教学大纲(参照资格考试大纲)

a) Fourier级数: Dini判别法,Jordan判别法,Drichlet核,Fejer核, Poisson核
Fourier变换(i) L^1函数的Fourier变换,卷积1.6
(ii) Schwartz函数与缓增分布,Schwartz函数的Fourier变换,缓增分布的Fourier变换1.7
(iii) L^2函数的Fourier变换,Plancherel公式,L^p函数的Fourier变换,Riesz-Thorin插值定理,Hausdorff-Young不等式,卷积Young不等式1.8
(iv) 收敛与求和,Poisson核、Gauss核1.9

b) Hardy-Littlewood极大函数(i)恒等逼近,Poisson积分, $L^{p,\infty}$空间,
弱(p,q) 型与a.e.收敛 (ii)Marcinkiewicz插值定理 (iii)极大函数Mf,
$M_d f$, 弱(1,1)有界性, 覆盖引理,Calderon-Zygmund分解

c) 奇异积分3-5
(i)Hilbert变换(3):共轭Poisson核,主值积分,弱$(1,1)$与强(p,p)有界性,极大Hilbert变换H^*f与几乎处处收敛,L^p乘子,与平移可交换的算子
(ii)卷积型奇异积分算子, $-n$次齐次积分核(4),
旋转方法,Riesz变换,积分核的Fourier变换,分数次积分的算子,带变量核的Calderon-Zygmund奇异积分
(iii)卷积型奇异积分算子,Hormander条件,Benedek-Calderon-Panzone
原理(5.1,5.2) (iv)一般(非卷积型)Calderon-Zygmund算子,标准核条件, 极大奇异积分算子的有界性,向量值奇异积分算子(5.3,5.4)

d) Hardy空间与BMO空间(i) 原子Hardy空间, P^*f, $M^*_\varphi f$ 6.1
(ii)BMO空间,Sharp极大函数$M^\# f$ 6.2, Sharp极大定理,L^p与BMO之间的插值定理6.3,
John-Nirenberg不等式6.4

e) Littewood-Paley理论与乘子
(i) 向量值不等式8.1,Littewood-Paley平方函数理论8.2
(ii)Hörmander乘子定理8.3, Marcinkiewicz乘子定理8.4

教材：J. Duoandikoetxea, Fourier analysis, Amer. Math. Soc.

参考书：1. 程民德，邓东皋，龙瑞麟，实分析，高等教育出版社.
2. L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, GTM 249, Springer.

函数空间: L^p, Σ, Σ', $L^{p,\infty}$, Hardy空间, BMO空间.

极大函数: Mf, $M_d f$, $M^\# f$, P^*f, $M^*_\varphi f$. 极大奇异积分算子.

算子: Fourier变换, Hilbert变换, 卷积型奇异积分算子(Riesz变换, L^p乘子, $-n$次齐次积分核, Hörmander条件), Calderon-Zygmund算子(标准核条件), 向量值奇异积分算子, Littewood-Paley算子$g_\varphi f$, $S_\varphi f$.

插值定理: Marcinkiewicz插值定理, Riesz-Thorin插值定理.

乘子定理: Hörmander乘子定理, Marcinkiewicz乘子定理.

记号说明: $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$; $a_f(\lambda) = |\{|f| > \lambda\}|$, $\lambda > 0$; $A \approx B$ 定义为存在常数$C > 1$使得$C^{-1}A \le B \le CA$.

作业:第1章:1,3,4,6,7,8,10,14,第2章:1,2,3,4,5,9,第3章:1,3,5,6,7,10,
第4章:1,3,4,5,10,12,第5章:1,2,5,6,8,9,第6章:2,4,5,6,7,9,第8章:1,2,3,4,5,6.

第1章习题

(1) 设f 是$\mathbb{T}$上的有界变差函数, 证明: $\widehat{f}(k) = O(1/|k|)$.
(2) 设f 是$\mathbb{T}$上的有界变差函数, 证明若$\widehat{f}(k) = o(1/|k|)$, 则$f \in C(\mathbb{T})$.
(3) 设$f \in L^1(\mathbb{T})$, $\sigma_N f$是f的Fourier级数部分和的算术平均, x_0是f的Lebesgue点. 证明: $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma_N f(x_0) = f(x_0)$.
(4) 设$P(x)$ 是$\mathbb{T}$上的N 次三角多项式, 证明: $\|P'\|_\infty \le 4\pi N\|P\|_\infty$.
(5) 设$f \in C^1(\mathbb{T})$, $\widehat{f}(k) = 0$, $\forall\ |k| < N$, 证明: $\|f'\|_\infty \ge 4N\|f\|_\infty$.
(6) 设$f \in L^2(\mathbb{R})$, $f' \in L^2(\mathbb{R})$, 证明: $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
(7) 设$f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, 证明: $f \in L^2(\mathbb{R})$.
(8) 设$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, f在原点$x = 0$连续, 且$\widehat{f} \ge 0$, 证明: $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(9) 设$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 若f的平移的有限线性组合在$L^2(\mathbb{R}^n)$中稠密, 则称f平移生成$L^2(\mathbb{R}^n)$. 证明: f平移生成$L^2(\mathbb{R}^n)$当且仅当$\widehat{f}(\xi) \ne 0$ a.e. $\xi \in \mathbb{R}^n$.
(10) 设$|f(x)| \le C(1+|x|)^{-1-\delta}$, $|\widehat{f}(\xi)| \le C(1+|\xi|)^{-1-\delta}$, $f, \widehat{f} \in C(\mathbb{R})$, 其中常数$C > 0$, $\delta > 0$. 证明Poisson求和公式: $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$.
(11) 证明: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$是完备可分度量空间.
(12) 设$f \in C(\mathbb{R}^n)$满足$\forall\ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$有$fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 证明: f是慢增C^∞函数.
(13) 设$f, g \in C(\mathbb{R})$满足$g(x) = f(\tan x)$, $\forall\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$; $g(x) = 0$, $\forall\ |x| \ge \pi/2$, 证明: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow g \in C^\infty(\mathbb{R})$.
(14) 设$1 \le p, q \le \infty$, 证明若存在常数C, 使得$\|\widehat{f}\|_q \le C\|f\|_p$, $\forall\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则$q = p'$, $1 \le p \le 2$.
(15) 设$2 < p < \infty$. 给出一个函数$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 使得$\widehat{f}$ 不是局部可积函数.
(16) 设$F(z)$是$\mathbb{C}$上的解析函数, $\sigma > 0$. 若$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ A_\varepsilon > 0$, 使得$|F(z)| \le A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|\mathbf{Im} z|}$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, 则称$F$是指数型$\sigma$的整函数. 证明: 若$f \in L^2(\mathbb{R})$, 则$\mathrm{supp} f \subseteq [-\sigma, \sigma]$当且仅当$\widehat{f}$可以开拓为$\mathbb{C}$上的指数型$2\pi\sigma$的整函数.
(17) 设$f \in C(\mathbb{R}^n)$. 若任意点列$\{x_k\}$和复数列$\{\xi_k\}$, 有 $\sum\limits_{1\le k,j\le N} f(x_i - x_j)\xi_k\overline{\xi_j} \ge 0$, 则称$f$是$\mathbb{R}^n$上的正定函数. 证明: f 是$\mathbb{R}^n$上的正定函数, 当且仅当f是非负有界Borel测度的Fourier变换.
(18) 设$0 < \alpha \le 1$. 若$|f(x+h) - f(x)| \le C|h|^\alpha$, $\forall\ x, h \in \mathbb{R}$, 则称$f \in \Lambda_\alpha$. 若 $|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \le C|h|$, $\forall\ x, h \in \mathbb{R}$, 则称$f \in \Lambda_*$. 设$\sigma_N f$是$f$的Fourier级数部分和的算术平均. 证明: (i)若$f \in \Lambda_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, 则$\sigma_N f(x) - f(x) = O(N^{-\alpha})$对$x \in \mathbb{T}$一致成立; (ii)若$f \in \Lambda_*$, 则$\sigma_N f(x) - f(x) = O(N^{-1}\ln N)$对$x \in \mathbb{T}$一致成立; (iii)若$\sigma_N f(x) - f(x) = o(N^{-1})$对$x \in \mathbb{T}$一致成立, 则$f$是常数.

第2章习题

(1) 设$\varphi \in L^1 \cap C(\mathbb{R}^n)$. $\psi(x) = \sup\limits_{|y|\ge|x|} |\varphi(y)|$, 且$\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 令 $F^*(x) = \sup\limits_{t>0} \sup\limits_{|x-y|<t} |\varphi_t * f(y)|$. 证明: $F^*(x) \le CMf(x)$.
(2) 设$0 < p < \infty$, 弱型空间$L^{p,\infty}$定义为$\{f : \|f\|_{p,\infty} < \infty\}$, 其中 $\|f\|_{p,\infty} = \inf\{C > 0 : a_f(\lambda) \le (C/\lambda)^p\} = \sup\{\lambda > 0 : \lambda(a_f(\lambda))^{1/p}\}$. $(L^{\infty,\infty} = L^\infty)$. 若$0 < p < r < q \le \infty$, 证明: $(L^{p,\infty} \cap L^{q,\infty}) \subset L^r$.
(3) 设$a_k > 0$. 证明: $\|\sum_k f_k\|_{1,\infty} \le (1 + \sum_k a_k)\sum_k \|f_k\|_{1,\infty} \ln(1 + a_k^{-1})$.
(4) 设$1 < p \le 2$. 证明: $\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{-n(2-p)}dx)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, dx)}$.
(5) 设$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. 证明: $Mf(x) < \infty$, a.e. 或$Mf(x) = \infty$, a.e.

(6) 设球$B\subset\mathbb{R}^n$, $\mathrm{supp} f\subset B$, $f\in L^1(B)$. 证明: $Mf(x)\in L^1(B)$当且仅当$f\ln^+ f\in L^1(B)$.

(7) 对$f\in L^1(\mathbb{T})$, 定义$M_1f(x)=\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}\dfrac{1}{2^k}\sum\limits_{n=0}^{2^k-1}|f(x+\dfrac{n}{2^k})|$. 证明: $\|M_1f\|_{1,\infty}\le\|f\|_1$; $M_1f\in L^1(\mathbb{T})$当且仅当
$f\ln^+ f\in L^1(\mathbb{T})$.

(8) 设$p,q,r\in(1,\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$. 证明: $\|f*g\|_{r,\infty}\le C\|f\|_{p,\infty}\|g\|_{q,\infty}$,
$\|f*g\|_r\le C\|f\|_p\|g\|_{q,\infty}$, $\|f*g\|_{p,\infty}\le C\|f\|_1\|g\|_{p,\infty}$. 举出反例说明不等式
$\|f*g\|_{p,\infty}\le C\|f\|_{1,\infty}\|g\|_p$, $\|f*g\|_\infty\le C\|f\|_{p'}\|g\|_{p,\infty}$ 不成立.

(9) 设$p\in(1,\infty)$. 证明: $\|Mf\|_{p,\infty}\le C\|f\|_{p,\infty}$.

(10) 设$b\in(0,\infty)$, $p\in[1,\infty)$. 证明下列Hardy不等式:
$(\int_0^\infty(\int_0^x|f(t)|dt)^p x^{-b-1}dx)^{\frac{1}{p}}\le\frac{p}{b}(\int_0^\infty|f(t)|^p t^{p-b-1}dt)^{\frac{1}{p}}$,
$(\int_0^\infty(\int_x^\infty|f(t)|dt)^p x^{b-1}dx)^{\frac{1}{p}}\le\frac{p}{b}(\int_0^\infty|f(t)|^p t^{p+b-1}dt)^{\frac{1}{p}}$.

(11) 设$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的可测函数, 其非增重排定义为$f^*(t)=\inf\{\lambda:a_f(\lambda)\le t\}$, $t>0$. 令$f^{**}(t)=Tf^*(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$. 证明: $(Mf)^*(t)\approx f^{**}(t)$.

(12) $\mathbb{R}$上的单边极大函数定义为$M^Lf(x)=\sup\limits_{r>0}\frac{1}{r}\int_{x-r}^x|f(y)|dy$. 证明:
$|\{x\in\mathbb{R}:M^Lf(x)>\lambda\}|=\frac{1}{\lambda}\int_{\{M^Lf>\lambda\}}|f(x)|dx$, $\|M^Lf\|_p\le\frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

第3章习题

(1) 求区间$[a,b]$的特征函数$\chi_{[a,b]}$的Hilbert变换$H\chi_{[a,b]}$.

(2) 设$A=\cup_{i=1}^N[a_i,b_i]$, 证明: $|\{x\in\mathbb{R}:|H\chi_A(x)|>\lambda\}|=2|A|/\sinh(\pi\lambda)$.

(3) 设$f(x)=(1+x^2)^{-1}$, 求$Hf(x)$和$\widehat{f}(\xi)$.

(4) 设$f(x)=x(1+x^2)^{-2}$, 求$Hf(x)$和$\widehat{f}(\xi)$.

(5) 设$f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. 证明: $(\widehat{Hf}*\widehat{Hf})(\xi)=(\widehat{f}*\widehat{f})(\xi)-2i\mathrm{sgn}(\xi)(\widehat{f}*\widehat{Hf})(\xi)$.

(6) 设$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 证明: $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\dfrac{e^{2\pi iNx}}{x}\varphi(x)dx=\varphi(0)\pi i$.

(7) 设$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 证明: $Hf\in L^1(\mathbb{R})$当且仅当$\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=0$.

(8) 设$p,q\in[1,\infty]$, T是$L^p(\mathbb{R}^n)$到$L^q(\mathbb{R}^n)$的有界线性算子, 且与平移可交换. 证明:
$T(f*g)=f*Tg$, $\|Tf\|_{p'}\le C\|f\|_{q'}$, $\forall\ f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(9) 设$p\in[1,\infty]$, T是$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子, 且与平移可交换. 证明: 存在有界可测函数m, 使得$\widehat{Tf}(\xi)=m(\xi)\widehat{f}(\xi)$, $\forall\ f\in L^2\cap L^p(\mathbb{R}^n)$.

(10) 设$1\le q<p\le\infty$, T是$L^p(\mathbb{R}^n)$到$L^q(\mathbb{R}^n)$的有界线性算子, 且与平移可交换. 证明$Tf=0$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(11) 设$p\in[1,\infty]$, m是$L^p(\mathbb{R}^n)$乘子, $\psi\in L^1(\mathbb{R})$. 证明: $m\widehat{\psi}$, $m*\psi$是$L^p(\mathbb{R}^n)$乘子,且
$\|T_{m\widehat{\psi}}\|_{L^p\to L^p}\le\|\psi\|_1\|T_m\|_{L^p\to L^p}$, $\|T_{m*\psi}\|_{L^p\to L^p}\le\|\psi\|_1\|T_m\|_{L^p\to L^p}$.

(12) 设$q\ge 2$, $m_1\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $m_2\in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$. 证明: 若$|1/2-1/p|\le 1/q$, 则$m_1*m_2$是$L^p(\mathbb{R}^n)$乘子.

(13) 证明: 乘子算子T_m在$L^1(\mathbb{R}^n)$上有界, 当且仅当m是有界Borel测度的Fourier变换.

(14) 设$p\in[1,\infty]$, $\lambda>0$, $m\in C(\mathbb{R})$. 定义$\mathbb{T}$上的乘子算子
$\widetilde{T}_{m,\lambda}f(x)\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}}m(\lambda k)\widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$. 证明: $\|T_m\|_{L^p\to L^p}=\sup\limits_{\lambda>0}\|\widetilde{T}_{m,\lambda}\|_{L^p\to L^p}$.

(15) 设$\mathbb{R}^n$的径向函数m是$L^p(\mathbb{R}^n)$乘子. 证明: 若$1<p<\frac{2n}{n+1}$, 则m除原点外处处连续.

第4章习题

(1) 设$\Omega\in L^1(S^{n-1})$, 在S^{n-1}积分为0. 证明: 若奇异积分$Tf=f*\text{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$是$L^p(\mathbb{R}^n)$到$L^q(\mathbb{R}^n)$的有界线性算子, 则$p=q$或$T=0$. 这里$x'=x/|x|$.

(2) 设$\Omega\in L^q(S^{n-1})$ $(q>1)$, 在S^{n-1}积分为0. 证明: 主值分布$\text{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$的Fourier变换$m(\xi)$在$S^{n-1}$上连续.

(3) 设$\Omega\in L^1(S^{n-1})$, 满足$\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\text{sgn}(u\cdot\xi)d\sigma(u)=0,\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n$. 证明: Ω是偶函数.

(4) $\mathbb{R}^n$ 上分数次积分的算子I_α, $0<\alpha<n$, 定义为
$I_\alpha f(x)=\pi^{\alpha-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy$, $\widehat{I_\alpha f}(\xi)=|\xi|^{-\alpha}\widehat{f}(\xi)$, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 证明:
若$1\le p<n/\alpha$, 则$|I_\alpha f(x)|\le C\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}}Mf(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}}$.

(5) 证明: I_α是强(p,q) $(1<p<\frac{n}{\alpha},\ \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n})$与弱$(1,\frac{n}{n-\alpha})$型算子.

(6) 求Poisson核P_t的Riesz变换$Q_t^{(j)}(x)=R_j(P_t)(x)$.

(7) 设$f_j\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $u_j=P_t*f_j$, $j\in[0,n]\cap\mathbb{Z}$. 证明: $f_j=R_jf_0$, $j\in[1,n]\cap\mathbb{Z}$, 当且仅当$\sum_{j=0}^n\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0$, $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$, $j\ne k$, 这里$x_0=t$.

(8) 设$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $R_jf\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 证明: $\varphi*R_jf=R_j(\varphi*f)$.

(9) 设$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$满足$\Delta u=0$, 其中$\Delta$是Laplace 算子. 证明: u是多项式.

(10) 求$\Gamma\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$满足$\Delta\Gamma=\delta$, 其中$\Delta$是Laplace 算子, $\langle\delta,f\rangle=f(0)$.

(11) 设$\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\ge 0$, 且$\varphi(rx)\le\varphi(x)$, $\forall\,x\in\mathbb{R}^n$, $r>1$. 令$M_\varphi f(x)=\sup\limits_{t>0}|\varphi_t*f(x)|$.
证明: M_φ在$L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, 上有界.

(12) 设$P_k(x)$, $k\ge 1$, 是$\mathbb{R}^n$上的k次齐次调和多项式. 证明:
(1) $(P_k(x)e^{-\pi|x|^2})\hat{\ }(\xi)=i^{-k}P_k(\xi)e^{-\pi|\xi|^2}$. (2) $\int_{S^{n-1}}P_k(x')d\sigma(x')=0$.
(3) 主值分布$\text{p.v.}\frac{P_k(x)}{|x|^{n+k}}$的Fourier变换$m(\xi)=i^{-k}\frac{\pi^{n/2}\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})}\frac{P_k(\xi)}{|\xi|^k}$.

(13) 设$\Omega\in L\ln L(S^{n-1})$是偶函数, 在$S^{n-1}$积分为0. 证明: 奇异积分算子$Tf=f*\text{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$和极大奇异积分算子$T^*f(x)=\sup\limits_{0<a<b}|\int_{a<|y|<b}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy|$在$L^p(\mathbb{R}^n)$, $p\in(1,\infty)$, 上有界.

(14) 设$L\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 当$|x|>2$时, $L(x)=0$, $\int_{\mathbb{R}^n}L(x)dx=0$, 且$\int_{\mathbb{R}^n}|L(x-y)-L(x)|dx\le C|y|$. 任意正整数对$i,j$, 令
$L_{i,j}(x)=\sum\limits_{k=-i}^{j}2^{nk}L(2^kx)$, $T_{i,j}f(x)=L_{i,j}*f(x)$, $T^*f(x)=\sup\limits_{i,j}|T_{i,j}(x)|$. 证明: T^*是弱$(1,1)$与强(p,p) $(1<p<\infty)$型算子.

第5章习题

(1) 设T是卷积算子, 在$L^2(\mathbb{R}^n)$上有界, $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 且积分为0. 证明: 若$Tf$可积, 则$Tf$的积分为0.

(2) 设$\mathcal{D}_N=\{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n):\text{supp}\varphi\subset B,\ \|D^\alpha\varphi\|_\infty\le 1,\ 0\le|\alpha|\le N\}$, B是$\mathbb{R}^n$中的单位球, $N>n/2$. 设$K\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$且在$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$上局部可积, $|K(x)|+|x||\nabla K(x)|\le A_1|x|^{-n}$, $x\ne 0$. 证明: $\widehat{K}\in L^\infty$当且仅当$\sup\limits_{\varphi\in\mathcal{D}_N,R>0}|K(\varphi^R)|\le A$, 其中$\varphi^R(x)=\varphi(x/R)$.

(3) 设$K\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, 满足: $\sup\limits_{0<a<b}|\int_{a<|x|<b}K(x)dx|\le A<\infty$,
$\sup\limits_{a>0}\int_{a<|x|<2a}|K(x)|dx\le B<\infty$, $\int_{|x|>2|y|}|K(x-y)-K(x)|dx\le C<\infty$. 定义极

大奇异积分算子$T^*f(x) = \sup\limits_{0<a<b} |\int_{a<|y|<b} K(y)f(x-y)dy|$. 证明: $K \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$; T^*在$L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, 上有界.

(4) 设$p, r \in (1,\infty)$, 证明: $\|(\sum_j |Mf_j|^r)^{1/r}\|_p \le C\|(\sum_j |f_j|^r)^{1/r}\|_p$, $\|(\sum_j |Mf_j|^r)^{1/r}\|_{1,\infty} \le C\|(\sum_j |f_j|^r)^{1/r}\|_1$.

(5) 设$K(x,y)$满足标准核条件, 光滑径向函数φ满足: 当$|x| \le 1/2$时, $\varphi(x)=0$, $|x| \ge 1$时, $\varphi(x)=1$, 令$K_\varepsilon(x,y)=K(x,y)\varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})$. 证明: $K_\varepsilon(x,y)$关于ε一致满足标准核条件.

(6) 设T_1, T_2是Calderón-Zygmund算子, 并且具有相同的标准核. 证明: 存在$a \in L^\infty$, 使得$(T_1-T_2)f(x)=a(x)f(x)$.

(7) 设$K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $N > n/2$, $\widehat{K}(\xi)=m(\xi)$, 满足: $|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \le A < \infty$, $\forall\ 0 \le |\alpha| \le N$. 证明: $\int_{|x|>2|y|} |K(x-y)-K(x)|dx \le CA$.

(8) 设T是$\mathbb{R}^n$上具有标准核$K(x,y)$的Calderón-Zygmund算子. 令$I_{\varepsilon,N}(x) = \int_{\varepsilon<|x-y|<N} K(x,y)dy$. 证明: $\int_{|x-x'|<N} |I_{\varepsilon,N}(x)|^2 dx \le CN^n$ 关于ε, N, x'一致成立.

(9) 设$K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$且在$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$上局部可积, $\sup\limits_{a>0} \int_{a<|x|<2a} |K(x)|dx < \infty$. 若算子$Tf = K*f$ 在$L^2(\mathbb{R}^n)$上有界, 证明: $\sup\limits_{0<a<b} |\int_{a<|x|<b} K(x)dx| < \infty$.

(10) 设$1 \le p < \infty$, $s > 0$. 定义$\mathcal{L}^p_s(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_{\mathcal{L}^p_s} = \|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_p < \infty\}$, 其中$(1-\Delta)^{\frac{s}{2}} f$由$((1-\Delta)^{\frac{s}{2}} f)\widehat{\ }(\xi) = (1+|2\pi\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi)$定义. 证明:
(1) 若$1<p<q<\infty$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{s}{n}$, 则$\mathcal{L}^p_s(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$.
(2) 若$1<p<\infty$, $f \in \mathcal{L}^p_s(\mathbb{R}^n)$, $0 \le |\alpha| \le [s]$, 则$D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
(3) 若$1 \le p < \infty$, $sp > n$, 则$\mathcal{L}^p_s(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且任意$f \in \mathcal{L}^p_s(\mathbb{R}^n)$, 存在$\widetilde{f} \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得$f(x)=\widetilde{f}(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

(11) 设T_j是$L^2(\mathbb{R}^n)$上的一族有界线性算子, 且 $\|T_j^* T_k\| + \|T_j T_k^*\| \le \gamma(j-k)$, $A = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \sqrt{\gamma(j)} < \infty$. 令$T^N = \sum\limits_{|j|\le N} T_j$. 证明: (1) $\|T^N f\|_2 \le A\|f\|_2$.
(2) $\{T^N f\}_{N=1}^\infty$是$L^2(\mathbb{R}^n)$中的柯西列. 这里$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

第6章习题

(1) 证明$\mathcal{H}^1_{at}$是Banach空间.

(2) 设$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\varphi}(0) \ne 0$. 定义极大函数$M^*_\varphi f(x) = \sup\limits_{t>0} \sup\limits_{|x-y|<t} |\varphi_t * f(y)|$. 证明: $\|M^*_\varphi f\|_1 \le C\|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}}$.

(3) 设$1<p<\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\varphi}(0) \ne 0$. 证明: $\|M^*_\varphi(fR_j g + gR_j f)\|_1 \le C\|f\|_p \|g\|_{p'}$.

(4) 证明: 分数次积分算子I_α, $0<\alpha<n$, 满足$\|I_\alpha f\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \le C\|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)}$.

(5) 设$f \in \mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)$. 证明: $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{f}(y)|}{|y|^n} dy \le C\|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)}$.

(6) 设$|f(x)| \le \frac{C}{1+|x|^{n+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, 且$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 0$. 证明: $f \in \mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)$.

(7) 设$f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. 证明: $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{n+\varepsilon}} dx < \infty$, $\varepsilon > 0$.

(8) 设$f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. 证明: $Mf \in BMO(\mathbb{R}^n)$, 或$Mf(x)=\infty$.

(9) 证明: 分数次积分算子I_α, $0<\alpha<n$, 满足$\|I_\alpha f\|_* \le C\|f\|_{n/\alpha}$.

(10) 设$p \in [1,\infty)$, $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$. 证明: $\|fg\|_p \le C(\|f\|_p\|g\|_* + \|f\|_*\|g\|_p)$.

(11) 设$1 < q \le \infty$, 函数a支在一个方体Q上, 满足$\int_Q a(x)dx = 0$与$\|a\|_q \le |Q|^{\frac{1}{q}-1}$ (则称a是一个$(1,q)$原子). 证明: $a \in \mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)$, $\|a\|_{\mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)} \le C$.

(12) 设f,g是可测函数. 若存在$\alpha>1$, 使得任意$\beta>0$, 存在$\varepsilon_{\alpha,\beta}$ 满足$\lim\limits_{\beta\to 0}\varepsilon_{\alpha,\beta}=0$, 且$|\{x: |f(x)|>\alpha\lambda,\ |g(x)|\le\beta\lambda\}|\le\varepsilon_{\alpha,\beta}|\{x:|f(x)|>\lambda\}|$ (则称(f,g)满足好λ不等式). 证明: 若(f,g)满足好λ不等式, 则$\|f\|_p\le C\|g\|_p$, $1\le p<\infty$.

(13) 任意方体$Q\subset\mathbb{R}^n$, 令$\widehat{Q}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ : 0<t<l(Q)\}$. 其中$l(Q)$是$Q$的边长. 若$\mathbb{R}^{n+1}_+$上的非负Borel测度$\mu$满足$\mu(\widehat{Q})\le C|Q|$, 任意方体$Q\subset\mathbb{R}^n$, 称$\mu$是Carleson测度. 设$f/(1+|x|^N)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 径向函数$\varphi(\neq 0)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\varphi}(0)=0$. 证明: $f\in BMO$, 当且仅当$d\mu=|f*\varphi_t(x)|^2\frac{dxdt}{t}$是Carleson测度.

第8章习题

(1) 设$\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi(0)=0$. 定义算子$S_j:\widehat{S_jf}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\psi(2^{-j}\xi)$. 证明: $\Big\|\Big(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}|S_jf|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_1\le C\|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}}$.

(2) 设$h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$满足$\mathrm{supp}\widehat{h}\subseteq[-\frac18,\frac18]$. 给定数列$\{a_j\}$, 令 $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_je^{2\pi i2^jx}h(x)$. 证明: $\|f\|_p\le C\Big(\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_j|^2\Big)^{\frac12}\|h\|_p$, $1<p<\infty$.

(3) 证明: $e^{i\xi_j/|\xi|}$是$L^p(\mathbb{R}^n)$乘子, $1<p<\infty$.

(4) 设$\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0\notin\mathrm{supp}\zeta$. 令$G(f)(x)=\sup\limits_{N>0}\Big|\sum\limits_{j<N}\Delta_j^\zeta f(x)\Big|$, 其中 $\widehat{\Delta_j^\zeta f}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\zeta(2^{-j}\xi)$. 证明: $\|G(f)\|_p\le C\|f\|_p$, $1<p<\infty$.

(5) 设$\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0\notin\mathrm{supp}\zeta$, $\{a_j\}$是有界数列. 证明: $m(\xi)=\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}a_j\zeta(2^{-j}\xi)$是$L^p(\mathbb{R}^n)$乘子, $1<p<\infty$.

(6) 设$1<p<\infty$, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $L_1=\partial_1-\partial_2^2+\partial_3^4$, $L_2=\partial_1+\partial_2^2+\partial_3^2$. 证明: $\|\partial_2\partial_3^2f\|_p\le C\|L_1f\|_p$, $\|\partial_1 f\|_p\le C\|L_2f\|_p$.

(7) 设$K_j\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$且在$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$上局部可积, 满足 $\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\int_{|x|>2|y|}(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}|K_j(x-y)-K_j(x)|^2)^{\frac12}dx\le A<\infty$, 且 $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{K_j}(\xi)|^2\le B^2<\infty$. 证明: $\|(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}|K_j*f|^2)^{\frac12}\|_p\le C\|f\|_p$.

(8) 设$m_k\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 满足$\sup\limits_{R>0}R^{-n+2|\alpha|}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\int_{R<|\xi|<2R}|\partial_\xi^\alpha m_k(\xi)|^2d\xi\le A^2<\infty$, $|\alpha|\le[n/2]+1$, $K_j\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{K_j}=m_j$. 证明: K_j在$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$上局部可积, 且 $\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\int_{|x|>2|y|}(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}|K_j(x-y)-K_j(x)|^2)^{\frac12}dx\le C<\infty$.

(9) 设径向函数$\varphi(\neq 0)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\varphi}(0)=0$. 定义算子$g_\varphi(f)(x)=(\int_0^\infty|f*\varphi_t(x)|^2\frac{dt}{t})^{\frac12}$, $S_\varphi(f)(x)=(\int_0^\infty\int_{|y|<t}|f*\varphi_t(x-y)|^2\frac{dydt}{t^{n+1}})^{\frac12}$. 证明: $\|g_\varphi(f)\|_p\approx\|f\|_p$, $\|S_\varphi(f)\|_p\approx\|f\|_p$, $1<p<\infty$; $\|g_\varphi(f)\|_{1,\infty}+\|S_\varphi(f)\|_{1,\infty}\le C\|f\|_1$; $\|g_\varphi(f)\|_1+\|S_\varphi(f)\|_1\le C\|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}}$; $\|g_\varphi(f)\|_*+\|S_\varphi(f)\|_*\le C\|f\|_\infty$.

(10) 设$1<p<\infty$, $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 令$I_j$表示二进区间, $R_{j,k}=I_j\times I_k$是二进矩形, $m_{j,k}(\xi)=m(\xi)\chi_{R_{j,k}}(\xi)$. 证明: m是$L^p(\mathbb{R}^n)$乘子, 当且仅当对所有的$f_{j,k}\in L^p(\mathbb{R}^2)$, $\|(\sum\limits_{j,k\in\mathbb{Z}}|T_{m_{j,k}}f_{j,k}|^2)^{\frac12}\|_p\le C\|(\sum\limits_{j,k\in\mathbb{Z}}|f_{j,k}|^2)^{\frac12}\|_p$.

(11) 设线性算子T在$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界, $0<p\le\infty$, 证明: $\|(\sum_j|Tf_j|^2)^{1/2}\|_p\le\|T\|\|(\sum_j|f_j|^2)^{1/2}\|_p$.

(12) 设$0 < p < \infty$, 线性算子T满足$\|Tf\|_{p,\infty} \le \|f\|_p$, 证明:
$\|(\sum_j |Tf_j|^2)^{1/2}\|_{p,\infty} \le C\|(\sum_j |f_j|^2)^{1/2}\|_p$.

综合练习题

(1) 设$f \in L^2(\mathbb{T})$, 证明$\lim\limits_{N\to+\infty} N \sum\limits_{N<|k|<2N} |\widehat{f}(k)|^2 = 0$ 的充要条件是
$\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^1 |f(x+t)-f(x)|^2 dx = 0$.

(2) 证明$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\sin(2\pi kx)}{\ln k}$ 处处收敛, 但不是任何L^1函数的Fourier级数.

(3) 设$P(x)$ 是$\mathbb{T}$上的N 次三角多项式, 证明: $P'(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{8N(-1)^k}{\pi(2k+1)^2} P(x+\dfrac{2k+1}{4N})$.

(4) 设$N \in \mathbb{Z}_+$, 证明存在$g \in \operatorname{span}\{\sin(2\pi jx) : j \in \mathbb{Z}\cap(0,N)\}$使得
$g(\frac{j}{2N}) = \frac{N-j}{2N}, \forall\, j \in \mathbb{Z}\cap(0,2N)$. 且此时
(i) $(-1)^j(g(t)+t-1/2) > 0, \forall\, t \in (\frac{j-1}{2N}, \frac{j}{2N}),\ j \in \mathbb{Z}\cap(0,2N]$;
(ii) $\int_0^1 |g(t)+t-1/2|dt = \frac{1}{4N}$;
(iii) 若$f \in C^1(\mathbb{T})$, $\widehat{f}(k) = 0,\ \forall\, |k| < N$, 则$f(x) = \int_0^1 f'(x+t)(g(t)+t-1/2)dt$.

(5) 设$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}$, 证明: $\theta(1/z) = \sqrt{z}\theta(z), \forall\, z > 0$.

(6) 设$A \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. (1) 证明$A$在$L^2(\mathbb{R}^n)$中列紧的充要条件是以下2条同时成立:
(i)$\sup\limits_{f\in A}\|f\|_2 < +\infty$; (ii)$\lim\limits_{R\to+\infty}\sup\limits_{f\in A}\int_{|x|>R}(|f|^2+|\hat{f}|^2)dx = 0$.
(2) 证明条件(ii)可以推出条件(i).
注:条件(ii)可以推出$\exists\ R > 0$使得$\sup\limits_{f\in A}\int_{|x|>R}(|f|^2+|\hat{f}|^2)dx < +\infty$.

(7) 设$B \subset \mathbb{R}^n$是有界开集, $0 \in B$, $B_R = \{Rx : x \in B\}$ $(R > 0)$, $p \in [1,\infty]$. 定义
$\widehat{S_R f}(x) = \int_{B_R} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi, \forall\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; $\varphi_1(x) = \int_B e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$. 证明若
$\varphi_1 \notin L^p(\mathbb{R}^n)$则存在$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$使得$\{R > 0 | S_R f \notin L^p(\mathbb{R}^n)\}$无界. 证明若$\varphi_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$则
$\lim\limits_{R\to\infty}\|S_R f - f\|_p = 0,\ \forall\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(8) (Hausdorff-Young不等式的最佳常数) 设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $p \in (1,2)$, $p' = p/(p-1)$.
$F(t,x,y) = f(\sqrt{t}x + \sqrt{1-t}y)e^{-\pi(\sqrt{1-t}x-\sqrt{t}y)^2}$, $G = \mathcal{F}_y F$, i.e.
$G(t,x,\eta) = \int_{\mathbb{R}} F(t,x,y)e^{-2\pi i y\eta}dy$, $t \in [0,1]$, $x, y, \eta \in \mathbb{R}$.
(1)证明$t \in (0,1)$, $x, \eta \in \mathbb{R}$时

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} + 2\pi\eta G + i\sqrt{\frac{1-t}{t}}\left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2\pi x G\right) = 0,$$

$$2\sqrt{t(1-t)}\frac{\partial G}{\partial t} = 2\pi i x\eta G + \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial\eta},$$

$$\begin{aligned} 4\pi\frac{\partial|G|^2}{\partial t} &= -\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial|G|^2}{\partial x} + 4\pi x|G|^2\right) - \frac{2}{\sqrt{t(1-t)}}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\frac{\partial\overline{G}}{\partial x}\right) \\ &= \frac{1}{1-t}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial|G|^2}{\partial\eta} + 4\pi\eta|G|^2\right) + \frac{2}{\sqrt{t(1-t)}}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\frac{\partial\overline{G}}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\frac{\partial\overline{G}}{\partial x}\right) = -\sqrt{\frac{1-t}{t}}\frac{\partial|G|}{\partial x}\left(\frac{\partial|G|}{\partial x} + 2\pi x|G|\right)$$

$$-\sqrt{\frac{t}{1-t}}\frac{\partial|G|}{\partial\eta}\left(\frac{\partial|G|}{\partial\eta}+2\pi\eta|G|\right),$$

$$4\pi p\frac{\partial|G|^{p'}}{\partial t}=-\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial|G|^{p'}}{\partial x}+2\pi px|G|^{p'}\right)+\frac{p(p'-p)}{t}\left|\frac{\partial|G|}{\partial x}\right|^2|G|^{p'-2}$$
$$-2\pi\frac{p'-p}{t}|G|^{p'}+\frac{p-1}{1-t}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial|G|^{p'}}{\partial\eta}+2\pi p'\eta|G|^{p'}\right).$$

(2)设$I(t,x)=\int_{\mathbb{R}}|G(t,x,\eta)|^{p'}d\eta$, $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}$. 证明$t\in(0,1)$时

$$4\pi pt\frac{\partial I}{\partial t}\geq-\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-2\pi px\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{(p-1)(2-p)}{I}\left|\frac{\partial I}{\partial x}\right|^2-2\pi p'I.$$

(3)设$J(t)=\int_{\mathbb{R}}|I(t,x)|^{p-1}dx$, $t\in[0,1]$. 证明$J\in C([0,1])\cap C^1(0,1)$; $t\in(0,1)$时 $J'(t)\geq 0$; $J(0)=p^{-\frac{1}{2}}\|\widehat{f}\|_{p'}^p$, $J(1)=p'^{-\frac{p-1}{2}}\|f\|_p^p$.

(4) 证明$\|\widehat{f}\|_{p'}\leq p^{\frac{1}{2p}}p'^{-\frac{1}{2p'}}\|f\|_p$. $f(x)=ae^{-bx^2+cx}$, $b>0$时等号成立.

(9) (卷积Young不等式的最佳常数) 设$\alpha,\beta,\gamma\in(0,1)$, $\alpha+\beta+\gamma=2$, $f,g,h\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f,g,h\geq 0$, $(e^{t\Delta}\phi(x)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy)$
$I(t)=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|e^{\alpha(1-\alpha)t\Delta}f(x)|^\alpha|e^{\beta(1-\beta)t\Delta}g(y-x)|^\beta|e^{\gamma(1-\gamma)t\Delta}h(-y)|^\gamma dxdy$. 证明 $\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=|\frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}(1-\beta)^{1-\beta}(1-\gamma)^{1-\gamma}}{\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma}|^{\frac{n}{2}}\|f\|_1^\alpha\|g\|_1^\beta\|h\|_1^\gamma$; $I'(t)\geq 0$, $\forall\ t>0$; $\lim\limits_{t\to 0+}I(t)=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|f(x)|^\alpha|g(y-x)|^\beta|h(-y)|^\gamma dxdy$.

(10) 设$a_n=\sum_{k=1}^{+\infty}n2^{-k}(1-2^{-k})^n$, $g(x)=xe^{-x}$, $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(2^kx)$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-f(n))=0$, $|(\ln 2)f(x)-1|<10^{-5}$, $\forall\ x>0$.

(11) 设$V:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$连续, $\mathrm{Im}V(x)\geq 0$, $|V(x)-V(y)|\geq|x-y|$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$. $f\in L^1\cap L^2(\mathbb{R})$, $g(t)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{i|t|V(x)}dt$. 证明:$\|g\|_2\leq C\|f\|_2$. $\int_0^\infty|g(t)|^2dt\leq C\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx$.

(12) 证明: 若$f,g,h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$则 $|\int_{\mathbb{R}^2}(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1})hdx_1dx_2|\leq C\|Df\|_2\|Dg\|_2\|Dh\|_2$.

(13) 设$\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x)=\sup\limits_{|y|\geq|x|}|\varphi(y)|$, 且$\psi\in L^1(\mathbb{R}^n)$; $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $Mf(x)<+\infty$. 证明: $t\mapsto\varphi_t*f(x)$ $(t>0)$ 连续.

(14) 证明: 若$p>1$则$\|\sum_k f_k\|_{p,\infty}\leq\frac{p}{p-1}\sum_k\|f_k\|_{p,\infty}$; 若$0<p<1$则 $\|\sum_k f_k\|_{p,\infty}^p\leq\frac{1}{1-p}\sum_k\|f_k\|_{p,\infty}^p$.

(15) 设$c_k>0$, 满足$\sum_k c_k=1$, $\sum_k c_k|\ln c_k|=N<\infty$. $\|f_k\|_{1,\infty}\leq 1$. 证明: $\|\sum_k f_k\|_{1,\infty}\leq 2N+2$. $\|\sum_{k=1}^\infty f_k\|_{1,\infty}\leq C\sum_{k=1}^\infty\|f_k\|_{1,\infty}(1+\ln k)$.

(16) 设$B=\{(x_1,x_2)|0\leq x_1\leq 1/2, 0\leq x_2\leq x_1^2\}$, $f(x)=x_1^{-3}|\ln x_1|^{-\alpha}\chi_B$, $x=(x_1,x_2)$, $\alpha\in(1,2]$. 证明: $Mf(x)\leq Cf(x),\forall\,x\in B\backslash\{(0,0)\}$; $Mf\in L^1(B)$, 但$f\ln^+f\notin L^1(B)$.

(17) 设$R_N=(0,1)^{n-1}\times(0,N)$, $\mathcal{R}_N=\{hAR_N+b|h>0,A\in O(n),b\in\mathbb{R}^n\}$. 定义 $\mathcal{K}_Nf(x)=\sup\limits_{x\in R\in\mathcal{R}_N}\frac{1}{|R|}\int_R|f|$. 下设$n=2$, $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f\geq 0$.

(1) 定义$A_mf(x)=\sup\limits_{a>0}\left|\int_0^\infty F(\ln\frac{r}{a})\int_0^{2\pi}f(x-r(\cos\theta,\sin\theta))e^{im\theta}d\theta\frac{dr}{r}\right|$, 其中 $F(t)=\frac{1}{1+t^2}$, $m\in\mathbb{Z}$. 证明$\mathcal{K}_Nf(x)\leq C\sum_{|m|\leq N}A_mf(x)$. $(N\in\mathbb{Z}_+)$.

(2) 定义$B_{m,\lambda}f(x)=\int_0^\infty r^{i\lambda}[\int_0^{2\pi}f(x-r(\cos\theta,\sin\theta))e^{im\theta}d\theta]\frac{dr}{r}$. 证明 $A_mf(x)\leq\int_{\mathbb{R}}|B_{m,\lambda}f(x)|e^{-|\lambda|}d\lambda$, $\forall\ m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $x\in\mathbb{R}^2$.

(3) 证明$\widehat{B_{m,\lambda}f}(\xi) = \frac{\pi^{1-i\lambda}\Gamma(\frac{|m|+i\lambda}{2})}{\Gamma(1+\frac{|m|-i\lambda}{2})}|\xi|^{-i\lambda}i^{-|m|}(\frac{\xi_1+i\xi_2}{|\xi|})^m\widehat{f}(\xi)$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$; $\|B_{m,\lambda}f\|_2 = \pi|m+i\lambda|^{-1}\|f\|_2$.

(4) 证明$\|A_m f\|_2 \le 2\pi|m|^{-1}\|f\|_2$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$; $A_0 f(x) \le CMf(x)$; $\|\mathcal{K}_N f\|_2 \le C\ln N\|f\|_2$, $\forall\ N > 2$.

(18) 设$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $g(x,v) = \int_{\mathbb{R}} f(x+vt,t)dt$. 证明$\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^2)$且 $\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{g}(\xi,\eta)|^2|\eta|d\xi d\eta = \int_{\mathbb{R}^2}|f(x,t)|^2|t|dxdt$. 设$h(x,\delta) = \sup\limits_{a\in(-1,1)}\frac{1}{\delta}\int_{a-\delta}^{a+\delta}|g(x,v)|dv$, 证明$\int_{\mathbb{R}}|h(x,\delta)|^2dx \le C\int_{\mathbb{R}}(\int_{-1}^1|g(x,v)|dv)dx + C|\ln\delta|\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{g}(\xi,\eta)|^2|\eta|d\xi d\eta$ $\le C|\ln\delta|\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,t)|^2(1+|t|^2)dxdt$, $\forall\ \delta \in (0,1/2)$.

(19) 设$\mathcal{R}_{N,h} = \{hAR_N + b|A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$, $n=2$. 定义$\mathcal{K}_{N,h}f(x) = \sup\limits_{x\in R\in\mathcal{R}_{N,h}}\frac{1}{|R|}\int_R|f|$. 证明$\|\mathcal{K}_{N,h}f\|_2 \le C\sqrt{\ln N}\|f\|_2$, $\forall\ N > 2,\ h > 0$.

(20) 设$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k e^{2\pi i 2^k x}$, 证明$\|f\|_4^2 \le \sqrt{2}\|f\|_2^2$, $\|f\|_2 \le \sqrt{2}\|f\|_1$, $|\{x \in (0,1) : |f(x)| < \theta\|f\|_2\}| \le [(1-\theta^2)^2+1]^{-1}$, $\forall\ \theta \in (0,1)$.

(21) 设$f \in L^1(\mathbb{T})$, $\{k \in \mathbb{Z}|\widehat{f}(k) \ne 0\} \subseteq \{2^k|k \in \mathbb{Z}_+\}$, 证明$f \in L^2(\mathbb{T})$.

(22) 设$1 \le p \le \infty$, 证明若存在常数C, 使得$\|\widehat{f}\|_{L^1(0,1)} \le C\|f\|_p$, $\forall\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则$1 \le p \le 2$. (考虑$f_N(x) = \sum_{k=1}^N e^{-\pi|x+2^k|^2}$)

(23) 设$F(x) = \sum_{k=1}^\infty k^{-1/2}2^{-k}e^{2\pi i 2^k x}$, E是F的可微点集.
(1)证明$2^{2m}\int_0^1|F(x) - F(x+2^{-m})|^2dx \ge 16\ln m$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}_+$.
(2)设$A_{k,m} = \{x : 2^m|F(x) - F(x+2^{-m})| < k\}$, $B_k = \cap_{m=1}^\infty A_{k,m}$, 证明$E \subseteq \cup_{k=1}^\infty B_k$, $|B_k \cap (0,1)| \le 1/2$, $|E \cap (0,1)| \le 1/2$.
(3)证明$E = E + k/2^m$, $\forall\ k \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}_+$; $|E| = 0$; $1/9 \in E (\Rightarrow E \ne \emptyset)$.

(24) 设$f(x) = \sum_{k=1}^\infty k^{-1/2}e^{-2\pi|x+2^k|}$, 证明$f \in L^{2,\infty}(\mathbb{R})$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall\ p > 2$.
证明$4\pi^2 i(1+\xi^2)\widehat{f}(\xi) = F'(\xi)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (F定义同上题) 以上说明 $\widehat{f} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \notin L^1(I)$, $\forall\ I = (a,b) \subset \mathbb{R}$. (否则$F$在$I$上几乎处处可微)

(25) 设$p \ne 2$, 证明$m(\xi) = (-1)^{[\xi^2]}$不是$L^p(\mathbb{R})$乘子.

(26) 设$1 < p \le 2$, $F_p(u) = a_p\mathrm{Re}(u+i)^p - C_p^p u^p + 1\ (u > 0)$, $C_p = \tan\frac{\pi}{2p}$, $a_p = (\sin\frac{\pi}{2p})^{p-1}/\cos\frac{\pi}{2p}$. 证明$F_p(C_p^{-1}) = F_p'(C_p^{-1}) = 0$; $u^2(\frac{F_p'(u)}{pu^{p-1}})' = a_p(p-1)\mathrm{Im}(1+\frac{i}{u})^{p-2} \le 0$, $F_p(u) \le 0$, $\forall\ u > 0$.

(27) 设$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, $\Omega \in L^1(S^{n-1})$, $\epsilon > 0$. 证明 $\int_{\{|y|>\epsilon\}}\frac{|\Omega(y')|}{|y|^n}|f(x-y)|dy < \infty$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. 其中$y' = y/|y|$.

(28) 证明$\int_0^\infty\frac{\cos s}{s^\alpha}ds = \frac{\pi^{1/2}\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}{2^\alpha\Gamma(\alpha/2)} = \Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$, $\forall\ \alpha \in (0,1)$.
$\int_0^1\frac{\cos s - 1}{s}ds + \int_1^\infty\frac{\cos s}{s}ds = -\gamma$. $\int_0^\infty\frac{\cos s - e^{-s}}{s}ds = 0$. **注:** γ是欧拉常数. $\Gamma'(1) = -\gamma$.

(29) 设$\varphi \in L_c^q(\mathbb{R}^n)$, 在$\mathbb{R}^n$积分为0, $1 < q < \infty$. 证明: 奇异积分算子 $T[\varphi]f(x) = \int_0^\infty f * \varphi_t(x)\frac{dt}{t}$ 和$T[\varphi,a]f(x) = \int_0^a f*\varphi_t(x)\frac{dt}{t}$在$L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, 上有界. 设$\varphi, \psi \in L_c^q(\mathbb{R}^n)$, 在$\mathbb{R}^n$积分为0, 证明$T[\varphi]T[\psi] = T[h]$, 其中 $h = T[\varphi,1]\psi + T[\psi,1]\varphi$, $h \in L_c^q(\mathbb{R}^n)$, 在$\mathbb{R}^n$积分为0.

(30) 设$1 < q < \infty$, $\mathcal{A}_q = \{T : Tf = af + f * \mathrm{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n},\ a \in \mathbb{C},\ \Omega \in L^q(S^{n-1}),\ \int_{S^{n-1}}\Omega = 0\}$. 证明$\mathcal{A}_q = \{T[\varphi] : \varphi \in L_c^q(\mathbb{R}^n),\ \int_{\mathbb{R}^n}\varphi = 0\}$.

(31) 设$t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 定义$I_{it}f(x) = \pi^{-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-it}{2})}{\Gamma(\frac{it}{2})}\Big[\int_{\{|y|<1\}}\frac{f(x-y)-f(x)}{|y|^{n-it}}dy + \frac{|S^{n-1}|}{it}f(0)$ $+ \int_{\{|y|>1\}}\frac{f(x-y)}{|y|^{n-it}}dy\Big]$, $\widehat{I_{it}f}(\xi) = |\pi\xi|^{-it}\widehat{f}(\xi)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 证明

$\|I_{it}f\|_{1,\infty} \le C(1+|t|)^{\frac{n}{2}}\ln(2+|t|)\|f\|_1$, $\|I_{it}f\|_p \le C(1+|t|)^{\frac{n}{p}-\frac{n}{2}}\ln(2+|t|)\|f\|_p$, $1<p<2$. **注:** C是只与n,p有关的常数. $\ln(2+|t|)$可以去掉.

(32) 设$f\in C_c^1([0,\infty))$, $g(t)=\int_0^1\frac{f(y)-f(0)}{y^{1-it}}dy+\frac{f(0)}{it}+\int_1^\infty\frac{f(y)}{y^{1-it}}dy$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 证明 $|f(x)-f(y)|\le\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\min(1,|t|)|g(t)|dt$, $\forall\ 0<x<y<2x$.

(33) 定义$\mathcal{M}f(x)=\sup\limits_{t>0}\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}}|f(x-ty)|d\sigma(y)$. 设$n\ge2$, $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f\ge0$, 证明

$\mathcal{M}f(x)\le\frac{Mf(x)}{1-2^{-n}}+\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{|S^{n-1}|}\int_{\mathbb{R}}\min(1,|t|)\left|\frac{\Gamma(\frac{it}{2})}{\Gamma(\frac{n-it}{2})}\right||I_{it}f(x)|dt$;

$\mathcal{M}f(x)\le2Mf(x)+C\int_{\mathbb{R}}(1+|t|)^{-\frac{n}{2}}|I_{it}f(x)|dt$.

若$n\ge3$, $\frac{n}{n-1}<p<2$, 证明$\|\mathcal{M}f\|_p\le C\|f\|_p$. **注:** C是只与n,p有关的常数.

(34) 定义$\mathcal{M}_uf(x)=\sup\limits_{t>0}\frac{1}{|S^{n-2}|}\int_{S^{n-1}\cap u^\perp}|f(x-ty)|d\mathcal{H}^{n-2}(y)$, $u\in S^{n-1}$, $u^\perp=\{x\in\mathbb{R}^n|x\cdot u=0\}$, $f\in C(\mathbb{R}^n)$. 证明$\mathcal{M}f(x)\le\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}}\mathcal{M}_uf(x)d\sigma(u)$.

(35) 设$A_{n,p}=\sup\{\|\mathcal{M}f\|_p:f\in C_c(\mathbb{R}^n),\ \|f\|_p\le1\}$, 则$A_{n,p}<\infty$, $\forall\ n\ge3$, $\frac{n}{n-1}<p<2$. 证明若$n>p'+1$, $p\in(1,2)$, $u\in S^{n-1}$, $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$, 则$\|\mathcal{M}_uf\|_p\le A_{n-1,p}\|f\|_p$, $\|\mathcal{M}f\|_p\le A_{n-1,p}\|f\|_p$, $A_{n,p}\le A_{n-1,p}$.

(36) 证明$Mf(x)\le\mathcal{M}f(x)$, $\forall\ f\in C_c(\mathbb{R}^n)$. 设$B_{n,p}=\sup\{\|Mf\|_p:f\in C_c(\mathbb{R}^n),\ \|f\|_p\le1\}$, $n\ge1$, $1<p<2$, 则$B_{n,p}<\infty$. 证明$B_{n,p}\le A_{n,p}$; $B_{n,p}\le C_p$, $C_p=\max(\{B_{k,p}|1\le k\le m\}\cup\{A_{m+1,p}\})<\infty$, $m=[p']$.

(37) 定义$\mathcal{M}'f(x)=\sup\limits_{0<r<R}\frac{1}{|B_R\setminus B_r|}\int_{B_R\setminus B_r}|f(x-ty)|dy$. 证明若$f\in C(\mathbb{R}^n)$则 $\mathcal{M}'f(x)=\mathcal{M}f(x)$. 设$f(x)=|x|^{1-n}|\ln|x||^{-1}\chi_{B(0,1/2)}$, 证明$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ p\in[1,\frac{n}{n-1}]$; $\mathcal{M}'f(x)=\infty$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$; $A_{n,p}=\infty$, $\forall\ p\in[1,\frac{n}{n-1}]$, $n\ge2$.

(38) 设$\Omega\in L^q(S^{n-1})$, 在S^{n-1}积分为0, $q>1$, $Tf=f*\text{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$. 证明若 $T\chi_{B(0,1)}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$则$\Omega$是偶函数.

(39) 证明若$f\in\mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$则$f*g\in\mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)$, 且$\|f*g\|_{\mathcal{H}^1_{at}}\le\|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}}\|g\|_1$.

记号说明:

(1) $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$.
(2) $dx = \mathcal{L}^n \llcorner \mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n$ Lebesgue 测度.
(3) $d\sigma = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathbb{S}^{n-1}$: 球面测度. $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.
(4) $E \subset \mathbb{R}^n$, $|E| = \mathcal{L}^n(E)$, $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$
(5) a.e., a.e. x: 几乎处处成立; 在一个零测集外成立.
(6) $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial_{x_1}^{a_1} \cdots \partial_{x_n}^{a_n}}$, $|a| = \sum_{j=1}^n a_j$, $x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$. $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap [0, +\infty)$.
(7) (X, μ) 测度空间. $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$, $0 < p < +\infty$, $L^p(X) = L^p(X,\mu) = \{f | f : X \to \mathbb{C}\ \mu\text{-可测}, \|f\|_p < +\infty\}$.
$L^\infty(X) = L^\infty(X,\mu) = \{f | f : X \to \mathbb{C}\ \mu\text{-可测}, \exists\, C > 0 \text{ s.t. } \mu\{|f| > C\} = 0\}$, $\|f\|_\infty = \inf\{C > 0 | \mu\{|f| > C\} = 0\}$.
$L^p = L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$, $L^p(w) = L^p(\mathbb{R}^n, w dx)$, $p' = p/(p-1)$, $p \in [1, +\infty]$.
(8) 卷积: $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$.
(9) Minkowski不等式($1 \le p \le +\infty$)
$(\int_X |\int_Y f(x,y) d\nu(y)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}} \le \int_Y (\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$.
(10) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Schwartz函数. $\mathcal{D}', \mathcal{S}'$: $\mathcal{D}, \mathcal{S}$的对偶空间. $T \in \mathcal{D}'$, $f \in \mathcal{D}$ or $T \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{S}$, $T * f(x) = \langle T, \tau_x \widetilde{f} \rangle$, $\tau_x \widetilde{f}(y) = f(x-y)$.
(11) μ: 有限Borel测度$\Leftrightarrow \mu \in \mathcal{D}'$, $|\langle \mu, f \rangle| \le C \|f\|_\infty$, $\forall\, f \in \mathcal{D}$.
μ: 非负Borel(Radon)测度$\Leftrightarrow \mu \in \mathcal{D}'$, $\langle \mu, f \rangle \ge 0$, $\forall\, f \in \mathcal{D}$, $f \ge 0$.

1.1 Fourier级数. $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos(2\pi kx)+b_k\sin(2\pi kx))$.
$e^{2\pi ikx}=\cos(2\pi kx)+i\sin(2\pi kx)$. $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{2\pi ikx}$.
$c_0=a_0$, $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$, $c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}$, $\forall\ k>0$. 若级数一致收敛, 由
$\int_0^1 e^{2\pi ikx}e^{-2\pi imx}dx=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m,\end{cases}$ 得 $c_m=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi imx}dx$.

定义: $\forall\ f\in L^1(\mathbb{T})(\Leftrightarrow f\in L^1([0,1])$周期为1), $\widehat{f}(k)=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx$. 称$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$为$f$的Fourier级数. $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$上的函数$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$上周期为1的函数.

收敛性, 求和法: $S_Nf(x)=\sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$, $\sigma_Nf(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}S_kf(x)$.
Question: 1. 逐点收敛(1.2,1.3) 2. L^p收敛(1.4) 3. a.e.收敛(1.5, σ_Nf)
1.2: $\lim\limits_{N\to\infty}S_Nf(x)$存在的充分条件(Dini判别法,Jordan判别法).
1.3: $x_0\in\mathbb{T}$, $\exists\ f\in C(\mathbb{T})$, s.t. $\lim\limits_{N\to\infty}S_Nf(x_0)$不存在. (共鸣定理)
1.4: $\lim\limits_{N\to\infty}\|S_Nf-f\|_p=0\ \forall\ f\in L^p(\mathbb{T})$的充要条件: $\|S_Nf\|_p\le C_p\|f\|_p$ ($\Leftrightarrow 1<p<\infty$, see Corollary 3.4).
*a.e.收敛: $\lim\limits_{N\to\infty}S_Nf(x)=f(x)$ a.e. x, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{T})$, $p>1$ (Carleson-Hunt).
1.5: $\lim\limits_{N\to\infty}\|\sigma_Nf-f\|_p=0\ \forall\ f\in L^p(\mathbb{T})$, $1\le p<\infty$ or $f\in C(\mathbb{T})$, $p=\infty$.
$\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_Nf(x)=f(x)$ a.e. x, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{T})$, $p\ge 1$ (see section 2.4).
Similar for Poisson-Abel 求和P_r*f.

1.2

Theorem 1.1 (Dini判别法)**.** *If* $\int_{-1/2}^{1/2}|\frac{f(x-t)-f(x)}{t}|dt<\infty$, *then* $\lim\limits_{N\to\infty}S_Nf(x)=f(x)$.

Theorem 1.2 (Jordan判别法)**.** *If* $\exists\ \delta>0$ *s.t.* $f\in BV(x-\delta,x+\delta)$, *then* $\lim\limits_{N\to\infty}S_Nf(x)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

举例说明互不包含: $f_1=|\ln t|^{-\alpha}\chi_{(0,1/2)}$, $f_2=t^{\alpha}\sin\frac{1}{t}\chi_{(0,1/2)}$, $\alpha\in(0,1)$.

Lemma 1.3 (Riemann-Lebesgue)**.** *If* $f\in L^1(\mathbb{T})$, *then* $\lim\limits_{k\to\infty}\widehat{f}(k)=0$.

Proof. $\widehat{f}(k)=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx=-\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ik(x+\frac{1}{2k})}dx=-\int_0^1 f(x-\frac{1}{2k})e^{-2\pi ikx}dx$,
$\widehat{f}(k)=\frac{1}{2}\int_0^1(f(x)-f(x-\frac{1}{2k}))e^{-2\pi ikx}dx$, $|\widehat{f}(k)|\le\frac{1}{2}\int_0^1|f(x)-f(x-\frac{1}{2k})|dx\to 0$. □

$S_Nf(x)=\sum_{k=-N}^{N}\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dte^{2\pi ikx}=\int_0^1 f(t)D_N(x-t)dt=\int_0^1 f(x-t)D_N(t)dt$.
$D_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}e^{-2\pi ikt}=\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}$, Drichlet核.
$\int_0^1 D_N(t)dt=1$, $|D_N(t)|\le\frac{1}{\sin(\pi\delta)}\ \forall\ 0<\delta<|t|\le 1/2$.

Proof of Theorem 1.1. $S_Nf(x)-f(x)=\int_{-1/2}^{1/2}(f(x-t)-f(x))\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}dt=$
$\widehat{g}(N)-\widehat{g}(-N-1)$, $g(t)=\frac{f(x-t)-f(x)}{2i\sin(\pi t)}e^{i\pi t}\ \forall\ |t|<1/2$.
As $|\sin(\pi t)|\ge 2|t|\ \forall\ |t|<1/2$, then $|g(t)|\le\frac{|f(x-t)-f(x)|}{4|t|}\ \forall\ |t|<1/2$.
Thus $g\in L^1(\mathbb{T})$, by Lemma 1.3, $\lim\limits_{N\to\infty}S_Nf(x)=0$. □

Proof of Theorem 1.2. $S_Nf(x)=\int_{-1/2}^{1/2}f(x-t)D_N(t)dt=\int_0^{1/2}g(t)D_N(t)dt$,
$g(t)=f(x-t)+f(x+t)$. $f\in BV(x-\delta,x+\delta)\Rightarrow g\in BV(0,\delta)$.
因此只需证若$g\in L^1(0,1/2)\cap BV(0,\delta)$则$\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^{1/2}g(t)D_N(t)dt=\frac{1}{2}g(0+)$. 不妨设$g$实值. 则$g=g_1-g_2$, g_i在$(0,\delta)$单调增. 不妨设g在$(0,\delta)$单调增.
不妨设$g(0+)=0$. 否则考虑$g-g(0+)$. $(\int_0^{1/2}D_N(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}D_N(t)dt=\frac{1}{2})$ $\forall\ \epsilon>0$, $\exists\ \delta'\in(0,\delta)$ s.t. $g(t)<\epsilon\ \forall\ 0<t<\delta'$. $\int_{\delta'}^{1/2}g(t)D_N(t)dt=\widehat{h}(N)-\widehat{h}(-N-1)\to 0$, $h(t)=\frac{g(t)e^{i\pi t}}{2i\sin(\pi t)}\chi_{\delta'\le t\le 1/2}\in L^1(\mathbb{T})$.
由积分第二中值定理$\exists\ \nu\in(0,\delta')$ s.t. $\int_0^{\delta'}g(t)D_N(t)dt=g(\delta'-)\int_\nu^{\delta'}D_N(t)dt$.
$I:=\int_\nu^{\delta'}D_N(t)dt=I_1+I_2$, $I_1:=\int_\nu^{\delta'}\sin(\pi(2N+1)t)(\frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t})dt$,
$I_2:=\int_\nu^{\delta'}\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\pi t}dt=\int_{(2N+1)\nu}^{(2N+1)\delta'}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt$. $|I_1|\le\int_\nu^{\delta'}|\frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t}|dt\le C$,
$|I_2|\le 2\sup\limits_{M>0}|\int_0^M\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt|\le C$, $|I|\le C$, $|\int_0^{\delta'}g(t)D_N(t)dt|=g(\delta'-)|I|\le C\epsilon$. Thus
$A:=\limsup\limits_{N\to\infty}|\int_0^{1/2}g(t)D_N(t)dt|\le C\epsilon$, $\forall\ \epsilon>0$. Then $A=0$. □

1.3 若$f\in C^\alpha(\mathbb{T})$ $(\alpha\in(0,1))$ i.e. $|f(x+t)-f(x)|\le C|t|^\alpha$, 则可用Dini判别法. 下面的结论说明$C^\alpha$不能减弱为$C^0$.

Theorem 1.4. *$\exists\ f\in C(\mathbb{T})$ s.t. $S_Nf(0)$不收敛.*

Lemma 1.5 (共鸣定理)**.** *X,Y Banach 空间. $\{T_a\}_{a\in A}\subset\mathcal{L}(X,Y)$. 则(i) $\sup_a\|T_a\|<\infty$ 或(ii) $\exists\ x\in X$ s.t. $\sup_a\|T_ax\|=\infty$.*

$\mathcal{L}(X,Y)=\{X\to Y$有界线性算子$\}$. $\|T_a\|=\sup\{\|T_ax\|_Y:\|x\|_X\le 1\}$.
设$X=C(\mathbb{T})$, $\|f\|_X=\|f\|_\infty$, $Y=\mathbb{C}$, $T_N:X\to Y$, $T_Nf=S_Nf(0)=\int_{-1/2}^{1/2}f(t)D_N(t)dt$ (D_N是偶函数), $L_N=\int_{-1/2}^{1/2}|D_N(t)|dt$. For fixed N,
(i) $|T_Nf|\le L_N\|f\|_\infty$; (ii) $f_n(t)=\frac{nD_N(t)}{1+n|D_N(t)|}$ then $\|f_n\|_\infty\le 1$, $T_Nf_n\to L_N$.
Thus $\|T_N\|=L_N$. 若能证明$\lim\limits_{N\to\infty}L_N=+\infty$(Lemma 1.6)则由Lemma 1.5得
$\exists\ f\in C(\mathbb{T})$ s.t. $\sup_N|S_Nf(0)|=+\infty$ (i.e. Theorem 1.4).

Lemma 1.6. $L_N=\frac{4}{\pi^2}\ln N+O(1)$.

Proof. $L_N=2\int_0^{1/2}|\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\pi t}|dt+O_1(1)=2\int_0^{N+1/2}|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}|dt+O_1(1)=$
$2\sum_{k=1}^N\int_{k-1/2}^{k+1/2}|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}|dt+O_2(1)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^N\int_{-1/2}^{1/2}\frac{|\sin(\pi t)|}{t+k}dt+O_2(1)=$
$\frac{2}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2}|\sin(\pi t)|\sum_{k=1}^N\frac{1}{t+k}dt+O_2(1)=\frac{4}{\pi^2}\ln N+O_3(1)$.
(i) $|O_1(1)|\le 2\int_0^{1/2}|\frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t}|dt$, $O_2(1)=O_1(1)+2\int_0^{1/2}|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}|dt$.
(ii) $\int_{-1/2}^{1/2}|\sin(\pi t)|dt=\frac{2}{\pi}$, $\sup\limits_{|t|\le 1/2}|\sum\limits_{k=1}^N\frac{1}{t+k}-\ln N|\le C\Rightarrow|O_3(1)-O_2(1)|\le C$. □

举例: 若$f(t)=\sum_{n=1}^\infty a_n\sin(2\pi b_nt)\sum_{k=1}^{c_n}\frac{\sin(2\pi(2k+1)t)}{2k+1}$, $\sum_{n=1}^\infty|a_n|<\infty$, $|a_n\ln c_n|\to+\infty$, $b_n-b_{n-1}>2(c_n+c_{n-1}+1)$, $b_n,c_n\in\mathbb{Z}_+$, 则$f\in C(\mathbb{T})$, $|S_{b_n}f(0)|\to+\infty$. 满足条件的(a_n,b_n,c_n): $a_n=n^{-2}$, $c_n=2^{n^3}$, $b_n=4c_n$.

1.4 考虑以下问题:

$$\lim_{N\to\infty}\|S_Nf-f\|_p=0,\quad\forall\ f\in L^p(\mathbb{T}),\tag{1.1}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x), \quad a.e.\ x, \quad \forall\ f \in L^p(\mathbb{T}). \tag{1.2}$$

Lemma 1.7. *若*$1 \le p < \infty$*则*(1.1)*成立* $\Leftrightarrow \exists\ C_p > 0$*(只与*$p$*有关)使得*

$$\|S_N f\|_p \le C_p \|f\|_p, \quad \forall\ f \in L^p(\mathbb{T}). \tag{1.3}$$

(1.3)对$1 < p < \infty$成立(see Corollary 3.4).
若$p = 1$则$\|S_N\|_{L^1\to L^1} = L_N \to \infty \Rightarrow$(1.1)不成立.
($f_n = n\chi_{(0,1/n)}$, $\|S_N f_n\|_1 \to L_N$ as $n \to \infty$, $\|f_n\|_1 = 1$)
$\{e^{2\pi ikx}\}$是$L^2(\mathbb{T})$的标准正交基且完备(Corollary 1.1)$\Rightarrow$
$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$, $\|S_N f\|_2 \le \|f\|_2$.

1.5 $\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k f(x) = \int_0^1 f(t)\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(x-t)dt = \int_0^1 f(t)F_N(x-t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)F_N(t)dt$.
$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(t) = \frac{1}{N+1}|\frac{\sin(\pi(N+1)t)}{\sin(\pi t)}|^2$.
$F_N(t)$: Fejer核. $F_N(t) \ge 0$, $\|F_N\|_1 = \int_0^1 F_N(t)dt = 1$, $F_N(t) \le \frac{1}{(N+1)|\sin(\pi t)|^2}$,
$\int_{\{\delta\le|t|\le1/2\}} F_N(t)dt \le \frac{1}{(N+1)|\sin(\pi\delta)|^2} \to 0$, as $N \to \infty$, $\forall\ \delta \in (0, 1/2)$.

Theorem 1.8. *If* $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$ *or* $f \in C(\mathbb{T})$, $p = \infty$, *then* $\lim_{N\to\infty} \|\sigma_N f - f\|_p = 0$.

Proof. Key point: $\lim_{t\to0} \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p = 0$. $\quad \int_{-1/2}^{1/2} F_N(t)dt = 0 \Rightarrow$
$\sigma_N f(x) - f(x) = \int_{-1/2}^{1/2}(f(x-t) - f(x))F_N(t)dt$. 由Minkowski不等式得
$\|\sigma_N f - f\|_p \le \int_{-1/2}^{1/2} \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p F_N(t)dt \le \int_{-\delta}^{\delta} \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p F_N(t)dt +$
$2\|f\|_p \int_{\{\delta\le|t|\le1/2\}} F_N(t)dt \le \sup_{|t|<\delta} \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p + \frac{\|f\|_p}{(N+1)|\sin(\pi\delta)|^2}$. Thus
$A := \limsup_{N\to\infty} \|\sigma_N f - f\|_p \le \sup_{|t|<\delta} \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p$. $\forall\ \delta \in (0, 1/2)$. $\delta \to 0+ \Rightarrow A = 0.$ □

Corollary 1.1. *(i)三角多项式*$\mathcal{P}_1 := \{\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi ikx} \big| c_k \in \mathbb{C},\ N \in \mathbb{Z}_+\}$*在*
$L^p(\mathbb{T})$*中稠密(*$1 \le p < \infty$*). (ii)若*$f \in L^1(\mathbb{T})$, $\widehat{f}(k) = 0,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$*则*$f = 0$ *a.e.*

Key point: as $\sigma_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{N+1-|k|}{N+1}\widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$ then (i) $\sigma_N f \in \mathcal{P}_1$;
(ii) $\widehat{f}(k) = 0,\ \forall\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sigma_N f = 0$; (iii) $S_N\sigma_N f = \sigma_N f$.

Proof of Lemma 1.7. 必要性: 共鸣定理. 充分性: $S_N\sigma_N f = \sigma_N f \Rightarrow$
$\|S_N f - f\|_p = \|S_N(f - \sigma_N f) + (\sigma_N f - f)\|_p \le (C_p + 1)\|\sigma_N f - f\|_p \to 0$ as $N \to \infty$. □

Poisson核: $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(-k)\overline{z}^k$, $z = re^{2\pi i\theta}$. $|\widehat{f}(k)| \le \|f\|_1 \Rightarrow$在
$\{|z| < 1\}$一致收敛. $u(re^{2\pi i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)r^{|k|}e^{2\pi ik\theta} = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)P_r(\theta - t)dt = P_r * f(\theta)$.
$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{2\pi ikt} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi t)+r^2}$.
($P_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{z}^k = \frac{1}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$, $z = re^{2\pi it}$)
$P_r(t) \ge 0$, $\int_0^1 P_r(t)dt = 1$, $\lim_{r\to1-} \int_{\{\delta\le|t|\le1/2\}} P_r(t)dt = 0$, $\forall\ \delta \in (0, 1/2)$.

Theorem 1.9. *If* $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$ *or* $f \in C(\mathbb{T})$, $p = \infty$, *then*

$$\lim_{r\to1-} \|P_r * f - f\|_p = 0. \tag{1.4}$$

Key point: $\|P_r * f - f\|_p \le \int_{-1/2}^{1/2} h(t)P_r(t)dt$, $h(t) = \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p$.
$\Delta u = 0$ if $|z| < 1$; $u = f$ if $|z| = 1$ in the sense of (1.4).
(If $f \in C(\mathbb{T})$ then $u \in C(\overline{D})$, $u = f$ on ∂D.)
$\mathbb{T} \cong \partial D = S^1$: $t \leftrightarrow e^{2\pi i t}$; $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Proof of $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x)$, $\lim\limits_{r\to 1-} P_r * f(x) = f(x)$, a.e. x, in Lemma 2.8.

1.6 L^1函数的Fourier变换. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx = (\mathcal{F}f)(\xi)$, 其中$x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j\xi_j$. 基本性质:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\widehat{f} + \beta\widehat{g}, \tag{1.5}$$

$$\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1, \quad \widehat{f} \in C(\mathbb{R}^n) \text{ (由控制收敛定理)}, \tag{1.6}$$

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0, \text{ (Riemann-Lebesgue, 由} \tag{1.7}$$

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - \frac{\xi}{2|\xi|^2}))e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \text{平均连续性)},$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\widehat{g} \text{ (Fubini)}, \tag{1.8}$$

$$\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi}, \quad \mathcal{F}(fe^{2\pi i h\cdot x})(\xi) = \widehat{f}(\xi - h), \tag{1.9}$$

$$\mathcal{F}(f(\rho\cdot))(\xi) = \widehat{f}(\rho\xi), \ (\rho \in O_n, \text{ i.e. } \rho^T\rho = I_n, \ \tau_h f(x) = f(x+h)), \tag{1.10}$$

$$\text{if } g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x), \text{ then } \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi), \ (\lambda > 0, \ (1.9)\text{–}(1.11) : \text{换元}), \tag{1.11}$$

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(\xi) = 2\pi i\xi_j\widehat{f}(\xi), \ (\partial_j f \in L^1, \ (\tau_{he_j} f - f)/h \to \partial_j f \text{ in } L^1), \tag{1.12}$$

$$\mathcal{F}(-2\pi i x_j f)(\xi) = \partial_j\widehat{f}(\xi), \ (x_j f \in L^1), \ ((1.12), (1.13) : (1.9)\text{取极限}). \tag{1.13}$$

$\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$, $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $L^p \subset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F} : L^p \to \mathcal{S}'$. Plancherel公式$\mathcal{F} : L^2 \to L^2$, $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \Rightarrow \mathcal{F} : L^p \to L^\infty + L^2$, (由Riesz-Thorin插值定理,Hausdorff-Young不等式) $\Rightarrow \mathcal{F} : L^p \to L^{p'} (p \in (1, 2))$.

1.7 Schwartz函数与缓增分布 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$且
$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_x |x^\alpha D^\beta f| < \infty$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
$f \in \mathcal{S} \Rightarrow x_j f, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{S}$; $\mathcal{S} \subset L^p$, $\mathcal{S}$在L^p中稠密$(1 \le p < \infty)$.
定义: $f_k \to 0$ in $\mathcal{S} \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} p_{\alpha,\beta}(f_k) = 0$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$; $f_k \to f$ in $\mathcal{S} \Leftrightarrow f_k - f \to 0$ in $\mathcal{S}$.
$\|f\|_{(k)} = \sup\{p_{\alpha,\beta}(f) : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| + |\beta| \le k\}$.
$\|f\|_{(*)} = \sum_{k=0}^\infty \min(\|f\|_{(k)}, 2^{-k})$. $f_k \to 0$ in $\mathcal{S} \Leftrightarrow \|f_k\|_{(m)} \to 0$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow \|f_k\|_{(*)} \to 0$.
$d(f, g) = \|f - g\|_{(*)}$, $(\mathcal{S}, d)$度量空间.
Schwartz函数$\mathcal{S}$的Fourier变换: (i)$\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$, $\forall\ f \in \mathcal{S}$. $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$连续.
Keypoint: $\|\xi^\alpha D^\beta\widehat{f}\|_\infty \le C\|D^\alpha(x^\beta f)\|_1 \le C\|(1 + |x|^{n+1})D^\alpha(x^\beta f)\|_\infty \le C\|f\|_{(|\alpha|+|\beta|+n+1)}$.
$\|\widehat{f}\|_{(k)} \le C\|f\|_{(|\alpha|+|\beta|+n+1)}$.
(ii)$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g} dx = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}g(\xi)d\xi dx$, $\forall\ f, g \in L^1$. (Fubini)

Lemma 1.10. 若$f(x) = e^{-\pi|x|^2}$则$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.

Proof. 由Fubini定理, 只需证明$n = 1$时成立. 由$f' + 2\pi x f = 0$和(1.12), (1.13)得
$2\pi i\xi\widehat{f} + i\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\xi} = 0$, 解得$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}\widehat{f}(0)$. 而$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, 因此$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. □

注: 结合(1.11)得若$f(x)=e^{-\pi\lambda^2|x|^2}$则$\widehat{f}(\xi)=\lambda^{-n}e^{-\pi|\xi|^2/\lambda^2}$, $\forall\lambda>0$.
可推广到$\lambda\in\mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}(\lambda)|<\mathrm{Re}(\lambda)$.

(iii) 若$f\in\mathcal{S}$则$f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$. (反演公式)
设$g(x)=e^{-\pi|x|^2}$, $g_\lambda(x)=g(\lambda x)(\lambda>0)$则$\widehat{g_\lambda}(x)=\lambda^{-n}\widehat{g}(x/\lambda)$, $\widehat{g}=g$. 由(ii)得
$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)g(\lambda x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\widehat{g}(x/\lambda)\frac{dx}{\lambda^n}=\int_{\mathbb{R}^n}f(\lambda x)\widehat{g}(x)dx$.令$\lambda\to 0+$
得$g(0)\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)dx=f(0)\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x)dx$. 结合$g(0)=1$, $\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x)dx=1$, (1.9)得
$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)dx=f(0)$, $f(x)=\tau_xf(0)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\tau_xf}(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$.
定义: $(\overline{\mathcal{F}}f)(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{2\pi ix\cdot\xi}dx$, $\sigma f(x)=\widetilde{f}(x)=f(-x)$, $Cf(x)=\overline{f(x)}$. 则
$\overline{\mathcal{F}}=C\mathcal{F}C=\sigma\mathcal{F}=\mathcal{F}\sigma$, (iii)$\Leftrightarrow\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}=\mathrm{id}$, $\sigma^2=\mathrm{id}$, $C^2=\mathrm{id}$;
$\sigma\mathcal{F}^2=\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}=\mathrm{id}$, $\mathcal{F}^2=\sigma$, $\mathcal{F}^4=\mathrm{id}$, $\overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}^3=\mathcal{F}^{-1}$.
(iv) $\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}dx=\int_{\mathbb{R}^n}f\overline{g}dx,\forall f,g\in\mathcal{S}$. 由(ii)只需证$\mathcal{F}(\overline{\widehat{g}})=\overline{g}$, i.e. $\mathcal{F}C\mathcal{F}=C$.
事实上$C\mathcal{F}C\mathcal{F}=\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}=\mathrm{id}$, $\mathcal{F}C\mathcal{F}=C^{-1}=C$.
取$f=g$得$\|\widehat{f}\|_2^2=\|f\|_2^2$, $\forall f\in\mathcal{S}$(Plancherel公式).

缓增分布$\mathcal{S}'$: $\mathcal{S}$上的连续线性函数. 对于线性函数$T:\mathcal{S}\to\mathbb{C}$有$[T\in\mathcal{S}']\Leftrightarrow$
$[$若$f_k\to 0$ in $\mathcal{S}$则$Tf_k\to 0]\Leftrightarrow[\exists\, m\in\mathbb{Z}_+$ s.t. $|Tf|\le C\|f\|_{(m)},\ \forall f\in\mathcal{S}]$.
记号说明: $Tf=T(f)=\langle T,f\rangle,\forall T\in\mathcal{S}',\ f\in\mathcal{S}$.
$\forall f\in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1\le p\le\infty$, 定义$T_f\phi=\int_{\mathbb{R}^n}f\phi dx$. 则
$[|T_f\phi|\le\|f\|_p\|\phi\|_{p'}\le C\|(1+|x|^{n+1})\phi\|_\infty\le C\|\phi\|_{(n+1)},\forall\phi\in\mathcal{S}]$, $T_f\in\mathcal{S}'$.
记号说明: 此时可以写$T_f\in L^p$, $T_f=f$.
注: 若$f\in L^p(\mathbb{R}^n),\ g\in L^q(\mathbb{R}^n),\ p,q\in[1,+\infty]$则$T_f=T_g\Leftrightarrow f=g$ a.e.
注: 若$T\in\mathcal{S}',\ 1<p\le\infty$则$[|T\phi|\le A\|\phi\|_{p'},\ \forall\phi\in\mathcal{S}]\Leftrightarrow$
$[\exists f\in L^p,\ \|f\|_p\le A$ s.t. $T=T_f]$.

Definition 1.11 ($\mathcal{S}'$的Fourier变换)**.** $\widehat{T}(f)=T(\widehat{f}),\forall T\in\mathcal{S}',\ f\in\mathcal{S}$.

由$[\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$连续$]$得$\widehat{T}\in\mathcal{S}'$. 由(ii)得$T\in L^1$时定义一致. i.e. $\widehat{T_f}=T_{\widehat{f}},\forall f\in L^1$.
记号说明: 若$f\in L^p,\ g\in L^q,\ p,q\in[1,+\infty]$则$\widehat{f}=g\Leftrightarrow\widehat{T_f}=T_g$.
定义: $[T_k\to T$ in $\mathcal{S}']\Leftrightarrow[T_kf\to Tf,\ \forall f\in\mathcal{S}]$. (若$T_k,T\in\mathcal{S}'$)
$[T_k\to T$ in $\mathcal{S}']\Rightarrow[\widehat{T_k}(f)=T_k(\widehat{f})\to T(\widehat{f})=\widehat{T}(f),\ \forall f\in\mathcal{S}]\Rightarrow$
$[\widehat{T_k}\to\widehat{T}$ in $\mathcal{S}']$, i.e. $\mathcal{F}:\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$连续.
定义: $\sigma T(f)=\widetilde{T}(f)=T(\widetilde{f})$. 则$\mathcal{F}^2T=\sigma T$, $\mathcal{F}^4T=\sigma^2T=T$.
若$T\in\mathcal{S}'$, $\widehat{T}\in L^1$则$T(f)=T(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f)=\widehat{T}(\overline{\mathcal{F}}f)=$
$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{T}(\xi)(\overline{\mathcal{F}}f)(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{T}(\xi)f(x)e^{2\pi ix\cdot\xi}dxd\xi=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)f(x)dx$, $(\forall f\in\mathcal{S})$
$g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{T}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$, i.e. $T=T_g$, $T(x)=g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{T}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$.
以上内容可以说明若$f\in L^1$, $\widehat{f}\in L^1$ 则$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi=f(x)$ a.e. x; 若
$f\in L^1$, $\widehat{f}=0$则$f=0$ a.e. $\mathcal{F}:L^1\to L^\infty$是单射(类似于Corollary 1.1 (ii)).

1.8 L^p函数的Fourier变换.

Theorem 1.12. 若$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$则$\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2$.

Proof. $\forall\phi\in\mathcal{S}$有$|\langle\widehat{f},\phi\rangle|=|\langle f,\widehat{\phi}\rangle|\le\|f\|_2\|\widehat{\phi}\|_2=\|f\|_2\|\phi\|_2$, 这说明
$\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|\widehat{f}\|_2\le\|f\|_2$. 同理$\forall\phi\in\mathcal{S}$有
$|\langle f,\phi\rangle|=|\langle f,\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\phi\rangle|=|\langle\widehat{f},\overline{\mathcal{F}}\phi\rangle|\le\|\widehat{f}\|_2\|\overline{\mathcal{F}}\phi\|_2=\|\widehat{f}\|_2\|\phi\|_2$, 这说明$\|f\|_2\le\|\widehat{f}\|_2$. □

$\forall\ f \in L^p$, $p \in (1,2)$, $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L^1$, $f_2 \in L^2$, $f_1 = f\chi_{\{|f|\geq 1\}}$, $f_2 = f\chi_{\{|f|<1\}}$, 则$\widehat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2} \in L^\infty + L^2$.

Theorem 1.13 (Riesz-Thorin插值定理)**.** *若$p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, $T : L^{p_0} + L^{p_1} \to L^{q_0} + L^{q_1}$是线性算子,*
$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0\|f\|_{p_0}\ \forall\ f \in L^{p_0}$, $\|Tf\|_{q_1} \leq M_1\|f\|_{p_1}\ \forall\ f \in L^{p_1}$则
$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|f\|_p\ \forall\ f \in L^p$.

Corollary 1.2 (Hausdorff-Young不等式)**.** *若$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,2]$, 则*
$\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$. (最佳常数$\left|\dfrac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}}\right|^{n/2}$)

Proof. 只需证明若f, g是简单可测函数则$|\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}gdx| \leq \|f\|_p\|g\|_p$. Normalize $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$.
$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{|f|^z f}|g|^z g dx$解析(约定$0^z = 0$).
$\operatorname{Re} z = p/2 - 1$时$|F(z)| \leq \|\widehat{|f|^z f}\|_2\||g|^z g\|_2 = \||f|^z f\|_2\||g|^z g\|_2 =$
$\||f|^{p/2}\|_2\||g|^{p/2}\|_2 = \|f\|_p^{p/2}\|g\|_p^{p/2} = 1$.
$\operatorname{Re} z = p - 1$时$|F(z)| \leq \|\widehat{|f|^z f}\|_\infty\||g|^z g\|_1 \leq \||f|^z f\|_1\||g|^z g\|_1 = \||f|^p\|_1\||g|^p\|_1$
$= \|f\|_p^p\|g\|_p^p = 1$.
$p/2 - 1 \leq \operatorname{Re} z \leq p - 1$时$|F(z)| \leq \||f|^z f\|_2\||g|^z g\|_2 \leq \|f\|_p^{p/2}\|f\|_\infty^\alpha\|g\|_p^{p/2}\|g\|_\infty^\alpha$
$\leq C(f,g) < +\infty$. $\alpha = \operatorname{Re} z - p/2 + 1 \in [0, p/2]$.
由Lemma 1.14得$p/2 - 1 \leq \operatorname{Re} z \leq p - 1$时$|F(z)| \leq 1$. 而$p/2 - 1 \leq 0 \leq p - 1$, 因此$|F(0)| \leq 1$, 即$|\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}gdx| \leq 1$. ☐

Lemma 1.14. *若F在$D = \{a < \operatorname{Re} z < b\}$解析, 在$\overline{D}$有界连续,*
则$\sup\limits_{z\in\overline{D}}|F(z)| \leq \sup\limits_{\operatorname{Re} z\in\{a,b\}}|F(z)|$.

Corollary 1.3 (卷积Young不等式)**.** *若$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $p, q, r \in [1,\infty]$,*
$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$则$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$. (最佳常数$\left|\dfrac{p^{1/p}q^{1/q}r'^{1/r'}}{p'^{1/p'}q'^{1/q'}r^{1/r}}\right|^{n/2}$)

Proof. $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)dy$. Normalize $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.
Case 1: $r = \infty$. Then $q = p'$, (by Hölder)$|f * g(x)| \leq \|f\|_p\|\sigma\tau_x g\|_q = 1$,
$(\sigma\tau_x g(y) = g(x-y))$, $\|\sigma\tau_x g\|_q = \|g\|_q = 1)$, $\|f * g\|_\infty \leq 1$.
Case 2: $r < \infty$. Then $p < \infty$, $q < \infty$, $1/p = 1/r + 1/q'$,
$1/q = 1/r + 1/p'$, $1/r + 1/p' + 1/q' = 1$; (by Hölder)
$|f * g(x)| \leq (\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p|g(x-y)|^q dy)^{\frac{1}{r}}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p)^{\frac{1}{q'}}(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^q dy)^{\frac{1}{p'}} =$
$(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p|g(x-y)|^q dy)^{\frac{1}{r}}$; (then by Fubini) $\int_{\mathbb{R}^n}|f * g(x)|^r dx \leq$
$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p|g(x-y)|^q dydx = \|f\|_p^p\|g\|_q^q = 1$, i.e.$\|f * g\|_r \leq 1$. ☐

1.9 收敛与求和, Poisson核、Gauss核. $B \subset \mathbb{R}^n$是有界开凸集, $0 \in B$,
$B_R = \{Rx : x \in B\}$. 设$\varphi_R = \overline{\mathcal{F}}\chi_{B_R}$, *i.e.* $\widehat{\varphi_R} = \chi_{B_R}$则$\varphi_R \in L^2 \cap L^\infty$.
定义: $S_R f = \varphi_R * f$. 此定义适用于$f \in L^p$, $p \in \Lambda(B)$. 其中$\Lambda(B) = \{p \in [1,\infty), \varphi_1 \in L^{p'}\}$
(由(1.11)得$\varphi_R(x) = R^n\varphi_1(Rx)$, $\varphi_R \in L^{p'} \Leftrightarrow \varphi_1 \in L^{p'}$). 此时$\widehat{S_R f} = \chi_{B_R}\widehat{f}$, $\forall\ f \in L^p$, $p \in [1,2]$. 设$1 \leq p < \infty$, $R > 0$.
1.若$\chi_B \notin \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$则$\exists\ f \in L^p_c$(i.e. 紧支集$L^p$函数) s.t. $\sup\limits_{R>0}\|\chi_B S_R f\|_p = +\infty$.

2.若$\chi_B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$则$p \in \Lambda(B)$. 下证$\lim\limits_{R\to\infty} \|S_R f - f\|_p = 0,\ \forall\ f \in L^p$.
Key point: (i) $\exists\ C_p > 0$ s.t. $\|S_1 f\|_p \le C_p \|f\|_p,\ \|S_R f\|_p \le C_p \|f\|_p,\ \forall\ f \in L^p$.
(ii) $\exists\ \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, s.t. $\eta(0) = 1$, $\operatorname{supp} \eta \subset B$.
(iii) 设$\psi = \overline{\mathcal{F}}\eta$, $\psi_R(x) = R^n \psi(Rx)$, 则$\psi \in \mathcal{S}$, $\int \psi = 1$, $\widehat{\psi_R}(\xi) = \eta(\xi/R)$.
(iv) 定义$\widetilde{S_R} f = \psi_R * f$, 则 [a]$S_R \widetilde{S_R} f = \widetilde{S_R} f$, [b] $\lim\limits_{R\to\infty} \|\widetilde{S_R} f - f\|_p = 0, \forall\ f \in L^p$.
(v) 结合(i)得$\|S_R f - f\|_p = \|S_R(f - \widetilde{S_R} f) + (\widetilde{S_R} f - f)\|_p \le (C_p + 1)\|\widetilde{S_R} f - f\|_p \to 0$ as $R \to \infty$. ($\forall\ f \in L^p$). (**注:** (iv)用到Theorem 2.1)
注: 若B是凸多面体则$\Lambda(B) = [1, \infty)$, $\chi_B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow p \in (1, \infty)$.
若$B = B(0, 1)$, $n > 1$则$\Lambda(B) = [1, \frac{2n}{n-1})$, $\chi_B \in \mathcal{M}_p \Leftrightarrow p = 2$. (Fefferman).
注:$[\lim\limits_{R\to\infty} \|S_R f - f\|_p = 0,\ \forall\ f \in \mathcal{S}] \Leftrightarrow \varphi_1 \in L^p$.

若$n = 1$, $B = (-1, 1)$则$S_R f = D_R * f$, $D_R(x) = \varphi_R(x) = \int_{-R}^R e^{2\pi i x \xi} d\xi = \frac{\sin(2\pi R x)}{\pi x}$, $D_R \notin L^1$, $D_R \in L^q$, $\forall\ q > 1$.
*a.e.收敛:$\| \sup_R |S_R f| \|_p \le C_p \|f\|_p$, $\forall\ f \in L^p$, $1 < p < \infty$ (Carleson-Hunt).
$\sigma_R f(x) = \frac{1}{R} \int_0^R S_t f(x) dt = F_R * f$, $F_R(x) = \frac{1}{R} \int_0^R D_t(x) dt = \frac{\sin^2(\pi R x)}{R(\pi x)^2}$.
$F_R \in L^1$, $F_R \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}} F_R(x) dx = 1$. $\lim\limits_{R\to\infty} \|\sigma_R f - f\|_p = 0$ (Theorem 2.1), $\lim\limits_{R\to\infty} \sigma_R f(x) = f(x)$ a.e. x (Corollary 2.3), $\forall\ f \in L^p$, $1 \le p < \infty$.

Poisson核. $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = P_t * f(x)$,
$P_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$.

Proof. (i) $n = 1$. $f(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$, $g = \overline{\mathcal{F}} f$, $g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
$\Rightarrow f = \widehat{g}$, i.e. $e^{-2\pi t|\xi|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x\cdot\xi}}{\pi(1+x^2)} dx$. Then
$e^{-2\pi|\xi|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x\cdot\xi}}{\pi(1+x^2)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \int_0^\infty e^{-s\pi(1+x^2)} ds dx = 2\int_0^\infty e^{-s\pi - \frac{\pi|\xi|^2}{s}} \frac{ds}{\sqrt{s}}$.
(as $\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{-s\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{s}}$, i.e. $\mathcal{F}(e^{-s\pi x^2}) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{s}}$, $\forall\ s > 0$.)
(ii) $n \ge 1$. $e^{-2\pi|\xi|} = \int_0^\infty e^{-s\pi - \frac{\pi|\xi|^2}{s}} \frac{ds}{\sqrt{s}}$ is still true for $\xi \in \mathbb{R}^n$. Then
$e^{-2\pi t|\xi|} = \int_0^\infty e^{-s\pi - \frac{\pi t^2|\xi|^2}{s}} \frac{ds}{\sqrt{s}} \overset{s=t^2\lambda}{=} t\int_0^\infty e^{-t^2\lambda\pi - \frac{\pi|\xi|^2}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}$.
$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = t\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-t^2\lambda\pi - \frac{\pi|\xi|^2}{\lambda}} e^{2\pi i x\cdot\xi} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} dx = t\int_0^\infty e^{-t^2\lambda\pi - \lambda\pi|x|^2} \lambda^{\frac{n}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})t}{[\pi(t^2+|x|^2)]^{\frac{n+1}{2}}}$. (as $\overline{\mathcal{F}}(e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\lambda}}) = \lambda^{\frac{n}{2}} e^{-\pi\lambda|x|^2}$; $\int_0^\infty e^{-a\lambda} \lambda^{\frac{n-1}{2}} d\lambda = \Gamma(\frac{n+1}{2})/a^{\frac{n+1}{2}}$, $\forall\ a > 0$.) □

$\Delta_{t,x} P_t(x) = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. $\lim\limits_{t\to 0+} u(x,t) = f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. (Corollary 2.3)
注: If $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}_+^{n+1}$, $\sup\limits_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx < +\infty$, $1 < p < \infty$ (or $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $p = \infty$), then $\exists\ f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ s.t. $u(x,t) = P_t * f(x)$.

Gauss核. $w(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi t^2|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = W_t * f(x)$, $W_t = \overline{\mathcal{F}}(e^{-\pi t^2|\xi|^2})$
$= t^{-n} e^{-\pi|x|^2/t^2}$. $\widetilde{w}(x,t) = w(x, \sqrt{4\pi t}) = e^{t\Delta} f(x)$, $\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} = \Delta \widetilde{w}$ in $\mathbb{R}_+^{n+1}$.
$\lim\limits_{t\to 0+} \widetilde{w}(x,t) = \lim\limits_{t\to 0+} w(x,t) = f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$.

2. Hardy-Littlewood极大函数

2.1恒等逼近 $\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int\phi=1$, $t>0$, $\phi_t(x)=t^{-n}\phi(x/t)$.
$\phi_t\to\delta$ in $\mathcal{S}'$ as $t\to 0+$, **定义:** $\langle\delta,g\rangle=g(0),\ \forall\ g\in\mathcal{S}$.

Proof. 若$g\in\mathcal{S}$则$\langle\phi_t,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}t^{-n}\phi(x/t)g(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)g(tx)dx$, 由控制收敛定理, $\lim\limits_{t\to0+}\langle\phi_t,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)g(0)dx=g(0)=\langle\delta,g\rangle$. □

因此称$\{\phi_t:t>0\}$为恒等逼近. 同理$\phi_t*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)g(x-ty)dy$;

$$\int\phi=A\Rightarrow\phi_t\to A\delta\quad\text{in }\mathcal{S}'\text{ as }t\to0+\,. \tag{2.1}$$

举例: Cesaro核$\sigma_R f$: $\phi=F_1=\frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$, $F_R(x)=\phi_{1/R}$;
Poisson核: $\phi=P_1=\frac{C_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, $C_n=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$; Gauss核: $\phi=W_1=e^{-\pi|x|^2}$.

Theorem 2.1. *若$\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int\phi=A$, 则$\lim\limits_{t\to0+}\|\phi_t*f-Af\|_p=0$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$ or $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$ (i.e. $f\in C(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0$), $p=\infty$.*

Proof. $\phi_t*f(x)-Af(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)(f(x-ty)-f(x))dy$. 由Minkowski不等式得$\|\phi_t*f-Af\|_p\le\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(y)|\|f(\cdot-ty)-f(\cdot)\|_pdt=\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(y)|h(ty)dt$, $h(a)=\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_p$. $0\le h(a)\le2\|f\|_p$, $\lim\limits_{a\to0+}h(a)=0$. 由控制收敛定理得$\lim\limits_{t\to0+}\|\phi_t*f-Af\|_p=0$. □

此时存在子列$\{t_k\}$ s.t. $t_k\to0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\phi_{t_k}*f(x)=Af(x)$ a.e. 这说明
$\liminf\limits_{t\to0+}|\phi_t*f(x)-Af(x)|=0$ a.e.

Corollary 2.1. *若$\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int\phi=A>0$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, $|\phi_t*f(x)|\le B<\infty$, $\forall\ t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$. 则$f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_\infty\le B/A$.*

2.2 $L^{p,\infty}$, 弱(p,q)型, 强(p,q)型; a.e.收敛判别法.
2.3 Marcinkiewicz插值定理.
2.4 Mf, $M'f$, $M''f$; Mf弱$(1,1)$; $|\varphi_t*f(x)|\le\|\varphi\|_1Mf(x)$, $\forall\ \varphi\in\mathcal{V}_0$ i.e. φ非负径向递减可积; Cesaro核,Poisson核,Gauss核a.e.收敛的结论.
2.5 M_df弱$(1,1)$; Calderon-Zygmund分解.
2.6 Mf弱$(1,1)$; Lebesgue微分定理, Lebesgue点; $Mf:L\ln L\to L^1_{loc}$.
2.7 Mf加权弱$(1,1)$, 加权强(p,q).
2.8 Vitali覆盖引理, Bescovitch覆盖引理.

2.2 (X,μ) 测度空间. **定义:** $a_f(\lambda)=\mu(\{|f|>\lambda\})$, $\lambda>0$; $\forall\ 0<p<\infty$,
$\|f\|_{p,\infty}=\inf\{C>0:a_f(\lambda)\le(C/\lambda)^p\}=\sup\{\lambda>0:\lambda(a_f(\lambda))^{1/p}\}$.
弱型空间$L^{p,\infty}$定义为$\{f\in\mathfrak{m}(X,\mu):\|f\|_{p,\infty}<\infty\}$, $(L^{\infty,\infty}=L^\infty)$. 其中$\mathfrak{m}(X,\mu)$是$X\to\mathbb{C}$的$\mu$可测函数的集合. 考虑算子$T:L^p(X,\mu)\to\mathfrak{m}(Y,\nu)$.
(i) T是弱(p,q)型$\Leftrightarrow\exists\ C>0$ s.t. $\|Tf\|_{q,\infty}\le C\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p$.
(ii) T是强(p,q)型$\Leftrightarrow\exists\ C>0$ s.t. $\|Tf\|_q\le C\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p$.
(iii) T是次线性的$\Leftrightarrow|T(f+g)|\le|Tf|+|Tg|$, $|T(\lambda f)|=|\lambda||Tf|$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$.
注: 由$\|f\|_{p,\infty}\le\|f\|_p$得[强$(p,q)$型$\Rightarrow$弱$(p,q)$型]. 线性$\Rightarrow$次线性.

Theorem 2.2. *若T是弱(p,q)型次线性算子, 则 $\{f\in L^p(X,\mu)|Tf(x)=0\ a.e.\}$是$L^p(X,\mu)$中的闭集.*

Proof. 若$f_n \in L^p(X,\mu)$, $Tf_n(x)=0$ a.e., $f_n \to f$ in L^p, 则$|Tf(x)| \le |T(f-f_n)(x)|+|Tf_n(x)| = |T(f-f_n)(x)|$ a.e., $\|Tf\|_{q,\infty} \le \|T(f-f_n)\|_{q,\infty} \le C\|f-f_n\|_p \to 0$ as $n\to\infty$. i.e. $\|Tf\|_{q,\infty}=0$, $Tf(x)=0$ a.e. □

2.3 Marcinkiewicz插值定理

Proposition 2.3. 若$\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$是$C^1$单调递增函数, 则 $\int_X \phi(|f(x)|)d\mu = \int_0^\infty \phi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda$.

Proof. $\phi(a)=\int_0^a \phi'(\lambda)d\lambda$, 结合Fubini定理得$\int_X \phi(|f(x)|)d\mu = \int_X \int_0^{|f(x)|}\phi'(\lambda)d\lambda d\mu = \int_0^\infty \phi'(\lambda)(\int_{\{|f|>\lambda\}}d\mu)d\lambda = \int_0^\infty \phi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda$. □

取$\phi(\lambda)=\lambda^p$得$\|f\|_p^p = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}a_f(\lambda)d\lambda$.
设V是$\mathfrak{m}(X,\mu)$的线性子空间, s.t.若$f\in\mathfrak{m}(X,\mu)$, $g\in V$, $|f|\le|g|$, 则$f\in V$.
(例如$V=L^p+L^q$, $V=L^p\cap L^q$, $V=L^\infty_c$等).

Theorem 2.4. *[Marcinkiewicz插值定理]若*$1\le p_0<p<p_1\le\infty$, $T:V\to\mathfrak{m}(X,\mu)$*是次线性算子*, $\|Tf\|_{p_0,\infty}\le A_0\|f\|_{p_0}$, $\forall\ f\in L^{p_0}\cap V$, $\|Tf\|_{p_1,\infty}\le A_1\|f\|_{p_1}$, $\forall\ f\in L^{p_1}\cap V$, *则*$\|Tf\|_p\le A\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p\cap V$.

注: 若$\theta\in(0,1)$, $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$, 则可取$A=2(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p})^{1/p}A_1^\theta A_0^{1-\theta}$.

Proof. $\forall\ f\in L^p\cap V$, $\lambda,c>0$, 有$f=f_0+f_1$, 其中$f_0=f\chi_{\{|f|>c\lambda\}}$, $f_1=f\chi_{\{|f|\le c\lambda\}}$. 则 $f_0\in L^{p_0}\cap V$, $f_1\in L^{p_1}\cap V$, $|Tf|\le|Tf_0|+|Tf_1|$, $\{|Tf|>\lambda\}\subset\{|Tf_0|>\lambda/2\}\cup\{|Tf_1|>\lambda/2\}$, $a_{Tf}(\lambda)\le a_{Tf_0}(\lambda/2)+a_{Tf_1}(\lambda/2)$.
Case 1 $p_1=\infty$. 取$c=\frac{1}{2A_1}$得$\|Tf_1\|_\infty\le A_1\|f_1\|_\infty\le A_1\cdot c\lambda\le\lambda/2$,
$a_{Tf_1}(\lambda/2)=0$, $a_{Tf}(\lambda)\le a_{Tf_0}(\lambda/2)\le(\frac{2}{\lambda}A_0\|f\|_{p_0})^{p_0}=(\frac{2A_0}{\lambda})^{p_0}\int_{\{|f|>c\lambda\}}|f|^pd\mu$.
$\|Tf\|_p^p=\int_0^\infty p\lambda^{p-1}a_{Tf}(\lambda)d\lambda\le\int_0^\infty p\lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_{\{|f|>c\lambda\}}|f|^pd\mu d\lambda \overset{\text{Fubini}}{=}$
$p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty\int_X|f(x)|^p\int_0^{|f(x)|/c}\lambda^{p-1-p_0}d\lambda d\mu = p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty\int_X|f(x)|^p|\frac{f(x)}{c}|^{p-p_0}\frac{1}{p-p_0}d\mu$
$=\frac{p}{p-p_0}\frac{(2A_0)^{p_0}}{c^{p-p_0}}\|Tf\|_p^p=\frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|Tf\|_p^p=A^p\|Tf\|_p^p$.
Case 2 $p_1<\infty$. $a_{Tf_i}(\lambda/2)\le(\frac{2}{\lambda}A_i\|f\|_{p_i})^{p_i}$, $i=0,1$.
$a_{Tf}(\lambda)\le a_{Tf_0}(\lambda/2)+a_{Tf_1}(\lambda/2)\le(\frac{2}{\lambda}A_0\|f\|_{p_0})^{p_0}+(\frac{2}{\lambda}A_1\|f\|_{p_1})^{p_1}\le$
$(\frac{2A_0}{\lambda})^{p_0}\int_{\{|f|>c\lambda\}}|f|^pd\mu+(\frac{2A_1}{\lambda})^{p_1}\int_{\{|f|\le c\lambda\}}|f|^pd\mu$.
$\|Tf\|_p^p=\int_0^\infty p\lambda^{p-1}a_{Tf}(\lambda)d\lambda\le\int_0^\infty p\lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_{\{|f|>c\lambda\}}|f|^pd\mu d\lambda+$
$\int_0^\infty p\lambda^{p-1-p_1}(2A_1)^{p_1}\int_{\{|f|\le c\lambda\}}|f|^pd\mu d\lambda \overset{\text{Fubini}}{=}$
$p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty\int_X|f(x)|^p\int_0^{|f(x)|/c}\lambda^{p-1-p_0}d\lambda d\mu+p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty\int_X|f(x)|^p\int_{|f(x)|/c}^\infty\lambda^{p-1-p_1}d\lambda d\mu=$
$p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty\int_X|f(x)|^p|\frac{f(x)}{c}|^{p-p_0}\frac{1}{p-p_0}d\mu+p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty\int_X|f(x)|^p|\frac{f(x)}{c}|^{p-p_1}\frac{1}{p_1-p}d\mu=$
$(\frac{p}{p-p_0}\frac{(2A_0)^{p_0}}{c^{p-p_0}}+\frac{p}{p_1-p}\frac{(2A_1)^{p_1}}{c^{p-p_1}})\|Tf\|_p^p=(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p})(2A_0)^{\frac{p_0(p_1-p)}{p_1-p_0}}(2A_1)^{\frac{p_1(p-p_0)}{p_1-p_0}}\|Tf\|_p^p=$
$A^p\|Tf\|_p^p$. 其中取$c>0$使得$\frac{(2A_0)^{p_0}}{c^{p-p_0}}=\frac{(2A_1)^{p_1}}{c^{p-p_1}}$, i.e. $c=(2A_0)^{\frac{p_0}{p_1-p_0}}(2A_1)^{-\frac{p_1}{p_1-p_0}}$. □

推广: 若$1\le p_0<p<p_1\le\infty$, $T,T_0,T_1:V\to\mathfrak{m}(X,\mu)$满足
$|T(f+g)|\le|T_0f|+|T_1g|$, $\forall\ f,g\in V$; $\|T_0f\|_{p_0,\infty}\le A_0\|f\|_{p_0}$, $\forall\ f\in L^{p_0}\cap V$;
(*)$\|T_1f\|_{p_1,\infty}\le A_1\|f\|_{p_1}$, $\forall\ f\in L^{p_1}\cap V$; 则$\|Tf\|_p\le A\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p\cap V$.

注: 其中(*)可以减弱为$a_{T_1f}(\lambda)\le(A_1\|f\|_{p_1}/\lambda)^{p_1}$,
$\forall\ \lambda\ge C_0\|f\|_\infty$, $f\in L^{p_1}\cap L^\infty\cap V$. (可能需要更大的$A$)

2.4 极大函数 $B_r=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<r\}$. $\forall\, f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 定义 $Mf(x)=\sup\limits_{r>0}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(x-y)|dy$.
若$\phi=|B_1|^{-1}\chi_{B_1}$则$Mf(x)=\sup\limits_{t>0}\phi_t*|f|(x)$.
记$Q_r=[-r,r]^n$, 则$|Q_r|=(2r)^n$. 定义 $M'f(x)=\sup\limits_{r>0}\frac{1}{(2r)^n}\int_{Q_r}|f(x-y)|dy$. 由$B_r\subset Q_r\subset B_{\sqrt{n}r}$得$c_nM'f(x)\le Mf(x)\le C_nM'f(x)$, 其中
$C_n=\frac{|Q_r|}{|B_r|}=\frac{2^n}{\alpha(n)}$, $c_n=\frac{|Q_r|}{|B_{\sqrt{n}r}|}=\frac{2^n}{n^{n/2}\alpha(n)}$, $\alpha(n)=|B_1|$, $B_r=B(0,r)$.
注: $Mf=M|f|$, $M'f=M'|f|$; 若$n=1$则$Mf=M'f$.
定义 $M''f(x)=\sup\limits_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|$, 其中$Q$取方体: $Q=\prod_{i=1}^n[a_i,a_i+a]$.
则$M'f(x)\le M''f(x)\le 2^nM'f(x)$.

Lemma 2.5. *若$\mathcal{F}=\{B_j=B(x_j,r_j)\}_{j=1}^N$是度量空间$(X,d)$中的开球, $mB_j=B(x_j,mr_j)$, $(B(x,r)=\{y\in X:d(x,y)<r\})$. 则$\exists\ \{B_i'\}_{i=1}^l\subseteq\mathcal{F}$ s.t. $B_i'\cap B_j'=\emptyset$, $\forall\ i\ne j$, $\cup_{j=1}^NB_j\subseteq\cup_{i=1}^l3B_i'$.*

Proof. 不妨设$r_1\ge r_2\ge\cdots\ge r_N>0$. 归纳定义$B_{N+1}=\emptyset$, $j_1=1$, $j_{k+1}=\min\{j:B_j\cap B_{j_m}=\emptyset,\ \forall\ 1\le m\le k\}$, $l=\sup\{k:j_k\le N\}$. 则$B_m'=B_{j_m}$满足要求.
验证: (a)$B_{j_{k+1}}\cap B_{j_m}=\emptyset$, $\forall\ 1\le m\le k\Rightarrow B_i'\cap B_m'=\emptyset$, $\forall\ i>m$. (b) $\forall\ 1\le j\le n$, $\exists\ 1\le k\le l$ s.t. $j_k\le j<j_{k+1}$. (i)若$j=j_k$则$B_j=B_{j_k}=B_k'\subseteq 3B_k'$. (ii)若$j>j_k$则 $\exists\ 1\le m\le k$ s.t. $B_j\cap B_{j_m}\ne\emptyset$. 此时$B_j\subseteq B(x_{j_m},d(x_{j_m},x_j)+r_j)\subseteq B(x_{j_m},3r_{j_m})=3B_m'$.
(as $1\le j_1<\cdots<j_l\le N$, $r_j\le r_{j_m}$, $d(x_{j_m},x_j)\le r_j+r_{j_m}\le 2r_{j_m}$.) ☐

Theorem 2.6. *若$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则$\|Mf\|_{1,\infty}\le 3^n\|f\|_1$.*

M换成$M',M'',\widetilde{M}$仍成立, 其中$\widetilde{M}f(x)=\sup\limits_{r>0,|y-x|<r}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(y-z)|dz$. 结合Marcinkiewicz插值定理和$\|Mf\|_\infty\le\|f\|_\infty$得$Mf$强$(p,p)(1<p\le\infty)$.

Proof. $\forall\ \lambda>0$设$E_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^n:\widetilde{M}f(x)>\lambda\}$,
$\mathcal{F}=\{B(x,r):\int_{B(x,r)}|f|dy>\lambda|B(x,r)|\}$, 则$E_\lambda=\cup_{B\in\mathcal{F}}B$.
$\forall$紧集$K\subseteq E_\lambda$, $\exists\ B_1,\cdots,B_N\in\mathcal{F}$ s.t. $K\subseteq\cup_{i=1}^NB_i$. 结合Lemma 2.5得$\exists\ B_1',\cdots,B_l'\in\mathcal{F}$ s.t. $K\subseteq\cup_{i=1}^l3B_i'$, $B_i'\cap B_j'=\emptyset$, $\forall\ i\ne j$. 由$B_i'\in\mathcal{F}$得
$\int_{B_i'}|f|dy>\lambda|B_i'|$. $|K|\le\sum\limits_{i=1}^l|3B_i'|=3^n\sum\limits_{i=1}^l|B_i'|\le\frac{3^n}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^l\int_{B_i'}|f|dy\le\frac{3^n}{\lambda}\|f\|_1$. 结合$|E_\lambda|=\sup\{|K|:K\subseteq E_\lambda,K紧\}$得$|E_\lambda|\le\frac{3^n}{\lambda}\|f\|_1$, $\forall\ \lambda>0$, i.e. $\|\widetilde{M}f\|_{1,\infty}\le 3^n\|f\|_1$. 把$\mathbb{R}^n$的度量换成$d(x,y)=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$得$\|M''f\|_{1,\infty}\le 3^n\|f\|_1$. 由$0\le Mf(x)\le\widetilde{M}f(x)$,
$0\le M'f(x)\le M''f(x)$得$\|Mf\|_{1,\infty}\le 3^n\|f\|_1$, $\|M'f\|_{1,\infty}\le 3^n\|f\|_1$. ☐

Proposition 2.7. *若$\phi\in\mathcal{V}_0(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$则$\sup\limits_{t>0}|\phi_t*f(x)|\le\|\phi\|_1Mf(x)$.*
$\mathcal{V}_0=\mathcal{V}_0(\mathbb{R}^n):=\{\phi(x)=\phi_0(|x|)|\phi_0:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$递减$,\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)\}$.

Proof. $[\phi_t(x)=t^{-n}\phi(x/t),\ \phi\in\mathcal{V}_0]\Rightarrow[\phi_t\in\mathcal{V}_0,\ \|\phi_t\|_1=\|\phi\|_1;\ |\phi_t*f(x)|\le\phi_t*|f|(x)]$ $(\forall\ t>0)$. 只需证若$f\ge0$, $\phi\in\mathcal{V}_0$则$\phi*f(x)\le\|\phi\|_1Mf(x)$.
(i)若ϕ是简单可测函数则$\phi=\sum_{j=1}^Na_j\chi_{B_{r_j}}$ a.e., $a_j>0$;
$0\le\phi*f(x)\le\sum_{j=1}^Na_j\int_{B_{r_j}}|f(x-y)|dy\le\sum_{j=1}^Na_j|B_{r_j}|Mf(x)=\|\phi\|_1Mf(x)$.
(ii)一般情形. 设$\phi_k(x)=\min(2^{-k}[2^k\phi(x)],2^k)$, 则$\phi_k\uparrow\phi$, $\phi_k\in\mathcal{V}_0$简单可测;
$\phi*f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\phi_k*f(x)\le\lim\limits_{k\to\infty}\|\phi_k\|_1Mf(x)=\|\phi\|_1Mf(x)$. ☐

Corollary 2.2. 若$\phi \in \mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n)$则$f \mapsto \sup_{t>0}|\phi_t * f(x)|$弱$(1,1)$ (且强(p,p), $\forall\ 1 < p \leq \infty$).
$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n) := \{\phi \in L^1(\mathbb{R}^n) | \exists\ \psi \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R}^n)\ s.t.\ |\phi(x)| \leq \psi(x)\ a.e.\}$

Keypoint: $|\phi_t * f(x)| \leq \psi_t * |f|(x) \leq \|\psi\|_1 Mf(x)$; Mf弱$(1,1)$,强(p,p).

Corollary 2.3. 若$1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n)$则$\lim_{t\to 0+} \phi_t * f(x) = (\int \phi) f(x)\ a.e.$

Proof. 设$\int \phi = A$. (i)$1 \leq p < \infty$设$\Omega f(x) = \limsup_{t\to 0+} |\phi_t * f(x) - Af(x)|$, 则$\Omega$次线性, $|\Omega f(x)| \leq \sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| + |A||f(x)|$, 由Corollary 2.2得$\Omega f$弱$(p,p)$. 由Theorem 2.1得$\Omega f(x) = 0$, $\forall\ f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. 结合[Theorem 2.2][$C_0(\mathbb{R}^n)$在$L^p(\mathbb{R}^n)$中稠密]
[Ωf弱(p,p)]得[$\Omega f(x) = 0$ a.e. x, $\forall\ f \in L^1(\mathbb{R}^n)$]. 此时结论成立.
(ii)$p = \infty$. $f_R = f\chi_{B(0,2R)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. <u>Claim:</u> (其中(i)⇒(2.2))

(2.2) $$\lim_{t\to 0+} \phi_t * f_R(x) = Af_R(x) = Af(x), \quad a.e.\ x \in B(0,R),$$

(2.3) $$|\phi_t * (f - f_R)|(x) \leq \|(1-\chi_{B_R})\phi_t\|_1 \|f\|_\infty, \quad \forall\ x \in B(0,R),$$

(2.4) $$\lim_{t\to 0+} \|(1-\chi_{B_R})\phi_t\|_1 = 0, \quad \forall\ q \in [1,\infty].$$

Proof of (2.3). $\forall\ x \in B(0,R)$有$|\phi_t * (f - f_R)|(x) \leq |\phi_t| * |f - f_R|(x) =$
$\int_{\{|y|\geq 2R\}} |\phi_t(x-y)||f(y)|dy \leq \int_{\{|y-x|\geq R\}} |\phi_t(x-y)||f(y)|dy$, 结合Hölder. □

Proof of (2.4). $\|(1-\chi_{B_R})\phi_t\|_1 = \|(1-\chi_{B_{R/t}})\phi\|_1 \to 0$ as $t \to 0+$ (单调收敛定理). □

由(2.2), (2.3), (2.4)得$\lim_{t\to 0+} \phi_t * f(x) = Af(x)$, a.e. $x \in B(0,R)$. 由R的任意性得
$\lim_{t\to 0+} \phi_t * f(x) = Af(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. □

注: Cesaro核$F_1(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$, Poisson核$P_1(x) = \frac{C_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, Gauss核$W_1(x) = e^{-\pi|x|^2}$都满足条件$F_1, P_1, W_1 \in \mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n)$. 事实上$P_1, W_1 \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq F_1(x) \leq \psi(x)$,
$\psi(x) = \min(1, |\pi x|^{-2}) \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$.

Lemma 2.8. 若$f \in L^1(\mathbb{T})$则$\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x)$, $\lim_{r\to 1-} P_r \underline{*} f(x) = f(x)$, $a.e. x$. 其中$\underline{*}$表示$\mathbb{T}$中的卷积, $*$表示$\mathbb{R}$中的卷积.

Proof. 记$\Omega_1 f(x) = \lim_{N\to\infty} |\sigma_N f(x) - f(x)|$, $\Omega_2 f(x) = \lim_{r\to 1-} |P_r \underline{*} f(x) - f(x)|$, 则只需证
$\Omega_1 f(x) = \Omega_2 f(x) = 0$ a.e. x. 在Theorem 1.8, Theorem 1.9中取$p = \infty$得
<u>(a) $\Omega_1 f(x) = \Omega_2 f(x) = 0$, $\forall\ f \in C(\mathbb{T})$.</u> 由$0 \leq F_N(t) = \frac{1}{N+1}|\frac{\sin(\pi(N+1)t)}{\sin(\pi t)}|^2 \leq$
$\min(N+1, \frac{1}{|\sin \pi t|^2(N+1)}) \leq \min(N+1, \frac{1}{|2t|^2(N+1)}) =: \psi_{N+1}(t)$, $\forall\ |t| \leq 1/2$; $\psi_{N+1} \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$,
Proposition 2.7 得$|\sigma_N f(x)| = |F_N \underline{*} f(x)| \leq \psi_{N+1} * |f|(x) \leq \|\psi_{N+1}\|_1 Mf(x) = 2Mf(x)$.
同理$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi t)+r^2}$, $\widetilde{P}_r(t) = P_r(t)\chi_{(-1/2,1/2)}(t) \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$,
$|P_r \underline{*} f(x)| = |\widetilde{P}_r * f(x)| \leq \|\widetilde{P}_r\|_1 Mf(x) = Mf(x)$.
以上说明$\Omega_1 f(x) \leq 2Mf(x) + |f(x)|$, $\Omega_2 f(x) \leq Mf(x) + |f(x)|$.
另一方面, 与Theorem 2.6同理得$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{T})} \leq 3\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$, $\forall\ f \in L^1(\mathbb{T})$.
因此Ω_1, Ω_2弱$(1,1)$, 结合[Ω_1, Ω_2 次线性], [$C(\mathbb{T})$在$L^1(\mathbb{T})$中稠密], (a),
Theorem 2.2 得[$\Omega_1 f(x) = \Omega_2 f(x) = 0$ a.e. x, $\forall\ f \in L^1(\mathbb{T})$]. □

Corollary 2.4. 若$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)dy = f(x)$,
$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x-y) - f(x)|dy = 0$, $a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$.

Proof. 设$\Omega f(x)=\limsup\limits_{r\to0+}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(x-y)-f(x)|dy$, 则只需证$\Omega f(x)=0$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n$.
$\Omega f(x)\le Mf(x)+|f(x)|$, Ωf弱$(1,1)$, 次线性; $\Omega f(x)=0,\forall\ f\in C_0(\mathbb{R}^n)$.
结合Theorem 2.2得$[\Omega f(x)=0$ a.e. $x,\forall\ f\in L^1(\mathbb{R}^n)]$.
若$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则$f\chi_{B_R}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\Omega(f\chi_{B_R})(x)=0$ a.e. x. 结合$\Omega(f\chi_{B_R})(x)=\Omega f(x)$, $\forall\ x\in B_R$得$|\{\Omega f=0\}\cap B_R|=0,\forall\ f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $R>0$.
因此$|\{\Omega f=0\}|\le\sum_{k=1}^\infty|\{\Omega f=0\}\cap B_k|=0,\forall\ f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. □

推论: $|f(x)|\le Mf(x)$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n$.
定义: x是f的Lebesgue点$\Leftrightarrow\Omega f(x)=0$.
注: 若$\Omega f(x)=0$, $B_j=B(x_j,r_j)$, $r_j\to0$, $\{x\}=\cap_{j=1}^\infty B_j$, 则$\lim\limits_{j\to\infty}\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}f=f(x)$.

Key point: $B_j\subset B(x,2r_j)=:B_j'$, $|B_j'|=2^n|B_j|$,
$\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|f(x-y)-f(x)|dy\le\frac{2^n}{|B_j'|}\int_{B_j'}|f(x-y)-f(x)|dy\to0$, as $j\to\infty$.

Lemma 2.9. *若$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $|\{f\neq0\}|>0$, 则$Mf\notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Proof. $\exists\ R>0$ s.t. $\int_{B_R}|f|=:a>0$. $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, $Mf(x)\ge\frac{1}{|B_{R+|x|}|}\int_{B_{R+|x|}}|f(x-y)|dy=\frac{1}{(R+|x|)^n\alpha(n)}\int_{B(x,R+|x|)}|f(y)|dy\ge\frac{1}{(R+|x|)^n\alpha(n)}\int_{B(0,R)}|f(y)|dy=\frac{a}{(R+|x|)^n\alpha(n)}$.
结合$\frac{1}{(R+|x|)^n}\notin L^1(\mathbb{R}^n)$, $a>0$得$Mf\notin L^1(\mathbb{R}^n)$. □

Theorem 2.10. *若B是$\mathbb{R}^n$中的有界集, 则$\int_B Mf\le2|B|+C\int_{\mathbb{R}^n}|f|\ln^+|f|$, 其中 $\ln^+t=\max(\ln t,0)$.*

Proof. (i) $\int_B Mf=2\int_0^\infty|\{x\in B:Mf(x)>2\lambda\}|d\lambda\le$
$2|B|+2\int_1^\infty|\{x\in B:Mf(x)>2\lambda\}|d\lambda$.
Claim: $|\{x\in B:Mf(x)>2\lambda\}|\le\frac{C}{\lambda}\int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}|f(x)|dx$.

Proof. 设$f_1=f\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}$, $f_2=f-f_1$. 则$Mf\le Mf_1+Mf_2$, $\|f_2\|_\infty\le\lambda$, $Mf_2\le\lambda$, $\{x\in B:Mf(x)>2\lambda\}\subseteq\{x\in B:Mf_1(x)>2\lambda\}$. 结合$M$弱$(1,1)$得
$|\{x\in B:Mf(x)>2\lambda\}|\le|\{x\in B:Mf_1(x)>2\lambda\}|\le\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x)|dx\le$
$\frac{C}{\lambda}\int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}|f(x)|dx$. □

(ii) $\int_1^\infty|\{x\in B:Mf(x)>2\lambda\}|d\lambda\le\int_1^\infty\frac{C}{\lambda}\int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}|f(x)|dxd\lambda\le$
$C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\int_1^{\max(|f(x)|,1)}\frac{d\lambda}{\lambda}dx=C\int_{\mathbb{R}^n}|f|\ln^+|f|$. 结合(i)得结论成立. □

Theorem 2.11. *若$w\ge0$, $w\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则(i)$\int_{\mathbb{R}^n}|Mf|^pw\le C_p\int_{\mathbb{R}^n}|f|^pMw$, (ii)$\int_{\{x:Mf(x)>\lambda\}}w(x)dx\le\frac{C_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|Mw(x)dx$, 其中$\lambda>0$, $1<p<\infty$.*

Proof. 不妨设$w\in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, 否则可取$w_k\in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ s.t. $w_k\uparrow w$.
若$w=0$ a.e. 则显然成立, 不妨设$|\{w>0\}|>0$.
则$\|w\|_\infty\ge Mw(x)\ge c/(1+|x|)^n$, $\|f\|_\infty=\|f\|_{L^\infty(Mw)}$.
结合$Mf(x)\le\|f\|_\infty,\forall\ x\in\mathbb{R}^n$得$\|Mf\|_{L^\infty(w)}\le\|f\|_\infty=\|f\|_{L^\infty(Mw)}$.
结合Marcinkiewicz插值定理只需证(ii), i.e. 弱$(1,1)$.
设$E_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^n:Mf(x)>\lambda\}$, $\forall$紧集$K\subseteq E_\lambda$, $\exists$ 不交的球$B_1,\cdots,B_l\in\mathcal{F}$ s.t. $K\subseteq\cup_{i=1}^l3B_i$, $\int_{B_i}|f|>\lambda|B_i|$. 则$\int_K w(x)dx\le\sum_{i=1}^l\int_{3B_i}w(x)dx$.
Claim: $\int_{3B_i}w(x)dx\le\frac{4^n}{\lambda}\int_{B_i}|f(x)|Mw(x)dx$.

Proof. 由$\int_{B_i}|f|>\lambda|B_i|$, $\frac{4^n}{\lambda}\int_{B_i}|f(x)|Mw(x)dx\ge\frac{4^n}{\lambda}\int_{B_i}|f(x)|dx\inf_{B_i}Mw$
$\ge4^n|B_i|\inf_{B_i}Mw$, 只需证(a):$4^n|B_i|\inf_{B_i}Mw\ge\int_{3B_i}w(x)dx$.

设$B_i = B(x_i, r_i)$, $y \in B_i$, 则$3B_i = B(x_i, 3r_i) \subset B(y, 4r_i)$, $Mf(y) \geq \frac{1}{|B(y,4r_i)|}\int_{B(y,4r_i)} w(x)dx \geq \frac{1}{4^n|B_i|}\int_{3B_i} w(x)dx$. 对$y$取下确界得(a)成立. □

结合B_i不交得$\int_K w(x)dx \leq \frac{C_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|Mw(x)dx$. 结合$\int_{E_\lambda} w(x)dx = \sup\{\int_K w(x)dx : K \subseteq E_\lambda, K紧\}$得$\int_{E_\lambda} w(x)dx \leq \frac{C_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|Mw(x)dx$. □

2.5 Calderon-Zygmund分解 $\mathcal{Q}_k = \{\prod_{i=1}^n [\frac{a_i}{2^k}, \frac{a_i+1}{2^k})|a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}\}$,
$E_kf(x) = \sum\limits_{Q\in\mathcal{Q}_k} \frac{\chi_Q}{|Q|}\int_Q f$, $M_df(x) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |E_kf(x)|$. (a) $\|M_df\|_{1,\infty} \leq \|f\|_1$.
(b) $\lim\limits_{k\to+\infty} E_kf(x) = f(x)$ a.e., $\forall\ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. **推论:** $|f(x)| \leq M_df(x)$ a.e.
注: $\mathcal{Q} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{Q}_k$为二进方体的集合. (i) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $\exists|\ Q \in \mathcal{Q}_k$ s.t. $x \in Q$.
(ii) $\forall\ A, B \in \mathcal{Q}$, 有$A \cap B = \emptyset$或$A \subseteq B$或$B \subseteq A$.
(iii) $\forall\ A \in \mathcal{Q}_k$, $j < k$, $\exists|\ B \in \mathcal{Q}_j$ s.t. $A \subset B$. $\exists\ A_i \in \mathcal{Q}_{k+1}$, $1 \leq i \leq 2^n$, s.t. $A = \cup_{i=1}^{2^n} A_i$.
(iv) $\sigma_k := \{\cup_{j=1}^\infty A_j : A_j \in \mathcal{Q}_k \cup \{\emptyset\}\}$为$\mathcal{Q}_k$生成的$\sigma$代数, $\sigma_k \supset \sigma_j$, $\forall\ k > j$.
E_kf为σ_k可测函数, $\forall\ \Omega \in \sigma_k$若$f \in L^1(\Omega)$则$\int_\Omega E_kf = \int_\Omega f$. $E_kf = E[f|\sigma_k]$.

Proof of (a). 由$|M_df| \leq M_d|f|$不妨设$f \geq 0$. 设$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_df(x) > \lambda\}$, 则
$E_\lambda = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\Omega_k$, $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : E_kf(x) > \lambda,\ E_jf(x) \leq \lambda,\ \forall\ j < k\}$.
其中用到$0 \leq E_kf(x) \leq \sup_{Q\in\mathcal{Q}_k}\frac{1}{|Q|}\int_Q f \leq \sup_{Q\in\mathcal{Q}_k}\frac{1}{|Q|}\|f\|_1 = 2^{nk}\|f\|_1$,
$\lim\limits_{k\to-\infty} E_kf(x) = 0$. 且$\Omega_k \cap \Omega_j \neq 0$, $\forall\ k \neq j$. 下证$\Omega_k \in \sigma_k$. $\Omega_k = \Omega'_k \setminus \cup_{j=-\infty}^{k=1}\Omega'_j$,
$\Omega'_k = \{x \in \mathbb{R}^n : E_kf(x) > \lambda\} = \cup_{Q\in\mathcal{Q}_k, \frac{1}{|Q|}\int_Q f > \lambda} Q \in \sigma_k$, $\Omega'_j \in \sigma_j \subset \sigma_k$.
结合σ代数的性质得$\Omega_k = \Omega'_k \setminus \cup_{j=-\infty}^{k=1}\Omega'_j \in \sigma_k$. 记$\widetilde{\mathcal{Q}}_k = \{Q \in \mathcal{Q}_k : Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\}$, 则
$\Omega_k = \cup_{Q\in\widetilde{\mathcal{Q}}_k} Q$. 因此$\lambda|\Omega_k| \leq \int_{\Omega_k} E_kf = \int_{\Omega_k} f$,
$|E_\lambda| = \sum_k |\Omega_k| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega_k} f = \frac{1}{\lambda}\int_{E_\lambda} f \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$, $\forall\ \lambda > 0$, i.e. $\|M_df\|_{1,\infty} \leq \|f\|_1$. □

Proof of (b). 设$\Omega f(x) = \limsup\limits_{k\to+\infty} |E_kf(x) - f(x)|$, 则只需证$\Omega f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.
$\Omega f(x) \leq M_df(x) + |f(x)|$, Ωf弱$(1,1)$, 次线性; $\Omega f(x) = 0$,
$\forall\ f \in C(\mathbb{R}^n)$. 结合Theorem 2.2得$[\Omega f(x) = 0$ a.e. x, $\forall\ f \in L^1(\mathbb{R}^n)]$.
$\forall\ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $Q \in \mathcal{Q}_0$有$\chi_Qf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\Omega(\chi_Qf)(x) = 0$ a.e. x.
结合$E_k(\chi_Qf) = \chi_QE_kf$, $\forall\ k \geq 0$, $\Omega(\chi_Qf) = \chi_Q\Omega f$, 得$\chi_Q\Omega f(x) = 0$ a.e. x,
$\Omega f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{Q}_0}\chi_Q\Omega f(x) = 0$ a.e. x. □

Theorem 2.12. *若$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, $\lambda > 0$, 则$\exists$不交的二进方体$\{Q_j\}$ s.t.*
(i) $\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$, (ii) $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f| \leq 2^n\lambda$, (iii) $|f| \leq \lambda$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $\Omega := \cup_k Q_k$.

Proof. 由$\Omega_k = \cup_{Q\in\widetilde{\mathcal{Q}}_k} Q$为不交并, $E_\lambda = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\Omega_k$为不交并. 记集合$\cup_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mathcal{Q}}_k$为
$\{Q_j\}$, 则$E_\lambda = \cup_j Q_j = \Omega$为不交并, $Q_j \in \mathcal{Q}$(用到$\widetilde{\mathcal{Q}}_k \subset \mathcal{Q}_k \subset \mathcal{Q}$).
$\sum_j |Q_j| = |E_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$, i.e. (i). 若$x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega = \mathbb{R}^n \setminus E_\lambda$, $\Omega f(x) = 0$ 则
$E_kf(x) \leq \lambda$, $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} E_kf(x) \leq \lambda$, 结合$\Omega f(x) = 0$ a.e. x 得(iii)成立.
$\forall\ Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}_k$, $\exists\ x \in Q \cap \Omega_k$ s.t. $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| = E_kf(x) > \lambda$; $\exists\ \widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_{k-1}$ s.t. $Q \subset \widetilde{Q}$, $|\widetilde{Q}| = 2^n|Q|$,
$\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f| = E_{k-1}f(x) \leq \lambda$, $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \leq \frac{1}{|Q|}\int_{\widetilde{Q}}|f| = \frac{2^n}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f| \leq 2^n\lambda$. 结合$\cup_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mathcal{Q}}_k = \{Q_j\}$
得(ii)成立. □

注: $E_\lambda = \cup_{Q\in A_\lambda} Q = \cup_{Q\in A^*_\lambda} Q$, $A_\lambda = \{Q \in \mathcal{Q} : \frac{1}{|Q|}\int_Q f > \lambda\}$, A^*_λ是A_λ的极大元构成的集合, $|E_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda}\int_{E_\lambda} f$, 反向弱$(1,1)$: $|E_\lambda| \geq \frac{1}{2^n\lambda}\int_{E_\lambda} f$.

注: 若f非负可积, 支集在二进方体Q中, 则$M_d f \in L^1(Q) \Leftrightarrow f\ln^+ f \in L^1(Q)$.
一方面若$f\ln^+ f \in L^1(Q)$则$\int_Q M_d f = 2\int_0^\infty |E_{2\lambda} \cap Q| d\lambda \le 2|Q| + \int_1^\infty |E_{2\lambda}| d\lambda$
$\le 2|Q| + 2\int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\int_{\{f>\lambda\}} f(x)dxd\lambda = 2|Q| + 2\int_Q f\ln^+ f < +\infty$, $M_d f \in L^1(Q)$.
另一方面若$M_d f \in L^1(Q)$, 不妨设$\|f\|_1 > 0$, $Q \in \mathcal{Q}_m$. $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$有
$E_k f(x) = 0$, $\forall\ k \ge m$; $0 \le E_k f(x) \le 2^{nk}\|f\|_1 \le 2^{n(m-1)}\|f\|_1 =: \lambda_0 > 0$,
$\forall\ k \le m-1$. 这说明$\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$有$0 \le M_d f(x) \le \lambda_0$; $E_\lambda \subseteq Q$, $\forall\ \lambda > \lambda_0$.
$\int_Q M_d f = \int_0^\infty |E_\lambda \cap Q| d\lambda \ge \int_{\lambda_0}^\infty |E_\lambda| d\lambda \ge \int_{\lambda_0}^\infty \frac{1}{2^n\lambda}\int_{\{M_d f>\lambda\}} f(x)dxd\lambda = \frac{1}{2^n}\int_Q f\ln^+\frac{M_d f}{\lambda_0} \ge \frac{1}{2^n}\int_Q f\ln^+\frac{f}{\lambda_0} < +\infty$. $f\ln^+ f \in L^1(Q)$.

Lemma 2.13. 若f非负可积, $\lambda > 0$, 则$|\{M'f > 4^n\lambda\}| \le 2^n|\{M_d f > \lambda\}|$.

注: $4^{-n}\|M'f\|_{1,\infty} \le 2^n\|M_d f\|_{1,\infty} \le 2^n\|f\|_1$, $\|M'f\|_{1,\infty} \le 8^n\|f\|_1$.
Vitali覆盖引理: $\mathcal{B}$是$\mathbb{R}^n$中的开球族, 则$\exists$可数不交子族$\{B_j\} \subseteq \mathcal{B}$ s.t. $\cup_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq \cup_j 5B_j$. 推论: $\|Mf\|_{1,\infty} \le 5^n\|f\|_1$.
Bescovitch覆盖引理: $A \subset \mathbb{R}^n$有界, $\mathcal{F} = \{B_x\}_{x\in A}$, $B_x = B(x, r_x)$, 则$\exists$可数子族$\{B_j\} \subseteq \mathcal{F}$ s.t. $A \subseteq \cup_j B_j$, $\sum_j \chi_{B_j}(x) \le C_n$.

3. Hilbert变换

3.1 共轭Poisson核 $\forall\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 定义($\forall\ t>0,\ x\in\mathbb{R}$)
$u(x+it)=u(x,t)=P_t*f(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi t|\xi|}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$, $P_t(x)=\frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}$. 则
$u(z)=\int_0^\infty \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i z\xi}d\xi+\int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\bar{z}\xi}d\xi$. 定义
$iv(z)=\int_0^\infty \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i z\xi}d\xi-\int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\bar{z}\xi}d\xi$. 则$u,v$是$\mathbb{R}^2_+$的调和函数.
若f是实值函数则u,v是$\mathbb{R}^2_+$上的实值函数(as $\overline{\widehat{f}(\xi)}=\widehat{f}(-\xi)$).
$u+iv$在$\mathbb{H}=\{x+it|x,t\in\mathbb{R},t>0\}$解析, v称为u的共轭调和函数.
此时$v(z)=\int_{\mathbb{R}}-i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}e^{2\pi i x\xi}d\xi$, $z=x+it \Leftrightarrow$
$v(x,t)=v(x+it)=Q_t*f(x)$. 其中$\widehat{Q_t}(\xi)=-i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}$,
$Q_t(x)=\int_{\mathbb{R}}-i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}e^{2\pi i x\xi}d\xi=\frac{1}{\pi}\frac{x}{t^2+x^2}$. 设$Q(x,t)=Q_t(x)$则
$\Delta Q(x,t)=0$. Q_t为P_t的共轭调和函数: $P_t(x)+iQ_t(x)=\frac{1}{\pi}\frac{t+ix}{t^2+x^2}=\frac{i}{\pi z}$.
P_t恒等逼近. $Q_t\notin L^1(\mathbb{R})$. $\lim\limits_{t\to 0+}Q_t(x)=\frac{1}{\pi x}\notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

3.2 主值积分 定义 $\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x},\phi\rangle=\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\int_{\{|x|>\epsilon\}}\frac{\phi(x)}{x}dx$, $\forall\ \phi\in\mathcal{S}$. 则p.v.$\frac{1}{x}\in\mathcal{S}'$.

Proof. $\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x},\phi\rangle=\int_{\{|x|<1\}}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+\int_{\{|x|>1\}}\frac{\phi(x)}{x}dx$, (as $\int_{\{\epsilon<|x|<1\}}\frac{1}{x}dx=0$).
$|\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x},\phi\rangle|\le\int_{\{|x|<1\}}\|\phi'\|_\infty dx+\|x\phi\|_\infty\int_{\{|x|>1\}}\frac{1}{x^2}dx\le 2(\|\phi'\|_\infty+\|x\phi\|_\infty)$. □

Proposition 3.1. $\lim\limits_{t\to 0+}Q_t=\frac{1}{\pi}p.v.\frac{1}{x}$ *(in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$).*

Proof. $\forall\ \epsilon>0$, $\psi_\epsilon(x)=x^{-1}\chi_{\{|x|>\epsilon\}}\in L^\infty(\mathbb{R})\Rightarrow\psi_\epsilon\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
$\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x},\phi\rangle=\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\int_{\{|x|>\epsilon\}}\frac{\phi(x)}{x}dx=\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\langle\psi_\epsilon,\phi\rangle$, $\forall\ \phi\in\mathcal{S}$ i.e. $\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\psi_\epsilon=\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
因此只需证$\lim\limits_{t\to 0+}(Q_t-\frac{1}{\pi}\psi_t)=0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. 而$Q_t-\frac{1}{\pi}\psi_t=h_t$, $h_t(x)=t^{-1}h(x/t)$,
$h(x)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}$ $(|x|\le 1)$, $h(x)=\frac{1}{\pi}(\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{x})=-\frac{1}{\pi x(1+x^2)}$ $(|x|>1)$.
$h\in L^1(\mathbb{R})$, $\int h=0$ (as $h(x)=-h(x)$). 由(2.1)得$\lim\limits_{t\to 0+}h_t=0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. □

同理$\lim\limits_{t\to 0+}Q_t*f(x)=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\int_{\{|y|>\epsilon\}}\frac{f(x-y)}{y}dy$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. 而
$\widehat{Q_t}(\xi)=-i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0+}\widehat{Q_t}(\xi)=-i\mathrm{sgn}(\xi)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, 结合
$[\mathcal{F}:\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$连续$]$得$\mathcal{F}(\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x})=-i\mathrm{sgn}(\xi)$.
$\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 定义$f$的Hilbert变换$Hf$为: (3个定义等价)
(i)$Hf=\lim\limits_{t\to 0+}Q_t*f$; (ii)$Hf=\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}*f$; (iii)$\widehat{Hf}(\xi)=-i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$.
由定义(iii), H可延拓为L^2上的有界线性算子, 且
$\|Hf\|_2=\|f\|_2$, $H(Hf)=-f$, $\int Hf\cdot g=-\int f\cdot Hg$, $\forall\ f,g\in L^2(\mathbb{R})$.
3.4 $\forall\ \epsilon>0$, $1<q\le\infty$, $y^{-1}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}\in L^q(\mathbb{R})$, 因此$H_\epsilon f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\{|y|>\epsilon\}}\frac{f(x-y)}{y}dy$对$f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p<\infty$良定义. 同理$\forall\ t>0$, $1<q\le\infty$, $Q_t\in L^q(\mathbb{R})$, 因此Q_t*f对$f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p<\infty$良定义. $H(P_t*f)=Q_t*f=P_t*Hf$, $\forall\ f\in L^2(\mathbb{R})$, $t>0$;
$Q_{t+s}*f=P_s*Q_t*f$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R})$, $t>0$, $s>0$, $1\le p<\infty$.
定义$H^*f(x)=\sup_{\epsilon>0}|H_\epsilon f(x)|$, $Q^*f(x)=\sup_{t>0}|Q_t*f(x)|$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p<\infty$, 则H^*, Q^*次线性. (i)$H^*f(x)\le Q^*f(x)+Mf(x)$.
Key point: $Q_tf(x)-H_tf(x)=h_t*f(x)$, $h_t(x)=t^{-1}h(x/t)$, $h(x)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}$ $(|x|\le 1)$, $h(x)=-\frac{1}{\pi x(1+x^2)}$ $(|x|>1)$. $|h(x)|\le h_*(x)$, $h_*(x)=\frac{1}{2\pi}$ $(|x|\le 1)$, $h_*(x)=\frac{1}{\pi x(1+x^2)}$ $(|x|>1)$,

$h_* \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$, $\|h_*\|_1 = \frac{1+\ln 2}{\pi} < 1$.
$|Q_t f(x) - H_t f(x)| = |h_t * f(x)| \le h_{*t} * |f|(x) \le \|h_*\|_1 M|f|(x) \le Mf(x)$.

(ii) $\|Q^* f\|_2 \le C\|f\|_2$, $\forall\ f \in L^2(\mathbb{R})$. **Key point:** 由Proposition 2.7得$Q^* f(x)$
$= \sup_{t>0} |Q_t * f(x)| = \sup_{t>0} |P_t * Hf(x)| \le MHf(x)$; $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$.

(iii) $\|Q^* f\|_{1,\infty} \le C\|f\|_1$, $\forall\ f \in L^1(\mathbb{R})$.
(iv) $\|Q^* f\|_p \le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$. (Marcinkiewicz插值定理)
(v) $\|Q_t * f\|_p \le C_p\|f\|_p$, $\forall\ t > 0,\ f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

Key point: 若$1 < p \le 2$由(ii)(iv)和$|Q_t * f(x)| \le Q^* f(x)$. 若$2 < p < \infty$由对偶方法.
$\|Q_t * f\|_p = \sup\{|\int_{\mathbb{R}}(Q_t * f)g| : g \in L_c^\infty(\mathbb{R}), \|g\|_{p'} \le 1\}$. 若$f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L_c^\infty(\mathbb{R})$则
$\int_{\mathbb{R}}(Q_t * f)g = -\int_{\mathbb{R}}(Q_t * g)f$, $|\int_{\mathbb{R}}(Q_t * f)g| = \|Q_t * g\|_{p'}\|f\|_p \le C_{p'}\|g\|_{p'}\|f\|_p$. 这说明
$\|Q_t * f\|_p \le C_{p'}\|f\|_p$, $\forall$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $2 < p < \infty$.

(vi) $\|Q^* f\|_p \le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.
Key point: 设$Q_k^* f(x) = \sup_{t>1/k} |Q_t * f(x)|$, 则$Q_k^* f(x) \uparrow Q^* f(x)$. 若$t > 1/k$
则$|Q_t * f(x)| = |P_{t-1/k} * Q_{1/k} * f(x)| \le M(Q_{1/k} * f)(x)$. 这说明$Q_k^* f(x) \le M(Q_{1/k} * f)(x)$,
$\|Q_k^* f\|_p \le \|M(Q_{1/k} * f)\|_p \le C_p\|Q_{1/k} * f\|_p \le C'_p\|f\|_p$.
结合单调收敛定理得$\|Q^* f\|_p \le C'_p\|f\|_p$.

(vii) 由(i)(iii)(vi)得H^*, Q^*弱$(1,1)$, 强(p,p), $\forall\ 1 < p < \infty$.
(viii) $\|Hf\|_{1,\infty} \le C\|f\|_1$, $\forall\ f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$; $\|Hf\|_p \le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

Key point: 由Corollary 2.3得$\lim\limits_{t\to 0} P_t * Hf(x) = Hf(x)$ a.e. x, $\forall\ f \in L^2(\mathbb{R})$;
结合$Q^* f(x) = \sup_{t>0} |P_t * Hf(x)|$得$|Hf(x)| \le Q^* f(x)$ a.e.; 再结合(vii).

H可以唯一延拓为$L^p(\mathbb{R})$上的有界线性算子s.t. 若$f \in L^p(\mathbb{R})$, $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$f_k \to f$ in L^p, 则$Hf_k \to Hf$ in L^p. ($\forall\ 1 < p < \infty$).
$f \in L^1(\mathbb{R})$, $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f_k \to f$ in L^1, 则$Hf_k \to Hf$ in $L^{1,\infty}$.
若$f = \chi_{[0,1]}$, 则$f \in L^1 \cap L^\infty$, $Hf(x) = \frac{1}{\pi}\ln|\frac{x}{x-1}|$, $Hf \notin L^1 \cup L^\infty$, 这说明若$p = 1$或$p = \infty$则$H$不是强$(p,p)$型的.

Proof of (iii). $\forall\ \lambda > 0$, 对$|f|$作Calderon-Zygmund分解, $\exists$不交区间$\{I_k\}$ s.t. $\sum_k |I_k| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$,
$\lambda < \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} |f| \le 2\lambda$, $|f| \le \lambda$ a.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$, $\Omega := \cup_k I_k$. $f = g + b$, 其中
$g = \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f := a_k$ in I_k, $g = f$ in $\mathbb{R}\setminus\Omega$, $b = \sum_j b_j$, $b_j = (f - a_j)\chi_{Q_j}$. 则$\operatorname{supp} b_j \subseteq \overline{I_j}$, $\int b_j = 0$,
$|a_j| \le 2\lambda$, $\|g\|_\infty \le 2\lambda$, $\int_{\mathbb{R}} |g| = \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} |g| + \sum_j |I_j||a_j| = \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} |g| + \sum_j \left|\int_{I_j} f\right| \le \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} |g| + \sum_j \int_{I_j} |f| = \int_{\mathbb{R}} |f|$. $\|g\|_2^2 \le \|g\|_\infty\|g\|_1 \le 2\lambda\|f\|_1$. $\sum_j \|b_j\|_1 = \|b\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1 \le 2\|f\|_1$.
由$Q_t * f = Q_t * g + Q_t * b$, $Q_t * b = \sum_j Q_t * b_j$, $\forall\ t > 0$得$Q^* f \le Q^* g + Q^* b$, $Q^* b \le \sum_j Q^* b_j$.
则$a_{Q^* f}(\lambda) \le a_{Q^* g}(\lambda/2) + a_{Q^* b}(\lambda/2)$, 其中用到
$\{x \in \mathbb{R} : Q^* f(x) > \lambda\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : Q^* g(x) > \lambda/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : Q^* b(x) > \lambda/2\}$.
由(ii)得$a_{Q^* g}(\lambda/2) \le \frac{1}{(\lambda/2)^2}\|Q^* g\|_2^2 \le \frac{C}{\lambda^2}\|g\|_2^2 \le \frac{C}{\lambda^2}(2\lambda)\|f\|_1 = \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$.
设$I_j = B(x_j, r_j)$, $2I_j = B(x_j, 2r_j)$, $\Omega^* = \cup_j 2I_j$则$|\Omega^*| \le \sum_j |2I_j| = 2\sum_j |I_j| \le \frac{2}{\lambda}\|f\|_1$.
$a_{Q^* b}(\lambda/2) = |\{x \in \mathbb{R} : Q^* b(x) > \lambda/2\}| \le |\Omega^*| + |\{x \in \mathbb{R} \setminus \Omega^* : Q^* b(x) > \lambda/2\}| \le$
$\frac{2}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} Q^* b$, **Claim** :$\underline{\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} Q^* b_j \le \|b_j\|_1/2}$.

Proof. 由$\operatorname{supp} b_j \subseteq \overline{I_j}$, $\int b_j = 0$, 得若$x \in \mathbb{R} \setminus 2I_j$, $t > 0$则
$Q_t * b_j(x) = \int_{I_j} b_j(y)Q_t(x - y)dy = \int_{I_j} b_j(y)\left(Q_t(x - y) - Q_t(x - x_j)\right)dy$,

$|Q_t*b_j(x)|\le\frac{1}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|\frac{|y-x_j|}{|x-y||x-x_j|}dy$, 其中用到(取$a=x-y$, $b=x-x_j$)

$$|Q_t(a)-Q_t(b)|\le\frac{|a-b|}{\pi|ab|},\quad\forall\ t>0,\ a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

事实上$Q_t(a)-Q_t(b)=\frac{1}{\pi}\mathbf{Re}(\frac{1}{a+it}-\frac{1}{b+it})=\frac{1}{\pi}\mathbf{Re}\frac{b-a}{(a+it)(b+it)}$,
$|Q_t(a)-Q_t(b)|\le\frac{1}{\pi}|\frac{b-a}{(a+it)(b+it)}|\le\frac{1}{\pi}\frac{|b-a|}{|ab|}$.

因此$|Q_t*b_j(x)|\le\frac{1}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|\frac{|y-x_j|}{|x-y||x-x_j|}dy,\forall\ t>0$,
$Q^*b_j(x)=\sup\limits_{t>0}|Q_t*b_j(x)|\le\frac{1}{\pi}\int_{I_j}\frac{|b_j(y)||y-x_j|}{|x-y||x-x_j|}dy$. $\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j}\frac{1}{\pi}\int_{I_j}\frac{|b_j(y)||y-x_j|}{|x-y||x-x_j|}dydx=$
$\frac{1}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|\ln\frac{2r_j+|y-x_j|}{2r_j-|y-x_j|}dy\le\frac{\ln 3}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|dy\le\frac{1}{2}\int_{I_j}|b_j(y)|dy$, 其中用到

$I_j=B(x_j,r_j)$, $2I_j=B(x_j,2r_j)$, $\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j}\frac{|y-x_j|}{|x-y||x-x_j|}dy=|\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j}(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-x_j})dy|$
$=\left|\ln\frac{x-y}{x-x_j}\Big|_{x=x_j+2r_j}^{x=+\infty}+\ln\frac{x-y}{x-x_j}\Big|_{x=-\infty}^{x=x_j-2r_j}\right|=\big|\ln\frac{2r_j-(y-x_j)}{2r_j}-\ln\frac{2r_j+(y-x_j)}{2r_j}\big|=$
$\big|\ln\frac{2r_j-(y-x_j)}{2r_j+(y-x_j)}\big|=\ln\frac{2r_j+|y-x_j|}{2r_j-|y-x_j|}\le\ln\frac{2r_j+r_j}{2r_j-r_j}=\ln 3\le\pi/2,\ \forall\ x\in I_j$. □

因此$\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}Q^*b\le\sum_j\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}Q^*b_j\le\sum_j\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j}Q^*b_j\le\sum_j\|b_j\|_1/2\le\|f\|_1$,
$a_{Q^*b}(\lambda/2)\le\frac{2}{\lambda}\|f\|_1+\frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}Q^*b\le\frac{2}{\lambda}\|f\|_1+\frac{2}{\lambda}\|f\|_1=\frac{4}{\lambda}\|f\|_1$,
$a_{Q^*f}(\lambda)\le a_{Q^*g}(\lambda/2)+a_{Q^*b}(\lambda/2)\le\frac{C}{\lambda}\|f\|_1+\frac{4}{\lambda}\|f\|_1=\frac{C}{\lambda}\|f\|_1$, $\forall\lambda>0$. i.e.(iii). □

依范数收敛: $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\|H_\epsilon f-Hf\|_p=0,\ \forall\ f\in L^p(\mathbb{R}),\ 1<p<\infty$,
$\lim\limits_{\epsilon\to 0}\|H_\epsilon f-Hf\|_{1,\infty}=0,\ \forall\ f\in L^1(\mathbb{R})$. 只需证
$\varphi_p(f)=0,\forall\ f\in L^p,\ 1\le p<\infty$, 其中$\varphi_p(f)=\limsup\limits_{\epsilon\to 0}\|H_\epsilon f-Hf\|_p,\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}),1<p<\infty$,
$\varphi_1(f)=\limsup\limits_{\epsilon\to 0}\|H_\epsilon f-Hf\|_{1,\infty},\ \forall\ f\in L^1(\mathbb{R})$.
由$\sup\limits_{\epsilon>0}|H_\epsilon f-Hf|\le H^*f+|Hf|$,(vii)(viii)得$\varphi_p(f)\le C_p\|f\|_p$, 由
$\|f_1+f_2\|_{1,\infty}\le 2(\|f_1\|_{1,\infty}+\|f_2\|_{1,\infty})$, $\|f_1+f_2\|_p\le\|f_1\|_p+\|f_2\|_p$得
$\varphi_p(f)\le 2(\varphi_p(f-g)+\varphi_p(g))$, 其中$f,g\in L^p(\mathbb{R}),\ 1\le p<\infty$. 因此若$f_n\to f$ in L^p, $\varphi_p(f_n)=0$,
则$\varphi_p(f)=0$, (其中用到$\varphi_p(f)\le 2\varphi_p(f-f_n)\le C\|f-f_n\|$) i.e.
(a) $\{f\in L^p:\varphi_p(f)=0\}$ 在L^p闭, $1\le p<\infty$.
若$f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 则$\exists\ R>0$ s.t. $\operatorname{supp}f\subseteq[-R,R]$ 且
$H_\epsilon f(x)-Hf(x)=-\frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{\{|y|<\epsilon\}}\frac{f(x-y)}{y}dy=-\frac{1}{\pi}\int_{\{|y|<\epsilon\}}\frac{f(x-y)-f(x)}{y}dy$,
$|H_\epsilon f(x)-Hf(x)|\le\frac{2\epsilon}{\pi}\|f'\|_\infty$, $H_\epsilon f(x)-Hf(x)=0,\ \forall\ |x|>R+\epsilon$,
$\|H_\epsilon f-Hf\|_p\le\frac{2\epsilon}{\pi}\|f'\|_\infty(2(R+\epsilon))^{\frac{1}{p}}\to 0$ as $\epsilon\to 0$.因此
(b) $\varphi_p(f)=0,\forall\ f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$. (其中$p=1$时用到$\|h\|_{1,\infty}\le\|h\|_1$.)
结合$C_c^\infty(\mathbb{R})$在$L^p(\mathbb{R})$中稠密得$\varphi_p(f)=0,\ \forall\ f\in L^p,\ 1\le p<\infty$.

a.e.收敛: $\lim\limits_{\epsilon\to 0}H_\epsilon f(x)=Hf(x)$, a.e. x, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}),\ 1\le p<\infty$.

Proof. 设$\Omega f(x)=\limsup\limits_{\epsilon\to 0}|H_\epsilon f(x)-Hf(x)|$则只需证$\Omega f(x)=0$, a.e. x,
$\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}),\ 1\le p<\infty$. Ω次线性, $0\le\Omega f(x)\le H^*f(x)+|Hf(x)|$,
结合(vii)(viii)得Ω弱$(1,1)$, 强(p,p), $\forall\ 1<p<\infty$. 由$|H_\epsilon f(x)-Hf(x)|\le\frac{2\epsilon}{\pi}\|f'\|_\infty$,

$\forall\ f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$得$\Omega f(x)=0,\forall\ f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$. 结合[Theorem 2.2]
$[C_c^\infty(\mathbb{R})$在$L^p(\mathbb{R}^n)$中稠密]得$[\Omega f(x)=0$ a.e. $x,\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}),\ 1\le p<\infty$. □

注: $Q^*f(x)\le MHf(x),\ H^*f(x)\le MHf(x)+Mf(x)$ (Cotlar 不等式).
注: $f,Hf\in L^1(\mathbb{R})\Leftrightarrow f\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$(Hardy空间); $H:L^\infty(\mathbb{R})\to BMO(\mathbb{R})$.
注: 若$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$则$H\phi\in L^1(\mathbb{R})\Leftrightarrow\int_{\mathbb{R}}\phi=0$. ($\int_{\mathbb{R}}\phi=0\Rightarrow H(x\phi)=xH\phi$)
注: 若$f,Hf,g\in L^1(\mathbb{R})$, 则$Hf*g=H(f*g)$, ($H\tau_hf=\tau_hHf$)
Keypoint: (a)定义$\mathcal{T}=\text{span}\{\tau_h|h\in\mathbb{R}\}$, 则$X\circ H=H\circ X,\ \forall\ X\in\mathcal{T}$.
(b) $\forall\ g\in L^1(\mathbb{R}),\ \exists\ T_k\in\mathcal{T}$ s.t. 若$\varphi\in L^r(\mathbb{R}),\ r\in[1,\infty)$, 则
$\lim\limits_{k\to\infty}\|T_k\varphi-\varphi*g\|_p=0$. 例如$T_k=\frac{1}{k}\sum\limits_{i\in\mathbb{Z},|i|<k^2}(\int_0^1 g(\frac{i+x}{k})dx)\tau_{-i/k}$.
(c) 若$f\in L^1(\mathbb{R})$, 则$T_kf\to f*g$ in L^1, $T_kHf\to Hf*g$ in L^1, $T_kHf=HT_kg\to H(f*g)$ in $L^{1,\infty}$. 结合依测度极限的唯一性得$Hf*g=H(f*g)$.
注: 若$f,Hf\in L^1(\mathbb{R})$, 则$P_t*Hf=H(P_t*f)=Q_t*f$, $\widehat{Hf}(\xi)=-i\text{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$.
$|P_t*f(x)|^{1/2}\le CM(|f|^{1/2}+|Hf|^{1/2})(x)$, $P^*f\in L^1$.

3.5 乘子 设$m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定义$T_m:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$为$\widehat{T_mf}(\xi)=m(\xi)\widehat{f}(\xi)$. 由Plancherel公式得$T_m$良定义且$\|T_mf\|_2=\|m\widehat{f}\|_2\le\|m\|_\infty\|f\|_2$. T_m是$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子,
$\|T_m\|:=\|T_m\|_{L^2\to L^2}\le\|m\|_\infty$. 下证$\|m\|_\infty\le\|T_m\|$($\Rightarrow$等号成立:$\|T_m\|=\|m\|_\infty$). $\forall$ 球A,
取$\widehat{f}=\chi_A$得$\|T_mf\|_2^2=\|m\widehat{f}\|_2^2=\int_A|m|^2dx$, $\|f\|_2^2=\|\widehat{f}\|_2^2=|A|\Rightarrow$
$\int_A|m|^2dx\le\|T_m\|^2\|f\|_2^2=\|T_m\|^2\|\widehat{f}\|_2^2=\|T_m\|^2|A|$.
由Lebesgue微分定理得$|m|^2\le\|T_m\|^2$ a.e., $|m|\le\|T_m\|$ a.e., $\|m\|_\infty\le\|T_m\|$.
若T_m可以延拓为$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子则称m为L^p乘子(i.e.$m\in\mathcal{M}_p$).

$$m\in\mathcal{M}_p\Leftrightarrow\|T_mf\|_p\le C_p\|f\|_p,\ \ \forall\ f\in L^2\cap L^p,(\exists\ C_p>0)\Leftrightarrow$$
$$\|T_mf\|_p\le C_p\|f\|_p,\ \ \forall\ f\in\mathcal{S}\Leftrightarrow\left|\int T_mf\cdot\sigma g\right|\le C_p\|f\|_p\|g\|_{p'},\ \ \forall\ f,g\in\mathcal{S}$$
$$\Leftrightarrow\left|\int m\widehat{f}\widehat{g}\right|\le C_p,\quad\forall\ f,g\in\mathcal{S},\ \|f\|_p\le1,\ \|g\|_{p'}\le1.\tag{3.1}$$

其中用到($\sigma g(x)=g(-x)$; keypoint of (3.2): $\int\widehat{T_mf}\widehat{g}=\int T_mf\widehat{\widehat{g}}$, $\widehat{\widehat{g}}=\sigma g$)

$$\int m\widehat{f}\widehat{g}=\int T_mf\cdot\sigma g=\int T_mg\cdot\sigma f,\quad\forall\ f,g\in L^2.\tag{3.2}$$

由(3.1)(关于f,g对称) 得$\mathcal{M}_p=\mathcal{M}_{p'}$, 结合Riesz-Thorin插值定理得$\mathcal{M}_p\subseteq\mathcal{M}_q,\forall\ p\le q\le p'$.
若$1\le p<\infty$且$m\in\mathcal{M}_p$, 由$\mathcal{S}$在L^p中稠密得T_m的延拓唯一.
$p=\infty$**时的标准延拓:** 若$m\in\mathcal{M}_\infty$, 则$m\in\mathcal{M}_1$, T_m可以唯一延拓为$L^1(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子, 此时可以定义其对偶算子$T_m^*:L^\infty(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Claim: $\sigma T_mf=T_m^*\sigma f,\forall\ f\in L^1\cap L^\infty$ (只需证$[\int\sigma T_mf\cdot g=\int T_mg\cdot\sigma f,\ \forall\ f,g\in L^1\cap L^\infty]$, 由$[\int\sigma T_mf\cdot g=\int T_mf\cdot\sigma g]$和(3.2)得结论成立).
此时可以定义$T_mf=\sigma T_m^*\sigma f,\forall\ f\in L^\infty$. ($f\in L^1\cap L^\infty$时定义一致).
注: 若$1\le p\le2$则$m\in\mathcal{M}_p\Leftrightarrow[\overline{\mathcal{F}}(m\widehat{f})\in L^p,\ \forall\ f\in L^p]$. (闭图像定理)
若$m(\xi)=-i\text{sgn}(\xi)$则$T_mf=Hf$, $m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ($\forall\ 1<p<\infty$).

Lemma 3.2. $\forall\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b$, 定义$m_{a,b}(\xi)=\chi_{(a,b)}(\xi)$, $S_{a,b}=\frac{i}{2}(M_aHM_{-a}-M_bHM_{-b})$, $M_af(x)=e^{2\pi iax}f(x)$, 则$\widehat{S_{a,b}f}(\xi)=m_{a,b}(\xi)\widehat{f}(\xi)$.

Proof. $\widehat{M_a f}(\xi)=\widehat{f}(\xi-a)$,
$\mathcal{F}(M_aHM_{-a}f)(\xi)=\mathcal{F}(HM_{-a}f)(\xi-a)=-i\mathrm{sgn}(\xi-a)\widehat{M_{-a}f}(\xi-a)=-i\mathrm{sgn}(\xi-a)\widehat{f}(\xi)$,
$\widehat{S_{a,b}f}(\xi)=\frac{i}{2}(-i\mathrm{sgn}(\xi-a)+i\mathrm{sgn}(\xi-b))\widehat{f}(\xi)=\frac{1}{2}(\mathrm{sgn}(\xi-a)-\mathrm{sgn}(\xi-b))\widehat{f}(\xi)=m_{a,b}(\xi)\widehat{f}(\xi)$.
$(\forall\ \xi\in\mathbb{R}\setminus\{a,b\})$ □

由$\|M_af\|_p=\|f\|_p$得$\|S_{a,b}\|_{L^p\to L^p}\le\|H\|_{L^p\to L^p}$, $m_{a,b}\in\mathcal{M}_p$, $\forall\ 1<p<\infty$. 若允许$a=-\infty$或$b=+\infty$则有$S_{a,b}=\frac{1}{2}(S_a^*-S_b^*)\Rightarrow\widehat{S_{a,b}f}(\xi)=\chi_{(a,b)}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, 其中
$S_t^*=iM_tHM_{-t}$, $\forall\ t\in\mathbb{R}$, $S_{-\infty}^*=1$, $S_{+\infty}^*=-1$.

Proposition 3.3. *$\forall\ 1<p<\infty$, $\exists\ C_p>0$, s.t. $\forall\ -\infty\le a<b\le+\infty$有 $\|S_{a,b}f\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R})$.*

设$S_R=S_{-R,R}$, 则$S_Rf=D_R*f$, $\|S_Rf\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ 1<p<\infty$.

Corollary 3.1. *若$1<p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R})$, 则$\lim\limits_{R\to\infty}\|S_Rf-f\|_p=0$.*

注: 若$f\in L^1(\mathbb{R})$, 则$\lim\limits_{R\to\infty}\|S_Rf-f\|_{1,\infty}=0$, $S_Rf\xrightarrow{m}f$ (依测度收敛).
注: 若$1\le p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R})$, 则$\exists\ R_k\to\infty$ s.t. $S_{R_k}f\to f$ a.e.

Corollary 3.2. *若m是$\mathbb{R}$上的有界变差函数, 则$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.*
(m是$\mathbb{R}$上的有界变差函数$\Leftrightarrow V_{-\infty}^{\infty}(m):=\sup\limits_{a_0<\cdots<a_k}\sum\limits_{j=1}^{k}|m(a_j)-m(a_{j-1})|<\infty$)

Lemma 3.4. *若$h\in L^1(\mathbb{R})$, m 是$\mathbb{R}$上的有界变差函数, $\lim\limits_{t\to-\infty}m(t)=0$, 则 $|\int_{\mathbb{R}}m(\xi)h(\xi)d\xi|\le V_{-\infty}^{\infty}(m)\sup\limits_{a\in\mathbb{R}}|\int_a^\infty h(\xi)d\xi|$.*

Lemma 3.5. *若$1<p<\infty$, $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$, 则$|\int_a^\infty\widehat{f}\widehat{g}|\le C_p\|f\|_p\|g\|_{p'}$.*

Proof. $|\int_a^\infty\widehat{f}\widehat{g}|=|\int_{\mathbb{R}}S_{a,\infty}f\cdot\sigma g|\le\|S_{a,\infty}f\|_p\|\sigma g\|_{p'}\le C_p\|f\|_p\|g\|_{p'}$. □

Proof of Corollary 3.2. 此时$A:=\lim\limits_{t\to-\infty}m(t)$存在, 不妨设$A=0$, 否则考虑$m-A$.
由Lemma 3.4, Lemma 3.5得$|\int_{\mathbb{R}}m\widehat{f}\widehat{g}|\le V_{-\infty}^{\infty}(m)C_p\|f\|_p\|g\|_{p'}$, $\forall\ f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. i.e. m满足(3.1), 这说明$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. □

Proposition 3.6. *若$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 则$m(\xi+a)$, $m(\lambda\xi)$, $m(\rho\xi)\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ ($a\in\mathbb{R}^n$, $\lambda>0$, $\rho\in O(n)$), 且算子范数相等. (平移旋转不变性; 由(1.9)–(1.11))*

由(3.1)得若$m_k\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $m_k\to m$ in $\mathcal{S}'$, $\|T_{m_k}f\|_p\le C\|f\|_p$, $\forall\ f\in\mathcal{S}$, 则$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ (弱闭性). $[T_{m_1\cdot m_2}=T_{m_1}T_{m_2},\ T_{m_1+m_2}=T_{m_1}+T_{m_2}]\Rightarrow$
[若$m_1,m_2\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 则$m_1\cdot m_2, m_1+m_2\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$]. (加法乘法封闭性)
Claim: 若$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, 则$\widetilde{m}(\xi)=m(\xi_1)\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$.
Step 1 定义$\widetilde{T}_mf(x)=T_mf(\cdot,x_2,\cdots,x_n)(x_1)$. 若$\|T_mf\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R})$, 则 $\|\widetilde{T}_mf\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. ($p=2$时可取$C_p=\|m\|_\infty$.)
Step 2 只需再证$\widetilde{T}_mf=T_{\widetilde{m}}f$, $\forall\ f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. ((i)(ii)(iii)$\Rightarrow V=L^2(\mathbb{R}^n)$)
分成以下3步: (i) $V:=\{f\in L^2(\mathbb{R}^n):\widetilde{T}_mf=T_{\widetilde{m}}f\}$是$L^2(\mathbb{R}^n)$中的闭集.
(ii) $V_0=\{e^{-\pi|x|^2+2\pi ix\cdot\xi}|\xi\in\mathbb{R}^n\}\subseteq V$. (iii) $\overline{\mathrm{span}V_0}=L^2(\mathbb{R}^n)$.
Keypoint of **Step 1**: $\|\widetilde{T}_mf\|_p^p=\int_{\mathbb{R}^n}|\widetilde{T}_mf(x)|^pdx=$
$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(\int_{\mathbb{R}}|T_mf(\cdot,x_2,\cdots,x_n)(x_1)|^pdx_1)dx_2\cdots dx_n\le$
$C_p^p\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(\int_{\mathbb{R}}|f(x_1,\cdots,x_n)|^pdx_1)dx_2\cdots dx_n=C_p^p\|f\|_p^p$.

Keypoint of (i): $\widetilde{T}_m$, $T_{\widetilde{m}}$是$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子(**Step 1** 中取$p=2$). Keypoint of (iii): 若$f\in V_0^\perp=\overline{\text{span}V_0}^\perp$, 则$\int_{\mathbb{R}^n}f\overline{g}=0$, $\forall\ g\in V_0$, i.e. $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-\pi|x|^2-2\pi ix\cdot\xi}=0$, $\forall\ \xi\in\mathbb{R}^n$. 以上说明$\mathcal{F}(e^{-\pi|x|^2}f)=0$; $e^{-\pi|x|^2}f=0$, $f=0$, a.e.; $\overline{\text{span}V_0}^\perp=\{0\}$, $\overline{\text{span}V_0}=L^2(\mathbb{R}^n)$.
Keypoint of (ii): 若$f(x)=e^{-\pi|x|^2+2\pi ix\cdot a}$, $a\in\mathbb{R}^n$, 则$f(x)=f_1(x_1)f_2(x')$,
$\widehat{f}(\xi)=\widehat{f}_1(\xi_1)\widehat{f}_2(\xi')\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{T}_mf(x)=T_mf(\cdot,x')(x_1)=T_mf_1(x_1)f_2(x')$,
$\widehat{T_{\widetilde{m}}}f(\xi)=\widetilde{m}(\xi)\widehat{f}(\xi)=m(\xi_1)\widehat{f}_1(\xi_1)\widehat{f}_2(\xi')=\widehat{T_mf_1}(\xi_1)\widehat{f}_2(\xi')=\widehat{\widetilde{T}_mf}(\xi)$.
其中$f_1(x_1)=e^{-\pi|x_1|^2+2\pi ix_1a_1}$, $f_2(x')=e^{-\pi|x'|^2+2\pi ix'\cdot a'}$,
$x'=(x_2,\cdots,x_n)$, $\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $a'=(a_2,\cdots,a_n)$,
$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $a=(a_1,\cdots,a_n)$.

取$m=\chi_{(0,\infty)}$则$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\chi_{\mathbb{R}^n_+}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ 1<p<\infty$. 其中
$\mathbb{R}^n_+=\{\xi\in\mathbb{R}^n|\xi_1>0\}$. 若$P$是凸多面体则$\chi_P=\prod_{j=1}^k\chi_{\{\xi\cdot a_j-b_j>0\}}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$,
($\exists\ a_1,\cdots,a_k\in\mathbb{R}^n$, $b_1,\cdots,b_k\in\mathbb{R}$; 由平移旋转不变性和乘法封闭性.)

Corollary 3.3. *若$P\subset\mathbb{R}^n$是(开)凸多面体, $0\in P$, $1<p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|S_{\lambda P}f-f\|_p=0$. 其中$\lambda P=\{\lambda x|x\in P\}$, [$S_{\lambda P}=T_m$, $m=\chi_{\lambda P}$].*

3.6 $\mathbb{T}$上的Hilbert变换(共轭函数). 设$r\in[0,1)$, $P_r(t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi t)+r^2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}e^{2\pi ikt}$,
$Q_r(t)=\frac{2r\sin(2\pi t)}{1-2r\cos(2\pi t)+r^2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}-ir^{|k|}\text{sgn}(k)e^{2\pi ikt}$.
$\forall\ f\in L^2(\mathbb{T})$ 定义$\widetilde{S}[f](x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}-i\text{sgn}(k)\widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$. 则$\|\widetilde{S}[f]\|_2\le\|f\|_2$, $Q_r*f=P_r*\widetilde{S}[f]$.
这里用$\mathbb{T}$上的卷积: $f_1*f_2(x)=\int_{\mathbb{T}}f_1(x-y)f_2(y)dy$, 则
$\widehat{f_1*f_2}(k)=\widehat{f}_1(k)\widehat{f}_2(k)=\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}f_1(x-y)f_2(y)e^{-2\pi ikx}dxdy$.

Lemma 3.7. *$\|\widetilde{S}[f]\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p\cap L^2(\mathbb{T})$, $1<p<\infty$ ($\exists\ C_p>0$).*

Corollary 3.4. *$\|S_Nf\|_p\le(C_p+1)\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{T})$, $1<p<\infty$.*

Keypoint: 设$\widetilde{S}_\pm[f](x)=\widetilde{S}[f](x)\pm i\widehat{f}(0)$, 则$\|\widetilde{S}_\pm[f]\|_p\le(C_p+1)\|f\|_p$,
$\widetilde{S}_\pm[f](x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}-i\text{sgn}(k\mp1/2)\widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$.
$S_Nf(x)=\sum_{k=-N}^N\widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\text{sgn}(k+N+1/2)-\text{sgn}(k-N-1/2))\widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$,
$S_N=\frac{i}{2}(M_{-N}\widetilde{S}_-M_N-M_{-N}\widetilde{S}_+M_N)$, $M_kf(x)=e^{2\pi ikx}f(x)$, $\|M_kf\|_p=\|f\|_p$.
设$u(r,t)=P_r*f(t)$, $v(r,t)=Q_r*f(t)=P_r*\widetilde{S}[f](t)$, $F(re^{2\pi it})=(u+iv)(r,t)$, 则
$F(z)=\widehat{f}(0)+2\sum_{k=1}^\infty\widehat{f}(k)z^k$在$D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$解析.

Proof of Lemma 3.7 for $p=2k$, $k\in\mathbb{Z}_+$.
不妨设f是实值函数则u,v是$[0,1)\times\mathbb{T}$上的实值函数. F^{2k}在D解析,
$F(0)^{2k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{F(z)^{2k}}{z}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F^{2k}(re^{it})dt=\int_0^1(u+iv)^{2k}(r,t)dt$,
$\forall\ 0<r<1$. (i)若$F(0)=0$, 取实部得
$\int_0^1|v(r,t)|^{2k}dr\le\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j}\int_0^1|v(r,t)|^{2j}|u(r,t)|^{2k-2j}dr$;
$\|v(r)\|_{2k}^{2k}\le\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j}\|v(r)\|_{2k}^{2j}\|u(r)\|_{2k}^{2k-2j}$; $\|v(r)\|_{2k}\le C_k\|u(r)\|_{2k}$ ($\exists\ C_k>0$).
i.e. $\|P_r*\widetilde{S}[f]\|_{2k}\le C_k\|P_r*f\|_{2k}$, $\forall\ 0<r<1$. 而这说明
$\|P_r\|_1=1$, $\|P_r*f\|_{2k}\le\|f\|_{2k}\Rightarrow\|P_r*\widetilde{S}[f]\|_{2k}\le C_k\|f\|_{2k}$, $\forall\ 0<r<1$.
而$\widetilde{S}[f]\in L^2(\mathbb{T})$, $\lim\limits_{r\to1-}P_r*\widetilde{S}[f](t)=\widetilde{S}[f](t)$ a.e. $t\in\mathbb{T}$, 由Fatou引理得$\|\widetilde{S}[f]\|_{2k}\le C_k\|f\|_{2k}$.
(ii)若$F(0)=\widehat{f}(0)\neq0$, 考虑$f-\widehat{f}(0)$, 则
$\|\widetilde{S}[f]\|_{2k}=\|\widetilde{S}[f-\widehat{f}(0)]\|_{2k}\le C_k\|f-\widehat{f}(0)\|_{2k}\le2C_k\|f\|_{2k}$. □

Lemma 3.8. 若$1<p\le 2$, $u>0$, $v\in\mathbb{R}$, $a_p=(\sin\frac{\pi}{2p})^{p-1}/\cos\frac{\pi}{2p}$, $C_p=\tan\frac{\pi}{2p}$, 则 $a_pRe(u+iv)^p\le C_p^pu^p-|v|^p$.

Proof of Lemma 3.7 for $1<p\le 2$. 不妨设$f\ge 0$, 则$F(0)=\widehat{f}(0)=\int_{\mathbb{T}}f>0$ (否则$\|\widetilde{S}[f]\|_p=\|f\|_p=0$), $u(r,t)>0$, $\forall\ r\in[0,1)$, $\mathrm{Re}\,F>0$ in D, F^p在D解析.
$F(0)^p=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{F(z)^p}{z}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F^p(re^{it})dt=\int_0^1(u+iv)^p(r,t)dt$,
$\forall\ 0<r<1$. 结合Lemma 3.8, 取实部得
$0<a_pF(0)^p=a_p\mathrm{Re}\int_0^1(u+iv)^p(r,t)dt\le\int_0^1(C_p^pu(r,t)^p-|v(r,t)|^p)dt$,
$\int_0^1|v(r,t)|^pdt\le C_p^p\int_0^1u(r,t)^pdt$, $\|P_r*\widetilde{S}[f]\|_p\le C_p\|P_r*f\|_p$, $\forall\ 0<r<1$.
令$r\to 1-$(结合$\|P_r*f\|_p\le\|f\|_p$; Fatou引理)得$\|\widetilde{S}[f]\|_p\le C_p\|f\|_p$. □

注: $\int_{\mathbb{T}}(\widetilde{S}[f]g+\widetilde{S}[g]f)=0$, $\forall\ f,g\in L^2(\mathbb{T})$. 结合对偶方法得$p\ge 2$时Lemma 3.7成立.
注: 若$1<p\le 2$, 则$\varphi_p(u+iv)=\mathrm{Re}(|u|+iv)^p$是$\mathbb{C}$上的次调和函数,
$a_p\varphi_p(u+iv)\le C_p^p|u|^p-|v|^p$, $\varphi_p(u)\ge 0$, $\forall\ u,v\in\mathbb{R}$. 若$f$是实值函数, 则
$\varphi_p\circ F$是D上的次调和函数, $0\le\varphi_p(F(0))\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_p(F(re^{it}))dt$, 同理可得
$\int_0^1|v(r,t)|^pdt\le C_p^p\int_0^1|u(r,t)|^pdt$, $\|\widetilde{S}[f]\|_p\le C_p\|f\|_p$, $(r\in(0,1))$.
注: 对复值函数仍有$\|\widetilde{S}[f]\|_p\le C_p\|f\|_p$, $(C_p=\tan\frac{\pi}{2p},\ 1<p\le 2)$.
Key point: (i)$\widetilde{S}[\mathrm{Re}f]=\mathrm{Re}\widetilde{S}[f]$; (ii)设$\alpha_p=\int_0^{2\pi}|\cos\theta|^pd\theta$则$\alpha_p|z|^p=\int_0^{2\pi}|\mathrm{Re}(e^{i\theta}z)|^pd\theta$.
$\alpha_p\int_0^1|\widetilde{S}[f](t)|^pdt=\int_0^{2\pi}\int_0^1|\mathrm{Re}(e^{i\theta}\widetilde{S}[f])(t)|^pdtd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1|\widetilde{S}[\mathrm{Re}(e^{i\theta}f)](t)|^pdtd\theta$
$\le\int_0^{2\pi}C_p^p\int_0^1|\mathrm{Re}(e^{i\theta}f)(t)|^pdtd\theta=C_p^p\alpha_p\int_0^1|f(t)|^pdt$.
注: 考虑f是实值函数, $F(z)=(\frac{1+z}{1-z})^q$, 令$q\to\frac{1}{p}-$, 知$C_p=\tan\frac{\pi}{2p}$是最佳常数$(1<p\le 2)$. 结合对偶方法得$p\ge 2$时最佳常数是$C_p=C_{p'}=\cot\frac{\pi}{2p}$.

<u>与平移可交换的算子</u> $\tau_hf(x)=f(x+h)$, $\widehat{\tau_hf}(\xi)=e^{2\pi ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)$, τ_h是乘子.
由$T_{m_1}T_{m_2}=T_{m_1m_2}=T_{m_2}T_{m_1}$得$\forall$乘子$T_m$(包括Hilbert变换)都与平移可交换,
i.e. $\tau_h\circ T_m=T_m\circ\tau_h$ $(\forall\ h\in\mathbb{R}^n)$.
下设$p,q\in[1,\infty]$, T是$L^p(\mathbb{R}^n)$到$L^q(\mathbb{R}^n)$的有界线性算子, 且与平移可交换.
(i)若$1\le q<p<\infty$则$T=0$.
(ii)若$1\le q<p=\infty$则$Tf=0$, $\forall\ f\in L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(iii)T与卷积可交换: $T(f*g)=f*Tg$, $\forall\ f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(iv) $\int Tf\cdot\sigma g=\int Tg\cdot\sigma f$, $\forall\ f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $(\sigma g(x)=g(-x))$.
(v) $\|Tf\|_{p'}\le C\|f\|_{q'}$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
注: $L_0^\infty(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)|\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0\}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset C_0(\mathbb{R}^n)\subset L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Keypoint of (i): $\lim\limits_{|h|\to\infty}\|\tau_hf+f\|_p=2^{1/p}\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$
(同理$\lim\limits_{|h|\to\infty}\|\tau_hg+g\|_q=2^{1/q}\|g\|_q$, $\forall\ g\in L^q(\mathbb{R}^n)$).
$\|T\|_{p,q}:=\sup\{\|Tf\|_q:f\in L^p(\mathbb{R}^n),\ \|f\|_p\le 1\}<\infty$,
$\|\tau_hTf+Tf\|_q=\|T(\tau_hf+f)\|_q\le\|T\|_{p,q}\|\tau_hf+f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h\in\mathbb{R}^n$. 令$|h|\to\infty$得
$2^{1/q}\|Tf\|_q\le 2^{1/p}\|T\|_{p,q}\|f\|_p$, $\|Tf\|_q\le 2^{1/p-1/q}\|T\|_{p,q}\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$;
$\|T\|_{p,q}\le 2^{1/p-1/q}\|T\|_{p,q}$; 而$p<q$, $2^{1/p-1/q}<1$, 因此$\|T\|_{p,q}=0$, $T=0$.
Keypoint of (ii): (i)的证明中$L^p(\mathbb{R}^n)$换成$L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. (特别是$\|T\|_{p,q}$的定义中)

Keypoint of (iii): (a)定义$\mathcal{T}=\mathrm{span}\{\tau_h|h\in\mathbb{R}^n\}$, 则$X\circ T=T\circ X$, $\forall\ X\in\mathcal{T}$.
(b) $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\exists\ T_k\in\mathcal{T}$ s.t. 若$\varphi\in L^r(\mathbb{R}^n)$, $r\in[1,\infty]$, $\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h\varphi-\varphi\|_r=0$

($\Leftrightarrow r<\infty$或$r=\infty$, φ一致连续) 则$\lim\limits_{k\to\infty}\|T_k\varphi - f*\varphi\|_p = 0$. 例如$T_k = \frac{1}{k^n}\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}^n,|i|<k^2} f(\frac{i}{k})\tau_{-i/k}$.
(c) 若$g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则$\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h g - g\|_p = 0$, $\|\tau_h Tg - Tg\|_q = \|T(\tau_h g - g)\|_q \le C\|\tau_h g - g\|_p \to 0$ as $h\to 0$. 结合(b)得$T_k g\to f*g$ in L^p, $T_kTg\to f*Tg$ in L^q,
$T_kTg = TT_kg \to T(f*g)$ in L^q(由(a) 得$T_kTg = TT_kg$), $T(f*g) = f*Tg$(极限相等).
Keypoint of (iv): $Tf*g = T(f*g) = f*Tg\in C(\mathbb{R}^n)$; 考虑在0处取值.
Keypoint of (v):由(iv)得$|\int Tf\cdot\sigma g| = |\int Tg\cdot\sigma f| \le \|Tg\|_q\|f\|_{q'} \le C\|g\|_p\|f\|_{q'}$,
$\forall\ f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; $\|Tf\|_{p'} = \sup\{|\int Tf\cdot\sigma g| : g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|g\|_p\le 1\}\le C\|f\|_{q'}$.

下设$p=q$, i.e. T是$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子, 且与平移可交换. 此时
$Tf\in L^p\cap L^{p'}\subseteq L^2$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 下面证明

$$\widehat{Tf*h} = \widehat{Tf}\cdot\widehat{h} = \widehat{f}\cdot\widehat{Th},\quad \forall\ f,h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{3.3}$$

$$\left|\int \widehat{f}\widehat{g}\widehat{Th}\right| \le C\|f\|_p\|g\|_{p'}\|h\|_1,\quad \forall\ f,g,h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{3.4}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}e^{-2\pi|\xi-a|^2/t^2}\widehat{Th}(\xi)d\xi\right| \le C\|h\|_1,\ \forall\ h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ t>0,\ a\in\mathbb{R}^n, \tag{3.5}$$

$$\|\widehat{Th}\|_\infty \le C'\|h\|_1,\quad \forall\ h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{3.6}$$

$$\exists\ m\in L^\infty(\mathbb{R}^n),\quad s.t.\ \widehat{Tf} = m\widehat{f},\quad \forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.7}$$

Proof of (3.3). $Tf*h = T(f*h) = f*Th$, 两边作Fourier变换即得. □

Proof of (3.4). 由$|\int(Tf*h)\cdot\sigma g| \le \|Tf*h\|_p\|\sigma g\|_{p'} \le \|Tf\|_p\|h\|_1\|g\|_{p'} \le C\|f\|_p\|g\|_{p'}\|h\|_1$ 和$\int(Tf*h)\cdot\sigma g = \int\widehat{Tf*h}\widehat{g} = \int\widehat{f}\widehat{Th}\widehat{g}$得结论成立. □

Proof of (3.5). 取$f(x) = g(x) = e^{-\pi t^2|x|^2+2\pi ix\cdot a}$, 则$\|f\|_p = (pt^2)^{-\frac{n}{2p}} \le t^{-\frac{n}{p}}$,
$\|g\|_{p'} = (p't^2)^{-\frac{n}{2p'}} \le t^{-\frac{n}{p'}}$, $\|f\|_p\|g\|_{p'}\le t^{-n}$, $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi) = t^{-n}e^{-\pi|\xi-a|^2/t^2}$.
代入(3.4)得结论成立. □

Proof of (3.6). 在Corollary 2.1中取$\phi(x) = e^{-2\pi|x|^2}$, $f=\widehat{Th}$, $p=2$, 并结合(3.5)得结论成立.
($C' = 2^{n/2}C$) □

Proof of (3.7). 设$h_1(x) = e^{-\pi|x|^2}$则$h_1\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $Th_1\in L^2$, $\widehat{Th_1}\in L^2$, $\widehat{h_1} = h_1 > 0$. 设
$m = \widehat{Th_1}/\widehat{h_1}$则$m\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. 取$h=h_1$代入(3.3)得$\widehat{Tf} = m\widehat{f}$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 下证
$m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\forall\ t>0$ 取$h(x) = t^{-n}e^{-\pi|x|^2/t^2}$则$\|h\|_1 = 1$, $\widehat{h}(\xi) = e^{-\pi t^2|\xi|^2}$,
$\widehat{Th}(\xi) = m(\xi)\widehat{h}(\xi) = e^{-\pi t^2|\xi|^2}m(\xi)$. 代入(3.6)得$e^{-\pi t^2|\xi|^2}|m(\xi)|\le C'$, a.e. ξ, $\forall\ t>0$.
令$t\to 0+$得$|m(\xi)|\le C'$, a.e. ξ. i.e. $m\in L^\infty$, $\|m\|_\infty\le C'$. □

4. 奇异积分算子I

4.1 若$\Omega\in L^1(S^{n-1})$, $\int_{S^{n-1}}\Omega d\sigma=0$则$\text{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}(\phi)=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\{|x|>\epsilon\}}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\phi(x)dx$
$=\int_{\{|x|<1\}}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}(\phi(x)-\phi(0))dx+\int_{\{|x|>1\}}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\phi(x)dx$, 其中$x'=\frac{x}{|x|}$, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
下面说明$\int_{S^{n-1}}\Omega d\sigma=0$的必要性: 考虑算子$Tf(x)=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\{|y|>\epsilon\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy$, 其中$\Omega\in L^1(S^{n-1})$, $y'=\frac{y}{|y|}$, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.1. *若$\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 极限对a.e. x存在, 则$\int_{S^{n-1}}\Omega d\sigma=0$.*

Proof. 取$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s.t. $f(x)=1$, $\forall\ |x|<2$. 则$\forall\ |x|<1$有
$Tf(x)=\int_{\{|y|>1\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy+\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\{\epsilon<|y|<1\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}dy$. 而$\int_{\{\epsilon<|y|<1\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}dy=I\ln\frac{1}{\epsilon}$,
其中$I=\int_{S^{n-1}}\Omega d\sigma$. 因此若极限存在, 则$\lim_{\epsilon\to 0+}I\ln\frac{1}{\epsilon}$存在, 这说明$I=0$. □

举例 1. 若$n=1$则$S^{n-1}=\{\pm 1\}$, $\Omega(y')=ay'$, $Tf(x)=\pi aHf(x)$.
2. 若$n=2$, $u(x_1,x_2,x_3)=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(y_1,y_2)dy_1dy_2}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2]^{1/2}}$, 则$\Delta u=0$ in $\mathbb{R}^3_+$, $\frac{\partial u}{\partial x_3}|_{x_3=0}=-2\pi f$.
$\lim_{x_3\to 0+}\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(y_1,y_2)(x_1-y_1)dy_1dy_2}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{3/2}}$, i.e. $\Omega(x')=-\frac{x_1}{|x|}=-\cos\theta$.
3. 若$n=2$, $u(x_1,x_2)=\int_{\mathbb{R}^2}f(y_1,y_2)\ln[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]$, 则$\Delta u=4\pi f$,
$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1\partial x_2}=\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^2}f(x-y)\frac{\Omega(y')}{|y|^2}dy$, $\Omega(x')=-\frac{4x_1x_2}{|x|^2}$.

4.2 定义: f是a次齐次函数$\Leftrightarrow\ \forall\ x\in\mathbb{R}^n,\ \lambda>0,\ f(\lambda x)=\lambda^a f(x)$.
若f是a次齐次函数, $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\phi_\lambda(x)=\lambda^{-n}\phi(\lambda^{-1}x)$, $\lambda>0$, 则
$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\phi_\lambda(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(\lambda x)\phi(x)dx=\lambda^a\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\phi(x)dx$.
这个方法可以定义a次齐次广义函数(i.e. $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).

Definition 4.2. *若$T\in\mathcal{S}'$, T: a次齐次$\Leftrightarrow T(\phi_\lambda)=\lambda^a T(\phi),\ \forall\ \phi\in\mathcal{S},\ \lambda>0$.*

则$\text{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$: $-n$次齐次($\Omega\in L^1(S^{n-1})$, $\int_{S^{n-1}}\Omega d\sigma=0$).

Proposition 4.3. *若$T\in\mathcal{S}'$, T: a次齐次, 则$\widehat{T}$: $-n-a$次齐次.*

Proof. $\forall\ \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda>0$有(用到(1.11))
$\langle\widehat{T},\phi_\lambda\rangle=\langle T,\widehat{\phi_\lambda}\rangle=\langle T,\widehat{\phi}(\lambda\cdot)\rangle=\lambda^{-n}\langle T,\widehat{\phi}_{\lambda^{-1}}\rangle=\lambda^{-n-a}\langle T,\widehat{\phi}\rangle=\lambda^{-n-a}\langle\widehat{T},\phi\rangle$. □

若$0<a<n$, 则$|x|^{-a}\in L^1+L^\infty\subset\mathcal{S}'$. 下面求Fourier变换$\mathcal{F}(|x|^{-a})$.
<u>Claim:</u> $\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)e^{-\pi t|x|^2}dx=t^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-\pi|x|^2/t}dx,\ \forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ t>0$.
<u>Keypoint:</u> (i) $\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}g=\int_{\mathbb{R}^n}f\widehat{g},\ \forall\ f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(ii) 若$g(x)=e^{-\pi t|x|^2}$, 则$\widehat{g}(\xi)=t^{-\frac{n}{2}}e^{-\pi|\xi|^2/t},\ \forall\ t>0$.
结合$|x|^{-a}=\frac{\pi^{a/2}}{\Gamma(a/2)}\int_0^\infty t^{\frac{a}{2}-1}e^{-\pi t|x|^2}dt$得$\forall\phi\in\mathcal{S}$有
$\langle\mathcal{F}(|x|^{-a}),\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-a}\widehat{\phi}(x)dx=\frac{\pi^{a/2}}{\Gamma(a/2)}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}t^{\frac{a}{2}-1}e^{-\pi t|x|^2}\widehat{\phi}(x)dxdt=$
$\frac{\pi^{a/2}}{\Gamma(a/2)}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}t^{\frac{a}{2}-1-\frac{n}{2}}e^{-\pi|x|^2/t}\phi(x)dxdt\overset{s=1/t}{=}$
$\frac{\pi^{a/2}}{\Gamma(a/2)}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty s^{\frac{n-a}{2}-1}e^{-\pi s|x|^2}\phi(x)dsdx=\frac{\pi^{\frac{a}{2}}}{\Gamma(\frac{a}{2})}\frac{\Gamma(\frac{n-a}{2})}{\pi^{\frac{n-a}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{a-n}\phi(x)dx$.
以上说明$\mathcal{F}(|x|^{-a})=\frac{\pi^{a-n/2}\Gamma(\frac{n-a}{2})}{\Gamma(a/2)}|x|^{a-n}$.
注: 可以用于定义分数次积分算子. 可以推广到$a\in\mathbb{C}$, $0<\text{Re}\,a<n$. 可以解析延拓到$a\in\mathbb{C}$.

Theorem 4.4. 若$\Omega \in L^1(S^{n-1})$, $\int_{S^{n-1}} \Omega d\sigma = 0$,
$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u)[\ln \frac{1}{|u\cdot\xi'|} - i\frac{\pi}{2} sgn(u\cdot\xi')]d\sigma(u)$ $(\xi' = \xi/|\xi|)$, 则$\mathcal{F}(p.v.\frac{\Omega(x')}{|x|^n}) = m$. *i.e.*

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\{|x|>\epsilon\}} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\widehat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)\phi(\xi)d\xi, \quad \forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{4.1}$$

Proof. 设$m_\epsilon(\xi) = \int_{\{\epsilon<|y|<1/\epsilon\}} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi}dy$, 则$\int_{\{\epsilon<|x|<1/\epsilon\}} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\widehat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} m_\epsilon(\xi)\phi(\xi)d\xi$, $\forall\ \epsilon \in (0,1)$. 则$m_\epsilon(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u)\int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-2\pi i r u\cdot\xi}\frac{dr}{r}d\sigma(u) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u)F_\epsilon(u\cdot\xi)d\sigma(u) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u)F_\epsilon^*(u\cdot\xi)d\sigma(u)$ (用到$\int_{S^{n-1}} \Omega d\sigma = 0$). 其中
$F_\epsilon(a) := \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-2\pi i a r}\frac{dr}{r}$, $F_\epsilon^*(a) := F_\epsilon(a) + \ln\epsilon$. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\{|x|>\epsilon\}} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\widehat{\phi}(x)dx &= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\{\epsilon<|x|<1/\epsilon\}} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\widehat{\phi}(x)dx \\ = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} m_\epsilon(\xi)\phi(\xi)d\xi &= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} \Omega(u)F_\epsilon^*(u\cdot\xi)\phi(\xi)d\sigma(u)d\xi.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Lemma 4.5. $\exists\ C>0,\ C_0 \in \mathbb{R}$, *s.t.* *(i)* $\sup\limits_{0<\epsilon<1} |F_\epsilon^*(a)| \le C(|\ln|a|| + 1)$,
(ii) $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} F_\epsilon^*(a) = \ln\frac{1}{|a|} - i\frac{\pi}{2}sgn(a) + C_0$, $\forall\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Proof. $F_\epsilon^*(a) = F_\epsilon^1(a) - iF_\epsilon^2(a)$, 其中$F_\epsilon^1(a) = \int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{\cos(2\pi a r)}{r}dr + \ln\epsilon$,
$F_\epsilon^2(a) = \int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{\sin(2\pi a r)}{r}dr \overset{s=2\pi|a|r}{=} \text{sgn}(a)\int_{2\pi|a|\epsilon}^{2\pi|a|/\epsilon} \frac{\sin s}{s}ds$.

$$|F_\epsilon^2(a)| \le 2\sup_{b>0}\left|\int_0^b \frac{\sin s}{s}ds\right| \le C < +\infty, \tag{4.3}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} F_\epsilon^2(a) = \text{sgn}(a)\int_0^\infty \frac{\sin s}{s}ds = \frac{\pi}{2}\text{sgn}(a). \tag{4.4}$$

$F_\epsilon^1(a) \overset{s=2\pi|a|r}{=} \int_{2\pi|a|\epsilon}^{2\pi|a|/\epsilon} \frac{\cos s}{s}ds + \ln\epsilon$. 设$0<\epsilon<1$.
Case 1: $2\pi|a| \le \epsilon$ or $2\pi|a|\epsilon \ge 1$, (i.e. $\epsilon \ge \min\{2\pi|a|, \frac{1}{2\pi|a|}\}$). 此时$0<\epsilon<1$,
$|\ln\epsilon| \le |\ln(2\pi|a|)| \le C + |\ln|a||$,

$$|F_\epsilon^1(a)| \le \int_{2\pi|a|\epsilon}^{2\pi|a|/\epsilon} \frac{1}{s}ds + |\ln\epsilon| = 3|\ln\epsilon| \le C(1+|\ln|a||)\ (\text{in } \textbf{Case 1}). \tag{4.5}$$

Case 2: $2\pi|a|\epsilon \le 1 \le 2\pi|a|/\epsilon$, (i.e. $\epsilon \le \min\{2\pi|a|, \frac{1}{2\pi|a|}\}$). 此时

$$\begin{aligned}F_\epsilon^1(a) &= \int_{2\pi|a|\epsilon}^1 \frac{\cos s - 1}{s}ds - \ln(2\pi|a|\epsilon) + \int_1^{2\pi|a|/\epsilon} \frac{\cos s}{s}ds + \ln\epsilon \\ &= F_\epsilon^{1,1}(a) + F_\epsilon^{1,2}(a) - \ln(2\pi|a|).\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中$F_\epsilon^{1,1}(a) = \int_{2\pi|a|\epsilon}^1 \frac{\cos s - 1}{s}ds$, $F_\epsilon^{1,2}(a) = \int_1^{2\pi|a|/\epsilon} \frac{\cos s}{s}ds$.

$$|F_\epsilon^{1,1}(a)| \le \int_0^1 \frac{1-\cos s}{s}ds \le 1, \quad \underline{|F_\epsilon^{1,2}(a)| \le 3\ (*)}, \tag{4.7}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} F_\epsilon^{1,1}(a) = \int_0^1 \frac{\cos s - 1}{s}ds := A_1,\ \lim_{\epsilon\to 0+} F_\epsilon^{1,2}(a) = \int_1^\infty \frac{\cos s}{s}ds := A_2. \tag{4.8}$$

其中(*)用到$\int_1^A \frac{\cos s}{s} ds = \frac{\sin s}{s}|_1^A + \int_1^A \frac{\sin s}{s^2} ds$, $\forall\ A \geq 1$. 由(4.6), (4.7), (4.8)得

$$|F_\epsilon^1(a)| \leq 4 + |\ln(2\pi|a|)| \leq C(1 + |\ln|a||) \text{ (in } \textbf{Case 2}\text{)}, \tag{4.9}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} F_\epsilon^1(a) = A_1 + A_2 - \ln(2\pi|a|) = C_0 - \ln|a|. \tag{4.10}$$

其中$C_0 = A_1 + A_2 - \ln(2\pi)$. 由(4.3), (4.5), (4.9)得(i); 由(4.4), (4.10)得(ii). □

由Lemma 4.5 (i)得(C是只与n, ϕ有关的常数, $|\phi(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}} \leq C$)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} \sup_{0<\epsilon<1} |\Omega(u)F_\epsilon^*(u\cdot\xi)\phi(\xi)| d\sigma(u) d\xi \\ \leq& C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} |\Omega(u)|(|\ln|u\cdot\xi|| + 1)|\phi(\xi)| d\sigma(u) d\xi \\ \leq& C\int_{S^{n-1}}|\Omega(u)|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\ln|u\cdot\xi||+1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} d\xi d\sigma(u) = CC_1\int_{S^{n-1}}|\Omega(u)| d\sigma(u) < \infty. \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中$C_1 := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\ln|u\cdot\xi||+1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} d\xi \overset{(a)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\ln|\xi_1||+1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} d\xi \overset{(b)}{=} C_2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\ln|\xi_1||+1}{1+|\xi_1|^2} d\xi_1 < \infty$.
注: (a)由旋转对称性, 这一步说明C_1与u无关; (b)由换元法, $C_2 := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(1+|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dz < \infty$.

由Lemma 4.5 (ii)得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} \lim_{\epsilon\to 0+} \Omega(u)F_\epsilon^*(u\cdot\xi)\phi(\xi) d\sigma(u) d\xi \\ =& \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} \Omega(u)[\ln\frac{1}{|u\cdot\xi|} - i\frac{\pi}{2}\text{sgn}(u\cdot\xi) + C_0]\phi(\xi) d\sigma(u) d\xi \\ =& \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)\phi(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中用到

$$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \underbrace{[\ln\frac{1}{|u\cdot\xi|} - i\frac{\pi}{2}\text{sgn}(u\cdot\xi) + C_0]}_{I_1 = I_1(u,\xi)} d\sigma(u), \quad (\xi \neq 0). \tag{4.13}$$

Proof of (4.13). 由定义$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \underbrace{[\ln\frac{1}{|u\cdot\xi'|} - i\frac{\pi}{2}\text{sgn}(u\cdot\xi')]}_{I_2 = I_2(u,\xi)} d\sigma(u)$, 因此结论等价于$\int_{S^{n-1}} \Omega(u)[I_1(u,\xi) - I_2(u,\xi)] d\sigma(u) = 0$. 由$\xi' = \xi/|\xi|$得$\text{sgn}(u\cdot\xi) = \text{sgn}(u\cdot\xi')$, $|u\cdot\xi| = |u\cdot\xi'||\xi|$, $I_1 - I_2 = C_0 - \ln|\xi|$ (与u无关). 结合$\int_{S^{n-1}} \Omega d\sigma = 0$得结论成立. □

由(4.2), (4.11), (4.12), 控制收敛定理(和Fubini定理)得(4.1)成立. □

注: $\forall\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, 取$\phi(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i a\cdot\xi}$, 则$\widehat{\phi}(x) = f(a-x)$, 代入(4.1)得
$Tf(a) = \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i a\cdot\xi} d\xi$, i.e. $\widehat{Tf} = m\widehat{f}$.
注: 设$\Omega_e(u) = (\Omega(u) + \Omega(-u))/2$, $\Omega_o(u) = (\Omega(u) - \Omega(-u))/2$则$\Omega = \Omega_e + \Omega_o$,
$\mathcal{F}(\text{p.v.}\frac{\Omega_e(x')}{|x|^n})(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u)\ln\frac{1}{|u\cdot\xi'|} d\sigma(u) = \int_{S^{n-1}} \Omega_e(u)\ln\frac{1}{|u\cdot\xi'|} d\sigma(u)$,
$\mathcal{F}(\text{p.v.}\frac{\Omega_o(x')}{|x|^n})(\xi) = -i\frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(u)\text{sgn}(u\cdot\xi') d\sigma(u) = -i\frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega_o(u)\text{sgn}(u\cdot\xi') d\sigma(u)$.

Corollary 4.1. 若$\int_{S^{n-1}} \Omega(u) sgn(u\cdot\xi') d\sigma(u) = 0$, $\forall\ \xi' \in S^{n-1}$, 则$\Omega_o = 0$.

Corollary 4.2. 若$\int_{S^{n-1}}\Omega=0$, $\Omega_o\in L^1(S^{n-1})$, $\Omega_e\in L^q(S^{n-1})$, $q>1$, 则 $\mathcal{F}(p.v.\frac{\Omega_o(x')}{|x|^n})\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Keypoint: (i) $|\mathrm{sgn}(u\cdot\xi')|=1$; (ii) $\int_{S^{n-1}}|\ln|u\cdot\xi||^{q'}d\sigma(u)=C_q<\infty$.
注: $\Omega_e\in L^q$改为$\int_{S^{n-1}}|\Omega_e|\ln^+|\Omega_e|<\infty$结论仍成立. ($\ln^+t=\max(0,\ln t)$).
Keypoint: (i) $AB\le A\ln A+e^B$, $\forall\ A\ge1,\ B\ge0$ ($\Leftrightarrow\ln\frac{e^B}{A}\le\frac{e^B}{A}$).
(ii) 设$D=\{u\in S^{n-1}:|\Omega_e(u)|\ge1\}$, 则$|\int_D\Omega_e(u)\ln\frac{1}{|u\cdot\xi'|}d\sigma(u)|\le$
$\int_D(2|\Omega_e(u)|\ln(2|\Omega_e(u)|)+|u\cdot\xi'|^{-\frac12})d\sigma(u)\le C$. ($A=2|\Omega_e(u)|$, $B=\frac12\ln\frac{1}{|u\cdot\xi'|}$)
(iii) $|\int_{S^{n-1}\setminus D}\Omega_e(u)\ln\frac{1}{|u\cdot\xi'|}d\sigma(u)|\le\int_{S^{n-1}}\ln\frac{1}{|u\cdot\xi'|}d\sigma(u)\le C$.
由Corollary 4.2, (4.1)得若$\int_{S^{n-1}}\Omega=0$, $\Omega_o\in L^1(S^{n-1})$, $\Omega_e\in L^q(S^{n-1})$, $q>1$, 则 $T:L^2\to L^2$有界. 下证$T:L^p\to L^p$有界($1<p<\infty$)(Theorem 4.7).
4.3: Ω是奇函数, i.e. $\Omega=\Omega_o$, $\Omega(-u)=-\Omega(u)$. 重要例子: Riesz变换R_j.
4.4: Ω是偶函数, i.e. $\Omega=\Omega_e$, $\Omega(-u)=\Omega(u)$. Keypoint: $R_jT:L^p\to L^p$有界.

4.3 设$T:L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})$是有界(次线性)算子, $u\in S^{n-1}$, $L_u=\{\lambda u|\lambda\in\mathbb{R}\}$, $L_u^\perp=\{v\in\mathbb{R}^n|u\cdot v=0\}$. 则$\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, $\exists|\ x_1\in\mathbb{R}$, $\overline{x}\in L_u^\perp$, s.t. $x=x_1u+\overline{x}$.
定义 $T_uf(x)=Tf(\cdot u+\overline{x})(x_1)$. 若$\|Tf\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R})$. 则
$\int_{\mathbb{R}^n}|T_uf(x)|^pdx=\int_{L_u^\perp}\int_{\mathbb{R}}|Tf(\cdot u+\overline{x})(x_1)|^pdx_1d\mathcal{H}^{n-1}(\overline{x})\le$
$\int_{L_u^\perp}C_p^p\int_{\mathbb{R}}|f(\cdot u+\overline{x})(x_1)|^pdx_1d\mathcal{H}^{n-1}(\overline{x})=C_p^p\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^pdx$, i.e.
$\|T_uf\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 结合Minkowski不等式得

Proposition 4.6. 若$\|Tf\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R})$; $\Omega\in L^1(S^{n-1})$. 定义 $T_\Omega f(x)=\int_{S^{n-1}}\Omega(u)T_uf(x)\sigma(u)$. 则$\|T_\Omega f\|_p\le C_p\|\Omega\|_1\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$.

注: $\|\Omega\|_1=\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}=\int_{S^{n-1}}|\Omega|=\int_{S^{n-1}}|\Omega(u)|d\sigma(u)$. **举例:**
$M_uf(x)=\sup\limits_{h>0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^h|f(x-tu)|dt$, $H_uf(x)=\frac1\pi\lim\limits_{\epsilon\to0+}\int_{\{|t|>\epsilon\}}f(x-tu)\frac{dt}{t}$.
注: M_u, H_u可对$u\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$定义, 则$M_{\lambda u}=M_u$, $H_{\lambda u}=H_u$, $\forall\ \lambda>0$.
注: 若$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\widetilde{m}(\xi)=m(\xi_1)$, $u=e_1$, 则$T_{\widetilde{m}}=(T_m)_u$. 若$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $u\in S^{n-1}$, $\widetilde{m}(\xi)=m(\xi\cdot u)$, 则$T_{\widetilde{m}}=(T_m)_u$.
$\forall\ \Omega\in L^1$, 定义$M''_\Omega f(x)=\sup\limits_{R>0}\frac{1}{|B(0,R)|}\int_{B(0,R)}|\Omega(y')||f(x-y)|dy$,
$M'_\Omega f(x)=\sup\limits_{R>0}\frac{1}{|B(0,R)|}\int_{B(0,R)}\frac{|\Omega(y')|}{|y/R|^{n-1}}|f(x-y)|dy=\sup\limits_{R>0}\frac{1}{|B(0,1)|R}\int_{B(0,R)}\frac{|\Omega(y')|}{|y|^{n-1}}|f(x-y)|dy$.
$\forall\ R>0$有$\frac1R\int_{B(0,R)}\frac{|\Omega(y')|}{|y|^{n-1}}|f(x-y)|dy=\frac1R\int_{S^{n-1}}|\Omega(u)|\int_0^R\frac{|f(x-ru)|}{r^{n-1}}r^{n-1}drd\sigma(u)$
$=\frac1R\int_{S^{n-1}}|\Omega(u)|\int_0^R|f(x-ru)|drd\sigma(u)\overset{\Omega=\Omega_e}{=}\int_{S^{n-1}}\frac{|\Omega(u)|}{2R}\int_{-R}^R|f(x-ru)|drd\sigma(u)$
$\le\int_{S^{n-1}}|\Omega(u)|M_uf(x)d\sigma(u)$. 以上说明若$\Omega$是偶函数, 则
$0\le M''_\Omega f(x)\le M'_\Omega f(x)\le\frac{1}{|B(0,1)|}M_{|\Omega|}f(x)$. (一般情形$0\le M''_\Omega f\le M'_\Omega f\le\frac{2}{|B(0,1)|}M_{|\Omega|}f$)

Corollary 4.3. 若$\Omega\in L^1(S^{n-1})$, 则M''_Ω, M'_Ω, M_Ω在$L^p(\mathbb{R}^n)$有界($\forall\ p>1$).

取$\Omega=1$则$M''_\Omega f(x)=Mf(x)$, $|S^{n-1}|=\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}$,
$\|Mf\|_p=\|M''_\Omega f\|_p\le\frac{1}{|B(0,1)|}\|M_{|\Omega|}f\|_p\le\frac{C_p|S^{n-1}|}{|B(0,1)|}\|f\|_p=C_pn\|f\|_p$, $\forall\ p>1$.
若$\Omega\in L^1(S^{n-1})$是奇函数, 则$\int_{S^{n-1}}\Omega=0$. $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$有$Tf(x)=\frac\pi2\int_{S^{n-1}}\Omega(u)H_uf(x)d\sigma(u)$.
$Tf(x)=\lim\limits_{\epsilon\to0+}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\int_\epsilon^\infty f(x-ru)\frac{dr}{r}d\sigma(u)=\lim\limits_{\epsilon\to0+}\frac12\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\int_{\{|r|>\epsilon\}}f(x-ru)\frac{dr}{r}d\sigma(u)$
$=\frac12\lim\limits_{\epsilon\to0+}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)[\int_{\{\epsilon<|r|<1\}}\frac{f(x-ru)-f(x)}{r}dr+\int_{\{|r|>1\}}f(x-ru)\frac{dr}{r}]d\sigma(u)=$

$\frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)H_uf(x)d\sigma(u)$. 其中用到$\int_{\{\epsilon<|r|<1\}}\frac{dr}{r}=0$和控制收敛定理.
结合$\|Hf\|_p\le C_p\|f\|_p,\ \forall\ f\in L^p(\mathbb{R}),\ 1<p<\infty$得

Corollary 4.4. 若$\Omega\in L^1(S^{n-1})$是奇函数, $1<p<\infty$, 则$\exists\ C_p>0$ *s.t.* $\|Tf\|_p\le C_p\|\Omega\|_1\|f\|_p,\ \forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

注: T与平移可交换, T可以唯一延拓为$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子s.t.
若$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f_k\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f_k\to f$ in L^p, 则$Tf_k\to Tf$ in L^p. $(\forall\ 1<p<\infty)$.
T与卷积可交换, $Tf*g=f*Tg,\ \forall\ f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 可以推广到$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $p,q\in(1,\infty)$, $1/p+1/q\ge1$.
注: 由$\|Hf\|_p\le\frac{C}{p-1}\|f\|_p,\ \forall\ f\in L^p(\mathbb{R}),\ 1<p\le2$得$\|H_uf\|_p\le\frac{C}{p-1}\|f\|_p$, $\|Tf\|_p\le\frac{C\|\Omega\|_1}{p-1}\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1<p\le2$.
设极大奇异积分算子$T^*f(x)=\sup\limits_{\epsilon>0}|\int_{\{|y|>\epsilon\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy|$, 则
$0\le T^*f(x)\le\frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}}|\Omega(u)|H_u^*f(x)d\sigma(u)$, 其中$H_u^*f(x)=\sup\limits_{\epsilon>0}|\frac{1}{\pi}\int_{\{|t|>\epsilon\}}f(x-tu)\frac{dt}{t}|$. 结合
$\|H^*f\|_p\le C_p^*\|f\|_p$ $(f\in L^p(\mathbb{R}),\ 1<p<\infty)$, Proposition 4.6, Theorem 2.2得

Corollary 4.5. 若$\Omega\in L^1(S^{n-1})$是奇函数, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, 则 $\|T^*f\|_p\le C_p\|\Omega\|_1\|f\|_p$, $Tf(x)=\lim\limits_{\epsilon\to0+}\int_{\{|y|>\epsilon\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy$, *a.e. x*.

Riesz变换 $R_jf(x)=c_n\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)dy$, $1\le j\le n$, $c_n=\Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{n+1}{2}}$. 则
$\widehat{R_jf}(\xi)=-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi),\ \forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\sum_{j=1}^nR_j^2=-I$.
<u>Keypoint:</u> $\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{1-n}=(1-n)\text{p.v.}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, ($n>1$; in $\mathcal{S}'$). $\mathcal{F}(\text{p.v.}\frac{x_j}{|x|^{n+1}})(\xi)=$
$\frac{1}{1-n}\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{1-n})(\xi)=\frac{2\pi i\xi_j}{1-n}\mathcal{F}(|x|^{1-n})(\xi)=\frac{2\pi i\xi_j}{1-n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac12)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})|\xi|}=-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$.
R_j可以唯一延拓为$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子, $\|R_jf\|_p\le C_p\|f\|_p$,
$R_jf(x)=c_n\lim\limits_{\epsilon\to0+}\int_{\{|y|>\epsilon\}}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)dy$, a.e. x, $(\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1<p<\infty)$.
$\|R_jf\|_p\le\frac{C}{p-1}\|f\|_p$, $(\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1<p\le2)$. $f*g=-\sum_{j=1}^nR_jf*R_jg,\ \forall\ f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
可推广到$f\in L^p(\mathbb{R}^n),g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $p,q\in(1,\infty)$, $p\le q'$.

4.4 设$\Omega\in L^q(S^{n-1})$是偶函数, $q>1$, $\int_{S^{n-1}}\Omega d\sigma=0$, $K_1(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\chi_{\{1<|x|<2\}}$, $x'=\frac{x}{|x|}$, $K_t(x)=t^{-n}K_1(\frac{x}{t})=\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\chi_{\{t<|x|<2t\}}$, $t>0$. 则$K_t\in L^q(\mathbb{R}^n)$是偶函数, $\int_{\mathbb{R}^n}K_t(y)dy=0$. 下面证明

$$Tf(x)=\frac{1}{\ln2}\int_0^\infty K_t*f(x)\frac{dt}{t},\quad\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\tag{4.14}$$

$$R_jK_t(x)=t^{-n}R_jK_1(x/t),\ R_jK_1(-x)=-R_jK_1(x),\ R_jK_1\in L^1(\mathbb{R}^n),\tag{4.15}$$

$$|T_1^*f(x)|\le\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|R_jK_1(y)|H_y^*R_jf(x)dy,\quad\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n).\tag{4.16}$$

其中$T_1^*f(x)=\sup\limits_{\epsilon>0}\left|\int_\epsilon^\infty K_t*f(x)\frac{dt}{t}\right|$, $H_y^*f(x)=\sup\limits_{\epsilon>0}|\frac{1}{\pi}\int_{\{|t|>\epsilon\}}f(x-ty)\frac{dt}{t}|$. 则$H_y^*f=H_{y'}^*f$, $y'=y/|y|$. 由(4.14)得$|Tf(x)|\le\frac{1}{\ln2}T_1^*f(x),\ \forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proof of (4.14). (i) 由$K_t(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\chi_{\{t<|x|<2t\}}$得$\int_0^\infty K_t(x)\frac{dt}{t}=(\ln2)\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$.
(ii) 由$\int_{S^{n-1}}\Omega d\sigma=0$得$\int_{\{|y|<1\}}K_t(y)dy=0$,

$K_t*f(x)=\int_{\{|y|<1\}}K_t(y)(f(x-y)-f(x))dy+\int_{\{|y|>1\}}K_t(y)f(x-y)dy.$
(iii) $Tf(x)=\int_{\{|y|<1\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}(f(x-y)-f(x))dy+\int_{\{|y|>1\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy.$
由(i)(ii)(iii)(和Fubini定理)得(4.14)成立. □

Proof of (4.15). (i) $\forall\, t>0$, 有$t^nK_t(ty)=K_1(y)$, 且对a.e. x有
$R_jK_t(tx)=c_n\lim\limits_{\delta\to0+}\int_{\{|tx-y|>\delta\}}\frac{tx_j-y_j}{|tx-y|^{n+1}}K_t(y)dy=c_n\lim\limits_{\delta\to0+}\int_{\{|x-y|>\delta/t\}}\frac{tx_j-ty_j}{|tx-ty|^{n+1}}t^nK_t(ty)dy$
$=c_n\lim\limits_{\delta\to0+}\int_{\{|x-y|>\delta\}}\frac{x_j-y_j}{t^n|x-y|^{n+1}}K_1(y)dy=t^{-n}R_jK_1(x)$. 这说明$R_jK_t(x)=t^{-n}R_jK_1(x/t)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$. (ii) 同理由K_1是偶函数得R_jK_1是奇函数.
(iii) 由$K_1\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $R_j:L^q\to L^q$有界得$R_jK_1\in L^q(\mathbb{R}^n)\subset L^1(B(0,3))$.
(iv) 由$\text{supp}K_1\subseteq\overline{B(0,2)}$, $\int_{\mathbb{R}^n}K_1(y)dy=0$得若$|x|\geq3$则
$R_jK_1(x)=c_n\int_{B(0,2)}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}K_1(y)dy=c_n\int_{B(0,2)}(\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}-\frac{x_j}{|x|^{n+1}})K_1(y)dy$; 结合
$[|\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}-\frac{x_j}{|x|^{n+1}}|\leq\frac{C}{|x|^{n+1}},\ \forall\,|x|\geq3,\ |y|\leq2]$得$|R_jK_1(x)|\leq\frac{Cc_n}{|x|^{n+1}}\|K_1\|_1,\forall\,|x|\geq3.$
这说明$R_jK_1\in L^1(\mathbb{R}^n\setminus B(0,3))$. 结合(iii)得$R_jK_1\in L^1(\mathbb{R}^n)$. □

注: 更一般的, 若$\varphi\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1<q<\infty$, $\text{supp}\,\varphi\subseteq\overline{B(0,2)}$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi=0$, 则
$\|R_j\varphi\|_1\leq C_n(\|R_j\varphi\|_q+\|\varphi\|_1)$.

Proof of (4.16). 设$\epsilon>0$. (i) $K_t*f=-\sum_{j=1}^nR_jK_t*R_jf$.
(ii) 由$R_jK_t(x)=t^{-n}R_jK_1(x/t)$得$R_jK_t*R_jf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}R_jK_t(y)R_jf(x-y)dy=$
$\int_{\mathbb{R}^n}t^{-n}R_jK_1(y/t)R_jf(x-y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}R_jK_1(y)R_jf(x-ty)dy$. 结合$R_jK_1(-x)=-R_jK_1(x)$得
$\int_\epsilon^\infty R_jK_t*R_jf(x)\frac{dt}{t}=\int_\epsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n}R_jK_1(y)R_jf(x-ty)dy\frac{dt}{t}=$
$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}R_jK_1(y)\int_{\{|t|>\epsilon\}}R_jf(x-ty)\frac{dt}{t}dy$. 而$|\int_{\{|t|>\epsilon\}}R_jf(x-ty)\frac{dt}{t}|\leq\pi H_y^*R_jf(x)$, 这说明
$|\int_\epsilon^\infty R_jK_t*R_jf(x)\frac{dt}{t}|\leq\frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|R_jK_1(y)|H_y^*R_jf(x)dy$.
(iii) 由(i)(ii)得$|\int_\epsilon^\infty K_t*f(x)\frac{dt}{t}|\leq\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|R_jK_1(y)|H_y^*R_jf(x)dy$. □

设$1<p<\infty$. 由$\|H^*f\|_p\leq C_p^*\|f\|_p,\forall\,f\in L^p(\mathbb{R})$得
$\|H_y^*f\|_p\leq C_p^*\|f\|_p,\forall\,f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 结合(4.16), Minkowski不等式和
$\|R_jf\|_p\leq C_p\|f\|_p$得$\|T_1^*f\|_p\leq\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|R_jK_1(y)|\|H_y^*R_jf\|_pdy\leq$
$\frac{\pi}{2}C_p^*\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|R_jK_1(y)|\|R_jf\|_pdy\leq\frac{\pi}{2}C_p^*C_pC(K_1)\|f\|_p,\forall\,f\in L^p(\mathbb{R}^n)$.
其中$C(K_1)=\sum_{j=1}^n\|R_jK_1\|_1<\infty$(由(4.15)). 结合$|Tf(x)|\leq\frac{1}{\ln2}T_1^*f(x),\forall\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$得
$\|Tf\|_p\leq\frac{1}{\ln2}\|T_1^*f\|_p\leq\frac{\pi}{2\ln2}C_p^*C_pC(K_1)\|f\|_p,\forall\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
注: 更一般的, 若$p,q\in(1,\infty)$, $\varphi\in L^1\cap L^q(\mathbb{R}^n)$是偶函数, $R_j\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $(\forall\,1\leq j\leq n)$,
定义$T_{(\varphi)}^*f(x)=\sup\limits_{\epsilon>0}\left|\int_\epsilon^\infty\varphi_t*f(x)\frac{dt}{t}\right|$, $\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(x/t)$, 则对$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$有
$|T_{(\varphi)}^*f(x)|\leq\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|R_j\varphi(y)|H_y^*R_jf(x)dy$,
$\|T_{(\varphi)}^*f\|_p\leq\frac{\pi}{2}C_p^*C_pC(\varphi)\|f\|_p$, 其中$C(\varphi)=\sum_{j=1}^n\|R_j\varphi\|_1<\infty$.

Theorem 4.7. *若$\int_{S^{n-1}}\Omega=0$, $\Omega_o\in L^1(S^{n-1})$, $\Omega_e\in L^q(S^{n-1})$, $q>1$, 则$T:L^p\to L^p$有界$(1<p<\infty)$.*

极大奇异积分算子 $T^*f(x)=\sup\limits_{\epsilon>0}|\int_{\{|y|>\epsilon\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy|$. 首先证明

$$|T^*f(x)-\frac{1}{\ln2}T_1^*f(x)|\leq2M_{|\Omega|}f(x). \tag{4.17}$$

Proof of (4.17). 设$\epsilon>0$. 由$K_t(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\chi_{\{t<|x|<2t\}}$得

$$\int_\epsilon^\infty K_t(x)\frac{dt}{t}=\begin{cases}0, & |x|\le\epsilon,\\ \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\ln\frac{|x|}{\epsilon}, & \epsilon\le|x|\le2\epsilon,\\ \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\ln 2, & |x|\ge2\epsilon.\end{cases}$$ 这说明

$$\underbrace{\int_{\{|y|>\epsilon\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy}_{T_\epsilon f(x)}-\frac{1}{\ln 2}\underbrace{\int_\epsilon^\infty K_t*f(x)\frac{dt}{t}}_{T_{1,\epsilon}f(x)}=\int_{\{\epsilon<|y|<2\epsilon\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}(1-\frac{\ln(|y|/\epsilon)}{\ln 2})f(x-y)dy,$$

$|T_\epsilon f(x)-\frac{1}{\ln 2}T_{1,\epsilon}f(x)|\le\int_{\{\epsilon<|y|<2\epsilon\}}\frac{|\Omega(y')|}{|y|^n}|f(x-y)|dy\le\frac{1}{\epsilon}\int_{B(0,2\epsilon)}\frac{|\Omega(y')|}{|y|^{n-1}}|f(x-y)|dy\le$
$2|B(0,1)|M'_\Omega f(x)\le 2M_{|\Omega|}f(x)$. 其中用到
$M'_\Omega f(x)=\sup\limits_{R>0}\frac{1}{|B(0,1)|R}\int_{B(0,R)}\frac{|\Omega(y')|}{|y|^{n-1}}|f(x-y)|dy$, $M'_\Omega f(x)\le\frac{1}{|B(0,1)|}M_{|\Omega|}f(x)$. 结合
$T^*f(x)=\sup\limits_{\epsilon>0}|T_\epsilon f(x)|$, $T_1^*f(x)=\sup\limits_{\epsilon>0}|T_{1,\epsilon}f(x)|$得(4.17)成立. □

由(4.17)得$\|T^*f\|_p\le\frac{1}{\ln 2}\|T_1^*f\|_p+2\|M_{|\Omega|}f\|_p\le\frac{\pi}{2\ln 2}C_p^*C_pC(K_1)\|f\|_p+C_p\|\Omega\|_1\|f\|_p=C(p,n,\Omega)\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$.
结合Theorem 2.2得$Tf(x)=\lim\limits_{\epsilon\to0+}T_\epsilon f(x)$, a.e. x, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$.

推广：$|\Omega|\ln^+|\Omega|\in L^1(S^{n-1})$ (Ω是偶函数, $\int_{S^{n-1}}\Omega d\sigma=0$). 此时
$|K_1|\ln^+|K_1|\in L^1(\mathbb{R}^n)$. $K_1=\sum_{m=1}^\infty K_{1,m}$, $K_{1,1}=K_1\chi_{\{|K_1|\le2\}}$, $K_{1,m}=K_1\chi_{\{2^{m-1}<|K_1|\le2^m\}}$ $(m>1)$. 则$\sum_{m=1}^\infty m\|K_{1,m}\|_1<\infty$, $\|K_{1,m}\|_\infty\le2^m$, $\|K_{1,m}\|_p\le\|K_{1,m}\|_1^{1/p}2^{m(1-1/p)}=(\|K_{1,m}\|_1^{1/p}2^{-m(1-1/p)})2^{2m(1-1/p)}\le(\|K_{1,m}\|_1+2^{-m})2^{2m(1-1/p)}$.
设$\widetilde{K}_{1,m}=K_{1,m}-c_{1,m}\chi_{B(0,1)}$, $c_{1,m}=\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{\mathbb{R}^n}K_{1,m}$, 则$\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{K}_{1,m}=0$,
$K_1=\sum_{m=1}^\infty\widetilde{K}_{1,m}$ (由$\int_{\mathbb{R}^n}K_1=0$).
$\|R_j\widetilde{K}_{1,m}\|_1\le C_n(\|R_j\widetilde{K}_{1,m}\|_p+\|\widetilde{K}_{1,m}\|_1)\le\frac{C_n}{p-1}\|\widetilde{K}_{1,m}\|_p+C_n\|\widetilde{K}_{1,m}\|_1\le$
$\frac{C_n}{p-1}\|K_{1,m}\|_p\le\frac{C_n}{p-1}(\|K_{1,m}\|_1+2^{-m})2^{2m(1-1/p)}\overset{p=1+1/m}{\le}C_nm(\|K_{1,m}\|_1+2^{-m})$.
这说明$C'(\Omega):=\sum_{m=1}^\infty C(\widetilde{K}_{1,m})=\sum_{m=1}^\infty\sum_{j=1}^n\|R_j\widetilde{K}_{1,m}\|_1<\infty$.
由K_1是偶函数得$K_{1,m}$, $\widetilde{K}_{1,m}$是偶函数, $R_j\widetilde{K}_{1,m}$是奇函数.
$T_1^*f(x)=T^*_{(K_1)}f(x)\le\sum_{m=1}^\infty T^*_{(\widetilde{K}_{1,m})}f(x)$, 若$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$,
则$\|T^*_{(\widetilde{K}_{1,m})}f\|_p\le\frac{\pi}{2}C_p^*C_pC(\widetilde{K}_{1,m})\|f\|_p$,
$\|T_1^*f\|_p\le\sum_{m=1}^\infty\|T^*_{(\widetilde{K}_{1,m})}f\|_p\le\frac{\pi}{2}C_p^*C_p\sum_{m=1}^\infty C(\widetilde{K}_{1,m})\|f\|_p=\frac{\pi}{2}C_p^*C_pC'(\Omega)\|f\|_p$.
结合(4.17)得$\|T^*f\|_p\le\frac{1}{\ln 2}\|T_1^*f\|_p+2\|M_{|\Omega|}f\|_p\le C(p,n,\Omega)\|f\|_p$.

4.5 $P(\xi)=\sum_a b_a\xi^a$, $P(D)f=\sum_a b_aD^af$, $\mathcal{F}(P(D)f)(\xi)=P(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi)$.
定义$\Lambda=\sqrt{-\Delta}$: $\widehat{\Lambda f}(\xi)=2\pi|\xi|\widehat{f}(\xi)$. 若$P(\lambda\xi)=\lambda^mP(\xi)$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$则
$P(D)f=T(\Lambda^mf)$, $\widehat{Tf}(\xi)=i^m\frac{P(\xi)}{|\xi|^m}\widehat{f}(\xi)$.

Theorem 4.8. *若$m\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$是0次齐次函数, $\widehat{T_mf}=m\widehat{f}$, 则$\exists\ \Omega\in C^\infty(S^{n-1})$, $\int_{S^{n-1}}\Omega=0$, $a\in\mathbb{C}$, s.t. $T_mf=af+p.v.\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

$\exists\ a\in\mathbb{C}$ s.t. $\int_{S^{n-1}}(m(\xi')-a)d\sigma(\xi')=0$. 不妨设$\int_{S^{n-1}}m(u)d\sigma(u)=0$ (否则考虑$m-a$).
(结合$\mathcal{F}^2=\sigma$)只需证

Lemma 4.9. 若$m \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$是0次齐次函数, $\int_{S^{n-1}} m(u)d\sigma(u)=0$. 则 $\exists\ \Omega\in C^\infty(S^{n-1})$, $\int_{S^{n-1}}\Omega=0$, *s.t.* $\widehat{m}(x)=p.v.\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$.

Proof. 取$\phi_0\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ s.t. $\operatorname{supp}\phi_0\subseteq[1,2]$, $\int_0^\infty\frac{\phi_0(r)}{r}dr=1$. 取$\phi_1(\xi)=\phi_0(|\xi|)$, $m_t(\xi)=m(\xi)\phi_1(t\xi)$ $(t>0)$, 则$\int_0^\infty m_t(\xi)\frac{dt}{t}=m(\xi)$. 由$m$是0次齐次函数得$m_t(\xi)=m_1(t\xi)$. 由$m\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$得$m_t\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{m_t}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{m_t}(x)=t^{-n}\widehat{m_1}(x/t)$, $\widehat{m_t}(\lambda x)=\lambda^{-n}\widehat{m_{t/\lambda}}(x)$ $(t,\lambda>0)$. 若$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$则

$$\int_{\mathbb{R}^n} m\widehat{\phi}=\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty m_t(\xi)\widehat{\phi}(\xi)\frac{dt}{t}d\xi=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{m_t}(x)\phi(x)dx\frac{dt}{t}. \tag{4.18}$$

设$\Omega_*(x)=\int_0^\infty\widehat{m_t}(x)\frac{dt}{t}$. (i) Ω_*是$-n$次齐次函数: (ii) $\Omega_*\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.
(iii)$\exists\ \Omega\in C^\infty(S^{n-1})$ s.t. $\Omega_*(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$. ((i)(ii)⇒(iii), $\Omega=\Omega_*|_{S^{n-1}}$.)
(iv)若$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\phi(0)=0$, 则$\int_{\mathbb{R}^n}m\widehat{\phi}=\int_{\mathbb{R}^n}\Omega_*\phi$. (v) $\int_{S^{n-1}}\Omega=0$.
(vi)取径向函数$\phi_2\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, s.t. (b):$\phi_2(0)=1$, 则(c):$\int_{\mathbb{R}^n}m\widehat{\phi_2}=0$, (d): p.v. $\int_{\mathbb{R}^n}\Omega_*\phi_2=0$.
(vii)$\widehat{m}(x)=\text{p.v.}\Omega_*(x)=\text{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$.

Proof of (i). 由$\widehat{m_t}(\lambda x)=\lambda^{-n}\widehat{m_{t/\lambda}}(x)$得$\Omega_*(\lambda x)=\lambda^{-n}\Omega_*(x)$. □

Proof of (ii). 由$\widehat{m_1}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$得$|\widehat{m_1}(x)|\le\frac{C}{1+|x|^{n+1}}$, 结合$\widehat{m_t}(x)=t^{-n}\widehat{m_1}(x/t)$ 得 $|\widehat{m_t}(x)|\le\frac{Ct}{t^{n+1}+|x|^{n+1}}$,

$$\int_0^\infty|\widehat{m_t}(x)|\frac{dt}{t}\le C\int_0^\infty\frac{dt}{t^{n+1}+|x|^{n+1}}\le\frac{C}{|x|^n}. \tag{4.19}$$

$\forall\ \alpha\in\mathbb{N}^n$有$D_x^\alpha\widehat{m_t}(x)=t^{-n-|\alpha|}(D_x^\alpha\widehat{m_1})(x/t)$, $D_x^\alpha\widehat{m_1}(x)\le\frac{C}{(1+|x|)^{n+|\alpha|+1}}$, $D_x^\alpha\widehat{m_t}(x)\le\frac{Ct}{(t+|x|)^{n+|\alpha|+1}}$, $\int_0^\infty|D_x^\alpha\widehat{m_t}(x)|\frac{dt}{t}\le C\int_0^\infty\frac{dt}{(t+|x|)^{n+|\alpha|+1}}\le\frac{C}{|x|^{n+|\alpha|}}$. ($C$是只与$m_1$, α有关的常数) 这说明(ii)成立. □

Proof of (iv). 此时$\frac{\phi}{|x|^n}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 结合(4.18), (4.19)得(iv)成立. □

Proof of (v). (iv)中取$\phi=\phi_1$得$\int_{\mathbb{R}^n}m\widehat{\phi_1}=\int_{\mathbb{R}^n}\Omega_*\phi_1$. 由$\phi_1(\xi)=\phi_0(|\xi|)$是径向函数得$\widehat{\phi_1}$是径向函数, 结合(a):$m$是0次齐次函数, $\int_{S^{n-1}}m(u)d\sigma(u)=0$得$\int_{\mathbb{R}^n}m\widehat{\phi_1}=0$, $\int_{\mathbb{R}^n}\Omega_*\phi_1=0$. 另一方面$0=\int_{\mathbb{R}^n}\Omega_*\phi_1=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\phi_0(|x|)dx=\int_0^\infty\int_{S^{n-1}}\Omega(u)d\sigma(u)\frac{\phi_0(r)}{r^n}r^{n-1}dr=\int_0^\infty\frac{\phi_0(r)}{r}dr\cdot\int_{S^{n-1}}\Omega=\int_{S^{n-1}}\Omega$. □

Proof of (vi). 此时$\widehat{\phi_2}$是径向函数, 结合(a)得(c), 结合(iii)(v)得(d). □

Proof of (vii). 若$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 设$\phi_3=\phi-\phi(0)\phi_2$, 则$\phi_3\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\phi_3(0)=0$ (由(b)), $\int_{\mathbb{R}^n}m\widehat{\phi}\overset{(c)}{=}\int_{\mathbb{R}^n}m\widehat{\phi_3}\overset{(iv)}{=}\int_{\mathbb{R}^n}\Omega_*\phi_3\overset{(d)}{=}\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\Omega_*\phi$. 这说明(vii)成立. □

(iii)(v)(vii)⇒结论成立. □

Theorem 4.10. $\mathcal{A}=\{T_m|m\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$是0次齐次函数$\}$是交换代数, T_m是$\mathcal{A}$的可逆元$\Leftrightarrow m\neq0$ *on* S^{n-1}.

若$\widehat{Tf}(\xi)=i^m\frac{P(\xi)}{|\xi|^m}\widehat{f}(\xi)$则$T$可逆$\Leftrightarrow P(\xi)\neq 0$ on S^{n-1}
(此时若P是实值函数则m是偶数, $\Lambda^m=(-\Delta)^{m/2}$).
此时$P(D)f=T(\Lambda^m f)$, $\Lambda^m f=T^{-1}P(D)f$, $\|\Lambda^m f\|_p\leq C_p\|P(D)f\|_p$ $(1<p<\infty)$.

4.6 变系数推广 $P(x,D)=\sum_{|a|=m}b_a(x)D^a$. 若$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$则
$D^af(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(2\pi i\xi)^a\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$, $P(x,D)f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}P(x,2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$,
$T(\Lambda^m f)=P(x,D)f$, $Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\sigma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$.
$\sigma(x,\xi)=P(x,2\pi i\xi)/|2\pi\xi|^m=P(x,i\xi)/|\xi|^m$. 由$\sigma(x,\cdot)\in C^\infty(S^{n-1})$,
$\sigma(x,\lambda\xi)=\sigma(x,\xi)$, $\forall\ \lambda>0$, Theorem 4.8得$\exists\ A(x)$, $\Omega(x,\cdot)\in C^\infty(S^{n-1})$ s.t.
$\overline{\mathcal{F}}\sigma(x,\cdot)=A(x)\delta+\text{p.v.}\frac{\Omega(x,z')}{|z|^n}$, $Tf(x)=A(x)f(x)+\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x,z')}{|z|^n}f(x-z)dz$.
注: 若$\overline{\mathcal{F}}[(i\xi)^a/|\xi|^m]=c_a\delta+\text{p.v.}\frac{\Omega_a(z')}{|z|^n}$则$A(x)=\sum_{|a|=m}c_ab_a(x)$,
$\Omega(x,z')=\sum_{|a|=m}b_a(x)\Omega_a(z')$. (以上为引入这类算子的背景)
下面考虑一般的算子$Tf(x)=\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x,z)}{|z|^n}f(x-z)dz$. ($\Omega(x,z)=\Omega(x,z')$)

Theorem 4.11. *若(i)$\Omega(x,\lambda z)=sgn(\lambda)\Omega(x,z)$, $\forall\ z\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; (ii)$\Omega^*(u)=\sup_x|\Omega(x,u)|\in L^1(S^{n-1})$. 则$T:L^p\to L^p$有界, $\forall\ 1<p<\infty$.*

Proof. $Tf(x)=\frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}}\Omega(x,u)H_uf(x)d\sigma(u)$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
$|Tf(x)|\leq\frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}}\Omega_*(u)|H_uf(x)|d\sigma(u)$. 结合$[\|Hf\|_p\leq C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty]$, Proposition 4.6得$\|Tf\|\leq\frac{\pi}{2}C_p\|\Omega_*\|_1\|f\|_p$. □

Theorem 4.12. *若Therrem 4.11的条件(ii)换成$\sup_x(\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,u)|^qd\sigma(u))^{\frac{1}{q}}=B_q<\infty$, $1<q<\infty$. 则$T:L^p\to L^p$有界, $\forall\ q'\leq p<\infty$.*

Proof. 由$q'\leq p$得$p'\leq q$. 由Hölder不等式得$\sup_x(\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,u)|^{p'}d\sigma(u))^{\frac{1}{p'}}\leq B_{p'}$
$\leq|S^{n-1}|^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}}B_q<\infty$; $|Tf(x)|\leq\frac{\pi}{2}B_{p'}(\int_{S^{n-1}}|H_uf(x)|^pd\sigma(u))^{\frac{1}{p}}$.
$\|Tf\|_p^p\leq(\frac{\pi}{2}B_{p'})^p\int_{S^{n-1}}\|H_uf\|_p^pd\sigma(u)\leq(\frac{\pi}{2}B_{p'})^p\int_{S^{n-1}}C_p^p\|f\|_p^pd\sigma(u)$.
$\|Tf\|_p\leq\frac{\pi}{2}B_{p'}C_p|S^{n-1}|^{\frac{1}{p}}\|f\|_p\leq\frac{\pi}{2}|S^{n-1}|^{1-\frac{1}{q}}B_qC_p\|f\|_p$. □

注: 若$\Omega(x,z)$是z的偶函数则Theorem 4.12仍成立. i.e.若
(i)$\Omega(x,\lambda z)=\Omega(x,z)$, $\forall\ z\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\int_{S^{n-1}}\Omega(x,u)d\sigma(u)=0$;
(ii)$1<q<\infty$, $\sup_x(\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,u)|^qd\sigma(u))^{\frac{1}{q}}=B_q<\infty$. 则$T:L^p\to L^p$有界, $\forall\ q'\leq p<\infty$.
不妨设$q=p'$. 设$K_1(x,z)=\frac{\Omega(x,z)}{|z|^n}\chi_{\{1<|z|<2\}}$, $K_t(x,z)=\frac{\Omega(x,z)}{|z|^n}\chi_{\{t<|z|<2t\}}=t^{-n}K_1(x,\frac{z}{t})$, $t>0$. 则$K_t(x,\cdot)\in L^q(\mathbb{R}^n)$是$z$的偶函数, $\int_{\mathbb{R}^n}K_t(x,z)dz=0$. 设$K_t^j(x,\cdot)=R_jK_t(x,\cdot)$. 与(4.14), (4.15), (4.16)同理可得

(4.20) $$Tf(x)=\frac{1}{\ln 2}\int_0^\infty\left[\int_{\mathbb{R}^n}K_t(x,z)f(x-z)dz\right]\frac{dt}{t},\quad\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

(4.21) $$K_t^j(x,z)=t^{-n}K_1^j(x,z/t),\ K_1^j(x,-z)=-K_1^j(x,z),$$

(4.22) $$(\ln 2)|Tf(x)|\leq\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|K_1^j(x,z)|H_z^*R_jf(x)dy,\quad\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

其中(4.22)用到$\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x,z)f(x-z)dz = -\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} K_t^j(x,z)R_j f(x-z)dz$.
由(4.22)和Hölder不等式得$(q=p')$

$$|Tf(x)|^p \le C\sum_{j=1}^n \left[\int_{\mathbb{R}^n} |K_1^j(x,z)|^q (1+|z|)^{(n+1)(q-1)}dz\right]^{\frac{p}{q}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|H_z^* R_j f(x)|^p}{(1+|z|)^{n+1}}dz\right].$$

下面用到(C是只与n,q有关的常数)

$$\sup_{x,j}\int_{\mathbb{R}^n} |K_1^j(x,z)|^q(1+|z|)^{(n+1)(q-1)}dz \le CB_q^q.$$

Key point: (i)$\int_{\mathbb{R}^n} |K_1^j(x,z)|^q dz \le C\int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x,z)|^q dz$; (ii)$\int_{\mathbb{R}^n} K_1(x,z)dz = 0$, $\text{supp}K_1 \subseteq \{|z|\le 2\}$, $|K_1^j(x,z)| \le C(1+|z|)^{-(n+1)}\int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x,z)|dz$, $\forall\ |z|\ge 3$; (iii)$\int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x,z)|^q dz \le CB_q^q$, $\int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x,z)|dz \le CB_q$.

这说明$|Tf(x)|^p \le CB_q^p \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|H_z^* R_j f(x)|^p}{(1+|z|)^{n+1}}dz$. 结合 $\|H_z^* R_j f\|_p \le C_p^* \|R_j f\|_p \le C(p,n)\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $z\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$得
$\|Tf\|_p^p \le CB_q^p \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|H_z^* R_j f\|_p^p}{(1+|z|)^{n+1}}dz \le CB_q^p\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|f\|_p^p dz}{(1+|z|)^{n+1}} \le CB_q^p \|f\|_p^p$.
i.e. $\|Tf\|_p \le CB_q\|f\|_p$. (C是只与n,q有关的常数, $q=p'\in(1,\infty)$.)

注: Theorem 4.11的偶函数推广: 若(i)$\Omega(x,\lambda z) = \Omega(x,z)$, $\forall\ z\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\int_{S^{n-1}}\Omega(x,u)d\sigma(u) = 0$; (ii)$\Omega^*(z) = \sup_{x,j}|K_1^j(x,z)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
则$T: L^p \to L^p$有界, $\forall\ 1<p<\infty$.

5. 奇异积分算子II

Theorem 5.1 (Benedek-Calderon-Panzone原理)**.** *设T是次线性算子.*
(i)T是弱(p,p)型, $1<p<\infty$: $\|Tf\|_{p,\infty}\le C_1\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$.
(ii)存在常数$C_2>1$, $C_3>0$ s.t. 若supp$f\subset B(x_0,r)$, $\int f=0$, 则
$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,C_2r)}|Tf(x)|dx\le C_3\|f\|_1$. 则$\|Tf\|_{1,\infty}\le C_4\|f\|_1$, $\forall\ f\in L^p_c(\mathbb{R}^n)$.

注: $C_4\le C(C_1C_2^{n-n/p}+C_3)$, C是只与n有关的常数.

Proof. $\forall\ \lambda>0$, 对$|f|$作Calderon-Zygmund分解, $\exists$ 不交方体$\{Q_k\}$ s.t.
$\sum_k|Q_k|\le\frac{1}{\lambda}\|f\|_1$, $\lambda<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f|\le 2^n\lambda$, $|f|\le\lambda$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega$, $\Omega:=\cup_kQ_k$.
$f=g+b$, 其中$g=\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}f:=a_k$ in Q_k, $g=f$ in $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$, $b=\sum_jb_j$, $b_j=(f-a_j)\chi_{Q_j}$.
则supp $b_j\subseteq\overline{Q_j}$, $\int b_j=0$, $\|g\|_\infty\le 2^n\lambda$, $\|g\|_1\le\|f\|_1$. $\|g\|_p^p\le\|g\|_\infty^{p-1}\|g\|_1\le(2^n\lambda)^{p-1}\|f\|_1$.
$\sum_j\|b_j\|_1=\|b\|_1$. $|Tb|\le\sum_j|Tb_j|$ a.e.
$|Tf|\le|Tg|+|Tb|$, $\forall\ A>0$有$a_{Tf}(2A\lambda)\le a_{Tg}(A\lambda)+a_{Tb}(A\lambda)$.
$a_{Tg}(A\lambda)\le\frac{1}{(A\lambda)^p}\|Tg\|_{p,\infty}^p\le\frac{C_1^p}{(A\lambda)^p}\|g\|_p^p\le\frac{C_1^p(2^n\lambda)^{p-1}}{(A\lambda)^p}\|f\|_1=\frac{(2^nC_1/A)^p}{2^n\lambda}\|f\|_1$.
设$Q_j=Q(x_j,r_j)$, $Q_j^*=B(x_j,C_2\sqrt{n}r_j)$, $Q^*=\cup_jQ_j^*$则
$|Q^*|\le\sum_j|Q_j^*|=A_nC_2^n\sum_j|Q_j|\le\frac{A_nC_2^n}{\lambda}\|f\|_1$. 其中$A_n=(\sqrt{n}/2)^n\alpha(n)$, $\alpha(n)=|B(0,1)|$.
$a_{Tb}(A\lambda)\le|Q^*|+\frac{1}{A\lambda}\|Tb\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus Q^*)}\le\frac{A_nC_2^n}{\lambda}\|f\|_1+\frac{1}{A\lambda}\sum_j\|Tb_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*)}$.
由supp $b_j\subseteq\overline{Q_j}=Q(x_j,r_j)\subset B(x_j,\sqrt{n}r_j)$, $\int b_j=0$, $Q_j^*=B(x_j,C_2\sqrt{n}r_j)$和条件(ii)
(取$x_0=x_j$, $r=\sqrt{n}r_j$, $f=b_j$)得$\|Tb_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*)}\le C_3\|b_j\|_1$,
$\sum_j\|Tb_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*)}\le C_3\sum_j\|b_j\|_1=C_3\|b\|_1\le C_3(\|f\|_1+\|g\|_1)\le 2C_3\|f\|_1$.
$a_{Tb}(A\lambda)\le\frac{A_nC_2^n}{\lambda}\|f\|_1+\frac{1}{A\lambda}\sum_j\|Tb_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*)}\le\frac{A_nC_2^n}{\lambda}\|f\|_1+\frac{2C_3}{A\lambda}\|f\|_1$.
$a_{Tf}(2A\lambda)\le a_{Tg}(A\lambda)+a_{Tb}(A\lambda)\le\frac{(2^nC_1/A)^p}{2^n\lambda}\|f\|_1+\frac{A_nC_2^n}{\lambda}\|f\|_1+\frac{2C_3}{A\lambda}\|f\|_1$.
由$\lambda>0$的任意性得$\|Tf\|_{1,\infty}\le\{(2A)[(2^nC_1/A)^p2^{-n}+A_nC_2^n]+4C_3\}\|f\|_1$.
取$A=2^nC_1A_n^{-1/p}(2C_2)^{-n/p}$, 则$C_4:=(2A)[(2^nC_1/A)^p2^{-n}+A_nC_2^n]+4C_3=$
$4AA_nC_2^n+4C_3=4C_1A_n^{1-1/p}(2C_2)^{n-n/p}+4C_3$, s.t. $\|Tf\|_{1,\infty}\le C_4\|f\|_1$. □

Theorem 5.2 (Calderon-Zygmund)**.** *设$K\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $K\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. 满足(i)$\|\widehat{K}\|_\infty\le A$.*
(ii)Hörmander条件:$\int_{\{|x|>2|y|\}}|K(x-y)-K(x)|dx\le B$, $\forall\ y\in\mathbb{R}^n$. 则$\|K*f\|_p\le C_p\|f\|_p$ $(1<p<\infty)$, $\|K*f\|_{1,\infty}\le C_1\|f\|_1$.

注: $C_1\le C(A+B)$, $C_p\le\frac{Cp^2}{p-1}(A+B)$, C是只与n有关的常数.
注: 若$|\nabla K(x)|\le C|x|^{-n-1}$, $\forall\ x\ne 0$, 则Hörmander条件成立i.e. $[K]_3<\infty$.

Proof. 设$Tf=K*f$, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 则$\widehat{Tf}(\xi)=\widehat{K}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, 由(i)得$\|Tf\|_2\le A\|f\|_2$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
T可以唯一延拓为$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子(i.e.T是强$(2,2)$型) s.t. 若$f\in L^2_c(\mathbb{R}^n)$, $x\notin$ supp$f$
则$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)K(x-y)dy$; $\int Tf\cdot\sigma g=\int Tg\cdot\sigma f$, $(\sigma g(x)=g(-x))$. **下证T是弱$(1,1)$型.**

- 由T强$(2,2)$得Theorem 5.1 (i)对$p=2$成立.
- 若supp$f\subset B(x_0,r)$, $\int f=0$, 则$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)K(x-y)dy=$
$\int_{B(x_0,r)}f(y)(K(x-y)-K(x-x_0))dy$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)$. 由(ii)得若$y\in B(x_0,r)$则
$(z=y-x_0)$ $\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)}|K(x-y)-K(x-x_0)|dx=\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r)}|K(x-z)-K(x)|dx\le$
$\int_{\{|x|>2|z|\}}|K(x-z)-K(x)|dx\le B$,
$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)}|Tf(x)|dx\le\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)}\int_{B(x_0,r)}|f(y)||K(x-y)-K(x-x_0)|dydx=$

$\int_{B(x_0,r)}|f(y)|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)}|K(x-y)-K(x-x_0)|dxdy\le B\int_{B(x_0,r)}|f(y)|dy=B\|f\|_1$.
这说明Theorem 5.1 (ii)对$C_2=2$成立.

由Theorem 5.1得T是弱$(1,1)$型(且T是强$(2,2)$型). 结合Marcinkiewicz插值定理得T是强(p,p)型, $\forall\, 1<p<2$. 结合$\int Tf\cdot\sigma g=\int Tg\cdot\sigma f$和对偶方法得$T$是强$(p,p)$型, $\forall\, 2<p<\infty$. □

$K(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$**时的Hörmander条件:** 若$\int_0^1\frac{\omega_\infty(t)}{t}dt<\infty$则Hörmander条件成立. 其中 $\omega_\infty(t)=\sup\{|\Omega(u_1)-\Omega(u_2)|:|u_1-u_2|\le t,\ u_1,u_2\in S^{n-1}\}$.

Proof. 此时$\Omega\in L^\infty(S^{n-1})$. $|K(x-y)-K(x)|=|\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n}-\frac{\Omega(x')}{|x|^n}|\le$ $\frac{|\Omega((x-y)')-\Omega(x')|}{|x-y|^n}+|\Omega(x')||\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}|$. 若$|x|>2|y|$则$|\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}|\le\frac{C|y|}{|x|^{n+1}}$, $|(x-y)'-x'|\le\frac{2|y|}{|x|}$, $|K(x-y)-K(x)|\le\frac{\omega_\infty(2|y|/|x|)}{|x-y|^n}+\frac{C|y|}{|x|^{n+1}}\le\frac{C_1\omega^*_\infty(2|y|/|x|)}{|x|^n}$,
$\omega^*_\infty(t)=\omega_\infty(t)+t$. $\int_{\{|x|>2|y|\}}|K(x-y)-K(x)|dx\le C_1\int_{\{|x|>2|y|\}}\frac{\omega^*_\infty(2|y|/|x|)}{|x|^n}dx$
$=C_1|S^{n-1}|\int_{2|y|}^\infty\frac{\omega^*_\infty(2|y|/r)}{r}dr=C_1|S^{n-1}|\int_0^1\frac{\omega^*_\infty(t)}{t}dt=C_2<\infty$. □

Corollary 5.1. 若$\int_{S^{n-1}}\Omega=0$, $\int_0^1\frac{\omega_\infty(t)}{t}dt<\infty$, 则$p.v.\frac{\Omega(x')}{|x|^n}*f$是弱$(1,1)$型.

注: 若$\omega\in C^\alpha(S^{n-1})$, $\alpha\in(0,1)$, 则$\omega_\infty(t)\le Ct^\alpha$, Hörmander条件成立.
注: $\forall\,\rho\in O_n$(正交矩阵), 定义$\|\rho\|=\sup\{|u-\rho u|:u\in S^{n-1}\}$, $\omega_1(t)=\sup_{\|\rho\|\le t}\int_{S^{n-1}}|\Omega(\rho u)-\Omega(u)|d\sigma(u)$. 则$K(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$时的Hörmander条件$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{\omega_1(t)}{t}dt<\infty$.
注: Hörmander条件$\Leftrightarrow\sup\limits_{r>0}\frac{1}{r^n}\int_{B(0,r)}\int_{\{|x|>2r\}}|K(x-y)-K(x)|dxdy<\infty$ (平均Hörmander条件). $K(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$时的平均Hörmander条件$\Leftrightarrow$ $\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}}\frac{|\Omega(u)-\Omega(v)|}{|u-v|^{n-1}}d\sigma(u)d\sigma(v)<\infty$.

5.2 $\widehat{K}\in L^\infty$的充分条件 设$K\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $\forall\,\epsilon,R\in(0,\infty)$ 定义 $K_{\epsilon,R}(x)=K(x)\chi_{\{\epsilon<|x|<R\}}\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 定义$[K]_1=\sup\limits_{0<a<b}|\int_{\{a<|x|<b\}}K(x)dx|$, $[K]_2=\sup\limits_{a>0}\int_{\{a<|x|<2a\}}|K(x)|dx$, $[K]_3=\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{\{|x|>2|y|\}}|K(x-y)-K(x)|dx$.
注: 定义$[K]_2'=\sup\limits_{a>0}\frac{1}{a}\int_{\{|x|<a\}}|x||K(x)|dx$. 由 $\int_{\{|x|<a\}}|x||K(x)|dx=\sum_{k=0}^\infty\int_{\{2^{-k-1}a<|x|<2^{-k}a\}}|x||K(x)|dx\le\sum_{k=0}^\infty 2^{-k}a\cdot[K]_2$得 $[K]_2'\le\sum_{k=0}^\infty 2^{-k}[K]_2=2[K]_2$. 另一方面 $\int_{\{a<|x|<2a\}}|K(x)|dx\le\int_{\{a<|x|<2a\}}\frac{|x|}{a}|K(x)|dx\le 2[K]_2'$, $[K]_2\le 2[K]_2'$.

Proposition 5.3. 若$K\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $[K]_1+[K]_2+[K]_3<\infty$, 则 $|\widehat{K_{\epsilon,R}}(\xi)|\le C$, $\forall\, R>\epsilon>0$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. C与ξ,ϵ,R无关.

Proof. 由$\widehat{K_{\epsilon,R}}\in C(\mathbb{R}^n)$, 只需证$\xi\ne0$时成立. 设$r=\begin{cases}\epsilon, & |\xi|^{-1}\le\epsilon,\\ |\xi|^{-1}, & \epsilon\le|\xi|^{-1}\le R,\\ R, & |\xi|^{-1}\ge R.\end{cases}$ 则
$K_{\epsilon,R}=K_{\epsilon,r}+K_{r,R}$, $K_{\epsilon,r}=K_{\epsilon,R}\chi_{B(0,|\xi|^{-1})}$, $|K_{\epsilon,r}(x)|\le|K(x)|\chi_{\{|x|<|\xi|^{-1}\}}$.
$|\widehat{K_{\epsilon,r}}(0)|=|\int_{\{\epsilon<|x|<r\}}K(x)dx|\le[K]_1$,
$|\widehat{K_{\epsilon,r}}(\xi)-\widehat{K_{\epsilon,r}}(0)|=|\int_{\mathbb{R}^n}K_{\epsilon,r}(x)(e^{-2\pi ix\cdot\xi}-1)dx|\le2\pi|\xi|\int_{\mathbb{R}^n}|x||K_{\epsilon,r}(x)|dx\le$ $2\pi|\xi|\int_{\{|x|<|\xi|^{-1}\}}|x||K(x)|dx\le2\pi[K]_2'$, $|\widehat{K_{\epsilon,r}}(\xi)|\le[K]_1+2\pi[K]_2'$.
若$|\xi|^{-1}\ge R$则$r=R$, $K_{r,R}=0$, $\widehat{K_{r,R}}(\xi)=0$, 下设$|\xi|^{-1}<R$. 设$z=\frac{\xi}{2|\xi|^2}$, 则$e^{2\pi iz\cdot\xi}=-1$,

$R > r \geq |\xi|^{-1} = 2|z|$, $\widehat{K_{r,R}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K_{r,R}(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx = -\int_{\mathbb{R}^n} K_{r,R}(x-z)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx$, $2|\widehat{K_{r,R}}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |K_{r,R}(x) - K_{r,R}(x-z)|dx$.

Claim: $|K_{r,R}(x) - K_{r,R}(x-z)| \leq |K(x) - K(x-z)|\chi_{\{|x|>2|z|\}} + |K_{r,2r}(x)| + |K_{r,2r}(x-z)| + |K_{R/2,R}(x)| + |K_{R/2,R}(x-z)|$. **注:** $R > r \geq 2|z|$.

Proof. **Case 1** $|x| \in (r,R)$, $|x-z| \in (r,R)$. 此时$|x| > r \geq 2|z|$,
$|K_{r,R}(x) - K_{r,R}(x-z)| = |K(x) - K(x-z)| = |K(x) - K(x-z)|\chi_{\{|x|>2|z|\}}$.
Case 2 $|x| \in (r,R)$, $|x-z| \leq r$. 此时$r < |x| \leq |x-z| + |z| \leq r + r/2 < 2r$,
$|K_{r,R}(x) - K_{r,R}(x-z)| = |K(x)| = |K_{r,2r}(x)|$.
Case 3 $|x| \in (r,R)$, $|x-z| \geq R$. 此时$R > |x| \geq |x-z| - |z| \geq R - r/2 > R/2$,
$|K_{r,R}(x) - K_{r,R}(x-z)| = |K(x)| = |K_{R/2,R}(x)|$.
Case 4 $|x-z| \in (r,R)$, $|x| \leq r$. 此时$r < |x-z| \leq |x| + |z| \leq r + r/2 < 2r$,
$|K_{r,R}(x) - K_{r,R}(x-z)| = |K(x-z)| = |K_{r,2r}(x-z)|$.
Case 5 $|x-z| \in (r,R)$, $|x| \geq R$. 此时$R > |x-z| \geq |x| - |z| \geq R - r/2 > R/2$,
$|K_{r,R}(x) - K_{r,R}(x-z)| = |K(x-z)| = |K_{R/2,R}(x-z)|$.
Case 6 $|x| \notin (r,R)$, $|x-z| \notin (r,R)$. 此时$|K_{r,R}(x) - K_{r,R}(x-z)| = 0$. □

结合$\int_{\mathbb{R}^n} |K_{a,2a}(x-z)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |K_{a,2a}(x)|dx = \int_{\{a<|x|<2a\}} |K(x)|dx$得$2|\widehat{K_{r,R}}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |K_{r,R}(x) - K_{r,R}(x-z)|dx \leq \int_{\{|x|>2|z|\}} |K(x) - K(x-z)|dx + 2\int_{\{r<|x|<2r\}} |K(x)|dx + 2\int_{\{R/2<|x|<2R\}} |K(x)|dx \leq [K]_3 + 4[K]_2$. 综上(结合$[K]_2' \leq 2[K]_2$)得$|\widehat{K_{\epsilon,R}}(\xi)| \leq |\widehat{K_{\epsilon,r}}(\xi)| + |\widehat{K_{r,R}}(\xi)| \leq [K]_1 + 2\pi[K]_2' + \frac{1}{2}[K]_3 + 2[K]_2 \leq [K]_1 + \frac{1}{2}[K]_3 + (4\pi+2)[K]_2$. □

证明重点 $K_{\epsilon,R} = K_{\epsilon,r} + K_{r,R}$, $|\widehat{K_{\epsilon,r}}(\xi)| \leq [K]_1 + 2\pi[K]_2'$. 若$|\xi|^{-1} \geq R$则$\widehat{K_{r,R}}(\xi) = 0$, 下设$|\xi|^{-1} < R$, 则$2|\widehat{K_{r,R}}(\xi)| \leq [K]_3 + 4[K]_2$.

注: $[K_{\epsilon,R}]_1 \leq [K]_1$, $[K_{\epsilon,R}]_2 \leq [K]_2$, $[K_{\epsilon,R}]_3 \leq [K]_3 + 4[K]_2$. Key point: 若$|x| > 2|y|$则 $\frac{1}{2}|x| < |x-y| < \frac{3}{2}|x| < 2|x|$, $|K_{\epsilon,R}(x) - K_{\epsilon,R}(x-y)| \leq |K(x) - K(x-y)| + |K_{\epsilon,2\epsilon}(x)| + |K_{\epsilon,2\epsilon}(x-y)| + |K_{R/2,R}(x)| + |K_{R/2,R}(x-y)|$.

Corollary 5.2. *若$K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $[K]_* := [K]_1 + [K]_2 + [K]_3 < \infty$, 则 $\|K_{\epsilon,R} * f\|_p \leq C_p\|f\|_p$ $(1 < p < \infty)$, $\|K_{\epsilon,R} * f\|_{1,\infty} \leq C_1\|f\|_1$.*

注: $C_1 \leq C[K]_*$, $C_p \leq \frac{Cp^2}{p-1}[K]_*$, C是只与n有关的常数.
注: 若$K(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}$则$[K]_1 < \infty \Leftrightarrow \Omega \in L^1(S^{n-1})$, $\int_{S^{n-1}} \Omega = 0$.
由$K_{\epsilon,R} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $K_{\epsilon,R} * f$可对$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$定义. 若$Tf(x) = \lim\limits_{\epsilon\to0+,R\to\infty} K_{\epsilon,R} * f(x)$极限存在, 则$T$是弱$(1,1)$强$(p,p)$型$(1 < p < \infty)$(由Fatou引理).下面讨论极限存在的条件. 设 $K_\epsilon(x) = K(x)\chi_{\{|x|>\epsilon\}}$.

Lemma 5.4. *若$K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $[K]_* < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $\epsilon > 0$. 则 $\int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon(x-y)f(y)|dy < \infty$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Key point: $K_\epsilon, K \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $|K_\epsilon| * \chi_{B(0,\epsilon)} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ 1 < q \leq \infty$.
Lemma 5.4说明$K_\epsilon * f$可对$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$定义s.t.
$K_\epsilon * f(x) = \lim\limits_{R\to\infty} K_{\epsilon,R} * f(x)$ a.e., $\|K_\epsilon * f\|_p \leq C_p\|f\|_p$ $(1 < p < \infty)$, $\|K_\epsilon * f\|_{1,\infty} \leq C_1\|f\|_1$.
定义p.v.$K(\phi) = \lim\limits_{\epsilon\to0+} \int_{\{|x|>\epsilon\}} K(x)\phi(x)dx$, $\forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 5.5. *若$K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $[K]_2 < \infty$, $(a): p.v.K$存在$\Leftrightarrow$ $(b): \lim\limits_{\epsilon\to0+} \int_{\{\epsilon<|x|<1\}} K(x)dx$存在.*

Proof. 一方面若(a) : p.v.K存在, 取$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s.t. $\chi_{B(0,1)} \le \phi \le \chi_{B(0,2)}$. 则
p.v.$K(\phi) = \lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{\{\epsilon<|x|<1\}} K(x)dx + \int_{\{|x|>1\}} K(x)\phi(x)dx$, 结合
$\int_{\{|x|>1\}} |K(x)\phi(x)|dx \le \int_{\{1<|x|<2\}} |K(x)|dx$得$\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{\{\epsilon<|x|<1\}} K(x)dx$存在.
另一方面若$\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{\{\epsilon<|x|<1\}} K(x)dx$存在, 设$L := \lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{\{\epsilon<|x|<1\}} K(x)dx$. 则
p.v.$K(\phi) = \phi(0)L + \int_{\{|x|<1\}} K(x)(\phi(x)-\phi(0))dx + \int_{\{|x|>1\}} K(x)\phi(x)dx$,
$\forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 其中用到$\int_{\{|x|>\epsilon\}} K(x)\phi(x)dx =$
$\phi(0)\int_{\{\epsilon<|x|<1\}} K(x)dx + \int_{\{\epsilon<|x|<1\}} K(x)(\phi(x)-\phi(0))dx + \int_{\{|x|>1\}} K(x)\phi(x)dx$,
$\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \phi(0)\int_{\{\epsilon<|x|<1\}} K(x)dx = \phi(0)L$,
$\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{\{\epsilon<|x|<1\}} K(x)(\phi(x)-\phi(0))dx = \int_{\{|x|<1\}} K(x)(\phi(x)-\phi(0))dx$, 需要验证可积性.
$\int_{\{|x|<1\}} |K(x)(\phi(x)-\phi(0))|dx \le \|D\phi\|_\infty \int_{\{|x|<1\}} |x||K(x)|dx \le C_1[K]_2'$,
$\int_{\{|x|>1\}} |K(x)\phi(x)|dx \le \|x\phi\|_\infty \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\int_{\{2^k<|x|<2^{k+1}\}} |K(x)|dx \le$
$C_2\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}[K]_2 = 2C_2[K]_2$, 其中$C_1 = \|D\phi\|_\infty$, $C_2 = \|x\phi\|_\infty$. 以上说明
p.v.$K(\phi) = \lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{\{|x|>\epsilon\}} K(x)\phi(x)dx$极限存在, i.e. (a) : p.v.K存在. □

Corollary 5.3. *若$K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $[K]_* < \infty$, $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{\{|x|>\epsilon\}} K(x)dx$存在, 则 $Tf(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0+} K_\epsilon * f(x)$ $(f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ 是弱$(1,1)$强(p,p)型$(1<p<\infty)$.*

一般情形若$K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $[K]_* < \infty$, 则$[K]_1 < \infty$, $\exists\ \epsilon_k \to 0+$ s.t.
$\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\{|x|>\epsilon_k\}} K(x)dx$存在, 此时$Tf(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{\{|y|>\epsilon_k\}} K(y)f(x-y)dx$极限存在
$(\forall\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 且$T$是弱$(1,1)$强$(p,p)$型$(1<p<\infty)$.
举例: $K(x) = |x|^{-n-it} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, 下面验证$[K]_j < \infty$, $j = 1,2,3$.
$|\int_{\{a<|x|<b\}} \frac{dx}{|x|^{n+it}}| = |S^{n-1}||\frac{b^{-it}-a^{-it}}{-it}| \le \frac{2}{|t|}|S^{n-1}| \Rightarrow [K]_1 < \infty$,
$\int_{\{a<|x|<2a\}} \frac{dx}{|x|^n} = |S^{n-1}|\ln 2 \Rightarrow [K]_2 < \infty$, $(|K(x)| = |x|^{-n})$, $|\nabla K(x)| = \frac{|n+it|}{|x|^{n+1}} \Rightarrow [K]_3 < \infty$.
因此$\|K_{\epsilon,R} * f\|_p \le C_p\|f\|_p$ $(1<p<\infty)$. 由
$\int_{\{\epsilon<|x|<1\}} \frac{dx}{|x|^{n+it}} = |S^{n-1}|\frac{1-\epsilon^{-it}}{-it}$, 取$\epsilon_k = e^{-2\pi k/|t|}$则$\epsilon_k^{-it} = 1$,
$\lim\limits_{k,R\to\infty} K_{\epsilon_k,R} * f(x) = \int_{\{|y|<1\}} \frac{f(x-y)-f(x)}{|y|^{n+it}}dy + \int_{\{|y|>1\}} \frac{f(x-y)}{|y|^{n+it}}dy$, 因此可以定义
$\langle \text{p.v.}\frac{1}{|x|^{n+it}}, \phi\rangle = \int_{\{|x|<1\}} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|^{n+it}}dx + \int_{\{|x|>1\}} \frac{\phi(x)}{|x|^{n+it}}dx$. 下面说明这样定义的
p.v.$\frac{1}{|x|^{n+it}}$不是$-n-it$次齐次的. 若$z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z < n$则$|x|^{-z} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $-z$次齐次, i.e.
$\langle |x|^{-z}, \phi_\lambda\rangle = \lambda^{-z}\langle |x|^{-z}, \phi\rangle$, $\forall\ \phi \in \mathcal{S}$, $\lambda > 0$, 其中$\phi_\lambda(x) = \lambda^{-n}\phi(\lambda^{-1}x)$. 一方面
$\langle |x|^{-z}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-z}\phi(x)dx = \int_{\{|x|<1\}} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|^z}dx + \int_{\{|x|<1\}} \frac{\phi(0)}{|x|^z}dx + \int_{\{|x|>1\}} \frac{\phi(x)}{|x|^z}dx =$
$\int_{\{|x|<1\}} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|^z}dx + \int_{\{|x|>1\}} \frac{\phi(x)}{|x|^z}dx + \frac{|S^{n-1}|\phi(0)}{n-z}$, 其中用到
$\int_{\{|x|<1\}} \frac{dx}{|x|^z} = |S^{n-1}|\int_0^1 r^{n-1-z}dr = \frac{|S^{n-1}|}{n-z}$, 因此
$\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \langle |x|^{-n-it+\epsilon}, \phi\rangle = \langle \text{p.v.}\frac{1}{|x|^{n+it}}, \phi\rangle + \frac{|S^{n-1}|\phi(0)}{-it}$, $\forall\ \phi \in \mathcal{S}$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
另一方面$\langle |x|^{-n-it+\epsilon}, \phi_\lambda\rangle = \lambda^{-n-it+\epsilon}\langle |x|^{-n-it+\epsilon}, \phi\rangle$, 令$\epsilon \to 0+$得
$\langle \text{p.v.}\frac{1}{|x|^{n+it}}, \phi_\lambda\rangle + \frac{|S^{n-1}|\phi_\lambda(0)}{-it} = \lambda^{-n-it}(\langle \text{p.v.}\frac{1}{|x|^{n+it}}, \phi\rangle + \frac{|S^{n-1}|\phi(0)}{-it})$, 这说明
p.v.$\frac{1}{|x|^{n+it}} + \frac{|S^{n-1}|\delta}{-it}$是$-n-it$次齐次的, p.v.$\frac{1}{|x|^{n+it}}$不是$-n-it$次齐次的.
$(\phi_\lambda(0) = \lambda^{-n}\phi(0) \ne \lambda^{-n-it}\phi(0)$, $\exists\ \lambda > 0$, $\phi \in \mathcal{S})$.
下面求p.v.$\frac{1}{|x|^{n+it}}$的Fourier变换. 由

$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-a}\widehat{\phi}(x)dx=\frac{\pi^{a-n/2}\Gamma(\frac{n-a}{2})}{\Gamma(a/2)}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{a-n}\phi(x)dx$, $\forall\ \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $0<a<n$, 作解析延拓得对$a\in\mathbb{C}$, $0<\mathrm{Re}\,a<n$也成立. 因此$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n-it+\epsilon}\widehat{\phi}(x)dx=\frac{\pi^{n/2+it-\epsilon}\Gamma(\frac{-it+\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{n+it-\epsilon}{2})}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{it-\epsilon}\phi(x)dx$, $\forall\ \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $0<\epsilon<n$.
令$\epsilon\to 0+$得$\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|^{n+it}},\widehat{\phi}\rangle+\frac{|S^{n-1}|\widehat{\phi}(0)}{-it}=\frac{\pi^{n/2+it}\Gamma(\frac{-it}{2})}{\Gamma(\frac{n+it}{2})}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{it}\phi(x)dx$, 这说明
$\mathcal{F}(\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|^{n+it}})+\frac{|S^{n-1}|}{-it}=\frac{\pi^{n/2+it}\Gamma(\frac{-it}{2})}{\Gamma(\frac{n+it}{2})}|x|^{it}$, 其中用到$\widehat{\phi}(0)=\langle 1,\phi\rangle$.

5.3 非卷积型Calderon-Zygmund算子 $\Delta=\{(x,x)|x\in\mathbb{R}^n\}\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Theorem 5.6. 设T是$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子, $K\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta)$. 满足
(i)$\forall\ f\in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, $Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)dy$ *a.e.* $x\in\mathbb{R}^n\setminus suppf$. *(ii)Hörmander*条件*:*
$\int_{\{|x-y|>2|y-z|\}}|K(x,y)-K(x,z)|dx\le B,\ \forall\ y,z\in\mathbb{R}^n$;
$\int_{\{|x-y|>2|x-w|\}}|K(x,y)-K(w,y)|dy\le B,\ \forall\ x,w\in\mathbb{R}^n$. 则
$\|Tf\|_p\le C_p\|f\|_p$ $(1<p<\infty)$, $\|Tf\|_{1,\infty}\le C_1\|f\|_1$, $\forall\ f\in L^\infty_c$.

Proof. **Step 1.** T是弱$(1,1)$型.

- 由T强$(2,2)$得Theorem 5.1 (i)对$p=2$成立.
- 若$\mathrm{supp}f\subset B(x_0,r)$, $\int f=0$, 则$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)K(x,y)dy=$
$\int_{B(x_0,r)}f(y)(K(x,y)-K(x,x_0))dy$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)$. 由(ii)得若$y\in B(x_0,r)$则
$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)}|K(x,y)-K(x,x_0)|dx\le\int_{\{|x-y|>2|y-x_0|\}}|K(x,y)-K(x,x_0)|dx\le B$,
$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)}|Tf(x)|dx\le\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)}\int_{B(x_0,r)}|f(y)||K(x,y)-K(x,x_0)|dydx=$
$\int_{B(x_0,r)}|f(y)|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)}|K(x,y)-K(x,x_0)|dxdy\le B\int_{B(x_0,r)}|f(y)|dy=B\|f\|_1$.
这说明Theorem 5.1 (ii)对$C_2=2$成立.

由Theorem 5.1得T是弱$(1,1)$型(且T是强$(2,2)$型).
Step 2. 结合Marcinkiewicz插值定理得T是强(p,p)型, $\forall\ 1<p\le 2$.
Step 3. 若$2<p<\infty$, 由Theorem 6.4得$\|Tf\|_*\le C\|f\|_\infty$, 结合Theorem 6.5($p_0=2$)得$T$是强$(p,p)$型, $\forall\ 2<p<\infty$. □

注: 若紧集$A,B\subset\mathbb{R}^n$, $A\cap B=\emptyset$, 则$\mathrm{ess\ sup}_{y\in B}\int_A|K(x,y)|dx<\infty$, 因此若$f\in L^1$, $\mathrm{supp}f\subseteq B$, 则$\int_A\int_B|K(x,y)f(y)|dydx<\infty$, $\int_B|K(x,y)f(y)|dy<\infty$, a.e.$x\in A$,
$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)K(x,y)dy$对a.e.$x\in A$良定义, 且$Tf\in L^1(A)$.
标准核条件:(⇒Hörmander条件) $\exists\ \delta>0$ s.t. (a) $|K(x,y)|\le\frac{C}{|x-y|^n}$,
(b) 若$|x-y|>2|y-z|$则$|K(x,y)-K(x,z)|\le\frac{C|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}$,
(c) 若$|x-y|>2|x-w|$则$|K(x,y)-K(w,y)|\le\frac{C|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}$.

Definition 5.7. *T是Calderon-Zygmund算子(CZO)若*
(i)T是$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子, (ii)$\exists$标准核K s.t.
$\forall\ f\in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, $Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)dy$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n\setminus suppf$.

由Theorem 5.6得CZO(唯一延拓)为$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子$(1<p<\infty)$.
举例: 柯西积分. $A\in Lip(\mathbb{R};\mathbb{R})$, i.e.$A'=a\in L^\infty$, $\Gamma=\{(t,A(t)):t\in\mathbb{R}\}$. $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$C_\Gamma f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t)(1+ia(t))}{t+iA(t)-z}dt$在$\Omega_+=\{z=x+iy:y>A(x)\}$解析,
$\lim\limits_{\epsilon\to 0+}C_\Gamma f(x+i(A(x)+\epsilon))=\frac{1}{2}f(x)+\frac{i}{2\pi}\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\int_{\{|x-t|>\epsilon\}}\frac{f(t)(1+ia(t))}{x-t+i(A(x)-A(t))}dt$,
$(C_\Gamma f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}f'(t)\ln(t+iA(t)-z)dt)$. **定义**

$Tf(x)=\int_{\{|x-y|>\epsilon\}}\frac{f(y)}{x-y+i(A(x)-A(y))}dy$, $K(x,y)=\frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))}$满足标准核条件($\delta=1$). 若$\|A'\|_\infty<1$, 则$|A(x)-A(y)|<|x-y|$,
$K(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{-k}(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$, $\forall\ x\neq y$, $T_kf(x)=\int_{\{|x-y|>\epsilon\}}\frac{f(y)(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}dy$,
$K_k(x,y)=\frac{(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$仍满足标准核条件($\delta=1$).

5.4 标准核条件(a)⇒ $T_\epsilon f(x)=\int_{\{|x-y|>\epsilon\}}K(x,y)f(y)dy$对$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$良定义. 但$K(x,y)=|x-y|^{-n-it}$的例子说明$\lim\limits_{\epsilon\to 0+}T_\epsilon f(x)$不一定存在.

Proposition 5.8. *若K是标准核, 则$(a):\lim\limits_{\epsilon\to 0+}T_\epsilon f(x)$存在$a.e.\ x$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow$
$(b):\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\int_{\{\epsilon<|x-y|<1\}}K(x,y)dy$存在$a.e.\ x$.*

Key point: $T_\epsilon f(x)=L_\epsilon(x)f(x)+\int_{\{\epsilon<|x-y|<1\}}K(x,y)(f(y)-f(x))dy+\int_{\{|x-y|>1\}}K(x,y)f(y)dy$, $L_\epsilon(x)=\int_{\{\epsilon<|x-y|<1\}}K(x,y)dy$.

Proposition 5.9. *若T_1, T_2是Calderon-Zygmund算子, 有相同的标准核, 则$\exists\ a\in L^\infty$, s.t. $T_1f(x)-T_2f(x)=a(x)f(x)$ a.e. x.*

Lemma 5.10. *若T是$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子, $\forall\ f\in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $Tf(x)=0$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n\backslash suppf$. 则$\exists\ b\in L^\infty$, s.t. $Tf(x)=b(x)f(x)$ a.e. x.*

注. CZO是线性空间, Proposition 5.9⇔Lemma 5.10. 若没有条件<u>T是$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子</u>, 则Lemma 5.10不成立, 例如$Tf=f'$.

Proof of Lemma 5.10. $\mathbb{R}^n=\cup_{Q\in\mathcal{Q}_0}Q$为不交并, $b(x)=\cup_{Q\in\mathcal{Q}_0}T\chi_Q(x)\chi_Q(x)\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
$\forall\ Q\in\mathcal{Q}_k$, $k\ge 0$, $\exists|\ Q'\in\mathcal{Q}_0$ s.t. $Q\subset Q'$, 此时$T(\chi_{Q'}-\chi_Q)(x)=0$ a.e. $x\in Q$,
$T\chi_Q(x)=T\chi_{Q'}(x)$ a.e. $x\in Q$, $T\chi_Q(x)=0$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n\setminus Q$, 这说明
$T\chi_Q(x)=T\chi_{Q'}(x)\chi_Q(x)=b(x)\chi_Q(x)$ a.e. 定义
$V=$span$\{\chi_Q:Q\in\mathcal{Q}_k,k\ge 0\}$, 则$V$在$L^2(\mathbb{R}^n)$中稠密, $Tf=bf$, $\forall\ f\in V$.
$\int_Q|b|^2=\|b\chi_Q\|_2^2=\|T\chi_Q\|_2^2\le C\|\chi_Q\|_2^2=C|Q|$($T$有界), 结合Lebesgue微分定理得$|b|^2\le C$ a.e., i.e. $b\in L^\infty$. 而$Tf=bf$, $\forall\ f\in V$, 两边都是$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子, V在$L^2(\mathbb{R}^n)$中稠密, 这说明$Tf=bf$, $\forall\ f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. □

极大奇异积分算子 $T^*f(x)=\sup\limits_{\epsilon>0}|T_\epsilon f(x)|$.

Theorem 5.11. *若T是CZO, 则T^*弱$(1,1)$, 强(p,p) $(1<p<\infty)$.*

Lemma 5.12. *若T是CZO, $0<\nu\le 1$, 则$T^*f(x)\le C[M(|Tf|^\nu)(x)]^{1/\nu}+CMf(x)$.*

Lemma 5.13. *若S弱$(1,1)$, $|E|<\infty$, $0<\nu<1$, 则$\int_E|Sf|^\nu\le C|E|^{1-\nu}\|f\|_1^\nu$.*

Proof. $|E|=0$时显然成立, 下设$|E|>0$. 则
$\int_E|Sf|^\nu=\nu\int_0^\infty\lambda^{\nu-1}|\{x\in E:|Sf(x)|>\lambda\}|d\lambda\le\nu\int_0^\infty\lambda^{\nu-1}\min(|E|,\|Sf\|_{1,\infty}/\lambda)d\lambda=\nu\int_0^{\|Sf\|_{1,\infty}/|E|}\lambda^{\nu-1}|E|d\lambda+\nu\int_{\|Sf\|_{1,\infty}/|E|}^\infty\lambda^{\nu-2}\|Sf\|_{1,\infty}d\lambda=\frac{1}{1-\nu}\|Sf\|_{1,\infty}^\nu|E|^{1-\nu}\le C\|f\|_1^\nu|E|^{1-\nu}$. 其中用到$\|Sf\|_{1,\infty}\le C\|f\|_1$. □

Proof of Lemma 5.12. 若已证$0<\nu<1$时成立, 由$M(|Tf|^\nu)(x)\le[M(|Tf|)(x)]^\nu$得
$T^*f(x)\le C[M(|Tf|^\nu)(x)]^{1/\nu}+CMf(x)\le CM|Tf|(x)+CMf(x)$, i.e.结论在$\nu=1$时也成立, 下设$0<\nu<1$. 只需证$T_\epsilon f(x)\le C[M(|Tf|^\nu)(x)]^{1/\nu}+CMf(x)$, $\forall\ \epsilon>0$, $x\in\mathbb{R}^n$. 下面固定$\epsilon>0$, $x\in\mathbb{R}^n$. 设$Q=B(x,\epsilon/2)$, $2Q=B(x,\epsilon)$, $f_1=f\chi_{2Q}$, $f_2=f-f_1$. 则

$T_\epsilon f(x)=\int_{\{|x-y|>\epsilon\}}K(x,y)f(y)dy$, $Tf_2(z)=\int_{\{|x-y|>\epsilon\}}K(z,y)f(y)dy$, a.e. $z\in Q$.
<u>Claim:</u> $|T_\epsilon f(x)-Tf_2(z)|\le CMf(x)$, a.e. $z\in Q$.

Proof. 对a.e. $z\in Q$有$T_\epsilon f(x)-Tf_2(z)=\int_{\{|x-y|>\epsilon\}}(K(x,y)-K(z,y))f(y)dy$, 结合标准核条件(c)得若$|x-y|>\epsilon$, $z\in Q$则$|x-z|<\epsilon/2$, $|x-y|>2|x-z|$, $|K(x,y)-K(z,y)|\le\frac{C|z-x|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}$, $|T_\epsilon f(x)-Tf_2(z)|\le C\int_{\{|x-y|>\epsilon\}}\frac{|z-x|^\delta|f(y)|}{|x-y|^{n+\delta}}dy\le C\epsilon^\delta\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|f(y)|dy}{[\max(\epsilon,|x-y|)]^{n+\delta}}\le CMf(x)$, 其中用到Proposition 2.7(取$\phi(x)=[\max(1,|x|)]^{-n-\delta}\in\mathcal{V}_0(\mathbb{R}^n)$, 则$\phi_\epsilon(x)=\epsilon^\delta[\max(\epsilon,|x|)]^{-n-\delta}$). □

因此$|T_\epsilon f(x)|\le CMf(x)+\operatorname*{ess\,inf}_{z\in Q}|Tf_2(z)|$,
$(\operatorname*{ess\,inf}_{z\in Q}|Tf_2(z)|)^\nu=\operatorname*{ess\,inf}_{z\in Q}|Tf_2(z)|^\nu\le\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_2|^\nu\le\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf|^\nu+\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_1|^\nu$,
其中用到$Tf_2=Tf-Tf_1$, $|Tf_2|\le|Tf|+|Tf_1|$, $|Tf_2|^\nu\le|Tf|^\nu+|Tf_1|^\nu$ a.e. $(0<\nu<1)$.
而$\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf|^\nu\le M(|Tf|^\nu)(x)$, 由Lemma 5.13(和$T$弱$(1,1)$)得
$\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_1|^\nu\le\frac{C}{|Q|}|Q|^{1-\nu}\|f_1\|_1^\nu=C(\frac{1}{|Q|}\int_{2Q}|f|)^\nu\le C(\frac{|2Q|}{|Q|}Mf(x))^\nu=C'Mf(x)^\nu$, 因此
$(\operatorname*{ess\,inf}_{z\in Q}|Tf_2(z)|)^\nu\le\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf|^\nu+\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_1|^\nu\le M(|Tf|^\nu)(x)+CMf(x)^\nu$,
$\operatorname*{ess\,inf}_{z\in Q}|Tf_2(z)|\le C[M(|Tf|^\nu)(x)]^{1/\nu}+CMf(x)$,
$|T_\epsilon f(x)|\le CMf(x)+\operatorname*{ess\,inf}_{z\in Q}|Tf_2(z)|\le C[M(|Tf|^\nu)(x)]^{1/\nu}+CMf(x)$. □

Proof of Theorem 5.11. (i) $1<p<\infty$, Lemma 5.12取$\nu=1$得
$T^*f(x)\le CM|Tf|(x)+CMf(x)$, 结合$M$, T强(p,p)得T^*强(p,p).
(ii) $p=1$, Lemma 5.12取固定的$0<\nu<1$得$\|T^*f\|_{1,\infty}\le C\|M(|Tf|^\nu)^{1/\nu}\|_{1,\infty}+C\|Mf\|_{1,\infty}=C\|M(|Tf|^\nu)\|_{q,\infty}^q+C\|Mf\|_{1,\infty}\le C\||Tf|^\nu\|_{q,\infty}^q+C\|f\|_1=C\|Tf\|_{1,\infty}+C\|f\|_1\le C\|f\|_1$.
其中用到$\|Mg\|_{q,\infty}\le C\|g\|_{q,\infty}$, $q=1/\nu\in(1,\infty)$; M, T弱$(1,1)$. □

注: 若$\|T^*f\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\|T^*f\|_{1,\infty}\le C\|f\|_1$, $\forall\ f\in L_c^\infty$, $1<p<\infty$;
则$\|T^*f\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p$, $1<p<\infty$; $\|T^*f\|_{1,\infty}\le C\|f\|_1$, $\forall\ f\in L^1$.
Key point: 若$\forall\ f\in L^p$, $1\le p<\infty$, 取$f_k=f\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|+|f(x)|<k\}}$, 则$f_k\in L_c^\infty$, $f_k\to f$ in L^p, $T_\epsilon f_k(x)\to T_\epsilon f(x)$, $T^*f(x)\le\liminf_{k\to\infty}T^*f_k(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, $\epsilon>0$.

定义: 若$Tf(x)=\lim_{\epsilon\to0+}T_\epsilon f(x)$ a.e., 则称T为Calderon-Zygmund奇异积分.
注: 若$Tf(x)=\lim_{\epsilon\to0+}T_\epsilon f(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则由Theorem 5.11得
$Tf(x)=\lim_{\epsilon\to0+}T_\epsilon f(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$.

6. Hardy空间与BMO空间

6.1 原子Hardy空间 定义原子$\mathcal{A}=\cup_Q\mathcal{A}_Q$ (Q取遍方体),
$\mathcal{A}_Q=\{a\in L^\infty(\mathbb{R}^n)|\mathrm{supp}a\subseteq\overline{Q},\ \|a\|_\infty\le|Q|^{-1},\ \int_Q a=0\}$.
注: $\mathcal{A}\subset L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall\ 1\le p\le\infty$; 若$a\in\mathcal{A}_Q$则$\|a\|_p\le|Q|^{1/p-1}$.

Proposition 6.1. *若T满足Theorem 5.6的条件, $a\in\mathcal{A}$则$\|Ta\|_1\le C$.*

Proof. ∃方体Q s.t. $a\in\mathcal{A}_Q$, 则$\|a\|_2\le|Q|^{-1/2}$, $\|a\|_1\le1$. 设$Q=Q(c,r)$, $Q^*=B(c,2\sqrt{n}r)$, 则$|Q^*|=C_n|Q|$. $\int_{Q^*}|Ta|\le|Q^*|^{\frac12}\|Ta\|_2\le C|Q^*|^{\frac12}|Q|^{-\frac12}\le C$. $\forall\ x\in\mathbb{R}^n\setminus Q^*$有
$Ta(x)=\int_Q K(x,y)a(y)dy=\int_Q(K(x,y)-K(x,c))a(y)dy$,
$\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}|Ta|\le\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}\int_Q|K(x,y)-K(x,c)||a(y)|dydx\le C\int_Q|a|\le C$. □

定义$\mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n) := \{\sum_j \lambda_j a_j | a_j \in \mathcal{A},\ \lambda_j \in \mathbb{C},\ \sum_j |\lambda_j| < \infty\}$,
$\|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}} := \inf\{\sum_j |\lambda_j| : f = \sum_j \lambda_j a_j \text{ (in } L^1),\ a_j \in \mathcal{A},\ \lambda_j \in \mathbb{C}\}$.
注: $\mathcal{H}^1_{at}$是Banach空间. 若$a \in \mathcal{A}$则$\|a\|_{\mathcal{H}^1_{at}} \le 1$.
若$\sum_k \|f_k\|_{\mathcal{H}^1_{at}} < \infty$则$\sum_k f_k \in \mathcal{H}^1_{at}$, $\|\sum_k f_k\|_{\mathcal{H}^1_{at}} \le \sum_k \|f_k\|_{\mathcal{H}^1_{at}}$.
若$f \in \mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)$则$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_1 \le \|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}}$, $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0$.
$\operatorname{span}\mathcal{A} = L^\infty_{c,0}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n) | \int_{\mathbb{R}^n} f = 0\}$在$\mathcal{H}^1_{at}$中稠密.
若$T \in (\mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n))^*$(对偶空间)则$\|T\| = \sup\{|\langle T, a\rangle| : a \in \mathcal{A}\}$.

Corollary 6.1. *若T满足Theorem 5.6的条件, $f \in \mathcal{H}^1_{at}$, 则$\|Tf\|_1 \le C\|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}}$.*

Key point: $\exists\ f_k \in \operatorname{span}\mathcal{A}$ s.t. $f_k \to f$ in L^1, $\|Tf_k\|_1 \le C\|f\|_{\mathcal{H}^1_{at}}$.

定义$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) | R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \forall\ 1 \le j \le n\}$,
$\|f\|_{\mathcal{H}^1} := \|f\|_1 + \sum_{j=1}^n \|R_j f\|_1$.

Theorem 6.2 (*). *$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)$, 且范数等价.*

注: 由Corollary 6.1得$\mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. 另一方面需要证明$f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow P^*f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in \mathcal{H}^1_{at}(\mathbb{R}^n)$. 其中$P^*f(x) = \sup\limits_{t>0, |y-x|<t} |P_t * f(y)|$.

6.2 BMO空间 $\forall\ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$和方体$Q$, 定义$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f$, $M^\# f(x) = \sup\limits_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|$.

定义$BMO = \{f \in L^1_{loc} | M^\# f \in L^\infty\}$, $\|f\|_* = \|M^\# f\|_\infty$.
$\|\cdot\|_*$是$BMO/\mathbb{C}$的范数($M^\#$是次线性算子), $BMO/\mathbb{C}$是Banach空间.
$M^\# f(x) \le C_n M f(x)$, $M^\# f(x) \le 2M'' f(x)$. $BMO/\mathbb{C}$应为$BMO/(\mathbb{C} + a.e.)$.
注: (a)$\|f\|_* = \sup\limits_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|$. 定义(b)$\|f\|'_* := \sup\limits_Q \inf\limits_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - a|$.

Proposition 6.3. *(i)$\frac{1}{2}\|f\|_* \le \|f\|'_* \le \|f\|_*$, (ii) $M^\# |f|(x) \le 2M^\# f(x)$.*

Proof. $\forall$方体Q和$a \in \mathbb{C}$有$\int_Q |f - f_Q| \le \int_Q |f - a| + \int_Q |a - f_Q| \le 2\int_Q |f - a|$,
其中用到$\int_Q |a - f_Q| = |Q||a - f_Q| = ||Q|a - \int_Q f| = |\int_Q (a - f)| \le \int_Q |a - f|$.
这说明$\frac{1}{2}\int_Q |f - f_Q| \le \inf\limits_{a \in \mathbb{C}} \int_Q |f - a|$, 另一方面
$\inf\limits_{a \in \mathbb{C}} \int_Q |f - a| \le \int_Q |f - f_Q|$(取$a = f_Q$), 结合(a)(b)得(i)成立.
$\forall$方体Q有$\frac{1}{2}\int_Q ||f| - |f|_Q| \le \inf\limits_{a \in \mathbb{C}} \int_Q ||f| - a| \le \int_Q ||f| - |f_Q|| \le \int_Q |f - f_Q|$,
$M^\# |f|(x) = \sup\limits_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q ||f| - |f|_Q| \le \sup\limits_{Q \ni x} \frac{2}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| \le 2M^\# f(x)$. □

注: $\|f\|'_* = \sup\{|\langle f, a\rangle| : a \in \mathcal{A}\}$. $M^\# |f|^\nu(x) \le 2|M^\# f(x)|^\nu$, $\forall\ \nu \in (0, 1]$.
注: 若$f \in BMO$, 则$|f| \in BMO$; $L^\infty \subset BMO$. 反之均不成立.
$f(x) = \chi_{\{|x|<1\}} \ln\frac{1}{|x|}$, $f \in BMO(\mathbb{R})$, but $f \notin L^\infty(\mathbb{R})$. $g(x)$ =sgn$(x)f(x)$, $|g| = f$, but $g \notin BMO(\mathbb{R})$ (as $g_Q = 0$, $\forall\ Q = (-a, a)$).

Theorem 6.4. *若T满足Theorem 5.6的条件, $f \in L^\infty_c$, 则$\|Tf\|_* \le C\|f\|_\infty$.*

Proof. 给定方体Q, 设$Q = Q(c, r)$, $Q^* = B(c, 2\sqrt{n}r)$, $f = f_1 + f_2$,
$f_1 = f\chi_{Q^*}$, $f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*}$. $Tf_2(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} K(x, y)f(y)dy$, a.e. $x \in Q$.
设$a = \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} K(c, y)f(y)dy$, 则$Tf_2(x) - a = \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} (K(x, y) - K(c, y))f(y)dy$,
$|Tf_2(x) - a| \le \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} |K(x, y) - K(c, y)|dy\|f\|_\infty \le C\|f\|_\infty$, a.e. $x \in Q$.

$\|Tf_1\|_2 \le C\|f_1\|_2 \le C|Q^*|^{\frac{1}{2}}\|f\|_\infty \le C|Q|^{\frac{1}{2}}\|f\|_\infty$, $\int_Q |Tf-a| \le \int_Q |Tf_1| + \int_Q |Tf_2 - a| \le C|Q|^{\frac{1}{2}}\|Tf_1\|_2 + \int_Q C\|f\|_\infty \le C|Q|\|f\|_\infty$. $\|Tf\|'_* \le C\|f\|_\infty$, $\|Tf\|_* \le 2\|Tf\|'_* \le C\|f\|_\infty$. □

注: 由$|Tf_2 - a| \le C\|f\|_\infty$ a.e. in Q 得$|a| \le C\|f\|_\infty + C|Q|^{-\frac{1}{2}}\|Tf_2\|_2 \le C\|f\|_\infty + C|Q|^{-\frac{1}{2}}\|f_2\|_2$, i.e. $|\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} K(c,y)f(y)dy| \le C\|f\|_\infty + C|Q|^{-\frac{1}{2}}\|f\|_2$ ($\|f_2\|_2 \le \|f\|_2$), $\forall\, f \in L^\infty_c$. $\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(c,y)f(y)|dy \le C\|f\|_\infty + C|Q|^{-\frac{1}{2}}\|f\|_2$, $\forall\, f \in L^\infty_c$ (取$\widetilde{f}$ s.t. $|\widetilde{f}| = |f|$, $K(c,y)\widetilde{f}(y) = |K(c,y)f(y)|$). 进而知$\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(c,y)f(y)|dy \le C\|f\|_\infty + C|Q|^{-\frac{1}{2}}\|f\|_2$, $\forall\, f \in L^2 \cap L^\infty$ (取$f_k = f\chi_{B(0,k)}$令$k \to \infty$). 特别地$\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(c,y)f(y)|dy < \infty$, $\forall\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

T延拓至L^∞(T满足Theorem 5.6的条件):
$\forall\, f \in L^\infty$, $Q = Q(c,r)$, $Q^* = B(c, 2\sqrt{n}r)$, $f = f_1 + f_2$, $f_1 = f\chi_{Q^*} \in L^2$.
$\forall\, x \in Q$定义$T_{[Q]}f(x) = Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y) - K(c,y))f_2(y)dy$.
(i) 若$Q \subset \widetilde{Q}$, 则存在常数$c_{Q,\widetilde{Q},f}$ s.t. $T_{[Q]}f(x) = T_{[\widetilde{Q}]}f(x) + c_{Q,\widetilde{Q},f}$ a.e. $x \in Q$.
(ii) 若$f \in L^\infty_c$则(a)$T_{[Q]}f(x) = Tf(x) - \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} K(c,y)f_2(y)dy$, a.e. $x \in Q$.
(iii) 若$f \in L^2 \cap L^\infty$则(a)仍成立(取$f_k = f\chi_{B(0,k)}$令$k \to \infty$).
(iv) 若$f \in L^\infty$则$|T_{[Q]}f(x) - Tf_1(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(x,y) - K(c,y)|dy\|f\|_\infty \le C\|f\|_\infty$, a.e. $x \in Q$; $\|Tf_1\|_2 \le C|Q|^{\frac{1}{2}}\|f\|_\infty$, $\int_Q |T_{[Q]}f| \le C|Q|\|f\|_\infty$.
(v) 若方体Q, Q_1, Q_2满足$Q \subset Q_1 \cap Q_2$, 则$T_{[Q_1]}f(x) + c_{Q,Q_1,f} = T_{[Q_2]}f(x) + c_{Q,Q_2,f}$ a.e. $x \in Q_1 \cap Q_2$. (取方体Q_3 s.t. $Q_1 \cup Q_2 \subset Q_3$).
(vi) $T_{[Q]}f$可以延拓至$\mathbb{R}^n$: 取方体$\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ s.t. $\cup_{k=1}^\infty Q_k = \mathbb{R}^n$, $Q_{k-1} \subset Q_k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$ ($Q_0 = Q$). 定义$T'_{[Q]}f = \chi_Q T_{[Q]}f + \sum_{k=1}^\infty \chi_{Q_k\setminus Q_{k-1}}(T_{[Q_k]}f + c_{Q,Q_k,f})$.
(需要验证此定义与方体序列$\{Q_k\}_{k=1}^\infty$选取无关).
(vii) 若$Q \subset Q_1$, 则$T'_{[Q]}f(x) = T'_{[Q_1]}f(x) + c_{Q,Q_1,f}$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.
(viii) 任意方体Q_1, Q_2, 存在常数$c_{Q_1,Q_2,f}$ s.t. $T'_{[Q_1]}f(x) = T'_{[Q_2]}f(x) + c_{Q_1,Q_2,f}$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. (取方体Q_3 s.t. $Q_1 \cup Q_2 \subset Q_3$, 则$c_{Q_1,Q_2,f} = c_{Q_1,Q_3,f} - c_{Q_2,Q_3,f}$).
(ix) $\|T'_{[Q]}f\|_* \le C\|f\|_\infty$, $T'_{[Q]}f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. **Key point:** 任意方体$Q_1$, 由(iv)(viii)得$\int_{Q_1} |T'_{[Q]}f - c_{Q,Q_1,f}| = \int_{Q_1} |T'_{[Q_1]}f| \le C|Q|\|f\|_\infty$.
(x) (viii)(ix)说明$T'_{[Q]}f$作为$BMO(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}$的元素不依赖于方体$Q$的选取, $Tf = T'_{[Q]}f$作为$BMO(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}$的元素是良定义的, 此时$T : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}$ 是有界线性算子, 且由(iii)得$f \in L^2 \cap L^\infty$时定义不变.

Proof of (i). $T_{[Q]}f(x) = Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y) - K(c,y))f_2(y)dy$,
$T_{[\widetilde{Q}]}f(x) = T\widetilde{f}_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y) - K(c',y))\widetilde{f}_2(y)dy$, $f_1 = f\chi_{Q^*}$, $f_2 = f - f_1$,
$\widetilde{f}_1 = f\chi_{\widetilde{Q}^*}$, $\widetilde{f}_2 = f - \widetilde{f}_1$, $Q = Q(c,r)$, $Q^* = B(c, 2\sqrt{n}r)$, $\widetilde{Q} = Q(c',r')$, $\widetilde{Q}^* = B(c', 2\sqrt{n}r)$.
$Q^* \subset \widetilde{Q}^*$, $\mathrm{supp}(f_1 - \widetilde{f}_1) \subseteq \widetilde{Q}^* \setminus Q^*$, $Q \cap \mathrm{supp}(f_1 - \widetilde{f}_1) = \emptyset$, $f_1 - \widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2 - f_2$,
$T(f_1 - \widetilde{f}_1)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)(f_1 - \widetilde{f}_1)(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)(\widetilde{f}_2 - f_2)(y)dy$, $T_{[Q]}f(x) - T_{[\widetilde{Q}]}f(x)$
$= T(f_1 - \widetilde{f}_1)(x) + \int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y) - K(c,y))f_2(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y) - K(c',y))\widetilde{f}_2(y)dy$
$= \int_{\mathbb{R}^n}[K(x,y)(\widetilde{f}_2 - f_2)(y) + (K(x,y) - K(c,y))f_2(y) - (K(x,y) - K(c',y))\widetilde{f}_2(y)]dy$
$= \int_{\mathbb{R}^n}[K(c',y)\widetilde{f}_2(y) - K(c,y)f_2(y)]dy = -\int_{\widetilde{Q}^*\setminus Q^*} K(c,y)f(y)dy +$
$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{Q}^*}(K(c',y) - K(c,y))f(y)dy := c_{Q,\widetilde{Q},f}$ (与x无关) a.e. $x \in Q$. □

举例: $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$, 求$Hf$. 此时$K(x,y)=\frac{1}{\pi(x-y)}$, $Q=(-a/2,a/2)$, $Q^*=(-a,a)$, 若$|x|<a/2$则, $\pi H_{[Q]}f(x)=\text{p.v.}\int_{-a}^{a}\frac{\operatorname{sgn}(y)}{x-y}dy+\lim_{N\to\infty}(\int_{-N}^{-a}+\int_{a}^{N})(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y})\operatorname{sgn}(y)dy=$
$-\ln|x-y|\Big|_{y=0}^{y=a}+\ln|x-y|\Big|_{y=-a}^{y=0}+\ln\frac{y}{y-x}\Big|_{y=a}^{y=+\infty}-\ln\frac{y}{y-x}\Big|_{y=-\infty}^{y=-a}=$
$\ln\frac{|x|}{a-x}+\ln\frac{|x|}{a+x}-\ln\frac{a}{a-x}-\ln\frac{a}{a+x}=2\ln|x|-2\ln a$. 作为$BMO(\mathbb{R})/\mathbb{C}$的元素有$Hf(x)=\frac{2}{\pi}\ln|x|$. 这个事实可以说明$\ln|x|\in BMO(\mathbb{R})$.

6.3 Sharp极大定理, L^p与BMO之间的插值定理

Theorem 6.5. 若T是$L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子, $1<p_0<\infty$, $\|Tf\|_*\le C\|f\|_\infty$, $\forall\ f\in L_c^\infty$. 则$\|Tf\|_p\le C\|f\|_p$, $\forall\ p_0<p<\infty$, $f\in L_c^\infty$.

Lemma 6.6. 若$1\le p_0\le p<\infty$, $f\in L^{p_0}$. 则$\|M_df\|_p\le C\|M^\# f\|_p$.

注: $M_df(x)=\sup_{k\in\mathbb{Z}}|E_kf(x)|$, $E_kf(x)=\sum_{Q\in\mathcal{Q}_k}\frac{\chi_Q}{|Q|}\int_Q f$, $|f(x)|\le M_df(x)$ a.e.,
$\mathcal{Q}_k=\{\prod_{i=1}^n[\frac{a_i}{2^k},\frac{a_i+1}{2^k})|a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{Z}\}$, $\|M_df\|_{1,\infty}\le\|f\|_1$.
注: 若$M^\# f\in L^1$则$M^\# f=0$, (结合$f\in L^{p_0}$得)$f=0$ a.e., 因此可设$p>1$.
注: 定义$M_d^\# f(x)=\sup_{Q\ni x,Q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|$, $\mathcal{Q}:=\cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{Q}_k$. 则$M_d^\# f\le M^\# f$.

Lemma 6.7. 若$1\le p_0<\infty$, $f\in L^{p_0}$, $f\ge0$, $\gamma>0$, $\lambda>0$. 则
$$|\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n:M_df(x)>2\lambda,M_d^\# f(x)\le\gamma\lambda\}}_{A}|\le2^n\gamma|\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n:M_df(x)>\lambda\}}_{\Omega}|.$$

Proof. $\Omega=\cup_iQ_i$, $Q_i\in\mathcal{Q}$两两不交, 为极大元, $|\Omega|=\sum_i|Q_i|$. 因此只需证
$$|\underbrace{\{x\in Q_i:M_df(x)>2\lambda,M_d^\# f(x)\le\gamma\lambda\}}_{A_i}|\le2^n\gamma|Q_i|.\tag{6.1}$$
$\forall\ i$, $\exists|\ Q_i'\in\mathcal{Q}$ s.t. $Q_i\subset Q_i'$, $l(Q_i')=2l(Q_i)$. 则$f_{Q_i'}=\frac{1}{|Q_i'|}\int_{Q_i'}f\le\lambda$ (as $Q_i'\not\subseteq\Omega$). 若$x\in Q_i$, $M_df(x)>2\lambda$则$M_d(f\chi_{Q_i})(x)>2\lambda$, $M_d((f-f_{Q_i'})\chi_{Q_i})(x)\ge M_d(f\chi_{Q_i})(x)-f_{Q_i'}>\lambda$.
以上说明$B_i:=\{x\in Q_i:M_df(x)>2\lambda\}\subseteq C_i:=\{x:M_d((f-f_{Q_i'})\chi_{Q_i})(x)>\lambda\}$.
若$A_i\ne\emptyset$ 则 $\exists\ x_0\in Q_i\subset Q_i'$ s.t. $M_d^\# f(x_0)\le\gamma\lambda$, $A_i\subseteq B_i$,
$|A_i|\le|B_i|\le|C_i|\le\frac{1}{\lambda}\int_{Q_i}|f-f_{Q_i'}|\le\frac{1}{\lambda}\int_{Q_i'}|f-f_{Q_i'}|\le\frac{|Q_i'|}{\lambda}M_d^\# f(x_0)\le\frac{2^n|Q_i|}{\lambda}\gamma\lambda=2^n\gamma|Q_i|$,
(6.1)成立. 其中用到$\|M_d\varphi\|_{1,\infty}\le\|\varphi\|_1$(for $\varphi=(f-f_{Q_i'})\chi_{Q_i}$).
若$A_i=\emptyset$ 则$|A_i|=0\le2^n\gamma|Q_i|$, (6.1)也成立. 这说明(6.1)恒成立,
结合$A\subseteq\Omega=\cup_iQ_i$, $|\Omega|=\sum_i|Q_i|$, 得$A=\cup_i(A\cap Q_i)=\cup_iA_i$,
$|A|\le\sum_i|A_i|\le\sum_i2^n\gamma|Q_i|=2^n\gamma|\Omega|$. 命题得证. □

Proof of Lemma 6.6. 设$p>1$. (i) $f\ge0$. $\forall\ N\in(0,\infty)$, 设
$I_N=\int_0^Np\lambda^{p-1}a_{M_df}(\lambda)d\lambda$. 首先说明$I_N<\infty$.

- 若$p_0>1$, 由$f\in L^{p_0}$得$M_df\in L^{p_0}$,
  $I_N\le\frac{p}{p_0}N^{p-p_0}\int_0^Np_0\lambda^{p_0-1}a_{M_df}(\lambda)d\lambda\le\frac{p}{p_0}N^{p-p_0}\|M_df\|_{p_0}^{p_0}<\infty$.
- 若$p_0=1$, 由$f\in L^1$得$M_df\in L^{1,\infty}$, 结合$p>1$得
  $I_N\le\int_0^Np\lambda^{p-1}\lambda^{-1}\|M_df\|_{1,\infty}d\lambda\le\frac{p}{p-1}N^{p-1}\|M_df\|_{1,\infty}<\infty$.

由a_{M_df}, 的定义和Lemma 6.7得$a_{M_df}(2\lambda)=|\{x\in\mathbb{R}^n:M_df(x)>2\lambda\}|\le|\{x\in\mathbb{R}^n:M_df(x)>2\lambda,M_d^\# f(x)\le\gamma\lambda\}|+|\{x\in\mathbb{R}^n:M_d^\# f(x)>\gamma\lambda\}|\le2^n\gamma a_{M_df}(\lambda)+a_{M_d^\# f}(\gamma\lambda)$.

结合换元法得$I_N = 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} a_{M_d f}(2\lambda) d\lambda \le$
$2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1}(2^n \gamma a_{M_d f}(\lambda) + a_{M_d^\# f}(\gamma\lambda)) d\lambda = 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} 2^n \gamma a_{M_d f}(\lambda) d\lambda +$
$(2/\gamma)^p \int_0^{\gamma N/2} p\lambda^{p-1} a_{M_d^\# f}(\lambda) d\lambda \le 2^{p+n}\gamma I_N + (2/\gamma)^p \|M_d^\# f\|_p^p$. 取$\gamma = 2^{-n-p-1}$则
$2^{p+n}\gamma = 1/2$, $I_N \le 2(2/\gamma)^p \|M_d^\# f\|_p^p$. 令$N \to \infty$得$\int_0^\infty p\lambda^{p-1} a_{M_d f}(\lambda) d\lambda \le 2(2/\gamma)^p \|M_d^\# f\|_p^p$,
i.e. $\|M_d f\|_p^p \le 2(2/\gamma)^p \|M_d^\# f\|_p^p$, $\|M_d f\|_p \le C_1 \|M_d^\# f\|_p$, $C_1 = 2^{1/p}(2/\gamma) = 2^{1/p+n+p+2}$.
结合$M_d^\# f \le M^\# f$得$\|M_d f\|_p \le C_1 \|M^\# f\|_p$.
(ii) 一般情形. $\|M_d f\|_p \le \|M_d |f|\|_p \le C_1 \|M^\# |f|\|_p \le 2C_1 \|M^\# f\|_p$. □

注: (i)若$f \in L^1$, $M_d^\# f \in L^p$, $1 < p < \infty$, 则
$f \in L^p$, $\|f\|_p \le \|M_d f\|_p \le C\|M_d^\# f\|_p$. ($C$是只与$n$, p有关的常数,下同)
(ii)若$f \in L^1_{loc}$, $M_d^\# f \in L^p$, $1 < p < \infty$, $Q \in \mathcal{Q}$, 则
$(f - f_Q)\chi_Q \in L^1$, $M_d^\#[(f - f_Q)\chi_Q] \le 2M_d^\# f$,
$\|(f - f_Q)\chi_Q\|_p \le C\|M_d^\#[(f - f_Q)\chi_Q]\|_p \le C\|M_d^\# f\|_p$.
(iii)若$f \in L^1_{loc}$, $M^\# f \in L^p$, $1 < p < \infty$, 则$\forall$方体Q有
$\|(f - f_Q)\chi_Q\|_p \le C\|M^\# f\|_p$; $\exists\, a \in \mathbb{C}$ s.t. $\|f - a\|_p \le C\|M^\# f\|_p$;
进而若$\exists\, q \in [1, \infty)$ s.t. $f \in L^{q,\infty}$, 则$a = 0$, $\|f\|_p \le C\|M^\# f\|_p$.
注: 若$f \in L^p \cap BMO$, $1 \le p < q < \infty$, 则$M^\# f \in L^{p,\infty} \cap L^\infty \subset L^q$, $M_d f \in L^q$,
$f \in L^q$. $\|f\|_q^q \le C\|M^\# f\|_q^q \le C\|M^\# f\|_{p,\infty}^p \|M^\# f\|_\infty^{q-p} \le C\|f\|_p^p \|f\|_*^{q-p}$.
取$q = 2p$可得$\|fg\|_p \le \|f\|_{2p}\|g\|_{2p} \le C(\|f\|_p\|f\|_*\|g\|_p\|g\|_*)^{1/2}$.

Proof of Theorem 6.5. $T_1 f = M^\#(Tf)$为次线性算子. (i) T_1强(p_0, p_0).
$\|T_1 f\|_{p_0} = \|M^\#(Tf)\|_{p_0} \le 2\|M''(Tf)\|_{p_0} \le C\|Tf\|_{p_0} \le C\|f\|_{p_0}$.
(ii) T_1强(∞, ∞). $\|T_1 f\|_\infty = \|M^\#(Tf)\|_\infty = \|Tf\|_* \le C\|f\|_\infty$.
结合Marcinkiewicz插值定理得T_1是强(p,p)型, $\forall\ p_0 < p < \infty$.
$\|Tf\|_p \le C\|M^\#(Tf)\|_p = C\|T_1 f\|_p \le C\|f\|_p$. (用到$Tf \in L^{p_0}$) □

注: 若$[1 < p_0 < \infty$, T是强(p_0, p_0)型$]$改为$[p_0 = 1$, T是强$(1,1)$型$]$或
$[1 < p_0 < \infty$, T是弱(p_0, p_0)型$]$. 则$T_1 = M^\# \circ T$是弱(p_0, p_0)型, 结论仍成立.
注: 若T是线性算子改为T是次线性算子结论仍成立. **Key point:**
若$f = f_0 + f_1$, $\nu \in (0, 1]$则$||Tf|^\nu - |Tf_1|^\nu| \le |Tf_0|^\nu$,
$M^\#|Tf|^\nu - M^\#|Tf_1|^\nu \le M^\#(|Tf|^\nu - |Tf_1|^\nu) \le 2M''(|Tf|^\nu - |Tf_1|^\nu) \le 2M''|Tf_0|^\nu$. i.e.
$M^\#(|T(f_0 + f_1)|^\nu) \le M^\#(|Tf_1|^\nu) + 2M''(|Tf_0|^\nu)$.
注: Marcinkiewicz插值定理可以推广为: 若$|T(f_0 + f_1)| \le |T_0 f_0| + |T_1 f_1|$,
$1 \le p_0 < p < p_1 \le \infty$, T_0是弱(p_0, p_0)型, T_1是弱(p_1, p_1)型, 则T是强(p,p)型.
注: Theorem 6.5可改为: 若$1 \le p_0 < p < \infty$, T是弱(p_0, p_0)型次线性算子,
$\|Tf\|_* \le C\|f\|_\infty$, 则$T$是强$(p,p)$型.
取$\nu = 1/2$, $T_1 f = (M^\#|Tf|^\nu)^2$, $T_0 f = (M''|Tf|^\nu)^2$, 则$|T_1(f_0 + f_1)|^\nu \le |T_1 f_1|^\nu + 2|T_0 f_0|^\nu$,
$|T_1(f_0 + f_1)| \le 5(|T_1 f_1| + |T_0 f_0|)$. (i) T_0弱(p_0, p_0).
$\|T_0 f\|_{p_0,\infty} = \|M''|Tf|^\nu\|_{2p_0,\infty}^2 \le C\||Tf|^\nu\|_{2p_0,\infty}^2 = C\|Tf\|_{p_0,\infty} \le C\|f\|_{p_0}$.
(ii) T_1强(∞, ∞). $\|T_1 f\|_\infty = \|M^\#|Tf|^\nu\|_\infty^2 \le (2\||M^\# Tf|^\nu\|_\infty)^2 = 4\|M^\# Tf\|_\infty = 4\|Tf\|_* \le C\|f\|_\infty$. 因此$T_1$强$(p,p)$. $\|Tf\|_p = \||Tf|^\nu\|_{2p}^2 \le C\|M^\#|Tf|^\nu\|_{2p}^2 = C\|T_1 f\|_p \le C\|f\|_p$.

6.4 John-Nirenberg不等式 $\ln\frac{1}{|x|} \in BMO(\mathbb{R})$, $\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x|} = 1 - \ln a$,

$|\{x\in(-a,a):|\ln\frac{1}{|x|}-(1-\ln a)|>\lambda\}|=2ae^{-\lambda-1}$, $\forall\ \lambda>1$, i.e. 分布函数有指数衰减, John-Nirenberg不等式说明这是BMO函数的普遍现象.

Theorem 6.8 (John-Nirenberg)**.** *∃的常数$C_1,C_2>0$, s.t. 若$f\in BMO(\mathbb{R}^n)$, 方体$Q\subset\mathbb{R}^n$, $\lambda>0$, 则$|\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>\lambda\}|\le C_1e^{-C_2\lambda/\|f\|_*}|Q|$. ($C_1,C_2>0$只与$n$有关)*

Proof. 不妨设$\|f\|_*=1$, 否则考虑$f/\|f\|_*$. 由平移伸缩不变性
(i.e. $\|f(ax+b)\|_*=\|f\|_*$, $\forall\ a>0$, $b\in\mathbb{R}^n$)不妨设$Q\in\mathcal{Q}$.
设$I_{\lambda,Q}=\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>\lambda\}$, $F(\lambda)=\sup\limits_{Q\in\mathcal{Q}}\frac{|I_{\lambda,Q}|}{|Q|}$. 则只需证$F(\lambda)\le C_1e^{-C_2\lambda}$.
Claim 1: $F(\lambda)\le F(\lambda-2^{n+1})/2$, $\forall\ \lambda>2^{n+1}$.

Proof. Fix $Q\in\mathcal{Q}$. 设$\widetilde{f}=(f-f_Q)\chi_Q$. 对$|\widetilde{f}|$作水平为2的Calderon-Zygmund分解.
∃ 不交方体$\{Q_k\}\subset\mathcal{Q}$ s.t. $\sum_k|Q_k|\le\frac12\|\widetilde{f}\|_1$, $2<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|\widetilde{f}|\le 2^{n+1}$, $|\widetilde{f}|\le 2$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega$, $\Omega:=\cup_kQ_k$. $\|\widetilde{f}\|_1=\int_Q|f-f_Q|\le|Q|\|f\|_*=|Q|$,
$\sum_k|Q_k|\le\frac12\|\widetilde{f}\|_1\le\frac12|Q|$. 设$Z:=\{x\in Q:|\widetilde{f}(x)|>2,x\notin\Omega\}$, 则$|Z|=0$.
Claim 2: $I_{\lambda,Q}\setminus Z\subseteq\cup_jI_{\lambda-2^{n+1},Q_j}$, $\forall\ \lambda>2^{n+1}$.

Proof. 若$\lambda>2^{n+1}>2$, $x\in I_{\lambda,Q}\setminus Z$, 则$|\widetilde{f}(x)|=|f(x)-f_Q|>\lambda>2$, $x\in\Omega$, ∃ j s.t. $x\in Q_j$,
$|f_{Q_j}-f_Q|=\left|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}(f-f_Q)\right|\overset{(a)}{=}\left|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\widetilde{f}\right|\le\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|\widetilde{f}|\le2^{n+1}$.
$|f(x)-f_{Q_j}|\ge|f(x)-f_Q|-|f_{Q_j}-f_Q|>\lambda-2^{n+1}>0$, 结合$x\in Q_j$得$x\in I_{\lambda-2^{n+1},Q_j}$, 结论成立. **注:** (a)用到$|Q_j|\le\frac12|Q|<|Q|\Rightarrow Q_j\subset Q$. 否则$Q_j\cap Q=\emptyset$, $\int_{Q_j}|\widetilde{f}|=0$, 矛盾. □

结合$|Z|=0$, $|I_{\lambda-2^{n+1},Q_j}|\le F(\lambda-2^{n+1})|Q_j|$, $\sum_j|Q_j|\le\frac12|Q|$得
$|I_{\lambda,Q}|=|I_{\lambda,Q}\setminus Z|\le\sum_jF(\lambda-2^{n+1})|Q_j|\le F(\lambda-2^{n+1})(\frac12|Q|)$.
i.e. $\frac{|I_{\lambda,Q}|}{|Q|}\le F(\lambda-2^{n+1})/2$, $\forall\ Q\in\mathcal{Q}$; $F(\lambda)\le F(\lambda-2^{n+1})/2$. ($\lambda>2^{n+1}$) □

由定义$F(\lambda)\le1$, $\forall\ \lambda>0$. $\forall\ \lambda>0$, ∃ $N\in\mathbb{Z}$, $N\ge0$ s.t. $0<\lambda-N2^{n+1}$ $\le2^{n+1}$. 取$C_2=2^{-n-1}\ln2$则$C_2\lambda\le(N+1)\ln2$, $e^{-C_2\lambda}\ge2^{-N-1}$. 由Claim 1和归纳法得$F(\lambda)\le F(\lambda-N2^{n+1})/2^N\le1/2^N\le2e^{-C_2\lambda}$. 结论成立. □

Corollary 6.2. $\|f\|_{*,p}=\sup\limits_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|^p\right)^{\frac1p}$*是BMO的范数且与$\|\cdot\|_*$等价, $\forall\ 1<p<\infty$,.*

Proof. 由Hölder不等式得$\|f\|_*\le\|f\|_{*,p}$, 只需再证$\|f\|_{*,p}\le C_p\|f\|_*$. 由Theorem 6.8得$\int_Q|f-f_Q|^p=\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>\lambda\}|d\lambda\le$
$\int_0^\infty p\lambda^{p-1}C_1e^{-C_2\lambda/\|f\|_*}|Q|d\lambda\overset{s=C_2\lambda/\|f\|_*}{=}C_1p|Q|(\|f\|_*/C_2)^p\int_0^\infty s^{p-1}e^{-s}ds=$
$C_1p|Q|\Gamma(p)C_2^{-p}\|f\|_*^p$. i.e. $\|f\|_{*,p}\le(C_1p\Gamma(p))^{1/p}C_2^{-1}\|f\|_*$. □

Corollary 6.3. *若$f\in BMO$, 则∃ $\lambda>0$ s.t. ∀方体Q有$\int_Qe^{\lambda|f-f_Q|}<\infty$.*

Proof. 若$0<\lambda<C_2/\|f\|_*$, 则由Theorem 6.8得
$\int_Qe^{\lambda|f-f_Q|}=|Q|+\int_0^\infty\lambda e^{\lambda s}|\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>s\}|ds\le$
$|Q|+\int_0^\infty\lambda e^{\lambda s}C_1e^{-C_2s/\|f\|_*}|Q|d\lambda=|Q|+\frac{\lambda C_1|Q|}{C_2/\|f\|_*-\lambda}<\infty$. □

Corollary 6.4. *若$f\in L^1_{loc}$, ∃ $C_1,C_2,K>0$ s.t. ∀方体Q, $\lambda>0$有 $|\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>\lambda\}|\le C_1e^{-C_2\lambda/K}|Q|$, 则$f\in BMO$.*

Proof. $\int_Q|f-f_Q|=\int_0^\infty|\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>\lambda\}|d\lambda\le\int_0^\infty C_1e^{-C_2\lambda/K}|Q|d\lambda=C_1|Q|K/C_2$, i.e. $\|f\|_*\le C_1K/C_2$, $f\in BMO$. □

5.5 向量值奇异积分算子. 向量值可测函数.

B: Banach 空间. $F:\mathbb{R}^n\to B$ 可测定义为$\exists\ X_0\subset\mathbb{R}^n$, $B_0\subset B$, B_0 **可分**, s.t.
(i) $|\mathbb{R}^n\setminus X_0|=0$, (ii) $F[X_0]\subset B_0$, (iii) $\forall\ b'\in B^*$, $x\mapsto\langle b',F(x)\rangle$ 可测.
反例: $F(t)=\chi_{(0,t)}$, $F:\mathbb{R}\to L^\infty(\mathbb{R})$不可测. (条件(ii)的重要性)

注: 若$F:\mathbb{R}^n\to B$ 可测则$x\mapsto\|F(x)\|_B$ 可测.
Key point: 由B_0 可分得$\exists B_1\subset B_0\subset\overline{B_1}$, $B_1=\{x_i\}_{i=1}^\infty$;
由Hahn-Banach定理得$\exists\ b_i\in B^*$ s.t. $\|b_i\|_{B^*}=1$, $\langle b_i,x_i\rangle=\|x_i\|_B$;
此时$\|F(x)\|_B=\sup_i|\langle b_i,F(x)\rangle|$ $(\forall\ x\in X_0)$.

向量值L^p函数. $\forall\ 0<p\le\infty$, 定义(i) $L^p(\mathbb{R}^n,B)=$
$\{F|F:\mathbb{R}^n\to B$ 可测, $x\mapsto\|F(x)\|_B\in L^p(\mathbb{R}^n)\}$, $\|F\|_p=\|\|F(x)\|_B\|_p$. (ii) $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n,B)=$
$\{F|F:\mathbb{R}^n\to B$ 可测, $x\mapsto\|F(x)\|_B\in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)\}$, $\|F\|_{p,\infty}=\|\|F(x)\|_B\|_{p,\infty}$.
(iii) $L^p\otimes B=\{F=\sum_{j=1}^m f_ju_j|f_j\in L^p(\mathbb{R}^n),u_j\in B,m\in\mathbb{Z}_+\}\subset L^p(\mathbb{R}^n,B)$.
注: 若$1\le p\le\infty$ 则$L^p(\mathbb{R}^n,B)$ 是Banach 空间. 若$1\le p<\infty$ 则$L^p\otimes B$ 在$L^p(\mathbb{R}^n,B)$中稠密; $\sum_{j=1}^\infty\chi_{E_j}u_j$ 在$L^\infty(\mathbb{R}^n,B)$中稠密.
注: 可以类似定义$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n,B)$, $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n,B)$.

向量值L^1函数的积分. 若$F=\sum_{j=1}^m f_ju_j\in L^1\otimes B$ 定义
$\int_{\mathbb{R}^n}F(x)dx=\sum_{j=1}^m(\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)dx)u_j\in B$. 良定义性(即不依赖于分解的选取):

$$\langle b',\int_{\mathbb{R}^n}F(x)dx\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\langle b',F(x)\rangle dx,\quad\forall\ b'\in B^*.\tag{7.1}$$

由$L^1\otimes B$的稠密性, $F\to\int_{\mathbb{R}^n}F(x)dx$可以唯一延拓至$L^1(\mathbb{R}^n,B)$ s.t.(7.1)成立.

注: 若$F:\mathbb{R}^n\to B$ 在U上连续, $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, $|\mathbb{R}^n\setminus U|=0$, 则$F$可测.
Key point: $\exists$紧集K_j s.t. $U=\cup_{j=1}^\infty K_j$; 由F连续得$F[K_j]$是紧集, 因此可分; 此时$F[U]=\cup_{j=1}^\infty F[K_j]$可分. F连续$\Rightarrow x\mapsto\langle b',F(x)\rangle$在$U$上连续, 因此可测.

若A,B是Banach 空间, 则$\mathcal{L}(A,B)$也是. 下面说明若$K:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\backslash\Delta\to\mathcal{L}(A,B)$, $F:\mathbb{R}^n\to A$都可测, 则$(x,y)\mapsto K(x,y)\cdot F(y)$可测.
Key point: (i) 由K可测得$\forall\ a\in A,\ b\in B^*$, $(x,y)\mapsto\langle b,K(x,y)\cdot a\rangle$可测.
(ii) 由F可测得$\exists\ A_0\subset A$, A_0 可分 s.t. $F(y)\in A_0\subset A$ a.e., $\exists\ A_1\subset A_0\subset\overline{A_1}$,
$A_1=\{x_i\}_{i=1}^\infty$; 若$b\in B^*$ 则$\langle b,K(x,y)\cdot F(y)\rangle=\inf_i(\langle b,K(x,y)\cdot x_i\rangle+\|b\|_{B^*}\|K(x,y)\|_{\mathcal{L}(A,B)}\|F(y)-x_i\|_A)$ a.e., 是(x,y)的可测函数.
(iii) 下面验证像集的可分性. 由K可测得$\exists\ L_0\subset\mathcal{L}(A,B)$, L_0 可分 s.t.
$K(x,y)\in L_0$ a.e., $\exists\ L_1\subset L_0\subset\overline{L_1}$, $L_1=\{T_i\}_{i=1}^\infty$, 设$B_1=\{T_ix_j\}_{i,j=1}^\infty$ 则$K(x,y)\cdot F(y)\in\overline{B_1}$ a.e.

Theorem 7.1. 设$T:L^r(\mathbb{R}^n,A)\to L^r(\mathbb{R}^n,B)$有界线性: $\|Tf\|_r\le A_1\|f\|_r$, $1<r<\infty$, $K\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta,\mathcal{L}(A,B))$. 满足
(i) $\forall\ f\in L^\infty_c(\mathbb{R}^n,A)$, $Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)dy$ *a.e.* $x\in\mathbb{R}^n\backslash suppf$. *(ii)Hörmander*条件*:*
$\int_{\{|x-y|>2|y-z|\}}\|K(x,y)-K(x,z)\|_{\mathcal{L}(A,B)}dx\le A_2$, $\forall\ y\in\mathbb{R}^n$;
$\int_{\{|x-y|>2|x-w|\}}\|K(x,y)-K(w,y)\|_{\mathcal{L}(A,B)}dy\le A_2$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$.
则$\|Tf\|_p\le C_p\|f\|_p$ *(*$1<p<\infty$*)*, $\|Tf\|_{1,\infty}\le C_1\|f\|_1$. *(*$A$, B是*Banach*空间*)*

标准核条件:(⇒Hörmander条件) $\exists\ \delta > 0$ s.t. (a) $\|K(x,y)\|_{\mathcal{L}(A,B)} \leq \frac{C}{|x-y|^n}$,
(b) 若$|x-y| > 2|y-z|$则$\|K(x,y) - K(x,z)\|_{\mathcal{L}(A,B)} \leq \frac{C|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}$,
(c) 若$|x-y| > 2|x-w|$则$\|K(x,y) - K(x,z)\|_{\mathcal{L}(A,B)} \leq \frac{C|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}$.
注: 标准核条件$\Rightarrow K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathcal{L}(A,B)$连续$\Rightarrow K$可测.
注: 若$K(x,y) = K(x-y)$则Hörmander条件$\Leftrightarrow \int_{\{|x|>2|y|\}} \|K(x-y) - K(x)\|_{\mathcal{L}(A,B)} dx \leq A_2$.
注: 若满足(i)则定义T的积分核为K.
注: $C_1 \leq C(A_1 + A_2)$, $C_p \leq C(A_1 + A_2)$, C是只与n, p, r有关的常数.

Proof. **Step 1:** 弱$(1,1)$. $\forall\ \lambda > 0$, 对$\|f(x)\|_A$作Calderon-Zygmund分解, $\exists$ 不交方体$\{Q_k\}$ s.t. $\sum_k |Q_k| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$, $\lambda < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} \|f(x)\|_A \leq 2^n\lambda$, $\|f(x)\|_A \leq \lambda$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $\Omega := \cup_k Q_k$.
$f = g + b$, 其中$g = \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f := a_k$ in Q_k,
$g = f$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $b = \sum_j b_j$, $b_j = (f - a_j)\chi_{Q_j}$. ($\int_E f := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E f$).
则$\operatorname{supp} b_j \subseteq \overline{Q_j}$, $\int b_j = 0$, $\|g\|_\infty \leq 2^n\lambda$, $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$.
$\|g\|_r^r \leq \|g\|_\infty^{r-1}\|g\|_1 \leq (2^n\lambda)^{r-1}\|f\|_1$. $\sum_j \|b_j\|_1 = \|b\|_1 \leq 2\|f\|_1$.
$\|Tb\|_B \leq \sum_j \|Tb_j\|_B$, $\|Tf\|_B \leq \|Tg\|_B + \|Tb\|_B$, a.e.
$a_{\|Tf\|_B}((2^n A_1 + A_2)\lambda) \leq a_{\|Tg\|_B}(2^n A_1\lambda) + a_{\|Tb\|_B}(A_2\lambda)$.
$a_{\|Tg\|_B}(2^n A_1\lambda) \leq \frac{1}{(2^n A_1\lambda)^r}\|Tg\|_r^r \leq \frac{A_1^r}{(2^n A_1\lambda)^r}\|g\|_r^r = \frac{\|g\|_r^r}{(2^n\lambda)^r} \leq \frac{(2^n\lambda)^{r-1}\|f\|_1}{(2^n\lambda)^r} = \frac{\|f\|_1}{2^n\lambda}$.
设$Q_j = Q(x_j, r_j)$, $Q_j^* = B(x_j, 2\sqrt{n}r_j)$, $Q^* = \cup_j Q_j^*$则$|Q^*| \leq \sum_j |Q_j^*| = C_n \sum_j |Q_j| \leq \frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1$.
其中$C_n = (\sqrt{n})^n\alpha(n)$, $\alpha(n) = |B(0,1)|$.
$a_{\|Tb\|_B}(A_2\lambda) \leq |Q^*| + \frac{1}{A_2\lambda}\|Tb\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus Q^*)} \leq \frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{1}{A_2\lambda}\sum_j \|Tb_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*)}$.
由$\operatorname{supp} b_j \subseteq \overline{Q_j} = Q(x_j, r_j) \subset B(x_j, \sqrt{n}r_j)$, $\int b_j = 0$, $Q_j^* = B(x_j, 2\sqrt{n}r_j)$和条件(i)得
$Tb_j(x) = \int_{Q_j} K(x,y)\cdot b_j(y)dy = \int_{Q_j}(K(x,y) - K(x,x_j))b_j(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q^*$.

$\|Tb\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus Q^*)} \leq \int_{\mathbb{R}\setminus Q_j^*}\int_{Q_j} \|b_j(y)\|_A \|K(x,y) - K(x,x_j)\|_{\mathcal{L}(A,B)} dydx \overset{(a)}{\leq} A_2\|b_j\|_1$.
$a_{\|Tb\|_B}(A_2\lambda) \leq \frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{1}{A_2\lambda}\sum_j A_2\|b_j\|_1 \leq \frac{C_n+2}{\lambda}\|f\|_1$. 以上说明
$a_{\|Tf\|_B}((2^n A_1 + A_2)\lambda) \leq a_{\|Tg\|_B}(2^n A_1\lambda) + a_{\|Tb\|_B}(A_2\lambda) \leq \frac{\|f\|_1}{2^n\lambda} + \frac{C_n+2}{\lambda}\|f\|_1 \leq \frac{C_n+3}{\lambda}\|f\|_1$.
由$\lambda > 0$的任意性得$\|Tf\|_{1,\infty} \leq (2^n A_1 + A_2)(C_n + 3)\|f\|_1$.
注: (a)用到若$y \in Q_j$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q_j^*}$, 则$|x - x_j| > 2\sqrt{n}r_j \geq 2|y - x_j|$,
$\int_{\mathbb{R}\setminus Q_j^*} \|K(x,y) - K(x,x_j)\|_{\mathcal{L}(A,B)} dx \leq \int_{\{|x-x_j|>2|y-x_j|\}} \|K(x,y) - K(x,x_j)\|_{\mathcal{L}(A,B)} dx \leq A_2$.
Step 2. 对于给定的$a \in L^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, $\|a\|_\infty \leq 1$, 设$T_a f := T(f\cdot a)$. 则$f \to \|T_a f(x)\|_B$ 次线性, $\|T_a f\|_r = \|T(f\cdot a)\|_r \leq A_1\|f\cdot a\|_r \leq A_1\|f\cdot a\|_r$.
$\|T_a f\|_{1,\infty} = \|T(f\cdot a)\|_{1,\infty} \leq C_1\|f\cdot a\|_1 \leq C_1\|f\|_1$. 由Marcinkiewicz插值定理得,
$\|T_a f\|_p \leq C_p\|f\|_p$, $\forall\ f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq r$.
Step 3. 若$r < p < \infty$, 首先证明$\|\|T_a f\|_B\|_* \leq C\|f\|_\infty$, $(\|a\|_\infty \leq 1)$.

Proof. 给定方体Q, 设$Q = Q(c,r)$, $Q^* = B(c, 2\sqrt{n}r)$, $f = f_1 + f_2$,
$f_1 = f\chi_{Q^*}$, $f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}$. $T_a f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} K(x,y)\cdot a(y)f(y)dy$, a.e. $x \in Q$.
设$b = \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} K(c,y)\cdot a(y)f(y)dy$, 则$T_a f_2(x) - b = \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}(K(x,y) - K(c,y))\cdot a(y)f(y)dy$,
$\|T_a f_2(x) - b\|_B \leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} \|K(x,y) - K(c,y)\|_{\mathcal{L}(A,B)} dy\|f\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$, a.e. $x \in Q$.
$\|T_a f_1\|_r \leq C\|f_1\|_r \leq C|Q^*|^{\frac{1}{r}}\|f\|_\infty \leq C|Q|^{\frac{1}{r}}\|f\|_\infty$, $T_a f = T_a f_1 + T_a f_2$, $\int_Q |\|T_a f\|_B - \|b\|_B| \leq \int_Q \|T_a f_1\|_B + \int_Q \|T_a f_2 - b\|_B \leq C|Q|^{1-\frac{1}{r}}\|Tf_1\|_r + \int_Q C\|f\|_\infty \leq C|Q|\|f\|_\infty$.
因此$\|\|T_a f\|_B\|_*' \leq C\|f\|_\infty$, $\|\|T_a f\|_B\|_* \leq C\|f\|_\infty$. □

结合Theorem 6.5的推广$(p_0=r)$得$\|T_af\|_p \le C_p\|f\|_p, \forall\ f\in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
以上说明$\|T_af\|_p \le C_p\|f\|_p, \forall\ f\in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, $a\in L^\infty(\mathbb{R}^n,A)$, $\|a\|_\infty\le 1$
(关键点：C_p与a无关). $\forall\ f\in L_c^\infty(\mathbb{R}^n,A)$, 取$a(x)=f(x)/\|f(x)\|_A$(若$0<\|f(x)\|_A<\infty$), $a(x)=0$(若$\|f(x)\|_A=0$或∞), $g(x)=\|f(x)\|_A$. 则$f=ga$ a.e., $a\in L^\infty(\mathbb{R}^n,A)$, $\|a\|_\infty\le 1$, $Tf=T_ag$, $\|Tf\|_p=\|T_ag\|_p\le C_p\|f\|_p=C_p\|g\|_p$. □

8.1 向量值不等式

Theorem 7.2. *设$K\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $K\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. 满足(i)$\|\widehat{K}\|_\infty\le A_1$.*
(ii)Hörmander条件:$\int_{\{|x|>2|y|\}}|K(x-y)-K(x)|dx\le A_2$, $\forall\ y\in\mathbb{R}^n$.
$Tf=K*f$. $p,r\in(1,\infty)$. 则$\|(\sum_j|Tf_j|^r)^{1/r}\|_p\le C\|(\sum_j|f_j|^r)^{1/r}\|_p$,
$\|(\sum_j|Tf_j|^r)^{1/r}\|_{1,\infty}\le C\|(\sum_j|f_j|^r)^{1/r}\|_1$.

注: $C\le C_1(A+B)$, C_1是只与n,p,r有关的常数.

Proof. (i) 由Theorem 5.2得$\|Tf\|_r\le C\|f\|_r$, $\forall\ f\in L^r(\mathbb{R}^n)$.
(ii) 设$A=B=l^r$, $(\vec{T}\vec{f})_j=Tf_j$, 其中$\vec{f}=(f_j)_{j=1}^\infty$, 则
$\|\vec{T}\vec{f}\|_r^r=\sum_j\|Tf_j\|_r^r\le C\sum_j\|f_j\|_r^r=C\|\vec{f}\|_r^r$, i.e. $\|\vec{T}\vec{f}\|_r\le C\|\vec{f}\|_r$.
(iii) $\vec{T}$的积分核为$\vec{K}$, $\vec{K}(x,y)=\vec{K}(x-y)$, $\vec{K}(x)=K(x)I$, I 是l^r的恒同算子
$\int_{\{|x|>2|y|\}}\|\vec{K}(x)-\vec{K}(x-y)\|_{l^r\to l^r}dx=\int_{\{|x|>2|y|\}}|K(x-y)-K(x)|dx\le A_2$.
i.e. $\vec{K}$满足Hörmander条件.
(iv) 由Theorem 7.1得$\|\vec{T}\vec{f}\|_p\le C\|\vec{f}\|_p$, $\|\vec{T}\vec{f}\|_{1,\infty}\le C\|\vec{f}\|_1$, $\forall\ \vec{f}\in L_c^\infty(\mathbb{R}^n,l^r)$.
对一般的$\vec{f}\in L^p(\mathbb{R}^n,l^r)$, 与Theorem 7.4的证明同理可得结论成立. □

推广: 若$T_jf=K_j*f$, $K_j\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $K_j\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $\|\widehat{K}_j\|_\infty\le A_1$.
$\int_{\{|x|>2|y|\}}\sup_j|K_j(x-y)-K_j(x)|dx\le A_2$, $\forall\ y\in\mathbb{R}^n$. 则$\forall\ p,r\in(1,\infty)$,
$\|(\sum_j|T_jf_j|^r)^{1/r}\|_p\le C\|(\sum_j|f_j|^r)^{1/r}\|_p$.

Corollary 7.1. *若$I_j=(a_j,b_j)\subset\mathbb{R}$, $\widehat{S_jf}(\xi)=\chi_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, 则*
$\|(\sum_j|S_jf_j|^r)^{1/r}\|_p\le C_{p,r}\|(\sum_j|f_j|^r)^{1/r}\|_p$, $\forall\ p,r\in(1,\infty)$.

Proof. (i) 由Lemma 3.2得$S_jf_j=\frac{i}{2}(M_{a_j}HM_{-a_j}f_j-M_{b_j}HM_{-b_j}f_j)$, 其中
$M_af(x)=e^{2\pi iax}f(x)$, $|M_af|=|f|$.
(ii) 对$Tf=Hf$, $K(x)=\frac{1}{\pi x}$, 用Theorem 7.1得$\|(\sum_j|Hf_j|^r)^{1/r}\|_p\le C_{p,r}\|(\sum_j|f_j|^r)^{1/r}\|_p$.
(iii) 由(ii)得$\|(\sum_j|M_{a_j}HM_{-a_j}f_j|^r)^{1/r}\|_p=\|(\sum_j|HM_{-a_j}f_j|^r)^{1/r}\|_p\le$
$C_{p,r}\|(\sum_j|M_{-a_j}f_j|^r)^{1/r}\|_p=C_{p,r}\|(\sum_j|f_j|^r)^{1/r}\|_p$. 同理
$\|(\sum_j|M_{b_j}HM_{-b_j}f_j|^r)^{1/r}\|_p\le C_{p,r}\|(\sum_j|f_j|^r)^{1/r}\|_p$. 结合(i)得结论成立. □

8.2 Littlewood-Paley 理论 定义
$\Delta_j=(-2^{j+1},-2^j]\cup[2^j,2^{j+1})$, $\widehat{S_jf}(\xi)=\chi_{\Delta_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, $j\in\mathbb{Z}$. 若$f\in L^2(\mathbb{R})$则
$\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_2=\|f\|_2$ (as $\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2$).

Theorem 7.3. *$c_p\|f\|_p\le\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|f\|_p(f\in L^p$, $1<p<\infty)$.*

设$\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $0\le\psi\le1$, supp$\psi\subseteq\{\frac{1}{2}\le|\xi|\le4\}$, $\psi=1$ on $\{1\le|\xi|\le2\}$. 定义
$\psi_j(\xi)=\psi(2^{-j}\xi)$, $\mathcal{F}(\widetilde{S}_jf)(\xi)=\psi_j(\xi)\widehat{f}(\xi)$, 则$S_j\widetilde{S}_j=S_j$. 设$\widehat{\Psi}=\psi$ i.e. $\Psi=\overline{\mathcal{F}}\psi$,
$\Psi_j(x)=2^j\Psi(2^jx)$, 则$\Psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\widehat{\Psi_j}=\psi_j$, $\widetilde{S}_jf=\Psi_j*f$.

Theorem 7.4. *若$f\in L^p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$, 则$\|(\sum_j|\widetilde{S}_jf|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|f\|_p$.*

Proof. (i) 设$A=\mathbb{C}$, $B=l^2$, $\vec{T}f=(\widetilde{S}_jf)_{j\in\mathbb{Z}}$, 则
$\|\vec{T}f\|_2^2=\sum_j\|\widetilde{S}_jf\|_2^2=\sum_j\|\mathcal{F}(\widetilde{S}_jf)\|_2^2=\sum_j\int_{\mathbb{R}}|\psi_j(\xi)|^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\le 3\|f\|_2^2$. 其中用到
$\forall\ \xi\in\mathbb{R}$, $|\psi_j(\xi)|\le 1$, $|\{j\in\mathbb{Z}|\psi_j(\xi)\ne 0\}|\le 3$.
(ii) $\vec{T}$的积分核为$\vec{K}$, $\vec{K}(x,y)=\vec{K}(x-y)$, $\vec{K}(x)=(\Psi_j(x))_{j\in\mathbb{Z}}$, **Claim:**
(*)$\|\Psi_j'(x)\|_{l^2}\le C|x|^{-2}$, 因此$\|\vec{K}(x)-\vec{K}(x-y)\|_{l^2}\le C|y|/|x|^2$, $\forall\ |x|>2|y|$,
$\int_{\{|x|>2|y|\}}\|\vec{K}(x)-\vec{K}(x-y)\|_{l^2}dx\le C$. $\vec{K}$满足Hörmander条件. 下证(*).

Proof. $\|\Psi_j'(x)\|_{l^2}\le\|\Psi_j'(x)\|_{l^1}\overset{(a)}{=}\sum_j 2^{2j}|\Psi'(2^jx)|\overset{(b)}{\le}C\sum_j 2^{2j}\min(1,|2^jx|^{-3})\le$
$C\sum_{j\le i}2^{2j}+C|x|^{-3}\sum_{j>i}2^{-j}\le C2^{2i}+C|x|^{-3}2^{-i}\overset{(c)}{\le}C|x|^{-2}$.
(a): 由$\Psi_j(x)=2^j\Psi(2^jx)$得$\Psi_j'(x)=2^{2j}\Psi'(2^jx)$.
(b): 由$\Psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$得$|\Psi'(x)|\le C\min(1,|x|^{-3})$.
(c): 取$i\in\mathbb{Z}$ s.t. $2^{-i}\le|x|<2^{1-i}$. □

(iii) 由Theorem 7.1得$\|\vec{T}f\|_p\le C\|f\|_p$, $\forall\ f\in L_c^\infty$. 对一般的$f\in L^p$, 取
$f_k=f\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|+|f(x)|<k\}}$, 则$f_k\in L_c^\infty$, $f_k\to f$ in L^p, $\widetilde{S}_jf_k(x)\to\widetilde{S}_jf(x)$,
$\|\vec{T}f(x)\|_{l^2}\le\liminf_{k\to\infty}\|\vec{T}f_k(x)\|_{l^2}$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, 由Fatou引理得
$\|\vec{T}f\|_p\le\liminf_{k\to\infty}\|\vec{T}f_k\|_p\le\liminf_{k\to\infty}C\|f_k\|_p=C\|f\|_p$ □

Proof of Theorem 7.3. (i) **上界估计.**
$\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p\overset{(a)}{=}\|(\sum_j|S_j\widetilde{S}_jf|^2)^{1/2}\|_p\overset{(b)}{\le}C\|(\sum_j|\widetilde{S}_jf|^2)^{1/2}\|_p\overset{(c)}{\le}C\|f\|_p$.
(a): 用到$S_j\widetilde{S}_j=S_j$. (b): 对$f_j=\widetilde{S}_jf$用Corollary 7.1. (c): 用到Theorem 7.4.
(ii) **下界: 对偶方法**. 设$T(f,g)=\int_{\mathbb{R}}\sum_jS_jf\overline{S_jg}$, $\forall\ f\in L^p$, $g\in L^{p'}$, 则
$|T(f,g)|\le\int_{\mathbb{R}}\sum_j|S_jf\overline{S_jg}|\le\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p\|(\sum_j|S_jg|^2)^{1/2}\|_{p'}\le$
$C\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p\|g\|_{p'}\le C\|f\|_p\|g\|_{p'}$. 另一方面
$T(f,g)=\int_{\mathbb{R}}f\overline{g}$, $\forall\ f,g\in L^2$ (as $\int_{\mathbb{R}}S_jf\overline{S_jg}=\int_{\Delta_j}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}$, $\int_{\mathbb{R}}f\overline{g}=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}$).
对一般的$f\in L^p$, $g\in L^{p'}$用L_c^∞函数逼近可得$T(f,g)=\int_{\mathbb{R}}f\overline{g}$. 因此
$|\int_{\mathbb{R}}f\overline{g}|=T(f,g)\le C\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p\|g\|_{p'}$, $\forall\ f\in L^p$, $g\in L^{p'}$.
结合$\|f\|_p=\sup\{|\int_{\mathbb{R}}f\overline{g}|:\|g\|_{p'}\le 1\}$得$\|f\|_p\le C\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p$. □

高维推广: (i) Theorem 7.4→Theorem 7.5, $\psi_j(\xi)=\psi(2^{-j}|\xi|)$, 8.3;
(ii)Theorem 7.3→Theorem 7.6, $\chi_{\Delta_j}\to\chi_{\Delta_j\times\Delta_k}$, 8.4.
向量值推广I: $\|(\sum_{j,k}|\widetilde{S}_jf_k|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|(\sum_k|f_k|^2)^{1/2}\|_p$ $(1<p<\infty)$.
Key point: 设$A=l^2(\mathbb{Z})$, $B=l^2(\mathbb{Z}^2)$, $\vec{T}\vec{f}=(\widetilde{S}_jf_k)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ 其中$\vec{f}=(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, 则$\|\vec{T}\vec{f}\|_2^2=\sum_{j,k}\|\widetilde{S}_jf_k\|_2^2\le 3\sum_k\|f_k\|_2^2=3\|\vec{f}\|_2^2$. $\vec{T}$ 的积分核为$\vec{K}$, $\vec{K}(x,y)=\vec{K}(x-y)$, $(\vec{K}(x)\cdot\vec{a})_{j,k}=\Psi_j(x)a_k$, 其中$\vec{a}=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $\|\vec{K}(x)-\vec{K}(x-y)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}=\|\Psi_j(x)-\Psi_j(x-y)\|_{l^2}\le C|y|/|x|^2$, $\forall\ |x|>2|y|$. 由Theorem 7.1得$\|\vec{T}\vec{f}\|_p\le C\|\vec{f}\|_p$.
向量值推广II: $\|(\sum_{j,k}|S_jf_k|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|(\sum_k|f_k|^2)^{1/2}\|_p$ $(1<p<\infty)$.
Key point: $\|(\sum_{j,k}|S_jf_k|^2)^{1/2}\|_p\overset{(a)}{=}\|(\sum_{j,k}|S_j\widetilde{S}_jf_k|^2)^{1/2}\|_p\overset{(b)}{\le}C\|(\sum_{j,k}|\widetilde{S}_jf_k|^2)^{1/2}\|_p\overset{(c)}{\le}$
$C\|(\sum_k|f_k|^2)^{1/2}\|_p$. (a): 用到$S_j\widetilde{S}_j=S_j$. (b): 用到Corollary 7.1. (c): 用到向量值推广I.
注: Corollary 7.1中I_j可以相同. (b)是在用Corollary 7.1的以下形式:

$\|(\sum_{J\in\Lambda}|S_JF_J|^r)^{1/r}\|_p \le C_{p,r}\|(\sum_{J\in\Lambda}|F_J|^r)^{1/r}\|_p$, 其中$\Lambda$是可列集.
取$\Lambda=\mathbb{Z}^2$, $F_J=\widetilde{S}_jf_k$, $S_J=S_j$, $\forall\ J=(j,k)\in\mathbb{Z}^2$, $r=2$ 可得(b)成立.

Theorem 7.5. *$\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi(0)=0$, $\widehat{S_jf}(\xi)=\psi(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi)$, $\forall\ j\in\mathbb{Z}$, $1<p<\infty$, 则*
(a) $\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|f\|_p$.
(b) 若$\sum_j|\psi(2^{-j}\xi)|^2=C$, $\forall\ \xi\ne 0$ 则$\|f\|_p\le C_p'\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p$.

Proof. (i) $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi(0)=0\Rightarrow|\psi(x)|\le C\min(|x|,1/|x|)$,
$\sum_j|\psi(2^{-j}\xi)|^2\le C$. 设$A=\mathbb{C}$, $B=l^2$, $\vec{T}f=(S_jf)_{j\in\mathbb{Z}}$, 则
$\|\vec{T}f\|_2^2=\sum_j\|S_jf\|_2^2=\sum_j\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(2^{-j}\xi)|^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\le C\|f\|_2^2$.
(ii) 设$\widehat{\Psi}=\psi$, $\Psi_j(x)=2^{nj}\Psi(2^jx)$, 则$\widehat{\Psi_j}(\xi)=\psi(2^{-j}\xi)$, $S_jf=\Psi_j*f$, $\Psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
$|\nabla\Psi(x)|\le C(1+|x|)^{-n-2}$, $|\nabla\Psi_j(x)|\le C2^{(n+1)j}(1+|2^jx|)^{-n-2}$,
$\|\nabla\Psi_j(x)\|_{l^2}\le\|\nabla\Psi_j(x)\|_{l^1}\le C\sum_j 2^{(n+1)j}(1+|2^jx|)^{-n-2}\le C|x|^{-n-1}$.
(iii) $\vec{T}$ 的积分核为$\vec{K}$, $\vec{K}(x,y)=\vec{K}(x-y)$, $\vec{K}(x)=(\Psi_j(x))_{j\in\mathbb{Z}}$,
$\|\vec{K}(x)-\vec{K}(x-y)\|_{l^2}\le C|y|/|x|^{n+1}$, $\forall\ |x|>2|y|$. $\vec{K}$满足Hörmander条件.
(iv) 由Theorem 7.1得$\|\vec{T}f\|_p\le C\|f\|_p$, i.e. (a). (参见Theorem 7.4的证明)
(v) 由$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_jS_jf\overline{S_jg}=C\int_{\mathbb{R}^n}f\overline{g}$, (a)和对偶方法可得(b). □

定义$\widehat{S_j^1f}(\xi_1,\xi_2)=\chi_{\Delta_j}(\xi_1)\widehat{f}(\xi_1,\xi_2)$, $\widehat{S_j^2f}(\xi_1,\xi_2)=\chi_{\Delta_j}(\xi_2)\widehat{f}(\xi_1,\xi_2)$, $\forall\ j\in\mathbb{Z}$. 则
$S_j^1f(x_1,x_2)=S_jf(\cdot,x_2)(x_1)$, $S_k^2f(x_1,x_2)=S_kf(x_1,\cdot)(x_2)$.

Theorem 7.6. *$c_p\|f\|_p\le\|(\sum_{j,k}|S_j^1S_k^2f|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|f\|_p$ $(1<p<\infty)$.*

Proof. (i) 由向量值推广II得$\|(\sum_{j,k}|S_jf_k|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|(\sum_k|f_k|^2)^{1/2}\|_p$, 其中$f_k\in L^p(\mathbb{R})$.
(ii) $\|(\sum_{j,k}|S_j^1f_k|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|(\sum_k|f_k|^2)^{1/2}\|_p$, 其中$f_k\in L^p(\mathbb{R}^2)$.

Proof. 由$S_j^1f_k(x_1,x_2)=S_jf_k(\cdot,x_2)(x_1)$和(i)得$\int_{\mathbb{R}}(\sum_{j,k}|S_j^1f_k|^2)^{p/2}(x_1,x_2)dx_1$
$\le C_p^p\int_{\mathbb{R}}(\sum_k|f_k|^2)^{p/2}(x_1,x_2)dx_1$. 再对$x_2$积分得(ii)成立. □

(iii) $\|(\sum_k|S_k^2F|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|F\|_p$, $F\in L^p(\mathbb{R}^2)$.

Proof. 由$S_k^2F(x_1,x_2)=S_kF(x_1,\cdot)(x_2)$和Theorem 7.3(取$f(x)=F(x_1,x)$)得
$\int_{\mathbb{R}}(\sum_k|S_k^2F|^2)^{p/2}(x_1,x_2)dx_2\le C_p^p\int_{\mathbb{R}}|F(x_1,x_2)|^pdx_1$. 再对$x_1$积分即可. □

(iv) $\|(\sum_{j,k}|S_j^1S_k^2f|^2)^{1/2}\|_p\overset{(ii)}{\le}C_p\|(\sum_k|S_k^2f|^2)^{1/2}\|_p\overset{(iii)}{\le}C_p'\|f\|_p$. (上界估计)
(v) 由对偶方法和$\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j,k}S_j^1S_k^2f\overline{S_j^1S_k^2g}=\int_{\mathbb{R}^2}f\overline{g}$得下界成立. □

8.3 Hörmander 乘子定理 $\widehat{T_mf}(\xi)=m(\xi)\widehat{f}(\xi)$. 下面讨论$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 的条件. i.e. $\|T_mf\|_p\le C\|f\|_p$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. **定义** $\|f\|_{L_a^2}^2=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^a|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi$.
$L_a^2=\{f\in\mathcal{S}':\|f\|_{L_a^2}<\infty\}=\{f\in\mathcal{S}':(1+|\xi|^2)^{a/2}\widehat{f}\in L^2\}=H^a$. 若$a'<a$ 则$L_a^2\subset L_{a'}^2$.
若$f\in L_a^2$ 则$\widehat{f}\in L_{loc}^1$. $L_0^2=L^2$. $\|f\|_{L_k^2}\sim\sum_{|a|\le k}\|D^af\|_2$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Proposition 7.7. *若$a>n/2$, $g\in L_a^2(\mathbb{R}^n)$, 则$\widehat{g}\in L^1$ $(\Rightarrow g\in L^\infty\cap C(\mathbb{R}^n))$.*

Proof. $\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{g}|\le(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^a|\widehat{g}(\xi)|^2d\xi)^{\frac12}(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-a}d\xi)^{\frac12}\le C_a\|g\|_{L_a^2}$. □

若$a>n/2$, $m\in L_a^2(\mathbb{R}^n)$, 则$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)(1\le p\le\infty)$, 其中用到
$T_mf=\overline{\mathcal{F}}m*f$, $\overline{\mathcal{F}}m=\sigma\widehat{m}\in L^1$, $\sigma\widehat{m}(x)=\widehat{m}(-x)$.

Lemma 7.8. 若$a > n/2$, $m \in L^2_a(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$. $\widehat{T_\lambda f}(\xi) = m(\lambda\xi)\widehat{f}(\xi)$, $u \geq 0$, $u \in L^1_{loc}$. 则$\int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda f|^2 u \leq C\|m\|^2_{L^2_a} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 Mu$. *(C 是只与$n, a$有关的常数.)*

Proof. (i) 设$K(x) = \widehat{m}(-x)$则$\widehat{K} = m$, $(1+|x|^2)^{a/2}K(x) := R(x) \in L^2$,
$T_\lambda f = K_\lambda * f$, $K_\lambda(x) = \lambda^{-n}K(\lambda^{-1}x) = \lambda^{-n}R(\frac{x}{\lambda})(1+|\frac{x}{\lambda}|^2)^{-a/2}$.
(ii) $|T_\lambda f(x)|^2 = \Big|\int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x-y)f(y)dy\Big|^2 = \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^{-n}R(\frac{x-y}{\lambda})f(y)}{(1+|\frac{x-y}{\lambda}|^2)^{a/2}}dy\Big|^2 \leq$
$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n}|R(\frac{x-y}{\lambda})|^2 dy\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^{-n}|f(y)|^2}{(1+|\frac{x-y}{\lambda}|^2)^a}dy\Big) \leq \|m\|^2_{L^2_a}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^{-n}|f(y)|^2}{(1+|\frac{x-y}{\lambda}|^2)^a}dy\Big)$,
其中用到$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n}|R(\frac{x-y}{\lambda})|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} |R(y)|^2 dy = \|m\|^2_{L^2_a}$.
(iii) 由Proposition 2.7得$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^{-n}u(x)}{(1+|\frac{x-y}{\lambda}|^2)^a}dx = \phi_\lambda * u(y) \leq C_a Mu(y)$, 其中
$\phi_\lambda(x) = \lambda^{-n}\phi(\frac{x}{\lambda})$, $\phi(x) = (1+|x|^2)^{-a} \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R}^n)$, $C_a = \|\phi\|_1$.
(iv) $\int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda f|^2 u \overset{(ii)}{\leq} \|m\|^2_{L^2_a} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^{-n}|f(y)|^2}{(1+|\frac{x-y}{\lambda}|^2)^a}u(x)dydx \overset{\text{Fubini}}{=}$
$\|m\|^2_{L^2_a}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^{-n}u(x)}{(1+|\frac{x-y}{\lambda}|^2)^a}dx|f(y)|^2dy \overset{(iii)}{\leq} C_a\|m\|^2_{L^2_a}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^2Mu(y)dy$. □

取径向函数$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ s.t. supp$\psi \subseteq \{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\} := D$, $\sum_j |\psi(2^{-j}\xi)|^2 = 1, \forall\, \xi \neq 0$. (例如$\psi(\xi) = (1+e^{\frac{1}{1-|\xi|}+\frac{1}{2-|\xi|}})^{-1/2}, \forall\, 1 < |\xi| < 2$; $\psi(\xi) = (1+e^{\frac{1}{2|\xi|-1}+\frac{1}{2|\xi|-2}})^{-1/2}, \forall\, 1/2 < |\xi| < 1$.)

Theorem 7.9. 若$\sup_j \|m(2^j\cdot)\psi\|_{L^2_a} < \infty$, $a > \frac{n}{2}$, 则$m \in \mathcal{M}_p$*($1 < p < \infty$).*

Proof. 由$\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{p'} \subseteq \mathcal{M}_2$, 只需证明$m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, 2 < p < \infty$.
i.e. $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$, $\forall\, 2 < p < \infty$, 其中$T = T_m$.
(i) 设$\widehat{S_j f}(\xi) = \psi(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi)$, 由Theorem 7.5(b)得$\|f\|_p \leq C\|(\sum_j |S_jf|^2)^{1/2}\|_p$.
(ii) 设$\widetilde{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, supp$\widetilde{\psi} \subseteq \{\frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4\}$, $\widetilde{\psi} = 1$ on $\{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$,
定义$\widetilde{S}_jf$ s.t. $\mathcal{F}\widetilde{S}_jf(\xi) = \widetilde{\psi}(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi)$, 则[1]$S_j\widetilde{S}_j = S_j$, (由$\psi\widetilde{\psi} = \psi$).
由Theorem 7.5(a)得$\|(\sum_j |\widetilde{S}_jf|^2)^{1/2}\|_p \leq C\|f\|_p$.
(iii) $\|Tf\|_p \overset{(i)}{\leq} C\|(\sum_j |S_jTf|^2)^{1/2}\|_p \overset{[1]}{=} C\|(\sum_j |S_jT\widetilde{S}_jf|^2)^{1/2}\|_p$.
(iv) $\mathcal{F}(S_jTg)(\xi) = \psi(2^{-j}\xi)m(\xi)\widehat{g}(\xi) = m_j(2^{-j}\xi)\widehat{g}(\xi)$, $m_j(\xi) = m(2^j\xi)\psi(\xi)$, $\sup_j \|m_j\|_{L^2_a} < \infty$. 由Lemma 7.8得, $\int_{\mathbb{R}^n} |S_jTg|^2u \leq C\|m_j\|^2_{L^2_a}\int_{\mathbb{R}^n}|g|^2Mu \leq C\int_{\mathbb{R}^n}|g|^2Mu$, ($u \geq 0$, $u \in L^1_{loc}$).
对j求和得, [2]$\int_{\mathbb{R}^n}(\sum_j |S_jTg_j|^2)u \leq C\int_{\mathbb{R}^n}(\sum_j |g_j|^2)Mu$, ($u \geq 0$, $u \in L^1_{loc}$).
Claim: (v)$\|(\sum_j |S_jTg_j|^2)^{1/2}\|_p \leq C\|(\sum_j |g_j|^2)^{1/2}\|_p$, $\forall\, 2 < p < \infty$.

Proof. 设$F_1 := \sum_j |S_jTg_j|^2$, $F_2 := \sum_j |g_j|^2$, 则[2]$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} F_1u \leq C\int_{\mathbb{R}^n} F_2Mu$,
$\forall\, u \geq 0$, $u \in L^1_{loc}$; (v)$\Leftrightarrow \|F_1^{1/2}\|_p \leq C\|F_2^{1/2}\|_p \Leftrightarrow \|F_1\|_{p/2} \leq C\|F_2\|_{p/2}$, ($2 < p < \infty$).
设$q = (p/2)'$ i.e. $q = p/(p-2) \in (1,\infty)$, 则
$\int_{\mathbb{R}^n} F_1u \leq C\int_{\mathbb{R}^n} F_2Mu \leq C\|F_2\|_{p/2}\|Mu\|_q \leq C\|F_2\|_{p/2}\|u\|_q$,
$\|F_1\|_{p/2} = \sup\{\int_{\mathbb{R}^n} F_1u | u \geq 0, \|u\|_q \leq 1\} \leq C\|F_2\|_{p/2}$. □

因此$\|Tf\|_p \overset{(iii)}{\leq} C\|(\sum_j |S_jT\widetilde{S}_jf|^2)^{1/2}\|_p \overset{(v)}{\leq} C\|(\sum_j |\widetilde{S}_jf|^2)^{1/2}\|_p \overset{(ii)}{\leq} C\|f\|_p$. □

Corollary 7.2. 设$k = [\frac{n}{2}]+1$, $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $1 < p < \infty$.
若*(a)* $\sup_R R^{|\beta|}(\frac{1}{R^n}\int_{\{R/2<|\xi|<2R\}} |D^\beta m(\xi)|^2 d\xi)^{1/2} < \infty$, $\forall\, |\beta| \leq k$, 则$m \in \mathcal{M}_p$.
若*(b)* $|D^\beta m(\xi)| \leq C|\xi|^{-|\beta|}$, $\forall\, |\beta| \leq k$, 则$m \in \mathcal{M}_p$.

Proof. (i) 设$m_R(\xi)=m(R\xi)$, 则$D^\beta m_R(\xi)=R^{|\beta|}(D^\beta m)(R\xi)$, 由$D:=\{\frac{1}{2}\le|\xi|\le 2\}$得, (b)⇒(a)⇔ $R^{|\beta|}(\frac{1}{R^n}\int_{\{R/2<|\xi|<2R\}}|D^\beta m(\xi)|^2d\xi)^{1/2}\Leftrightarrow\sup_R(\int_D|D^\beta m_R(\xi)|^2d\xi)^{1/2}<\infty$.
(ii) $D^\beta(m_R\psi)=\sum_{\gamma\le\beta}C_{\gamma,\beta}D^\gamma m_R D^{\beta-\gamma}\psi$, $|D^\alpha\psi|\le C$, $\mathrm{supp}\psi\subseteq D$,
$\|m_R\psi\|_{L^2_k}\le C_1\sum_{|\beta|\le k}\|D^\beta(m_R\psi)\|_2\le C_2\sum_{|\gamma|\le k}\|D^\gamma m_R\|_{L^2(D)}\le C_3$.
(iii) 在(ii)中取$R=2^j$得$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\|m(2^j\cdot)\psi\|_{L^2_k}\le C_3<\infty$, 结合Theorem 7.9得结论成立. □

举例: 设$1<p<\infty$. (i) $m(\xi)=|\xi|^{it}$, $t\in\mathbb{R}$, $|D^\beta m(\xi)|\le C_{t,\beta}|\xi|^{-|\beta|}$, $m\in\mathcal{M}_p$.
(ii) $m(\xi)=m_0(\xi')$, $m_0\in C^k(S^{n-1})$, $k=[\frac{n}{2}]+1$, $m\in\mathcal{M}_p$, 其中$\xi'=\frac{\xi}{|\xi|}$.
(iii) 若$\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi(0)=0$, $|a_j|\le 1$ 则$\sum_j a_j\psi(2^{-j}\xi)\in\mathcal{M}_p$.

8.4 Marcinkiewicz 乘子定理 Corollary 3.2: $V_{-\infty}^{\infty}m<\infty\Rightarrow m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $(1<p<\infty)$.
可推广如下: ($\mathbb{R}$上有界变差减弱为在Δ_j上的变差一致有界)

Theorem 7.10. *若$m\in L^\infty(\mathbb{R})$, $V_{2^j}^{2^{j+1}}m\le A$, $V_{-2^{j+1}}^{-2^j}m\le A$, $\forall\ j\in\mathbb{Z}$, $(A<\infty)$ 则 $m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\forall\ 1<p<\infty$.*

Lemma 7.11. *若$a_j\in(2^j,2^{j+1})$, $\Delta'_j=[2^j,a_j)$, 定义$S'_j=S_{j+}^{(a_j)}$为$\widehat{S'_jf}=\chi_{\Delta'_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, 则 $\|(\sum_j|S'_jf|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$.*

注: 同理若$a_j\in(-2^{j+1},-2^j)$, $\Delta'_j=(-2^{j+1},a_j)$, 定义$S'_j=S_{j-}^{(a_j)}$为$\widehat{S'_jf}=\chi_{\Delta'_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, 则$\|(\sum_j|S'_jf|^2)^{1/2}\|_p\le C_p\|f\|_p$, $\forall\ f\in L^p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$.

Proof. (i) 由Corollary 7.1得$\|(\sum_j|S'_jf_j|^2)^{1/2}\|_p\le C\|(\sum_j|f_j|^2)^{1/2}\|_p$.
(ii) 由Theorem 7.3得$\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p\le C\|f\|_p$.
(iii) $\Delta_j=(-2^{j+1},-2^j]\cup[2^j,2^{j+1})\Rightarrow\Delta'_j\subset\Delta_j\Rightarrow S'_jS_j=S'_j$.
(iv) $\|(\sum_j|S'_jf_j|^2)^{1/2}\|_p\overset{(iii)}{=}C\|(\sum_j|S'_jS_jf_j|^2)^{1/2}\|_p\overset{(i)}{\le}C\|(\sum_j|S_jf|^2)^{1/2}\|_p\overset{(ii)}{\le}C\|f\|_p$. □

Lemma 7.12. $|\int_a^b fg|\le(V_a^bf+\|f\|_\infty)\sup_{c\in(a,b)}|\int_a^c g|$.

Proof of Theorem 7.10. (i) $\forall\ f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\big(\int_{\Delta_j^+}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}+\int_{\Delta_j^-}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\big)$,
其中$\Delta_j^+=[2^j,2^{j+1})$, $\Delta_j^-=(-2^{j+1},-2^j]$, $\Delta_j=\Delta_j^+\cup\Delta_j^-$.
(ii) 由Lemma 7.12得$\big|\int_{\Delta_j^+}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\big|\le A_1\sup_{a_j\in(2^j,2^{j+1})}\big|\int_{2^j}^{a_j}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}\big|$, $A_1=A+\|m\|_\infty$.
$\int_{2^j}^{a_j}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}=\int_{\mathbb{R}}S_{j+}^{(a_j)}f\overline{S_jg}$, $|\int_{\Delta_j^+}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}|\le A_1\sup_{a_j\in(2^j,2^{j+1})}|\int_{\mathbb{R}}S_{j+}^{(a_j)}f\overline{S_jg}|$.
$\sum_j\big|\int_{\Delta_j^+}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\big|\le A_1\sup\big\{\sum_j\big|\int_{\mathbb{R}}S_{j+}^{(a_j)}f\overline{S_jg}\big|:a_j\in(2^j,2^{j+1}),\forall\ j\big\}$.
(iii) 对f用Lemma 7.11, 对g用Theorem 7.3 得$\sum_j\big|\int_{\mathbb{R}}S_{j+}^{(a_j)}f\overline{S_jg}\big|\le$
$\|(\sum_j|S_{j+}^{(a_j)}f|^2)^{1/2}\|_p\|(\sum_j|S_jg|^2)^{1/2}\|_{p'}\le C\|f\|_p\|g\|_{p'}$, $\forall\ a_j\in(2^j,2^{j+1})$. $(1<p<\infty)$
(iv) 由(ii)(iii)得$\sum_j\big|\int_{\Delta_j^+}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\big|\le CA_1\|f\|_p\|g\|_{p'}$. 同理$\sum_j\big|\int_{\Delta_j^-}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\big|\le CA_1\|f\|_p\|g\|_{p'}$.
(vi) 由(i)(iv)得$|\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}|\le CA_1\|f\|_p\|g\|_{p'}$. 因此$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. □

Theorem 7.13. *若$m\in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_I|\frac{\partial m}{\partial t_1}(t_1,t_2)|dt_1\le A_1$, $\int_I|\frac{\partial m}{\partial t_2}(t_1,t_2)|dt_2\le A_2$, $\int_{I\times I'}|\frac{\partial^2 m}{\partial t_1\partial t_2}(t_1,t_2)|dt_1dt_2\le A_3$, $\forall\ I,I'\in\{\pm[2^j,2^{j+1})|j\in\mathbb{Z}\}$ $(m\in C^2(I\times I')$, $A_k<\infty)$. 则$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^2)$, $\forall\ 1<p<\infty$.*

Proof. (a) 设$\widehat{S^k_{a,b}f}(\xi_1,\xi_2)=\chi_{(a,b)}(\xi_k)\widehat{f}(\xi_1,\xi_2)$, $\forall\ k\in\{1,2\}$, $a<b$;
$I_j=[2^j,2^{j+1})$,$\forall\ j\in\mathbb{Z}$; $\widehat{T_{i,j}f}=m\chi_{I_i\times I_j}\widehat{f}$, $A=A_1+A_2+A_3+\|m\|_\infty$. 则
$\left|\int_{I_i\times I_j}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\right|\le A\sup\limits_{t_1\in I_i,t_2\in I_j}\left|\int_{\mathbb{R}^2}S^1_{t_1,2^{i+1}}S^2_{t_2,2^{j+1}}f\overline{S^1_iS^2_jg}\right|$, $\forall\ i,j\in\mathbb{Z}$.

Proof. (i) 对于给定的$(\xi_1,\xi_2)\in I_i\times I_j=[2^i,2^{i+1})\times[2^j,2^{j+1})$有
$m(\xi_1,\xi_2)=\int_{2^i}^{\xi_1}\int_{2^j}^{\xi_2}\frac{\partial^2m}{\partial t_1\partial t_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2+\int_{2^i}^{\xi_1}\frac{\partial m}{\partial t_1}(t_1,2^j)dt_1+\int_{2^j}^{\xi_2}\frac{\partial m}{\partial t_2}(2^i,t_2)dt_2+m(2^i,2^j)$.
(ii) 由(i)和Fubini定理得$\int_{I_i\times I_j}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}=\int_{I_i\times I_j}\frac{\partial^2m}{\partial t_1\partial t_2}(t_1,t_2)J_1dt_1dt_2+\int_{I_i}\frac{\partial m}{\partial t_1}(t_1,2^j)J_2dt_1+$
$\int_{I_j}\frac{\partial m}{\partial t_2}(2^i,t_2)J_3dt_2+m(2^i,2^j)J_4$, $J_1=\int_{(t_1,2^{i+1})\times(t_2,2^{j+1})}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}$, $J_2=\int_{(t_1,2^{i+1})\times I_j}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}$,
$J_3=\int_{I_1\times(t_2,2^{j+1})}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}$, $J_4=\int_{I_i\times I_j}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}$. 则$|J_k|\le B_{i,j}:=\sup\limits_{t_1\in I_i,t_2\in I_j}\left|\int_{(t_1,2^{i+1})\times(t_2,2^{j+1})}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}\right|$, $(k=1,2,3,4)$. 结合$\int_{I_i\times I_j}|\frac{\partial^2m}{\partial t_1\partial t_2}(t_1,t_2)|dt_1dt_2+\int_{I_i}|\frac{\partial m}{\partial t_1}(t_1,2^j)|dt_1+\int_{I_j}|\frac{\partial m}{\partial t_2}(2^i,t_2)|dt_2+|m(2^i,2^j)|\le A_3+A_1+A_2+\|m\|_\infty=A$, 得$\left|\int_{I_i\times I_j}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\right|\le AB_{i,j}$.
(iii) 由$\widehat{S^k_{a,b}f}(\xi_1,\xi_2)=\chi_{(a,b)}(\xi_k)\widehat{f}(\xi_1,\xi_2)$, $\widehat{S^k_jf}(\xi_1,\xi_2)=\chi_{\Delta_j}(\xi_k)\widehat{f}(\xi_1,\xi_2)$, $(k=1,2)$,
$\Delta_j=(-2^{j+1},-2^j]\cup[2^j,2^{j+1})$得$\mathcal{F}(S^1_iS^2_jg)(\xi)=\chi_{\Delta_i}(\xi_1)\chi_{\Delta_j}(\xi_2)\widehat{f}(\xi)=\chi_{\Delta_i\times\Delta_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$,
$\mathcal{F}(S^1_{a,b}S^2_{c,d}f)(\xi)=\chi_{(a,b)}(\xi_1)\chi_{(c,d)}(\xi_2)\widehat{f}(\xi)=\chi_{(a,b)\times(c,d)}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, 其中$\xi=(\xi_1,\xi_2)$.
若$t_1\in I_i,t_2\in I_j$则$(t_1,2^{i+1})\times(t_2,2^{j+1})\subset I_i\times I_j\subset\Delta_i\times\Delta_j$,
$\int_{(t_1,2^{i+1})\times(t_2,2^{j+1})}\widehat{f}\overline{\widehat{g}}=\int_{\mathbb{R}^2}\chi_{(t_1,2^{i+1})\times(t_2,2^{j+1})}\widehat{f}\overline{\chi_{\Delta_i\times\Delta_j}\widehat{g}}=$
$\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{F}(S^1_{t_1,2^{i+1}}S^2_{t_2,2^{j+1}}f)\overline{\mathcal{F}(S^1_iS^2_jg)}=\int_{\mathbb{R}^2}S^1_{t_1,2^{i+1}}S^2_{t_2,2^{j+1}}f\overline{S^1_iS^2_jg}$. 这说明
$B_{i,j}=\sup\limits_{t_1\in I_i,t_2\in I_j}\left|\int_{\mathbb{R}^2}S^1_{t_1,2^{i+1}}S^2_{t_2,2^{j+1}}f\overline{S^1_iS^2_jg}\right|$. 结合(ii)得结论成立. □

(b)若$1<p<\infty$, $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,由(a)得$\left|\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\right|=\left|\sum_{i,j}\int_{I_i\times I_j}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\right|$
$\le\sum_{i,j}\left|\int_{I_i\times I_j}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\right|\le\sum_{i,j}A\sup\limits_{t_1\in I_i,t_2\in I_j}\left|\int_{\mathbb{R}^2}S^1_{t_1,2^{i+1}}S^2_{t_2,2^{j+1}}f\overline{S^1_iS^2_jg}\right|\le$
$A\sup\left\{\sum\limits_{i,j}\left|\int_{\mathbb{R}^2}S^1_{t_{i,j,1},2^{i+1}}S^2_{t_{i,j,2},2^{j+1}}f\overline{S^1_iS^2_jg}\right|:t_{i,j,1}\in I_i,\ t_{i,j,2}\in I_j\right\}\le$
$A\sup\left\{\left\|\left(\sum_{i,j}\left|S^1_{t_{i,j,1},2^{i+1}}S^2_{t_{i,j,2},2^{j+1}}f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\left\|\left(\sum_{i,j}|S^1_iS^2_jg|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p'}:\right.$
$\left.t_{i,j,1}\in I_i,\ t_{i,j,2}\in I_j,\ \forall\ i,j\in\mathbb{Z}\right\}$. 其中$I_i=[2^i,2^{i+1})$, $I_j=[2^j,2^{j+1})$.
(c) $\left\|\left(\sum_{i,j}\left|S^1_{t_{i,j,1},2^{i+1}}S^2_{t_{i,j,2},2^{j+1}}f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\le C\|f\|_p$. $\forall\ t_{i,j,1}\in I_i,\ t_{i,j,2}\in I_j,\ i,j\in\mathbb{Z}$.

Proof. 由$\widehat{S_{a,b}f}(\xi)=\chi_{(a,b)}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, $\widehat{S^j_{a,b}f}(\xi_1,\xi_2)=\chi_{(a,b)}(\xi_j)\widehat{f}(\xi_1,\xi_2)$, 得
$S^1_{a,b}f(x_1,x_2)=S_{a,b}f(\cdot,x_2)(x_1)$, $S^2_{a,b}f(x_1,x_2)=S_{a,b}f(x_1,\cdot)(x_2)$.
(i) 由Corollary 7.1得$\|(\sum_{i,j}|S_{t_{i,j,1},2^{i+1}}f_{i,j}|^2)^{1/2}\|_p\le C\|(\sum_{i,j}|f_{i,j}|^2)^{1/2}\|_p$,
$\forall\ t_{i,j,1}\in I_i,\ f_{i,j}\in L^p(\mathbb{R}),\ i,j\in\mathbb{Z}$. 与Theorem 7.6同理由Fubini定理得
$\|(\sum_{i,j}|S^1_{t_{i,j,1},2^{i+1}}f_{i,j}|^2)^{1/2}\|_p\le C\|(\sum_{i,j}|f_{i,j}|^2)^{1/2}\|_p$. $\forall\ t_{i,j,1}\in I_i,\ f_{i,j}\in L^p(\mathbb{R}^2)$.
$\|(\sum_{i,j}|S^2_{t_{i,j,2},2^{j+1}}f_{i,j}|^2)^{1/2}\|_p\le C\|(\sum_{i,j}|f_{i,j}|^2)^{1/2}\|_p$. $\forall\ t_{i,j,2}\in I_j,\ f_{i,j}\in L^p(\mathbb{R}^2)$. 其中$i,j\in\mathbb{Z}$.
这两个结论相结合得$\|(\sum_{i,j}|S^1_{t_{i,j,1},2^{i+1}}S^2_{t_{i,j,2},2^{j+1}}f_{i,j}|^2)^{1/2}\|_p\le C\|(\sum_{i,j}|f_{i,j}|^2)^{1/2}\|_p$.
$\forall\ t_{i,j,1}\in I_i,\ t_{i,j,2}\in I_j,\ f_{i,j}\in L^p(\mathbb{R}^2),\ i,j\in\mathbb{Z}$.

(ii) 由Theorem 7.6得$\|(\sum_{i,j}|f_{i,j}|^2)^{1/2}\|_p \le C\|f\|_p$, 其中$f_{i,j}=S_i^1S_j^2f$, $S^1_{t_{i,j,1},2^{i+1}}S^2_{t_{i,j,2},2^{j+1}}f_{i,j}=S^1_{t_{i,j,1},2^{i+1}}S^2_{t_{i,j,2},2^{j+1}}f$. 结合(i)得结论成立. □

若$1<p<\infty$, $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, 由(b)(c), Theorem 7.6得$\big|\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\big| \le CA\|f\|_p\big\|\big(\sum_{i,j}\big|S_i^1S_j^2g\big|^2\big)^{\frac{1}{2}}\big\|_{p'} \le CA\|f\|_p\|g\|_{p'}$. 同理$\forall\ I,J\in\{\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_-\}$有$\big|\int_{I\times J}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\big|\le CA\|f\|_p\|g\|_{p'}$. $\big|\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}m\overline{\widehat{g}}\big|\le CA\|f\|_p\|g\|_{p'}$, $m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^2)$. □

高维推广: 若$1<p<\infty$, $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,
$\forall\ I_1,\cdots,I_k\in\{\pm[2^j,2^{j+1})|j\in\mathbb{Z}\}$, $\{j_1,\cdots,j_k\}\subseteq\{1,\cdots,n\}$, 有
$\int_{I_1\times\cdots\times I_k}|\frac{\partial^k m}{\partial\xi_{j_1}\cdots\partial\xi_{j_k}}(\xi)|d\xi_{j_1}\cdots d\xi_{j_k}\le A<\infty$, 则$m\in\mathcal{M}_p$.

举例: (i)$|\frac{\partial^k m}{\partial\xi_{j_1}\cdots\partial\xi_{j_k}}(\xi)|\le\frac{C}{|\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_k}|}$, $\forall\ \{j_1,\cdots,j_k\}\subseteq\{1,\cdots,n\}$, $\xi\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$.
(ii) $m(t^{a_1}\xi_1,\cdots,t^{a_n}\xi_n)=t^{i\lambda}m(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $\forall\ \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $m\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.
(iii) $m(\xi)=\frac{i\xi_1}{i\xi_1+\xi_2^2+\xi_3^2}$, $m(\xi)=\frac{\xi_2\xi_3^2}{i\xi_1+\xi_2^2+\xi_3^4}$, $m(\xi)=|\xi_1|^{i\tau_1}\cdots|\xi_n|^{i\tau_n}$,
$m(\xi)=(|\xi_1|^{\rho_1}+\cdots+|\xi_n|^{\rho_n})^{i\tau}$, $m(\xi)=(|\xi_1|^{-\rho_1}+|\xi_2|^{-\rho_2})^{i\tau}$.
若$1<p<\infty$, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $L_1=\partial_1-\partial_2^2+\partial_3^4$, $L_2=\partial_1+\partial_2^2+\partial_3^2$, 则
$\|\partial_2\partial_3^2f\|_p\le C\|L_1f\|_p$, $\|\partial_1f\|_p\le C\|L_2f\|_p$.
(iv) $m(\xi)=\varphi(\xi_1/\xi_2)$, $|\varphi(x)|+|x\varphi'(x)|+|x^2\varphi''(x)|\le C$.
(v) $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\psi(0)=0$, $|a_j|\le 1$, $m(\xi)=\sum_j a_j\psi(2^{-j}\xi_1/\xi_2)$.
其中$a_i>0$, $\lambda,\tau_i,\rho_i,\tau\in\mathbb{R}$. 以上例子都满足$m\in\mathcal{M}_p$, $\forall\ 1<p<\infty$.

Summary: Thm 7.1⇒(cor 7.1, Thm 7.4)⇒Thm 7.3(1D)⇒Thm 7.6(2D).
(cor 7.1, Thm 7.3)⇒Lem 7.11⇒Thm 7.10. (cor 7.1, Thm 7.6)⇒Thm 7.13.
Thm 7.1⇒Thm 7.5. (Thm 7.5, Lem 7.8)⇒Thm 7.9⇒Cor 7.2.