随机模拟方法 习题解答

原生生物

* 李铁军老师《随机模拟方法》课程作业。

目录

1 讲义 1 **2**

2 讲义 2 **3**

3 讲义 3 **5**

4 讲义 4 **7**

5 讲义 5 **8**

6 讲义 6 **10**

7 讲义 7 **12**

8 讲义 8 **13**

9 讲义 9 **14**

10 讲义 10 **15**

11 讲义 11 **16**

12 讲义 12 **18**

13 讲义 13 **21**

14 讲义 14 **24**

15 讲义 16 **25**

16 讲义 18 **27**

1 讲义 1

1. 有效性：由于 $L^{(m)}$ 与 $R^{(m)}$ 为独立采样，有

$$\mathbb{E}(C) = K\mathbb{E}(L^{(1)}R^{(1)}) = K\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\sqrt{Kp_i}} A_{\cdot,i} \frac{1}{\sqrt{Kp_i}} B_{i,\cdot} = \sum_{i=1}^{n} A_{\cdot,i} B_{i,\cdot} = AB$$

表征准确度：仍通过独立性可知 (这里上标 $*2$ 表示逐元素平方)

$$\mathrm{Var}(C) = K\,\mathrm{Var}(L^{(1)}R^{(1)}) = K\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{Kp_i} A_{\cdot,i} B_{i,\cdot} - \frac{1}{K} AB\right)^{*2} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{p_i} A_{\cdot,i} B_{i,\cdot} - AB\right)^{*2}$$

也即均方误差为 $O(K^{-1/2})$ 量级，有 $\frac{1}{2}$ 阶收敛性。

2. 由于

$$I(f) - I_N^{(1)}(f) = \sum_{i=1}^{N} \int_{(i-1)h}^{ih} f(x)\mathrm{d}x - hf\left(\frac{2i-1}{2}h\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_{(i-1)h}^{ih} \left(f(x) - f\left(\frac{2i-1}{2}h\right)\right)\mathrm{d}x$$

由对称性不妨考虑第一个区间的情况，由 $f \in C^1[0,1]$ 利用泰勒展开知存在 ξ_x 在 $\frac{h}{2}$ 与 x 之间，使得

$$f(x) = f(h/2) + (x - h/2)f'(h/2) + \frac{1}{2}(x - h/2)^2 f''(\xi_x)$$

且 f'' 在 $[0,1]$ 连续，因此绝对值有上界 M。由此，计算知积分可化为

$$\left|\int_0^h (f(x) - f(h/2))\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^h \frac{1}{2}(x - h/2)^2 f''(\xi_x)\right|\mathrm{d}x \le \frac{M}{2}\int_0^h (x - h/2)^2\mathrm{d}x = \frac{h^3}{24}M$$

从而可知

$$|I(f) - I_N^{(1)}(f)| \le N\frac{h^3}{24}M = \frac{h^2}{24}M = O(h^2)$$

3. 数值实验结果为 (代码文件 c1.m)

```
N =       2,  err = 1.339782e-01
N =       4,  err = 3.850789e-02,  ord = 1.798772
N =       8,  err = 1.092134e-02,  ord = 1.818005
N =      16,  err = 8.361873e-02,  ord = -2.936677
N =      32,  err = 4.977224e-03,  ord = 4.070413
N =      64,  err = 2.325847e-02,  ord = -2.224343
N =     128,  err = 1.752857e-02,  ord = 0.408048
N =     256,  err = 1.135615e-02,  ord = 0.626234
N =     512,  err = 8.172706e-03,  ord = 0.474588
N =    1024,  err = 2.001819e-02,  ord = -1.292426
N =    2048,  err = 8.018752e-03,  ord = 1.319862
N =    4096,  err = 8.746202e-03,  ord = -0.125279
N =    8192,  err = 3.749035e-03,  ord = 1.222138
N =   16384,  err = 2.395019e-03,  ord = 0.646482
N =   32768,  err = 5.172736e-05,  ord = 5.532966
N =   65536,  err = 1.039546e-03,  ord = -4.328882
N =  131072,  err = 4.437889e-04,  ord = 1.228007
N =  262144,  err = 2.601206e-04,  ord = 0.770693
N =  524288,  err = 8.983099e-05,  ord = 1.533895
N = 1048576,  err = 5.152787e-05,  ord = 0.801860
```

```
N = 2097152,  err = 2.534782e-04,  ord = -2.298437
N = 4194304,  err = 6.960062e-05,  ord = 1.864690
N = 8388608,  err = 1.092693e-04,  ord = -0.650717
```

这里 N 为取点个数，err 为积分与真实结果的误差，ord 为收敛阶数，算法为 (now 指当前结果，old 指上一次的结果)

$$\mathrm{ord} = \frac{\ln(\mathrm{err}_{\mathrm{old}}/\mathrm{err}_{\mathrm{now}})}{\ln(N_{\mathrm{now}}/N_{\mathrm{old}})}$$

可以发现，单次误差并不稳定，但以 $\log_2 N$ 为横坐标，$-\frac{1}{2}\log_2 N$ 与 $\log_2 \mathrm{err}$ 为纵坐标，作图可发现的确达到了总体 $\frac{1}{2}$ 阶收敛性。

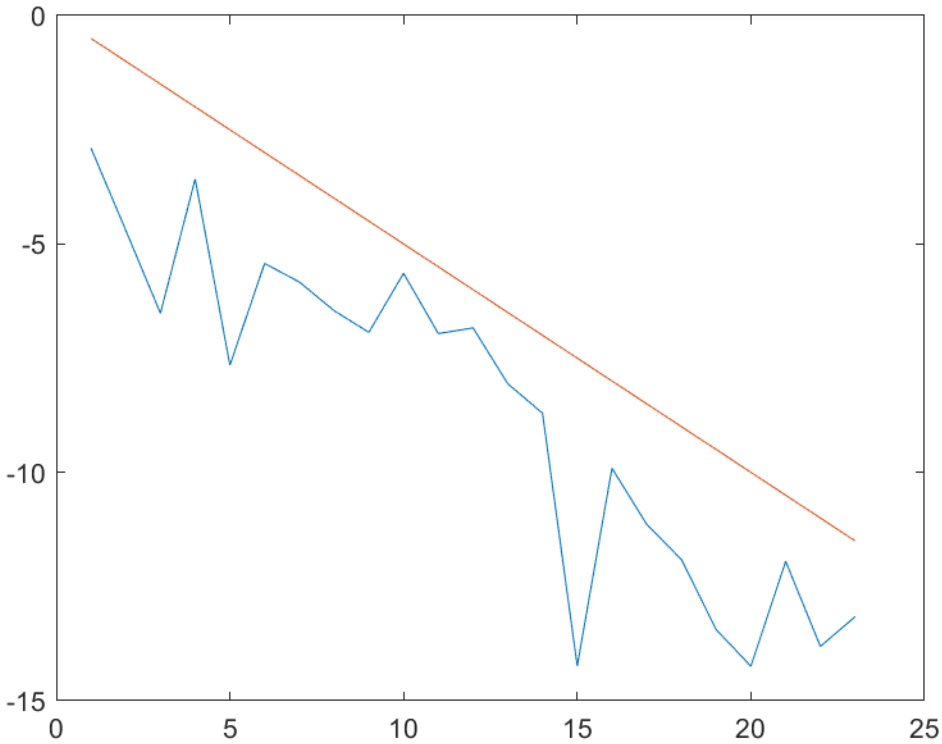

图 1: MC 收敛结果 (红线为 $\frac{1}{2}$ 阶收敛标准曲线，蓝线为实际结果)

2 讲义 2

1. ω 不在 A_i 上极限中的概率为 (上标横线表示补集)

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\bar{A}_k\right)$$

利用相互独立性，各自补集亦相互独立，由此

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\bar{A}_k\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\bar{A}_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=n}^{\infty} P(\bar{A}_k)$$

只需证明对任何 n，$\prod_{k=n}^{\infty} P(\bar{A}_k) = 0$ 即可，而由于对任何 n 都有 $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_n) = +\infty$，利用 $P(\bar{A}_k) = 1 - P(A_k) < \mathrm{e}^{-P(A_k)}$ 得到结论。

2. 对任何 $k \ge 0$ 有

$$P(X+Y=k) = \sum_{t=0}^{k} P(X=t)P(Y=k-t) = \sum_{t=0}^{k} \frac{\lambda^t}{t!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\mu^{k-t}}{(k-t)!}\mathrm{e}^{-\mu} = \sum_{t=0}^{k}\frac{C_k^t\lambda^t\mu^{k-t}}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}$$

利用二项式定理即可知分母求和为 $(\lambda+\mu)^k$，符合 $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$ 的分布。

3. 只考虑 X，Y 同理可得。由习题 2 即知

$$P(X=t|X+Y=N)=\frac{P(X=t)P(Y=N-t)}{P(X+Y=N)}=\frac{\lambda^t}{t!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\mu^{N-t}}{(N-t)!}\mathrm{e}^{-\mu}\left(\frac{(\lambda+\mu)^N}{N!}\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}\right)^{-1}$$

令 $p=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$，化简可得原式为

$$C_N^t\frac{\lambda^t\mu^{N-t}}{(\lambda+\mu)^N}=C_N^tp^t(1-p)^{N-t}$$

即符合二项分布。

4. (1) 由于 $X>s+t$ 时必有 $X>s$，原式也即

$$P(X>s+t)=P(X>s)P(X>t)$$

而 $a\geq 0$ 时

$$P(X>a)=\int_a^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\lambda a}$$

由此得证。

(2) 记 $h(x)=-\ln P(X>x)$，则条件化为 $s,t>0$ 时 $h(s)+h(t)=h(s+t)$，代入 s,t 趋于 0，由分布函数右连续性可知 $h(0)=0$，于是 $P(X>0)=1$。

记 $\lambda=h(1)$，则归纳可知 $n\in\mathbb{N}$ 时 $h(n)=n\lambda$，而利用 $m\in\mathbb{N}$ 时 $mh(n/m)=h(n)$ 即可知在所有有理点都有 $h(q)=q\lambda$，再次利用分布函数右连续性即得 $x\geq 0$ 时 $h(x)=\lambda x$，即

$$P(X>x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

求导即可得到密度函数，与指数分布一致。

5. 记 $c_{ij}=E[X_iX_j]=(\Sigma)_{ij}$，向量 $\mathbf{s}=\Sigma\mathbf{t}$，$s_i$ 代表 $\mathbf{s}$ 的各分量，有 s_i 对 t_j 求偏导结果为 c_{ij}

由于要计算的即为 $M(\mathbf{t})$ 对 t_1、t_2 直到 t_n 各求一次导的结果，并代入 $\mathbf{t}$ 为 0，利用定义可知

$$\frac{\partial M}{\partial t_1}=s_1M$$

而

$$\frac{\partial s_1M}{\partial t_2}=(c_{12}+s_1s_2)M$$

$$\frac{\partial(c_{12}+s_1s_2)M}{\partial t_3}=(c_{12}s_3+c_{23}s_1+c_{13}s_2+s_1s_2s_3)M$$

下面归纳证明，M 对 t_1 到 t_k 求导后的结果为 S_nM。这里 S_n 为若干项的求和，这些项均为一些 $c_{ij},i<j$ 与 s_k 的乘积，且所有下标恰好是 1 到 n 的一个排列，它们遍历所有这样的可能。

当 $k=1$ 时已经成立，若 $k=n$ 时成立，在 $k=n+1$ 时，对 M 求导会带来 s_{n+1} 因子，而 S_ns_{n+1} 恰好构成 S_{n+1} 中 $n+1$ 以 s 的下标出现的项；对 S_n 求导时，考虑利用莱布尼茨公式将所有对乘积的求导写成求和，由于 c_{ij} 为常数，导数为 0，求和中的非零项必然将某个 s_k 对 $n+1$ 进行了求导，得到 $c_{k,n+1}$。反过来，对 S_{n+1} 中任何一个 $n+1$ 以 c 的下标出现的项，将 $c_{k,n+1}$ 改为 s_k 必然确定某个 S_n 中的项，由此可知 S_n 对 t_{n+1} 求导的结果即为 S_{n+1} 中 $n+1$ 以 c 的下标出现的项。将两种情况求和即得到最终结果。

由此，由于 s_i 在 $\mathbf{t}=0$ 时为 0，$M(0)=1$，当且仅当 n 为奇数时，M 对 t_1 到 t_n 求导后在 0 处非零，此时值为一系列 $c_{ij},i<j$ 乘积的求和，每组下标均构成 1 到 n 的排列，且遍历所有这样的可能。这即是题目的结论。

6. 利用独立性，考虑 $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ 补集，类似习题 1 可知

$$0 = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{A}_k)$$

由于没有任何 $P(\bar{A}_k)$ 为 0，这即能推出 $k = n$ 至 ∞ 的 $P(\bar{A}_k)$ 乘积亦为 0，于是

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=n}^{\infty} P(\bar{A}_k) = 0$$

与习题 1 相同得证。

7. 考虑满足 $\lambda = Np$ 的二项分布与泊松分布，取 $\lambda = 1$，则 $N = 5, 10, 20$ 时的密度函数对比如图 2 所示 (代码文件 c2a.m)。

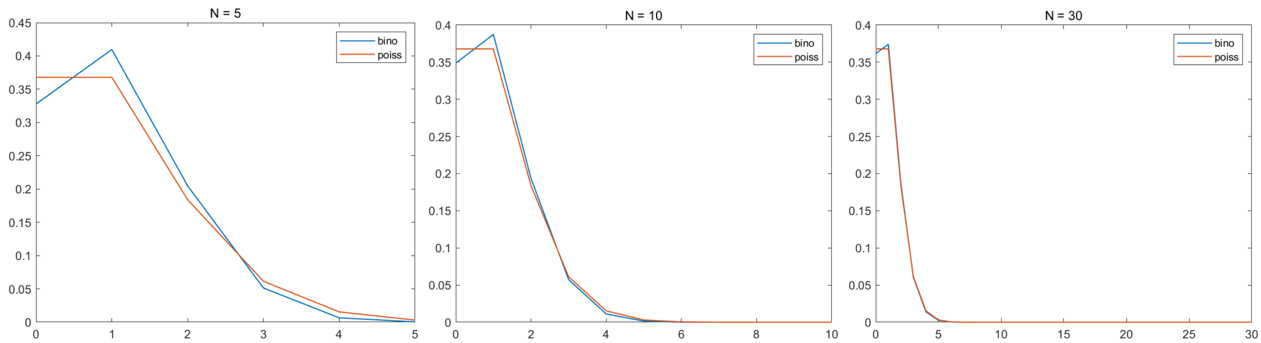

图 2: $\lambda = 1$ 时二项分布与泊松分布

取 $\lambda = 5$，则 $N = 5, 20, 50$ 时的密度函数对比如图 3 所示。

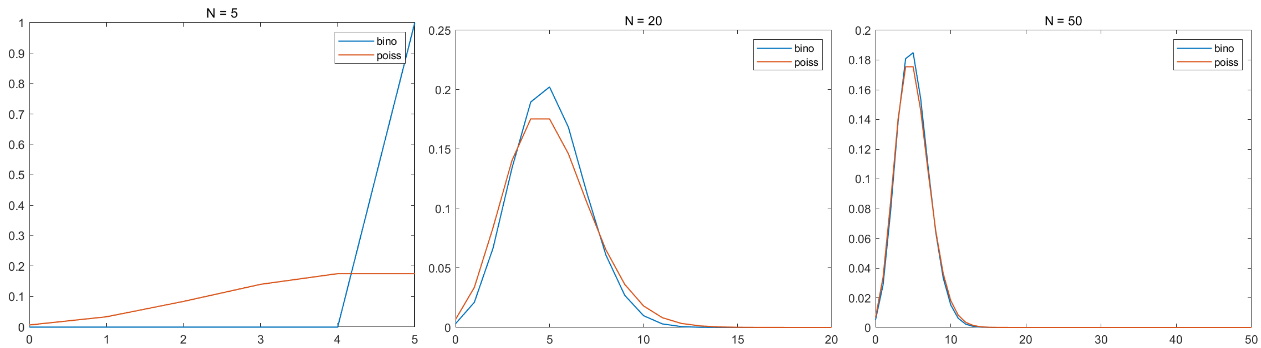

图 3: $\lambda = 5$ 时二项分布与泊松分布

由此可见，总体来说当 N/λ 越大，两者的结果即越接近，一般在 $N = 10\lambda$ 左右可以看出较明显的逼近性质。

对泊松分布逼近正态分布，在已知 $\mathcal{P}(\lambda)$ 在整点处的概率分布时，$(\mathcal{P}(\lambda) - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ 即为所有 x 值进行移动得到的结果。此外，由于需要用分布列近似密度函数，分布列实际的 p 应乘以 $\sqrt{\lambda}$ (原本两整点间的距离缩小倍数)，才能对应分布函数。在 $\lambda = 10, 100, 1000$ 时，对比如图 4 所示 (代码文件 c2b.m)。

当 $\lambda = 1000$ 时，两者已经非常接近。

3 讲义 3

1. mean：求平均数，对多维向量默认返回对第一个长度大于 1 的维度的平均。

median：求中位数，对多维向量默认返回对第一个长度大于 1 的维度的中位数。

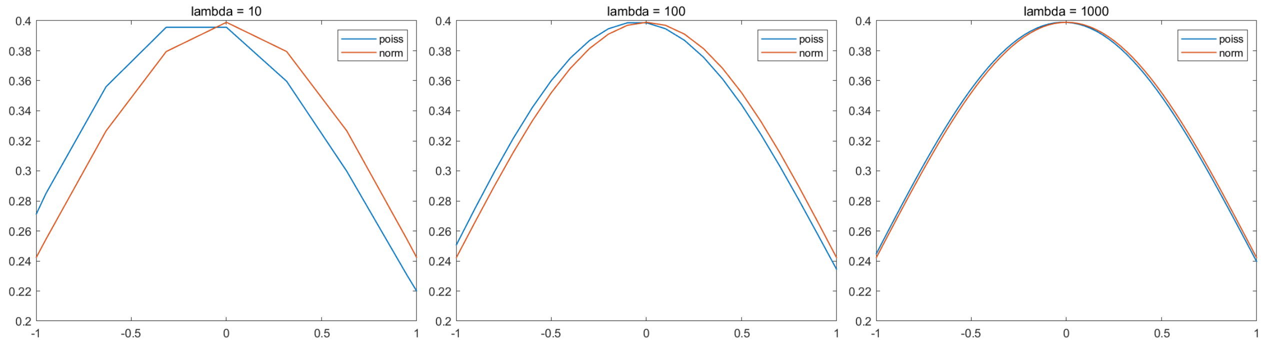

图 4: λ 改变时泊松分布与正态分布

min：求最小值，对多维向量默认返回对第一个长度大于 1 的维度的最小值。

max：求最大值，对多维向量默认返回对第一个长度大于 1 的维度的最大值。

cov：返回协方差，对向量返回方差，随机变量向量或矩阵 (每列看作观测值) 返回协方差矩阵；对两随机变量或两向量 (看作观测值) 返回协方差。按观测值数量减 1 进行归一化。

hist：为向量中的元素创建直方图，默认最大值最小值间等距取 10 条 (可调整)，对多列数组为每列绘制并放在同一张图中。

2. 法一：若 X, Y, Z 为独立的 $N(0,1)$ 随机变量，可发现联合密度函数

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)/2}$$

具有球对称性，由此生成 X_i、Y_i、Z_i 后取 $\frac{1}{\sqrt{X_i^2+Y_i^2+Z_i^2}}(X_i, Y_i, Z_i)$ 即为所求。

法二：设球面一点为 $(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$，则 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$，其中 θ 范围为 $[0,\pi]$，ϕ 为 $[0,2\pi]$。为使概率均匀，须 $\Theta = \theta$ 的概率密度与 $\sin\theta$ 成比例，也即 $F(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)$，并令 $\Phi \sim \mathcal{U}[0,2\pi]$，可采样后给出点 $(\sin\Theta_i\cos\Phi_i, \sin\Theta_i\sin\Phi_i, \cos\Theta_i)$。

实现两种方法后，均生成五次、每次 3 亿个随机数 (代码文件 c3.m)，第一种方法的时间为：

```
13.754188 32.150164 13.213678 12.111723 11.894117
```

第二种方法的时间为：

```
27.503181 11.470499 10.979458 11.201541 12.484428
```

由此可见第二种方法有着整体更优的时间效率，但理论来说过程中的数值误差可能会更大。

3. 设密度函数 $\hat{f}(x) = \frac{1}{A} f(x)$，对应分布函数 $\hat{F}(x)$，则

$$P(X_i \le t) = P(AZ_i \le F(t)) = P(Z_i \le \hat{F}(t)) = \hat{F}(t)$$

X 事实上服从 $\hat{f}(x)$ 代表的分布，而 $X = x$ 时的拒绝概率为 $\frac{f(x)-p(x)}{f(x)}$，由此总拒绝概率为

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \frac{f(x)-p(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{A} \int_{\mathbb{R}} (f(x)-p(x)) \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{A}$$

4. $X \in (a,b)$ 且被接收的概率为 (二三两步此时可以合为一步)

$$\int_a^b g_m(x) \frac{p(x)}{M g_m(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{M} \int_a^b p(x) \mathrm{d}x$$

而取 $a=-\infty, b=+\infty$ 即知 X 被接收的概率为 $\frac{1}{M}$，由此利用条件概率可知 X 被接受时在 (a,b) 的概率即 $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x$，服从 $p(x)$ 分布。

当 $p(x)$ 的计算较为复杂时，采用这样的方式很可能减少计算开销，且 g_l 与 $p(x)$ 越接近减少越多，反之则可能增大计算开销。

4 讲义 4

1. 由对称性可不妨设 f 单调增。

换元可知 $\mathbb{E}(f(X))=\mathbb{E}(f(1-X))=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，记为 $I(f)$，而由于协方差可写为

$$\int_0^1 (f(x)-I(f))(f(1-x)-I(f))\mathrm{d}x$$

只需在 $I(f)=0$ 时证明其为负即可。

利用对称性可知

$$\int_0^1 f(x)f(1-x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2} f(x)f(1-x)\mathrm{d}x$$

于是只需考虑在 0 到 1/2 的积分，另一方面由于 f 积分为 0 且单调，设其为正的点集为 A，并记上确界为 t，可知 $x<t$ 时 $f\le 0$，$x>t$ 时 $f\ge 0$，分类讨论。

若 $t\le\frac{1}{2}$，可知

$$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x = -\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x \le -\int_t^{1/2} f(x)\mathrm{d}x$$

而 $f(1-x)$ 在 $(0,1/2)$ 恒正且单调减，于是考虑符号 (t 前积分为正，t 后到 1/2 积分为负) 得到

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} f(x)f(1-x)\mathrm{d}x &= \int_0^t f(x)f(1-x)\mathrm{d}x + \int_t^{1/2} f(x)f(1-x)\mathrm{d}x \\ &\le f(1-t)\int_0^t f(x)\mathrm{d}x + f(1-t)\int_t^{1/2} f(x)\mathrm{d}x \le 0\end{aligned}$$

当 $t>1/2$ 时，考虑右半边 1/2 到 1 的积分，完全类似得证。

直接计算可知

$$\mathbb{E}I_N(f)=\frac{1}{2}(\mathbb{E}(f(X))+\mathbb{E}(f(1-X)))=I(f)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} I_N(f) &= \frac{1}{4N}\operatorname{Var}(f(X)+f(1-X)) = \frac{1}{4N}\int_0^1 (f(x)+f(1-x))^2\mathrm{d}x - \frac{I(f)^2}{4N} \\ &= \frac{\mathbb{E}(f^2(X))+\mathbb{E}(f(X)f(1-X))-2I(f)^2}{2N} = \frac{1}{2N}\operatorname{Var}(f(X))+\frac{1}{2N}\operatorname{Cov}(f(X),f(1-X))\end{aligned}$$

2. 记 $Y=X^{(2)}$，设 (X,Y) 的分布为 $g(x,y)$，则右侧可化为

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X)|Y)^2)-\mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X)|Y))^2+\mathbb{E}(\mathbb{E}(f^2(X)|Y))-\mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X)|Y)^2)$$

利用全期望公式可知第二项即 $-\mathbb{E}(f(X))^2$，第三项即 $\mathbb{E}(f^2(X))$，而一、四两项抵消，从而得证。

3. 由于 ln 为凸函数，利用琴生不等式可知 (省略积分限 $\mathbb{R}$，由于规定了 $0\ln 0=0$，这里 $f(x)=0$ 时积分中为 0，不影响结果)

$$-D(f\|g)=\int f(x)\ln\frac{g(x)}{f(x)} \ge \ln\int f(x)\frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = 0$$

且等号成立当且仅当 $g(x)/f(x)$ 几乎处处相等。由于两者积分均为 1，即得 $f(x)=g(x)$ 几乎处处成立。由于密度函数只有积分意义，这即可视为 $f(x)=g(x)$，从而结论成立。

5 讲义 5

1. 引理：S_n 几乎处处收敛于 c，且 f 在 c 处连续，则 $f(S_n)$ 几乎处处收敛于 $f(c)$。

   引理证明：由于 $S_n(\omega)\to c$ 处 $f(X_n(\omega))\to f(c)$，利用定义可验证结果。

   (a) 设 $f(x)=x^{-1/\alpha}$，其中 $\alpha\in(0,1)$，考虑
   $$\frac{\sum_i X_i^{-\alpha}}{n}$$
   积分计算得 $X_i^{-\alpha}$ 期望为 $\frac{1}{1-\alpha}$，从而由 SLLN 其几乎处处收敛于 $\frac{1}{1-\alpha}$，利用引理可知
   $$\left(\frac{\sum_i X_i^{-\alpha}}{n}\right)^{-1/\alpha}$$
   几乎处处收敛于 $1-\alpha$，即对几乎处处的 ω 有
   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_i X_i(\omega)^{-\alpha}}{n}\right)^{-1/\alpha}=1-\alpha$$
   利用幂平均不等式与 X_i 定义可知
   $$0\le\left(\frac{\sum_i X_i(\omega)^{-1}}{n}\right)^{-1}\le\left(\frac{\sum_i X_i(\omega)^{-\alpha}}{n}\right)^{-1/\alpha}$$
   由 α 可任取知其极限为 0，从而原极限几乎处处收敛于 0。

   (b) 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，考虑
   $$\frac{\sum_i \ln X_i}{n}$$
   积分计算得 $\ln X_n$ 期望为 -1，从而由 SLLN 其几乎处处收敛于 -1，利用引理可知原极限几乎处处收敛于 e^{-1}。

   (c) 设 $f(x)=\sqrt{x}$，考虑
   $$\frac{\sum_i X_i^2}{n}$$
   积分计算得 X_n^2 期望为 $\frac{1}{3}$，从而由 SLLN 其几乎处处收敛于 $\frac{1}{3}$，利用引理可知原极限几乎处处收敛于 $3^{-1/2}$。

2. (a) 设 Z_n 的特征函数为 f_n，根据独立性可知
   $$f_{2n}(\sqrt{2n}\xi)=f_n^2(\sqrt{n}\xi)$$
   由于 ξ 可任取即得
   $$f_{2n}(\xi)=f_n^2(\xi/\sqrt{2})$$
   利用两边极限相同得结论。

   (b) 由特征函数性质可知 $f(0)=1$，设 $f(1)=a$，由于其可看作 $f(1/\sqrt{2})^2$，且 f 为 $\mathbb{R}$ 上函数，必然有 $a\ge 0$，再由 0 处极限知 $a>0$。此外，利用特征函数性质得 $a\le 1$。归纳可知
   $$f(2^{n/2})=a^{2^n}$$
   对一切 $n\in\mathbb{Z}$ 成立。

   若存在某 t 使得 $b=f(t)\ne a^{t^2}$，同理 $b>0$，类似可知
   $$f(2^{n/2}t)=b^{2^n}$$
   考虑 0 附近，即 $n\to-\infty$ 时，由 $f\in C^2$，利用 $f(2^{n/2})=a^{2^n}$，考虑 $n\to-\infty$ 时相邻三项差分的极限可知 $f''(0)=2\ln a$；但利用 $f(2^{n/2}t)=b^{2^n}$，同理可得 $f''(0)=2\ln b/t^2$，矛盾，于是必须处处 $f(\xi)=a^{\xi^2}$。

利用 $a\in(0,1]$ 可知存在 $c\geq 0$ 使得

$$f(\xi)=\mathrm{e}^{-c\xi^2}$$

若 $f(\xi)$ 恒为 1，即对应 $X=0$，可看作高斯分布极限，其余情况即对应高斯分布特征函数。

(c) 与 (1) 类似得到

$$f(\xi)=f^2(\xi/2)$$

于是与 (2) 类似设出 $f(1)$，可知 $\xi>0$ 时存在 $c\geq 0$ 使得

$$f(\xi)=\mathrm{e}^{-c\xi}$$

利用对称性即得

$$f(\xi)=\mathrm{e}^{-c|\xi|}$$

由下一题的计算，当 $c\neq 0$ 时即对应 Cauchy 分布的特征函数，否则 $f(\xi)$ 恒为 1。

(d) 与 (1) 类似得到

$$f(\xi)=f^2(\xi/2^{\alpha})$$

当 $\alpha=0$ 时，利用连续性即得只能 $f(\xi)$ 恒为 1，否则与 (3) 类似得到

$$f(\xi)=\mathrm{e}^{-c|\xi|^{1/\alpha}}$$

利用 $f(0)=1$，同样可以得到 $\alpha<0$ 时只有平凡解，因此合理的范围要求是 $\alpha>0$。

3. 直接估算可知期望相关的收敛性结论。

记 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi z}}{1+z^2}$，其在上半平面只以 i 为奇点，从而考虑原点为中心、上半平面中的半径趋于无穷的半圆，计算留数可得 $\xi\geq 0$ 时 Cauchy 分布的特征函数为

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\xi}$$

利用对称性即得一般情况下 $\varphi(\xi)=\mathrm{e}^{-|\xi|}$。

由此，对应的

$$\varphi_{S_n}(\xi)=\mathrm{e}^{-n|\xi|}$$

而再除以 n 即有

$$\varphi_{S_n/n}(\xi)=\mathrm{e}^{-|\xi|}$$

从而得证。

4. 记 $g(x)=h(x)-h(0)$，则其不影响左右，因此可不妨设 $h(0)=0$。

当 $h(x)=h'(0)x$，$h'(0)<0$ 时，计算可发现

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{th(x)}\,\mathrm{d}x=(-th'(0))^{-1}$$

一般情况下，由于

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta>0,\quad\forall x\in(0,\delta),\quad|h(x)-h'(0)x|\leq\varepsilon x$$

由此可知

$$\int_0^{\delta}\mathrm{e}^{th(x)}\,\mathrm{d}x\leq\int_0^{\delta}\mathrm{e}^{th'(0)x+t\varepsilon x}\,\mathrm{d}x\leq(-th'(0)-t\varepsilon)^{-1}$$

另一方面，当 $x>\delta$ 时，由于 $\lim_{x\to\infty}h(x)=-\infty$，存在 k 使得 $x>k$ 时 $h(x)\leq -1$，又由于连续函数 $h(x)$ 在 $[\delta,k]$ 有上界 (且由条件上界为负)，可知必然存在 $\eta>0$ 使得 $h(x)<-\eta$，从而与讲义证明类似得

$$\int_{\delta}^{\infty}\mathrm{e}^{th(x)}\leq\mathrm{e}^{-(t-1)\eta}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{h(x)}\,\mathrm{d}x=O(\mathrm{e}^{-\alpha t})$$

由此，固定 $\varepsilon < -h'(0)/2$，可发现存在 C 使得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{th(x)}\mathrm{d}x \le (-th'(0) - t\varepsilon)^{-1} + C\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 可得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{th(x)}\mathrm{d}x \le (-th'(0))^{-1} + C\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

同理，将估算上界时得 $\mathrm{e}^{-(t-1)\eta}$ 改为 $\mathrm{e}^{-(t+1)\eta}$ 可知存在 C_0 使得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{th(x)}\mathrm{d}x \ge (-th'(0))^{-1} + C_0\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

由此

$$\left|\int_0^\infty \mathrm{e}^{th(x)} - (-th'(0))^{-1}\right| \le (C + C_0)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

因此左侧乘 t 后极限为 0，得证。

5. (a) 利用正态分布的分布函数积分可直接得到矩母函数

$$M(\lambda) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X}] = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \mu\lambda\right)$$

由此 $x\lambda - \ln M(\lambda) = x\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 - \mu\lambda$，最大值为

$$I(x) = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

(b) 利用指数分布的分布函数积分可直接得到矩母函数

$$M(\mu) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mu X}]$$

当 $\mu \ge \lambda$ 时为无穷，否则为 $\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$。由此结果应为

$$I(x) = \sup_{\mu<\lambda}\{x\mu - \ln(\lambda) + \ln(\lambda - \mu)\}$$

求导可知当 $x \le 0$ 时最大值不存在 (或视为 $I(x) = \infty$)，否则在 $\mu = \lambda - \frac{1}{x}$ 时取到，为

$$I(x) = \lambda x - \ln\lambda - \ln x - 1$$

6 讲义 6

1. 由定义可知需要计算 μ 使得 $\mu = \mu P$，设其各个分量为 μ_0 到 μ_N，则写出方程组为

$$\mu_0 = \frac{1}{N}\mu_1$$

$$\mu_i = \frac{N-i+1}{N}\mu_{i-1} + \frac{i+1}{N}\mu_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$\mu_N = \frac{1}{N}\mu_{N-1}$$

由于递推的唯一性，μ_i 之间的比例必然唯一确定，另一方面代入得 (C 指组合数)

$$\frac{N-i+1}{N}C_N^{i-1} + \frac{i+1}{N}C_N^{i+1} = C_{N-1}^{i-1} + C_{N-1}^{i} = C_N^i$$

由此可发现 μ_i 与 C_N^i 正比，结合分布要求和为 1 可知

$$\mu_i = \frac{1}{2^N}C_N^i$$

2. 记

$$\varphi_h(\xi)=\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\xi X(h)}\big)$$

由条件知

$$\varphi_h(\xi)=\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\xi(X(h+t)-X(t))}\mid X(t)\big)$$

于是 (利用 $\mathrm{e}^{in\xi}$ 在 $n\geq 2$ 时绝对值不超过 1)

$$\varphi_h(\xi)=1-\lambda h+o(h)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}(\lambda h+o(h))+o(h)$$

从而

$$\varphi_h(\xi)=1+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}-1)\lambda h+o(h)$$

也即

$$\varphi_0(\xi)=1,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_h(\xi)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}=(\mathrm{e}^{i\xi}-1)\lambda$$

另一方面由增量独立性

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi_h(\xi)}{\mathrm{d}h}&=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\varphi_{h+\Delta h}(\xi)-\varphi_h(\xi)}{\Delta h}=\lim_{\Delta h\to 0}\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi X(h+\Delta h)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi X(h)}}{\Delta h}\right)\\&=\lim_{\Delta h\to 0}\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi X(h)}\big)\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi X(\Delta h)}-1}{\Delta h}\right)=\varphi_h(\xi)\left.\frac{\mathrm{d}\varphi_h(\xi)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}-1)\lambda\varphi_h(\xi)\end{aligned}$$

由此结合初值解得

$$\varphi_h(\xi)=\exp\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}-1)\lambda h\big)$$

这即得到 $X(h)$ 是参数为 λh 的泊松分布。

3. 由于 $\mathbb{E}^{\mathrm{i}}$ 即代表初始概率分布为 e_i^T，设状态空间为 $1,2,\ldots,N$，连续时间马尔可夫链的生成矩阵为 P，则 t 时刻概率分布为 (这里最后一项表示第 i 行第 j 列的元素)

$$P(X(t)=j)=e_i^T\mathrm{e}^{Qt}e_j=(\mathrm{e}^{Qt})_{ij}$$

由此即得

$$h_i(t)=\sum_{j=1}^{N}(\mathrm{e}^{Qt})_{ij}f(j)$$

4. 由条件可知此时

$$P(X_{\tau,p}(t)=j)=p^j(1-p)^{k-j}\frac{k!}{j!(k-j)!},\quad k=[t/\tau]$$

对比泊松过程

$$P(X(t)=j)=\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

由于 τ 将趋于 0 可知 k 将趋于无穷，而 p 将趋于 0，第一个式子的极限可以改写为 $p^j(1-p)^kk^j$ 的极限，由此可知

$$(kp)^j(1-p)^k\to(\lambda t)^j\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

也即 $pk\to\lambda t$，将其写为 $pk/t\to\lambda$。估算可知 $t>0$ 时

$$0\leq 1-\frac{\tau[t/\tau]}{t}\leq\frac{\tau}{t}$$

由此 $\tau\to 0$ 时 $\frac{k\tau}{t}\to 1$，从而只要

$$p=\lambda\tau$$

即有

$$\lim_{\tau\to 0}P(X_{\tau,p}(t)=j)=P(X(t)=j)$$

5. 此时与原本的推导中完全类似，可得到

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda(t)p_0(t), \quad p_0(0) = 1$$

且

$$\frac{\mathrm{d}p_m(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(t)(p_{m-1}(t) - p_m(t))$$

第一个式子可解得

$$p_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

设 $\lambda(s)$ 从 0 到 t 的积分为 $\Lambda(t)$，则可写为 $p_0(t) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}$，第二个式子利用初始条件 $p_m(0) = 0$ 即得到 $m > 1$ 时

$$p_m(t) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)} \int_0^t \lambda(s) p_{m-1}(s) \mathrm{e}^{\Lambda(s)}\,\mathrm{d}s$$

下归纳证明

$$p_m(t) = \frac{\Lambda^m(t)}{m!}\mathrm{e}^{-\Lambda(t)}$$

若此结论对 $m-1$ 成立，代入可知

$$p_m(t) = \frac{1}{(m-1)!}\mathrm{e}^{-\Lambda(t)} \int_0^t \lambda(s)\Lambda^{m-1}(s)\,\mathrm{d}s$$

于是只需证明

$$\Lambda^m(t) = m\int_0^t \lambda(s)\Lambda^{m-1}(s)\,\mathrm{d}s$$

而两边对 t 求导可知导数相同，又由 0 处均为 0 可知结论。

同理有

$$\frac{\mathrm{d}\mu_t}{\mathrm{d}t} = -\lambda(t)\mu_t, \quad \mu_0 = 1$$

于是 (事实上等待时间至少为 t 也即 $X(t) = 0$，于是与 $P_0(t)$ 完全相同)

$$\mu_t = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}$$

7 讲义 7

1. 由于涉及连续情况，我们可以考虑推广到连续的马尔可夫链，且设定采样方式为区间均匀采样 (对于集中分布问题这样的收敛速度是慢的，但有限区间不太有更好的办法)。由此出于均匀分布为平稳态，任何点处的转移概率应相同，设定成必定转移即可，而对 Q，考虑新状态为旧状态增添一个按 $N(0,\epsilon)$ 分布的随机变量，再由周期边界条件限制回 $[-10,10]$，由此可得到代码，对不同 ϵ 模拟 1000000 次并平均，作图效果如图 5 所示 (代码文件 c7.m)。

   可以发现，当 ϵ 更大时，由于遍历性更强，收敛也相对更加稳定，最终估算结果 0.9128。

2. 由于 $Q(\sigma \to \sigma') = Q(\sigma' \to \sigma)$，只需验证

$$\frac{A(\sigma \to \sigma')}{A(\sigma' \to \sigma)} = \mathrm{e}^{-\beta\Delta H}$$

   对 Metropolis 算法，当 $H(\sigma) \geq H(\sigma')$ 时，上式成为

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta(-\Delta H)}} = \mathrm{e}^{-\beta\Delta H}$$

   反之则直接为 $\mathrm{e}^{-\beta\Delta H}$，从而成立。

   对 Glauber 动力学，有

$$\frac{A(\sigma \to \sigma')}{A(\sigma' \to \sigma)} = \frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\Delta H}}{1+\mathrm{e}^{\beta\Delta H}} = \mathrm{e}^{-\beta\Delta H}$$

   从而成立。

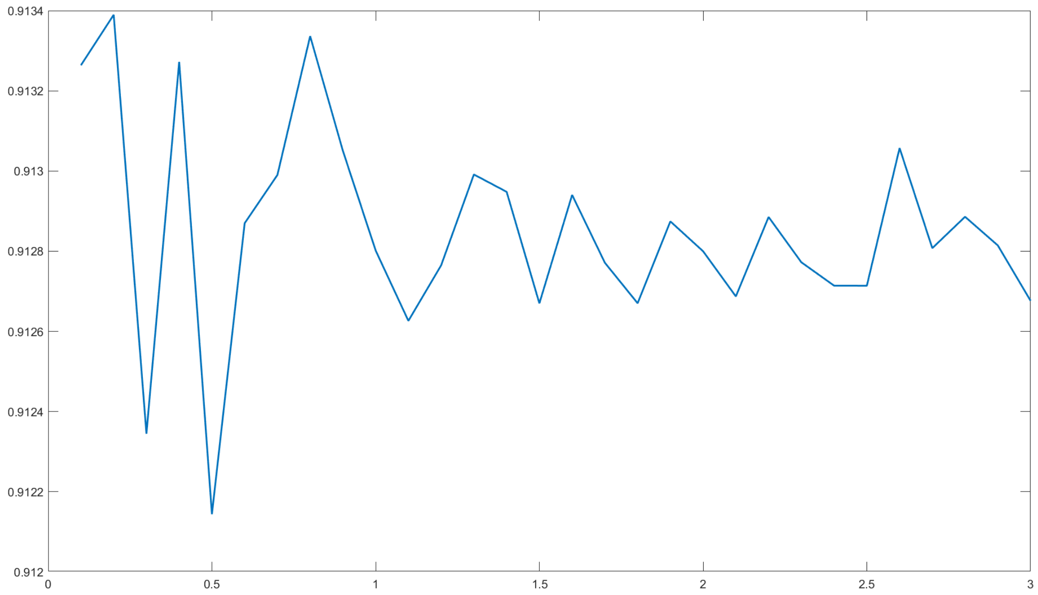

图 5: 不同 ϵ 的估算结果

3. 先证明不可约性。无论采取等概率策略还是单位翻转策略，任何两个状态均可通过有限次操作得到；而无论是利用 Metropolis 算法还是 Glauber 动力学，接受建议的概率永远大于 0，因此任何两状态之间互达，这就是不可约性。

   再证明非周期性。考虑能量最低的状态，无论如何提出建议，无论利用 Metropolis 算法还是 Glauber 动力学，不接受建议的概率永远大于 0，因此此状态可以回到自身，从而周期为 1，利用有限马尔可夫链的性质可从不可约推得马尔可夫链非周期 (即每个状态周期均为 1)。

   结合以上两者知其本原。

8 讲义 8

1. 根据方法定义，其转移矩阵为

$$P((x,i)\to(y,j))=\begin{cases}\alpha_0 Q_i(x\to y)A_i(x\to y) & x\neq y, i=j\\ (1-\alpha_0)\alpha(i,j)\min\left(1,\frac{\pi_{st}(x,j)\alpha(j,i)}{\pi_{st}(x,i)\alpha(i,j)}\right) & x=y, i\neq j\\ 1-\sum_{k\neq i}P((x,i)\to(x,k))-\sum_{y\neq x}P((x,i)\to(y,i)) & x=y, i=j\\ 0 & x\neq y, i\neq j\end{cases}$$

   这里 Q, A 为第 i 层对应的 MCMC 方法中的提议矩阵与决定矩阵。

2. 根据方法定义，记 $X=(x_1,\dots,x_L), Y=(y_1,\dots,y_L)$，并设第 i 层对应的 MCMC 方法转移矩阵为 P_i，假设 $Y\neq X$，则当 y_i 并非某两个恰为 x_i 中两个交换时，有

$$P(X\to Y)=\alpha_0\prod_{i=1}^{L}P_i(x_i\to y_i)$$

   否则 $y_k=x_{k+1}$、$y_{k+1}=x_k$、且 $x_k\neq x_{k+1}$，其余分量相同，此时的转移概率为

$$P(X\to Y)=\alpha_0\prod_{i=1}^{L}P_i(x_i\to y_i)+\frac{1}{L-1}(1-\alpha_0)\min\left(1,\frac{\pi_k(x_{k+1})\pi_{k+1}(x_k)}{\pi_k(x_k)\pi_{k+1}(x_{k+1})}\right)$$

   最后，$P(X\to X)$ 为 1 减去上述所有概率之和，或写成

$$P(X\to X)=\alpha_0\prod_{i=1}^{L}P_i(x_i\to x_i)+\frac{1}{L-1}(1-\alpha_0)\sum_{k=1}^{L-1}\left(1-\min\left(1,\frac{\pi_k(x_{k+1})\pi_{k+1}(x_k)}{\pi_k(x_k)\pi_{k+1}(x_{k+1})}\right)\right)$$

9 讲义 9

1. 为进行对应的构造与讨论，须对势函数作一些基本假设：$V(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}^N$ 中某有界区域 Ω，且其连续、最小值在内部存在。

   连续情况也即，对势函数 $V(x)$，构造分布函数

   $$f_\beta(x)=\frac{1}{Z_\beta}\mathrm{e}^{-\beta V(x)},\quad Z_\beta=\int_\Omega \mathrm{e}^{-\beta V(t)}\mathrm{d}t$$

   由定义其恒大于 0 且 Ω 上积分为 1，的确为分布函数，下面研究其极限性态。

   设 $V(x)$ 最小值为 m，取值集合为 M，则计算发现有

   $$f_\beta(x)=\left(\int_\Omega \mathrm{e}^{-\beta(V(t)-m)}\mathrm{d}t\right)^{-1}\mathrm{e}^{-\beta(V(x)-m)}$$

   - 当 $|M|>0$、$V(x)=m$ 时，由于分子恒为 1，而分母利用单调收敛可知结果为 $|M|$，从而

     $$\lim_{\beta\to 0}f_\beta(x)=\frac{1}{|M|}$$

     将 $f_\beta(x)$ 改写为

     $$\left(\int_\Omega \mathrm{e}^{-\beta(V(t)-m)}\mathrm{d}t\right)^{-1}$$

     由于 $V(t)-m$ 恒非负可知 $\mathrm{e}^{-\beta(V(t)-m)}$ 随 β 增大单调减，从而 $f_\beta(x)$ 单调增。

   - 当 $|M|=0$、$V(x)=m$ 时，同理利用单调收敛定理可知分母趋于 0，也即

     $$\lim_{\beta\to 0}f_\beta(x)=+\infty$$

     与第一种情况相同可证明 $f_\beta(x)$ 单调增。

   - 当 $V(x)>m$ 时，将 $f_\beta(x)$ 写为

     $$\left(\int_\Omega \mathrm{e}^{-\beta(V(t)-V(x))}\mathrm{d}t\right)^{-1}$$

     记 $\tilde{m}=\frac{m+V(x)}{2}$，由连续性 $V(t)<\tilde{m}$ 的区域 $\tilde{M}$ 为开集，测度非零，而这部分将在 $\beta\to\infty$ 时一致趋于无穷，从而可得到 $f_\beta(x)$ 极限为 0，下证其在 β 充分大时单调减。

     要证明 $f_\beta(x)$ 在 β 充分大时单调减，只需证明积分在 β 充分大时单调增。设 Ω_x 为 $V(t)<V(x)$ 的集合，则有

     $$\int_\Omega \mathrm{e}^{-\beta(V(t)-V(x))}\mathrm{d}t=\int_{\tilde{M}}\mathrm{e}^{-\beta(V(t)-V(x))}\mathrm{d}t+\int_{\Omega_x\setminus\tilde{M}}\mathrm{e}^{-\beta(V(t)-V(x))}\mathrm{d}t+\int_{\Omega\setminus\Omega_x}\mathrm{e}^{-\beta(V(t)-V(x))}\mathrm{d}t$$

     记 $d=\frac{V(x)-m}{2}$，第一部分求导可得

     $$\int_{\tilde{M}}(V(x)-V(t))\mathrm{e}^{-\beta(V(t)-V(x))}\mathrm{d}t\ge d|\Omega|\mathrm{e}^{\beta d}$$

     第二部分由于指数上恒为正数，求导必然至少为 0。第三部分求导即

     $$-\int_{V(t)>V(x)}(V(t)-V(x))\mathrm{e}^{-\beta(V(t)-V(x))}\mathrm{d}t$$

     在 $\beta>0$ 时，积分中在 $V(t)\to V(x)^+$ 时极限为 0，而 $V(t)\to+\infty$ 时极限亦为 0，于是积分内有最大值 M_β，积分值 $\ge -|\Omega|M_\beta$，且随着 β 增加，由于积分内部单调减，可知 $M(\beta)$ 随 β 单调减，因此存在 β_0 使得 $\beta\ge\beta_0$ 时

     $$d\mathrm{e}^{\beta d}>M_\beta$$

     此后即有导数必然大于 0，得证。

10 讲义 10

1. 直接计算可知

$$W_t(x,t) = -\frac{1}{2\sqrt{4\pi D}}t^{-2/3}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) + \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\frac{x^2}{4Dt^2}\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

$$W_x(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\frac{x}{2Dt}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

$$W_{xx}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\left(\frac{x}{2Dt}\right)^2\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) - \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\frac{1}{2Dt}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

乘 D 即可发现此处第二项对应 W_t 第一项，此处第一项对应 W_t 第二项。

为验证 $t\to 0$ 的情况，利用 Gauss 积分

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

换元计算即可知

$$\int_{\mathbb{R}} W(x,t)\mathrm{d}x = 1$$

另一方面，当 $x\neq 0$ 时取 ln 估算可知 $\lim_{t\to 0} W(x,t)=0$，而 $\lim_{t\to 0} W(0,t)=+\infty$，由此即可知其在 t 为 0 时的极限为 $\delta(x)$。

* 更严谨的证明方法：只需证明 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 时

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} W(x,t)f(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

由 Paseval 等式可知可将积分内 $W(x,t)$ 与 $f(x)$ 同作 Fourier，而

$$\hat{W}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\sqrt{2Dt}\lambda^2/2}$$

利用控制收敛定理可知

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} \hat{W}(\lambda,t)f(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(\lambda)\mathrm{d}\lambda = f(0)$$

最后一个等号即为 Fourier 逆变换，从而成立。

2. 将此题的函数记为 $W_r(x,t)$，根据讲义有

$$W_r(x,t) = W(x,t) + W(2x_1 - x, t)$$

由 $(W(2x_1-x,t))_{xx} = W_{xx}(2x_1-x,t)$ 即可验证其符合方程。

当 $t\to 0$ 时，由于区域为 $x\le x_1$，$2x_1 - x$ 不会为 0，从而极限为

$$\delta(x) + \delta(2x_1 - x) = \delta(x)$$

而直接计算有

$$(W_r)_x(x_1,t) = W_x(x_1,t) - W_x(2x_1 - x_1, t) = 0$$

从而得证。

3. 将此题的函数记为 $W_a(x,t)$，根据讲义有

$$W_a(x,t) = W(x,t) - W(2x_1 - x, t)$$

与上题同理可验证符合方程，且 $t\to 0$ 时为 $\delta(x)$，直接代入可发现 $W_a(x_1,t)=0$。

4. * 讲义笔误，上标 $n-k$ 打成了 k。

也即完成式 (11) 后的推导。由于已知 (这里两边 r 原本均为 1 到 n 求和，但根据有 $2k$ 为正的要求，第一类路径不可能在 $2k$ 后才为 0，第二类路径不可能在 $2(n-k)$ 后才为 0)

$$P_{2k,2n}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}f_{2r}P_{2(k-r),2(n-r)}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k}f_{2r}P_{2k,2(n-r)}$$

根据归纳假设可得

$$P_{2k,2n}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}f_{2r}u_{2(k-r)}u_{2(n-k)}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k}f_{2r}u_{2k}u_{2(n-r-k)}$$

由于

$$u_{2k}=\sum_{r=1}^{k}f_{2r}u_{2(k-r)},\quad u_{2n-2k}=\sum_{r=1}^{n-k}f_{2r}u_{2(n-k-r)}$$

代入即可得到证明。

11 讲义 11

1. 采用特征函数方法进行推导，有

$$f_{\xi_j}(\xi)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}=\cos\xi+\frac{\mathrm{i}}{3}\sin\xi$$

由于 ξ_j 相互独立，可知

$$f_{S_n}(\xi)=\left(\cos\xi+\frac{\mathrm{i}}{3}\sin\xi\right)^n$$

从而再由倍数的特征函数关系可知

$$f_{Z_t^N}(\xi)=\left(\cos\frac{\xi}{N^\alpha}+\frac{\mathrm{i}}{3}\sin\frac{\xi}{N^\alpha}\right)^{\lfloor Nt\rfloor}$$

由于需要 $\alpha>0$ 才能使得期望可能收敛，只需考虑 $\alpha>0$ 的情况，此时 $N\to\infty$ 时 $\xi/N^\alpha\to 0$，从而可写出

$$f_{Z_t^N}(\xi)=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{3}\frac{\xi}{N^\alpha}+O\left(\frac{\xi}{N^\alpha}\right)^2\right)^{\lfloor Nt\rfloor}$$

利用 e 的极限定义放缩，若 $\alpha>1$，估算可发现极限恒为 1，从而平凡；若 $\alpha<1$，估算可得到极限趋于无穷，不收敛，因此必须 $\alpha=1$，此时放缩有

$$f_{Z_t}(\xi)=\lim_{N\to\infty}f_{N_t^N}(\xi)=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{3}\frac{\xi}{N}+O\left(\frac{\xi}{N}\right)^2\right)^{Nt}=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{3}\frac{\xi}{N}\right)^{Nt}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t/3}$$

而这即代表

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Z_t})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t/3}$$

于是

$$Z_t=\frac{t}{3}$$

2. (a) 直接计算其为 (最后一步利用标准正态分布的方差为 1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/(2t)}\,\mathrm{d}x=\frac{4t^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^4\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=-\frac{2t^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^3\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y^2}=6t^2\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=3t^2$$

(b) 展开得其为

$$\mathbb{E}(W_t^2)+\mathbb{E}(W_s^2)+\mathbb{E}(W_z^2)+2\mathbb{E}(W_tW_z)-2\mathbb{E}(W_tW_s)-2\mathbb{E}(W_zW_s)$$

再通过 Weiner 过程的协方差表达式可知结果为

$$t+s+z+2t\wedge z-2t\wedge s-2s\wedge z$$

这里 $\wedge$ 代表取较小者。

3. 利用均值 0、协方差矩阵 A (要求其正定) 的多维 Gauss 分布对应的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det A}}\mathrm{e}^{-x^TAx/2}$$

直接计算结果为

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det A}}\mathrm{e}^{-x^TA^{-1}x/2}\mathrm{e}^{-x^TBx/2}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det A}}\mathrm{e}^{-x^T(A^{-1}+B)x/2}\mathrm{d}x$$

由于 A^{-1}、B 均正定，利用对非零 x，$x^TAx>0$ 的定义可知其和正定，由此考虑协方差矩阵为 $(A^{-1}+B)^{-1}$ 的多维 Gauss 分布可知积分结果为

$$\frac{\sqrt{(2\pi)^n\det((A^{-1}+B)^{-1})}}{\sqrt{(2\pi)^n\det A}}=\frac{1}{\sqrt{\det(A^{-1}+B)}\sqrt{\det A}}=\frac{1}{\sqrt{\det(I+AB)}}$$

4. * 要求 $2'$ 需要额外添加 $W_0=0$，否则如 $W_0=1$ 时，第二种定义将会导出平移 1 的分布。

- 原定义推等价定义

  利用密度函数可以说明，对多维高斯分布的随机变量，只要各分量间的协方差是 0，即有它们相互独立。

  于是，为证明 $1'$，将 W_{t_0} 看作 $W_{t_0}-W_0$，只需证明在 $a>b\geq c>d$ 时，W_a-W_b 与 W_c-W_d 的协方差是 0 (多元 Gauss 分布的线性组合仍为多元 Gauss 分布)，直接计算可知

$$\mathbb{E}(W_a-W_b)=\mathbb{E}(W_a)-\mathbb{E}(W_b)=0$$

$$\mathbb{E}(W_c-W_d)=\mathbb{E}(W_c)-\mathbb{E}(W_d)=0$$

$$\mathbb{E}(W_a-W_b)(W_c-W_d)=\mathbb{E}(W_aW_c)-\mathbb{E}(W_aW_d)-\mathbb{E}(W_bW_c)+\mathbb{E}(W_bW_d)=c-d-c+d=0$$

  从而得证。

  对 $2'$，$W_0=0$ 可通过性质 2 取 $s=t=0$ 直接得到，直接计算可知

$$\mathbb{E}(W_{s+t}-W_s)=\mathbb{E}(W_{s+t})-\mathbb{E}(W_s)=0$$

$$\mathbb{E}(W_{s+t}-W_s)^2=\mathbb{E}W_{s+t}^2+\mathbb{E}W_s^2-2\mathbb{E}(W_{s+t}W_s)=s+t+s-2s=t$$

  再由多元 Gauss 分布的线性组合仍为多元 Gauss 分布即可知其为 $N(0,t)$。

- 等价定义推原定义

  由 $W_0=0$ 与性质 $2'$ 可知 $W_t\sim N(0,t)$，而再利用 $1'$ 可知

$$(W_{t_0},W_{t_1}-W_{t_0},\ldots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}})$$

  构成多元 Gauss 分布，从而它们的线性组合

$$(W_{t_0},W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$$

  构成多元 Gauss 分布，这就说明了其为 Gauss 过程。

  另一方面，不妨设 $s\leq t$，直接计算可知

$$K(s,t)=\mathbb{E}(W_tW_s)-\mathbb{E}(W_t)\mathbb{E}(W_s)=\mathbb{E}((W_t-W_s)W_s)+\mathbb{E}W_s^2$$

  利用独立性，第一项可拆分为 $\mathbb{E}(W_t-W_s)\mathbb{E}(W_s)$，因此为 0，第二项直接根据其服从 $N(0,s)$ 可知为 s，从而得证。

12 讲义 12

1. 设对 $t_1 < \cdots < t_n$，$(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ 的密度函数为

$$p^W_{t_1,\ldots,t_n}(w_1,\ldots,w_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}\mathrm{e}^{-\frac{w_1^2}{2t_1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\mathrm{e}^{-\frac{(w_2-w_1)^2}{2(t_2-t_1)}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n-t_{n-1})}}\mathrm{e}^{-\frac{(w_n-w_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}}$$

(a) 直接计算可发现 X 的密度函数为

$$p_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = p^W_{t_n^{-1},\ldots,t_1^{-1}}(x_n/t_n,\ldots,x_1/t_1)(t_1\ldots t_n)^{-1}$$

化简也即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t_n^{-1}}}\mathrm{e}^{-\frac{x_n^2}{2t_n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{n-1}^{-1}-t_n^{-1})}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_{n-1}t_{n-1}^{-1}-x_nt_n^{-1})^2}{2(t_{n-1}^{-1}-t_n^{-1})}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1^{-1}-t_2^{-1})}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_1t_1^{-1}-x_2t_2^{-1})^2}{2(t_1^{-1}-t_2^{-1})}}\frac{1}{t_1\ldots t_n}$$

为了证明这与 p^W 相同，我们直接比较系数。e 指数外的项为

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sqrt{t_n\frac{t_nt_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}\cdots\frac{t_2t_1}{t_2-t_1}}\frac{1}{t_1\ldots t_n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sqrt{\frac{1}{t_1}\frac{1}{t_n-t_{n-1}}\cdots\frac{1}{t_2-t_1}}$$

而这即为 p^W 指数外的项。对指数内的项，只需对比所有平方项与交叉项前的系数。x_n^2 前的系数为

$$-\frac{1}{2t_n}-\frac{t_n^{-2}}{2(t_{n-1}^{-1}-t_n^{-1})} = -\frac{1}{2t_n}-\frac{t_{n-1}}{2(t_n-t_{n-1})} = -\frac{1}{2(t_n-t_{n-1})}$$

x_i^2，$1 < i < n$ 前的系数通分可得为

$$-\frac{t_i^{-2}}{2}\frac{t_{i-1}^{-1}-t_{i+1}^{-1}}{(t_{i-1}^{-1}-t_i^{-1})(t_i^{-1}-t_{i+1}^{-1})} = -\frac{1}{2}\frac{t_{i+1}-t_{i-1}}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_{i-1})} = -\frac{1}{2(t_i-t_{i-1})}-\frac{1}{2(t_{i+1}-t_i)}$$

x_1^2 前的系数为

$$-\frac{t_1^{-2}}{2(t_1^{-1}-t_2^{-1})} = -\frac{t_2}{2(t_2-t_1)t_1} = -\frac{1}{2t_1}-\frac{1}{2(t_2-t_1)}$$

x_ix_{i+1}，$1 \le i < n$ 前的系数为

$$-\frac{2t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}}{2(t_i^{-1}-t_{i+1}^{-1})} = -\frac{1}{t_{i+1}-t_i}$$

对 p^W 的指数展开可发现这些系数与 p^W 中均相同，从而得证。

(b) 直接计算可发现 Y 的密度函数为

$$p_{t_1,\ldots,t_n}(y_1,\ldots,y_n) = p^W_{ct_1,\ldots,ct_n}(\sqrt{c}y_1,\ldots,\sqrt{c}y_n)c^{n/2}$$

化简也即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi ct_1}}\mathrm{e}^{-\frac{cy_1^2}{2ct_1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi c(t_2-t_1)}}\mathrm{e}^{-\frac{c(y_2-y_1)^2}{2c(t_2-t_1)}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi c(t_n-t_{n-1})}}\mathrm{e}^{-\frac{c(y_n-y_{n-1})^2}{2c(t_n-t_{n-1})}}c^{n/2}$$

直接消去分子、分母中的 c 即得到与 p^W 相同。

(c) 考虑 $(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}, W_T)$，再计算其对 $Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n}$ 的边际分布，可得其密度函数为

$$p_{t_1,\ldots,t_n}(z_1,\ldots,z_n,w) = \int_{\mathbb{R}} p^W_{T-t_n,\ldots,T-t_1,T}(w-z_n,\ldots,w-z_1,w)\mathrm{d}w$$

直接写出其为

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_n)}}\mathrm{e}^{-\frac{(w-z_n^2)}{2(T-t_n)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n-t_{n-1})}}\mathrm{e}^{-\frac{(z_n-z_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\mathrm{e}^{-\frac{(z_2-z_1)^2}{2(t_2-t_1)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}\mathrm{e}^{-\frac{z_1^2}{2t_1}}\mathrm{d}w$$

而含 w 的只有第一项，利用高斯积分可知其积分为 1，剩余部分与 p^W 完全相同，从而得证。

2. 期望计算：利用讲义 11 的习题可知 $\mathbb{E}(W_t^4)=3t^2$，由此利用独立性 $t<s$ 时

$$\mathbb{E}(W_t^2W_s^2)=\mathbb{E}(W_t^2((W_s-W_t)^2+2(W_s-W_t)W_t+W_t^2))=t(s-t)+0+3t^2=2t^2+st$$

而 $t<s<r$ 时

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t^2W_sW_r)&=\mathbb{E}(W_t^2(W_t+(W_s-W_t))(W_t+(W_r-W_s)+(W_s-W_t)))\\&=\mathbb{E}(W_t^2(W_t+(W_s-W_t))(W_t+(W_s-W_t)))\\&=\mathbb{E}(W_t^2W_s^2)\end{aligned}$$

于是设分点为 $0=t_0,t_1,\dots,t_n=t$，有

$$\mathbb{E}(Q_t^\Delta-t)^2=t^2-2t\mathbb{E}(Q_t^\Delta)+\mathbb{E}(Q_t^\Delta)^2$$

设 $h_k=t_{k+1}-t_k$，进一步计算

$$\mathbb{E}(Q_t^\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathbb{E}(W_{t_{k+1}}^2)+\mathbb{E}(W_{t_k}^2)-2\mathbb{E}(W_{t_{k+1}}W_{t_k})\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}+t_k-2t_k)=t$$

$$\mathbb{E}(Q_t^\Delta)^2=\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^4+2\sum_{0\le k_1<k_2\le n-1}(W_{t_{k_1+1}}-W_{t_{k_1}})^2(W_{t_{k_2+1}}-W_{t_{k_2}})^2\right)$$

利用上方的计算结论与平移不变性有

$$\mathbb{E}(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^4=3h_k^2$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(W_{t_{k_1+1}}-W_{t_{k_1}})^2(W_{t_{k_2+1}}-W_{t_{k_2}})^2\\=&\mathbb{E}\left(W_{t_{k_1+1}-t_{k_1}}^2(W_{t_{k_2+1}-t_{k_1}}-W_{t_{k_2}-t_{k_1}})^2\right)\\=&4(t_{k_1+1}-t_{k_1})^2+(t_{k_1+1}-t_{k_1})(t_{k_2+1}+t_{k_2}-2t_{k_1})-2(2(t_{k_1+1}-t_{k_1})^2+(t_{k_1+1}-t_{k_1})(t_{k_2}-t_{k_1}))\\=&(t_{k_1+1}-t_{k_1})(t_{k_2+1}-t_{k_2})=h_{k_1}h_{k_2}\end{aligned}$$

由此再利用所有 h_k 求和为 t 可得结果为

$$-\left(\sum_{k=0}^{n-1}h_k\right)^2+\sum_{k=0}^{n-1}3h_k^2+2\sum_{0\le k_1<k_2\le n-1}h_{k_1}h_{k_2}$$

将第一项展开即得最终为 $2\sum_{k=0}^{n-1}h_k^2$，得证。

L^2 收敛：直接放缩可知

$$2\sum_{k=0}^{n-1}h_k^2\le 2|\Delta|\sum_{k=0}^{n-1}h_k=2|\Delta|t$$

由此在 $|\Delta|\to 0$ 时其收敛于 0，从而得证 L^2 收敛。

几乎处处收敛：当 $t_k=k2^{-n}t$ 时，将对应的 Q_t^Δ 记为 Y_n，对 $\varepsilon>0$，利用 Chebyshev 不等式与之前的方差计算结论有

$$P(|Y_n-t|\ge\varepsilon)\le\varepsilon^{-2}\mathbb{E}(Y_n-t)^2\le\varepsilon^{-2}2\cdot 2^n\cdot 2^{-2n}=\varepsilon^{-2}2^{-n+1}$$

由此可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|Y_n-t|\ge\varepsilon)\le 2\varepsilon^{-2}<\infty$$

根据概率论结论即得有几乎处处收敛。

3. **正定性**：根据定义即得其恒大于等于 0，若其为 0 只能对每个 n 有 $\|x-y\|_{L^\infty[0,n]}=0$，从而根据连续可知只能 $x=y$。

   对称性：由定义可直接得到。

   三角不等式：由于

$$\|x-z\|_{L^\infty[0,n]}\le\|x-y\|_{L^\infty[0,n]}+\|y-z\|_{L^\infty[0,n]}$$

   若右侧至少一个超过 1 则已经得证，否则由

$$\|x-z\|_{L^\infty[0,n]}\wedge 1\le\|x-z\|_{L^\infty[0,n]}$$

   得证。

   完备性：对此范数下的 Cauchy 列 $\{x_k\}$，由于

$$\|x_i-x_j\|_{L^\infty[0,n]}\wedge 1\le 2^n d(x_i,x_j)$$

   对任何 $\varepsilon\in(0,1)$ 可取充分大的 N 使得 $i,j>N$ 时 $d(x_i,x_j)<2^{-n}\varepsilon$，即得

$$\|x_i-x_j\|_{L^\infty[0,n]}\wedge 1<\varepsilon$$

   但 $1>\varepsilon$，这就得到 x_i-x_j 在 $L^\infty[0,n]$ 下构成 Cauchy 列，根据闭区间连续函数在一致收敛下的完备性可知 x_i-x_j 一致收敛到某个 $[0,n]$ 上的连续函数 $x^{(n)}$。由于一致收敛结果的唯一性，对不同的 n，一致收敛到的 $x^{(n)}$ 并不会冲突，由此定义

$$x(t)=x^{(n)}(t),\quad t\in[n-1,n]$$

   其仍为连续函数，且 x_i 内闭一致收敛到 x。最后证明 x_i 在此度量下收敛到 x。对任何 $\varepsilon>0$，取 n_0 使得 $2^{-n_0+1}<\varepsilon$，再取 N 使得 $m>N$ 时 $\|x_m-x\|_{L^\infty[0,n_0]}<\varepsilon/2$，则有 $m>N$ 时

$$\begin{aligned}d(x_m,x)&\le\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\|x_m-x\|_{L^\infty[0,n]}\wedge 1+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\le\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\|x_m-x\|_{L^\infty[0,n_0]}+2^{-n_0}\\&<\|x_m-x\|_{L^\infty[0,n_0]}+2^{-n_0}<\varepsilon\end{aligned}$$

   从而得证。

   可分性：考虑所有有理系数多项式，按次数分类可知其可数，下证它们稠密。

   根据 Weierstrass 逼近定理，任何连续函数在有界闭区间上可被多项式一致逼近，而考虑系数即可发现有界闭区间上任何多项式可被有理系数多项式一致逼近。由此，对函数 x，可取多项式列 p_{kn} 在 $[0,n]$ 上一致逼近 x，再取有理系数多项式列 $p_{kn}^{(j)}$ 在 $[0,n]$ 上一致逼近 p_{kn}。

   取出 $q_{kn}=p_{kn}^{(j_{kn})}$ 使得 $\|q_{kn}-p_{kn}\|_{L^\infty[0,n]}<2^{-k}$，则有

$$\lim_{k\to\infty}\|q_{kn}-x\|_{L^\infty[0,n]}\le\lim_{k\to\infty}\|p_{kn}-x\|_{L^\infty[0,n]}+\lim_{k\to\infty}2^{-k}=0$$

   从而 q_{kn} 是 $[0,n]$ 上一致逼近 x 的有理系数多项式列。

   取出 $r_n=q_{k_nn}$ 使得 $\|r_n-x\|_{L^\infty[0,n]}<2^{-n}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}d(r_n,x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2^m}\|r_n-x\|_{L^\infty[0,m]}+\sum_{m=n+1}^{\infty}2^{-m}\right)\le\lim_{n\to\infty}(\|r_n-x\|_{L^\infty[0,n]}+2^{-n})=0$$

   从而得证。

4. 先考虑 $s\neq 0$ 时。直接计算分布函数可知所求分布函数为

$$f(z)=\frac{f_{W_s,W_{(s+t)/2},W_t}(x,z,y)}{f_{W_s,W_t}(x,y)}$$

根据 Wiener 过程的性质，分子为

$$(2\pi)^{-3/2}s^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2s}}((t-s)/2)^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{t-s}}((t-s)/2)^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-z)^2}{t-s}}=(2\pi)^{-3/2}s^{-1/2}\frac{2}{t-s}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2+(y-z)^2}{t-s}}$$

分母为

$$(2\pi)^{-1}s^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2s}}(t-s)^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}$$

由此作商得到

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{1}{t-s}\Big(z-x-y)^2\Big)\right)$$

将指数中的分子分母同除以 4 即得到高斯分布。

当 $s=0$ 时，若 $x\neq 0$ 则条件概率无意义，只需考虑 $x=0$ 时，此时利用平移不变性可从上一种情况得到，综合即得证。

13 讲义 13

1. (a) 直接计算可得

$$W_{t_{j+1/2}}(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})=\frac{1}{2}(W_{t_{j+1}}^2-W_{t_j}^2)+(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})(W_{t_{j+1/2}}-(W_{t_j}+W_{t_{j+1}})/2)$$

而这又可以进一步写为

$$\frac{1}{2}(W_{t_{j+1}}^2-W_{t_j}^2)+\frac{1}{2}(W_{t_{j+1/2}}-W_{t_j})^2-\frac{1}{2}(W_{t_{j+1}}-W_{t_{j+1/2}})^2$$

于是中点积分结果减去 $\frac{W_t^2}{2}$ 可得

$$\frac{1}{2}\sum_j(W_{t_{j+1/2}}-W_{t_j})^2-\frac{1}{2}\sum_j(W_{t_{j+1}}-W_{t_{j+1/2}})^2$$

利用 Weiner 过程的协方差可知上式期望为 0，而根据左右每个求和中部分均独立可知方差为每个部分的方差线性组合，于是即得上式方差为

$$\frac{1}{4}\sum_j\mathrm{Var}((W_{t_{j+1/2}}-W_{t_j})^2)+\frac{1}{4}\sum_j\mathrm{Var}(W_{t_{j+1}}-W_{t_{j+1/2}})^2$$

这与

$$\frac{1}{2}\sum_j(W_{t_{j+1/2}}-W_{t_j})^2+\frac{1}{2}\sum_j(W_{t_{j+1}}-W_{t_{j+1/2}})^2$$

的方差相同，而后者根据 $\langle W,W\rangle_t=t$ 可知 L^2 收敛于 0，从而原式 L^2 收敛于 $\frac{W_t^2}{2}$。

(b) 直接计算可得

$$W_{t_{j+1}}(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})=\frac{W_{t_{j+1}}^2-W_{t_j}^2}{2}+\frac{1}{2}(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})^2$$

累加后与讲义例 2.6 完全类似得到结果为 $\frac{W_t^2}{2}+\frac{t}{2}$。

2. (a) 利用 Taylor 展开可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}h_n(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-u)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\mathrm{d}x^n}=\mathrm{e}^{x^2/2}\mathrm{e}^{-(x-u)^2/2}=\mathrm{e}^{ux-u^2/2}$$

直接利用复合函数求导计算有

$$H_n(x,a)=a^{n/2}\mathrm{e}^{x^2/(2a)}(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\mathrm{d}x^n}\bigg|_{x/\sqrt{a}}=\mathrm{e}^{x^2/(2a)}(-a)^n\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}}{\mathrm{d}x^n}$$

于是类似第一式进一步得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}H_n(x,a)=\mathrm{e}^{x^2/(2a)}\mathrm{e}^{-(x-au)^2/(2a)}=\mathrm{e}^{ux-au^2/2}$$

(b) 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}=-\frac{x}{a}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}$$

利用乘积求导公式有递推

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}=-\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{x}{a}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}\right)=-\frac{x}{a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}-\frac{n}{a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}$$

直接计算可知

$$\frac{\partial H_n(x,a)}{\partial x}=\frac{x}{a}\mathrm{e}^{x^2/(2a)}(-a)^n\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}}{\mathrm{d}x^n}+\mathrm{e}^{x^2/(2a)}(-a)^n\frac{\mathrm{d}^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}}{\mathrm{d}x^{n+1}}$$

再代入递推即得

$$\frac{\partial H_n(x,a)}{\partial x}=\mathrm{e}^{x^2/(2a)}(-a)^n\left(-\frac{n}{a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}\right)=nH_{n-1}(x,a)$$

另一方面，利用偏导交换性可知 $\frac{\partial H_n(x,a)}{\partial a}$ 为

$$-\frac{x^2}{2a^2}\mathrm{e}^{x^2/(2a)}(-a)^n\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}}{\mathrm{d}x^n}-n\mathrm{e}^{x^2/(2a)}(-a)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}}{\mathrm{d}x^n}+\mathrm{e}^{x^2/(2a)}(-a)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{x^2}{2a^2}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}\right)$$

再次利用乘积求导公式可知

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{x^2}{2a^2}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}\right)=\frac{x^2}{2a^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}+n\frac{x}{a^2}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}+C_n^2\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}=-\frac{x}{a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}-\frac{n-1}{a}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}$$

由此展开二、三两项并整理可发现 n 次与 $n-1$ 次导数均被消去，只有

$$\left(-n(-a)^{n-1}\left(-\frac{n-1}{a}\right)+C_n^2(-a)^n\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{e}^{x^2/2a}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}$$

由 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ 进一步展开得到其为

$$-\frac{n(n-1)}{2}(-a)^{n-2}\mathrm{e}^{x^2/2a}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\mathrm{e}^{-x^2/(2a)}=-\frac{n(n-1)}{2}H_{n-2}(x,a)$$

再利用 $\frac{\partial H_n(x,a)}{\partial x}=nH_{n-1}(x,a)$ 即得

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial a}\right)H_n(x,a)=0$$

(c) 归纳，只需证明

$$\int_0^t\frac{1}{n!}H_n(W_s,s)\mathrm{d}W_s=\frac{1}{(n+1)!}H_{n+1}(W_t,t)$$

也即

$$\int_0^t(n+1)H_n(W_s,s)\mathrm{d}W_s=H_{n+1}(W_t,t)$$

利用多维 Itô 公式可得 (用 $\partial_{x,y}$ 表示对两个分量求偏导)

$$\mathrm{d}f(W_t,t)=\partial_x f(W_t,t)\mathrm{d}W_t+\left(\partial_y f(W_t,t)+\frac{1}{2}\partial_x^2 f(W_t,t)\right)\mathrm{d}t$$

而根据 (b) 的计算有 (此处 x,y 对应之前的 x,a)

$$\frac{1}{2}\partial_x^2 H_{n+1}+\partial_y H_{n+1}=0$$
$$\partial_x H_{n+1}=(n+1)H_n$$

由此

$$\mathrm{d}H_{n+1}(W_t,t)=(n+1)H_n(W_t,t)\mathrm{d}W_t$$

再由 $t=0$ 时 $H_{n+1}(W_t,t)=0$，两边积分得相等。

3. 利用二维 Itô 公式类似例 3.4 可得 (利用 $\mathrm{d}t\mathrm{d}X_t=0$)

$$\mathrm{d}(f(t)X_t)=X_t f'(t)\mathrm{d}t+f(t)\mathrm{d}X_t$$

(a) 构造 $f(t)=t+1$ 可得

$$\mathrm{d}((t+1)X_t)=X_t\mathrm{d}t+(t+1)\mathrm{d}X_t=(t+1)\left(\mathrm{d}X_t+\frac{X_t}{t+1}\mathrm{d}t\right)=\mathrm{d}W_t$$

再由初始条件即得

$$X_t=\frac{1}{t+1}W_t$$

(b) 构造 $f(t)=\mathrm{e}^t$ 可得

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^tX_t)=X_t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\mathrm{e}^t\mathrm{d}X_t=\mathrm{e}^t(\mathrm{d}X_t+X_t\mathrm{d}t)=\mathrm{d}W_t$$

再由初始条件可得

$$X_t=\mathrm{e}^{-t}(X_0+W_t)$$

4. 设 X_t 为 n 维向量，σ 为 $n\times m$ 阶常矩阵，W_t 为 m 阶向量。类似习题 3 可得对每个元素是 t 的函数的 n 阶方阵 $M(t)$ 有

$$\mathrm{d}(M(t)X_t)=(\mathrm{d}M(t))X_t+M(t)\mathrm{d}X_t=M'(t)X_t\mathrm{d}t+M(t)\mathrm{d}X_t$$

构造 $M(t)=\mathrm{e}^{-tA}$，利用级数展开求导可得 (这里 $\sigma\mathrm{d}W_t$ 为矩阵乘法)

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-tA}X_t)=-\mathrm{e}^{-tA}AX_t\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{d}X_t=\mathrm{e}^{-tA}(\mathrm{d}X_t-AX_t\mathrm{d}t)=\mathrm{e}^{-tA}\sigma\mathrm{d}W_t$$

同积分得到

$$\mathrm{e}^{-tA}X_t-X_0=\int_0^t\mathrm{e}^{-sA}\sigma\mathrm{d}W_s$$

也即

$$X_t=\mathrm{e}^{tA}X_0+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)A}\sigma\mathrm{d}W_s$$

下设 X_0 均值为 μ，协方差矩阵为 Σ。

利用 Itô 积分公式得

$$\mathbb{E}(X_t)=\mathrm{e}^{tA}\mu$$

先考虑 $X_0=0$ 时的协方差，此时 $X_t^{(i)}$ 均值均为 0，设 A 的各分量 a_{ij}、σ 各分量 σ_{ij}，有直接利用线性性展开有

$$\mathbb{E}(X_t^{(i)}X_t^{(j)})=\sum_{a,b,c,d}\mathbb{E}\left(\int_0^t(\mathrm{e}^{(t-s)A})_{ia}\sigma_{ab}\mathrm{d}(W_s)_b\right)\left(\int_0^t(\mathrm{e}^{(t-s)A})_{jc}\sigma_{cd}\mathrm{d}(W_s)_d\right)$$

而根据独立性，只有在 $b=d$ 时乘积方能非零，再提出常数有

$$\mathbb{E}(X_t^{(i)}X_t^{(j)})=\sum_{a,b,c}\sigma_{ab}\sigma_{cb}\mathbb{E}\bigg(\int_0^t(\mathrm{e}^{(t-s)A})_{ia}\mathrm{d}(W_s)_b\bigg)\bigg(\int_0^t(\mathrm{e}^{(t-s)A})_{jc}\mathrm{d}(W_s)_b\bigg)$$

利用例 2.6 前的公式可得

$$\mathbb{E}(X_t^{(i)}X_t^{(j)})=\sum_{a,b,c}\sigma_{ab}\sigma_{cb}\int_0^t(\mathrm{e}^{(t-s)A})_{ia}(\mathrm{e}^{(t-s)A})_{jc}\mathrm{d}s$$

将其重新排列为

$$\mathbb{E}(X_t^{(i)}X_t^{(j)})=\sum_{a,b,c}\int_0^t(\mathrm{e}^{(t-s)A})_{ia}\sigma_{ab}\sigma_{cb}(\mathrm{e}^{(t-s)A})_{jc}\mathrm{d}s=\int_0^t\left(\mathrm{e}^{(t-s)A}\sigma\sigma^T\mathrm{e}^{(t-s)A^T}\right)_{ij}\mathrm{d}s$$

由此最终得到

$$\mathrm{Cov}(X_t-\mathrm{e}^{tA}X_0)=\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)A}\sigma\sigma^T\mathrm{e}^{(t-s)A^T}\mathrm{d}s$$

根据独立性可知

$$\mathrm{Cov}(X_t)=\mathrm{e}^{2tA}\Sigma+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)A}\sigma\sigma^T\mathrm{e}^{(t-s)A^T}\mathrm{d}s$$

5. 设 $\mathrm{d}X_t=\alpha(X_t,t)\mathrm{d}t+\beta(X_t,t)\mathrm{d}W_t$，利用积分定义可知

$$\int_0^t\sigma(X_s,s)*\mathrm{d}W_s\approx\sum_j\sigma(X_{t_{j+1}},t_{j+1})(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})$$

而讲义第五节中已经说明了

$$\sum_j\sigma(X_{t_{j+1}},t_{j+1})(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})\to\int_0^t\sigma_s(X_s,s)\mathrm{d}W_s+\int_0^t\partial_x\sigma\beta(X_s,s)\mathrm{d}s$$

由此也即得到

$$\sigma(X_s,s)*\mathrm{d}W_s=\sigma(X_s,s)\mathrm{d}W_s+\partial_x\sigma\beta(X_s,s)\mathrm{d}s$$

于是代入即有

$$\mathrm{d}X_t=\sigma(X_t,t)\mathrm{d}W_t+(b(X_t,t)+\partial_x\sigma\beta(X_t,t))\mathrm{d}t$$

对比两种形式得到 $\beta=\sigma$，从而得证。

14 讲义 14

1. 利用 Einstein 求和约定可将原始的 Fokker-Planck 方程写为

$$\partial_tp+\partial_i(b_ip)=\frac{1}{2}\partial_i\partial_j(\sigma_{ik}\sigma_{jk}p)$$

(a) 对于 Stratonovich 随机微分方程，其可写为

$$\mathrm{d}(X_t)_i=b_i(X_t,t)\mathrm{d}t+\sigma_{ij}(X_t,t)\circ\mathrm{d}(W_t)_j$$

利用讲义 13 可知其写为 (省略 (X_t,t))

$$\mathrm{d}(X_t)_i=b_i\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\partial_k\sigma_{ij}\sigma_{kj}\mathrm{d}t+\sigma_{ij}\mathrm{d}(W_t)_j$$

于是代入第一式可知 Stratonovich 随机微分方程对应的 Fokker-Planck 方程为

$$\partial_tp+\partial_i(b_ip)+\frac{1}{2}\partial_i(\partial_k\sigma_{ij}\sigma_{kj}p)=\frac{1}{2}\partial_i\partial_j(\sigma_{ik}\sigma_{jk}p)$$

利用线性性并适当更换移项后的指标也即

$$\partial_t p + \partial_i(b_i p) = \frac{1}{2}\partial_i(\partial_j(\sigma_{ik}\sigma_{jk}p) - \partial_j\sigma_{ik}\sigma_{jk}p)$$

由乘积求导法则可知

$$\partial_t p + \partial_i(b_i p) = \frac{1}{2}\partial_i(\sigma_{ik}\partial_j(\sigma_{jk}p))$$

从而得证。

(b) 对于反向随机微分方程，其可写为

$$\mathrm{d}(X_t)_i = b_i(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma_{ij}(X_t, t) * \mathrm{d}(W_t)_j$$

类似讲义 13 的习题可知其写为 (省略 (X_t, t))

$$\mathrm{d}(X_t)_i = b_i\mathrm{d}t + \partial_k\sigma_{ij}\sigma_{kj}\mathrm{d}t + \sigma_{ij}\mathrm{d}(W_t)_j$$

于是直接代入第一式即有

$$\partial_t p + \partial_i((b_i + \partial_k\sigma_{ij}\sigma_{kj})p) = \frac{1}{2}\partial_i\partial_j(\sigma_{ik}\sigma_{jk}p)$$

这就是结论。

2. 设 B 各分量为 B_{ij}，$(X_t)_j = x_j$，则对应的 $b_i = B_{ij}x_j$。细致平衡条件可以直接写为

$$B_{ij}x_j p - \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_j p = 0$$

直接两端积分，由期望为 0 可得到 p 在无穷远处趋于 0。由协方差条件，乘 x_l 后积分可得

$$B_{ij}\int_{\mathbb{R}^n} x_j x_l p\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\int_{\mathbb{R}^n} x_l\partial_j p\mathrm{d}x = 0$$

对第一部分利用协方差结论，第二部分利用分部积分可得

$$B_{ij}\Sigma_{jl} + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\int_{\mathbb{R}^n}\delta_j^l p\mathrm{d}x = B_{ij}\Sigma_{jl} + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\delta_j^l = 0$$

由于对任何 i, l 成立，组合回矩阵也即

$$B\Sigma + \frac{1}{2}\sigma\sigma^T = O$$

15 讲义 16

1. 由积分与 ΔW 的平移不变性，可不妨设 $t_n = 0$，记 $\tau = t_{n+1} - t_n$，有

$$\Delta Z_1 = \int_0^\tau W_s\mathrm{d}s, \quad \Delta Z_2 = \int_0^\tau s\mathrm{d}W_s$$

利用讲义 13 中的分部积分结论可知 (以 0 为起点 $\Delta W_n = W_\tau$)

$$\Delta Z_1 + \Delta Z_2 = \tau\Delta W_n$$

由积分定义与 Gauss 过程性质可知 ΔZ_1、ΔZ_2 与 ΔW_n 均为 Gauss 随机变量，只需生成 ΔZ_2 与 ΔW 即可计算出 $\Delta Z_1 = \tau\Delta W_n - \Delta Z_2$。

由于两者联合仍为 Gauss 分布，只需计算出期望与协方差即可从标准正态分布线性变换出结果。

利用 Itô 积分的性质可得

$$\mathbb{E}(\Delta W_n) = 0, \quad \mathbb{E}(\Delta Z_2) = 0$$
$$\mathbb{E}(\Delta W_n\Delta Z_2) = \int_0^\tau s\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\tau^2$$
$$\mathbb{E}(\Delta W_n)^2 = \mathbb{E}(W_\tau^2) = \tau$$
$$\mathbb{E}(\Delta Z_2)^2 = \int_0^\tau s^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\tau^3$$

由此即可进行生成。

2. 下方所有 $\mathbb{E}$ 表示 X_n、X_{t_n} 给定时的条件期望，$\mathbb{E}_{all}$ 表示一般的期望。

   设 $\hat{X}_t$ 表示 t 时刻真解，X_n 表示 t_n 时刻数值解，$\tau = t_{n+1} - t_n$，并记 (这里 ΔW_n 与 X_n 生成 X_{n+1} 的 ΔW_n 一致)

$$\bar{X}_{n+1} = X_{t_n} + b(X_{t_n})\tau + \Delta W_n$$

   有

$$X_{n+1} - X_{t_{n+1}} = (X_{n+1} - \bar{X}_{n+1}) + (\bar{X}_{n+1} - X_{t_{n+1}})$$

   假设 X_n 与 X_{t_n} 已经确定，由 ΔW_n 一致可知 $X_{n+1} - \bar{X}_{n+1}$ 为常数，将其记为 C_n，设 b 为界为 L 的 Lipschitz 函数有

$$|C_n| = |X_{n+1} - \bar{X}_{n+1}| = |X_n - X_{t_n} + \tau b(X_n) - \tau b(X_{t_n})| \leq (1 + L\tau)|X_n - X_{t_n}|$$

   另一方面，对第二项估算可得

$$\bar{X}_{n+1} - X_{t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (b(X_t) - b(X_{t_n}))\mathrm{d}t$$

   设 b 二阶可微，利用 Itô 公式与 $\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t$ 可知

$$b(X_t) - b(X_{t_n}) = \int_{t_n}^{t} \mathrm{d}b(X_s) = \int_{t_n}^{t} (b'(X_s)b(X_s) + b''(X_s))\mathrm{d}s + \int_{t_n}^{t} b'(X_s)\mathrm{d}W_s$$

   于是

$$\bar{X}_{n+1} - X_{t_{n+1}} = Y_n + Z_n$$

$$Y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{t} (b'(X_s)b(X_s) + b''(X_s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad Z_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{t} b'(X_s)\mathrm{d}W_s\mathrm{d}t$$

   进一步假设 b 的各阶导函数均有界，将积分中均放为常数后直接计算可得

$$\mathbb{E}(Y_n^2) \leq C_Y\tau^4, \quad \mathbb{E}(Z_n^2) \leq C_Z\tau^3$$

   于是可估算

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - X_{t_{n+1}})^2) = \mathbb{E}((C_n + Y_n + Z_n)^2)$$

   利用

$$\mathbb{E}(2(C_n + Z_n)Y_n) \leq \tau\mathbb{E}((C_n + Z_n)^2) + \frac{1}{\tau}\mathbb{E}(Y_n^2)$$

   且计算可发现 (对 t 的积分与期望可交换)

$$\mathbb{E}(Z_n) = 0$$

   由此由 C_n 为常数可拆分得到

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - X_{t_{n+1}})^2) \leq (1+\tau)C_n^2 + (1+\tau)\mathbb{E}(Z_n^2) + \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\mathbb{E}(Y_n^2)$$

   由阶的定义须 $\tau \to 0^+$，考虑 $\tau < 1$ 的情况，并记

$$C_1 = 2L^2 + 4L + 1 \geq \frac{(1+\tau)(1+L\tau)^2 - 1}{\tau}, \quad C_2 = 2(C_Y + C_Z)$$

   代入放缩有

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - X_{t_{n+1}})^2) \leq (1 + C_1\tau)(X_n - X_{t_n})^2 + C_2\tau^3$$

   两边取期望，由全期望公式

$$\mathbb{E}_{all}((X_{n+1} - X_{t_{n+1}})^2) \leq (1 + C_1\tau)\mathbb{E}_{all}((X_n - X_{t_n})^2) + C_2\tau^3$$

   直接递推，由 $X_0 = X_{t_0}$ 可得

$$\mathbb{E}_{all}((X_n - X_{t_n})^2) \leq \frac{(1 + C_1\tau)^n - 1}{C_1\tau}C_2\tau^3$$

由 $n \le \frac{T}{\tau}$ 可最终放为

$$\mathbb{E}_{all}((X_n - X_{t_n})^2) \le \frac{C_2}{C_1}(\mathrm{e}^{C_1 T} - 1)\tau^2$$

即为结论。

3. * 需要假设 X_0 的各阶矩有界，否则考察 0 处即不成立。方便起见设 $X_0 = 0$，数值解也以此起始。下记 b 各阶导数的界为 M。

(1) $\mathbb{E}(X_n^{2r})$ 有界性

利用 Young 不等式可知存在 C_r 使得 $(a+b)^{2r} \le C_r(a^{2r} + b^{2r})$，从而

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^{2r}) \le C_r\mathbb{E}(X_n^{2r}) + C_r\mathbb{E}((b(X_n)\tau + \Delta W_n)^{2r}) \le C_r\mathbb{E}(X_n^{2r}) + C_r^2 M^{2r}\tau^{2r} + C_r^2\mathbb{E}(\Delta W_n^{2r})$$

由于 ΔW_n 与 W_τ 同分布，设

$$\mathbb{E}(W_\tau^{2r}) = C_r'\tau^r$$

上式可最终化为

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^{2r}) \le C_r\mathbb{E}(X_n^{2r}) + (C_r^2 M^{2r}\tau^r + C_r')\tau^r$$

当 $r = 0$ 时 $\mathbb{E}(X_n^{2r}) = 1$ 有界，其他情况与上题完全类似可得

$$\mathbb{E}(X_n^{2r}) = O(\tau^{r-1})$$

于是有界。

(2) $\mathbb{E}(X_t^{2r})$ 有界性

利用 Itô 公式可知

$$\mathrm{d}X_t^{2r} = 2rX_t^{2r-1}(b(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t) + 2r(2r-1)X_t^{2r-2}\mathrm{d}t$$

两边积分并取期望，由 Young 不等式可得 $\mathbb{E}(X_t^{2r})$ 不超过

$$2r\left(\frac{2r-1}{2r}\int_0^t \mathbb{E}(X_s^{2r})\mathrm{d}s + \frac{1}{2r}\int_0^t M^{2r}\mathrm{d}s\right) + 2r(2r-1)\left(\frac{r-1}{r}\int_0^t \mathbb{E}(X_s^{2r})\mathrm{d}s + \frac{1}{r}\int_0^t 1\mathrm{d}s\right)$$

化简即得

$$\mathbb{E}(X_t^{2r}) \le (2r-1)^2\int_0^t \mathbb{E}(X_s^{2r})\mathrm{d}s + T(M^{2r} + 2(2r-1))$$

由此利用 Gronwall 不等式可得

$$\sup_{t\le T}\mathbb{E}(X_t^{2r}) \le T(M^{2r} + 2(2r-1))\mathrm{e}^{(2r-1)^2 T}$$

(3) $\mathbb{E}(\bar{X}_t^{2r})$ 有界性

上一种情况中，当 X_0 非零时，积分后常数项会多出 X_0 相关的至多 $2r$ 阶矩，若假设它们均有界，完全相同可得 $\mathbb{E}(X_t^{2r})$ 依然有界。

再结合第一问估计，由 X_n 有界，将 X_n 看作初始的 X_0，则对应的 $\mathbb{E}(X_t^{2r})$ 对 $t \le T$ 仍然有界 (从而对 $t < \tau$ 有界)，即得证。

16 讲义 18

1. 先计算

$$\mathbb{E}\exp\left(\mathrm{i}\sum_j \xi(t_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right)$$

记 $\tau_j = t_{j+1} - t_j$，利用独立性可知上式即为

$$\prod_j \mathbb{E}\exp\left(\mathrm{i}\xi(t_j)W_{\tau_j}\right)$$

利用 Gauss 分布的特征函数结论可知此为

$$\prod_j \exp\bigg(-\frac{1}{2}\xi^2(t_j)\tau_j\bigg) = \exp\bigg(-\frac{1}{2}\sum_j \xi^2(t_j)\tau_j\bigg)$$

由于 t_j 构成 0 到 1 的划分，取 $\max\tau_j \to 0^+$ 的极限，由积分定义即知右侧为

$$\exp\bigg(-\frac{1}{2}\int_0^1 \xi^2(t)\,\mathrm{d}t\bigg)$$

此时左侧即

$$\mathbb{E}\exp\bigg(\mathrm{i}\int_0^1 \xi(t)\,\mathrm{d}W_t\bigg)$$

从而得证。