定，另一方面，任给 X_e，则由于 L_a 光滑性可知构造出的 X 成为光滑切向量场。

于是，构造上述映射 $\varphi : \mathfrak{X}(G) \to T_eG$，$\varphi(X) = X_e$，由上方推理可知为双射，定义

$$[X_e, Y_e] = [\varphi(X_e), \varphi(Y_e)]_e$$

即可验证两李代数同构，从而维数也相同。

(4) 由于矩阵乘法与求逆可写为初等函数复合，且 det 非零保证了不会涉及分母 0 的情况，可以验证其在 $GL(n,\mathbb{R})$ 中均为光滑函数，由此在各子流形中光滑，验证各子群封闭性知均为李群。为寻找李代数，只需考虑单位元处的切空间 (下方的讨论将切向量考虑为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量)。

对 $GL(n,\mathbb{R})$，单位元 I 处任何微小扰动对应的行列式改变是微小的，仍可逆，于是切空间 n^2 维，对应单位元处任何矩阵。

对 $SL(n,\mathbb{R})$，考虑 $\det(I+\varepsilon A)$，可发现其为 $1+\varepsilon \mathrm{tr}A + o(\varepsilon)$，由此切空间应为一切 $\mathrm{tr}A = O$ 的 A，维数为 $n^2 - n$。

对 $O(n)$，由于

$$(I+\varepsilon A)(I+\varepsilon A^T) = I + \varepsilon(A + A^T) + o(\varepsilon)$$

切空间应为一切 $A + A^T = O$ 的 A，维数为 $\frac{n(n-1)}{2}$。

对 $SO(n)$，由于 $A + A^T = O$ 保证了 $\mathrm{tr}A = O$，单位元处切空间与维数与 $O(n)$ 相同。

9. 1.45

(1) 这里 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 代表 t 点切向量场的基，根据定义可知

$$(\sigma_X)_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \sigma_X)$$

而这等于 $X_{\sigma_X(t)}(f) = X_e(f \circ L_{\sigma_X(t)})$。

考虑某坐标卡中，这事实上可以转化为一个常微分方程，而由于 $X_e(f \circ L_{\sigma_X(t)})$ 的光滑性，根据常微分方程知识可得存在唯一解，不同坐标卡里的唯一解可拼合成整体唯一解。下验证其为群同态。

利用左不变性，若 $\sigma_X(s) = y$，则 $t \to L_{y^{-1}} \circ \sigma_X(t)$ 亦为通过 e 的积分曲线。这是由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ L_{y^{-1}} \circ \sigma_X) = X_e((f \circ L_{y^{-1}}) \circ L_{\sigma_X(t)}) = X_{y^{-1}\cdot\sigma_X(t)}(f)$$

利用唯一性可知

$$y^{-1} \cdot \sigma_X(t) = \sigma_X(t - s)$$

即得证群同态。

(2) 与上问相同得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ L_g \circ \sigma_X) = X_{g\cdot\sigma_X(t)}(f)$$

由此即得证 $L_g \circ \sigma_X(t)$ 是过 g 的积分曲线。

(3) 直接证明下一问，即能计算验证其为同态。

(4) 也即要证

$$[X, Y] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((a_t)_* Y - Y\big)$$

由于 Y 是左不变的，由定义与 L、R 可交换可知

$$(a_t)_*(Y) = (R_{\sigma_X(-t)})_*(Y)$$

而由 (2) 可知

$$(R_{\sigma_X(-t)})_*(Y)(f)(g) = Y(f \circ R_{\sigma_X(-t)}) \circ R_{\sigma_X(t)}(g) = Y(f \circ R_{\sigma_X(-t)})(\varphi_g(t))$$

于是 $t \to 0$ 时

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((a_t)_* Y - Y\big)(f)(g) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(Y(f \circ R_{\sigma_X(-t)})\varphi_g(t) - Y(f)(g)\big)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(Y(f \circ R_{\sigma_X(-t)} - f)(\varphi_g(t)) + Y(f)(\varphi_g(t)) - Y(f)(g)\big)$$

根据 φ_g 的定义可知

$$\lim_{t\to 0} \frac{Y(f)(\varphi_g(t)) - Y(f)(g)}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (Y(f) \circ \varphi_g) = X_g(Yf) = XY(f)(g)$$

而另一方面

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} Y(f \circ R_{\sigma_X(-t)} - f)(\varphi_g(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} Y(f \circ R_{\sigma_X(-t)} - f)(g) = \lim_{t\to 0} -Y_g\left(\frac{f \circ R_{\sigma_X(t)} - f}{t}\right)$$

而对任何 $q \in M$，有

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(q \cdot \sigma_X(t)) - f(q)}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ L_q \circ \sigma_X(t) = X_q(f) = X(f)(q)$$

于是括号内极限为 $X(f)$，最终得到极限为 $-Y_g(X(f)) = -YX(f)(g)$，由此计算结果为 $[X, Y](f)(g)$，得证。

10. 1.62

    直接计算可知
    $$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{1}{r^3}-3\frac{x^2}{r^5}+\frac{1}{r^3}-3\frac{y^2}{r^5}+\frac{1}{r^3}-3\frac{z^2}{r^5}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0$$
    从而 ω 在 $S^2(r_0)$ 上积分的值与 r_0 无关，由此可取 $r_0=1$，并考虑
    $$x=\sin\theta\cos\phi,\quad y=\sin\theta\sin\phi,\quad z=\cos\theta$$
    的球坐标换元，计算得
    $$\omega=\sin\theta\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}\theta$$
    直接积分得结果。

11. 2.6

    (1) 假设有另一种保定向的局部坐标 y^i，并设 $\mathrm{d}x_i=\sum_j c_{ij}\mathrm{d}y_j$，记 c_{ij} 构成矩阵为 C，所有 $\mathrm{d}x^j$ 外积去掉 $\mathrm{d}x^i$ 的微分形式记为 ω_x^i，同理记 ω_y^i 与 Y^i。

    设
    $$\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_j d_{ij}\frac{\partial}{\partial y^j}$$
    记 d_{ij} 构成矩阵为 D，利用定义可知
    $$\left\langle\sum_k d_{ik}\frac{\partial}{\partial y^k},\sum_k c_{jk}\mathrm{d}y^k\right\rangle=\delta_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial y^i},\mathrm{d}y^j\right\rangle$$
    由此可知
    $$\sum_k d_{ik}c_{jk}=\delta_{ij}$$
    于是
    $$D=C^{-T}$$
    另一方面利用双线性性有
    $$g_{ij}=\sum_{k,l}d_{ik}d_{jl}g\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^l}\right)$$
    记对应坐标 y^i 的 g_{ij} 为 h_{ij}，其行列式为 H，则有
    $$(g_{ij})=D(h_{ij})D^T$$
    于是 $G=(\det D)^2H$，可知 $\sqrt{H}=\sqrt{G}\det C$。

    由于要证的命题即
    $$\sum_i(-1)^{i+1}\sqrt{H}Y^i\omega_y^i=\sum_i(-1)^{i+1}\sqrt{G}X^i\omega_x^i$$
    利用上述计算化为
    $$\sum_i(-1)^{i+1}Y^i\omega_y^i=\sum_i(-1)^{i+1}X^i\omega_x^i(\det C)^{-1}$$
    只需对比每个 ω_y^i 前的系数 t^i。考虑 ω_x^j 分解出 ω_y^i 的系数，可发现
    $$t^i=\sum_j(-1)^{j+1}X^j\sum_{\{k_1,\dots,k_{m-1}\}}(-1)^{\tau(k_1,\dots,k_{m-1})}c_{1k_1}\dots c_{j-1,k_{j-1}}c_{j+1,k_j}\dots c_{mk_{m-1}}$$
    这里求和表示对 $\{k_1,\dots,k_{m-1}\}=\{1,\dots,m\}\backslash\{i\}$ 的所有可能求和。

    注意到
    $$X^j=\sum_k c_{jk}Y^k$$

于是 t^i 在 Y^k 前的系数为

$$\sum_j(-1)^{j+1}c_{jk}\sum_{\{k_1,\dots,k_{m-1}\}}(-1)^{\tau(k_1,\dots,k_{m-1})}c_{1k_1}\dots c_{j-1,k_{j-1}}c_{j+1,k_j}\dots c_{mk_{m-1}}$$

进一步地，右侧的求和实质上是 C 的余子式 M_{ji}，用代数余子式写出即得 t^i 在 Y^k 前的系数为

$$(-1)^{i+1}\sum_j c_{jk}A_{ji}$$

当 $k=i$ 时，这即为 $\det C$ 按第 i 列展开的结果；而 $k\neq i$ 时，它可以看作一个有两列相同的行列式按第 i 列展开的结果，必然为 0，由此即得

$$t^i=(-1)^{i+1}Y^i\det C$$

从而得证。

(2) 由于体积元亦为整体定义的，只需在局部坐标 $(U;x)$ 上考虑即可，即要证

$$i(X)\sqrt{G}(\mathrm{d}x^1\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^m)=\sum_i(-1)^{i+1}\sqrt{G}X^i\omega_x^i$$

同除以常数 $\sqrt{G}$ 即

$$i(X)(\mathrm{d}x^1\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^m)=\sum_i(-1)^{i+1}\mathrm{d}x^i(X)\omega_x^i$$

利用习题 1.54，可知

$$i(X)(\mathrm{d}x^1\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^m)=i(X)\mathrm{d}x^1\wedge\omega_x^1-\mathrm{d}x^1\wedge(i(X)\omega_x^1)$$

注意到 $i(X)\mathrm{d}x^1=\mathrm{d}x^1(X)$，第一项即为 $X^1\omega_x^1$，重复此过程，每次分出 $\mathrm{d}x^r$ 即得结论。

12. 2.14

(1) 考虑 $p=(a,b)$ 点情况，计算得 $p^{-1}=(-ab^{-1},b^{-1})$，而由左不变性定义有 (v_1,v_2 为 p 点切向量)

$$g_p(v_1,v_2)=((L_{p^{-1}})^*g_e)(v_1,v_2)=g_e((L_{p^{-1}})_*v_1,(L_{p^{-1}})_*v_2)$$

记 $p_x=\frac{\partial}{\partial x}$，则有

$$(L_{p^{-1}})_*p_x(f)=p_x(f\circ L_{p^{-1}})=p_x\left(f\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{b},\frac{y}{b}\right)\right)=\frac{1}{b}e_x(f(x,y))$$

$$(L_{p^{-1}})_*p_y(f)=p_y(f\circ L_{p^{-1}})=p_y\left(f\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{b},\frac{y}{b}\right)\right)=\frac{1}{b}e_y(f(x,y))$$

于是由线性性即得

$$g_{ij}^{(p)}=\frac{1}{b^2}g_{ij}^{(e)}$$

即得证。

(2) 利用 $ad-bc=1$ 计算可知此映射 ϕ 为

$$(x,y)\to\frac{1}{(cx+d)^2+c^2y^2}((ax+b)(cx+d)+acy^2,y)$$

由此其为上半平面到上半平面的映射，记为 $\phi(x,y)=(\phi_1(x,y),\phi_2(x,y))$。

沿用上一问的记号，设 $p=(s,t)$，则

$$\phi_*p_x(f)=p_x(f(\phi_1(x,y),\phi_2(x,y)))=\phi_{1,x}\phi(p)_x(f)+\phi_{2,x}\phi(p)_y(f)$$

同理 $\phi_*p_y(f)=\phi_{1,y}\phi(p)_x(f)+\phi_{2,y}\phi(p)_y(f)$。

利用上问可知

$$g_p(\alpha_1 p_x+\beta_1 p_y,\alpha_2 p_x+\beta_2 p_y)=\frac{1}{t^2}(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)$$

而代入可知 $g_{\phi(p)}(\phi_*(\alpha_1 p_x+\beta_1 p_y),\phi_*(\alpha_2 p_x+\beta_2 p_y))$ 为

$$\frac{1}{\phi_2^2}\big((\alpha_1\phi_{1,x}+\beta_1\phi_{1,y})(\alpha_2\phi_{1,x}+\beta_2\phi_{1,y})+(\alpha_1\phi_{2,x}+\beta_1\phi_{2,y})(\alpha_2\phi_{2,x}+\beta_2\phi_{2,y})\big)$$

也即最终要证

$$\frac{\phi_{1,x}^2+\phi_{2,x}^2}{\phi_2^2}=\frac{\phi_{1,y}^2+\phi_{2,y}^2}{\phi_2^2}=\frac{1}{t^2}$$

$$\phi_{1,x}\phi_{1,y}+\phi_{2,x}\phi_{2,y}=0$$

利用 Cauchy-Riemman 方程可知上方的第一个等号与下方的等号成立，上方的第二个等号计算验证即可。

2 第二次作业

1. 2.18

(1) 直接利用 2.3 节定理 3.4 后两条性质展开前三项可计算验证

$$2\langle D_X Y,Z\rangle=X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle [X,Y],Z\rangle+\langle [Z,X],Y\rangle-\langle [Y,Z],X\rangle$$

代入 $Y=X$ 可知

$$2\langle D_X X,Z\rangle=2X\langle X,Z\rangle-Z\langle X,X\rangle+2\langle [Z,X],X\rangle$$

由于 X 与 g 是左不变的，可发现

$$\langle X,X\rangle\big|_{ap}=L_a^*g(X,X)=\langle (L_a)_*X,(L_a)_*X\rangle\big|_p=\langle X,X\rangle\big|_p$$

从而 $\langle X,X\rangle$ 为常数，可得到 $Z\langle X,X\rangle=0$，化为

$$\langle D_X X,Z\rangle=X\langle X,Z\rangle+\langle [Z,X],X\rangle$$

只需说明对任何左不变向量场 Z 有 $\langle D_X X,Z\rangle=0$，即可通过 Z 可在任何点取到任何切向量 (某点的 Z 唯一确定整体的 Z) 得到 $D_X X=0$。

当 Z 亦为左不变时，有 $\langle X,Z\rangle$ 为常数，因此 $X\langle X,Z\rangle=0$，最终需要证明

$$\langle [Z,X],X\rangle=0$$

而利用习题 1.45，设 a_t 是 $\sigma_Z(t)$ 确定的内自同构，有 (注意 $t=0$ 时 a_t 为恒等)

$$\langle [Z,X],X\rangle=\frac{1}{2}\big(\langle \mathrm{ad}(Z)X,X\rangle+\langle X,\mathrm{ad}(Z)X\rangle\big)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}a_t^*\langle X,X\rangle$$

由于 g 双不变，有 $a_t^*\langle X,X\rangle=\langle X,X\rangle$，从而导数恒 0，得证。

(2) 由 (1) 可知 $D_Y X+D_X Y=D_{X+Y}(X+Y)=0$，而 $D_X Y-D_Y X=[X,Y]$，从而得证。

2. 2.20

(1) 直接利用定义可知 $\tilde{g}_{ij}=\lambda^2 g_{ij}$，由此 $\tilde{g}^{ij}=\lambda^{-2}g^{ij}$，从而直接展开可得

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k=\frac{1}{2}\lambda^{-2}g^{kl}\left(\lambda^2\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+2\lambda g_{il}\frac{\partial\lambda}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+2\lambda g_{lj}\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}-2\lambda g_{ij}\frac{\partial\lambda}{\partial x^l}\right)$$

化简可得

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k+g^{kl}g_{il}\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^j}+g^{kl}g_{lj}\frac{\ln\partial\lambda}{\partial x^i}-g^{kl}g_{ij}\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^l}$$

利用逆矩阵定义即得

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k+\delta_i^k\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^j}+\delta_j^k\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^i}-g^{kl}g_{ij}\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^l}$$

(2) 下方用不带下标的算子表示 g 中的。

$$\nabla_{\tilde{g}} f = f_i \lambda^{-2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} = \lambda^{-2} \nabla f$$

$$\operatorname{div}_{\tilde{g}}(\lambda^{-2}\nabla f) = \frac{\partial(\lambda^{-2}\nabla f)^i}{\partial x^i} + (\lambda^{-2}\nabla f)^k \tilde{\Gamma}^i_{ki}$$

展开得

$$\lambda^{-2}\frac{\partial(\nabla f)^i}{\partial x^i} - 2\lambda^{-2}\frac{\partial \ln\lambda}{\partial x^i}(\nabla f)^i + \lambda^{-2}(\nabla f)^k\left(\Gamma^i_{ki} + \delta^i_k\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^i} + \frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^k} - g^{il}g_{ki}\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^l}\right)$$

于是进一步计算可得 (m 出现是由于对 i 求和)

$$\lambda^2\Delta_{\tilde{g}}(f) - \Delta_g(f) = -2\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^i}(\nabla f)^i + \delta^i_k\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^i}(\nabla f)^k + m\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^k}(\nabla f)^k - g^{il}g_{ki}\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^l}(\nabla f)^k$$

利用 g 对称性可知最后一项即为

$$-g_{ki}(\nabla\ln\lambda)^i(\nabla f)^k = -g(\nabla\ln\lambda, \nabla f)$$

而前三项即可以合并为

$$(m-1)\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^k}(\nabla f)^k = (m-1)\delta^k_i\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^i}(\nabla f)^k = (m-1)g^{li}g_{kl}\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^i}(\nabla f)^k = (m-1)g(\nabla\ln\lambda,\nabla f)$$

从而得证。

3. 2.21

我们以内积记号表示 $g(X,Y)$，梯度算子代表 g 的则只需验证

$$2\langle\tilde{D}_X(Y), Z\rangle - 2\langle D_X(Y), Z\rangle = 2\langle S(X,Y), Z\rangle$$

上式左侧即为

$$\mathrm{e}^{-2\rho}2\tilde{g}(\tilde{D}_X(Y), Z) = \mathrm{e}^{-2\rho}\big(X\tilde{g}(Y,Z) + Y\tilde{g}(Z,X) - Z\tilde{g}(X,Y)\big) + \langle[X,Y],Z\rangle + \langle[Z,X],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle$$

利用导算子性质可知

$$X\tilde{g}(Y,Z) = \mathrm{e}^{2\rho}X\langle Y,Z\rangle + \langle Y,Z\rangle X(\mathrm{e}^{2\rho}) = \mathrm{e}^{2\rho}X\langle Y,Z\rangle + 2\langle Y,Z\rangle\mathrm{e}^{2\rho}X(\rho)$$

于是

$$2\langle\tilde{D}_X(Y),Z\rangle - 2\langle D_X(Y),Z\rangle = 2\langle Y,Z\rangle X(\rho) + 2\langle Z,X\rangle Y(\rho) - 2\langle X,Y\rangle Z(\rho)$$

化为要证

$$\langle Y,Z\rangle X(\rho) + \langle Z,X\rangle Y(\rho) - \langle X,Y\rangle Z(\rho) = \langle X(\rho)Y + Y(\rho)X - \langle X,Y\rangle\nabla\rho, Z\rangle$$

利用线性性消去也即只需证明

$$\langle\nabla\rho, Z\rangle = Z(\rho)$$

而这就是梯度算子的定义。

下面以此重新证明习题 2.20(2)，考虑某局部坐标系中。

设 H 与 $\tilde{H}$ 为对应的 Hessian 阵，可发现

$$\Delta_{\tilde{g}}(f) = \tilde{g}^{ij}\tilde{H}(f)_{ij} = \lambda^{-2}g^{ij}\tilde{H}(f)_{ij}$$

而

$$\tilde{H}(f)(X,Y) = Y(X(f)) - (\mathrm{d}f)\tilde{D}_Y(X) = Y(X(f)) - (\mathrm{d}f)D_Y(X) - (\mathrm{d}f)S(X,Y)$$

于是

$$\lambda^2\Delta_{\tilde{g}}(f)-\Delta_g(f)=-g^{ij}(\mathrm{d}f)S\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

直接计算可知

$$(\mathrm{d}f)S\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=f_j\rho_i+f_i\rho_j-g_{ij}\rho_k g^{kl}f_l$$

从而 (最后一项利用对称阵与逆定义可知为 m 倍，前两项各一倍)

$$-g^{ij}(\mathrm{d}f)S\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=(m-2)\rho_k g^{kl}f_l$$

而

$$\langle\nabla\rho,\nabla f\rangle=g_{ij}\rho^i f^j=g_{ij}\rho_i g^{ik}f_j g^{jl}=\rho_i g^{ij}f_j$$

从而得证。

4. 2.23

(1) 与习题 1.45(4) 完全相同可证明 (注意 $(a_t)_*Y=(\varphi_{-t})_*Y$)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((\varphi_t)_*Y-Y)=[Y,X]$$

由条件即得 Killing 向量场等价于对任何 Y,Z 有

$$\langle(\varphi_t)_*Y,(\varphi_t)_*Z\rangle\big|_{\varphi_t(p)}=\langle Y,Z\rangle\big|_p$$

记 $p_t=\varphi_t(p)$，拆分可知左侧导数为

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\langle(\varphi_t)_*Y_p-Y_{p_t},(\varphi_t)_*Z_p\rangle+\langle Yp_t,(\varphi_t)_*Z_p-Z_{p_t}\rangle+\langle Y_{p_t},Z_{p_t}\rangle-\langle Y_p,Z_p\rangle\big)$$

前两项即为 $\langle[Y,X],Z\rangle+\langle Y,[Z,X]\rangle$，而第三项根据定义可知为 $X\langle Y,Z\rangle$。

另一方面，利用习题 2.18 展开可知

$$\langle D_YX,Z\rangle+\langle D_ZX,Y\rangle=X\langle Y,Z\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle$$

于是导数为 0 处处成立等价于 $\langle D_YX,Z\rangle+\langle D_ZX,Y\rangle=0$ 处处成立，再类似习题 1.45(1) 可知积分曲线唯一，从而得证。

(2) 利用习题 1.41 可知 $[f_*X,f_*Y]=f_*[X,Y]$，而由等距定义有 $\langle f_*X,f_*Y\rangle=\langle X,Y\rangle$，从而直接根据习题 2.17 可知

$$D_{f_*X}(f_*Y)=f_*D_XY$$

由此再利用 f_* 是同构即可得 Killing 方程形式不变，从而得 f_*X 为 Killing 向量场与 X 为 Killing 向量场等价。

(3) 也即需要

$$\frac{\partial}{\partial x^m}g_{ij}=0$$

可发现只需使参数曲线 x^m 为 $\varphi_t(p)$ 即可，而这即代表局部坐标系中 x_m 对应的参数曲线与其他参数曲线垂直，由于 $X(p)\neq 0$ 可取到，从而得证。

(4) 由于 $\mathbb{R}^n$ 上的等距同构只能为 $y=Ax+b$，其中 A 为正交阵，设 $\varphi_t(p)=A_tp+b_t$，代入方程可知

$$\frac{\partial(A_tp+b_t)}{\partial t}=X\big|_{A_tp+b_t},\quad\forall t,p$$

$$A_0=I,\quad b_0=0$$

将 A_t,b_t 对 t 的偏导记作 A_t' 与 b_t'，并用 $X(p)$ 表示 X 在 p 的值，则

$$X(A_tp+b_t)=A_t'p+b_t'$$

由于 A_t 可逆，即可知 $X(p_0)=A_t'(A_t^{-1}(p_0-b_t))+b_t'$ 从而其必然为线性映射，下假设

$$X(p)=Bp+c$$

则有

$$\frac{\partial\varphi_t(p)}{\partial t}=B\varphi_t(p)+c$$

再利用 $\varphi_0(p)=p$ 可直接解出其可写为 ($f(t)$ 的形式与 B 的特征值相关)

$$\varphi_t(p)=\mathrm{e}^{Bt}p+f(t)$$

再利用线性代数知识即可知 e^{Bt} 为正交阵恒成立当且仅当 B 为反对称阵，从而得证。

5. 2.29

(1) 计算可知

$$\begin{aligned}X_1X_2(f)=&-x^2(-x^3f_1-x^4f_2+x^1f_3+x^2f_4)_1+x^1(-x^3f_1-x^4f_2+x^1f_3+x^2f_4)_2\\&+x^4(-x^3f_1-x^4f_2+x^1f_3+x^2f_4)_3-x^3(-x^3f_1-x^4f_2+x^1f_3+x^2f_4)_4\end{aligned}$$

由于二次微分项与 X_2X_1 中抵消，只需看其中的一次微分项，即为

$$-x^2f_3+x^1f_4-x^4f_1+x^3f_2$$

而这即是 $X_3(f)$，$X_2X_1(f)$ 的一次微分项符号与此相反，从而结果为 $2X_3(f)$。

对其他两式同理。

(2) 由于 S^3 是 $\mathbb{R}^4$ 的嵌入子流形可知光滑性，而验证可发现 X_1、X_2、X_3 (看作四维向量) 与 x 内积 0，于是均处处与 S^3 相切。再次利用嵌入子流形的定义，计算规则仍然可以限制在 S^3 上，从而等式成立。

(3) 只需确定所有

$$\Gamma_{ji}^k=\langle D_{e_i}e_j,e_k\rangle$$

利用习题 2.17 可知右侧为 (任何 e_i,e_j 内积为常数，从而经过导算子后为 0)

$$\frac{1}{2}\big(\langle[e_i,e_j],e_k\rangle+\langle[e_k,e_i],e_j\rangle-\langle[e_j,e_k],e_i\rangle\big)$$

分类讨论即算得

$$\Gamma_{12}^3=\Gamma_{31}^2=\Gamma_{23}^1=-\Gamma_{21}^3=-\Gamma_{13}^2=-\Gamma_{32}^1=\frac{1}{2}$$

其余为 0。

6. 2.32

设球面坐标为 $\omega_1,\dots,\omega_n$。

利用球面度量的定义可知 $g=\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r+r^2g_1$，这里 g_1 为球面上的度量，g 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中度量。假设 r 为第 0 个分量，其余分量为 $1,\dots,n$，则 (默认下方出现的 i,j,k 为 1 到 n)

$$g_{ij}=r^2(g_1)_{ij}$$

$$g_{0j}=g_{j0}\quad g_{00}=1$$

从而

$$g^{ij}=r^{-2}g_1^{ij}$$

$$g^{0j}=g^{j0}=0,\quad g^{00}=1$$

于是利用 $\Gamma_{ij}^k=(\Gamma_1)_{ij}^k$ 有

$$f_{i,j}=(f_1)_{i,j}-\Gamma_{ij}^0\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$f_{0,0}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\Gamma_{00}^k\frac{\partial f}{\partial \omega^k}-\Gamma_{00}^0\frac{\partial f}{\partial r}$$

从而

$$\Delta f-r^{-2}\Delta_1 f=-r^{-2}g^{ij}\Gamma_{ij}^0\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\Gamma_{00}^k\frac{\partial f}{\partial \omega^k}-\Gamma_{00}^0\frac{\partial f}{\partial r}$$

注意到，只要 i,j 有 0 时，g_{ij} 即为常数，由此后两项一定为 0，化为

$$\Delta f-r^{-2}\Delta_1 f=-r^{-2}g^{ij}\Gamma_{ij}^0\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

最后计算

$$-g^{ij}\Gamma_{ij}^0=-\frac{1}{2}g^{ij}g^{0l}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

由于当 $l=0$ 时 g^{0l} 才非零，而 $g_{i0}=g_{0j}=0$，再利用 $(g_1)_{ij}$ 与 r 无关可知

$$-g^{ij}\Gamma_{ij}^0=\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial r}=\frac{1}{2}g_1^{ij}\frac{\partial r^2(g_1)_{ij}}{\partial r}=rg_1^{ij}(g_1)_{ij}=rm$$

从而得证。

7. 2.34

考虑某局部坐标系中，有 $\mathrm{d}V_m=\sqrt{G}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$，再设 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，即得 $i(X)\mathrm{d}V_m$ 为

$$\sqrt{G}\sum_i(-1)^{i-1}X^i\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

于是利用局部坐标下散度表达式即得

$$\mathrm{d}(i(X)\mathrm{d}V_m)=\frac{\partial\sqrt{G}X^i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n=(\mathrm{div}X)\mathrm{d}V_m$$

8. 2.35

(1) * 此处的比较好的算法利用了下一章知识。

由于坐标变换不改变结果，可设 $\{e_i\}$ 构成 p 点的法坐标系，也即满足 $g_{ij}=\delta_i^j$ (从而有 $g^{ij}=\delta_i^j$)，且 $\Gamma_{ij}^k=0$。

此时等式右侧即成为 (这里偏导代表对每个分量求偏导)

$$-g^{ij}(i(e_j)D_{e_i}\alpha)(X_1,\dots,X_r)=-D_{e_i}\alpha(e_i,X_1,\dots,X_r)=-\frac{\partial\alpha}{\partial e_i}(e_i,X_1,\dots,X_r)$$

设 e_i 对偶为 ω^i，并设

$$\alpha=\frac{1}{(r+1)!}\alpha_{k_1\dots k_{r+1}}\omega^{k_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{k_{r+1}}$$

考虑 k_1 到 k_{r+1} 中有 i 的情况，利用反称性可交换、合并，得到

$$-g^{ij}(i(e_j)D_{e_i}\alpha)=-\frac{1}{r!}\frac{\partial\alpha_{ii_1\dots i_r}}{\partial e_i}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}$$

对左侧，同理直接计算可知 (利用 $g^{ij}=\delta_i^j$，$\alpha^{i_1\cdots i_{r+1}}=\alpha_{i_1\dots i_{r+1}}$)

$$*\alpha=\frac{1}{(r+1)!(m-r-1)!}\delta_{i_1\dots i_m}^{1\dots m}\alpha_{i_1\dots i_{r+1}}\omega^{i_{r+2}}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_m}$$

$$\mathrm{d}(*\alpha)=\frac{1}{(r+1)!(m-r-1)!}\delta_{i_1\dots i_m}^{1\dots m}\frac{\partial\alpha_{i_1\dots i_{r+1}}}{\partial e_j}\omega^j\wedge\omega^{i_{r+2}}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_m}$$

当 $k_1,\dots,k_r,j,i_{r+1},\dots,i_m$ 构成 1 到 m 的一个排列时，若 j 固定，k_1 到 k_r 固定，选择共有 $r!(m-r-1)!$ 种，再将它们对应系数 j 求和即得到 (注意 δ 产生的逆序数成为了 -1 的次数)

$$*\mathrm{d}(*\alpha)=\frac{(m-r)!}{r!(m-r)!}\frac{r!(m-r-1)!}{(r+1)!(m-r-1)!}(r+1)(-1)^{r(m-r-1)}\frac{\partial\alpha_{jk_1\dots k_r}}{\partial e_j}\omega^{k_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{k_r}$$

利用 δ 的定义，对比系数与 -1 的次数可得结论。

(2) 在上方过程中已经出现了法坐标系下对偶标架中的表示

$$-\frac{1}{r!}\frac{\partial\alpha_{ii_1\dots i_r}}{\partial e_i}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}$$

(3) 同样在法坐标系下直接计算可得

$$\mathrm{div}X=\frac{\partial X^i}{\partial e_i}$$

而另一方面根据上一问即知

$$-\delta(\alpha_X)=\frac{\partial\alpha_i}{\partial e_i}=\frac{\partial g(X,e_i)}{\partial e_i}=\frac{\partial X^i}{\partial e_i}$$

从而得证。

9. 2.39

(1) 利用 d 与 δ 的对偶性有

$$(\tilde{\Delta}\omega,\mu)=(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}\mu)+(\delta\omega,\delta\mu)$$

从而取 $\mu=\omega$ 可知左侧为 0 当且仅当右侧 $\mathrm{d}\omega=\delta\omega=0$，得证。

(2) 由于 $\tilde{\Delta}\omega=\mathrm{d}(\delta\omega)+\delta(\mathrm{d}\omega)$，必然有

$$\tilde{\Delta}(A_r(M))\subset\mathrm{d}(A^{r-1}(M))+\delta(A^{r+1}(M))$$

而根据 Hodge 分解定理可知 $\mathrm{d}(A^{r-1}(M))+\delta(A^{r+1}(M))=\mathrm{d}(A^{r-1}(M))\oplus\delta(A^{r+1}(M))$，因此只需证明右包含于左，设 $\omega=\mathrm{d}\alpha+\delta\beta$，利用 Hodge 分解定理，设 α、β 的分解为

$$\alpha=\mathrm{d}\alpha_1+\delta\alpha_2+\alpha_3$$

$$\beta=\mathrm{d}\beta_1+\delta\beta_2+\beta_3$$

则利用 (1) 直接计算可发现

$$\mathrm{d}\alpha=\mathrm{d}\delta\alpha_2$$

$$\delta\beta=\delta\mathrm{d}\beta_1$$

完全类似地，对 α_2 再做分解可得到存在 α' 使得

$$\mathrm{d}\alpha=\mathrm{d}\delta\mathrm{d}\alpha'=(\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})\mathrm{d}\alpha'$$

同理存在 β' 使得

$$\delta\beta=\delta\mathrm{d}\delta\beta'=(\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta)\delta\beta'$$

也即得到

$$\omega=\tilde{\Delta}(\mathrm{d}\alpha'+\delta\beta')$$

从而得证。

10. 2.40

利用 Hodge 分解定理与习题 2.39，可知 $H^r(M)\oplus\mathrm{d}(A^{r-1}(M))\subset Z^r(M)$，从而只需证明另一边包含成立，也即

$$\delta(A^{r+1}(M))\cap Z^r(M)=\{0\}$$

设 $\omega=\delta\alpha$，则

$$(\mathrm{d}\omega,\mu)=(\delta\alpha,\delta\mu)$$

从而取 $\mu=\alpha$ 可从左为 0 得到 $\omega=\delta\alpha=0$，得证。

3 第三次作业

1. 2.43

   也即要证明
   $$\left\langle P_0^t(X_0), P_0^t(Y_0)\right\rangle_{\gamma(t)} = \langle X_0, Y_0\rangle_{\gamma(0)}$$
   这只需证明左侧对 t 求导为 0 即可。考虑包含 $\gamma(0)$ 的某局部坐标系下，设 $\gamma(t)$ 各分量为 $x^i(t)$，有 (右侧出现左侧未出现的指标代表求和)
   $$\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t} = -\Gamma_{ij}^k X^i \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}Y^k}{\mathrm{d}t} = -\Gamma_{ij}^k Y^i \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$
   于是内积的导数
   $$g_{kl}\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t}Y^l + g_{lk}\frac{\mathrm{d}Y^k}{\mathrm{d}t}X^l + \frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}t}X^iY^j = -g_{kl}\Gamma_{ij}^k X^i\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}Y^l - g_{lk}\Gamma_{ij}^k Y^i\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}X^l + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}X^iY^j$$
   整理得到
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X(t), Y(t)\rangle = -\left(g_{kl}\Gamma_{ij}^k + g_{ik}\Gamma_{lj}^k + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\right)X^iY^l\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$
   教材 100 页的式 3.14 已经算出了括号中为 0，由此得证。

   由于 γ 关于参数 t 是连续的，平行移动也是连续的，不可能翻转定向。

2. 2.44

   (1) 由 2.3 节引入部分的计算即可知，设曲面法向量为 $\vec{n}$ 有
   $$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = D_{\gamma'(t)}X + \left\langle \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}, \vec{n}\right\rangle \vec{n}$$
   从而 $D_{\gamma'(t)}X$ 即为 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ 的切向分量，由此得到了证明。

   (2) 由对称性可直接设 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$，则 $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$，$\gamma''(t) = (-\cos t, \sin t, 0)$ 处处为法向，从而由 (1) 得证。

   对 n 维情况，同样可设其为 $(\cos t, \sin t, 0, \ldots, 0)$，完全相同得证。

3. 3.10

   与 2.14(2) 相同可验证 $(x, y) \to (-x, y)$ 为其到自身的等距同构，从而利用命题 1.8，可知其不动点集合 $\{x = 0, y > 0\}$ 为测地线。

   进一步利用习题 2.14(2) 的结论，由于分式线性变换保圆/直线，通过确定三个点可以发现直线 $x = 0$ 在
   $$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$$
   中的像为直线 $x = m$ 或圆 $(x-m)^2 + y^2 = r^2$ (在上半平面中的部分)，而由于每点处任何方向都存在这些中的一个与之相切，利用测地线唯一性可知它们即为全部测地线。

4. 3.11

   由于圆柱面的任何一部分可以等距同构于平面的一部分，设 $q = (\sin\theta, y, \cos\theta)$，若 $\theta \neq \pi$，其在 $[0, \pi)$ 即从 $[0, \theta]$ 中任选一个角度切开展平 (也即挖去一条线后构造等距同构)，其在 $(\pi, 2\pi)$ 即从 $[\theta, 2\pi)$ 中任选一个角度切开展平，此时的连线为测地线，但并不如另一侧切开展平后的连线短，因此不为最短线 (当 $\theta = 0$ 时，连接展平后两侧的 p 与 q)。

   否则，$q = (0, y_0, -1)$，考虑螺线
   $$\gamma(t) = (\sin(3\pi t), ty_0, \cos(3\pi t))$$
   可发现 $\gamma(0) = p$、$\gamma(1) = q$，且其比直接 $\pi/2$ 处切开展平后连接要长，下面说明其为测地线。

   考虑所有与 $\{\gamma(t) \mid t \in (0, 1)\}$ 的欧氏距离不超过 εy_0 的点构成的集合，只要 ε 充分小，此集合即可以展开为平面的一部分，此时 $\gamma(t)$ 恰好为直线，从而得证。

4 第四次作业

1. 3.12

   考虑点 p 的法坐标系 $(U, \varphi; x_i)$，并取 $e_i(p)$ 使得其被 φ 推出后为 U 中的 $e_i(\varphi(p))$。

   由于可取 p 的邻域使得到任何点 q 都有从 p 出发的测地线落在其中，考虑 p 点如上定义的 $e_i(p)$ 沿测地线平行移动到 q 得到 $e_i(q)$，则由平行移动不改变内积得其构成邻域中的光滑正交标架场。再利用测地线唯一性，其沿 p 点的任何测地线平行即可知符合要求。

2. 3.14

   根据测地球的定义，其中的任何一点都存在与 p 的测地线连接，且测地线的长度 (等于指数映射中的切向量模长) 小于 δ，由此 $\mathscr{B}_p(\delta) \subset V_p(\delta)$。

   反之，根据三角不等式，$V_p(\delta)$ 中任何一点到 p 的最短线一定完全落在 $V_p(\delta)$ 中，再由法坐标邻域的定义，$V_p(\delta)$ 中的任何一点到 p 的测地线是它到 p 的最短线，由此其长度小于 δ，得证 $V_p(\delta) \subset \mathscr{B}_p(\delta)$。

3. 3.21

   (1) 考虑一列点 $q_i \in M$ 使得 $d(p_0, q_i) < d(p_0, M) + \frac{1}{i}$，由于 $d(p_0, q_i) \ge d(p_0, M)$，利用三角不等式可知 $i > j$ 时

   $$d(q_i, q_j) \le d(p_0, q_i) - d(p_0, q_j) < \frac{1}{i}$$

   由此利用柯西收敛定理可知 p_i 存在极限，设为 p_0，由闭可知 $p_0 \in M$，再由度量是连续函数得证。

   (2) 考虑 q_0 在 M 上的某 $\mathscr{B}_{q_0}(\delta)$ (下方指数映射也指 M 上)，并设 $\Phi : [0,1] \times (-\delta, \delta) \to N$ 满足 $\Phi(t, u) = \gamma_u(t)$，这里 $\gamma_u(t)$ 是连接 p_0 与 $\exp_{q_0}(uv)$ 的最短测地线，其中 $|v| = 1$ 且 $v \in T_{q_0}(M)$ 给定。

   根据弧长第一变分公式，由于 γ 为测地线，且端点 p_0 固定，可知

   $$0 = L'(0) = \frac{1}{l} \left\langle \gamma'(1), U(1) \right\rangle$$

   $\gamma'(1)$ 即代表测地线在 q_0 处的切向量，而 $U(1)$ 为横截曲线族在 1 处 (即 $\exp_{q_0}(uv)$ 在 $u = 0$ 时) 的切向量，即为 v，从而由 v 的任意性得证正交。

4. 3.23

   若存在长度有限的发散曲线，考虑 $\gamma(n)$，利用距离定义可知

   $$d(\gamma(n+m), \gamma(n)) \le \int_n^{m+n} |\gamma'(t)| \mathrm{d}t$$

   从而根据长度有限可知其为柯西列。若其极限在 M 中，记为 $\gamma(+\infty)$，则 $\{\gamma(t), t \in [0, +\infty]\}$ 为紧子集，与其为发散曲线矛盾，从而可知不完备。

   反之，若 M 不完备，考虑不存极限的柯西列，从中取出子列 x_n 使得 $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$ (利用柯西列定义容易实现)，并记 $\gamma(n) = x_n$，$\gamma(n)$ 到 $\gamma(n+1)$ 是连接 x_n 与 x_{n+1} 且保证 x_i 处连接光滑的曲线，长度不超过 $d(x_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2^n}$ (可以在 x_n 的某法坐标邻域中先构造，从任何方向出发可以光滑走到任意小的球面上且保证与球相切，再光滑旋转到 x_n 到 x_{n+1} 最短线所在的方向走出球面，随后按最短线走)。由上述限制可知 γ 的长度不超过 2，另一方面，若某紧子集包含全部 $\{x_n\}$，由度量空间其列紧，应存极限点，与 x_n 不存极限矛盾，从而得证。

5. 3.24

   利用 Hopf-Rinow 定理，其完备非紧等价于完备且无界。对任何一点 p，考虑

   $$\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$$

   由完备性其对 $t \in [0, +\infty)$ 可定义，而由于完备流形上任何一点与 p 可用最短测地线连接，任何一点都在某个 γ_v 上。

根据指数映射的定义与测地线的坐标变换，可知

$$\{\gamma_v(t), t\in[0,+\infty)\} = \{\gamma_{v/|v|}(t), t\in[0,+\infty)\}$$

于是可不妨设 $|v|=1$。

由指数映射定义可知其以弧长为参数。若任何 γ_v 都并非射线，则存在 s 使得 $\exp_p(tv), t\in[0,s]$ 不是连接 p 与 $\exp_p(sv)$ 的最短线。将所有 s 的下确界记为 s_v，由距离连续性可知 s_v 的下确界事实上是最小值。

通过分析估算可以发现 $v\to s_v$ 是连续函数，由此其在 $|v|=1$ 上存在最大值 m，于是，对曲面上的任何点，p 到其的最小距离不超过 m，否则将与其在某条测地线上达到矛盾，由此其有界，从而紧，这就导出了矛盾。

6. 3.25

由习题 3.23，由于同胚保紧子集，M 与 $\tilde{M}$ 的发散曲线一致。

对 $\tilde{M}$ 的任何发散曲线 $\tilde{\gamma}(t)$，由同胚可知 $\gamma(t)=f^{-1}(\tilde{\gamma}(t))$ 是 M 上的发散曲线。而根据完备，可知 $\gamma(t)$ 长度有限，根据 f 的要求即得 $f(\gamma(t))$ 长度不超过 c 倍的 $\gamma(t)$ 长度，从而得证。

7. 3.26

由 M 完备，任何两点 p,q 存在最短测地线 $\gamma(t)$ 连接；根据局部等距定义可知其保测地线。

若 f 不为单射，设 $f(p)=f(q)$，则 $f(\gamma(t))$ 为 $f(p)$ 到自身的测地线，且长度非零，与测地线唯一矛盾。

由其为局部光滑同胚，考虑拓扑基可知其为开映射，于是 $f(M)$ 为开集，根据完备流形的不可延拓性即得其不可能等距嵌入 N 使得 $f(M)$ 开，矛盾，从而其只能为满射。

8. 4.4

(1) 根据映射微分的定义，也即对任何 $Z\in T_pM$ 有

$$Z\langle X,X\rangle = 0$$

由此利用联络性质可知

$$\langle X, D_Z X\rangle = 0$$

这就是第一个式子。对第二个式子，利用 Kiliing 方程可知

$$\langle D_X X, Z\rangle = -\langle D_Z X, X\rangle = 0$$

(2) 左侧为 $\langle D_Z X, D_Z X\rangle$，右侧为

$$\frac{1}{2}ZZ\langle X,X\rangle - \langle D_X D_Z X, Z\rangle + \langle D_Z D_X X, Z\rangle + \left\langle D_{[X,Z]}X, X\right\rangle$$

利用无挠性与 Killing 方程有

$$\left\langle D_{[X,Z]}X, Z\right\rangle = \langle D_{D_X Z}X, Z\rangle - \langle D_{D_Z X}X, Z\rangle = \langle D_Z X, D_Z X\rangle - \langle D_Z X, D_X Z\rangle$$

而展开可知

$$\frac{1}{2}ZZ\langle X,X\rangle = Z\langle D_Z X, X\rangle = \langle D_Z D_Z X, X\rangle + \langle D_Z X, D_Z X\rangle$$

合并以上也即要证

$$-\langle D_X D_Z X, Z\rangle + \langle D_Z D_X X, Z\rangle + \langle D_Z X, D_Z X\rangle - \langle D_Z X, D_X Z\rangle + \langle D_Z D_Z X, X\rangle = 0$$

由于

$$\langle D_X D_Z X, Z\rangle + \langle D_Z X, D_X Z\rangle = X\langle D_Z X, Z\rangle$$

而 $\langle D_Z X, Z\rangle$ 根据 Killing 方程可知为 0，于是第一、四两项抵消，剩余

$$\langle D_Z D_X X, Z\rangle + \langle D_Z X, D_Z X\rangle + \langle D_Z D_Z X, X\rangle = 0$$

利用第一问 $\langle D_X X, D_Z Z\rangle = 0$，于是第一项可看成 $Z\langle D_X X, Z\rangle$ 将其重新合并得到要证

$$Z(\langle D_X X, Z\rangle + \langle D_Z X, X\rangle) = 0$$

利用 Killing 方程得成立。

9. 4.6

由习题 1.41 有 $\varphi_*([X,Y]) = [\varphi_*(X), \varphi_*(Y)]$，再通过第二章定理 4.8 可知 $\mathcal{R}(X,Y)Z$ 在等距下不变，进一步由等距的定义得 $R(X,Y,Z,W)$ 不变。

10. 4.8

(1) 由习题 1.18(2) 可知

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z]$$

再由 Jacobi 恒等式

$$[[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] + [[X,Y],Z] = 0$$

适当交换即可消去只剩 $-\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$，再交换一次得到结果。

(2) 由正交单位向量场可知 $\langle X,Y\rangle = 0$、$\langle X,X\rangle = \langle X,Y\rangle = 1$，从而

$$K(X,Y) = -R(X,Y,X,Y) = -\langle \mathcal{R}(X,Y)X, Y\rangle$$

利用 (1) 也即此为

$$\frac{1}{4}\langle [[X,Y],X], Y\rangle$$

也即只需证 $\langle [[X,Y],X],Y\rangle = \langle [X,Y],[X,Y]\rangle$。利用 $\langle X,Y\rangle$ 恒为 0，$XY\langle X,Y\rangle = 0$，再由习题 1.18(1) 有 $D_X X = D_Y Y = 0$，从而将 $XY\langle X,Y\rangle$ 展开得

$$0 = X\langle D_Y X, Y\rangle + X\langle X, D_Y Y\rangle = X\langle D_Y X, Y\rangle = \langle D_X D_Y X, Y\rangle + \langle D_Y X, D_X Y\rangle$$

再次利用习题 1.18(2) 并适当交换即得到结论。

11. 4.10

* 本质：转圈平行移动的角差可以看作曲面片上高斯曲率的积分。

考虑曲面片 $f: U \to M$，其中 $U = (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$，且保证 $f(0,s) = f(0,0)$ 恒成立，记此点为 p。设 $V_0 \in T_pM$，取 f 上的向量场 V 满足 $V(0,s) = V_0$，否则其为 V_0 沿 $t \to f(t,s)$ 的平行移动。

根据平行移动的定义有 $\frac{D}{\partial t}V = 0$，而由于平行移动与路径无关，对任何 $V(t,s)$，由于 $V(t,s)$ 是 $f(t,0)$ 到 $f(0,0)$ 到 $f(0,s)$ (过恒等的平行移动为恒等) 到 $f(t,s)$ 的平行移动，其与 $V(t,0)$ 沿 $s \to f(t,s)$ 的平行移动结果相同，于是还有 $\frac{D}{\partial s}V = 0$。

利用习题 4.3，将 $\frac{\partial}{\partial s}$ 简记为 ∂_s，计算可发现 $f_*\partial_s = \partial_s f$，对 t 同理，由此有

$$0 = D_{\partial s}D_{\partial t}V - D_{\partial s}D_{\partial t}V = \mathcal{R}(\partial_s, \partial_t)V$$

由 V_0 与 f 的任意性得结论。

12. 4.13

(1) 记 $\varphi_\theta(z)=z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，直接用分量计算可知 $\varphi_\theta(z)$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 到 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的等距，由于 $f(S^{2n+1})=S^{2n+1}$，根据诱导度量定义可知 φ_θ 是 S^{2n+1} 上的等距。

定义 $\mathbb{C}P^n$ 上的黎曼度量满足任何点处

$$\langle f_*v, f_*w\rangle = \langle v, w\rangle$$

由于 φ_θ 是等距，同一等价类中不同点处有

$$\langle v, w\rangle = \langle \varphi_{\theta*}v, \varphi_{\theta*}w\rangle$$

由此即可验证得此定义良好，且此定义自然满足 f 是等距淹没。

(2) 考虑映射 $z\to \mathrm{i}z$，其可以看作 S^{2n+1} 上的切向量场，记为 t，利用 X,Y 的单位性有

$$\tilde{D}_{\bar{X}}t=\mathrm{i}\bar{X},\quad \tilde{D}_{\bar{Y}}t=\mathrm{i}\bar{Y}$$

这里 $\tilde{D}$ 代表 S^{2n+1} 上标准度量的联络。

利用等距淹没的定义，$\bar{X}$、$\bar{Y}$ 是 S^{2n+1} 上的单位正交切向量场，从而直接计算可知其截面曲率为常数 1。

利用习题 4.12(2)，只需证明

$$\left\langle [\bar{X},\bar{Y}]^v, [\bar{X},\bar{Y}]^v\right\rangle = 4\left\langle \bar{X},\mathrm{i}\bar{Y}\right\rangle\left\langle \bar{X},\mathrm{i}\bar{Y}\right\rangle$$

将右侧 $\mathrm{i}\bar{Y}$ 写为 $\tilde{D}_{\bar{Y}}t$ 展开，利用单位正交性即得结论。

5 第五次作业

1. 4.15

(1) 由于 p 与 π 正交，考虑 π 的单位正交基 e_1,e_2，则 p,e_1,e_2 单位正交，同理取出 $e_1',e_2'\in\pi'$，有 q,e_1',e_2'。将它们扩充成 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的单位正交基并构造线性变换 $x\to Qx$ 使其对应，则 Q 为正交阵且 $Qp=q$、$Qe_1=e_1'$、$Qe_2=e_2'$。

由于 Q 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的等距，其在诱导度量下也是等距，且利用诱导度量性质可验证 $Q_*(e|_p)=(Qe)|_q$，从而得证。

(2) 利用习题 4.6，等距不改变曲率，于是其也不改变截面曲率，由此即得任何截面曲率相同。

2. 4.16

将 $\mathcal{R}$ 看作 $(1,3)$ 型张量场，即 $\mathcal{R}(\alpha,X,Y,Z)=\alpha(\mathcal{R}(X,Y)Z)$，则根据定义可知 $D_W\mathcal{R}(\alpha,X,Y,Z)$ 为

$$W(\mathcal{R}(\alpha,X,Y,Z))-\mathcal{R}(D_W\alpha,X,Y,Z)-\mathcal{R}(\alpha,D_WX,Y,Z)-\mathcal{R}(\alpha,X,D_WY,Z)-\mathcal{R}(\alpha,X,Y,D_WZ)$$

而另一方面有

$$\mathcal{R}(D_W\alpha,X,Y,Z)=D_W\alpha(\mathcal{R}(X,Y)Z)=W(\alpha(\mathcal{R}(X,Y)Z))-\alpha(D_W(\mathcal{R}(X,Y)Z))$$

利用 $\mathcal{R}$ 看作张量场的定义即得 $\alpha(D_W(\mathcal{R}(X,Y)Z))$ 为

$$\alpha(D_W(\mathcal{R}(X,Y)Z))-\alpha(\mathcal{R}(D_WX,Y)Z)-\alpha(\mathcal{R}(X,D_WY)Z)-\alpha(\mathcal{R}(X,Y)D_WZ)$$

利用线性性将此 $(1,3)$ 型张量场重新看作到切空间的映射，最终得到

$$D_W\mathcal{R}(X,Y,Z)=D_W(\mathcal{R}(X,Y)Z)-\mathcal{R}(D_WX,Y)Z-\mathcal{R}(X,D_WY)Z-\mathcal{R}(X,Y)D_WZ$$

于是黎曼局部对称空间等价于对任何 W,X,Y,Z 有

$$D_W(\mathcal{R}(X,Y)Z)=\mathcal{R}(D_WX,Y)Z+\mathcal{R}(X,D_WY)Z+\mathcal{R}(X,Y)D_WZ$$

若 M 为局部黎曼对称空间，设 E_1, E_2 为 e_1、e_2 出发构造的沿 γ 平行的向量场，由平行移动的性质与上述展开可知

$$D_{\gamma'(t)}(\mathcal{R}(E_1,E_2)E_1) = 0$$

从而其也沿曲线平行，利用平行移动保内积可知 $\langle \mathcal{R}(E_1,E_2)E_1, E_2\rangle$ 保持不变。另一方面，由平行移动保内积可知 E_1, E_2 在曲线上保持标准正交性，从而截面曲率恒定。

反之，同样通过 E_1, E_2 标准正交性保持，由条件可知对任何 $\gamma(t)$ 有 (默认下方的计算针对的点为 $\gamma(t)$)

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(E_1,E_2,E_1,E_2)$$

与上完全类似计算，利用平行性知 $D_{\gamma'(t)}E_i = 0$，从而

$$(D_{\gamma'(t)}R)(E_1,E_2,E_1,E_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(E_1,E_2,E_1,E_2) = 0$$

对任何沿 $\gamma(t)$ 平行的向量场 X, Y，根据平行不改变内积知其可以分解为 $x^1E_1 + x^2E_2$、$y^1E_1 + y^2E_2$，这里 E_1, E_2 表示 $\gamma(0)$ 处将 x, y 标准正交化后沿 $\gamma(t)$ 平移得到的向量场，x^i、y^i 为常数。计算有

$$(D_{\gamma'(t)}R)(X,Y,X,Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(X,Y,X,Y) = x^iy^jx^ky^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(E_i,E_j,E_k,E_l)$$

当 $i = j$ 或 $k = l$ 时，利用反称性 $R(E_i,E_j,E_k,E_l) = 0$，于是求导为 0，进一步利用反称性将 E_i、E_l 交换为 1 可知其能写为 $R(E_1,E_2,E_1,E_2)$ 乘一些系数，从而导数为 0，这就得到

$$(D_{\gamma'(t)}R)(X,Y,X,Y) = 0$$

考虑 $p = \gamma(0)$ 处，由于 $X|_{\gamma(0)}, Y|_{\gamma(0)}$ 均可任取，得到 p 点处对任何 $x, y \in T_pM$ 有

$$(D_{\gamma'(t)}R)(x,y,x,y) = 0$$

另一方面，利用 $D_{\gamma'(t)}$ 的线性性，由于 R 满足曲率型张量的定义，类似上方计算可验证 $D_{\gamma'(t)}R$ 也满足曲率型张量的定义，从而由引理 3.1 可知 $D_{\gamma'(t)}R = 0$，再由 $\gamma'(0)$ 与 $\gamma(0)$ 可任取得到 $DR = 0$。

最后，直接展开 $DR = 0$ 可得

$$V(\langle\mathcal{R}(X,Y)Z,W\rangle) = \langle\mathcal{R}(D_VX,Y)Z + \mathcal{R}(X,D_VY)Z + \mathcal{R}(X,Y)D_VZ, W\rangle + \langle\mathcal{R}(X,Y)Z, D_VW\rangle$$

再由联络与度量相容，将右侧第二项移至左侧可得

$$\langle D_V(\mathcal{R}(X,Y)Z), W\rangle = \langle\mathcal{R}(D_VX,Y)Z + \mathcal{R}(X,D_VY)Z + \mathcal{R}(X,Y)D_VZ, W\rangle$$

由其对任何 W 成立即得证。

3. 4.17

考虑以 Ricci 主方向作为标准正交基的 e_i，对应的对偶余切标架 ω^i，记 $\kappa_i = \mathrm{Ric}(e_i)$，即有

$$R_{ijkl} = \frac{1}{m-1}(\kappa_s\delta_{is}\delta_{ls}\delta_{jk} - \kappa_t\delta_{it}\delta_{kt}\delta_{jl}) = \frac{\kappa_i}{m-1}(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})$$

利用对称性，考虑 $i = l$、$j = k \neq i$ 的情况，即可得到 $\kappa_i = \kappa_k$，于是 κ_i 为常值，记为 κ，而再由此时 $\delta_{ij} = g_{ij}$，利用推论 3.3 得证。

4. 4.18

由数量曲率与基底选取无关，对 $x \in S^{m-1}$，记 $e_i(s)$ 满足 $e_1(s) = s$，$e_1(s), \dots, e_n(s)$ 单位正交、对 s 光滑，且在 s 取遍球面时分别取遍球面 (可利用球坐标直接构建)，有

$$S(p) = \sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i(s)) = \frac{1}{\omega_{m-1}}\int_{S^{m-1}}\sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i(s))\mathrm{d}V_{S^{m-1}}$$

而由于每个 e_i 分别取遍球面，它们的积分相同，从而得到这即为

$$\frac{m}{\omega_{m-1}}\int_{S^{m-1}}\mathrm{Ric}(e_1(s))\mathrm{d}V_{S^{m-1}}=\frac{m}{\omega_{m-1}}\int_{S^{m-1}}\mathrm{Ric}(s)\mathrm{d}V_{S^{m-1}}$$

这即是结论的形式。

5. 5.1

若 $J(t_0)=0$ 且有一列 $t_i\to t_0$ 使得 $J(t_i)=0$，设 P_t 表示沿 $\gamma(t)$ 的平移，则利用第二章定理 7.2 与导数存在性可知

$$J'(t_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{(P_{t_n}^{t_0})^{-1}J(t_n)-J(t_0)}{t_n-t_0}=0$$

从而再由唯一性可知 $J(t)$ 恒为 0，矛盾。

6. 5.4

利用例 1.1 的过程，此 Jacobi 场一定可以写为

$$J(t)=\sinh(\sqrt{-c}t)A(t)+\cosh(\sqrt{-c}t)B(t)$$

其中 $A(t)$、$B(t)$ 延 γ 平行。

由于 $J(0)=0$，代入可得 $B(0)=0$，再由平行移动不改变模长即得 $B(t)=0$，从而有 (从 $A(t)$ 中提出某非零常数，不影响平行性)

$$J(t)=\sinh(\sqrt{-c}t)A(t)=\frac{\sinh(\sqrt{-c}t)}{\sinh(\sqrt{-c}l)}C(t)$$

由条件可知 $C(l)=v$，且 C 沿 $\gamma(t)$ 平行，利用 1.13 式与切映射线性性有

$$v=J(l)=(\exp_{\gamma(0)})_{*l\gamma'(0)}(lJ'(0))$$

从而直接计算可得 $C(0)$ 与 u_0 相差倍数，而根据平行移动不改变模长，考虑 l 处可知 $|C(0)|=1$，从而 $C(0)=w(0)$，再由平行移动唯一性得证。

7. 5.9

由局部等距定义 f_* 处处可逆，取 $v=f_{*p}^{-1}(\beta'(a))$，考虑 $\gamma(0)=p$、$\gamma'(0)=v$ 的 γ，利用完备性由 Hopf-Rinow 定理知其可无限延伸，下面说明其符合要求。

利用测地线在局部等距下仍为测地线，$f\circ\gamma$ 必然是测地线，且由定义方式可知 $f\circ\gamma(0)=\beta(a)$、$(f\circ\gamma)'(0)=\beta'(a)$，利用测地线唯一性得其与 β 局部相等，再由无限延伸性即可得 γ 在 0 到 $b-a$ 的部分就是 β (由唯一性可直接得到参数对应相同)。

8. 5.10

由于 T_pM 和欧氏空间光滑同胚，只需证明 M 与 T_pM 光滑同胚即可。考虑 p 处的指数映射，由 Hopf-Rinow 定理其在 T_pM 处处有定义，且由非退化性，利用引理 3.1 证明过程可知其为局部微分同胚，从而与定理 3.3 完全相同得证。

9. 5.11

(1) 由对称性，沿过 z 轴的任何平面对称是等距同构，由此根据第三章命题 1.8 可知 $z=x^2$ 绕 z 轴任意旋转后仍为测地线，再由于它们在 p 的切向量可为任何方向，根据唯一性它们就是过 p 的全部测地线，由于它们彼此不交即知 $\exp_{p*}$ 在任何 v 处非退化，从而 p 为极点。

(2) 设 $r(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$，直接计算有

$$r_u=(1,0,2u),\quad r_v=(0,1,2v),\quad n=\frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,-2v,1)$$

由此进一步得到高斯曲率

$$K=\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}>0$$

10. 5.12

    若 $\tilde{M}$ 完备，由覆叠度量定义可知 $|\pi_{*p}(v)| = |v|$，从而利用引理 3.2 即得 M 完备。

    若 M 完备，利用 Hopf-Rinow 定理，证明 $\tilde{M}$ 完备只需证其测地线可任意延伸。考虑某测地线 $\tilde{\gamma}(t)$，使得 $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$。记 $\pi(\tilde{p}) = p$。由 π 为局部等距，$\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ 是 M 上的测地线，且可任意延伸。利用习题 5.9，γ 延伸后 (记为 β) 仍然可提升到 M 上，保证以 $\tilde{p}$ 为始点，记提升后为 $\tilde{\beta}$。由唯一性，$\tilde{\beta}$ 包含 $\tilde{\gamma}$，且利用局部等距性其长度与 β 相同，由此即说明 $\tilde{\gamma}$ 可任意延伸，得证。

6 第六次作业

1. 5.17

   考虑等距变换 f，对任何 $p \in S^n(r)$，设 p/r 与切空间的 $e_1, \ldots, e_n$ 构成 p 处 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的单位正交基，则由等距性 (与切空间定义) 可知 $f(p)/r$、$f_*(e_1), \ldots, f_*(e_n)$ 构成 $f(p)$ 处 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的单位正交基。构造正交变换 Q 使得

   $$Q(p) = f(p), \quad Q(e_1) = f_*(e_1), \quad \ldots, \quad Q(e_n) = f_*(e_n)$$

   可验证 Q 在 S^n 上的限制 $\tilde{Q}$ 即满足 $\tilde{Q}(p) = f(p)$ 且 $\tilde{Q}_{*p} = f_{*p}$，且其为 S^n 上的等距，从而由本章引理 5.1 可得结论。

2. 6.1

   (1) 先证明光滑曲线情况，与 3.3 节相同记号，此时由于

   $$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^b \langle \tilde{T}, \tilde{T} \rangle \mathrm{d}t$$

   有

   $$E'(u) = \frac{1}{2}\int_0^b \frac{\partial}{\partial u}\langle \tilde{T}, \tilde{T} \rangle \mathrm{d}t = \int_0^b \langle D_{\partial/\partial u}\tilde{T}, \tilde{T} \rangle \mathrm{d}t$$

   剩余过程与 3.3 节完全相同。由于此时不再有分母项，无需假设 $\gamma(t)$ 的参数与弧长参数正比即可得到 (由拉回丛上诱导联络定义，$D_{\partial/\partial t}\gamma' = D_{\gamma'}\gamma'$)

   $$E'(0) = \langle U, \gamma' \rangle \big|_0^b - \int_a^b \langle U, D_{\gamma'}\gamma' \rangle \,\mathrm{d}t$$

   同理再推广到分段光滑曲线即得结果。

   (2) 若其为测地线，则其光滑且 $D_{\gamma'}\gamma' = 0$，从而得证。

   若 $E'(0) = 0$ 对满足 $U(0) = U(b) = 0$ 的 U 恒成立，类似定理 3.5 构造 $U(t)$，可得只能 $D_{\gamma'}\gamma' = 0$ 在每个分段恒成立且 γ 光滑，从而其为测地线。

   (3) 直接计算有

   $$E''(u) = \int_0^b \frac{\partial}{\partial u}\langle D_{\partial/\partial u}\tilde{T}, \tilde{T} \rangle \mathrm{d}t = \int_0^b \left(\langle D_{\partial/\partial u}D_{\partial/\partial u}\tilde{T}, \tilde{T} \rangle + \langle D_{\partial/\partial u}\tilde{T}, D_{\partial/\partial u}\tilde{T} \rangle \right) \mathrm{d}t$$

   利用 $D_{\partial/\partial u}\tilde{T} = D_{\partial/\partial t}\tilde{U}$ 可将上式化为

   $$\int_0^b \left(\langle D_{\partial/\partial u}D_{\partial/\partial t}\tilde{U}, \tilde{T} \rangle + \langle D_{\partial/\partial t}\tilde{U}, D_{\partial/\partial t}\tilde{U} \rangle \right) \mathrm{d}t$$

   与 6.1 节推导 1.3 式完全类似，再利用

   $$\langle U', U' \rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle U, U' \rangle - \langle U, U'' \rangle$$

   即可得到结论。

(4) 由定义代入 $I_\gamma(U,U)$ 可发现此即为类似式 1.3 的分部积分前的形式，从而在上问过程中已经得到。

3. 6.4

与定理 2.1 证明过程完全类似，加入 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ 项后估算改写为

$$\sum_{i=1}^{m-1} L_i''(0) \le \int_0^l \left(\sin\frac{\pi t}{l}\right)^2 \left(\frac{\pi^2}{l^2}(m-1) - a - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

计算可得此为

$$\frac{l}{2}\left(\frac{\pi^2}{l^2}(m-1) - a\right) - \int_0^l \left(\sin\frac{\pi t}{l}\right)^2 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

利用分部积分可得第二项为

$$\int_0^l \frac{\pi}{l}\sin\frac{2\pi t}{l} f\,\mathrm{d}t \le \pi c$$

综合可类似定理 2.1 得

$$\frac{l}{2}\left(\frac{\pi^2}{l^2}(m-1) - a\right) + \pi c \ge 0$$

左侧乘 l 即为开口向下的二次函数，求解右侧零点即得到上界。

4. 6.6

设 γ 为一条正则测地线，且 $\gamma(0)=\gamma(l)$，先证明存在与 $\gamma'(t)$ 处处正交且沿 $\gamma(t)$ 平行的单位向量场 $U(t)$。

设 $p=\gamma(0)$，考虑沿 γ 的平行移动，从 0 移动到 l 后其给出了 $T_pM \to T_pM$ 的正交变换 P，且由平行移动的性质 $P(\gamma'(0))=\gamma'(0)$、P 保持定向不变。由于 P 为正交阵，可知 $\det P = 1$，再由复特征值成对，实特征值为 ± 1，通过特征值乘积为 1 可知特征值 1 几何重数至少为 2。由 P 正交，其为规范阵，于是特征值代数重数与几何重数相同，存在向量单位向量 $U(0)$ 与 $\gamma'(0)$ 垂直且 $P(U(0))=U(0)$，再将其平行移动即得符合要求的向量场。

构造 γ 的变分 Φ 使得 U 为其变分向量场，则由条件有 $U'=0$、$|U|=1$，于是根据弧长第二变分公式、γ 正则与 $U(a)=U(a+l)$、$\gamma(a)=\gamma(a+l)$ 可知

$$L''(0) = -\int_0^l K(\gamma',U)\mathrm{d}t < 0$$

从而得证。

5. 6.8

对任何 $p\in M$，考虑两个单位正交向量 $E_1,E_2\in T_pM$，设 $\gamma:[0,\pi]\to M$ 是满足 $\gamma(0)=p$、$\gamma'(0)=E_1$ 的正规测地线，由条件 $\gamma(\pi)=q$。

构造 γ 的测地变分

$$\Phi(t,u) = \exp_p t(E_1\cos u + E_2 \sin u)$$

由定义可知其变分向量场 U 为法 Jacobi 场，且由 $\Phi(0,u)=p$、$\Phi(\pi,u)=q$ 可知 $U(0)=U(\pi)=0$。

由引理 4.3 设 $U(t)=tE(t)$，有 $E(0)=U'(0)=E_2$。取沿 $\gamma(t)$ 平行的单位正交标架场 $e_i(t)$，使得 $e_m=\gamma'$，并设

$$U = \sum_{i=1}^{m-1} U^i e_i$$

记 $K(t)=K(\gamma'(t),U(t))$，当 $t>0$ 时由数乘不影响截面曲率可知其为 $K(\gamma'(t),E(t))$。由条件 γ 为连接 p,q 的最短线，且可变分出其他最短线，从而有

$$0 = I_{\gamma([0,\pi])}(U,U) = \int_0^\pi \sum_i |U^{i\prime}|^2\mathrm{d}t - \int_0^\pi K(t)|U|^2\mathrm{d}t$$

由习题 6.7 可知此式大于等于 $|U|^2(1-K(t))$ 的积分，从而由 U 在非端点处非零与 $K(t)\le 1$ 可知 $K(t)=1$ 恒成立，令 $t\to 0$ 又可推出 $K(E_1,E_2)=1$，于是其截面曲率恒为 1，由第五章定理 5.2 得证。

6. 6.11

利用习题 6.10 的结论，对任何 γ，取出对应的 t_0。由指数定义可知存在 $Y \in \mathscr{V}_0^{\perp}(\gamma|_{[-t_0,t_0]})$ 使得 $I(Y,Y) < 0$。由 $\mathscr{V}$ 定义，存在 $\gamma_{[-t_0,t_0]}$ 的固定端点变分 Φ 使得 Y 为其变分向量场，由此直接计算可得 $L''(0) < 0$，于是其不为最短。

举例：考虑任何诱导度量下的直纹面，其上的直线必然为测地直线，从而满足。

7. 6.14

若 $L(s_0) \geq \pi K_0^{-1/2}$ 则已经得证。否则，利用 Rauch 比较定理可得 $\exp_p$ 在 $B = B_0(\pi K_0^{-1/2})$ 内无退化点。对曲线 α_s，记其提升 $\tilde{\alpha}_s$ 满足连接 0 与 $\tilde{q} = \exp_p^{-1}(q) \in B$，且 $\alpha_s = \exp_p \circ \tilde{\alpha}_s$。

先证明，对任何 $\varepsilon \in [0,1]$，存在 $s \in [0,1]$ 使得 α_s 的提升 $\tilde{\alpha}_s$ 存在，且 $\tilde{\alpha}_s$ 上有到 ∂B 距离小于 ε 的点：若否，对某 $\varepsilon > 0$，所有提升 $\tilde{\alpha}_s$ 到 ∂B 的距离大于 ε，于是所有能够提升的 s 构成 $[0,1]$ 的既开又闭子集，只能为 $[0,1]$。然而，根据提升的唯一性，由无退化点可知 α_1 不可能提升，矛盾。

* 本质上这步操作是因为 α_1 对应的原像必然会离开 B，而 α_0 在 B 中，因此可以找到充分接近边界的提升。

由此，设 s 满足上述要求，根据条件可知

$$L(\gamma_0) + L(\gamma_s) \geq 2\pi K_0^{-1/2} - 2\varepsilon$$

取一列 $\varepsilon \to 0$ 使得对应的 s 收敛，即得最终结果。

8. 6.16

(1) 等式可直接通过分部积分得到。若 f 在 $(0,t_1)$ 上大于 0 且 $f(t_1) = 0$、$\tilde{f}$ 在 $(0,t_1]$ 上大于 0，利用 0 到 t_1 的积分结果可知

$$\tilde{f}(t_1)f'(t_1) + \int_0^{t_1} (K - \tilde{K}) f\tilde{f}\,\mathrm{d}t = 0$$

由假设可知 $f'(t_1) \leq 0$，而第二项也 ≤ 0，由此等号成立当且仅当 $K = \tilde{K}$ 恒成立且 $f'(t_1) = 0$，但此时利用解唯一性可知 $\tilde{f}(t_1) = 0$，矛盾。

(2) 由条件移项可得

$$0 \leq \int_0^t (\tilde{K} - K)\tilde{f}f\,\mathrm{d}t = \tilde{f}(t)f'(t) - f(t)\tilde{f}'(t)$$

而同除以 $\tilde{f}(t)f(t)$ 即得到

$$(\log f)'(t) \geq (\log \tilde{f})'(t)$$

从而由 0 处相等可知 $\log f \geq \log \tilde{f}$，从而 $f \geq \tilde{f}$，等号成立当且仅当此前第一个等号取等，于是此前 $\tilde{K} = K$。

二维时，将 $T_{\gamma(t)}M$ 分解为 $\gamma'(t)$ 方向与垂直方向，可发现平行方向的 X 无影响，而垂直方向的方程 (利用 K 的特性可不妨设 X 是与 γ' 垂直的单位向量场) 即可化为本题的方程，从而得到等价性。