

CFD–HW02(第2周)

2025 年 2 月 27 日

1 笔头作业

1.1 可压缩流体流动的Euler方程组

(1) 计算Euler方程组 $\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = 0$ 的Jacobi矩阵 $A(\mathbf{U}) := \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}$ 特征值, 和左、右特征向量, 其中 $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, E]^T$ $\mathbf{F} = [\rho u, \rho u^2 + p, u(E + p)]^T$, $p = (\gamma - 1)\rho e$, $E = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2$.

(2) 给出题(1)中方程组的等价形式 $\mathbf{V}_t + B(\mathbf{V})\mathbf{V}_x = 0$, $\mathbf{V} = (\rho, u, p)^T$, 计算 $B(\mathbf{V})$ 的特征值, 左、右特征向量; 思考两题中的矩阵 A 和 B 之间的关系, 以及它们的左、右特征向量之间的关系。

(3) 给出题(1)中方程组的等价形式 $\mathbf{W}_t + C(\mathbf{W})\mathbf{W}_x = 0$, $\mathbf{W} = (\rho, u, s)^T$, $s = p/\rho^\gamma$, 计算 $C(\mathbf{W})$ 的特征值, 左、右特征向量; 思考三题中矩阵 A 、 B 、 C 之间的关系, 以及它们的左、右特征向量之间的关系。

1.2 不可压缩流体流动的Navier-Stokes方程

考虑二维不可压缩流体流动的Navier-Stokes方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

其中 $\mathbf{u} = (u, v)$ 是速度向量, p 是“压力”, ν 为运动学粘性系数. 这里已经假设了流体的密度为常数, 粘性系数为非负常数.

作业: 证明动能 $E := \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ 满足的方程(能量不等式)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(u(E+p))}{\partial x} + \frac{\partial(v(E+p))}{\partial y} \leq \nu(E_{xx} + E_{yy}).$$

1.3 浅水波方程 (shallow water equations)

浅水波是指水深 h 相对波长 λ 很小时(一般取 $h < 1/20\lambda$)的波动, 又称长波. 传播速度与波长无关, 仅决定于水深.

浅水波方程可以由质量守恒和动量守恒方程得到, 它也被称为Saint Venant(圣维南)方程. 在不计科里奥利(Coriolis)力, 摩擦力或粘性力时, 并假设河床(riverbed)底部形状为 $Z(x, y)$, 则浅水波方程可为

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -gh \frac{\partial Z}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial y} = -gh \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{u} = (u, v)$ 为速度, g 为重力加速度 9.81m/s^2 , h 为水深(height of water), 见示意图1. 该方程具有如下基本性质: 如果 $\mathbf{u} = 0$, 则 $h + Z$ 恒为常数; h 为非负函数.

作业: 证明 $E := \frac{1}{2}h(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}gh^2 + ghZ$ 满足:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(u(E + \frac{1}{2}gh^2))}{\partial x} + \frac{\partial(v(E + \frac{1}{2}gh^2))}{\partial y} = 0.$$

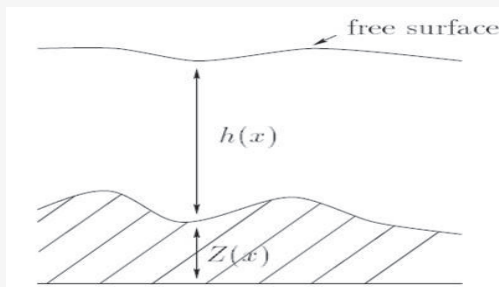


图 1: 示意图.

1.4 拟一维喷管(nozzle)流动的控制方程组

推导非定常拟一维喷管(nozzle)流动的控制方程组, 所用的控制体见图2中的阴影区. 参考信息也见图2.

2 上机练习作业

阅读网页<https://github.com/barbagroup/CFDPython>处的01_Step_1.ipynb中的Python程序实现[见目录CFDPython/lessons/]. 也可参考[此处](#).

修改上述程序:

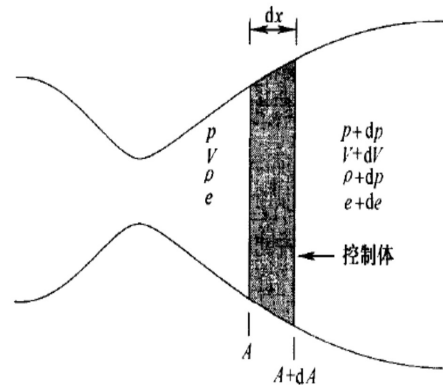
- (1) 将时间步长改为在每个时间步内根据稳定性条件定。
- (2) 把格式改为线性平流(advection)或对流(convection)方程的Lax-Wendroff格式, 二阶迎风格式, 隐式“Z”字形格式.

非定常拟一维喷管(nozzle)流动的控制方程组

- 基于控制体(参见右图)推导下列方程组:

连续性方程:	$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial A}{\partial x} + VA \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$
动量方程:	$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} = -R \left(\rho \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$
能量方程:	$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho V c_v \frac{\partial T}{\partial x} = -\rho RT \left[\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial(\ln A)}{\partial x} \right]$

$$p = \rho RT$$



推导非定常拟一维流动控制方程组所用控制体(阴影区)

J.D. Anderson, Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications, McGraw-Hill, 1995, 第7章.

图 2: 拟一维喷管(nozzle)流动的控制方程组

CFD–HW03(第3周)

2025 年 3 月 6 日

1 笔头作业

题1

已知一维Euler方程组

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, E]^T$ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\rho u, \rho u^2 + p, u(E + p)]^T$, $p = (\gamma - 1)\rho e$, $E = \rho \varepsilon = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2$.

令 $m(x, t) = \int^x \rho(s, t) ds$ 和 $\tau = \tau(x, t)$, 其中 $\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{D}{Dt}$. 请将(4)变换为

$$\partial_\tau \mathbf{V} + \partial_m \mathbf{G}(\mathbf{V}) = 0, \quad (2)$$

并计算Jacobi矩阵 $\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}}$ 及其特征值和特征向量, 其中

$$\mathbf{V} = (V, u, \varepsilon)^T, \quad \mathbf{G}(\mathbf{V}) = (-u, p, up)^T, \quad V = 1/\rho.$$

题2

考虑两个自变量的二阶偏微分方程

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0, \quad (3)$$

其中 a, b, c, d, e, f, g 均为常数. 讨论(3)的类型(双曲型、抛物型、椭圆型)在(光滑的)可逆变换

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

下是否会变化?

题3

考虑偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

的形如

$$u(x, t) = A_0 \exp [i(\xi x + \omega t)],$$

的解, 其中 A_0 为常数, 波数 $\xi \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$.

(1) 给出色散关系(dispersion relation)¹, 即频率 ω 和波数 ξ 之间的关系式 $\omega = \omega(\xi)$.

(2) 理解或讨论: 对不同的 α 和 m , 方程(4)对上述波形解的特性: 耗散(dissipation), 色散(dispersions), 稳定性(stability)或不稳定性(unstability).

题4

考虑初值问题

$$u_t + uu_x = bu, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u, x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (5)$$

其中 b 为给定的常数, $u_0(x)$ 为给定的光滑函数.

用特征线方法给出问题(5)的解, 并计算解爆破的时间.

¹<http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/5all.pdf>

题5

用特征线方法计算出线化气体动力学方程组的Riemann问题

$$\rho_t + \rho_0 u_x = 0, \quad u_t + \frac{a_0^2}{\rho_0} \rho_x = 0,$$
$$(\rho(x, 0), u(x, 0)) = \begin{cases} (\rho_L, u_L), & x < 0, \\ (\rho_R, u_R), & x > 0, \end{cases}$$

的解, 其中 $\rho_0, \rho_L, \rho_R, a, u_L, u_R$ 为给定的实数, 且 $\rho_0, \rho_L, \rho_R, a$ 均大于0.

2 上机练习作业

阅读网页<https://github.com/barbagroup/CFDPython>处的01_Step_1.ipynb中的Python程序实现[见目录CFDPython/lessons/]. 也可参考[此处](#).

在上周的[上机练习作业](#)基础上,

修改上述程序:

- 把定解问题(PDE+初边值条件)改为 $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0, u(x, 0) = \sin(x), x \in [0, 2\pi), u(x, \cdot) = u(x + 2\pi, \cdot)$;
- 格式改为具有散度形式的Lax-Wendroff格式和一阶(显式)迎风格式.

(1) 与网页<https://github.com/barbagroup/CFDPython>处的02_Step_2.ipynb中的Python程序[见目录CFDPython/lessons/, 也可参考[此处](#)]作对比.

(2) 用网页<https://github.com/barbagroup/CFDPython>处的02_Step_2.ipynb中的Python程序测试书【R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, 2nd ed., Birkhäuser, 1992】中的图12.1 (第124页) 对应的例子.

CFD–HW04(第4周)

2025 年 3 月 13 日

1 笔头作业

题1

已知一维Euler方程组

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, E]^T$ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\rho u, \rho u^2 + p, u(E + p)]^T$, $p = (\gamma - 1)\rho e$, $E = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2$.

Jacobi矩阵 $\mathbf{F}_{\mathbf{U}}$ 的三个特征值 $\lambda_1(\mathbf{U}) := u - a$, $\lambda_2(\mathbf{U}) := u$, $\lambda_3(\mathbf{U}) := u + a$, $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$.对应的三个右特征向量分别取为 $\mathbf{R}_1(\mathbf{U}) = (1, u - a, H - ua)^T$, $\mathbf{R}_2(\mathbf{U}) = (1, u, \frac{1}{2}u^2)^T$, $\mathbf{R}_3(\mathbf{U}) = (1, u + a, H + ua)^T$, 其中 $H = (E + p)/\rho$.

(1) 计算 $\nabla_{\mathbf{U}} \lambda_i(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}_i(\mathbf{U})$, $i = 1, 2, 3$.

(2) 求解满足微分方程(下标表示求偏导)

$$W_\rho + (u - a)W_{\rho u} + (H - ua)W_E = 0,$$

的可微函数 $W(\mathbf{U})$; 求解满足微分方程(下标表示求偏导)

$$W_\rho + uW_{\rho u} + \frac{1}{2}u^2W_E = 0,$$

的可微函数 $W(\mathbf{U})$; 求解满足微分方程(下标表示求偏导)

$$W_\rho + (u + a)W_{\rho u} + (H + ua)W_E = 0,$$

的可微函数 $W(\mathbf{U})$.

题2

考虑初值问题

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), u, x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2)$$

其中

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases}$$

这里 u_L 和 u_R 是给定的两个实数, $u_L < u_R$. 利用弱解的定义验证

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < u_L t, \\ x/t, & u_L t \leq x \leq u_R t, \\ u_R, & x > u_R t, \end{cases}$$

和

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < s_m t, \\ u_m, & s_m t \leq x \leq u_m t, \\ \frac{x}{t}, & u_m t \leq x \leq u_R t, \\ u_R, & x > u_R t, \end{cases}$$

是两个弱解, 其中 $u_m \in [u_L, u_R]$ 为任意, $s_m = \frac{u_L + u_m}{2}$.

题3

求解线化气体动力学方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

的Riemann问题

$$(\rho, u)^T = \begin{cases} (\rho_L, u_L)^T, & x < 0, \\ (\rho_R, u_R)^T, & x > 0. \end{cases}$$

CFD-笔头作业(第5周)

2025 年 3 月 20 日

题1

求Burgers方程

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x \left(\frac{1}{2} (u^\varepsilon)^2 \right) = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon,$$

的如下形式的解

$$u^\varepsilon(x, t) = U((x - st)/\varepsilon), \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = u^\pm, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U'(\xi) = 0$$

其中 $U(\xi)$ 为 ξ 的光滑函数, s 是波速, 满足RH条件

$$s(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-).$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $u^\varepsilon(x, t)$ 是否趋于关于参数 $x-st$ 的阶跃函数(即无粘Burgers方程的解)?

题2

针对标量双曲型守恒律方程 $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ 及其分片常数解

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st, \\ u_R, & x > st, \end{cases}$$

从Kruzhkov熵不等式推导出可容许条件(1.65)-(1.66), 见讲义[CFDLect03-hcl-ctex.pdf](#); 反之, 由可容许条件(1.65)-(1.66)推导Kruzhkov熵不等式. 这里 s , u_L 和 u_R 满足RH条件.

题3

考虑浅水波方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 u 为速度, h 为水深(height of water).

给出(1)的一个凸熵对 $(\eta(h, u), q(h, u))$ 及相应的熵不等式, 利用该凸熵对 $(\eta(h, u), q(h, u))$ 将(1)对称化, 即给出

$$P \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0,$$

的形式, 其中 P 为对称正定矩阵, B 为对称矩阵, $\mathbf{V} = (\partial_h \eta, \partial_{hu} \eta)$.

题4

考虑线化气体动力学方程组的Riemann问题

$$\rho_t + \rho_0 u_x = 0, \quad u_t + \frac{a_0^2}{\rho_0} \rho_x = 0,\tag{2}$$

$$(\rho(x, 0), u(x, 0)) = \begin{cases} (\rho_L, u_L), & x < 0, \\ (\rho_R, u_R), & x > 0. \end{cases}\tag{3}$$

这里 $\rho_0, \rho_L, \rho_R, a$ 是给定的正实数, u_L, u_R 为给定的实数.

(1) 检查解中的三个常数状态

$$(\rho_L, u_L), (\rho_*, u_*), (\rho_R, u_R),$$

中前两个常数状态和后两个常数状态是否满足相应的RH条件? 如果是, 则请给出相应的间断速度. 这里的 ρ_* 和 u_* 可由特征理论得到.

是否可以采用RH条件计算出线化气体动力学方程组的Riemann问题(2)-(3)的解? 为什么?

(2) 设 $W_i = W_i(\rho, u)$ 是第 i -广义RI, $i = 1, 2$, 检验是否成立下列等式?

$$W_1(\rho_L, u_L) = W_1(\rho_*, u_*), \quad W_2(\rho_R, u_R) = W_2(\rho_*, u_*).$$

是否可以用 W_1, W_2 唯一地确定 ρ_* 和 u_* ?

CFD-笔头作业(第6周)

2025年3月27日

1 笔头作业

题1

考虑线性双曲型方程组 $\partial_t \mathbf{U} + A \partial_x \mathbf{U} = 0$, 其中 $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_m)^T \in \mathbb{R}^m$, 系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 的元素 $a_{i,j}$ 为实常数, $LA R = \Lambda$, $LR = I$. 设两个不同的常数状态 $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$ 是第 i 初等波的左右状态, $W(\mathbf{U})$ 为第 i -广义Riemann不变量, $1 \leq i \leq m$. 试证明: 跨过第 i 初等波, 第 i -广义Riemann不变量 $W(\mathbf{U})$ 保持不变, 即 $W(\mathbf{U}_L) = W(\mathbf{U}_R)$.

题2

考虑拟线性形式的等熵气体动力学Euler方程组

$$\begin{aligned}\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{a^2}{\rho}\rho_x &= 0,\end{aligned}$$

其中 $a^2 = \gamma p / \rho$, $p\rho^{-\gamma} = S_0$, S_0 为常数. 计算该方程组的特征值(分别记为 $\lambda_1(\rho, u)$, $\lambda_2(\rho, u)$)、相应的右特征向量(分别记为 $\mathbf{R}_1(\rho, u)$ 和 $\mathbf{R}_2(\rho, u)$)、和(广义)Riemann不变量(分别记为 $W_1(\rho, u)$ 和 $W_2(\rho, u)$), 并验证 $W_1(\rho, u)$ 和 $W_2(\rho, u)$ 满

足

$$\partial_t W_1(\rho, u) + \lambda_2 \partial_x W_1(\rho, u) = 0,$$

$$\partial_t W_2(\rho, u) + \lambda_1 \partial_x W_2(\rho, u) = 0.$$

题3

讨论 p -方程组的Riemann问题

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t + p(v)_x = 0,$$

$$(v, u)(x, 0) = \begin{cases} (v_L, u_L), & x < 0, \\ (v_R, u_R), & x > 0, \end{cases}$$

的解, 其中 $v > 0, u \in \mathbb{R}, p'(v) < 0, p''(v) > 0$.

提示: 当左波为稀疏波, 右波为激波时, 解 $\mathbf{U} = (v, u)^T$ 可以表示为

$$\mathbf{U}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < \lambda_1(\mathbf{U}_L)t, \\ \bar{\mathbf{U}}(\xi), & \lambda_1(\mathbf{U}_L)t \leq x \leq \lambda_1(\mathbf{U}_*)t, \\ \mathbf{U}_*, & \lambda_1(\mathbf{U}_*)t < x < st, \\ \mathbf{U}_R, & st < x. \end{cases}$$

需要确定 $\bar{\mathbf{U}}(\xi)$ 和 $\mathbf{U}_*$. 由

$$\xi = \frac{x}{t} = \lambda_1, \quad W_1(v, u) = W_1(v, u),$$

可确定 $\bar{\mathbf{U}}(\xi)$. 由RH条件和Lax激波不等式确定 $\mathbf{U}_*$.

题4

考虑一维完全气体Euler方程组

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0,$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, E)^T, \quad \mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, u(E + p))^T,$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2.$$

该方程组的特征值分别记为 $\lambda_1(\mathbf{U}) = u - a$, $\lambda_2(\mathbf{U}) = u$, $\lambda_3(\mathbf{U}) = u + a$. 参见[HW02\(02-27\).pdf](#)中的题1和[HW04\(03-13\).pdf](#)中的题1.

(1) 证明: 当热力学熵 $s = p\rho^{-\gamma}$ 为常数(等熵)时, 第1,3-广义的Riemann不变量满足:

$$\begin{aligned}\partial_t\left(u + \frac{2}{\gamma-1}a\right) + (u+a)\partial_x\left(u + \frac{2}{\gamma-1}a\right) &= 0, \\ \partial_t\left(u - \frac{2}{\gamma-1}a\right) + (u-a)\partial_x\left(u - \frac{2}{\gamma-1}a\right) &= 0.\end{aligned}$$

(2) 证明:

- 第1初等波(λ_3)的左右状态 $\mathbf{U}_L$ 和 $\mathbf{U}_R$ 满足:

如果是激波, 则

$$p_L < p_R, \quad u_L > u_R;$$

如果是稀疏波, 则

$$p_L > p_R, \quad u_L < u_R.$$

- 第2初等波(λ_2)的左右状态 $\mathbf{U}_L$ 和 $\mathbf{U}_R$ 满足:

$$p_L = p_R, \quad u_L = u_R.$$

- 第3初等波(λ_1)的左右状态 $\mathbf{U}_L$ 和 $\mathbf{U}_R$ 满足:

如果是激波, 则

$$p_L > p_R, \quad u_L > u_R;$$

如果是稀疏波, 则

$$p_L < p_R, \quad u_L < u_R.$$

参见[CFDLect04-com01.ctex.pdf](#)中第43页的定理和[CFDLect06-com03.ctex.pdf](#)中第28页的定理.

2 上机作业

编写程序, 实现上述题3中的 p -方程组的Riemann问题精确解的程序.

CFD-笔头作业(第7周)

2025年4月3日

题1

(a) 设 $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$, $F_j^n = f(U_j^n)$, $f(u)$ 是 u 的非线性光滑函数, τ 和 h 分别是 t 和 x 方向的网格步. 有限差分格式

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2h}(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n),$$

与哪个PDE相容? 该格式是否是守恒格式? 讨论它的单调性和总变差减(TVD)性质.

题2

考虑二维双曲型方程组

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \partial_y \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$.

在网格 $\{(x_j, y_k) | x_j = jh_x, y_k = kh_y, j, k \in \mathbb{Z}\}$ 上, 其中 h_x 和 h_y 分别是 x 和 y 方向的网格步长, 请分别构造出逼近(1)的Lax-Friedrichs格式, Lax-Wendroff格式, Richtmyer的两步 LW 格式, 和MacCormack格式. 在数值计算中, 它们的时间步长如何选取? 为什么?

题3

考虑三维双曲型方程组

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \partial_y \mathbf{g}(\mathbf{u}) + \partial_z \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$. 在网格 $\{(x_i, y_j, z_k) | x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z, i, j, k \in \mathbb{Z}\}$ 上, 其中 h_x, h_y 和 h_z 分别是 x, y 和 z 方向的网格步长, 请分别构造出逼近(1)的 Lax-Friedrichs 格式, Lax-Wendroff 格式, Richtmyer 的两步 LW 格式, 和 MacCormack 格式. 在数值计算中, 它们的时间步长如何选取? 为什么?

题4

(i) 按照讲义中的两个版本的 Godunov 格式, 分别写出

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3)$$

的 Godunov 格式, 其中 a 为实常数.

(ii) 按照讲义中的两个版本的 Godunov 格式, 分别写出

$$\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4)$$

的 Godunov 格式.

(iii) 按照讲义中的两个版本的 Godunov 格式, 分别写出

$$\partial_t u - a \partial_x v = 0, \quad \partial_t v - a \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (5)$$

的 Godunov 格式, 其中 a 为实常数.

提示: 需要给出局部 Riemann 问题的精确解的表达式, 并用于格式中.

CFD-上机作业(第7周)

2025 年 4 月 3 日

提交作业时间: 5月2日前交.

题1

二维无粘Burgers方程的Riemann问题

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_y = 0,$$

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} u_1, & x > 0, y > 0, \\ u_2, & x < 0, y > 0, \\ u_3, & x < 0, y < 0, \\ u_4, & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

初值1: $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (-1, -0.2, 0.5, 0.8)$, 输出时刻 $t = 1$;

初值2: $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (-0.2, -1, 0.5, 0.8)$, 输出时刻 $t = 1$.

程序实现一阶精度的显式Lax-Friedrichs格式和迎风格式, 二阶精度的显式Lax-Wendroff格式.

题2

计算一维完全气体Euler方程组的初值问题

$$\begin{cases} \left(\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \right)_t + \left(\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} \right)_x = 0, \\ p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2), \quad \gamma = 1.4. \end{cases}$$

初值1¹: 初始条件

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} (x, 0) = \begin{cases} (0.445, 0.311, 8.928)^T, & x < 0.5, \\ (0.5, 0, 1.4275)^T, & x > 0.5, \end{cases}$$

计算区间为 $[0, 1]$, 输出时刻 $t = 0.14$.

初值2: 初始条件

$$\mathbf{U} = \begin{cases} (1, 0, 2.5)^T, & x < 0.3, \\ (0.125, 0, 0.25)^T, & x > 0.3, \end{cases}$$

计算区间为 $[0, 1]$, 输出时刻 $t = 0.2$.

程序实现一阶精度的显式Lax-Friedrichs格式, 和二阶精度的显式Lax-Wendroff格式和MacCormack格式.

¹A. Harten, *J. Comput. Phys.*, 49(1983), 357-393; 135(1997), 260-278.

CFD-笔头作业(第8周)

2025 年 4 月 10 日

题1

考虑双曲型方程

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1)$$

和网格 $\{x_j = jh, j \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $u, f \in \mathbb{R}$, h 是 x 方向的网格步长.

假设逼近(1)的格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n, u_j^n)), \quad (2)$$

是单调格式, 请给出它的局部截断误差的首项.

题2

不利用单调格式的性质讨论逼近(1)的LF格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2}(f(u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n)), \quad (3)$$

和修改后的LF格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2}(f(u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n)), \quad (4)$$

是否有极大值原理? 是否有总变差减(TVD)性质?

不利用单调格式的性质讨论LF格式

$$u_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n) - \frac{\lambda_x}{2}(f(u_{j+1,k}^n) - \hat{f}(u_{j-1,k}^n)) - \frac{\lambda_y}{2}(g(u_{j,k+1}^n) - \hat{g}(u_{j,k-1}^n)),$$

是否有极大值原理?

不利用单调格式的性质讨论LF格式

$$u_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{6}(u_{i+1,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n + u_{i,j-1,k}^n + u_{i,j,k+1}^n + u_{i,j,k-1}^n) - \frac{\lambda_x}{2}(f(u_{i+1,j,k}^n) - \hat{f}(u_{i-1,j,k}^n)) - \frac{\lambda_y}{2}(g(u_{i,j+1,k}^n) - \hat{g}(u_{i,j-1,k}^n)) - \frac{\lambda_z}{2}(h(u_{i,j,k+1}^n) - \hat{h}(u_{i,j,k-1}^n)),$$

是否有极大值原理?

题3

证明下列结论. 设守恒型差分格式(2)不仅与(1)中的微分方程相容, 而且还对于(1)的任一严格凸熵 $\eta(u)$ 及对应的熵通量 $q(u)$ 满足离散熵条件

$$\eta_j^{n+1} \leq \eta_j^n - \lambda \left(\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^n \right), \quad \lambda = \frac{\tau}{h}, \quad (5)$$

其中 $\eta_j^n = \eta(u_j^n)$, $\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n = \hat{F}(u_{j-l+1}^n, \dots, u_{j+l}^n)$, $\hat{F}(u, \dots, u) = q(u)$. 如果 $\delta \rightarrow 0$ 时, (2)满足初始条件

$$u_j^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_0(x) \, dx$$

的解 $u_\delta(x, t)$ 几乎处处有界且收敛到函数 $u(x, t)$, 则 $u(x, t)$ 是初值问题(1)的相容许解.

题4

考虑二维双曲型方程

$$\partial_t u + \partial_x f(u) + \partial_y g(u) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \quad (6)$$

初始条件 $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, 和网格 $\{(x_j, y_k) | x_j = jh_x, y_k = kh_y, j, k \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $u, f, g \in \mathbb{R}$, h_x 和 h_y 分别是 x 和 y 方向的网格步长.

假设由逼近(6)的格式

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n - \lambda_x(\hat{f}_{j+1/2,k}^n - \hat{f}_{j-1/2,k}^n) - \lambda_y(\hat{g}_{j,k+1/2}^n - \hat{g}_{j,k-1/2}^n), \quad (7)$$

的解 $\{u_{j,k}^n\}$ 定义的阶梯函数 $u_\delta(x, y, t)$ 是几乎处处有界且收敛于函数 $u(x, y, t)$, 其中 $\lambda_x = \tau/h_x$, $\lambda_y = \tau/h_y$,

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+1/2,k} &= \hat{f}(u_{j-l+1,k}, u_{j-l+2,k}, \dots, u_{j+l,k}), \quad \hat{f}(u, u, \dots, u) = f(u), \\ \hat{g}_{j,k+1/2} &= \hat{g}(u_{j,k-l+1}, u_{j,k-l+2}, \dots, u_{j,k+l}), \quad \hat{g}(u, u, \dots, u) = g(u), \end{aligned}$$

证明 $u_\delta(x, y, t)$ 是(6)的初值问题的一个弱解.

如果对于(6)的任意凸熵对 $(\eta(u), q(u), \tilde{q}(u))$, 满足 $\eta' f' = q'$, $\eta' g' = \tilde{q}'$, 格式(8)还满足

$$\eta(u_{j,k}^{n+1}) \leq \eta(u_{j,k}^n) - \lambda_x(\hat{Q}_{j+1/2,k}^n - \hat{Q}_{j-1/2,k}^n) - \lambda_y(\hat{\tilde{Q}}_{j,k+1/2}^n - \hat{\tilde{Q}}_{j,k-1/2}^n), \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{j+1/2,k} &= \hat{Q}(u_{j-l+1,k}, u_{j-l+2,k}, \dots, u_{j+l,k}), \quad \hat{Q}(u, u, \dots, u) = q(u), \\ \hat{\tilde{Q}}_{j,k+1/2} &= \hat{\tilde{Q}}(u_{j,k-l+1}, u_{j,k-l+2}, \dots, u_{j,k+l}), \quad \hat{\tilde{Q}}(u, u, \dots, u) = \tilde{q}(u), \end{aligned}$$

则证明 $u_\delta(x, y, t)$ 是(6)的初值问题的一个可容许解.

题4

考虑逼近(6)的格式

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n - \lambda_x(\hat{f}_{j+1/2,k}^n - \hat{f}_{j-1/2,k}^n) - \lambda_y(\hat{g}_{j,k+1/2}^n - \hat{g}_{j,k-1/2}^n), \quad (9)$$

其中 $\lambda_x = \tau/h_x$, $\lambda_y = \tau/h_y$,

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+1/2,k} &= \hat{f}(u_{j,k}, u_{j+1,k}), \quad \hat{f}(u, u) = f(u), \\ \hat{g}_{j,k+1/2} &= \hat{g}(u_{j,k}, u_{j,k+1}), \quad \hat{g}(u, u) = g(u), \end{aligned}$$

讨论格式(9)何时是单调格式? 何时满足局部极值原理

$$\min_{j,k}\{u_{j,k}^n\} \leq u_{j,k}^{n+1} \leq \max_{j,k}\{u_{j,k}^n\}?$$

CFD-笔头作业(第9周)

2025 年 4 月 17 日

题1

设 $u(x, t), f(u)$ 均是光滑函数, $x_j = jh, j \in \mathbb{Z}$. 证明: 存在常数 $a_2, a_4, \dots, a_{2m-2}, \dots$, 使得格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n), \quad \lambda = \tau/h,$$

在 x 方向在截断误差意义下具有 $2m$ 阶精度, 其中

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{m-1} a_{2k} h^{2k} \left(\frac{\partial^{2k} f}{\partial x^{2k}} \right)_{j+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h^{2m+1}).$$

请(尝试)给出 a_2, a_4, a_6, a_8 的具体值.

题2

证明: 任何线性保单调格式至多只有一阶精度.

题3

考虑多点半离散格式(增量形式)

$$\frac{d}{dt} u_j = \sum_{q=-Q}^{Q-1} C_q(j) (u_{j-q} - u_{j-q-1}), \quad (1)$$

其中 $C_q(j)$ 是增量系数. 讨论格式(1)的TVD性质.

题4

考虑离散格式

$$u_j^{n+1} + \eta \lambda (\hat{f}_{j+1/2}^{n+1} - \hat{f}_{j-1/2}^{n+1}) = u_j^n - (1 - \eta) \lambda (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n), \quad (2)$$

其中 $\eta \in [0, 1]$ 是权系数, 不依赖 u , $\lambda = \tau/h$. 假设

$$u_j - \lambda (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}) = u_j + C_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1} - u_j) - D_{j-\frac{1}{2}}(u_j - u_{j-1}),$$

其中 $C_{j+\frac{1}{2}} \geq 0$, $D_{j+\frac{1}{2}} \geq 0$, $C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}} \leq 1$ 讨论格式(2)的TVD性质.

注: 将 $u_j - \lambda (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2})$ 改写成的增量形式是不唯一的.

题5

设 a 是正常数, $x_j = jh$, $j \in \mathbb{Z}$. 考虑 $u_t + au_x = 0$ 的有限差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda \left((u_j^n + 0.5s_j^n) - (u_{j-1}^n + 0.5s_{j-1}^n) \right), \quad \lambda = \tau/h, \quad (3)$$

其中

$$s_j = \minmod(u_{j+1} - u_j, u_j - u_{j-1}),$$

这里 $\minmod(a, b)$ 定义为

$$\minmod(a, b) := \begin{cases} a, & \text{如果 } ab \geq 0 \text{ \& } |a| \leq |b|, \\ b, & \text{如果 } ab \geq 0 \text{ \& } |b| \leq |a|, \\ 0, & \text{如果 } ab \leq 0, \end{cases}$$

即当 a 和 b 异号时取值为0; 同号时取绝对值小的.

讨论格式(3)与微分方程之间的相容性, 格式(3)是否具有TVD性质?

在之前的程序作业基础上, 实现上述方法, 测试格式精度并计算讲义CFDLect04-com01_cn.pdf第69页和第71页的两个问题.

CFD—作业(第10周)

2025 年 4 月 24 日

说明1: E格式¹的讨论还可参见本文档的附录.

说明2: 文档中提到的论文有超链接.

笔头题1

考虑 $u_t + f(u)_x = 0$, 其中 $f(u)$ 是 u 的非线性函数. 把讲义 [CFDLect05-com02.cn.pdf](#) 第49页的方程(4.13)中 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 取成

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f(u_j) + f(u_{j+1})) - \frac{q_{j+\frac{1}{2}}}{2}(u_{j+1} - u_j),$$

(1) 验证: 当 $q_{j+\frac{1}{2}}$ 恒为常数时, 通量限制器格式(4.13)只有一阶精度.

(2) 当 $q_{j+\frac{1}{2}}$ 等于什么时, 通量限制器格式(4.13)具有时空二阶精度(局部截断误差意义下)?

笔头题2

考虑 $u_t + f(u)_x = 0$ 的显式格式(广义MUSCL格式²)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2}}^{n,L}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n,R}) - \hat{f}(u_{j-\frac{1}{2}}^{n,L}, u_{j-\frac{1}{2}}^{n,R})),$$

¹S. Osher, High resolution schemes and the entropy condition, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.21, No.5 (Oct., 1984), pp.955-984.

²S. Osher, Convergence of generalized MUSCL schemes, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.22, No.5 (1985), pp. 947-961.

其中 $f(u)$ 是 u 的非线性函数, $\lambda = \tau/h$;

$$u_{j+\frac{1}{2}}^L = u_j + \frac{h}{2}S_j, \quad u_{j+\frac{1}{2}}^R = u_{j+1} - \frac{h}{2}S_{j+1},$$

$S_j \approx (u_x)_j$, 例如 $hS_j = \min\text{mod}(u_{j+1} - u_j, u_j - u_{j-1})$; $\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2}}^L, u_{j+\frac{1}{2}}^R)$ 满足: $\hat{f}(u, u) = f(u)$, 而且 $\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2}}^L, u_{j+\frac{1}{2}}^R)$ 是其第一个自变量的非减函数, 是其第二个自变量的非增函数. 讨论该格式的TVD性质和局部极值原理.

笔头题3

考虑 $u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0$ 的显式格式

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1} = & u_{j,k}^n - \lambda_x (\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2},k}^{n,L}, u_{j+\frac{1}{2},k}^{n,R}) - \hat{f}(u_{j-\frac{1}{2},k}^{n,L}, u_{j-\frac{1}{2},k}^{n,R})) \\ & - \lambda_y (\hat{g}(u_{j,k+\frac{1}{2}}^{n,L}, u_{j,k+\frac{1}{2}}^{n,R}) - \hat{g}(u_{j,k-\frac{1}{2}}^{n,L}, u_{j,k-\frac{1}{2}}^{n,R})), \end{aligned}$$

其中 $f(u), g(u)$ 可以是 u 的非线性函数, $\lambda_x = \tau/h_x, \lambda_y = \tau/h_y$;

$$\begin{aligned} u_{j+\frac{1}{2},k}^L &= u_{j,k} + \frac{h_x}{2}S_{j,k}^x, \quad u_{j+\frac{1}{2},k}^R = u_{j+1,k} - \frac{h_x}{2}S_{j+1,k}^x, \\ u_{j,k+\frac{1}{2}}^L &= u_{j,k} + \frac{h_y}{2}S_{j,k}^y, \quad u_{j,k+\frac{1}{2}}^R = u_{j,k+1} - \frac{h_y}{2}S_{j,k+1}^y, \end{aligned}$$

$S_{j,k}^x \approx (u_x)_{j,k}, S_{j,k}^y \approx (u_y)_{j,k}$ 例如 $h_x S_{j,k}^x = \min\text{mod}(u_{j+1,k} - u_{j,k}, u_{j,k} - u_{j-1,k})$, $h_y S_{j,k}^y = \min\text{mod}(u_{j,k+1} - u_{j,k}, u_{j,k} - u_{j,k-1})$; $\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2},k}^L, u_{j+\frac{1}{2},k}^R)$ 满足: $\hat{f}(u, u) = f(u)$, 而且 $\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2},k}^L, u_{j+\frac{1}{2},k}^R)$ 是其第一个自变量的非减函数, 是其第二个自变量的非增函数. $\hat{g}(u_{j,k+\frac{1}{2}}^L, u_{j,k+\frac{1}{2}}^R)$ 满足: $\hat{g}(u, u) = f(u)$, 而且 $\hat{g}(u_{j,k+\frac{1}{2}}^L, u_{j,k+\frac{1}{2}}^R)$ 是其第一个自变量的非减函数, 是其第二个自变量的非增函数. 讨论该格式的精度(局部截断误差意义下)和局部极值原理.

上机题

在4月3日的上机作业2的基础上, 进一步程序实现Harten的二阶TVD格式【A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 49(3), 357-393, 1983; 135(2), 260-278, 1997】, 求解一维完全气体Euler方程组的初值问题, 见讲义CFDLect04-com01-cn.pdf第100页。

附录：E格式

考虑 $u_t + f(u)_x = 0$ 的半离散格式

$$\frac{d}{dt}u_j = -\frac{1}{h}(\hat{f}(u_j, u_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}, u_j)) =: -\frac{1}{h}(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}),$$

其中对所有 j , 数值通量 $\hat{f}_{j-1/2}$ 满足

$$\text{sign}(u_j - u_{j-1})(\hat{f}_{j-1/2} - f(u)) \leq 0, \quad \forall u \in [u_{j-1}, u_j].$$

设 $\eta(u)$ 是 u 的凸函数: $\eta'' > 0$, $q(u)$ 满足: $q' = \eta' f'$.

用 $v_j := \eta'(u_j)$ 乘以格式两边, 得

$$\begin{aligned} h \frac{d}{dt} \eta(u_j) &= -v_j \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + v_j \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \\ &= -v_j \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + v_{j-1} \hat{f}(u_{j-1}, u_j) - v_{j-1} \hat{f}(u_{j-1}, u_j) + v_j \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \\ &= -v_j \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + v_{j-1} \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \\ &\quad + \int_{u_{j-1}}^{u_j} \eta''(s)(\hat{f}_{j-1/2} - f(s))ds + \int_{u_{j-1}}^{u_j} \eta''(s)f(s)ds \\ &\leq -v_j \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + v_{j-1} \hat{f}(u_{j-1}, u_j) + \int_{u_{j-1}}^{u_j} \eta''(s)f(s)ds \end{aligned}$$

这里做了两次加项减项的操作(见红色和蓝色部分, 其中红色部分是为了形成离散散度或守恒形式, 蓝色部分是为了把第三个等号右端第一项丢掉, 因为它没法写成守恒形式); 也已经使用了 $\eta'' > 0$ 和 E 格式通量满足的条件

$$\text{sign}(u_j - u_{j-1})(\hat{f}_{j-1/2} - f(u)) \leq 0, \quad \forall u \in [u_{j-1}, u_j].$$

注意

$$\begin{aligned} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \eta''(s)f(s)ds &= \int_{u_{j-1}}^{u_j} (\eta'(s)f(s))' - \eta'(s)f'(s)ds = \int_{u_{j-1}}^{u_j} (\eta'(s)f(s))' - q'(s)ds \\ &= [\eta'(u_j)f(u_j) - q(u_j)] - [\eta'(u_{j-1})f(u_{j-1}) - q(u_{j-1})] \end{aligned}$$

综合得

$$\begin{aligned} h \frac{d}{dt} \eta(u_j) &\leq -v_j \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + [\eta'(u_j)f(u_j) - q(u_j)] \\ &\quad + v_{j-1} \hat{f}(u_{j-1}, u_j) - [\eta'(u_{j-1})f(u_{j-1}) - q(u_{j-1})] \\ &=: -\hat{q}_{j+1/2} + \hat{q}_{j-1/2}. \end{aligned}$$

这就是离散的熵不等式.

这样的离散的熵不等式是不唯一的, 因为可以加减其它项, 例如

$$\begin{aligned}
h \frac{d}{dt} \eta(u_j) &= -v_j \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + v_j \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \\
&= -v_{j+1} \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + v_j \hat{f}(u_{j-1}, u_j) + v_{j+1} \hat{f}(u_j, u_{j+1}) - v_j \hat{f}(u_j, u_{j+1}) \\
&= -v_{j+1} \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + v_j \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \\
&\quad + \int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(s) (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - f(s)) ds + \int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(s) f(s) ds \\
&\leq -v_{j+1} \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + v_j \hat{f}(u_{j-1}, u_j) + \int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(s) f(s) ds \\
&= -v_{j+1} \hat{f}(u_j, u_{j+1}) + v_j \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \\
&\quad + [\eta'(u_{j+1}) f(u_{j+1}) - q(u_{j+1})] - [\eta'(u_j) f(u_j) - q(u_j)]
\end{aligned}$$

这里做了两次加项减项的操作(见红色和蓝色部分, 其中红色部分是为了形成离散散度或守恒形式, 蓝色部分是为了把第三个等号右端第一项蓝色部分是为了把第三个等号右端第一项丢掉, 因为它没法写成守恒形式); 也已经使用了 $\eta'' > 0$, $\eta' f' = q'$, E格式通量满足的条件.

CFD—作业(第12周)

2025 年 5 月 8 日

阅读作业

自学讲义 [CFDLect06-com03-ctex.pdf](#) 中的内容。

上机题1

求解一维无粘Burgers方程的初边值问题，可选用第一次上机作业中的题，参见【[HW03\(03-06\).pdf](#)】。

(1) 程序实现五阶WENO格式，其中空间离散见讲义 [CFDLect05-com02-cn.pdf](#)第**126**页或【G.S. Jiang and C.C. Wu, A high-order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics, *J. Comput. Phys.*, 150(1999), 561-594】。

(2) 程序实现 P^k -RKDG格式, $k = 0, 1, 2$.

上机题2

求解二维完全气体Euler方程组的双马赫反射问题，见讲义[CFDLect05-com02-cn.pdf](#)第**139**页。

说明：网格可以采用矩形网格，程序实现Harten的二阶TVD格式【A. Harten, *J. Comput. Phys.*, 49(3), 357-393, 1983; 135(2), 260-278, 1997】。

CFD—作业(第13周)

2025年5月15日

笔头作业

考虑均匀的笛卡尔网格 $\{(x_j, y_k) : x_j = jh_x, y_k = kh_y, j, k \in \mathbb{R}\}$.

1. 按[CFDLect07-com04.cn.pdf](#)中提及的两种方法[Roe(1981), Roe & Pike(1984)], 详细推导出二维完全气体Euler方程组的Roe格式。
2. 详细推导出二维完全气体Euler方程组的Osher格式。
3. 详细推导出下列 x -分裂的2D浅水波方程的近似Riemann解法器HLL、HLLC

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{u} = (u, v)$ 为速度, g 为重力加速度, h 为水深(height of water), 可参见[HW02\(02-27\).pdf](#)中的示意图.

CFD—作业(第14周)

2025 年 5 月 22 日

作业1

考虑线性常系数的对流扩散方程 (设 a 和 ν 为常数, 且 $\nu > 0$)

$$u_t + au_x = \nu u_{xx} \quad (1)$$

的显式中心差分离散

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \quad (2)$$

利用von Neumann 方法/Fourier方法验证它的 L^2 稳定性条件是

$$r \leq 1/2, \quad |\sigma|^2 \leq 2r \text{ 或 } \tau a^2 \leq 2\nu,$$

其中 $r := \frac{\nu\tau}{h^2}$, $\sigma := \frac{a\tau}{h}$, $Re_h := \frac{|a|h}{\nu}$.

讨论其满足局部极值原理的条件, 检查是否有网格雷诺数限制:

$$Re_h = \frac{|a|h}{\nu} \leq 2.$$

作业2

仍考虑上题**作业1**中的方程. 设 $\nu \ll 1$, $a \sim \mathcal{O}(1)$, 对于(1)的半离散格式

$$\frac{du_j(t)}{dt} = -a \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + \nu \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2},$$

中时间导数分别采用一阶至四阶显式Runge-Kutta时间方法离散时, 检查哪些时间离散是不稳定的, 哪些时间离散是稳定的.

提示: 采用常微分方程数值方法的绝对稳定性分析方法.

设解是 2π 周期的, 并具有形式

$$u_j(t) = \hat{u}(t)e^{i2\pi jh}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

将其代入上式, 得

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = -\frac{2a}{h} \cos(\pi h) \left(i \sin(\pi h) + \frac{1}{Re_h} \cos(\pi h) \right) \hat{u}(t) =: \lambda \hat{u}(t). \quad (3)$$

它是绝对稳定性分析中的“模型”方程. 把一阶至四阶显式Runge-Kutta时间方法分别用于该“模型”方程, 检查绝对稳定性区域并估计稳定性条件.

作业3

证明: 定义在有界(单连通)区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, 中的任何向量场 $\mathbf{v}$ 允许唯一的正交分解

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla \psi,$$

其中 $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_b$, $\mathbf{u}$ 是一个在区域边界 $\partial\Omega$ 上的法向分量为零的管式场(solenoidal field), 即 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 和 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$.

作业4

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 的一个开子集, 其边界 $\partial\Omega$ 是Lipschitz连续, $d > 1$. 将定常Stokes问题

$$\nabla p - \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \Omega,$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \partial\Omega,$$

其中 $\mathbf{f} \in [L_0^2(\Omega)]^d$, 转化为弱问题: 寻找 $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^d$, $p \in L_0^2(\Omega)$, 使得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d, \\ - \int_{\Omega} q \nabla \mathbf{u} d\mathbf{x} &= 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

和弱问题(鞍点问题)

$$\min_{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d} \max_{q \in L_0^2(\Omega)} L(\mathbf{v}, q).$$

其中

$$L(\mathbf{v}, q) = J(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} q \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad J(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right) d\mathbf{x}.$$

由此可见, 压力 p 扮演了Lagrange乘子的角色, 保障连续性条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 成立.

最后一次上机作业：尝试运行mit18086_navierstokes.m(见下列网页)，采用不同的网格数，Delta x和Delta y相等或不相等测试数值收敛性，修改Reynolds数等观察计算结果差异性。

【<https://math.mit.edu/~gs/cse/>
--> 6.7 mit18086_navierstokes.m (finite differences for the incompressible Navier-Stokes equations in a box) Documentation】

CFD—作业(第15周)

2025 年 5 月 29 日

笔头作业1

考虑二维非定常Navier-Stokes方程

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0,$$

和定解条件 $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\nu \geq 0$.

证明:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{2} u^3 \right)_x + \left(\frac{1}{2} v^3 \right)_y + \left(\frac{1}{2} uv^2 \right)_x + \left(\frac{1}{2} vu^2 \right)_y + (up)_x + (vp)_y - p(u_x + v_y) \right] d\mathbf{x} \\ &+ \nu \int_{\Omega} [(uu_x)_x + (uv_y)_y - (u_x)^2 - (u_y)^2 + (vv_x)_x + (vv_y)_y - (v_x)^2 - (v_y)^2] d\mathbf{x} \\ &\leq - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{2} u^3 \right)_x + \left(\frac{1}{2} v^3 \right)_y + \left(\frac{1}{2} uv^2 \right)_x + \left(\frac{1}{2} vu^2 \right)_y + (up)_x + (vp)_y \right] d\mathbf{x} \\ &+ \nu \int_{\Omega} [(uu_x)_x + (uv_y)_y + (vv_x)_x + (vv_y)_y] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

笔头作业2

写出二维非定常Stokes方程

$$\mathbf{u}_t + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0,$$

的交错网格(Marker-and-Cell网格)上的全隐式全离散的投影格式(含数值边界条件), 其中采用向后Euler时间离散和空间二阶中心差分离散. 由该格式推导出Stokes方程的涡流函数公式的相应的差分格式(含数值边界条件), 其中区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 被剖分为等间距的正方形网格 $\{(x_j, y_k) | x_j = jh, y_k = kh, j, k = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}$.

提示: ω 和 ψ 在网格节点 (i, j) 处离散. u 在 $(i, j + \frac{1}{2})$ 处离散, v 在 $(i + \frac{1}{2}, j)$ 处离散, p 在 $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ 处离散.

笔头作业3

考虑圆环区域 $\Omega_p = \{(x, y) : 0 < R_0 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < R_2\}$ 上的二维不可压缩Navier-Stokes方程的涡流函数公式. 在圆环的边界上流体速度为0. 给出其显式有限差分或有限体积离散(截断误差意义下二阶精度), 并给定局部涡边界条件.

提示: 可先将笛卡尔坐标下的INSE的涡流函数公式进行极坐标变换.

笔头作业4

考虑基于椭圆型微分方程的网格生成问题(可参见[4 Elliptic Generation Systems](#)). 设物理区域 $\Omega_p = \{x : a \leq x \leq b\}$ 到逻辑区域 (也称为参考区域) $\Omega_c = \{\xi : 0 \leq \xi \leq 1\}$ 的坐标变换 $\xi = \xi(x)$ 满足:

$$\xi_{xx} = P, \quad P \text{ 为常数.}$$

分析右端项 P 对生成物理区域 Ω_p 的网格的影响, 并在 (x, ξ) 平面中绘制示意图.

一些参考材料(论文, 网页, 开源小软件):

- (1) [Documentaion for Elliptic Grid Generation](#), Marc Salvadori
- (2) R.L. Sorenson and J.L. Steger, [Numerical generation of two-dimensional grids by use of Poisson equations with grid control at boundaries](#), N81-14722

in *Numerical Grid Generation Techniques*, R.E. Smith (Ed.), NASA-CP-2166, 1980, pp.449-461.

(3) S.P. Spekreijse, Elliptic grid generation based on Laplace equations and algebraic transformations, *J. Comput. Phys.*, 118 (1995), pp.38-61.

(4) [Two-Dimensional Grids About Airfoils And Other Shapes By The Use Of Poisson's Equation \(GRAPE\)](#).

(5) J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, and C.W. Mastin, *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, Elsevier, New York, 1985.