

计算流体力学 习题解答与实验报告

郑滕飞 2401110060

* 对应汤华中老师《计算流体力学》课程。

目录

1 第二周	3
1.1 书面作业	3
1.2 实验报告	7
2 第三周	11
2.1 书面作业	11
2.2 实验报告	15
3 第四周	18
3.1 书面作业	18
4 第五周	20
4.1 书面作业	20
5 第六周	23
5.1 书面作业	23
5.2 实验报告	27
6 第七周	30
6.1 书面作业	30
6.2 实验报告	36
7 第八周	41
7.1 书面作业	41
8 第九周	47
8.1 书面作业	47
8.2 实验报告	51
9 第十周	53
9.1 书面作业	53
9.2 实验报告	57
10 第十二周	61
10.1 实验报告	61

目 录	2
11 第十三周	68
11.1 书面作业	68
12 第十四周	73
12.1 书面作业	73
12.2 实验报告	76
13 第十五周	79
13.1 书面作业	79

1 第二周

1.1 书面作业

1. (1) 记 $m = \rho u$, 则有

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{m^2}{2\rho} \right)$$

从而

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} m \\ (3 - \gamma) \frac{m^2}{2\rho} + (\gamma - 1)E \\ \gamma \frac{mE}{\rho} - (\gamma - 1) \frac{m^3}{2\rho^2} \end{pmatrix}$$

于是直接计算可知

$$A(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 3) \frac{m^2}{2\rho^2} & (3 - \gamma) \frac{m}{\rho} & \gamma - 1 \\ -\gamma \frac{mE}{\rho^2} + (\gamma - 1) \frac{m^3}{\rho^3} & \frac{\gamma E}{\rho} - (\gamma - 1) \frac{3m^2}{2\rho^2} & \gamma \frac{m}{\rho} \end{pmatrix}$$

由物理约束 $\rho > 0$ 、 $p > 0$ 进一步计算得到特征值为

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u - c, \quad \lambda_3 = u + c, \quad c = \sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}}$$

对应的一个右特征向量 (作为特征子空间的基) 分别为

$$\begin{aligned} & \left(1, u, \frac{1}{2}u^2 \right)^T \\ & (1, u - c, H - uc)^T \\ & (1, u + c, H + uc)^T \end{aligned}$$

这里 $H = \frac{1}{\rho}(E + p)$ 为总焓。

一个左特征向量分别为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\gamma + 1)m^2 - 2\gamma E\rho}{2\rho^2}, -u, 1 \right)^T \\ & \left(\frac{m^2(\gamma - 1) + 2mc}{2(\gamma - 1)\rho}, -u - \frac{c}{\gamma - 1}, 1 \right)^T \\ & \left(\frac{m^2(\gamma - 1) - 2mc}{2(\gamma - 1)\rho}, -u + \frac{c}{\gamma - 1}, 1 \right)^T \end{aligned}$$

(2) 设 $\mathbf{V} = \mathbf{G}(\mathbf{U})$, 则

$$\mathbf{V}_t = (\partial_{\mathbf{U}} \mathbf{G}) \mathbf{U}_t, \quad \mathbf{V}_x = (\partial_{\mathbf{U}} \mathbf{G}) \mathbf{U}_x$$

于是记

$$J_{\mathbf{V}} = \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ (\gamma - 1) \frac{u^2}{2} & -(\gamma - 1)u & \gamma - 1 \end{pmatrix}$$

可发现

$$J_{\mathbf{V}} \mathbf{U}_t + J_{\mathbf{V}} A(\mathbf{U}) J_{\mathbf{V}}^{-1} J_{\mathbf{V}} \mathbf{U}_x = 0$$

从而

$$B(\mathbf{V}) = J_{\mathbf{V}} A(\mathbf{U}) J_{\mathbf{V}}^{-1}$$

即 $B(\mathbf{V})$ 与 $A(\mathbf{U})$ 相似, 其特征值与 $A(\mathbf{U})$ 相同, 对应右特征向量为 $A(\mathbf{U})$ 的右特征向量左乘 $J_{\mathbf{V}}$, 左特征向量为 $A(\mathbf{U})$ 的左特征向量左乘 $J_{\mathbf{V}}^T$ 。

(3) 设 $\mathbf{W} = \mathbf{H}(\mathbf{U})$, 则

$$\mathbf{W}_t = (\partial_{\mathbf{U}} \mathbf{H}) \mathbf{U}_t, \quad \mathbf{W}_x = (\partial_{\mathbf{U}} \mathbf{H}) \mathbf{U}_x$$

于是记

$$J_{\mathbf{W}} = \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma-1)^2 u^2 \rho^\gamma & -(\gamma-1)u\rho^{-\gamma} & (\gamma-1)\rho^{-\gamma} \end{pmatrix}$$

可发现

$$J_{\mathbf{W}} \mathbf{U}_t + J_{\mathbf{W}} A(\mathbf{U}) J_{\mathbf{W}}^{-1} J_{\mathbf{W}} \mathbf{U}_x = 0$$

从而

$$C(\mathbf{W}) = J_{\mathbf{W}} A(\mathbf{U}) J_{\mathbf{W}}^{-1}$$

即 $C(\mathbf{W})$ 与 $A(\mathbf{U})$ 相似, 其特征值与 $A(\mathbf{U})$ 相同, 对应右特征向量为 $A(\mathbf{U})$ 的右特征向量左乘 $J_{\mathbf{W}}$, 左特征向量为 $A(\mathbf{U})$ 的左特征向量左乘 $J_{\mathbf{W}}^{-T}$ 。

利用相似的传递性, $A(\mathbf{U})$ 、 $B(\mathbf{V})$ 、 $C(\mathbf{W})$ 彼此相似。

2. 以下用下标表示求偏导。

利用第一个方程可将左侧二、三两项对 u, v 分别求导的部分抵消, 将左侧化简为

$$E_t + uE_x + vE_y + up_x + vp_y$$

代入后两个方程得到其为

$$E_t + uE_x + vE_y + u(\nu(u_{xx} + u_{yy}) - u_t - uu_x - vu_y) + v(\nu(v_{xx} + v_{yy}) - v_t - uv_x - vv_y)$$

直接计算可知

$$E_t = uu_t + vv_t, \quad E_x = uu_x + vv_x, \quad E_y = uu_y + vv_y$$

$$E_{xx} = u_x^2 + uu_{xx} + v_x^2 + vv_{xx}, \quad E_{yy} = u_y^2 + uu_{yy} + v_y^2 + vv_{yy}$$

代入消去可得左侧变为

$$\nu(uu_{xx} + uu_{yy} + vv_{xx} + vv_{yy})$$

而由 ν 非负可知其小于等于

$$\nu(uu_{xx} + uu_{yy} + vv_{xx} + vv_{yy} + u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2)$$

这就是右侧展开的结果。

3. 以下用下标表示求偏导。

记 $a = hu$ 、 $b = hv$, 方程化为

$$h_t + a_x + b_y = 0$$

$$a_t + (a^2/h)_x + (ab/h)_y + gh(h+Z)_x = 0$$

$$b_t + (ab/h)_x + (b^2/h)_y + gh(h+Z)_y = 0$$

而

$$E = \frac{1}{2h}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}gh^2 + ghZ$$

于是有

$$E_t = -\frac{1}{2h^2}(a^2 + b^2)h_t + g(h+Z)h_t + \frac{a}{h}a_t + \frac{b}{h}b_t$$

从而代入三个方程得到 $-E_t$ 为

$$\begin{aligned} -E_t = & \left(-\frac{1}{2h^2}(a^2 + b^2) + g(h + Z) \right) a_x + \frac{a}{h}((a^2/h)_x + gh(h + Z)_x) + \frac{b}{h}(ab/h)_x \\ & + \left(-\frac{1}{2h^2}(a^2 + b^2) + g(h + Z) \right) b_y + \frac{a}{h}(ab/h)_y + \frac{b}{h}((b^2/h)_y + gh(h + Z)_y) \end{aligned}$$

利用对称性, 我们只需证明

$$\left(-\frac{1}{2h^2}(a^2 + b^2) + g(h + Z) \right) a_x + \frac{a}{h}((a^2/h)_x + gh(h + Z)_x) + \frac{b}{h}(ab/h)_x = (u(E + gh^2/2))_x$$

则第二部分自然与要证式的第三项相等, 即可得到证明。

将左侧整理为

$$\left(-\frac{1}{2h^2}(a^2 + b^2) + g(h + Z) + \frac{2a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} \right) a_x + \frac{ab}{h^2} b_x - \left(\frac{a^3 + ab^2}{h^3} \right) h_x + ga(h + Z)_x$$

将右侧重新写为

$$\left(\frac{a}{2h^2}(a^2 + b^2) + g(h + Z)a \right)_x$$

直接对比括号中内容对 a 、 b 、 h 、 $h + Z$ 的偏导数即可验证相等, 从而得证。

4. 考虑 x 到 $x + \delta x$ 段的控制体, 时间为 t 到 $t + \delta t$ 。

- 连续性方程: δt 时间内, 控制体左侧流入控制体的质量为 $\rho AV \delta t$, 右侧流出控制体的质量为 $(\rho + \rho_x \delta x)(A + A_x \delta x)(V + V_x \delta x) \delta t$, 从而考虑 δt 时间内质量增加量为

$$\rho AV \delta t - (\rho + \rho_x \delta x)(A + A_x \delta x)(V + V_x \delta x) \delta t = ((\rho A)_t \delta x) \delta t$$

消去 $\delta x \delta t$ 与高阶小量即得到

$$-\rho AV_x - \rho V A_x - AV \rho_x = (\rho A)_t$$

这就是连续性方程。

- 动量方程: δt 时间内, 控制体左侧受到的冲量为 $pA \delta t$, 右侧作用的冲量为 $(pA + (pA)_x \delta x) \delta t$, 近似为台状可发现侧壁输入的冲量为 $pA_x \delta x \delta t$; 输入的动量为 $\rho AV^2 \delta t$, 输出的动量为 $(\rho AV^2 + (\rho AV^2)_x \delta x) \delta t$; 从而考虑 δt 时间内动量增加量为

$$pA \delta t - (pA + (pA)_x \delta x) \delta t + pA_x \delta x \delta t + \rho AV^2 \delta t - (\rho AV^2 + (\rho AV^2)_x \delta x) \delta t = (\rho V A)_t \delta x \delta t$$

消去 $\delta x \delta t$ 与高阶小量即得到

$$p_x A + pA_x - pA_x + (\rho AV^2)_x + (\rho V A)_t = 0$$

即

$$p_x A + (\rho AV^2)_x + (\rho A)_t V + \rho AV_t = 0$$

代入连续性方程可得

$$(\rho A)_t V = -\rho AV V_x - \rho V^2 A_x - AV^2 \rho_x = \rho AV V_x - (\rho AV^2)_x$$

从而代入并消去 A 有

$$p_x + \rho V V_x + \rho V_t = 0$$

利用 $p = \rho RT$ 即得到动量方程 (注意 R 为常数)。

- 能量方程：与动量类似，在 δt 时间内对控制体做的功为 (由于侧壁并未移动，不存在做功)

$$-(pVA)_x \delta x \delta t$$

其中第一项表示前后的做功差，第二项表示侧壁做功。 δt 时间内输入控制体的动能为

$$-\left(\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)VA\right)_x \delta x \delta t$$

动能增加量为

$$\left(\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)A\right)_t \delta x \delta t$$

由此可得到

$$\left(\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)A\right)_t + \left(\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)VA\right)_x + (pVA)_x = 0$$

将第一项写为

$$\left(e + \frac{V^2}{2}\right)(\rho A)_t + \rho A e_t + AV(\rho V_t)$$

前后两项分别代入连续性方程与动量方程进行消去，最终计算得到

$$\rho A e_t + \rho A V e_x + p(AV)_x = 0$$

同除以 A 即

$$\rho e_t + \rho V e_x = -p(V_x - V(\ln A)_x)$$

代入 $e = c_v T$ 与 $p = \rho RT$ 即得到最终结果。

1.2 实验报告

1.2.1 格式实现

我们考虑的方程为

$$u_t + cu_x = 0, \quad x \in [0, 2], \quad t > 0$$

并假设流速 $c > 0$ ，初值 $u(x, 0) = 1 + \chi_{[0.5, 1]}(x)$ ，左边界处恒为 1，时间不超过 $\frac{1}{c}$ ，也即初值为 2 的部分不会传播到边界（否则 LW 格式无法进行）。用均匀网格进行离散，并记 $\nu = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 为 CFL 数（由假设其为正）， u_j^n 为 $x = j\Delta x$ 、 $t = n\Delta t$ 处的数值解。

1. LW 格式

格式的迭代公式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\nu^2(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n)$$

需要给定 $x = 0$ 与 $x = 2$ 处的值，直接将上式向量化可得到实现。

用 Fourier 方法分析 L^2 模稳定条件，代入 $u_j^n = \lambda^n e^{ikj\Delta x}$ 可得

$$\lambda(k) = 1 - i\nu \sin \xi - 2\nu^2 \sin^2 \frac{\xi}{2}$$

其中 $\xi = k\Delta x$ 。直接计算可发现

$$|\lambda(k)|^2 = 1 - 4\nu^2(1 - \nu^2) \sin^4 \frac{\xi}{2}$$

由此可知当且仅当 $\nu \leq 1$ 时 L^2 模稳定，从而最大可取 $\nu = 1$ 。

2. 二阶迎风格式 (BW 格式)

格式的迭代公式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) + \frac{1}{2}\nu^2(u_{j-2}^n + u_j^n - 2u_{j-1}^n)$$

用 Fourier 方法分析 L^2 模稳定条件，代入 $u_j^n = \lambda^n e^{ikj\Delta x}$ 可得

$$\lambda(k) = 1 - \frac{1}{2}\nu(3 - 4e^{-i\xi} + e^{-2i\xi}) + \frac{1}{2}\nu^2(1 + e^{-2i\xi} - 2e^{-i\xi})$$

其中 $\xi = k\Delta x$ 。当 $\nu = 2$ 时其为 $e^{-2i\xi}$ ，模长不超过 1，稳定，而当 $\nu > 2$ 时取 $\xi = \pi$ 即模长大于 1，不稳定，从而 ν 最大可取为 2。进一步计算可发现稳定当且仅当 $\nu \leq 2$ 。

3. 隐式 Z 字形格式

由于已知这是使用 u_j^n 、 u_j^{n+1} 、 u_{j-1}^{n+1} 、 u_{j-1}^n 四点的迭代格式，我们下面对其进行推导。设真解为 $[u]$ ，在 $[u]_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 展开，设这点对 t 导数为 a ，对 t 二阶导为 b ，利用方程可发现

$$[u]_j^n = [u]_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a\Delta t - \frac{1}{2c}a\Delta x + \frac{1}{8}b(\Delta t)^2 + \frac{1}{8c^2}b(\Delta x)^2 + \frac{1}{4c}b\Delta x\Delta t + o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

$$[u]_{j-1}^n = [u]_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a\Delta t + \frac{1}{2c}a\Delta x + \frac{1}{8}b(\Delta t)^2 + \frac{1}{8c^2}b(\Delta x)^2 - \frac{1}{4c}b\Delta x\Delta t + o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

$$[u]_j^{n+1} = [u]_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a\Delta t - \frac{1}{2c}a\Delta x + \frac{1}{8}b(\Delta t)^2 + \frac{1}{8c^2}b(\Delta x)^2 - \frac{1}{4c}b\Delta x\Delta t + o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

$$[u]_{j-1}^{n+1} = [u]_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a\Delta t + \frac{1}{2c}a\Delta x + \frac{1}{8}b(\Delta t)^2 + \frac{1}{8c^2}b(\Delta x)^2 + \frac{1}{4c}b\Delta x\Delta t + o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

由此两两作差

$$[u]_j^{n+1} - [u]_{j-1}^n = a\Delta t - \frac{1}{c}a\Delta x$$

$$[u]_{j-1}^{n+1} - [u]_j^n = a\Delta t + \frac{1}{c}a\Delta x$$

于是可得到二阶隐式迭代格式

$$(1 + \nu)(u_j^{n+1} - u_{j-1}^n) = (1 - \nu)(u_{j-1}^{n+1} - u_j^n)$$

用 Fourier 方法分析 L^2 模稳定条件, 代入 $u_j^n = \lambda^n e^{ikj\Delta x}$ 可得

$$\lambda(k) = \frac{1 + \nu - (1 - \nu)e^{-i\xi}}{-(1 - \nu) + (1 + \nu)e^{-i\xi}}$$

直接计算

$$|\lambda(k)|^2 = \frac{1 + \nu^2 - (1 + \nu)(1 - \nu)\cos\xi}{1 + \nu^2 - (1 + \nu)(1 - \nu)\cos\xi} = 1$$

从而无条件 L^2 模稳定。

值得注意的是, 此格式并非真的需要隐式进行迭代。将其写成 (当 $\nu = 1$ 时, 退化为 $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$)

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \frac{1 - \nu}{1 + \nu}(u_{j-1}^{n+1} - u_j^n)$$

只要进行顺次更新即可。

1.2.2 结果展示

除了上述的格式外, 我们还实现了 $\nu = 1$ 的一阶迎风格式作为对比。由于间断捕获不准确会导致 L_∞ 误差至少为 1, 我们主要以 L^2 误差作为阶数的刻画。此外, 由于需要对比不同 ν 的影响, 我们指定总模拟时间为 T , 若 Δt 不能整除 T , 我们将在最后一步更改步长 (步长为 $t_{fin} = T - n\Delta t$, 满足 $0 < t_{fin} \leq \Delta t$) 以保证恰好模拟到 T 时刻。

取定 $c = 1.2$ 、 $T = 0.6$ 、 x 方向格点数 $n_x = 41$, 并在三种算法中都将 ν 取为 1, 效果如图 1。

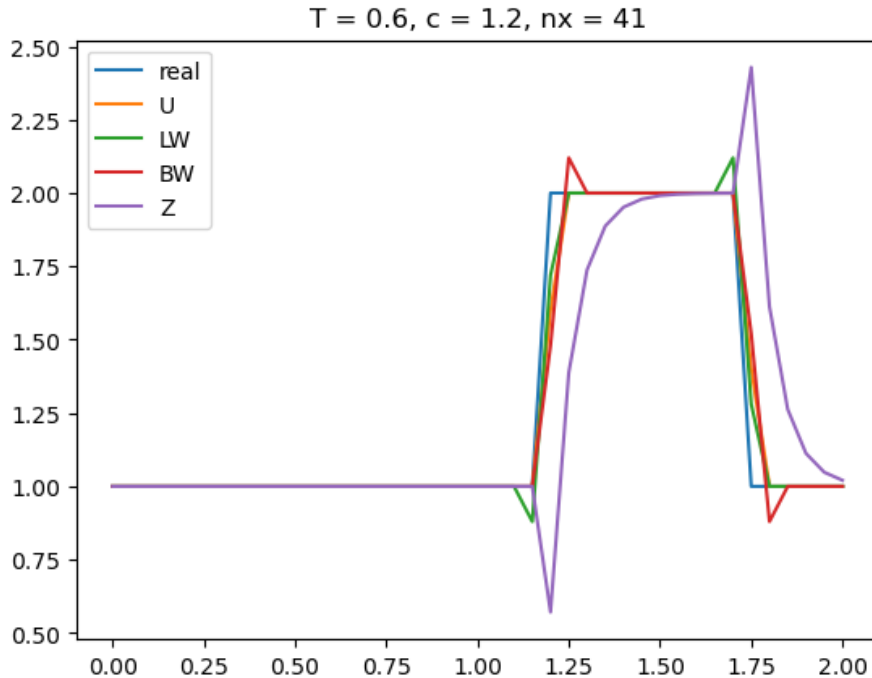
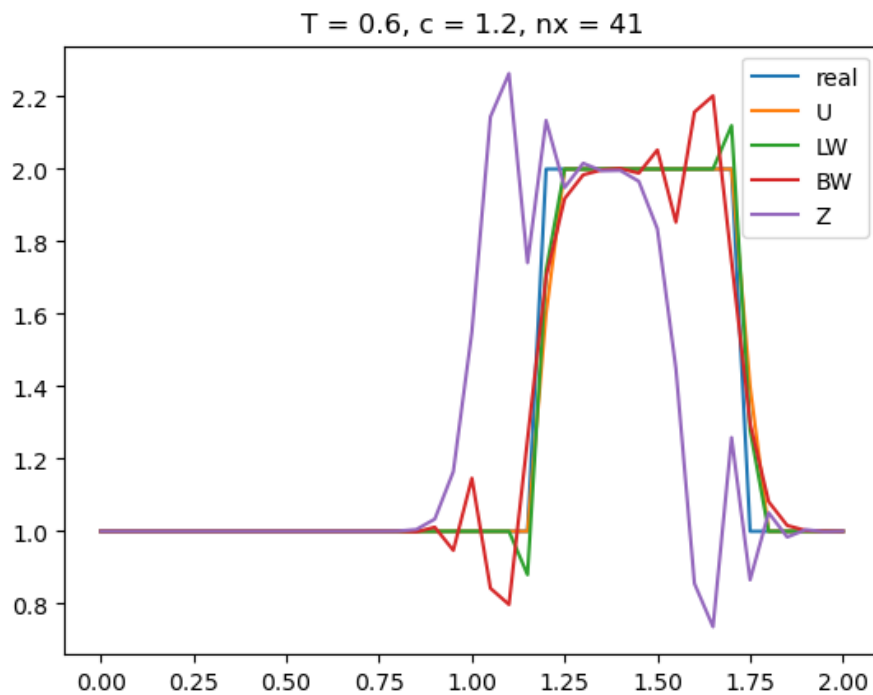
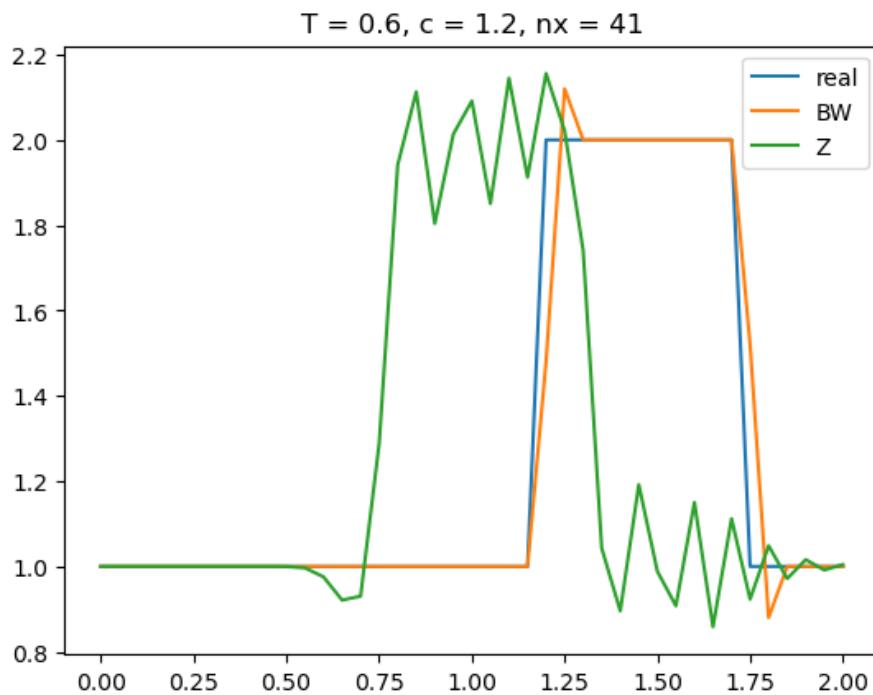


图 1: 基础情况模拟效果

可以发现, 由于除了一阶迎风外实现的三种格式都是二阶格式, 无法保持单调, 均会存在一定程度的不稳定。其中, 此例子里 BW 格式和隐式 Z 格式的数值振荡出现在波前, LW 格式出现在波后。不过, 如果取定后两种算法的 ν 为 1.2, 效果如图 2。

图 2: 更大的 ν 模拟效果

此时，三者的数值振荡都出现在了波后。进一步观察可以得到，三种格式在 $\nu = 1$ 时都能实现精确的模拟，因此基础情况的数值振荡事实上来自 Δt 更小的最后一步。由此，当 $\nu < 1$ 时，BW 格式与隐式 Z 格式的数值振荡出现在波前，而 $\nu > 1$ 时两者的数值振荡出现在波后。当 $\nu = 2$ 时，BW 格式与隐式 Z 格式的模拟效果如图 3。

图 3: 过大的 ν 模拟效果

由此可发现，对 BW 格式来说取尽量大的 ν 可以使得过程中的误差累计减少，从而使得模拟更快，而对隐式 Z 格式会导致振荡更加剧烈。调整 ν 可得，对隐式 Z 格式， ν 越接近 1 时模拟效果将越好。为了

突出格式特点，此后我们将在 BW 格式中取定 $\nu = 1.2$ ，隐式 Z 格式中取定 $\nu = 0.95$ 。此外，若迎风格式与 LW 格式中取 $\nu = 1$ ，实际误差只由最后一步决定，无法考察实际逼近阶数，因此均取 $\nu = 0.8$ 。加细网格后的误差如下表。

表 1: 误差以 2 为底对数表

区间数	迎风格式		LW 格式		BW 格式		隐式 Z 格式	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
40	-5.556	-0.997	-6.292	-1.493	-6.357	-1.748	-1.410	0.614
80	-5.897	-0.821	-6.738	-1.154	-6.828	-1.226	-2.539	0.480
160	-6.582	-0.934	-7.407	-1.301	-7.538	-1.457	-3.378	0.376
320	-7.161	-1.049	-7.826	-0.907	-7.948	-0.928	-3.284	0.440
640	-7.650	-1.000	-8.468	-0.894	-8.628	-0.934	-3.579	0.357

可以发现，除了振荡过于严重的隐式 Z 格式外，其他高阶格式确实体现了比低阶格式更好的收敛性。不过，出于数值振荡，总 L^2 范数或 L^∞ 并未达到理论收敛阶，但考察固定点的逼近阶数可发现局部收敛阶保持。

2 第三周

2.1 书面作业

1. * 条件不足, 需要 $\tau = t$ 才能确定 τ 的表达式, 否则从条件中只能得到

$$m_x = \rho, \quad m_t = \int^x \rho_t(s, t) ds = -\rho u, \quad t_\tau = 1, \quad x_\tau = u$$

而根据 Jacobi 矩阵互逆性有

$$\begin{pmatrix} m_x & m_t \\ \tau_x & \tau_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m & x_\tau \\ t_m & t_\tau \end{pmatrix} = I_2$$

由于右上角元素已经确定, 四个未知数只有三个方程, 不足以求解。另一方面, 从 $V_\tau - u_m = 0$ 换元为 x, t 可得 $\rho_t + u\rho_x + \rho^2 u_m = 0$, 结合 $\rho_t + (\rho u)_x = 0$ 可得 $u_x = \rho u_m$, 而将 x 换元为 m, τ 可得 $\rho u_m + \tau_x u_\tau = \rho u_m$, 从而最终得到 (u_τ 是加速度未必为 0) 应有 $\tau_x = 0$, 最终解出 (由于只需要导数, 可忽略常数差别) $\tau = t$ 。以下均在 $\tau = t$ 时进行推导, 此时进一步计算有

$$\frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\rho u \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

- 第一个方程 $\rho_t + (\rho u)_x = 0$ 可化为

$$-\rho u \rho_m + \rho_\tau + \rho(\rho u)_m = 0$$

第三项为 $\rho^2 u_m + \rho u \rho_m$, 从而上式又化为 $\rho_\tau + \rho^2 u_m = 0$, 除以 ρ^2 得到

$$V_t - u_m = 0$$

- 第二个方程 $(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0$ 可化为

$$-\rho u(\rho u)_m + (\rho u)_\tau + \rho(\rho u^2)_m + \rho p_m = 0$$

展开合并即

$$\rho_\tau u + \rho u_\tau + \rho^2 u u_m + \rho u_m = 0$$

代入第一个方程可得

$$-\rho^2 u_m u + \rho u_\tau + \rho^2 u u_m + \rho p_m = 0$$

一三两项抵消后同除以 ρ 得结论

$$u_\tau + p_m = 0$$

- 第三个方程 $E_t + (u(E + p))_x = 0$, 由 $E_t + uE_x = E_\tau$ 可先化为

$$E_\tau + Eu_x + (up)_x = 0$$

也即

$$E_\tau + \rho E u_m + \rho(up)_m = 0$$

代入 $E = \rho\varepsilon$ 与 $\rho_\tau = -\rho^2 u_m$ 得到

$$-\rho^2 u_m \varepsilon + \rho \varepsilon_\tau + \rho^2 \varepsilon u_m + \rho(up)_m = 0$$

从而抵消并同除以 ρ 即得

$$\varepsilon_\tau + (up)_m = 0$$

由于

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho u^2\right) = (\gamma - 1)\frac{1}{2V}(2\varepsilon - u^2)$$

直接计算可知 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\rho p & -(\gamma - 1)\rho u & (\gamma - 1)\rho \\ -\rho u p & p - (\gamma - 1)\rho u^2 & (\gamma - 1)\rho u \end{pmatrix}$$

其特征值为 0、 ρc 、 $-\rho c$ ，其中 $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ 。对应的一个特征向量分别为

$$(\gamma - 1, 0, p)^T, \quad \left((\rho c)^2, -\rho c, -p - \rho c u\right)^T, \quad \left((\rho c)^2, \rho c, -p + \rho c u\right)^T$$

2. 由于其对应的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

为二阶，其特征值同号/有零/异号（椭圆型/抛物型/双曲型）分别对应行列式大于 0、等于 0、小于 0，也即完全由 $\det A$ 的符号决定。

进行代换后，由于

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}$$

展开可得新的主部即为（只保留展开中对 u 求了二阶导数的部分）

$$(\xi_x^2 a + \xi_x \xi_y b + \xi_y^2 c)u_{\xi\xi} + (2\xi_x \eta_x a + \xi_x \eta_y b + \xi_y \eta_x b + 2\xi_y \eta_y c)u_{\xi\eta} + (\eta_x^2 a + \eta_x \eta_y b + \eta_y^2 c)u_{\eta\eta}$$

其对应的系数矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \xi_x^2 a + \xi_x \xi_y b + \xi_y^2 c & \xi_x \eta_x a + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x)b/2 + \xi_y \eta_y c \\ \xi_x \eta_x a + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x)b/2 + \xi_y \eta_y c & \eta_x^2 a + \eta_x \eta_y b + \eta_y^2 c \end{pmatrix}$$

计算可发现

$$B = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}$$

由于变换光滑可逆，其 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

行列式大于 0，从而

$$\det B = \det(JAJ^T) = (\det J)^2 \det A$$

也即 A 、 B 行列式同号，因此光滑可逆变换不影响方程类型。

3. (1) 直接将 u 的形式代入方程可知

$$A_0 i \omega \exp(i(\xi x + \omega t)) = A_0 \alpha (i\xi)^m \exp(i(\xi x + \omega t))$$

考虑 A_0 非零的非平凡解，即有

$$\omega = \alpha i^{m-1} \xi^m$$

(2) 将其写为

$$u(x, t) = A_0 \exp(i(\xi x + \alpha i^{m-1} \xi^m t))$$

逐个进行分析：

- 当 m 为奇数时, $\alpha i^{m-1} \xi^m t$ 没有虚部, 无耗散。其余情况, $\xi^m \geq 0$ 恒成立, 且不考虑 $\xi = 0$ 的平凡情况时其为正。当 m 模 4 余 2 时, 可提出 $\exp(-\alpha \xi^m t)$ 项, 当 $\alpha > 0$ 时有耗散, $\alpha < 0$ 时为逆耗散 (发散); 反之, 当 m 为 4 的倍数时, 当 $\alpha < 0$ 时有耗散, $\alpha > 0$ 时为逆耗散 (发散)。
- 当 m 为偶数时, $\alpha i^{m-1} \xi^m t$ 没有实部, 也即波传播速度为 0, 不会色散。当 $m = 1$ 时, 解为 $\exp(i(\xi x + \alpha \xi t))$, 其传播速度恒为 $-\alpha$, 不会色散。其余情况 ω 的实部是 ξ 的非线性函数, 会发生色散。
- 从解的形式可以看出, 逐点意义下解对参数 ξ 具有稳定性, 但在逆耗散 (m 模 4 余 2 且 $\alpha < 0$ 或 m 为 4 的倍数且 $\alpha > 0$) 时, 解整体不稳定, 其余情况整体稳定。

4. 先假设 $b \neq 0$ 。考虑 $u_0(x_0)$ 出发的特征线 $x(t)$ 使得

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(x(t), t)$$

则特征线上有

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = uu_x + u_t = bu(x(t), t)$$

由此结合初值 $u(x(0), 0) = u_0(x_0)$ 可知

$$u(x(t), t) = u_0(x_0)e^{bt}$$

代入回特征线方程, 结合初值 $x(0) = x_0$ 求解得到

$$x(t) = \frac{1}{b}u_0(x_0)(e^{bt} - 1) + x_0$$

将 x 看作自变量, x_0 看作 $x_0(x, t)$, 进一步代入可知

$$u(x, t) = e^{bt}u_0\left(x - \frac{1}{b}u_0(x_0)(e^{bt} - 1)\right) = e^{bt}u_0\left(x - \frac{1}{b}u(x, t)(1 - e^{-bt})\right)$$

当 $b = 0$ 时, 类似讲义上的分析可发现

$$u(x, t) = u_0(x - tu(x, t))$$

也即可将上式视作极限。

下面计算解的爆破时间。将特征线方程中 x 看作自变量, x_0 看作 $x_0(x, t)$, 两侧对 t, x 求导得到

$$0 = e^{bt}u_0(x_0) + \left(\frac{1}{b}(e^{bt} - 1)u'_0(x_0) + 1\right)\frac{\partial x_0}{\partial t}$$

$$1 = \left(\frac{1}{b}(e^{bt} - 1)u'_0(x_0) + 1\right)\frac{\partial x_0}{\partial x}$$

由于解爆破也即 x_0 各偏导在趋向 $t > 0$ 的某处无有限值, 等价于存在 $t > 0$ 使得

$$\frac{1}{b}(e^{bt} - 1)u'_0(x_0) + 1 = 0$$

由于对任何 $t > 0$, $\frac{1}{b}(e^{bt} - 1) > 0$ 恒成立 ($b = 0$ 时视为极限 t), 会出现爆破至少需要 $u'_0(x_0) < 0$, 此时直接计算爆破时间为

$$t^* = \frac{1}{b} \ln \left(1 - \frac{b}{u'_0(x_0)}\right)$$

由此结合 $\ln$ 定义在正数上, 爆破的最终条件为

$$u'_0(x_0) < \min(0, b)$$

此时爆破时间表达式如上。

5. 由于其对应的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ a_0^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix}$$

特征值为 $\pm a_0$, 计算对应的特征向量可配凑成 (由条件 $a_0 > 0$ 、 $\rho_0 > 0$, 配凑方式合理)

$$(a_0\rho + \rho_0 u)_t + a_0(a_0\rho + \rho_0 u)_x = 0$$

$$(-a_0\rho + \rho_0 u)_t - a_0(-a_0\rho + \rho_0 u)_x = 0$$

记 $f = a_0\rho + \rho_0 u$, $g = -a_0\rho + \rho_0 u$, 直接计算可发现 f 的特征线为 $x(t) = x_0 + a_0 t$, g 的特征线为 $x_0 - a_0 t$, 从而可知

$$f(x, t) = f(x - a_0 t, 0), \quad g(x, t) = g(x + a_0 t, 0)$$

于是即解得

$$\rho(x, t) = \frac{f - g}{2a_0} = \frac{1}{2a_0}(a_0\rho(x - a_0 t, 0) + \rho_0 u(x - a_0 t, 0) + a_0\rho(x + a_0 t, 0) - \rho_0 u(x + a_0 t, 0))$$

$$u(x, t) = \frac{f + g}{2\rho_0} = \frac{1}{2\rho_0}(a_0\rho(x - a_0 t, 0) + \rho_0 u(x - a_0 t, 0) - a_0\rho(x + a_0 t, 0) + \rho_0 u(x + a_0 t, 0))$$

由此分类讨论, 考虑 $t > 0$ 的某个时刻:

- 当 $0 < x - a_0 t < x + a_0 t$ 时, 解为

$$\rho(x, t) = \rho_R, \quad u(x, t) = \rho_R$$

- 当 $x - a_0 t < x + a_0 t < 0$ 时, 解为

$$\rho(x, t) = \rho_L, \quad u(x, t) = \rho_L$$

- 当 $x - a_0 t < 0 < x + a_0 t$ 时, 解为

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) + \frac{\rho_0}{2a_0}(u_L - u_R), \quad u(x, t) = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{a_0}{2\rho_0}(\rho_L - \rho_R)$$

2.2 实验报告

2.2.1 格式实现

我们考虑的方程为

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in [0, 2\pi], \quad t > 0$$

并假设循环边界条件 $u(0, t) = u(2\pi, t)$ ，对连续与离散的初值分别考虑。记时间步长 τ 、空间步长 h ，实现三种格式：

1. 参考代码中的将简单迎风格式直接使用到非线性方程的版本，也即

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \frac{\tau}{h} u_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n) & u_j^n > 0 \\ u_j^n - \frac{\tau}{h} u_j^n (u_{j+1}^n - u_j^n) & u_j^n \leq 0 \end{cases}$$

2. 一阶的守恒型迎风格式，也即

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{1}{2} (u_j^n)^2 & a_{j+\frac{1}{2}}^n > 0 \\ \frac{1}{2} (u_{j+1}^n)^2 & a_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 0 \end{cases}, \quad a_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j+1}^n)$$

3. 二阶的 LW 格式，也即

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4} ((u_j^n)^2 + (u_{j+1}^n)^2) - \frac{\tau}{4h} a_{j+\frac{1}{2}}^n ((u_{j+1}^n)^2 - (u_j^n)^2), \quad a_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j+1}^n)$$

实际实现时，对后两种格式将先行计算 $a_{j+\frac{1}{2}}^n$ 与 $\tilde{f}_j^n = \frac{(u_j^n)^2}{2}$ ，再合并出 $f_{j+\frac{1}{2}}^n$ ，最终计算 u_j^{n+1} 。

对于时间步长 τ ，后两种格式都实现了两种算法：直接指定 τ 与根据稳定性条件 ($\tau \|u\|_\infty \leq h$) 由 CFL 数确定 τ 。

2.2.2 结果展示

下方的图例中，worse 表示参考代码的迎风格式，upwind 表示守恒型迎风格式，LW 表示 LW 格式。

先测试连续情况，初值 $u(x, 0) = \sin(x)$ 。在三种算法中都取定空间步长 $\frac{\pi}{50}$ ，时间步长 0.01，模拟到 $t = 1$ 、 $t = 3$ 的效果如图 4。

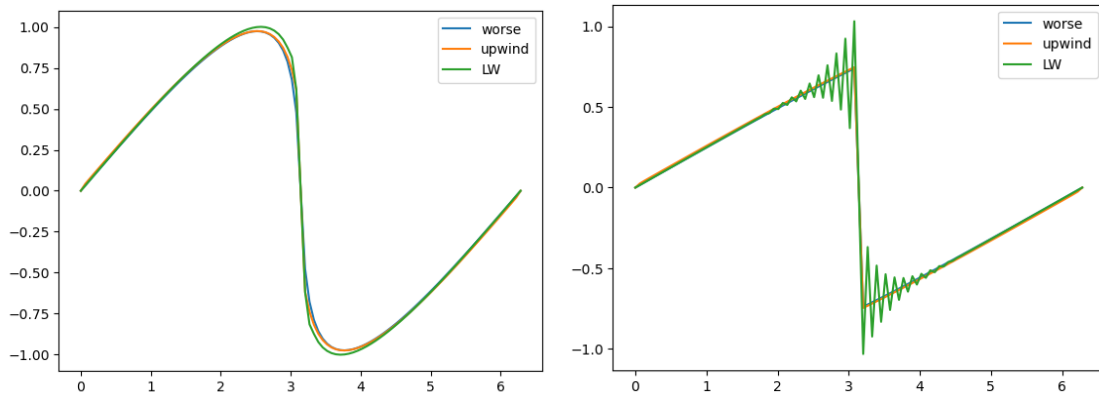


图 4: 连续情况固定步长模拟效果

利用之前的理论分析可以发现，初值 $\sin(x)$ 由于有导数小于 0 的部分，解将发生爆破而不再连续，产生间断。两种迎风格式的效果基本一致，不过参考的迎风格式会有略微更多的数值耗散，而 LW 格式则在

时间长后可以发现明显的数值振荡。将参考代码迎风格式步长改为 $\frac{9\pi}{500}$ ，另两种算法采用自适应步长，取 CFL 数为 0.9，模拟到 $t = 1$ 、 $t = 3$ 的效果如图 5。

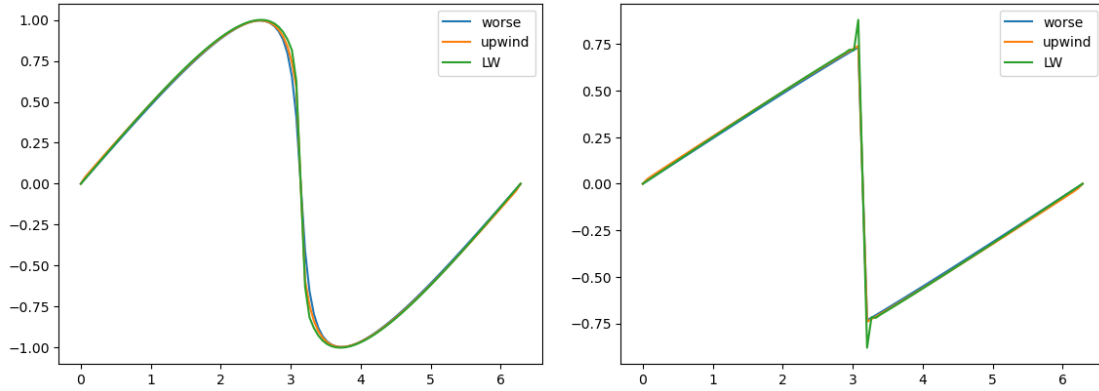


图 5: 连续情况自适应步长模拟效果

由此，步长的自适应至少对 LW 格式的数值振荡有很好的改善作用。

下面分析离散情况，考虑初值为 $(0, \pi]$ 上为 u_L ， $(\pi, 2\pi]$ 上为 u_R ，且 $u_L > u_R$ ，则记 $s = \frac{u_L + u_R}{2}$ ，真解在一段时间内可写为

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{x-\pi}{t} & \pi + u_L t \leq x \leq \pi + u_R t \\ u_R & x > \pi + u_R t \\ u_R & x \leq st \\ u_L & x > st \end{cases} \quad (s > 0), \quad u(x, t) = \begin{cases} \frac{x-\pi}{t} & \pi + u_L t \leq x \leq \pi + u_R t \\ u_R & x \leq 2\pi + st \\ u_L & x > 2\pi + st \\ u_L & x < \pi + u_L t \end{cases} \quad (s \leq 0)$$

取定 $u_L = 0.2$ 、 $u_R = 1.2$ ，三种算法的空间步长 $\frac{\pi}{80}$ ，时间步长固定 0.01 或自适应，模拟到 $t = 2$ 的效果如图 6。

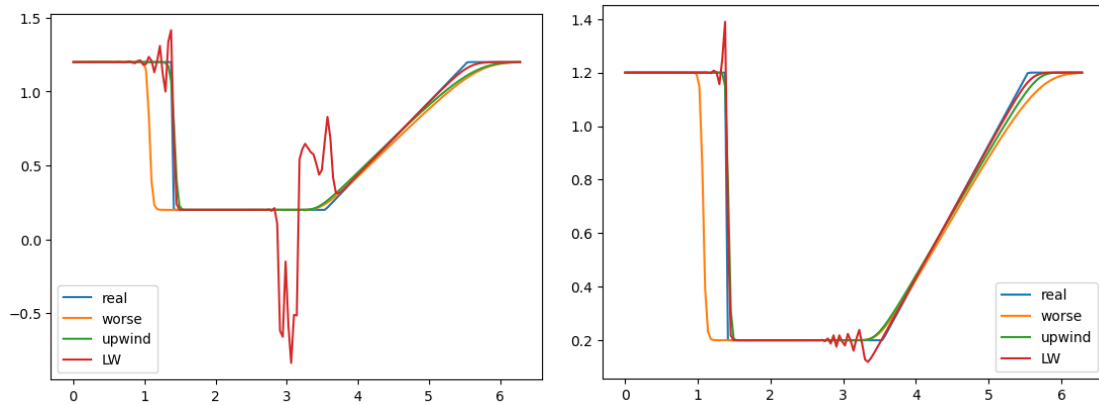


图 6: 离散情况固定步长、自适应步长模拟效果

这时，参考代码中的迎风格式问题就显现了：它并不能写成

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

不具有数值守恒性，因此收敛到的解可能并非弱解，表现在这个例子中则是对激波速度的捕获不正确。

与之相对，另两种格式都是守恒型格式，因此收敛时一定能收敛到弱解。不过，LW 的出现在波后的数值振荡更加严重，这可以通过自适应时间步长减轻。将网格空间步长取为 $\frac{\pi}{800}$ ，时间步长固定 0.001 或自适应，效果如图 7。

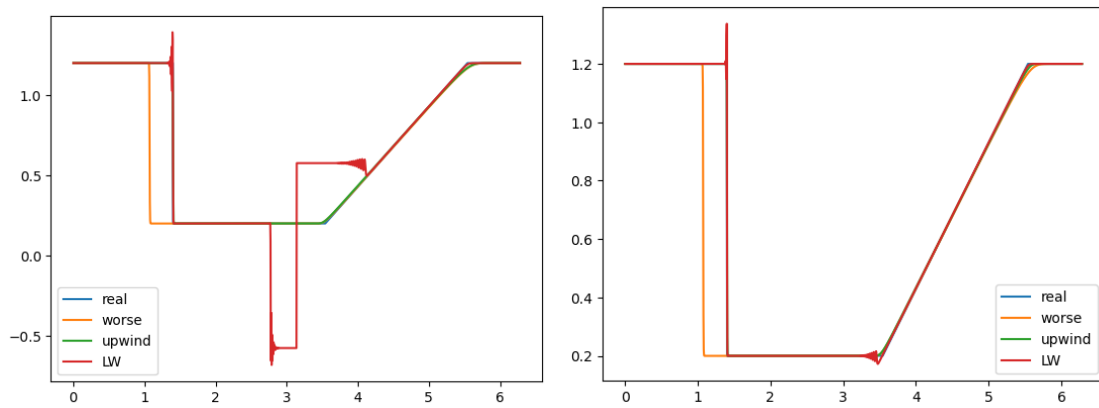


图 7: 离散情况加密网格固定步长、自适应步长模拟效果

这时可以发现, 虽然 LW 格式表现出了收敛性, 但收敛结果并非是物理解, 而是另一个弱解。理论分析可以发现, 只有单调格式能保证收敛结果一定为物理解, 而 LW 格式并不是单调格式, 守恒型迎风格式也不是单调格式。因此, 可发现如取定 $u_L = -u_R$ 的情况, 两种格式均无法模拟出 π 处的稀疏波, **不收敛到真解**。此时反而不具有守恒性的迎风格式效果更好。

为了进一步得到收敛效果, 下面考虑 $u_L = 0.2$ 、 $u_R = 1.2$ 的情况。采用时间步长自适应 (对参考代码的迎风格式也采用类似自适应的效果), 可发现这时守恒型迎风格式与 LW 格式都能收敛到真解。由于离散时 L_∞ 范数很难估计 (有限个点处无意义), L_2 范数收敛性如图 8。

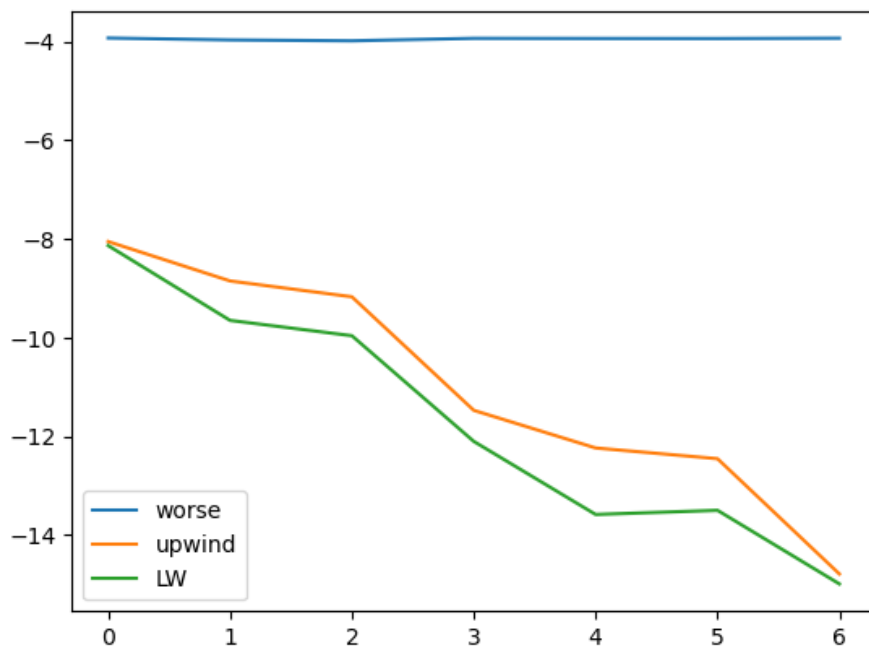


图 8: 离散情况收敛阶

这里横坐标为 $\log_2 \frac{n_x}{50}$, 纵坐标为二范数误差取 2 为底的对数, 因此斜率即近似误差阶。观察得到, 参考代码由于不收敛到弱解稳定在了较大误差, 而虽然 LW 收敛效果比守恒型迎风稍好, 但也只有一阶, 对离散情况无法达到二阶收敛性。

3 第四周

3.1 书面作业

1. (1) 直接计算可知

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{U}} u &= \left(-\frac{u}{\rho}, \frac{1}{\rho}, 0 \right)^T \\ a &= \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)(E - \rho u^2/2)}{\rho}} \\ \nabla_{\mathbf{U}} a &= \frac{\gamma(\gamma-1)}{2a} \left(-\frac{E}{\rho^2} + \frac{u^2}{\rho}, -\frac{u}{\rho}, \frac{1}{\rho} \right)^T\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{U}} u \cdot \mathbf{R}_1(\mathbf{U}) &= -\frac{a}{\rho}, \quad \nabla_{\mathbf{U}} u \cdot \mathbf{R}_2(\mathbf{U}) = 0, \quad \nabla_{\mathbf{U}} u \cdot \mathbf{R}_3(\mathbf{U}) = \frac{a}{\rho} \\ \nabla_{\mathbf{U}} a \cdot \mathbf{R}_1(\mathbf{U}) &= \frac{\gamma(\gamma-1)}{2a} \left(-\frac{E}{\rho^2} + \frac{u^2}{\rho} - \frac{u}{\rho}(u-a) + \frac{(E+p)/\rho - ua}{\rho} \right) = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2a} \frac{p}{\rho^2} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{a}{\rho} \\ \nabla_{\mathbf{U}} a \cdot \mathbf{R}_3(\mathbf{U}) &= \frac{\gamma(\gamma-1)}{2a} \left(-\frac{E}{\rho^2} + \frac{u^2}{\rho} - \frac{u}{\rho}(u+a) + \frac{(E+p)/\rho + ua}{\rho} \right) = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2a} \frac{p}{\rho^2} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{a}{\rho}\end{aligned}$$

综合可得

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{U}} \lambda_1(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}_1(\mathbf{U}) &= \frac{-\gamma-1}{2} \frac{a}{\rho} \\ \nabla_{\mathbf{U}} \lambda_2(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}_2(\mathbf{U}) &= 0 \\ \nabla_{\mathbf{U}} \lambda_3(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}_3(\mathbf{U}) &= \frac{\gamma+1}{2} \frac{a}{\rho}\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 的计算结果可直接发现

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{U}} \left(u + \frac{2}{\gamma-1} a \right) \cdot \mathbf{R}_1(\mathbf{U}) &= 0 \\ \nabla_{\mathbf{U}} u \cdot \mathbf{R}_2(\mathbf{U}) &= 0 \\ \nabla_{\mathbf{U}} \left(u - \frac{2}{\gamma-1} a \right) \cdot \mathbf{R}_3(\mathbf{U}) &= 0\end{aligned}$$

从而被求梯度的三个量

$$u + \frac{2}{\gamma-1} a, \quad u, \quad u - \frac{2}{\gamma-1} a$$

就是所需的三个 W 。

2. 将上、下两个 u 视为两问。

(1) 直接验算可知常数满足原方程，且

$$\left(\frac{x}{t} \right)_t + \left(\frac{x^2}{2t^2} \right)_x = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t^2} = 0$$

从而 u 在连续可微区域内是古典解。

间断线 $x = u_L t$ 上, $u^\pm$ 均为 u_L , 由此两侧均为 0, RH 条件满足, 同理 $x = u_R t$ 上 RH 条件满足, 其为弱解。

(2) 与 (1) 同理可得连续可微区域内是古典解、 $x = u_m t$ 、 $x = u_R t$ 上 RH 条件满足。

在 $x = \xi(t) = s_m t$ 上, $\xi'(t) = s_m$, 而 $u^+ = u_m$ 、 $u_- = u_L$, 因此

$$(u^+ - u^-) \xi'(t) = (u_m - u_L) s_m = \frac{u_m^2 - u_L^2}{2} = f(u_m) - f(u_L)$$

从而 RH 条件满足, 其为弱解。

3. 计算可发现系数矩阵的特征值为 $\pm a_0$, 对应的一个特征向量为 $(\rho_0, \pm a_0)^T$, 由此由线性性可以直接得到广义 Riemman 不变量

$$W_{1,2} = \rho_0 u \pm a_0 \rho$$

与第三周作业 5 完全相同, 考虑 W_1 、 W_2 传播的特征线 $x \pm a_0 t$, 由 a_0 只出现平方不妨设其大于 0, 可得到结果为

- 当 $0 < x - a_0 t < x + a_0 t$, 即 $x > a_0 t$ 时, 解为

$$\rho(x, t) = \rho_R, \quad u(x, t) = \rho_R$$

- 当 $x - a_0 t < x + a_0 t < 0$, 即 $x < -a_0 t$ 时, 解为

$$\rho(x, t) = \rho_L, \quad u(x, t) = \rho_L$$

- 当 $x - a_0 t < 0 < x + a_0 t$, 即 $x \in (-a_0 t, a_0 t)$ 时, 解为

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) + \frac{\rho_0}{2a_0}(u_L - u_R), \quad u(x, t) = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{a_0}{2\rho_0}(\rho_L - \rho_R)$$

4 第五周

4.1 书面作业

1. 直接代入可发现

$$-\frac{s}{\varepsilon}U' + \frac{1}{\varepsilon}UU' = \frac{1}{\varepsilon}U''$$

也即

$$-sU' + UU' = U''$$

两边同积分可得存在常数 C 使得

$$U'(\xi) = \frac{1}{2}U^2(\xi) - sU(\xi) + C$$

进一步得到三种解

$$U(\xi) = s + \sqrt{s^2 - 2C}$$

$$U(\xi) = s - \sqrt{s^2 - 2C}$$

$$U(\xi) = s + \sqrt{2C - s^2} \tan\left(\sqrt{2C - s^2} \frac{C_0 + x}{2}\right)$$

若 $2C - s^2 > 0$, 前两种解均非实数, 第三种解极限不存在, 不可能, 因此必然 $s^2 - 2C > 0$. 记 $t = \sqrt{s^2 - 2C}$, 则解为

$$U(\xi) = s + t$$

$$U(\xi) = s - t$$

$$U(\xi) = s + t \frac{1 - e^{t(C_0 + x)}}{1 + e^{t(C_0 + x)}}$$

忽略 $u^+ = u^-$ 的平凡情况, 可发现此三解互不相交, 因此要满足左侧为 u^- 右侧为 u^+ 只能

$$U(\xi) = s + t \frac{1 - e^{t(C_0 + x)}}{1 + e^{t(C_0 + x)}}$$

且进一步计算极限可得只有

$$s = \frac{u^+ + u^-}{2}, \quad t = \frac{u^- - u^+}{2}$$

其中 C_0 仍可任取. 结合极限的要求, 考虑 $x \rightarrow -\infty$ 与 $x \rightarrow \infty$ 时知只有 $u^- > u^+$ 时可能满足.

此时, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, 若 $x - st > 0$ 则趋于 $U(+\infty) = u^+$, 否则趋于 $U(-\infty) = u^-$, 这的确是阶跃函数.

2. 考虑 $s \neq 0$ 的非平凡情况.

先考察可允许条件的等价条件. 由 φ 紧支光滑, 直接计算可知

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty (\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x) dx \\ &= \int_0^\infty dt \left(\int_{-\infty}^{st} (\eta(u_L)\varphi_t + q(u_L)\varphi_x) dx + \int_{st}^\infty (\eta(u_R)\varphi_t + q(u_R)\varphi_x) dx \right) \\ &= \eta(u_L) \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{st} \varphi_t dx + \eta(u_R) \int_0^\infty dt \int_{st}^\infty \varphi_t dx + (q(u_L) - q(u_R)) \int_0^\infty \varphi(st, t) dt \end{aligned}$$

分类讨论, 由紧支 $\varphi(x, 0) = 0$, 从而当 $s > 0$ 时上式前两项可以改写为

$$\eta(u_L) \int_0^\infty dx \int_{x/s}^\infty \varphi_x dx + \eta(u_R) \int_0^\infty dx \int_0^{x/s} \varphi_x dx = (\eta(u_R) - \eta(u_L)) \int_0^\infty \varphi(x, x/s) dx$$

考虑某个使得右侧积分非零的 φ , 换元可发现上式改写为

$$(\eta(u_R) - \eta(u_L) + (q(u_L) - q(u_R))/s) \int_0^\infty \varphi(x, x/s) dx \geq 0$$

当 $s < 0$ 时同理计算得

$$(\eta(u_L) - \eta(u_R) - (q(u_L) - q(u_R))/s) \int_0^\infty \varphi(x, x/s) dx \geq 0$$

由于已知 φ 积分为正, 综合两部分得到可允许条件等价于

$$s(\eta(u_R) - \eta(u_L)) \geq q(u_R) - q(u_L)$$

将两侧写为积分并代入熵条件

$$\int_{u_L}^{u_R} s\eta'(u) du \geq \int_{u_L}^{u_R} \eta'(u) f'(u) du$$

也即

$$\int_{u_L}^{u_R} \eta'(u)(s - f'(u)) du \geq 0$$

根据 η 凸性, 可允许条件满足当且仅当对任何在 $[u_L, u_R]$ 单调增函数 $\eta'(u)$ 成立。

当此条件满足时, 由于 $|u - k|$ 也是符合要求的 $\eta(u)$, Kruzhkov 不等式成立。另一方面, 若对所有 $\eta(u) = |u - k|$, 即 $\eta'(u) = \text{sgn}(u - k)$ 成立, 可发现对它们的正线性组合也成立, 而直接构造可发现它们的正线性组合可以表示一切 $[u_L, u_R]$ 上的单调增阶梯函数 (取 $k < u_L$ 或 $k > u_R$ 即可作整体的上下平移)。利用实分析知识, 单调增阶梯函数可以在分布意义逼近一切单调增函数, 从而可允许条件成立。

3. 取熵函数为总能

$$\eta(u, h) = \frac{1}{2}(gh^2 + u^2h)$$

先验证其凸性。其对 (h, hu) 的熵变量

$$\mathbf{V} = \left(gh - \frac{u^2}{2}, u \right)$$

从而其 Hessian 阵为

$$H = \begin{pmatrix} g + \frac{u^2}{h} & -\frac{u}{h} \\ -\frac{u}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

由 $h > 0$ 可知左上角为正, 行列式 $\frac{g}{h}$ 为正, 从而正定。计算可得

$$f'(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

从而对应的

$$q(u, h) = \frac{1}{2}hu^3 + gh^2u$$

进一步可知

$$\mathbf{V}_t = H \begin{pmatrix} h_t \\ (hu)_t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_x = H \begin{pmatrix} h_x \\ (hu)_x \end{pmatrix}$$

直接计算可发现取 (讲义 3 第 18 页证明)

$$P = H^{-1}, \quad B = f'(\mathbf{U})H^{-1}$$

则 $P\mathbf{V}_t + B\mathbf{V}_x = \mathbf{U}_t + f'(\mathbf{U})\mathbf{U}_x$, 且可计算验证

$$P = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & u^2 + gh \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} u & u^2 + gh \\ u^2 + gh & u^3 + 3ugh \end{pmatrix}$$

从而 P 对称正定, B 对称, 符合要求。

4. 之前作业已算出

$$\rho_* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) + \frac{\rho_0}{2a_0}(u_L - u_R)$$

$$u_* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{a_0}{2\rho_0}(\rho_L - \rho_R)$$

且此处

$$f(\rho, u) = \left(\rho_0 u, \frac{a_0^2}{\rho_0} \rho \right)$$

(1) 直接计算有

$$(\rho^*, u^*) - (\rho_L, u_L) = \left(\frac{1}{2}(\rho_R - \rho_L) + \frac{\rho_0}{2a_0}(u_L - u_R), \frac{1}{2}(u_R - u_L) + \frac{a_0}{2\rho_0}(\rho_L - \rho_R) \right)$$

$$f(\rho^*, u^*) - f(\rho_L, u_L) = \left(\frac{\rho_0}{2}(u_R - u_L) + \frac{a_0}{2}(\rho_L - \rho_R), \frac{a_0}{2\rho_0^2}(\rho_R - \rho_L) + \frac{a_0}{2}(u_L - u_R) \right)$$

由此前两个状态的间断速度 $s = -a_0$ 。

$$(\rho^*, u^*) - (\rho_R, u_R) = \left(\frac{1}{2}(\rho_L - \rho_R) + \frac{\rho_0}{2a_0}(u_L - u_R), \frac{1}{2}(u_L - u_R) + \frac{a_0}{2\rho_0}(\rho_L - \rho_R) \right)$$

$$f(\rho^*, u^*) - f(\rho_R, u_R) = \left(\frac{\rho_0}{2}(u_L - u_R) + \frac{a_0}{2}(\rho_L - \rho_R), \frac{a_0}{2\rho_0^2}(\rho_L - \rho_R) + \frac{a_0}{2}(u_L - u_R) \right)$$

由此前两个状态的间断速度 $s = a_0$ 。

可以通过 RH 条件确定解: $f(\rho^+, u^+) - f(\rho^-, u^-) = s(\rho^+ - \rho^-, u^+ - u^-)$ 可以化为矩阵特征值问题, 当且仅当 $s = \pm a_0$ 时存在解, 再令一侧为 (ρ_L, u_L) 或 (ρ_R, u_R) 可得 (ρ_*, u_*) 的表达式, 再由两侧传播速度可写出解。

(2) 之前作业已算出

$$W_1(\rho, u) = \rho_0 u + a_0 \rho, \quad W_2(\rho, u) = \rho_0 u - a_0 \rho$$

由此计算可得

$$W_1(\rho_*, u_*) = a_0 \rho_L + \rho_0 u_L = W_1(\rho_L, u_L)$$

$$W_2(\rho_*, u_*) = -a_0 \rho_R + \rho_0 u_R = W_2(\rho_R, u_R)$$

从而成立。

$W_1(\rho_*, u_*) = W_1(\rho_L, u_L)$ 、 $W_2(\rho_*, u_*) = W_2(\rho_R, u_R)$ 是关于 ρ_*, u_* 的线性方程组, 且系数矩阵行列式为 $-2\rho_0 a_0$, 非退化, 从而可唯一确定 ρ_*, u_* 。

5 第六周

5.1 书面作业

1. 根据线性双曲型方程组的解的公式，代入可得

$$\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R = (\alpha_i - \beta_i)\mathbf{R}^{(i)}$$

这里 α_i 、 β_i 为初始状态左、右侧 $\mathbf{R}^{(i)}$ 的分量。

从而由条件可知 (下标 j 表示第 j 个分量，由第 i 广义黎曼不变量定义 $j \neq i$) $W(\mathbf{U}) = (R^{-1}\mathbf{U})_j$ ，计算有

$$W(\mathbf{U}_L) - W(\mathbf{U}_R) = (R^{-1}(\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R))_j = (\alpha_i - \beta_i)(R^{-1}\mathbf{R}^{(i)})_j$$

利用逆矩阵定义可知 $R^{-1}\mathbf{R}^{(i)}$ 为第 i 个单位向量，从而 $j \neq i$ 的分量为 0，得证。

2. 由于对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho \\ a^2/\rho & u \end{pmatrix}$$

从而直接计算可知

$$\lambda_1(\rho, u) = u - a, \quad \lambda_2(\rho, u) = u + a$$

对应的

$$\mathbf{R}_1(\rho, u) = (\rho, -a)^T, \quad \mathbf{R}_2(\rho, u) = (\rho, a)^T$$

代入 $a = \sqrt{\gamma S_0} \rho^{(\gamma-1)/2}$ ，求解 $\rho W_\rho - a W_u = 0$ 得可取

$$W_1(\rho, u) = u + \frac{\sqrt{\gamma S_0} 2}{\gamma - 1} \rho^{(\gamma-1)/2} = u + \frac{2}{\gamma - 1} a$$

同理求解 $\rho W_\rho + a W_u = 0$ 得可取

$$W_2(\rho, u) = u - \frac{2}{\gamma - 1} a$$

利用 $\partial_\rho a = \frac{\gamma-1}{2\rho} a$ 直接计算得

$$\partial_t W_1 = u_t + \frac{a}{\rho} \rho_t, \quad \partial_x W_1 = u_x + \frac{a}{\rho} \rho_x$$

而代入有

$$\partial_t W_1 = -u u_x - \frac{a^2}{\rho} \rho_x - a u_x - \frac{a}{\rho} u \rho_x = -(u + a) \left(u_x + \frac{a}{\rho} \rho_x \right) = -(u + a) \partial_x W_1$$

从而对 W_1 的等式成立。对 W_2 同理计算即得。

3. 直接计算可知

$$\lambda_1(v, u) = \lambda_1(v) = -\sqrt{-p'(v)}, \quad \lambda_2(v, u) = \lambda_2(v) = \sqrt{-p'(v)}$$

利用讲义推导，可得 (v_L, u_L) 出发的第一稀疏波曲线

$$u = u_L + \int_{v_L}^v \sqrt{-p'(w)} dw, \quad v > v_L$$

第一激波曲线

$$u = u_L - \sqrt{(v - v_L)(p(v_L) - p(v))}, \quad v \leq v_L$$

将两段其拼成整体曲线 $u = f_L(v)$ 。

同理, 可得到达 (v_R, u_R) 的第二稀疏波曲线

$$u = u_R - \int_{v_R}^v \sqrt{-p'(w)} dw, \quad v > v_R$$

第二激波曲线

$$u = u_R + \sqrt{(v_R - v)(p(v) - p(v_R))}, \quad v \leq v_R$$

将两段其拼成整体曲线 $u = f_R(v)$ 。

计算可发现 f_L 是单调增函数, f_R 是单调减函数, 因此两函数至多只有一个交点。下面分情况讨论, 假设 $(v_L, u_L) \neq (v_R, u_R)$, 否则为恒等的平凡情况:

- 若交点不存在, 原 Riemann 问题无解。否则设交点为 $\mathbf{U}_m = (v_m, u_m)$ 。
- 若交点即为 (v_L, u_L) , 其可能为第二激波或第二稀疏波;
- 若交点即为 (v_R, u_R) , 其可能为第一激波或第一稀疏波;
- 若交点在第一激波曲线、第二激波曲线上, 解经历两个激波, 从 (v_L, u_L) 变化为 (v_R, u_R) ;
- 若交点在第一激波曲线、第二稀疏波曲线上, 解经历左激波与右稀疏波, 从 (v_L, u_L) 变化为 (v_R, u_R) ;
- 若交点在第一稀疏波曲线、第二激波曲线上, 解经历左稀疏波与右激波, 从 (v_L, u_L) 变化为 (v_R, u_R) ;
- 若交点在第一稀疏波曲线、第二稀疏波曲线上, 解经历两个稀疏波, 从 (v_L, u_L) 变化为 (v_R, u_R) 。

为了进行具体的确定, 我们给出每种波的计算方式:

- 对第一激波, 其左侧为 (v_L, u_L) , 右侧为 (v_m, u_m) , 利用 RH 条件第一个分量即得

$$s_1 = \frac{u_L - u_m}{v_m - v_L}$$

从而第一激波对应 $x < s_1 t$ 时为 $\mathbf{U}_L$, $x > s_1 t$ 的局部为 $\mathbf{U}_m$, 其右侧结束段可能为 $s_2 t$ (第二激波)、 $\lambda_2(\mathbf{U}_m)t$ (第二稀疏波), 或不结束 (只有第一激波的情况)。

- 对第二激波, 其左侧为 (v_m, u_m) , 右侧为 (v_R, u_R) , 利用 RH 条件第一个分量即得

$$s_2 = \frac{u_R - u_m}{v_m - v_R}$$

从而第二激波对应 $x > s_2 t$ 时为 $\mathbf{U}_R$, $x < s_2 t$ 的局部为 $\mathbf{U}_m$, 其左侧结束段可能为 $s_1 t$ (第一激波)、 $\lambda_1(\mathbf{U}_m)t$ (第一稀疏波), 或不结束 (只有第二激波的情况)。

- 对第一稀疏波, 其左侧为 $\mathbf{U}_L$, 右侧为 $\mathbf{U}_m$, 设中间为 $(\bar{v}_1(\xi), \bar{u}_1(\xi))$, 利用 ξ 为第一特征值可知 $\bar{v}_1(\xi) = \lambda_1^{-1}(\xi)$, 再由第一稀疏波曲线得到

$$\bar{u}_1(\xi) = u_L + \int_{v_L}^{\bar{v}_1(\xi)} \sqrt{-p'(w)} dw$$

从而第一稀疏波对应 $x < \lambda_1(v_L)t$ 时为 $\mathbf{U}_L$, $\lambda_1(v_L)t \leq x \leq \lambda_1(v_m)t$ 时为 $(\bar{v}_1(\xi), \bar{u}_1(\xi))$, $x > \lambda_1(v_m)t$ 的局部为 $\mathbf{U}_m$, 其右侧结束段可能为 $s_2 t$ (第二激波)、 $\lambda_2(\mathbf{U}_m)t$ (第二稀疏波), 或不结束 (只有第一稀疏波的情况)。

- 对第二稀疏波, 其左侧为 $\mathbf{U}_m$, 右侧为 $\mathbf{U}_R$, 设中间为 $(\bar{v}_2(\xi), \bar{u}_2(\xi))$, 利用 ξ 为第二特征值可知 $\bar{v}_2(\xi) = \lambda_2^{-1}(\xi)$, 再由第二稀疏波曲线得到

$$\bar{u}_2(\xi) = u_R - \int_{v_R}^{\bar{v}_2(\xi)} \sqrt{-p'(w)} dw$$

从而第二稀疏波对应 $x > \lambda_2(v_R)t$ 时为 $\mathbf{U}_R$ 、 $\lambda_1(v_m)t \leq x \leq \lambda_1(v_R)t$ 时为 $(\bar{v}_2(\xi), \bar{u}_2(\xi))$ ， $x < \lambda_2(v_m)t$ 的局部为 $\mathbf{U}_m$ ，其左侧结束段可能为 s_1t (第一激波)、 $\lambda_1(\mathbf{U}_m)t$ (第一稀疏波)，或不结束 (只有第二稀疏波的情况)。

4. (1) 等熵情况下欧拉方程第一个方程即

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0$$

代入 $p = s\rho^\gamma$ 后直接计算可发现第二个方程化为

$$\rho u_t + u\rho_t + \rho_x u^2 + 2\rho u u_x + s\gamma\rho^{\gamma-1}\rho_x = 0$$

代入 $u\rho_t = -u^2\rho_x - \rho u u_x$ 并同除以 ρ 得到

$$u_t + uu_x + s\gamma\rho^{\gamma-2}\rho_x = 0$$

可发现 $s\gamma\rho^{\gamma-2}$ 即为 a^2/ρ ，从而得到了第二题中的方程组，其余部分与第二题的计算完全相同。

(2) • 第一初等波为激波的情况

由条件有 $u_L - a_L > s > u_R - a_R$ ，且利用第一激波速度不会超过第二初等波可知 $s < u_R$ ，从而记 $v = u - s$ 可将上式化为

$$v_L > a_L, \quad v_R < a_R$$

根据 $a_L > 0$ 、 $v_R > 0$ ，上方四个量均为正。

利用 RH 条件的第三个分量有

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_L^2 < \frac{2}{\gamma-1}a_L^2 + v_L^2 = \frac{2}{\gamma-1}a_R^2 + v_R^2 < \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_R^2$$

从而 $a_L < a_R$ ，再次利用 RH 条件的第三个分量可得

$$v_L^2 - v_R^2 = \frac{2}{\gamma-1}(a_R^2 - a_L^2) > 0$$

从而 $v_L > v_R$ ，加 s 即得 $u_L > u_R$ 。

利用 RH 条件的第二个分量有

$$p_R - p_L = \rho_L v_L^2 - \rho_R v_R^2$$

再代入第一个分量 $\rho_L v_L = \rho_R v_R$ 可知

$$p_R - p_L = \rho_L v_L (v_L - v_R)$$

因此可从 $v_L > v_R$ 得到 $p_L < p_R$ 。

• 第一初等波为稀疏波的情况

由条件有 $u_L - a_L < u_R - a_R$ ，且根据两个第一黎曼不变量有

$$u_L + \frac{2}{\gamma-1}a_L = u_R + \frac{2}{\gamma-1}a_R, \quad p_L \rho_L^{-\gamma} = p_R \rho_R^{-\gamma}$$

从第一式可得到

$$u_L - a_L + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_L = u_R - a_R + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_R > u_L - a_L + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_R$$

从而 $a_L > a_R$ ，再代入第一式可知 $u_L < u_R$ 。

通过第二式得到

$$\frac{p_L}{p_R} = \left(\frac{\rho_L}{\rho_R}\right)^\gamma = \left(\frac{a_L}{a_R}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}$$

因此从 $a_L > a_R$ 即得 $p_L > p_R$ 。

- 第二初等波

利用讲义的计算结果，一维欧拉方程的第二广义黎曼不变量可取为 u 、 p ，而根据黎曼不变量的性质，它们跨越第二初等波不变，即得到

$$u_L = u_R, \quad p_L = p_R$$

- 第三初等波为激波的情况

由条件有 $u_L + a_L > s > u_R + a_R$ ，且利用第一激波速度不会超过第二初等波可知 $s > u_L$ ，从而记 $v = s - u$ 可将上式化为

$$v_L < a_L, \quad v_R > a_R$$

根据 $v_L > 0$ 、 $a_R > 0$ ，上方四个量均为正。

利用 RH 条件的第三个分量有

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_L^2 > \frac{2}{\gamma-1}a_L^2 + v_L^2 = \frac{2}{\gamma-1}a_R^2 + v_R^2 > \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_R^2$$

从而 $a_L > a_R$ ，再次利用 RH 条件的第三个分量可得

$$v_L^2 - v_R^2 = \frac{2}{\gamma-1}(a_R^2 - a_L^2) < 0$$

从而 $v_L < v_R$ ，同乘 -1 后加 s 即得 $u_L > u_R$ 。

利用 RH 条件的第二个分量有

$$p_R - p_L = \rho_L v_L^2 - \rho_R v_R^2$$

再代入第一个分量 $\rho_L v_L = \rho_R v_R$ 可知

$$p_R - p_L = \rho_L v_L (v_L - v_R)$$

因此可从 $v_L < v_R$ 得到 $p_L > p_R$ 。

- 第三初等波为稀疏波的情况

由条件有 $u_L + a_L < u_R + a_R$ ，且根据两个第一黎曼不变量有

$$u_L - \frac{2}{\gamma-1}a_L^2 = u_R - \frac{2}{\gamma-1}a_R^2, \quad p_L \rho_L^{-\gamma} = p_R \rho_R^{-\gamma}$$

从第一式可得到

$$u_L + a_L - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_L^2 = u_R + a_R - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_R^2 > u_L + a_L - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_R^2$$

从而 $a_L < a_R$ ，再代入第一式可知 $u_L < u_R$ 。

通过第二式得到

$$\frac{p_L}{p_R} = \left(\frac{\rho_L}{\rho_R} \right)^\gamma = \left(\frac{a_L}{a_R} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}$$

因此从 $a_L < a_R$ 即得 $p_L < p_R$ 。

5.2 实验报告

5.2.1 算法实现

我们希望能绘制出本次作业第三题中的 p -方程组的精确解。具体算法如第三题解答中所述，我们考虑形式简单的 p 使得 $p'(v)$ 相对简单， $\sqrt{-p'(v)}$ 的原函数与反函数可以解析求出。这样，即可以通过 Matlab 的符号计算功能从 p 计算出 $\sqrt{-p'(v)}$ 的一个原函数 $P(v)$ ，进而将其在 x 到 y 积分记为 $I_P(x, y)$ ， $\lambda_1(v)$ 的反函数 $l_1(\xi)$ 、 $\lambda_2(v)$ 的反函数 $l_2(\xi)$ 。一个可行的例子是 $p(v) = v^{-\alpha}$ ，这里 $\alpha < 0$ 。

此外，还可以进一步发现，由于计算结果中 $\lambda_1 < 0$ 、 $\lambda_2 > 0$ ，第一个波一定在小于 0 处，第二个波一定在大于 0 处，由此，只需分 0 左右绘制，即可分开讨论每边为稀疏波/激波/退化，由此，我们给出完整的算法，输入 p 、 (v_l, u_l) 、 (v_r, u_r) ，作出 t 时刻 $[x_l, x_r]$ 范围的真解：

1. 利用符号计算求解出上述的 I_P 、 l_1 、 l_2 函数，进一步定义函数

$$f_L(v) = \begin{cases} u_L - \sqrt{(v_L - v)(p(v) - p(v_L))} & v \leq v_L \\ u_L + I_P(v_L, v) & v > v_L \end{cases}$$

$$f_R(v) = \begin{cases} u_R + \sqrt{(v_R - v)(p(v) - p(v_R))} & v \leq v_R \\ u_R - I_P(v_R, v) & v > v_R \end{cases}$$

2. 求 f_L, f_R 在右半平面的交点 (v_m, u_m) 。具体来说，由于 $f_L - f_R$ 是一个连续的严格单调增函数，我们可以采用二分迭代的方法：

- 先考虑 $f_L(1) - f_R(1)$ ，若其大于 0，则初始迭代区间为 $[0, 1]$ ，否则，考虑 $d_n = f_L(2^n) - f_R(2^n)$ ，若 2^n 超出设定上界后仍然 $d_n < 0$ ，则视为无解，否则考虑第一个为正的 d_n ，设置初始迭代区间为 $[2^{n-1}, 2^n]$ 。
- 每次考虑区间中点处，若大于 0 则向左搜索，小于 0 则向右搜索，对应搜索区间长度减半。直到搜索区间长度达到容许大小，停止搜索，并将最终的区间中点作为结果 v_m 。
- 若 v_m 过小，意味着交点可能在 0 处或更左侧，与 $v > 0$ 条件矛盾，因此也视为无解，其他情况利用 v_m 代入 f_L 或 f_R 算出 u_m 。

3. 若无解直接输出无解即可，否则，根据 (v_m, u_m) 分析两侧。由于 $\lambda_1 < 0$ 、 $\lambda_2 > 0$ ，事实上可以将真解分为 $x < 0$ 、 $x > 0$ 部分，左侧完全由第一初等波决定，右侧完全由第二初等波决定。

- $x < 0$ 时，记 $\xi = x/t$ ，则利用得到的激波、稀疏波表达式可知解为 (这里单独列出了 $v_m = v_L$ 的退化情况，本质上可用稀疏波替代，但更加稳定)

$$v(x, t) = v(\xi) = \begin{cases} v_L & \xi \leq s_1 \\ v_m & \xi > s_1 \end{cases}, \quad s_1 = \frac{u_L - u_m}{v_m - v_L} \quad v_m < v_L$$

$$v(x, t) = v(\xi) = v_L \quad v_m = v_L$$

$$v(x, t) = v(\xi) = \begin{cases} v_L & \xi < \lambda_1(v_L) \\ l_1(\xi) & \xi \in [\lambda_1(v_L), \lambda_1(v_m)] \\ v_m & \xi > \lambda_1(v_m) \end{cases} \quad v_m > v_L$$

$$u(x, t) = u(\xi) = \begin{cases} u_L & \xi \leq s_1 \\ u_m & \xi > s_1 \end{cases}, \quad s_1 = \frac{u_L - u_m}{v_m - v_L} \quad v_m < v_L$$

$$u(x, t) = u(\xi) = u_L \quad v_m = v_L$$

$$u(x, t) = u(\xi) = \begin{cases} u_L & \xi < \lambda_1(v_L) \\ u_L + I_P(v_L, l_1(\xi)) & \xi \in [\lambda_1(v_L), \lambda_1(v_m)] \\ u_m & \xi > \lambda_1(v_m) \end{cases} \quad v_m > v_L$$

- $x > 0$ 时, 记 $\xi = x/t$, 则利用得到的激波、稀疏波表达式可知解为 (这里单独列出了 $v_m = v_R$ 的退化情况, 本质上可用稀疏波替代, 但更加稳定)

$$v(x, t) = v(\xi) = \begin{cases} v_m & \xi \leq s_2 \\ v_R & \xi > s_2 \end{cases}, \quad s_2 = \frac{u_R - u_m}{v_m - v_R} \quad v_m < v_R$$

$$v(x, t) = v(\xi) = v_R \quad v_m = v_R$$

$$v(x, t) = v(\xi) = \begin{cases} v_m & \xi < \lambda_2(v_m) \\ l_2(\xi) & \xi \in [\lambda_2(v_m), \lambda_2(v_R)] \\ v_R & \xi > \lambda_2(v_R) \end{cases} \quad v_m > v_R$$

$$u(x, t) = u(\xi) = \begin{cases} u_m & \xi \leq s_2 \\ u_R & \xi > s_2 \end{cases}, \quad s_2 = \frac{u_R - u_m}{v_m - v_R} \quad v_m < v_R$$

$$u(x, t) = u(\xi) = u_R \quad v_m = v_R$$

$$u(x, t) = u(\xi) = \begin{cases} u_m & \xi < \lambda_2(v_m) \\ u_R - I_p(v_R, l_2(\xi)) & \xi \in [\lambda_2(v_m), \lambda_2(v_R)] \\ u_R & \xi > \lambda_2(v_R) \end{cases} \quad v_m > v_R$$

4. 将两者拼合, 并结合 $x = 0$ 处恒为 (v_m, u_m) 即得到最终解。

5.2.2 结果展示

考虑 $p(v) = e^{-v}$, 取 $(v_L, u_L) = (1, -10)$ 、 $(v_R, u_R) = (2, 10)$, 则方程组无解。对应的 f_L 、 f_R 与输出效果如图 9。这里线上加粗的点即为 (v_L, u_L) 与 (v_R, u_R) 的位置。

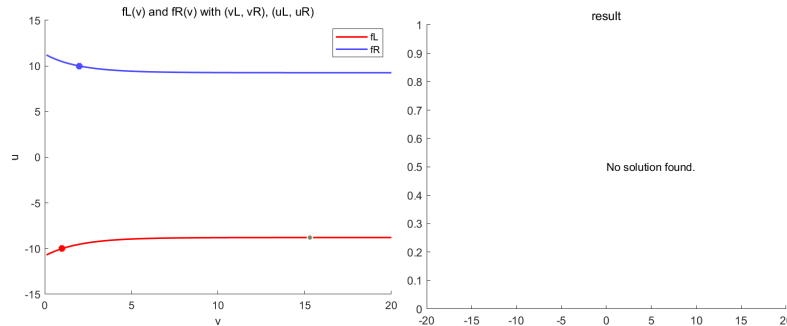
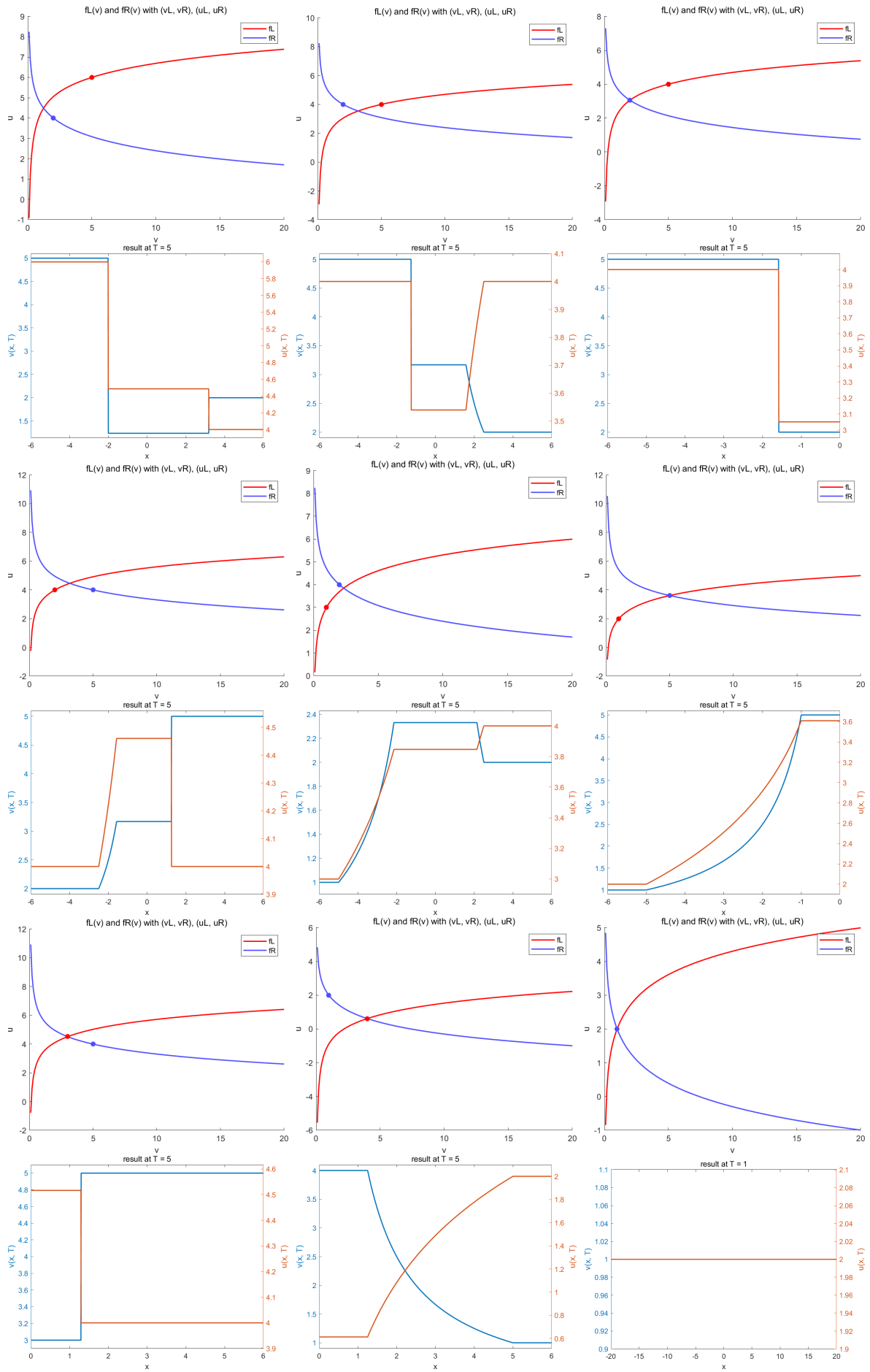


图 9: 无解的 p -方程组

考虑 $p(v) = v^{-1}$, 此时取适当的 (v_L, u_L) 与 (v_R, u_R) 可以出现各种情况的解。用三行分别表示左侧为激波、稀疏波、退化, 三列分别表示右侧为激波、稀疏波、退化, 在 $T = 5$ 时刻作出九种情况的解如图 10。将此与实际情况对比即验证了代码的正确性。

图 10: 有解的 p -方程组

6 第七周

6.1 书面作业

1. 将近似还原为

$$\frac{2u(x_j, t_{n+1}) - u(x_{j-1}, t_n) - u(x_{j+1}, t_n)}{2\tau} + \frac{2f(u(x_{j+1}, t_n)) - f(u(x_{j-1}, t_n))}{2h} = 0$$

令 τ, h 趋于 0 可发现极限即为

$$u_t + f(u)_x = 0$$

这就是与它相容的 PDE。

- 其可写成

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\tau}{h}(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{h}{2\tau}(U_j^n - U_{j+1}^n) + \frac{1}{2}F_{j+1}^n$$

从而为守恒格式。

- 它是单调格式当且仅当右端对 U_{j+1}^n 与 U_{j-1}^n 求导都非负，而两个偏导数分别为

$$\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2h}f'(U_{j+1}^n), \quad \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2h}f'(U_{j-1}^n)$$

由此当且仅当 $\|f'\|_\infty \leq h/\tau$ 时保证单调。

- 当单调时自然满足 TVD 性质，下面说明不单调时不满足。

若否，由平移不变不妨设 $|f'(0)| > h/\tau$ ，也即存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $|f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)| > 2\varepsilon h/\tau$

不妨考虑共 $2n$ 个点且循环边界条件的情况。定义 $U_{2k}^n = 0$, $U_{2k-1}^n = \varepsilon(-1)^k$ ，则直接计算其全变差为

$$TV(U^n) = \sum_{k=1}^n 2|U_{2k-1}^n| = 2n\varepsilon$$

而进一步计算有

$$U_{2k-1}^{n+1} = 0, \quad U_{2k}^{n+1} = -\frac{\tau}{2h}(f(\varepsilon(-1)^{k+1}) - f(\varepsilon(-1)^k))$$

从而全变差

$$TV(U^{n+1}) = \sum_{k=1}^n 2|U_{2k}^{n+1}| = \frac{n\tau}{h}|f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)| > 2n\varepsilon = TV(U^n)$$

综合以上讨论知其为 TVD 格式当且仅当 $\|f'\|_\infty \leq h/\tau$ 。

2. 为方便书写省略 u, f, g 的加粗，并记 $f_{jk}^n = f(u_{jk}^n)$, $g_{jk}^n = g(u_{jk}^n)$, $\lambda_{x,y} = \frac{\tau}{h_{x,y}}$ 。用 Δ_0 表示中心差商， Δ 表示向前差商， Δ_- 表示向后差商， δ 表示半步中心差商。

- LF 格式

考虑一阶近似

$$\begin{aligned} u(x_j, y_k, t_{n+1}) &= u(x_j, y_k, t_n) + \tau(u_t)_{jk}^n + o(\tau) \\ &= u(x_j, y_k, t_n) - \tau(f_x)_{jk}^n - \tau(g_y)_{jk}^n + o(\tau) \end{aligned}$$

用中心差商离散 f_x, g_y ，并对应离散 u_{jk}^n 到四个相邻点可得 LF 格式

$$u_{jk}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{j-1,k}^n + u_{j+1,k}^n + u_{j,k-1}^n + u_{j,k+1}^n) - \frac{\tau}{2h_x}(f_{j+1,k}^n - f_{j-1,k}^n) - \frac{\tau}{2h_y}(g_{j,k+1}^n - g_{j,k-1}^n)$$

或写为

$$u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n + \frac{1}{4}(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{jk}^n - \frac{\lambda_x}{2}\Delta_{0x}f_{jk}^n - \frac{\lambda_y}{2}\Delta_{0y}g_{jk}^n$$

- LW 格式

设 $a(u) = f'(u)$, $b(u) = g'(u)$, 计算可发现

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (f_x + g_y)_t = \partial_x(f_t) + \partial_y(g_t) = \partial_x(a(f_x + g_y)) + \partial_y(b(f_x + g_y)) \\ &= \partial_x(a^2 u_x) + \partial_x(abu_y) + \partial_y(abu_x) + \partial_y(b^2 u_y) \end{aligned}$$

由此考虑真解的二阶近似

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^n + \tau(u_t)_{jk}^n + \frac{1}{2}\tau^2(u_{tt})_{jk}^n + \mathcal{O}(\tau^3) \\ &= u_{jk}^n - \tau(f_x)_{jk}^n - \tau(g_y)_{jk}^n + \frac{1}{2}\tau^2(\partial_x(a^2 u_x) + \partial_x(abu_y) + \partial_y(abu_x) + \partial_y(b^2 u_y)) + \mathcal{O}(\tau^3) \end{aligned}$$

用 Δ_0 作一阶项的差分, δ 作二阶项的差分, 可得离散

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^n - \frac{1}{2}(\lambda_x \Delta_{0x} f_{jk}^n + \lambda_y \Delta_{0y} g_{jk}^n) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda_x^2 \delta_x((a_{jk}^n)^2 \delta_x u_{jk}^n) + \lambda_x \lambda_y \delta_x(a_{jk}^n b_{jk}^n \delta_y u_{jk}^n) + \lambda_x \lambda_y \delta_y(a_{jk}^n b_{jk}^n \delta_x u_{jk}^n) + \lambda_y^2 \delta_y((b_{jk}^n)^2 \delta_y u_{jk}^n)) \end{aligned}$$

这里的 u 两个下标均 $\frac{1}{2}$ 时取相邻四个整点平均, $a_{j+\frac{1}{2},k}^n$ 一类的项可以用

$$a_{j+\frac{1}{2},k}^n = a((u_{jk}^n + u_{j+1,k}^n)/2)$$

或

$$a_{j+\frac{1}{2},k}^n = \begin{cases} \frac{f_{j+1,k}^n - f_{jk}^n}{u_{j+1,k}^n - u_{jk}^n} & u_{j+1,k}^n \neq u_{jk}^n \\ a_{jk}^n & u_{j+1,k}^n = u_{jk}^n \end{cases}$$

计算。

- 两步 LW 格式

考虑真解的二阶近似

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^n + \tau(u_t)_{jk}^n + \frac{1}{2}\tau^2(u_{tt})_{jk}^n + \mathcal{O}(\tau^3) \\ &= u_{jk}^n + \tau(\bar{u}_t)_{jk}^n + \mathcal{O}(\tau^3), \quad \bar{u} = u + \frac{\tau}{2}u_t \end{aligned}$$

可得 (所有下标 $\frac{1}{2}$ 的 u 代表两端平均的结果)

$$\begin{aligned} u_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2},k}^n - \frac{\lambda_x}{2}\Delta_x f_{jk}^n - \frac{\lambda_y}{4}\Delta_{0y} g_{j+\frac{1}{2},k}^n \\ u_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{j,k+\frac{1}{2}}^n - \frac{\lambda_x}{4}\Delta_{0x} f_{jk}^n - \frac{\lambda_y}{2}\Delta_y g_{jk}^n \\ u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^n - \lambda_x \delta_x f_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_y \delta_y g_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- MC 格式

考虑真解的二阶近似

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^n + \tau(u_t)_{jk}^n + \frac{1}{2}\tau^2(u_{tt})_{jk}^n + \mathcal{O}(\tau^3) \\ &= \frac{1}{2}u_{jk}^n + \frac{1}{2}(\bar{u} + \tau\bar{u}_t)_{jk}^n + \mathcal{O}(\tau^3), \quad \bar{u} = u + \tau u_t \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \bar{u}_{jk}^* &= u_{jk}^n - \lambda_x \Delta_x f_{jk}^n - \lambda_y \Delta_y g_{jk}^n \\ u_{jk}^{n+1} &= \frac{1}{2}u_{jk}^n + \frac{1}{2}(\bar{u}_{jk}^* - \lambda_x \Delta_{-x} \bar{f}_{jk}^* - \lambda_y \Delta_{-y} \bar{g}_{jk}^*) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \bar{u}_{jk}^* &= u_{jk}^n - \lambda_x \Delta_{-x} f_{jk}^n - \lambda_{-y} \Delta_y g_{jk}^n \\ u_{jk}^{n+1} &= \frac{1}{2}u_{jk}^n + \frac{1}{2}(\bar{u}_{jk}^* - \lambda_x \Delta_x \bar{f}_{jk}^* - \lambda_y \Delta_y \bar{g}_{jk}^*) \end{aligned}$$

考虑只包含相邻四个点为依赖区域的 CFL 条件, 此时联立临界情况

$$\frac{x}{h_x} + \frac{y}{h_y} = 1, \quad x = \|f'\|_\infty \tau, \quad y = \|g'\|_\infty \tau$$

可得 CFL 条件

$$\tau \leq \left(\frac{\|f'\|_\infty}{h_x} + \frac{\|g'\|_\infty}{h_y} \right)^{-1}$$

一般直接取为

$$\tau \leq \frac{1}{2} \min \left(\frac{h_x}{\|f'\|_\infty}, \frac{h_y}{\|g'\|_\infty} \right)$$

包含更多相邻点时 (如 LW 格式), 虽然理论来说 CFL 条件允许更大的取法, 但实际验证可发现仍以此作为初始步长可以更好保证稳定。

3. 为方便书写省略 u 、 f 、 g 、 h 的加粗, 并记 $f_{ijk}^n = f(u_{ijk}^n)$, $g_{ijk}^n = g(u_{ijk}^n)$, $h_{ijk}^n = h(u_{ijk}^n)$, $\lambda_{x,y,z} = \frac{\tau}{h_{x,y,z}}$ 。用 Δ_0 表示中心差商, Δ 表示向前差商, Δ_- 表示向后差商, δ 表示半步中心差商。

- LF 格式

类似二维情况考虑一阶近似后推导可得

$$u_{ijk}^{n+1} = u_{ijk}^n + \frac{1}{6}(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2)u_{ijk}^n - \frac{\lambda_x}{2}\Delta_{0x}f_{ijk}^n - \frac{\lambda_y}{2}\Delta_{0y}g_{ijk}^n - \frac{\lambda_z}{2}\Delta_{0z}h_{ijk}^n$$

- LW 格式

类似二维情况考虑二阶近似后推导, 记 $a = f'$ 、 $b = g'$ 、 $c = h'$ 可得

$$\begin{aligned} u_{ijk}^{n+1} = & u_{ijk}^n - \frac{1}{2}(\lambda_x \Delta_{0x} f_{ijk}^n + \lambda_y \Delta_{0y} g_{ijk}^n + \lambda_z \Delta_{0z} h_{ijk}^n) \\ & + \frac{1}{2} \left(\lambda_x \delta_x (a_{ijk}^n (\lambda_x a_{ijk}^n \delta_x u_{ijk}^n + \lambda_y b_{ijk}^n \delta_y u_{ijk}^n + \lambda_z c_{ijk}^n \delta_z u_{ijk}^n)) \right. \\ & + \lambda_y \delta_y (b_{ijk}^n (\lambda_x a_{ijk}^n \delta_x u_{ijk}^n + \lambda_y b_{ijk}^n \delta_y u_{ijk}^n + \lambda_z c_{ijk}^n \delta_z u_{ijk}^n)) \\ & \left. + \lambda_z \delta_z (c_{ijk}^n (\lambda_x a_{ijk}^n \delta_x u_{ijk}^n + \lambda_y b_{ijk}^n \delta_y u_{ijk}^n + \lambda_z c_{ijk}^n \delta_z u_{ijk}^n)) \right) \end{aligned}$$

这里的 u 两个下标均 $\frac{1}{2}$ 时取相邻四个整点平均, $a_{i+\frac{1}{2},jk}^n$ 一类的项可以用

$$a_{i+\frac{1}{2},jk}^n = a((u_{ijk}^n + u_{i+1,jk}^n)/2)$$

或

$$a_{i+\frac{1}{2},jk}^n = \begin{cases} \frac{f_{i+1,jk}^n - f_{ijk}^n}{u_{i+1,jk}^n - u_{ijk}^n} & u_{i+1,jk}^n \neq u_{ijk}^n \\ a_{ijk}^n & u_{i+1,jk}^n = u_{ijk}^n \end{cases}$$

计算。

- 两步 LW 格式

类似二维情况考虑二阶近似后两步拆分可得

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},jk}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{i+\frac{1}{2},jk}^n - \frac{\lambda_x}{2}\Delta_x f_{ijk}^n - \frac{\lambda_y}{4}\Delta_{0y}g_{i+\frac{1}{2},jk}^n - \frac{\lambda_z}{4}\Delta_{0z}h_{i+\frac{1}{2},jk}^n \\ u_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - \frac{\lambda_x}{4}\Delta_{0x}f_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - \frac{\lambda_y}{2}\Delta_y g_{ijk}^n - \frac{\lambda_z}{4}\Delta_{0z}h_{i,j+\frac{1}{2},k}^n \\ u_{ij,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{ij,k+\frac{1}{2}}^n - \frac{\lambda_x}{4}\Delta_{0x}f_{ij,k+\frac{1}{2}}^n - \frac{\lambda_y}{4}\Delta_{0y}g_{ij,k+\frac{1}{2}}^n - \frac{\lambda_z}{2}\Delta_z h_{ijk}^n \\ u_{ijk}^{n+1} &= u_{ijk}^n - \lambda_x \delta_x f_{ijk}^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_y \delta_y g_{ijk}^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_z \delta_z h_{ijk}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- MC 格式

类似二维情况二阶近似拆分后交替前后差商可得

$$\begin{aligned}\bar{u}_{ijk}^* &= u_{ijk}^n - \lambda_x \Delta_x f_{ijk}^n - \lambda_y \Delta_y g_{ijk}^n - \lambda_z \Delta_z h_{ijk}^n \\ u_{ijk}^{n+1} &= \frac{1}{2} u_{ijk}^n + \frac{1}{2} (\bar{u}_{ijk}^* - \lambda_x \Delta_{-x} \bar{f}_{ijk}^* - \lambda_y \Delta_{-y} \bar{g}_{ijk}^* - \lambda_z \Delta_{-z} \bar{h}_{ijk}^*)\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\bar{u}_{ijk}^* &= u_{ijk}^n - \lambda_x \Delta_{-x} f_{ijk}^n - \lambda_y \Delta_{-y} g_{ijk}^n - \lambda_z \Delta_{-z} h_{ijk}^n \\ u_{ijk}^{n+1} &= \frac{1}{2} u_{ijk}^n + \frac{1}{2} (\bar{u}_{ijk}^* - \lambda_x \Delta_x \bar{f}_{ijk}^* - \lambda_y \Delta_y \bar{g}_{ijk}^* - \lambda_z \Delta_z \bar{h}_{ijk}^*)\end{aligned}$$

考虑只包含相邻六个点为依赖区域的 CFL 条件, 此时联立临界情况

$$\frac{x}{h_x} + \frac{y}{h_y} + \frac{z}{h_z} = 1, \quad x = \|f'\|_\infty \tau, \quad y = \|g'\|_\infty \tau, \quad z = \|h'\|_\infty \tau$$

可得 CFL 条件

$$\tau \leq \left(\frac{\|f'\|_\infty}{h_x} + \frac{\|g'\|_\infty}{h_y} + \frac{\|h'\|_\infty}{h_z} \right)^{-1}$$

一般直接取为

$$\tau \leq \frac{1}{3} \min \left(\frac{h_x}{\|f'\|_\infty}, \frac{h_y}{\|g'\|_\infty}, \frac{h_z}{\|h'\|_\infty} \right)$$

包含更多相邻点时 (如 LW 格式), 虽然理论来说 CFL 条件允许更大的取法, 但实际验证可发现仍以此作为初始步长可以更好保证稳定。

4. (1) 直接求解可知 $\omega(x, t)$ 在 $[x_j, x_{j+1}] \times [t_n, t_{n+1})$ 上为

$$\begin{cases} u_j^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} < a(t - t_n) \\ u_{j+1}^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} > a(t - t_n) \end{cases}$$

- 版本 1

当 $a > 0$ 时积分即得到

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{h} (a\tau u_{j-1}^n + (h - a\tau)u_j^n) = u_j^n - \frac{a\tau}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

当 $a < 0$ 时同理得到

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{h} (-a\tau u_{j+1}^n + (h + a\tau)u_j^n) = u_j^n - \frac{a\tau}{h} (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

- 版本 2

当 $a > 0$ 时 $\omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = u_j^n$, 从而格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\tau}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

当 $a < 0$ 时 $\omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = u_{j+1}^n$, 从而格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\tau}{h} (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

两版本实际上均为一阶迎风格式。

(2) 直接求解可知 $\omega(x, t)$ 在 $[x_j, x_{j+1}] \times [t_n, t_{n+1})$ 上为 (用 $u_{j+\frac{1}{2}}^n$ 表示 $(u_j^n + u_{j+1}^n)/2$)

$$\begin{cases} u_j^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} < u_{j+\frac{1}{2}}^n (t - t_n) \\ u_{j+1}^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} > u_{j+\frac{1}{2}}^n (t - t_n) \end{cases}, \quad u_j^n \geq u_{j+1}^n$$

$$\begin{cases} u_j^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} < u_j^n(t - t_n) \\ \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{t - t_n} & x - x_{j+\frac{1}{2}} \in (u_j^n(t - t_n), u_{j+1}^n(t - t_n)), \quad u_j^n < u_{j+1}^n \\ u_{j+1}^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} > u_{j+1}^n(t - t_n) \end{cases}$$

- 版本 1

首先写出激波与稀疏波在 t_{n+1} 处的结果

$$\begin{cases} u_j^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} < u_{j+\frac{1}{2}}^n \tau, \quad u_j^n \geq u_{j+1}^n \\ u_{j+1}^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} > u_{j+\frac{1}{2}}^n \tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_j^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} < u_j^n \tau \\ \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\tau} & x - x_{j+\frac{1}{2}} \in (u_j^n \tau, u_{j+1}^n \tau), \quad u_j^n < u_{j+1}^n \\ u_{j+1}^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} > u_{j+1}^n \tau \end{cases}$$

从而可知

$$L_j^{n+1} = \frac{2}{h} \int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \omega(x, t_{n+1}) dx = \begin{cases} u_j^n & u_j^n \geq u_{j+1}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n > 0 \\ u_j^n - \frac{2\tau}{h} u_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) & u_j^n \geq u_{j+1}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 0 \\ u_j^n - \frac{2\tau}{h} u_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) & u_j^n < u_{j+1}^n < 0 \\ u_j^n + \frac{\tau}{h} (u_j^n)^2 & u_j^n \leq 0 \leq u_{j+1}^n \\ u_j^n & 0 < u_j^n < u_{j+1}^n \end{cases}$$

$$R_{j+1}^{n+1} = \frac{2}{h} \int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+1}} \omega(x, t_{n+1}) dx = \begin{cases} u_{j+1}^n - \frac{2\tau}{h} u_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) & u_j^n \geq u_{j+1}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n > 0 \\ u_{j+1}^n & u_j^n \geq u_{j+1}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 0 \\ u_{j+1}^n & u_j^n < u_{j+1}^n < 0 \\ u_{j+1}^n - \frac{\tau}{h} (u_{j+1}^n)^2 & u_j^n \leq 0 \leq u_{j+1}^n \\ u_{j+1}^n - \frac{2\tau}{h} u_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) & 0 < u_j^n < u_{j+1}^n \end{cases}$$

最终迭代为

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(L_j^{n+1} + R_{j+1}^{n+1})$$

讨论 u_{j-1} 、 u_j 、 u_{j+1} 的正负与大小情况可发现实质上得到的迭代与下面的版本 2 相同。

- 版本 2

直接计算发现 (临界情况 $u_{j+\frac{1}{2}}^n = 0$ 的激波定义)

$$\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n = \omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+1}) = \begin{cases} u_j^n & u_j^n \geq u_{j+1}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n > 0 \\ u_{j+1}^n & u_j^n \geq u_{j+1}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 0 \\ u_{j+1}^n & u_j^n < u_{j+1}^n < 0 \\ 0 & u_j^n \leq 0 \leq u_{j+1}^n \\ u_j^n & 0 < u_j^n < u_{j+1}^n \end{cases}$$

而迭代为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad f_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2$$

实际上通量可以写为更简洁的版本

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \min_{x \in [u_j^n, u_{j+1}^n]} \frac{x^2}{2} & u_j^n \leq u_{j+1}^n \\ \max_{x \in [u_{j+1}^n, u_j^n]} \frac{x^2}{2} & u_j^n > u_{j+1}^n \end{cases}$$

(3) 直接求解可知系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

特征值 $\lambda_1 = -a$, 对应的特征向量 $(u_1, v_1) = (1, 1)$; $\lambda_2 = a$, 对应的特征向量 $(u_2, v_2) = (1, -1)$ 。由此其可看作方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+v) - a \frac{\partial}{\partial x}(u+v) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(u-v) + a \frac{\partial}{\partial x}(u-v) = 0$$

再利用 (1) 即可得到 $\omega(x, t^{n+1})$ 在 $[x_j, x_{j+1}] \times [t_n, t_{n+1})$ 上为

$$\begin{cases} (u_j^n, v_j^n) & x - x_{j+\frac{1}{2}} < -a\tau \\ \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n + v_{j+1}^n - v_j^n, v_{j+1}^n + v_j^n + u_{j+1}^n - u_j^n) & x - x_{j+\frac{1}{2}} \in (-a\tau, a\tau), \quad a > 0 \\ (u_{j+1}^n, v_{j+1}^n) & x - x_{j+\frac{1}{2}} > a\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u_j^n, v_j^n) & x - x_{j+\frac{1}{2}} < a\tau \\ \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n + v_j^n - v_{j+1}^n, v_{j+1}^n + v_j^n + u_j^n - u_{j+1}^n) & x - x_{j+\frac{1}{2}} \in (a\tau, -a\tau), \quad a \leq 0 \\ (u_j^{n+1}, v_j^{n+1}) & x - x_{j+\frac{1}{2}} > -a\tau \end{cases}$$

- 版本 1

由于在 (1) 中已经证明了线性情况下版本 1 的积分结果与版本 2 推导相同, 而二维线性情况的积分效果事实上与两个独立一维计算后再组合相同, 积分计算的结果应与版本 2 相同, 由此可直接利用版本 2 的方式计算格式。

- 版本 2

当 $a > 0$ 时

$$\omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n + v_{j+1}^n - v_j^n, v_{j+1}^n + v_j^n + u_{j+1}^n - u_j^n)$$

从而格式为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{a\tau}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ v_j^{n+1} &= v_j^n + \frac{a\tau}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n + v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \end{aligned}$$

当 $a < 0$ 时

$$\omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n + v_j^n - v_{j+1}^n, v_{j+1}^n + v_j^n + u_j^n - u_{j+1}^n)$$

从而格式为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{a\tau}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n - u_{j+1}^n + 2u_j^n - u_{j-1}^n) \\ v_j^{n+1} &= v_j^n + \frac{a\tau}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n - v_{j+1}^n + 2v_j^n - v_{j-1}^n) \end{aligned}$$

6.2 实验报告

6.2.1 二维 Burgers

我们记 $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, 则考虑的方程可以写为

$$u_t + f(u)_x + f(u)_y = 0$$

初值条件

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} u_1 & x > 0, y > 0 \\ u_2 & x < 0, y > 0 \\ u_3 & x < 0, y < 0 \\ u_4 & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

以下称算例 1 为 $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (-1, -0.2, 0.5, 0.8)$, 算例 2 为 $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (-0.2, -1, 0.5, 0.8)$ 。由于 u 最大为 1, 输出时刻为 $t = 1$, 我们将空间区域取为 $[-2, 2]^2$, 以保证间断尚未传播到边界。此外, 由于方程对 x, y 的对称性, 我们记空间步长 $h_x = h_y = h$, 时间步长 τ , 网比 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 。考虑三种格式:

1. LF 格式

在作业第二题中已经完成了推导, 对此情况的 LF 格式为

$$u_{jk}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{j-1,k}^n + u_{j+1,k}^n + u_{j,k-1}^n + u_{j,k+1}^n) - \frac{\lambda}{2}(f_{j+1,k}^n - f_{j-1,k}^n) - \frac{\lambda}{2}(f_{j,k+1}^n - f_{j,k-1}^n)$$

这里 $f_{jk}^n = f(u_{jk}^n)$ 。

2. 迎风格式

与作业第二题的推导类似, 一阶格式推广到二维相当于对两方向分别进行, 由此可以得到守恒型迎风格式

$$u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n - \lambda(\hat{f}_{j+\frac{1}{2},k}^n - \hat{f}_{j-\frac{1}{2},k}^n) - \lambda(\hat{f}_{j,k+\frac{1}{2}}^n - \hat{f}_{j,k-\frac{1}{2}}^n)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2},k}^n = \begin{cases} \frac{1}{2}(u_{jk}^n)^2 & u_{j+\frac{1}{2},k}^n > 0 \\ \frac{1}{2}(u_{j+1,k}^n)^2 & u_{j+\frac{1}{2},k}^n \leq 0 \end{cases}, \quad \hat{f}_{j,k+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{1}{2}(u_{jk}^n)^2 & u_{j,k+\frac{1}{2}}^n > 0 \\ \frac{1}{2}(u_{j,k+1}^n)^2 & u_{j,k+\frac{1}{2}}^n \leq 0 \end{cases}$$

其中下标带 $\frac{1}{2}$ 的可以看作相邻整点的平均值。

3. LW 格式

在作业第二题中已经完成了推导, 对此情况的 LW 格式为 ($f_{jk}^n = f(u_{jk}^n)$)

$$u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n - \frac{\lambda}{2}(\Delta_{0x} f_{jk}^n + \Delta_{0y} f_{jk}^n) + \frac{\lambda^2}{2}(\delta_x((u_{jk}^n)^2 \delta_x u_{jk}^n) + \delta_x((u_{jk}^n)^2 \delta_y u_{jk}^n) + \delta_y((u_{jk}^n)^2 \delta_x u_{jk}^n) + \delta_y((u_{jk}^n)^2 \delta_y u_{jk}^n))$$

我们进一步展开得到

$$u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n - \frac{\lambda}{2}(f_{j+1,k}^n - f_{j-1,k}^n + f_{j,k+1}^n - f_{j,k-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}((u_{j+\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{j+1,k}^n - u_{jk}^n) - (u_{j-\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n) + (u_{j+\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - u_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n) - (u_{j-\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n) + (u_{j,k+\frac{1}{2}}^n)^2(u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n) - (u_{j,k-\frac{1}{2}}^n)^2(u_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n) + (u_{j,k+\frac{1}{2}}^n)^2(u_{j,k+1}^n - u_{jk}^n) - (u_{j,k-\frac{1}{2}}^n)^2(u_{jk}^n - u_{j,k-1}^n))$$

由于下标带 $\frac{1}{2}$ 的可以看作相邻整点的平均值，有两项 $\frac{1}{2}$ 相当于周围四个整点的平均，可发现最终化简为

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} = & u_{jk}^n - \frac{\lambda}{2}(f_{j+1,k}^n - f_{j-1,k}^n + f_{j,k+1}^n - f_{j,k-1}^n) \\ & + \frac{\lambda^2}{2}((u_{j+\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{j+1,k}^n - u_{jk}^n) - (u_{j-\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n)) \\ & + \frac{1}{2}(u_{j+\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{j+\frac{1}{2},k+1}^n - u_{j+\frac{1}{2},k-1}^n) - \frac{1}{2}(u_{j-\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{j-\frac{1}{2},k+1}^n - u_{j-\frac{1}{2},k-1}^n) \\ & + \frac{1}{2}(u_{j,k+\frac{1}{2}}^n)^2(u_{j+1,k+\frac{1}{2}}^n - u_{j-1,k+\frac{1}{2}}^n) - \frac{1}{2}(u_{j,k-\frac{1}{2}}^n)^2(u_{j+1,k-\frac{1}{2}}^n - u_{j-1,k-\frac{1}{2}}^n) \\ & + (u_{j,k+\frac{1}{2}}^n)^2(u_{j,k+1}^n - u_{jk}^n) - (u_{j,k-\frac{1}{2}}^n)^2(u_{jk}^n - u_{j,k-1}^n) \end{aligned}$$

此外，区域顶点处由于间断未传播到边界而不会改变，同理，区域边界处采用对应方向的一维格式进行迭代即可。例如，对 LW 格式，我们将对所有 j 不在边界的点计算 $f_{j+1,k}^n - f_{j-1,k}^n$ 与 $(u_{j+\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{j+1,k}^n - u_{jk}^n) - (u_{j-\frac{1}{2},k}^n)^2(u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n)$ ，对所有 k 不在边界的点计算 $f_{j,k+1}^n - f_{j,k-1}^n$ 与 $(u_{j,k+\frac{1}{2}}^n)^2(u_{j,k+1}^n - u_{jk}^n) - (u_{j,k-\frac{1}{2}}^n)^2(u_{jk}^n - u_{j,k-1}^n)$ ，并乘系数叠加，最后再对 j, k 都不在边界的点计算中间两项并叠加。

取定 $h = 0.03$ 、 $\tau = 0.01$ ，对算例 1 的迭代结果如图 11。分析可发现，算例 1 中下方为稀疏波，剩下三侧为激波，由此守恒型迎风格式较好刻画了波的类型与边界，LF 格式的数值耗散较明显，而 LW 格式则有明显更剧烈的数值振荡。

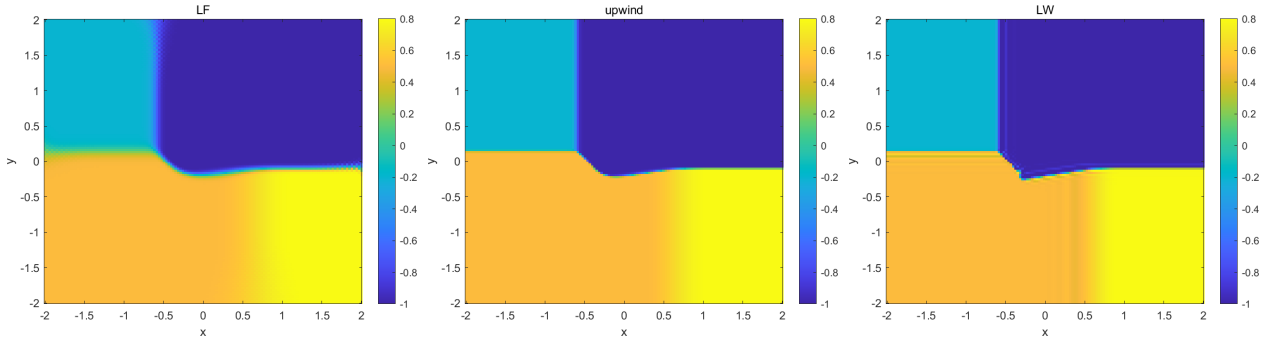


图 11: 二维 Burgers 方程算例 1 格式对比

取定 $h = 0.03$ 、 $\tau = 0.01$ ，对算例 2 的迭代结果如图 12。此时上下为稀疏波，左右为激波，守恒型迎风格式仍然较好刻画了波的类型与边界，另两种格式的数值耗散与数值振荡也仍然明显。

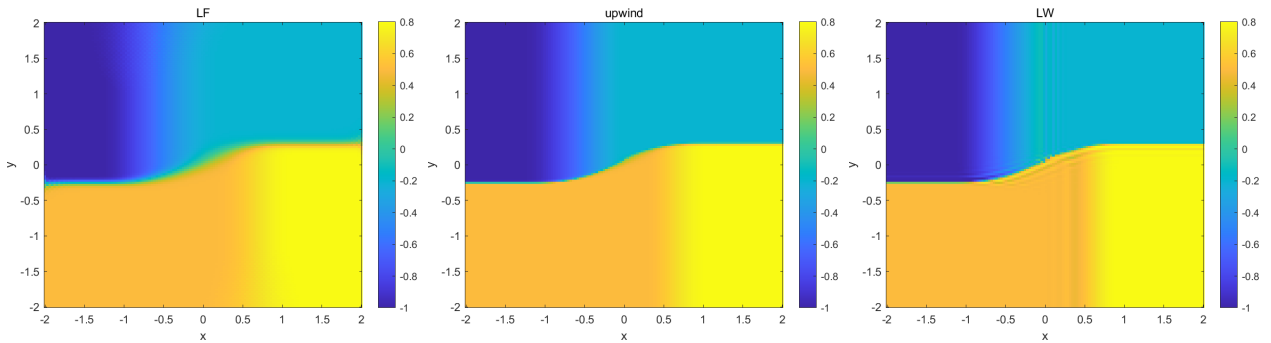


图 12: 二维 Burgers 方程算例 2 格式对比

进一步验证可发现，即使将 τ 取为 0.015，接近 CFL 条件的极限，LF 格式与 LW 格式也并未有很好的改善，由此三种格式中守恒型迎风相对对间断解刻画最好。

6.2.2 一维 Euler

记 $m = \rho u$, 且对应的 (为了书写迭代格式方便省略加粗)

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}, \quad f(U) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{4}{5} \frac{m^2}{\rho} + \frac{2}{5} E \\ \frac{7}{5} \frac{mE}{\rho} - \frac{1}{5} \frac{m^3}{\rho^2} \end{pmatrix}, \quad A(U) = f'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{8}{5} \frac{m}{\rho} & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} \frac{mE}{\rho^2} + \frac{2}{5} \frac{m^3}{\rho^3} & \frac{7}{5} \frac{E}{\rho} - \frac{3}{5} \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{7}{5} \frac{m}{\rho} \end{pmatrix}$$

欧拉方程组为 $U_t + f(U)_x = 0$, 考虑空间区域 $[0, 1]$ 。以下称算例 3 为初值

$$U(x, 0) = \begin{cases} (0.445, 0.311, 8.928)^T & x < 0.5 \\ (0.5, 0, 1.4275)^T & x > 0.5 \end{cases}$$

模拟到 $t = 0.14$ 时刻; 算例 4 为初值

$$U(x, 0) = \begin{cases} (1, 0, 2.5)^T & x < 0.3 \\ (0.125, 0, 0.25)^T & x > 0.3 \end{cases}$$

模拟到 $t = 0.2$ 时刻。我们记空间步长 h , 时间步长 τ , 网比 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 。考虑三种格式:

1. LF 格式

其迭代方式为

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\lambda}{2}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n))$$

2. LW 格式

其迭代方式为 (部分采用讲义中的替代方式, 避免矩阵平方的计算)

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\lambda}{2}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)) + \frac{\lambda^2}{2}(A(U_{j+\frac{1}{2}}^n)(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)) - A(U_{j-\frac{1}{2}}^n)(f(U_j^n) - f(U_{j-1}^n)))$$

其中下标带 $\frac{1}{2}$ 的可以看作相邻整点的平均值。

3. MC 格式

我们采用双循环策略构造 MC 格式, 也即 n 为偶数时

$$\bar{U}_j^* = U_j^n - \lambda(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n))$$

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_j^n + \bar{U}_j^*) - \frac{\lambda}{2}(f(\bar{U}_j^*) - f(\bar{U}_{j-1}^*))$$

否则

$$\bar{U}_j^* = U_j^n - \lambda(f(U_j^n) - f(U_{j-1}^n))$$

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_j^n + \bar{U}_j^*) - \frac{\lambda}{2}(f(\bar{U}_{j+1}^*) - f(\bar{U}_j^*))$$

由于时空区域选取已经保证了间断不会传播到边界, 边界固定不变即可。

对于算例 3, 我们先取 $h = 0.003$ 、 $\tau = 0.0004$, 三种格式的迭代效果如图 13。自上而下分别为 LF 格式、LW 格式、MC 格式迭代到 0.14 秒时的 ρ 、 u 、 E 。可以发现, 二阶的 LW 格式与 MC 格式结果基本类似, 虽然存在一定数值振荡, 但可以较清晰看出三个波依次为稀疏波、接触间断与激波。与之相对, LF 格式由于数值耗散过于剧烈, 很难分辨波的具体位置与类型。不过, 在 h 、 τ 下降时, 由于 LF 格式是单调的, 其稳定性显著好于另两个格式。例如, 在 $h = 0.002$ 时, 对 LF 格式可以取任意小的 τ , 得到时间方向任意精确的结果, 而由于数值振荡, τ 取为 0.0002 时 MC 格式已经不收敛, τ 取为 0.0001 时 LW 格式也不再收敛 (ρ 将触及 0 而产生发散)。此外, 这也可以看出算例 3 中 LW 格式的稳定性稍好于 MC 格式。

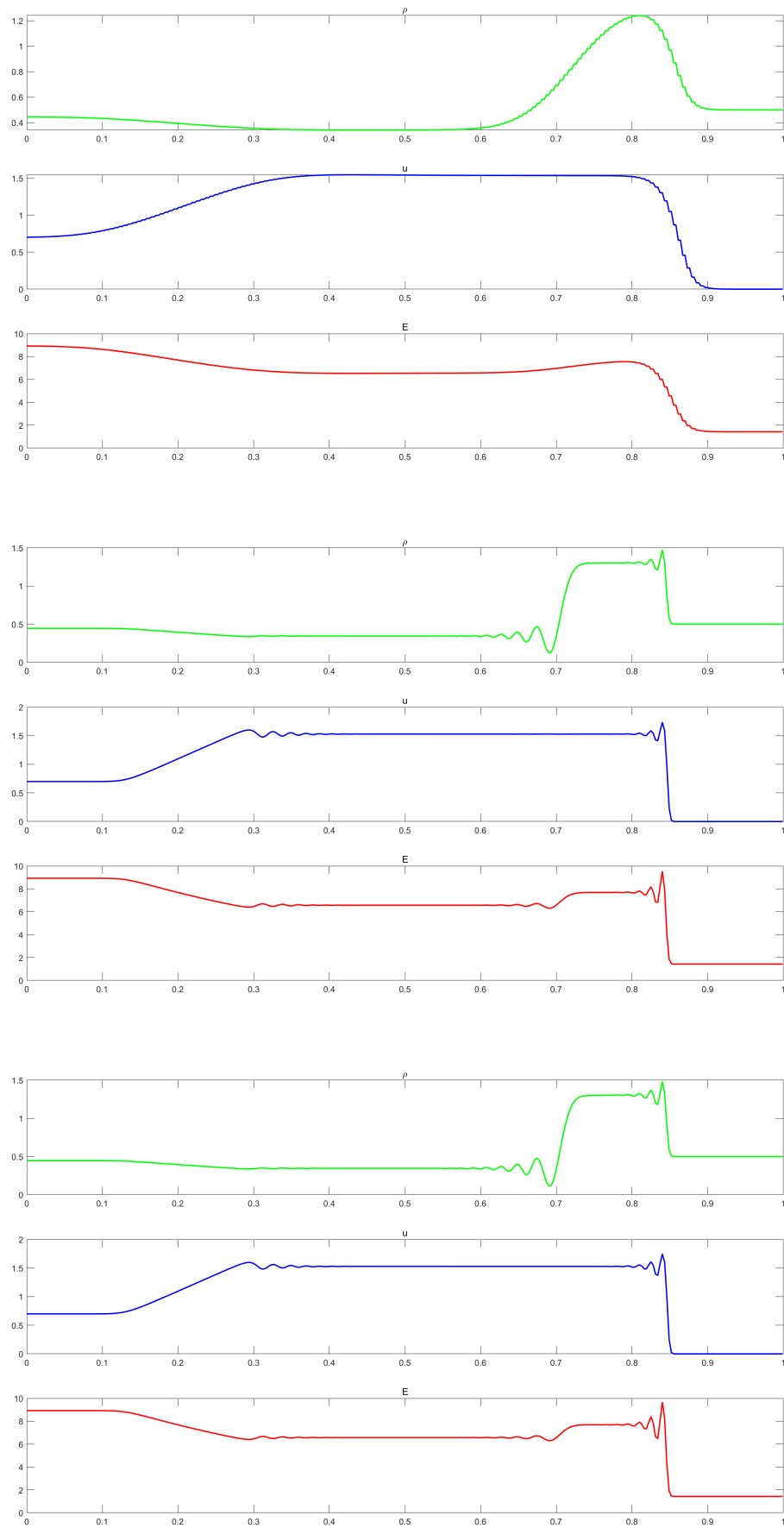


图 13: 一维 Euler 方程组算例 3 格式对比

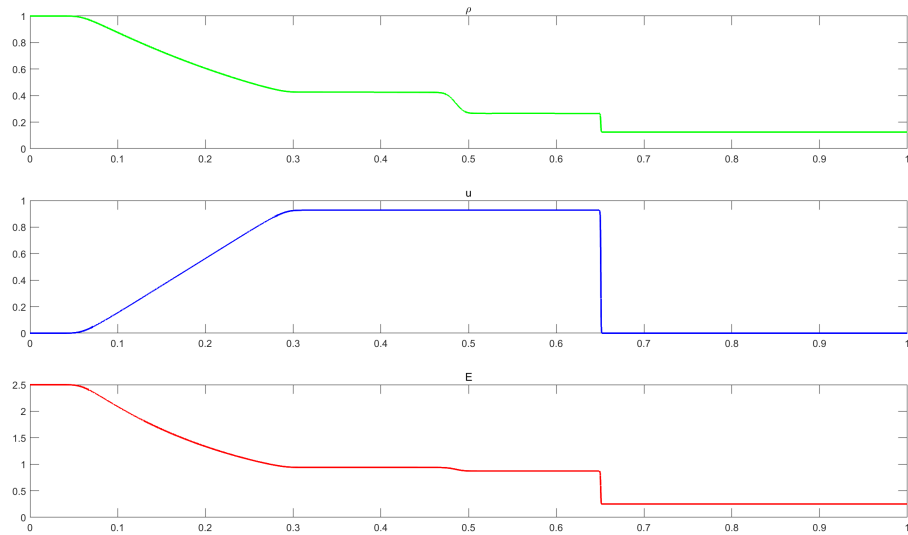


图 14: 一维 Euler 方程组算例 4 模拟结果

对算例 4，上述的不稳定性体现更加明显。MC 格式几乎无法在 h 取为 0.05 以下时正常收敛，LW 格式则几乎无法在 h 取为 0.025 以下时正常收敛。因此，几乎无法从这两个格式的迭代结果看出波的类型和位置——这是由于初始处在 $u = 0$ 的临界情况，很容易引起振荡而导致高阶格式不收敛。为了得到算例 4 的模拟效果，我们取 $h = 0.0001$ 、 $\tau = 0.00003$ ，得到的模拟结果如图 14。

虽然模拟的时间相对较长，从图中的确可以看出，由于 LF 格式的单调性，在情况较奇异时它可以更好保证收敛性，捕获稀疏波、接触间断与激波。由此也可以看出，我们需要开发具有同时较好收敛速率（如至少在大区域二阶）与较强稳定性（如 TVD 性质）的格式，才能更好完成复杂守恒律的模拟。

7 第八周

7.1 书面作业

1. 我们假设 λ 是 $\mathcal{O}(1)$ 的, 从而 h 与 τ 可以等价, 方便计算误差。由守恒格式定义, $\hat{f}(u, u) = f(u)$ 。将真解 u 在 $u(x_j, t^n)$ 展开并代入, 可得

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + \tau(u_t)_j^n + \frac{1}{2}\tau^2(u_{tt})_j^n + \mathcal{O}(\tau^3)$$

也即用 f 写成 ($a(u) = f'(u)$)

$$u_j^n - u_j^{n+1} = \tau(f_x)_j^n - \frac{1}{2}\tau^2((f'f_x)_x)_j^n + \mathcal{O}(\tau^3) = \tau(f_x)_j^n - \frac{1}{2}\tau^2((a^2u_x)_x)_j^n + \mathcal{O}(\tau^3)$$

另一方面有 (这里 $\hat{f}_{1,2}$ 代表 $\hat{f}$ 对两个分量求导, $(\hat{f}_1)_j^n$ 为 $\hat{f}_1(u_j^n, u_j^n)$)

$$\begin{aligned} \tau(f_x)_j^n &= \tau(\hat{f}_x)_j^n = \tau((\hat{f}_1 + \hat{f}_2)u_x)_j^n \\ \lambda(\hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n, u_j^n)) &= \tau \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} (\hat{f}_2)_j^n + \tau \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} (\hat{f}_1)_j^n \\ &\quad + \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n)^2 (\hat{f}_{22})_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j-1}^n - u_j^n)^2 (\hat{f}_{11})_j^n + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

这里最后一项为 $\mathcal{O}(h^3)$ 是将 u_{j+1}^n, u_{j-1}^n 在 u_j^n 展开得到的。

进一步化简, 泰勒展开得 $(u_{j+1} - u_j)^2 - h^2((u_x)_j^n)^2 = \mathcal{O}(h^3)$, 将一次项也展开, 上式写为

$$\tau \left((u_x)_j^n + \frac{h}{2}(u_{xx})_j^n \right) (\hat{f}_2)_j^n + \tau \left((u_x)_j^n - \frac{h}{2}(u_{xx})_j^n \right) (\hat{f}_1)_j^n + \frac{\lambda}{2}h^2((u_x)_j^n)^2((\hat{f}_{22})_j^n - (\hat{f}_{11})_j^n) + \mathcal{O}(h^3)$$

从而可知其为

$$\tau(f_x)_j^n + \frac{\tau h}{2}((u_{xx}(\hat{f}_2 - \hat{f}_1)) + (u_x^2(\hat{f}_{22} - \hat{f}_{11})))_j^n + \mathcal{O}(h^3)$$

最终化简得

$$\tau(f_x)_j^n + \frac{\tau h}{2}((u_x(\hat{f}_2 - \hat{f}_1))_x)_j^n + \mathcal{O}(h^3)$$

于是可写出局部截断误差表达式 (省略右侧下标 j 、上标 n , 默认表示 $u = u_j^n$ 处)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{\hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n, u_j^n)}{h} = \frac{\tau}{2}((\lambda^{-1}(\hat{f}_2 - \hat{f}_1) + a^2)u_x)_x + \mathcal{O}(h^2)$$

右侧第一项就是所求的局部截断误差首项。

非零验证: 为证明其的确为首项, 我们还需要证明格式单调时其不可能为 0。由于 u 可任取, 其为 0 当且仅当对任何 u

$$\lambda^{-1}(\hat{f}_2(u, u) - \hat{f}_1(u, u)) + a^2(u) = 0$$

下设 $s = \hat{f}_1(u, u)$ 、 $t = \hat{f}_2(u, u)$ 。利用 $\frac{d\hat{f}(u, u)}{du} = f'(u)$ 可知 $s + t = a(u)$, 此外, 从单调格式对每个分量求导并代入均为 u 的情况可直接推出

$$s \geq 0, \quad t \leq 0, \quad 1 - \lambda(s - t) \geq 0$$

从而 (由符号不同 $|s - t| \geq |s + t|$)

$$a^2(u) - \lambda^{-1}(s - t) \leq (s - t)^2 - \lambda^{-1}(s - t) = \lambda^{-1}(s - t)(\lambda(s - t) - 1) \leq 0$$

若等号成立, 必然 $|s - t| = |s + t|$, 从而 s 或 t 为 0, 且 $\lambda(s - t) = 1$ 。只要 CFL 条件取得稍严格, 让 λ 比临界情况略小, 即不可能有低于一阶的误差。

2. • LF 格式

假设 CFL 条件成立。由 CFL 条件 $\lambda\|f'\|_\infty \leq 1$ 可知

$$\lambda|f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)| \leq |u_{j+1}^n - u_{j-1}^n|$$

于是 (第二个不等号讨论两项结果即得)

$$|u_j^{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_{j+1}^n + u_{j-1}^n| + \frac{1}{2}|u_{j+1}^n - u_{j-1}^n| = \max\{|u_{j+1}^n|, |u_{j-1}^n|\}$$

从而可知 $\|u^n\|_\infty$ 不增, 极大值原理成立。

* 题干里要求不用单调格式, 但其实这里说明 TVD 除了从单调格式证明出发外也没有更好的配凑方法。

对总变差的估计依赖如下引理: 记 $H(a, b) = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{\lambda}{2}(f(a) - f(b))$, 则

$$|H(a, b) - H(c, d)| \leq H(\max(a, c), \max(b, d)) - H(\min(a, c), \min(b, d))$$

由右侧对称性不妨设左侧为正, 则其为

$$\frac{1}{2}(a+b-c-d) - \frac{\lambda}{2}(f(a)-f(b)-f(c)+f(d)) = \frac{1}{2}(a-c) - \frac{\lambda}{2}(f(a)-f(c)) - \frac{1}{2}(b-d) + \frac{\lambda}{2}(f(b)-f(d))$$

直接计算可知当 $s \geq 0$ 时, 由 CFL 条件

$$H(a+s, b) - H(a, b) = \frac{s}{2} - \frac{\lambda}{2}(f(a+s) - f(a)) \geq 0$$

$$H(a, b+s) - H(a, b) = \frac{s}{2} - \frac{\lambda}{2}(f(b) - f(b+s)) \geq 0$$

从而 $H(a, b) \leq H(\max(a, b), \max(c, d))$ 、 $H(c, d) \geq H(\min(a, b), \min(c, d))$, 结论成立。

代入 $a = u_{j-1}^n$ 、 $b = u_{j+1}^n$ 、 $c = u_j^n$ 、 $d = u_{j+2}^n$, 设 $M_j^n = \max(u_{j-1}^n, u_j^n)$ 、 $m_j^n = \min(u_{j-1}^n, u_j^n)$, 可发现

$$|u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}| = |H(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n) - H(u_j^n, u_{j+2}^n)| \leq H(M_j^n, M_{j+2}^n) - H(m_j^n, m_{j+2}^n)$$

由此可知

$$\sum_j |u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}| \leq \sum_j H(M_j^n, M_{j+2}^n) - \sum_j H(m_j^n, m_{j+2}^n)$$

而由于所有项里 $f(M_j^n) - f(M_{j+2}^n)$ 、 $f(m_j^n) - f(m_{j+2}^n)$ 的求和相互抵消 (不妨考虑循环边界), 可得到右侧为

$$\sum_j \frac{M_j^n + M_{j+2}^n - m_j^n - m_{j+2}^n}{2} = \sum_j \frac{|u_j^n - u_{j-1}^n| + |u_{j+2}^n - u_{j+1}^n|}{2} = \sum_j |u_j^n - u_{j-1}^n|$$

这就得到了 TVD 性质。

• 修改后的 LF 格式

考虑加强的 CFL 条件 $\lambda\|f'\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ 。若其不成立, 存在 a, b 使得 $\lambda(f(a) - f(b)) > \frac{1}{2}|a - b|$, 先考虑 u_j^n 在 $j \leq 0$ 时为 a 、 $j > 0$ 时为 b , 则无穷范数为 $\max(|a|, |b|)$, 总变差 $|a - b|$, 而直接计算得

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} a & j \leq -1 \\ \frac{3a+b}{4} - \frac{\lambda}{2}(f(b) - f(a)) & j = 0 \\ \frac{3b+a}{4} - \frac{\lambda}{2}(f(b) - f(a)) & j = 1 \\ b & j \geq 2 \end{cases}$$

若 $\max(|a|, |b|)$ 取到 $|a|$ 且 $a \geq 0$, 则 $\frac{3a+b}{4} + \frac{\lambda}{2}(f(a) - f(b)) > \frac{3a+b}{4} + \frac{|a-b|}{4} \geq a$, 极大值原理不满足, 若取到 $|b|$ 且 $b \geq 0$, 同理考虑 $j = 1$ 可知不满足; 若取到 $|a|$ 且 $a < 0$ 或取到 $|b|$ 且 $b < 0$, 同理设 u_j^n 左侧为 b 、右侧为 a 可得极大值原理不满足。

此外, u_j^{n+1} 的全变差为

$$\left| \frac{b-a}{4} + \frac{\lambda}{2}(f(a) - f(b)) \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{4} + \frac{\lambda}{2}(f(a) - f(b)) \right|$$

无论 $a - b > 0$ 还是 $a - b \leq 0$, 左右两项会有一项大于 $\frac{|a-b|}{2}$, 从而全变差增加。

下面假设 $\lambda \|f'\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ 成立, 此时有 $\lambda |f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)| \leq \frac{1}{2} |u_{j+1}^n - u_{j-1}^n|$, 从而 (第二个不等号是 先从第一项绝对值中拆出 $|u_j^n|/2$)

$$|u_j^{n+1}| \leq \frac{1}{4} |u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n| + \frac{1}{4} |u_{j+1}^n - u_{j-1}^n| \leq \frac{1}{2} |u_j^n| + \frac{1}{2} \max\{|u_{j+1}^n|, |u_{j-1}^n|\}$$

由于右侧总系数为 1 即可得到 $\|u^n\|_\infty$ 不增, 极大值原理成立。

此时完全类似上一种情况可以证明如下引理: 记 $H(a, b) = \frac{1}{4}(a + b) - \frac{\lambda}{2}(f(a) - f(b))$, 则

$$|H(a, b) - H(c, d)| \leq H(\max(a, c), \max(b, d)) - H(\min(a, c), \min(b, d))$$

从而利用 $u_j^{n+1} = \frac{1}{2}u_j^n + H(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)$, 记 $M_j^n = \max(u_{j-1}^n, u_j^n)$ 、 $m_j^n = \min(u_{j-1}^n, u_j^n)$ 有

$$|u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}| \leq H(M_j^n, M_{j+2}^n) - H(m_j^n, m_{j+2}^n) + \frac{1}{2} |u_j^n - u_{j+1}^n|$$

求和后完全类似可知

$$\sum_j |u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}| \leq \sum_j \frac{M_j^n + M_{j+2}^n - m_j^n - m_{j+2}^n}{4} + \sum_j \frac{1}{2} |u_j^n - u_{j+1}^n|$$

而利用边界的循环性, 右侧事实上即为

$$\sum_j \frac{|u_j - u_{j-1}| + |u_{j+2} - u_{j+1}| + 2|u_{j+1} - u_j|}{4} = \sum_j |u_{j+1} - u_j|$$

从而得到 TVD 性。

• 二维 LF 格式

考虑 u 只在单个方向变化时, 此格式即化为修改后的 LF 格式, 从而保持极大值原理至少需要

$$\lambda_x \|f'\|_\infty \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda_y \|g'\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

下证此时成立。

直接拆分可知 $|u_{jk}^{n+1}|$ 不超过

$$\left| \frac{u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n}{4} - \frac{\lambda_x}{2}(f(u_{j+1,k}^n) - f(u_{j-1,k}^n)) \right| + \left| \frac{u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n}{4} - \frac{\lambda_y}{2}(g(u_{j,k+1}^n) - g(u_{j,k-1}^n)) \right|$$

由条件可知

$$|\lambda_x(f(u_{j+1,k}^n) - f(u_{j-1,k}^n))| \leq \frac{1}{2} |u_{j,k-1}^n - u_{j-1,k}^n|, \quad |\lambda_y(g(u_{j,k+1}^n) - g(u_{j,k-1}^n))| \leq \frac{1}{2} |u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n|$$

从而可进一步放为

$$\frac{1}{4} (|u_{j+1,k}^n| + |u_{j-1,k}^n| + |u_{j,k+1}^n| + |u_{j,k-1}^n|)$$

由于系数总和为 1, 这会超过 $\|u^n\|_\infty$, 从而得证极大值原理成立。

- 三维 LF 格式

考虑 u 只在单个方向变化时, 此格式与修改后的 LF 格式形式类似, 只是系数不同, 完全类似可证保持极大值原理至少需要

$$\lambda_x \|f'\|_\infty \leq \frac{1}{3}, \quad \lambda_y \|g'\|_\infty \leq \frac{1}{3}, \quad \lambda_z \|h'\|_\infty \leq \frac{1}{3}$$

此时完全二维时类似拆分放缩可得

$$|u_{jkl}^{n+1}| = \frac{1}{6}(|u_{j+1,k,l}^n| + |u_{j-1,k,l}^n| + |u_{j,k+1,l}^n| + |u_{j,k-1,l}^n| + |u_{j,k,l+1}^n| + |u_{j,k,l-1}^n|)$$

同样由于系数总和为 1 得 $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$, 极大值原理成立。

3. 由讲义 4 已证, 其至少收敛到弱解。下面说明收敛到的解可容许, 我们利用第二个可容许条件, 证明对任何非负的 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, T))$ 有

$$\iint_{t>0} (\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x) dx dt \geq 0$$

将条件两侧除以 τ , 用 u_δ 写为

$$\frac{\eta_\delta(x, t+\tau) - \eta_\delta(x, t)}{\tau} + \frac{\hat{F}_\delta(x + \frac{h}{2}, t) - \hat{F}_\delta(x - \frac{h}{2}, t)}{h} \leq 0$$

这里 $\eta_\delta(x, t) = \eta(u_\delta(x, t))$ 、 $\hat{F}_\delta(x, t) = \hat{F}(u_\delta(x - (l-1)h, t), \dots, u_\delta(x + lh, t))$ 。其乘 $\varphi(x, t)$ 后仍非正, 进一步在 $t > 0$ 区域积分可知

$$\iint_{t>0} \varphi(x, t) \left(\frac{\eta_\delta(x, t+\tau) - \eta_\delta(x, t)}{\tau} + \frac{\hat{F}_\delta(x + \frac{h}{2}, t) - \hat{F}_\delta(x - \frac{h}{2}, t)}{h} \right) dx dt \leq 0$$

作变量代换可得 (省略以 x, t 为自变量的函数自变量)

$$\iint_{t>\tau} \frac{\varphi(x, t-\tau) - \varphi(x, t)}{\tau} \eta_\delta dx dt + \iint_{t>0} \frac{\varphi(x - \frac{h}{2}, t) - \varphi(x + \frac{h}{2}, t)}{h} \hat{F}_\delta dx dt - \frac{1}{\tau} \iint_0^\tau dt \int_{\mathbb{R}} \eta_\delta \varphi dx \leq 0$$

我们假定 η 与 $\hat{F}$ 适当光滑, 则 u_δ 的有界性与收敛性可以导出 η_δ 与 $\hat{F}_\delta$ 收敛到 $\eta(u)$ 与 $q(u)$, 且与积分可交换。又由 φ 的紧支光滑性, 上式取极限得到

$$\iint_{t>0} -\varphi_t \eta(u) dx dt + \iint_{t>0} -\varphi_x q(u) dx dt - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \leq 0$$

利用 φ 在上半平面的紧支性, $\varphi(x, 0) = 0$, 从而最终得到

$$\iint_{t>0} (\varphi_t \eta(u) + \varphi_x q(u)) dx dt \geq 0$$

得证。

4. 我们假定 $\hat{f}$ 、 $\hat{g}$ 、 η 、 $\hat{Q}$ 、 $\hat{\hat{Q}}$ 具有适当的光滑性, 使得自变量几乎处处有界且收敛时它们也能几乎处处有界且收敛 (而 $\hat{f}$ 的光滑性要求比 f 的光滑性要求更强, 其他同理)。

- 弱解

也即要证对任何 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, T))$ 有

$$\iiint_{t>0} (\varphi_t u + \varphi_x f(u) + \varphi_y g(u)) dx dy dt = 0$$

记

$$\hat{f}_\delta(x, y, t) = \hat{f}(u_\delta(x - (l-1)h_x, y, t), \dots, u_\delta(x + lh_x, y, t))$$

$$\hat{g}_\delta(x, y, t) = \hat{g}(u_\delta(x, y - (l-1)h_y, t), \dots, u_\delta(x, y + lh_y, t))$$

条件两侧除以 τ 化为

$$\begin{aligned} \frac{u_\delta(x, y, t + \tau) - u_\delta(x, y, t)}{\tau} &+ \frac{\hat{f}_\delta(x + \frac{h_x}{2}, y, t) - \hat{f}_\delta(x - \frac{h_x}{2}, y, t)}{h_x} \\ &+ \frac{\hat{g}_\delta(x, y + \frac{h_y}{2}, t) - \hat{g}_\delta(x, y - \frac{h_y}{2}, t)}{h_y} = 0 \end{aligned}$$

乘 $\varphi(x, y, t)$ 并在 $t > 0$ 积分, 与一维情况类似换元, 省略以 x, y, t 为自变量的函数自变量得到

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_{t>\tau} \frac{\varphi(x, y, t - \tau) - \varphi(x, y, t)}{\tau} u_\delta dx dy dt - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi u_\delta dx dy \\ &+ \iiint_{t>0} \frac{\varphi(x - \frac{h_x}{2}, y, t) - \varphi(x + \frac{h_x}{2}, y, t)}{h_x} \hat{f}_\delta dx dy dt \\ &+ \iiint_{t>0} \frac{\varphi(x, y - \frac{h_y}{2}, t) - \varphi(x, y + \frac{h_y}{2}, t)}{h_y} \hat{g}_\delta dx dy dt \end{aligned}$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 与一维情况类似, 1、3、4 三项都趋于 φ 为对应导数乘 u 、 g 、 f , 第二项由紧支性可知 $\varphi(x, 0) = 0$, 于是趋于 0, 从而可得

$$0 = \iiint_{t>0} (-\varphi_t u - \varphi_x f(u) - \varphi_y g(u)) dx dy dt$$

即得证。

- 可容许解

也即要证对任何非负的 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, T))$ 有

$$\iiint_{t>0} (\varphi_t \eta(u) + \varphi_x q(u) + \varphi_y \hat{q}(u)) dx dy dt \geq 0$$

记

$$\eta_\delta(x, y, t) = \eta(u_\delta(x, y, t))$$

$$\hat{Q}_\delta(x, y, t) = \hat{Q}(u_\delta(x - (l-1)h_x, y, t), \dots, u_\delta(x + lh_x, y, t))$$

$$\hat{\hat{Q}}_\delta(x, y, t) = \hat{\hat{Q}}(u_\delta(x, y - (l-1)h_y, t), \dots, u_\delta(x, y + lh_y, t))$$

条件两侧除以 τ 化为

$$\begin{aligned} \frac{\eta_\delta(x, y, t + \tau) - \eta_\delta(x, y, t)}{\tau} &+ \frac{\hat{Q}_\delta(x + \frac{h_x}{2}, y, t) - \hat{Q}_\delta(x - \frac{h_x}{2}, y, t)}{h_x} \\ &+ \frac{\hat{\hat{Q}}_\delta(x, y + \frac{h_y}{2}, t) - \hat{\hat{Q}}_\delta(x, y - \frac{h_y}{2}, t)}{h_y} \leq 0 \end{aligned}$$

乘 $\varphi(x, y, t)$ 并在 $t > 0$ 积分, 与一维情况类似换元, 省略以 x, y, t 为自变量的函数自变量得到

$$\begin{aligned} 0 &\geq \iiint_{t>\tau} \frac{\varphi(x, y, t - \tau) - \varphi(x, y, t)}{\tau} \eta_\delta dx dy dt - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi \eta_\delta dx dy \\ &+ \iiint_{t>0} \frac{\varphi(x - \frac{h_x}{2}, y, t) - \varphi(x + \frac{h_x}{2}, y, t)}{h_x} \hat{Q}_\delta dx dy dt \\ &+ \iiint_{t>0} \frac{\varphi(x, y - \frac{h_y}{2}, t) - \varphi(x, y + \frac{h_y}{2}, t)}{h_y} \hat{\hat{Q}}_\delta dx dy dt \end{aligned}$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 与一维情况类似, 1、3、4 三项都趋于 φ 为对应导数乘 η 、 q 、 $\hat{q}$, 第二项由紧支性可知 $\varphi(x, 0) = 0$, 于是趋于 0, 从而可得, 从而可得

$$0 \geq \iiint_{t>0} (-\varphi_t \eta(u) - \varphi_x q(u) - \varphi_y \hat{q}(u)) dx dy dt$$

即得证。

5. • 单调格式

单调当且仅当右侧对 $u_{j-1,k}^n$ 、 $u_{j+1,k}^n$ 、 $u_{j,k-1}^n$ 、 $u_{j,k+1}^n$ 、 u_{jk}^n 求导均非负, 记 $\hat{f}_{1,2}$ 、 $\hat{g}_{1,2}$ 为 $\hat{f}$ 、 $\hat{g}$ 对两个分量的求导结果, 也即得到当且仅当

$$\hat{f}_1 \geq 0, \quad \hat{f}_2 \leq 0, \quad \hat{g}_1 \geq 0, \quad \hat{g}_2 \leq 0$$

$$\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, \quad 1 - \lambda_x(\hat{f}_1(a, b) - \hat{f}_2(c, a)) - \lambda_y(\hat{g}_1(a, d) - \hat{g}_2(e, a)) \geq 0$$

• 局部极值原理

若 $\hat{f}_1 < 0$, 考虑 $u_{jk}^n = u_{j+1,k}^n = u_{j,k-1}^n = u_{j,k+1}^n = x$, $u_{j-1,k}^n = x + \delta$, 则可知 δ 充分小时 $u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n$ 符号与 δ 相反, 局部极值原理不满足。同理, 当 $\hat{f}_2 > 0$ 时考虑 $u_{j+1,k}^n$ 扰动, 当 $\hat{g}_1 < 0$ 时考虑 $u_{j,k-1}^n$ 扰动, 当 $\hat{g}_2 > 0$ 时考虑 $u_{j,k+1}^n$ 扰动, 可得局部极值原理不满足。

由此, 局部极值原理满足至少需要

$$\hat{f}_1 \geq 0, \quad \hat{f}_2 \leq 0, \quad \hat{g}_1 \geq 0, \quad \hat{g}_2 \leq 0$$

此时若 u_{jk}^n 是最小值, 可得到 $u_{jk}^{n+1} \geq u_{jk}^n$; 若 u_{jk}^n 是最大值, 可得到 $u_{jk}^{n+1} \leq u_{jk}^n$, 此时极值原理可成立。接下来考虑其他为最值的情况。我们记 u_{jk}^n 、 $u_{j+1,k}^n$ 、 $u_{j-1,k}^n$ 、 $u_{j,k+1}^n$ 、 $u_{j,k-1}^n$ 为 a 、 b 、 c 、 d 、 e , 分析其他元素取最值的情况。若局部极值原理满足, 考虑 $b = \min(a, b, c, d, e)$ 时应有

$$a - \lambda_x(\hat{f}(a, b) - \hat{f}(c, a)) - \lambda_y(\hat{g}(a, d) - \hat{g}(e, a)) \geq b$$

由于已知 $\hat{f}_1$ 、 $\hat{f}_2$ 、 $\hat{g}_1$ 、 $\hat{g}_2$ 的符号, 可发现一定 $d = e = c = b$ 时可能取到最小, 从而只需 $b \leq a$ 时

$$a - \lambda_x(\hat{f}(a, b) - \hat{f}(b, a)) - \lambda_y(\hat{g}(a, b) - \hat{g}(b, a)) \geq b$$

记

$$F(a, b) = a - b - \lambda_x(\hat{f}(a, b) - \hat{f}(b, a)) - \lambda_y(\hat{g}(a, b) - \hat{g}(b, a))$$

可发现 $F(a, b) = -F(b, a)$, $F(a, a) = 0$ 。条件等价于 $a - b \geq 0$ 时 $F(a, b) \geq 0$, 同理论 b 为最大时即 $a - b \leq 0$ 时 $F(a, b) \leq 0$, 这由于 $F(a, b) = -F(b, a)$ 与前一种情况等价。此外, 对 c 、 d 、 e 讨论结果完全相同, 由此局部极值原理在 $\hat{f}_1$ 、 $\hat{f}_2$ 、 $\hat{g}_1$ 、 $\hat{g}_2$ 符号固定时等价于

$$\forall a \geq b \in \mathbb{R}, \quad F(a, b) \geq 0$$

* 单调等价于 $F_1(a, b) \geq 0$, 从而结合 $F(a, a) = 0$ 自然有结论成立。不过, 从保持局部极值原理无法推出单调。

8 第九周

8.1 书面作业

1. 直接展开可知对真解有

$$u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n) = \tau(u_t)_j^h + \mathcal{O}(\tau^2) = \tau(f_x)_j^n + \mathcal{O}(\tau^2)$$

由此, 其在空间方向有 $2m$ 阶精度相当于 (省略上标 n , 此分析与具体时间点无关)

$$\frac{\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}}{h} - (f_x)_j = \mathcal{O}(h^{2m})$$

由平移不变性, 为方便我们不妨设 $j = 0$, 并记 $\phi(x) = u(x, t^n)$ 、 $F(x) = f(\phi(x))$, 则上式改写为 (这里假设格式中 $j \pm \frac{1}{2}$ 处的值是充分高阶的近似, 上标代表求导阶数)

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{2k} h^{2k} (F^{(2k)}(h/2) - F^{(2k)}(-h/2)) - hF'(0) = \mathcal{O}(h^{2m+1})$$

我们记 $b_k = F^{(k)}(0)$, 有

$$F(h/2) = \sum_{k=0}^{2m} \frac{h^k}{2^k k!} b_k + \mathcal{O}(h^{2m+1})$$

从而考虑求导并拆分可知

$$\begin{aligned} h^{2k} F^{(2k)}(h/2) &= \sum_{s=k}^m \frac{h^{2s}}{2^{2s-2k} (2s-2k)!} b_{2s} + \sum_{s=k}^{m-1} \frac{h^{2s+1}}{2^{2s+1-2k} (2s+1-2k)!} b_{2s+1} + \mathcal{O}(h^{2m+1}) \\ h^{2k} F^{(2k)}(-h/2) &= \sum_{s=k}^m \frac{h^{2s}}{2^{2s-2k} (2s-2k)!} b_{2s} - \sum_{s=k}^{m-1} \frac{h^{2s+1}}{2^{2s+1-2k} (2s+1-2k)!} b_{2s+1} + \mathcal{O}(h^{2m+1}) \end{aligned}$$

由此可知

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{2k} \sum_{s=k}^{m-1} \frac{h^{2s+1}}{2^{2s-2k} (2s+1-2k)!} b_{2s+1} - hb_1 = \mathcal{O}(h^{2m+1})$$

按照 h 的次方整理可得

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ \sum_{k=0}^s a_{2k} \frac{1}{2^{2s-2k} (2s+1-2k)!} &= 0, \quad s = 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

由于这是一个下三角线性方程组, 且对角元非零, 一定存在解 $a_0, \dots, a_{2m-2}$ 。利用计算机可以解得

$$a_2 = -\frac{1}{24}, \quad a_4 = \frac{7}{5760}, \quad a_6 = -\frac{31}{967680}, \quad a_8 = \frac{127}{154828800}$$

2. 设此格式为

$$u_j^{n+1} = \sum_{s=-l}^l \alpha_s u_{j+s}^n$$

证明分为三个部分:

- 相容性条件

方便起见 $h = \mathcal{O}(\tau)$ 。左减右除以 τ 后代入真解, 可知

$$\frac{1}{\tau} \left(u(x, t + \tau) - \sum_{s=-l}^l \alpha_s u(x + sh, t) \right) = \mathcal{O}(\tau)$$

两侧同乘 τ , 展开到二阶并代入 $u_t + au_x = 0$ 可得

$$u(x, t) - \tau au_x(x, t) - \sum_{s=-l}^l \alpha_s (u(x, t) + shu_x(x, t)) = \mathcal{O}(\tau^2)$$

由此可知

$$\sum_{s=-l}^l \alpha_s = 1, \quad \sum_{s=-l}^l s\alpha_s = -\frac{\tau a}{h}$$

- 线性保单调格式为单调格式

由其保单调, 代入 u_j^n 当 $j \leq 0$ 时为 0, $j > 0$ 时为 1, 则得到的 u_j^{n+1} 应单调增。

利用所有 α_s 求和为 1, 直接计算可发现

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} 0 & j \leq -l \\ \sum_{s=-j+1}^l \alpha_s & -l < j \leq l \\ 1 & j > l \end{cases}$$

由此由其单调增, 两两作差可发现所有 α_s 均非负, 对右侧每个 u_{j+s}^n 求导可发现这即符合单调格式定义。

- 单调格式至多只有一阶精度

在相容性条件计算的基础上, 若其有二阶精度, 利用 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 可得到二阶项

$$\frac{\tau^2}{2} a^2 u_{xx}(x, t) - \sum_{s=-l}^l \alpha_s \frac{s^2 h^2}{2} u_{xx}(x, t) = 0$$

从而若其有二阶精度应满足

$$\sum_{s=-l}^l s^2 \alpha_s = \frac{\tau^2 a^2}{h^2}$$

但是, 由单调性, $\alpha_s \geq 0$, 利用 Cauchy 不等式有

$$\frac{\tau^2 a^2}{h^2} = \sum_{s=-l}^l s^2 \alpha_s \sum_{s=-l}^l \alpha_s \geq \left(\sum_{s=-l}^l \sqrt{s^2 \alpha_s \cdot \alpha_s} \right)^2 = \left(\sum_{s=-l}^l |s \alpha_s| \right)^2 \geq \left(\sum_{s=-l}^l s \alpha_s \right)^2 = \frac{\tau^2 a^2}{h^2}$$

利用 Cauchy 不等式与绝对值的取等条件, 可知 α_s 只在 $s \geq 0$ 或 $s \leq 0$ 时非零, 且 $s^2 \alpha_s$ 与 α_s 成正比。由此, 必然只有一个 α_s 非零, 此时的格式相当于 CFL 数为整数时每个时间步长精确传播整数个网格的格式, 无实际意义。由此, 对于可以实际应用的线性单调格式, 不可能具有二阶精度。

3. 直接计算

$$\frac{d}{dt}(u_j - u_{j-1}) = \sum_{q=-Q}^{Q-1} C_q(j)(u_{j-q} - u_{j-q-1}) - \sum_{q=-Q}^{Q-1} C_q(j-1)(u_{j-q-1} - u_{j-q-2})$$

记 $v_j = u_j - u_{j-1}$, 整理得

$$\frac{d}{dt} v_j = \sum_{q=-Q}^Q (C_q(j) - C_{q-1}(j-1)) v_{j-q}$$

这里假定 $C_{-Q-1}(j) = C_Q(j) = 0$ 恒成立。

记

$$S_{v_j}(x) = \begin{cases} |x| & v_j = 0 \\ x & v_j > 0 \\ -x & v_j < 0 \end{cases}$$

考虑 t 充分小时向前推进, 可得 (上标 R 指右导数)

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^R \sum_j |v_j| = \sum_j S_{v_j} \left(\sum_{q=-Q}^Q (C_q(j) - C_{q-1}(j-1)) v_{j-q} \right)$$

由此 TVD 当且仅当右侧不超过 0 对任何 v_j 成立。记 $D_q(j) = C_q(j) - C_{q-1}(j-1)$, 进一步化为

$$\sum_j S_{v_j} \left(\sum_{q=-Q}^Q D_q(j) v_{j-q} \right) \leq 0$$

考虑所有 v_j 中仅有一个非 0 的情况, 直接计算可知此时得到

$$\forall j, \quad D_0(j) + \sum_{q \neq 0} |D_q(j+q)| \leq 0$$

而利用 D 的定义与 $C_{-Q-1}(j) = C_Q(j) = 0$ 的规定有

$$\sum_{q=-Q}^Q D_q(j+q) = 0$$

由此上式成立当且仅当 $q \neq 0$ 时所有 $D_q(j) \geq 0$, 化为 C 的要求也即得到条件

$$C_{-1}(j-1) \geq C_{-2}(j-1) \geq \cdots \geq C_{-Q}(j-Q) \geq 0$$

$$-C_0(j) \geq -C_1(j+1) \geq \cdots \geq -C_Q(j+Q) \geq 0$$

下面证明此条件已经足够说明 TVD。

由所有 $D_q(j+q)$ 对 q 求和为 0, 我们将需要证明的式子写成

$$\sum_j S_{v_j} \left(\sum_{q \neq 0} (D_q(j) v_{j-q} - D_q(j+q) v_j) \right) \leq 0$$

当所有 v_j 都非零时, S_{v_j} 线性, 可知上式化为 (由 $S_{v_{j+q}}$ 定义其不会超过绝对值, 且 $D_q(j+q) \geq 0$)

$$\sum_j \sum_{q \neq 0} (D_q(j) S_{v_j}(v_{j-q}) - D_q(j+q) |v_j|) = \sum_j \sum_{q \neq 0} D_q(j+q) (S_{v_{j+q}}(v_j) - |v_j|) \leq 0$$

而 v_j 为 0 时, 其 S_{v_j} 等于从大于 0 或小于 0 某一侧逼近的结果, 考虑对应方向取极限可知结论仍然成立。

4. 将格式改写为

$$\begin{aligned} & u_j^{n+1} - \eta(C_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - D_{j-\frac{1}{2}}(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})) \\ &= u_j^n + (1-\eta)(C_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^n - u_j^n) - D_{j-\frac{1}{2}}(u_j^n - u_{j-1}^n)) \end{aligned}$$

记 $v_j^n = u_j^n - u_{j-1}^n$, 改写为

$$\begin{aligned} & v_j^{n+1} - \eta(C_{j+\frac{1}{2}}v_{j+1}^{n+1} - D_{j-\frac{1}{2}}v_j^{n+1} - C_{j-\frac{1}{2}}v_j^{n+1} + D_{j-\frac{3}{2}}v_{j-1}^{n+1}) \\ &= v_j^n + (1-\eta)(C_{j+\frac{1}{2}}v_{j+1}^n - D_{j-\frac{1}{2}}v_j^n - C_{j-\frac{1}{2}}v_j^n + D_{j-\frac{3}{2}}v_{j-1}^n) \end{aligned}$$

设等式两侧均为 w_j^n , 我们证明

$$\|v^{n+1}\|_1 \leq \|w^n\|_1 \leq \|v^n\|_1$$

即可得到 TVD 性质。

首先, 由于

$$w_j^n = (1 - (1 - \eta)(C_{j-\frac{1}{2}} + D_{j-\frac{1}{2}}))v_j^n + (1 - \eta)C_{j+\frac{1}{2}}v_{j+1}^n + (1 - \eta)D_{j-\frac{3}{2}}v_{j-1}^n$$

由条件上方三个系数均非负, 从而

$$\|w^n\|_1 \leq \sum_j (1 - (1 - \eta)(C_{j-\frac{1}{2}} + D_{j-\frac{1}{2}}))(|v_j^n| + (1 - \eta)C_{j+\frac{1}{2}}|v_{j+1}^n| + (1 - \eta)D_{j-\frac{3}{2}}|v_{j-1}^n|)$$

按照 $|v_j^n|$ 求和整理可发现右侧恰好为 $\|v^n\|_1$ 。

另一方面, 由于

$$w_j^n = (1 + \eta(C_{j-\frac{1}{2}} + D_{j-\frac{1}{2}}))v_j^n - \eta C_{j+\frac{1}{2}}v_{j+1}^n - \eta D_{j-\frac{3}{2}}v_{j-1}^n$$

由条件第一个系数为正, 后两个为负, 从而利用 $|x - y - z| \geq |x - y| - |z| \geq |x| - |y| - |z|$ 可知

$$|w_j^n| \geq (1 + \eta(C_{j-\frac{1}{2}} + D_{j-\frac{1}{2}}))|v_j^n| - \eta C_{j+\frac{1}{2}}|v_{j+1}^n| - \eta D_{j-\frac{3}{2}}|v_{j-1}^n|$$

同样按照 $|v_j^n|$ 求和整理可发现这即是 $\|w^n\|_1 \geq \|v^{n+1}\|_1$ 。

综合以上两部分得证。

5. • 相容性

将其改写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = -\frac{a}{2h}(s_j^n - s_{j-1}^n)$$

对真解 $u(x, t)$, 有 $s(x, t) = \minmod(u(x + h, t) - u(x, t), u(x, t) - u(x - h, t))$, 于是 (这里 sign 为符号函数, 0 的符号为 0)

$$s(x, t) = hu_x(x, t) - \frac{1}{2}h^2 \text{sign}(u_x(x, t))|u_{xx}(x, t)| + \mathcal{O}(h^3)$$

于是 (x^- 代表左极限)

$$\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{h} = hu_{xx}(x, t) - \frac{1}{2}h(\text{sign}(u_x(x, t)) - \text{sign}(u_x(x^-, t)))|u_{xx}(x, t)| + \mathcal{O}(h^2)$$

将左侧用真解代入, 展开到二阶可发现其为

$$\frac{1}{2}(\tau a^2 - ha)u_{xx} + \mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$$

由于右侧展开式无 τ , 两者不可能消去, 从而其有一阶时空相容性。

• TVD

记 $v_j^n = u_j^n - u_{j-1}^n$, 计算有

$$v_j^{n+1} = (1 - a\lambda)v_j^n + a\lambda v_{j-1}^n - \frac{a\lambda}{2}(\minmod(v_{j+1}^n, v_j^n) - 2\minmod(v_j^n, v_{j-1}^n) + \minmod(v_{j-1}^n, v_{j-2}^n))$$

考虑 $v_0^n = v_1^n = 1$, 其余 v_j^n 全为 0 的情况, 计算可发现 v^{n+1} 中可能非零的元素为

$$v_0^{n+1} = 1 - \frac{3}{2}a\lambda, \quad v_1^{n+1} = 1 + a\lambda, \quad v_2^{n+1} = \frac{1}{2}a\lambda$$

又由于 $a\lambda > 0$, 可发现 $\|v^{n+1}\|_1 \leq \|v^n\|_1 = 2$ 当且仅当 $a\lambda \leq \frac{2}{3}$ 。

下面证明 $a\lambda \leq \frac{2}{3}$ 时具有 TVD 性质。利用 $s_j^n = \minmod(v_{j+1}^n, v_j^n)$, 先写成

$$|v_j^{n+1}| \leq \left| (1 - a\lambda)v_j^n - \frac{a\lambda}{2}s_j^n \right| + \left| a\lambda v_{j-1}^n - \frac{a\lambda}{2}s_{j-2}^n \right| + a\lambda |s_{j-1}^n|$$

此时, 利用 $\minmod$ 函数的性质, $-\frac{a\lambda}{2}s_j^n$ 符号必然与 $(1 - a\lambda)v_j^n$ 相反, 且绝对值不会超过后者, 对 $a\lambda v_{j-1}^n$ 与 $-\frac{a\lambda}{2}s_{j-2}^n$ 同理, 从而可以写成

$$|v_j^{n+1}| \leq (1 - a\lambda)|v_j^n| - \frac{a\lambda}{2}|s_j^n| + a\lambda|v_{j-1}^n| - \frac{a\lambda}{2}|s_{j-2}^n| + a\lambda|s_{j-1}^n|$$

右侧求和后, 所有 $|s_j^n|$ 项抵消, 所有 $|v_j^n|$ 合成为 $\|v^n\|_1$, 即得证 TVD。

8.2 实验报告

8.2.1 格式实现

考虑线性常系数对流方程

$$u_t + au_x = 0$$

且 $a > 0$ 。为了方便讨论，我们假设 $a = 1$ 。

我们记空间步长 h ，时间步长 τ ，网比 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ ，实现的格式为

$$u_{j+1}^n = u_j^n - a\lambda((u_j^n + 0.5s_j^n) - (u_{j-1}^n + 0.5s_{j-1}^n)), \quad s_j^n = \minmod(u_{j+1}^n - u_j^n, u_j^n - u_{j-1}^n)$$

这里 $\minmod(a, b)$ 在 a, b 异号时取 0，否则取模长较小数。

由于需要实现周期与非周期两个版本，实际实现时先以周期边界条件算出所有 s_j^n 、 $u_j^n + 0.5s_j^n$ 与 $(u_j^n + 0.5s_j^n) - (u_{j-1}^n + 0.5s_{j-1}^n)$ 。当假设周期边界条件时，对所有 u_j^n 以上述差值进行更新，否则对于前两个、最后一个之外的 u_j^n 进行更新。

8.2.2 结果展示

我们首先检测格式的精度，由于格式对时间为一阶精度，我们固定 τ 充分小，并不断降低 h 以测试空间精度。对于 $[0, 2\pi]$ 上以 $\sin(x)$ 作为初值的周期边界情况与 $[-1, 2]$ 上以 $I_{[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]}(x)$ (这里 I 为示性函数，区间内为 1 区间外为 0) 作为初值的非周期边界情况，分别模拟到 $T = 1$ 时，并与真解对比，可得误差曲线如图 15 (由于离散情况无穷范数误差不再有意义，未作出无穷范数误差曲线)。

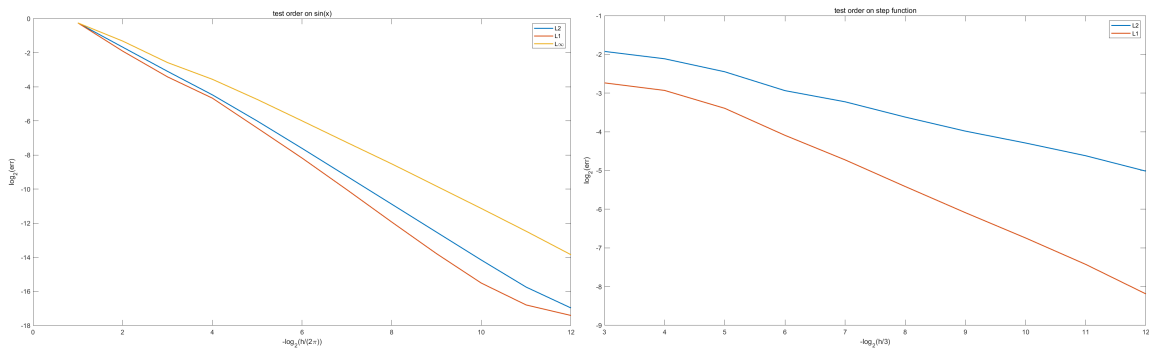


图 15: 离散与连续情况误差曲线

忽略部分由于 τ 精度不足引起的掉阶情况，在合适的区间估算误差，可得到收敛阶如下表：

表 2: minmod 迭代收敛阶表		
误差范数	连续情况	离散情况
L_1	1.8164	0.6743
L_2	1.6031	0.3835
L_∞	1.2402	-

可以发现，初值不连续的确导致了收敛阶大幅下降，而对于较好光滑性的例子，此格式确实表现出了近二阶的空间收敛性。

接下来考虑两个算例：算例 1 指非周期情况 (区间视 t 进行取值以保证扰动几乎未传播到边界)，且初值为波包

$$u(x, 0) = e^{-100(x-0.5)^2} \sin(80x)$$

算例 2 指具有周期边界条件的区间 $[-1, 1]$ ，且初值高度不连续

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\xi \sin(1.5\pi\xi^2) & -1 \leq \xi < -1/3 \\ |\sin(2\pi\xi)| & |\xi| < 1/3 \\ 2\xi - 1 - \sin(3\pi\xi)/6 & 1/3 < \xi \leq 1 \end{cases}, \quad \xi = \begin{cases} x - 0.3 & x \in [-0.7, 1] \\ x + 1.7 & x \in [-1, -0.7) \end{cases}$$

对这两个算例分别取 $h = \frac{1}{2}00$ 、 $h = \frac{1}{2}50$ ，并取定 $\tau = 0.6h$ (经实际检验，更大的 CFL 数会导致数值不稳定出现) 的迭代结果如图 16，其中第一张图已经进行了适当的平移，只考察波的中心附近的位置。

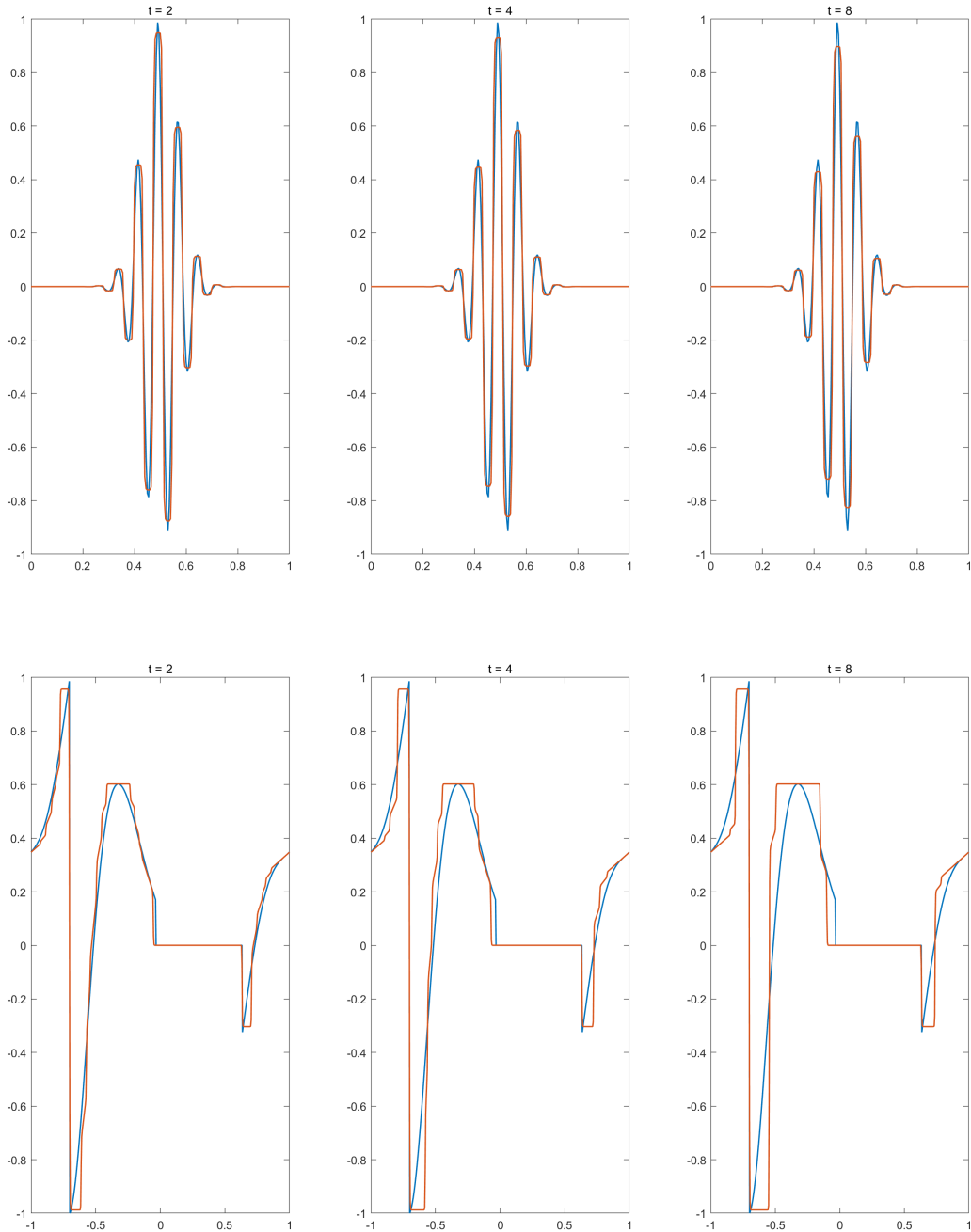


图 16: 一般算例测试效果

将黄线数值解与蓝线真解对比，即能看出格式的精度下降主要出现在极值点处，这是由于 minmod 限制器直接抹平极值点附近的值。

9 第十周

9.1 书面作业

1. 由于在讲义中已经分析得到 $\varphi = 1$ 时格式即相当于二阶格式，一定有时空二阶精度，而 4.13 的一般格式相当于对此数值通量与 LW 数值通量进行了组合，因此只需再考虑 $\varphi = 0$ 的极端情况是否具有二阶精度，也即只要分析此 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 直接作为数值通量的格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

是否具有二阶精度即可得到原格式是否具有二阶精度。将格式写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)) + \frac{\lambda}{2}(q_{j+\frac{1}{2}}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) - q_{j-\frac{1}{2}}^n(u_j^n - u_{j-1}^n))$$

为分析精度，进一步改写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2h} = \frac{1}{2h}(q_{j+\frac{1}{2}}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) - q_{j-\frac{1}{2}}^n(u_j^n - u_{j-1}^n))$$

- (1) 若其为二阶格式，将真解 u 在 u_j^n 处展开至二阶， f 也同理展开，可得

$$\frac{\tau}{2}\partial_x(a^2 u_x) + \mathcal{O}(\tau^2 + h^2) = \frac{1}{2h}(q_{j+\frac{1}{2}}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) - q_{j-\frac{1}{2}}^n(u_j^n - u_{j-1}^n))$$

两边同乘 2，进一步展开右侧至二阶可得

$$\tau\partial_x(a^2(u_j^n)) + \mathcal{O}(\tau^2 + h^2) = q_{j+\frac{1}{2}}^n(u_x)_{j+\frac{1}{2}}^n - q_{j-\frac{1}{2}}^n(u_x)_{j-\frac{1}{2}}^n$$

将左侧也用中心差商改写可得

$$\lambda((a^2(u_{j+\frac{1}{2}}^n) - q_{j+\frac{1}{2}}^n)(u_x)_{j+\frac{1}{2}}^n - (a^2(u_{j-\frac{1}{2}}^n) - q_{j-\frac{1}{2}}^n)(u_x)_{j-\frac{1}{2}}^n) = \mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$$

若 q 为常数，假设其为正可构造 a 、 u 使得 $q_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}a^2(u_{j+\frac{1}{2}}^n)$ 对所有 j 成立，这样上方最终的误差首项也即 $\frac{\tau}{4}\partial_x(a^2 u_x)$ ，为一阶，不可能保证二阶。 q 为负时类似。

- (2) 根据上方讨论，当 $q_{j+\frac{1}{2}}^n = \lambda a^2(u_{j+\frac{1}{2}}^n)$ 时即为二阶格式，事实上此时即为 LW 格式。

2. 记 $s_j^n = hS_j^n$ ，将迭代展开写为 (这里 s_j^n 作为示意，之后的条件将带上 s_j^n)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2) - \hat{f}(u_{j-1}^n + s_{j-1}^n/2, u_j^n - s_j^n/2))$$

$$s_j^n = \min\text{mod}(u_{j+1}^n - u_j^n, u_j^n - u_{j-1}^n)$$

- TVD

进一步改写迭代为 (这里分母若为 0 可以极限定义，从而只要非零的情况讨论完成为 0 时也由极限性质可得)

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) - D_{j-\frac{1}{2}}^n(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ C_{j+\frac{1}{2}}^n &= -\lambda \frac{\hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2) - \hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_j^n - s_j^n/2)}{u_{j+1}^n - u_j^n} \\ D_{j-\frac{1}{2}}^n &= \lambda \frac{\hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_j^n - s_j^n/2) - \hat{f}(u_{j-1}^n + s_{j-1}^n/2, u_j^n - s_j^n/2)}{u_j^n - u_{j-1}^n} \end{aligned}$$

需要 $C_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0$ 、 $D_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0$ 且 $1 - C_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0$ 才能保证 TVD，我们逐个条件研究。

为使第一个条件成立, 也即分子分母须异号, 再由 $\hat{f}$ 对第二个分量非增可知须 $u_{j+1}^n > u_j^n$ 时 $u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2 \geq u_j^n - s_j^n/2$ 、 $u_{j+1}^n < u_j^n$ 时 $u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2 \leq u_j^n - s_j^n/2$, 计算发现两者可以合并写成

$$\frac{s_{j+1}^n - s_j^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} \leq 2$$

为使第二个条件成立, 也即分子分母须同号, 再由 $\hat{f}$ 对第一个分量非减可知须 $u_j^n > u_{j-1}^n$ 时 $u_j^n + s_j^n/2 \geq u_{j-1}^n + s_{j-1}^n/2$ 、 $u_j^n < u_{j-1}^n$ 时 $u_j^n + s_j^n/2 \leq u_{j-1}^n + s_{j-1}^n/2$, 计算发现两者可以合并写成

$$\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{u_j^n - u_{j-1}^n} \geq -2$$

以上两条件可以合并写为对任何 j, n 有

$$\left| \frac{\Delta_x^+ S_j^n}{\Delta_x^+ u_j^n} \right| \leq \frac{2}{h}$$

下面假设此条件成立, 考虑第三个条件, 直接计算可知 $1 - C_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j+\frac{1}{2}}^n$ 为

$$1 + \lambda \frac{2\hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2) - \hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_j^n - s_j^n/2) - \hat{f}(u_{j+1}^n + s_{j+1}^n/2, u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2)}{u_{j+1}^n - u_j^n}$$

由于之前两条件合并的结果意味着 $s_{j+1}^n - s_j^n$ 可被分母控制, 从而当

$$2 \max\{\|\hat{f}_1\|_\infty, \|\hat{f}_2\|_\infty\} \tau \leq h$$

时即有

$$|\hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2) - \hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_j^n - s_j^n/2)| \leq |u_{j+1}^n - u_j^n| \frac{1}{2\lambda}$$

$$|\hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2) - \hat{f}(u_{j+1}^n + s_{j+1}^n/2, u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2)| \leq |u_{j+1}^n - u_j^n| \frac{1}{2\lambda}$$

结合符号即得第三个条件成立。

综合以上, 只要

$$\left| \frac{\Delta_x^+ S_j^n}{\Delta_x^+ u_j^n} \right| \leq \frac{2}{h}$$

即可在合适的 CFL 条件下具有 TVD 性质。对于 minmod 限制器, 讨论可发现此条件是必然成立的, 从而一定在合适 CFL 条件下具有 TVD 性质。

- 局部极值原理

若

$$\left| \frac{\Delta_x^+ S_j^n}{\Delta_x^+ u_j^n} \right| \leq \frac{2}{h}$$

在与 TVD 条件相同按 $2 \max\{\|\hat{f}_1\|_\infty, \|\hat{f}_2\|_\infty\} \tau \leq h$ 构造 τ 时, 完全类似可发现

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n = -\lambda \frac{\hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_{j+1}^n - s_{j+1}^n/2) - \hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_j^n - s_j^n/2)}{u_{j+1}^n - u_j^n} \leq \frac{1}{2}$$

$$D_{j-\frac{1}{2}}^n = \lambda \frac{\hat{f}(u_j^n + s_j^n/2, u_j^n - s_j^n/2) - \hat{f}(u_{j-1}^n + s_{j-1}^n/2, u_j^n - s_j^n/2)}{u_j^n - u_{j-1}^n} \leq \frac{1}{2}$$

于是再利用

$$u_j^{n+1} = (1 - C_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j-\frac{1}{2}}^n)u_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n u_{j+1}^n + D_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-1}^n$$

可知 u_j^{n+1} 是 u_j^n 、 u_{j+1}^n 、 u_{j-1}^n 系数均为正且系数总和为 1 的线性组合，直接放缩可知

$$\min\{u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\} \leq u_j^{n+1} \leq \max\{u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\}$$

于是局部极值原理成立。由此，只要

$$\left| \frac{\Delta_x^+ S_j^n}{\Delta_x^+ u_j^n} \right| \leq \frac{2}{h}$$

即可在合适的 CFL 条件下具有局部极值原理。对于 minmod 限制器，同理一定在合适 CFL 条件下具有局部极值原理。

3. 收敛阶

我们下面证明它在 u 充分光滑， $S_{jk}^x = (u_x)_{jk} + \mathcal{O}(h_x)$ 、 $S_{jk}^y = (u_y)_{jk} + \mathcal{O}(h_y)$ ，且 $S_{jk}^{x,y}$ 充分光滑 (如对 minmod 限制器，不在 u_x 或 u_y 为 0 处) 时具有空间二阶精度。

由于真解满足

$$u(x_{jk}, t^{n+1}) = u_{jk}^n - \tau(f_x)_{jk}^n - \tau(g_y)_{jk}^n + \mathcal{O}(\tau)$$

要证明空间二阶只需证明 (省略时间上标 n 与代表 y 方向位置的下标 k ，二者在讨论 x 方向时不会变化)

$$\frac{\hat{f}(u_j + \frac{h_x}{2} S_j^x, u_{j+1} - \frac{h_x}{2} S_{j+1}^x) - \hat{f}(u_{j-1} + \frac{h_x}{2} S_{j-1}^x, u_j - \frac{h_x}{2} S_j^x)}{h_x} = (f_x)_j + \mathcal{O}(h_x^2)$$

对 y 方向完全同理。

由于

$$\frac{f(u_{j+\frac{1}{2}}) - f(u_{j-\frac{1}{2}})}{h_x} = (f_x)_j + \mathcal{O}(h_x^2)$$

我们将原式左侧第一项在 $f(u_{j+\frac{1}{2}}) = \hat{f}(u_{j+\frac{1}{2}}, u_{j+\frac{1}{2}})$ 处展开可发现 ($\hat{f}_{1,2}$ 表示 $\hat{f}$ 对两个分量的导数)

$$\begin{aligned} & \hat{f}\left(u_j + \frac{h_x}{2} S_j^x, u_{j+1} - \frac{h_x}{2} S_{j+1}^x\right) \\ &= f(u_{j+\frac{1}{2}}) + (u_j - u_{j+\frac{1}{2}} + h_x S_j^x/2) \hat{f}_1(u_{j+\frac{1}{2}}) + (u_{j+1} - u_{j+\frac{1}{2}} - h_x S_{j+1}^x/2) \hat{f}_2(u_{j+\frac{1}{2}}) \\ & \quad + \frac{1}{2}(u_j - u_{j+\frac{1}{2}} + h_x S_j^x/2)^2 \hat{f}_{11}(u_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_{j+\frac{1}{2}} - h_x S_{j+1}^x/2)^2 \hat{f}_{22}(u_{j+\frac{1}{2}}) \\ & \quad + (u_j - u_{j+\frac{1}{2}} + h_x S_j^x/2)(u_{j+1} - u_{j+\frac{1}{2}} - h_x S_{j+1}^x/2) \hat{f}_{12}(u_{j+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(h_x^3) \end{aligned}$$

可以发现

$$u_j - u_{j+\frac{1}{2}} = \frac{h_x}{2} (u_x)_j + \mathcal{O}(h_x^2)$$

由此事实上有

$$u_j - u_{j+\frac{1}{2}} + h_x \frac{S_j^x}{2} = \mathcal{O}(h_x^2), \quad u_{j+1} - u_{j+\frac{1}{2}} - h_x \frac{S_{j+1}^x}{2} = \mathcal{O}(h_x^2)$$

更进一步， $\hat{f}_1(u_{j+\frac{1}{2}}) = \hat{f}_1(u_j) + \mathcal{O}(h_x)$ ，于是有

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{f}(u_j + \frac{h_x}{2} S_j^x, u_{j+1} - \frac{h_x}{2} S_{j+1}^x) - \hat{f}(u_{j-1} + \frac{h_x}{2} S_{j-1}^x, u_j - \frac{h_x}{2} S_j^x)}{h_x} - (f_x)_j \\ &= \frac{(u_j - u_{j+\frac{1}{2}} + h_x S_j^x/2 - u_{j-1} + u_{j-\frac{1}{2}} - h_x S_{j-1}^x/2) \hat{f}_1(u_j)}{h_x} \\ & \quad + \frac{(u_{j+1} - u_{j+\frac{1}{2}} - h_x S_{j+1}^x/2 - u_j + u_{j-\frac{1}{2}} + h_x S_j^x/2) \hat{f}_2(u_j)}{h_x} + \mathcal{O}(h_x^2) \end{aligned}$$

若 S^x 光滑性较好 (如对 minmod 限制器, 这意味着不在极值点附近), 由逼近性质应有

$$S_j^x - S_{j-1}^x = (u_x)_j - (u_x)_{j-1} + \mathcal{O}(h_x^2)$$

对另一个分母同理, 最终改写为

$$\begin{aligned} & \frac{(u_j - u_{j+\frac{1}{2}} + h_x(u_x)_j/2 - u_{j-1} + u_{j-\frac{1}{2}} - h_x(u_x)_{j-1}/2)\hat{f}_1(u_j)}{h_x} \\ & + \frac{(u_{j+1} - u_{j+\frac{1}{2}} - h_x(u_x)_{j+1}/2 - u_j + u_{j-\frac{1}{2}} + h_x(u_x)_j/2)\hat{f}_2(u_j)}{h_x} + \mathcal{O}(h_x^2) \end{aligned}$$

利用 u 的光滑性直接展开可知两个分母均为 $\mathcal{O}(h_x^3)$, 从而得证。

- 局部极值原理

改写迭代为

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} &= (1 - C_{j+\frac{1}{2},k}^n - D_{j-\frac{1}{2},k}^n - E_{j,k+\frac{1}{2}}^n - F_{j,k-\frac{1}{2}}^n)u_{jk}^n \\ &+ C_{j+\frac{1}{2},k}^n u_{j+1,k}^n + D_{j-\frac{1}{2},k}^n u_{j-1,k}^n + E_{j,k+\frac{1}{2}}^n u_{j,k+1}^n + F_{j,k-\frac{1}{2}}^n u_{j,k-1}^n \\ C_{j+\frac{1}{2},k}^n &= -\lambda_x \frac{\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2},k}^{n,L}, u_{j+\frac{1}{2},k}^{n,R}) - \hat{f}(u_{j+\frac{1}{2},k}^{n,L}, u_{j-\frac{1}{2},k}^{n,R})}{u_{j+1,k}^n - u_{jk}^n} \\ D_{j-\frac{1}{2},k}^n &= \lambda_x \frac{\hat{f}(u_{j+\frac{1}{2},k}^{n,L}, u_{j-\frac{1}{2},k}^{n,R}) - \hat{f}(u_{j-\frac{1}{2},k}^{n,L}, u_{j-\frac{1}{2},k}^{n,R})}{u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n} \\ E_{j,k+\frac{1}{2}}^n &= -\lambda_y \frac{\hat{g}(u_{j,k+\frac{1}{2}}^{n,L}, u_{j,k+\frac{1}{2}}^{n,R}) - \hat{g}(u_{j,k+\frac{1}{2}}^{n,L}, u_{j,k-\frac{1}{2}}^{n,R})}{u_{j,k+1}^n - u_{jk}^n} \\ F_{j,k-\frac{1}{2}}^n &= \lambda_y \frac{\hat{g}(u_{j,k+\frac{1}{2}}^{n,L}, u_{j,k-\frac{1}{2}}^{n,R}) - \hat{g}(u_{j,k-\frac{1}{2}}^{n,L}, u_{j,k-\frac{1}{2}}^{n,R})}{u_{jk}^n - u_{j,k-1}^n} \end{aligned}$$

与上题相同, 只要满足

$$\left| \frac{\Delta_x^+ S_{jk}^n}{\Delta_x^+ u_{jk}^n} \right| \leq \frac{2}{h_x}, \quad \left| \frac{\Delta_y^+ S_{jk}^n}{\Delta_y^+ u_{jk}^n} \right| \leq \frac{2}{h_y}$$

即可取合适的 CFL 条件

$$4 \max\{\|\hat{f}_1\|_\infty, \|\hat{f}_2\|_\infty, \|\hat{g}_1\|_\infty, \|\hat{g}_2\|_\infty\} \tau \leq \min\{h_x, h_y\}$$

使得

$$0 \leq C_{j+\frac{1}{2},k}^n, D_{j-\frac{1}{2},k}^n, E_{j,k+\frac{1}{2}}^n, F_{j,k-\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{4}$$

从而 u_{jk}^{n+1} 是 u_{jk}^n 、 $u_{j+1,k}^n$ 、 $u_{j-1,k}^n$ 、 $u_{j,k+1}^n$ 、 $u_{j,k-1}^n$ 系数均为正且系数总和为 1 的线性组合, 与上题相同可知局部极值原理成立。同样, 对于 minmod 限制器, 一定在合适 CFL 条件下具有局部极值原理。

9.2 实验报告

9.2.1 格式实现

对于 $\gamma = 1.4$ 的欧拉方程, 记 $m = \rho u$ 、 $H = 1.4 \frac{E}{r} - 0.2u^2$ 有

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = 0, \quad \mathbf{U} = (\rho, m, E)^T, \quad \mathbf{F} = (m, 0.4mu + 0.4E, mH)^T$$

考虑空间区域 $[0, 1]$ 。以下称算例 1 为初值

$$U(x, 0) = \begin{cases} (0.445, 0.311, 8.928)^T & x < 0.5 \\ (0.5, 0, 1.4275)^T & x > 0.5 \end{cases}$$

模拟到 $t = 0.14$ 时刻; 算例 2 为初值

$$U(x, 0) = \begin{cases} (1, 0, 2.5)^T & x < 0.3 \\ (0.125, 0, 0.25)^T & x > 0.3 \end{cases}$$

模拟到 $t = 0.2$ 时刻。我们记空间步长 h , 时间步长 τ , 网比 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 。

为了得到 Harten 的二阶 TVD 格式, 并根据论文实现 1、1C、2 三种版本, 我们进行如下的计算过程 (由于所涉及的例子间断不会传播到边界, 我们假设边界外 u 、 m 、 E 的值与边界相同, 省略每步迭代的上标 n):

- 根据所有 $\mathbf{U}_j$ 计算出所有 u_j 、 H_j 与 $\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}}$ 。
- 计算 Roe 平均

$$\begin{aligned} \hat{u}_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{\rho_j}u_j + \sqrt{\rho_{j+1}}u_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \\ \hat{H}_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{\rho_j}H_j + \sqrt{\rho_{j+1}}H_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \\ \hat{c}_{j+\frac{1}{2}} &= \sqrt{0.4\hat{H}_{j+\frac{1}{2}} - 0.2\hat{u}_{j+\frac{1}{2}}^2} \end{aligned}$$

- 计算所有 $a_{j+\frac{1}{2}}^i$ 、 $(R^i)_{j+\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2, 3$, 为 $\mathbf{F}'(\mathbf{U})$ 特征值与特征向量代入 $\mathbf{U}$ 为 Roe 平均的结果。并根据

$$\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i R_{j+\frac{1}{2}}^i$$

计算出波强度 $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i$ 。

- 计算 $\nu_{j+\frac{1}{2}}^i = \lambda a_{j+\frac{1}{2}}^i$ 。
- 计算 (仅有此处上标 2 是平方)

$$\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}^i = \frac{1}{2}(Q(\nu_{j+\frac{1}{2}}^i) - (\nu_{j+\frac{1}{2}}^i)^2)\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad s_{j+\frac{1}{2}}^i = \text{sign}(\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}^i)$$

- 根据所选方法计算最终的系数 $\beta_{j+\frac{1}{2}}^i$:

– 对于 ULT1 或 UTT1C, 构造

$$g_j^i = s_{j+\frac{1}{2}}^i \max(0, \min(|\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}^i|, \tilde{g}_{j-\frac{1}{2}}^i s_{j+\frac{1}{2}}^i))$$

若为 ULT1C 格式, 还要额外修正 (这里上标 2 是由于第二个特征值对应线性退化场, 若 $S_j^2 = 0$ 则设 $\tilde{g}_j^2 = 0$)

$$S_{j+\frac{1}{2}}^2 = \text{sign}(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^2)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{j+\frac{1}{2}}^2 &= \frac{1}{2}(1 - Q(\nu_{j+\frac{1}{2}}^2)) \\ \bar{g}_j^2 &= S_{j+\frac{1}{2}}^2 \max(0, \min(s_{j+\frac{1}{2}}^2 \sigma_{j-\frac{1}{2}}^2 \alpha_{j-\frac{1}{2}}^2, \sigma_{j+\frac{1}{2}}^2 |\alpha_{j+\frac{1}{2}}^2|)) \\ g_j^2 &\leftarrow g_j^2 + \frac{|\alpha_{j+\frac{1}{2}}^2 - \alpha_{j-\frac{1}{2}}^2|}{|\alpha_{j+\frac{1}{2}}^2 + \alpha_{j-\frac{1}{2}}^2|} g_j^2\end{aligned}$$

并计算 (若分母为 0 则设其为 0)

$$\begin{aligned}\gamma_{j+\frac{1}{2}}^i &= \frac{g_{j+1}^i - g_j^i}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i} \\ \beta_{j+\frac{1}{2}}^i &= Q(\nu_{j+\frac{1}{2}}^i + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^i) \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - g_j^i - g_{j+1}^i\end{aligned}$$

– 对于 ULT2, 计算

$$G_{j+\frac{1}{2}}^i = s_{j+\frac{1}{2}}^i \max(0, \min(\bar{g}_{j-\frac{1}{2}}^i s_{j+\frac{1}{2}}^i, |\bar{g}_{j+\frac{1}{2}}^i|, \bar{g}_{j+2/3}^i s_{j+\frac{1}{2}}^i))$$

并构造

$$\beta_{j+\frac{1}{2}}^i = Q(\nu_{j+\frac{1}{2}}^i) \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - 2G_{j+\frac{1}{2}}^i$$

• 最终进行迭代

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}) - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^3 \beta_{j+\frac{1}{2}}^i R_{j+\frac{1}{2}}^i \right) \\ \mathbf{U}_j^{n+1} &= \mathbf{U}_j - \lambda (\bar{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

9.2.2 结果展示

我们在计算中取定 $Q(x) = |x|$ 。首先检测算法的稳定性, 对于算例 1, 取定 $h = 0.01$, 可以发现 τ 取到 0.002 即可保证基本的间断捕获, ULT1 的模拟结果如图 17, 另外两算法类似。在第七周实验中, 如此参数下的 LF 格式完全无法看出间断, 二阶格式则根本不收敛, 由此可以展现 TVD 性质对二阶格式的稳定性加强显著。

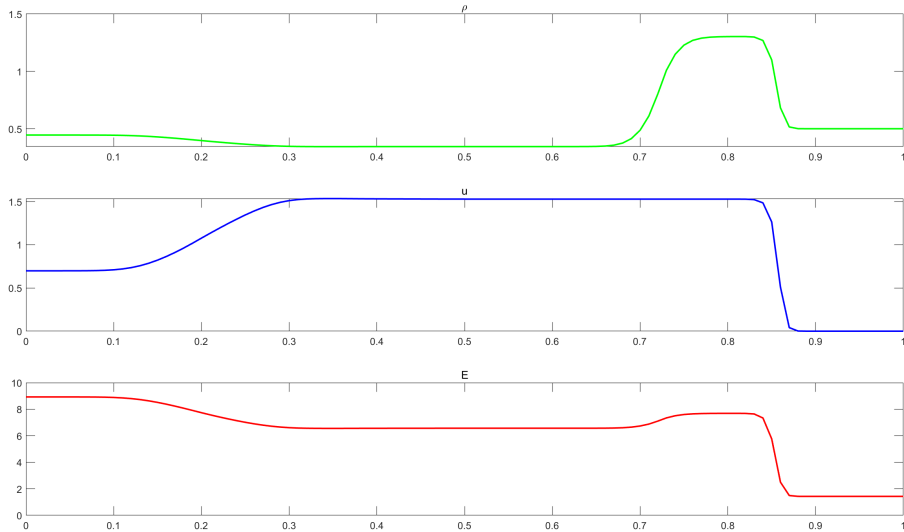


图 17: 一维 Euler 方程组算例 1 稳定性测试

接下来, 我们取定 $h = 0.004$ 、 $\tau = 0.0004$, 对两个算例进行测试, 效果如图 18 与图 19。可以发现, ULT1 与简化后的 ULT2 在两个算例中效果无显著差别, 而对线性退化场进行特殊处理的 ULT1C 则表现出了明显更好的间断捕获特性。

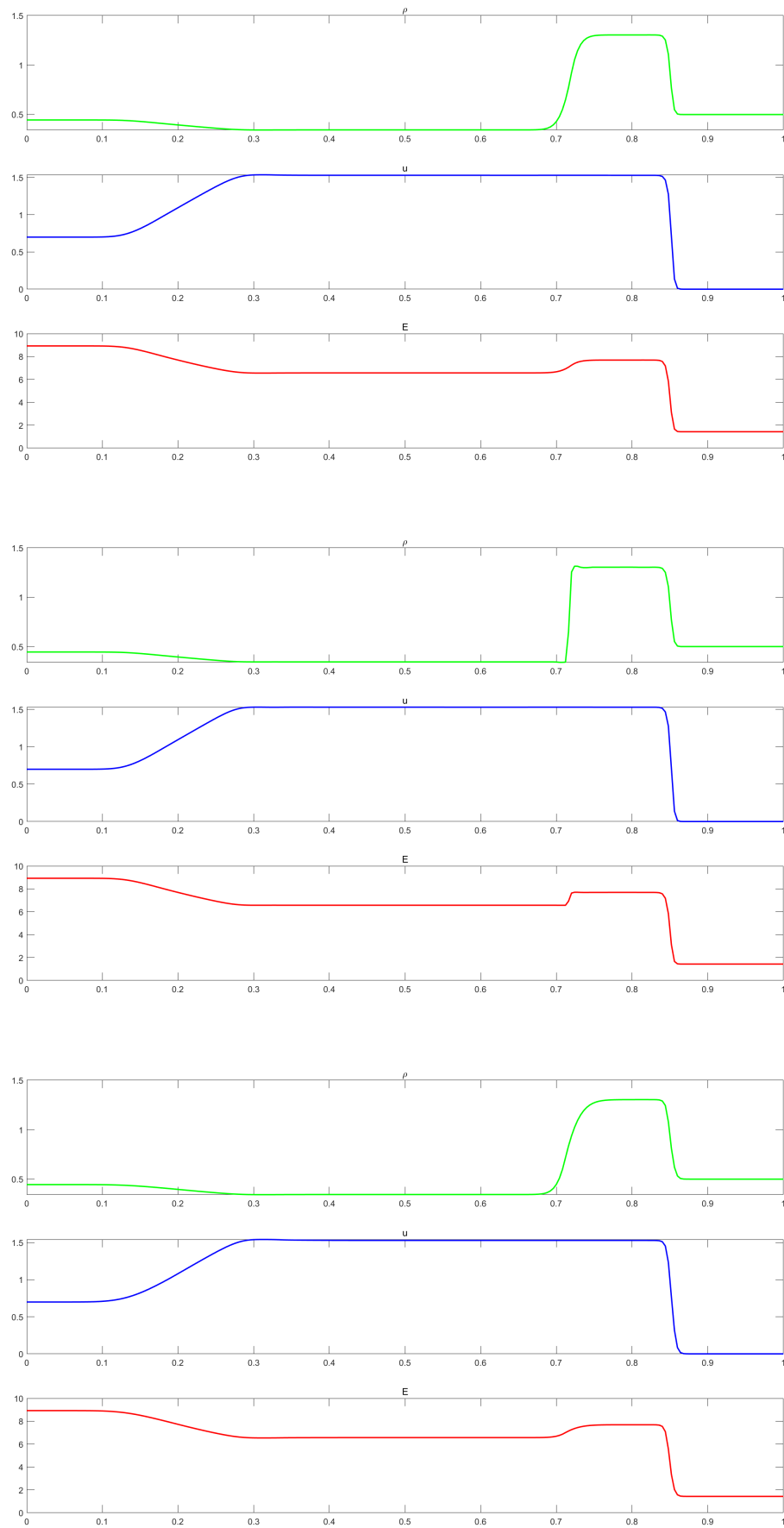


图 18: 一维 Euler 方程组算例 1 格式对比

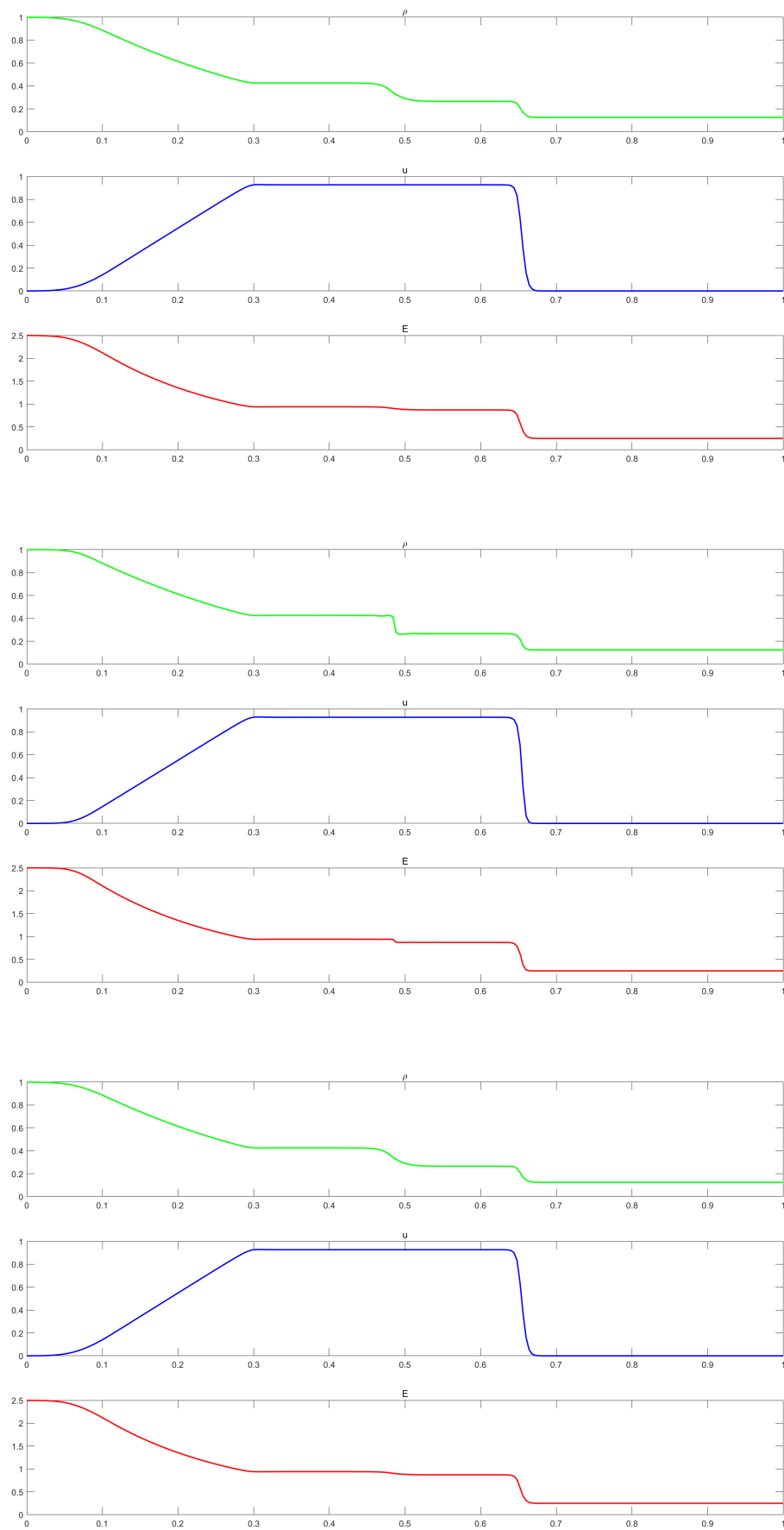


图 19: 一维 Euler 方程组算例 2 格式对比

10 第十二周

10.1 实验报告

10.1.1 一维 Burgers

我们考虑的方程为

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad f(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad x \in [-1, 1], \quad t > 0$$

考虑循环边界条件与非循环边界，记时间步长 τ 、空间步长 h 。

实现两种格式：

1. 五阶 WENO 格式

取常数 α 满足迭代过程中成立

$$\alpha \geq \|f'(u)\|_\infty = \|u\|_\infty$$

并记

$$f^\pm(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u)$$

给定某个时刻的 $u = \{u_j\}$ ，我们定义其每个位置时间导数的近似为

$$\begin{aligned} F(u)_j &= -\frac{1}{h}((\hat{f}_{j+1/2}^+ - \hat{f}_{j-1/2}^+) - (\hat{f}_{j+1/2}^- - \hat{f}_{j-1/2}^-)) \\ \hat{f}_{j+1/2}^+ &= \frac{1}{12}(-f_{j-1}^+ + 7f_j^+ + 7f_{j+1}^+ - f_{j+2}^+) - \varphi_N(\Delta f_{j-\frac{3}{2}}^+, \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+, \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+, \Delta f_{j+\frac{3}{2}}^+) \\ \hat{f}_{j+1/2}^- &= \frac{1}{12}(-f_{j-1}^- + 7f_j^- + 7f_{j+1}^- - f_{j+2}^-) + \varphi_N(\Delta f_{j+\frac{3}{2}}^-, \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^-, \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^-, \Delta f_{j-\frac{3}{2}}^-) \\ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^\pm &= f_{j+1}^\pm - f_j^\pm, \quad f_j^\pm = f^\pm(u_j) \\ \varphi_N(a, b, c, d) &= \frac{1}{3}\omega_0(a - 2b + c) + \frac{1}{6}(\omega_2 - 0.5)(b - 2c + d) \\ \omega_0 &= \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2} \\ \alpha_0 &= \frac{1}{(\epsilon + IS_0)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{6}{(\epsilon + IS_1)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{(\epsilon + IS_2)^2} \\ IS_0 &= 13(a - b)^2 + 3(a - 3b)^2, \quad IS_1 = 13(b - c)^2 + 3(b + c)^2, \quad IS_2 = 13(c - d)^2 + 3(3c - d)^2 \end{aligned}$$

考虑三种时间离散：

- 直接欧拉

$$u^{n+1} = u^n + \tau F(u^n)$$

- 三阶 TVD RK

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \tau F(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\tau F(u^{(1)}) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\tau F(u^{(2)}) \end{aligned}$$

- 四阶 RK

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \frac{1}{2}\tau F(u^n), \quad u^{(2)} = u^n + \frac{1}{2}\tau F(u^{(1)}) \\ u^{(3)} &= u^n + \tau F(u^{(2)}), \quad u^{(4)} = u^n + \frac{1}{2}\tau F(u^{(3)}) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}(u^{(1)} + 2u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} - 2u^n) \end{aligned}$$

2. RKDG 格式

我们将 $[-1, 1]$ 划分为 N 个小区间 $I_j = [x_j, x_{j+1}] = [jh, (j+1)h]$, 假设 u 在每个小区间 I_j 上属于 $\mathcal{P}^k$ (即 k 次多项式), DG 方法由以下公式确定数值解 u_h 在 I_j 的值: 对任何 $v_j \in \mathcal{P}^k(I_j)$ 有 (这里 $f_h(x, t) = f(u_h(x, t))$)

$$\frac{d}{dt} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_h(x) u_h(x, t) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_h(x, t) v'_h(x) dx - (\hat{f}_h(x_{j+1}, t) v_h(x_{j+1}) - \hat{f}_h(x_j, t) v_h(x_j))$$

其中 $\hat{f}_h(x_j, t) = \hat{f}(u_h(x_j^-, t), u_h(x_j^+, t))$, 上标 $\pm$ 表示左右极限, $\hat{f}$ 为某两点数值通量。

由于要实现 $k = 0, 1, 2$ 的情况, 我们找 $\mathcal{P}^2([-1, 1])$ 的一组正交基 (且 p_i 模长平方为 $\frac{2}{2i+1}$)

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

由此可得 $\mathcal{P}^2(I_j)$ 的一组正交基

$$w_{j,0}(x) = 1, \quad w_{j,1}(x) = \frac{2}{h}(x - x_{j+\frac{1}{2}}), \quad w_{j,2}(x) = \frac{6}{h^2}(x - x_{j+\frac{1}{2}})^2 - \frac{1}{2}$$

且 $w_{j,i}$ 模长平方为 $\frac{h}{2i+1}$ 。

我们下面先考虑 $k = 2$, 假设数值解

$$\forall x \in I_j, \quad u_h(x, t) = u_{j,0}(t)w_{j,0}(x) + u_{j,1}(t)w_{j,1}(x) + u_{j,2}(t)w_{j,2}(x)$$

分别代入 $v_h = w_{j,0}$ 、 $v_h = w_{j,1}$ 、 $v_h = w_{j,2}$ 可得

$$\begin{aligned} hu'_{j,0}(t) &= -(\hat{f}_h(x_{j+1}, t) - \hat{f}_h(x_j, t)) \\ \frac{h}{3}u'_{j,1}(t) &= \frac{2}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_h(x, t) dx - (\hat{f}_h(x_{j+1}, t) + \hat{f}_h(x_j, t)) \\ \frac{h}{5}u'_{j,2}(t) &= \frac{12}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_h(x, t)(x - x_{j+\frac{1}{2}}) dx - (\hat{f}_h(x_{j+1}, t) - \hat{f}_h(x_j, t)) \end{aligned}$$

为了便于统一计算, 我们将第三个式子写成 (注意此写法不存在数学意义)

$$\frac{h}{5}u'_{j,2}(t) = \frac{6}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_h(x, t)w_{j,1}(x) dx - (\hat{f}_h(x_{j+1}, t) - \hat{f}_h(x_j, t))$$

我们用中间的斜线表示积分平均, 也即积分除以区间长度 h 的结果, 将最终递推写为

$$\begin{aligned} hu'_{j,0}(t) &= -(\hat{f}_h(x_{j+1}, t) - \hat{f}_h(x_j, t)) \\ hu'_{j,1}(t) &= 6 \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_h(x, t) dx - 3(\hat{f}_h(x_{j+1}, t) + \hat{f}_h(x_j, t)) \\ hu'_{j,2}(t) &= 30 \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_h(x, t)w_{j,1}(x) dx - 5(\hat{f}_h(x_{j+1}, t) - \hat{f}_h(x_j, t)) \end{aligned}$$

这里 $\hat{f}_h$ 计算中的

$$\begin{aligned} u_h(x_j^+, t) &= u_{j,0}(t) - u_{j,1}(t) + u_{j,2}(t) \\ u_h(x_{j+1}^-, t) &= u_{j,0}(t) + u_{j,1}(t) + u_{j,2}(t) \end{aligned}$$

由此, 与上一种方法完全类似, 可通过对导数的近似构造 RK 算法。根据理论证明, 此处的积分采用三点 Gauss 积分即可保证精度 (事实上, 由于 u_h 对 x 至多二次, 被积函数至多五次, 三点 Gauss

积分应是精确的)。此外，初值也通过 $u_0(x)$ 每个区间上与 $w_{j,0}$ 、 $w_{j,1}$ 、 $w_{j,2}$ 内积的三点 Gauss 积分确定，写成

$$\begin{aligned} u_{j,0}^0 &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} w_{j,0}(x) u_0(x) dx \\ u_{j,1}^0 &= 3 \int_{x_j}^{x_{j+1}} w_{j,1}(x) u_0(x) dx \\ u_{j,2}^0 &= 5 \int_{x_j}^{x_{j+1}} w_{j,2}(x) u_0(x) dx \end{aligned}$$

k 为 0 或 1 时，取上述三个迭代公式的前 1 到 2 个，并通过对应的前 1 到 2 项得到 $\hat{f}_h$ ，即可算出对应的半离散格式。此外，与 WENO 格式完全相同，估算出导数后进行 RK 迭代。事实上可以发现，当 $k = 0$ 并取 RK1 迭代（即显示欧拉）时，格式即退化为直接的守恒格式。

实际计算时，我们采用 Godunov 通量（第七周作业已推导）

$$\hat{f}(u_L, u_R) = \begin{cases} \min_{x \in [u_L, u_R]} \frac{x^2}{2} & u_L \leq u_R \\ \max_{x \in [u_L, u_R]} \frac{x^2}{2} & u_L > u_R \end{cases}$$

与迎风通量

$$\hat{f}(u_L, u_R) = \begin{cases} \frac{u_L^2}{2} & \frac{u_L + u_R}{2} \geq 0 \\ \frac{u_R^2}{2} & \frac{u_L + u_R}{2} < 0 \end{cases}$$

两种通量函数。

下面对效果进行测试。首先，考虑初值为 $-\sin(x)$ ， $h = 0.005$ 、 $\tau = 0.0005$ ，循环边界条件，三阶 RK 迭代，模拟到 $T = 1$ 时刻。四种方法的效果如图 20（这里绘制 DG1、DG2 方法是取区间右端点处的值）。

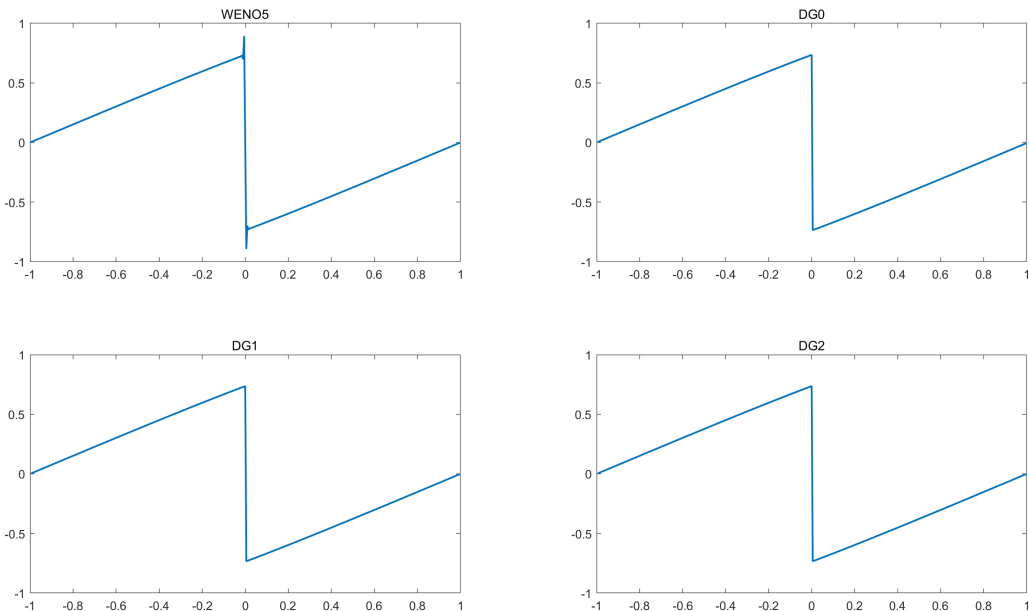


图 20: 循环边界模拟效果

可以发现，其中 WENO5 方法出现了明显的振荡，其他三种方法则并不明显。不过，进一步提升 CFL 数，取网比为 0.3 时可发现，WENO5 方法仍然在极值处有明显的振荡，但仍然收敛，反而之前表现更好的 DG2 方法不再收敛。取网比为 0.5 时，DG1 也不再收敛，WENO5 仍然收敛；网比为 1.6 时，只有

WENO5 方法仍然收敛。由此，WENO5 方法虽然因为阶数更高更容易振荡，但某种意义上具有很好的稳定性。

接下来，考虑间断解，在 $x > 0$ 时为 1，否则为 0；在 $x < 0$ 时为 0，否则为 1。都模拟到 0.8 时刻，参数同最前，这两个算例的效果如图 21。

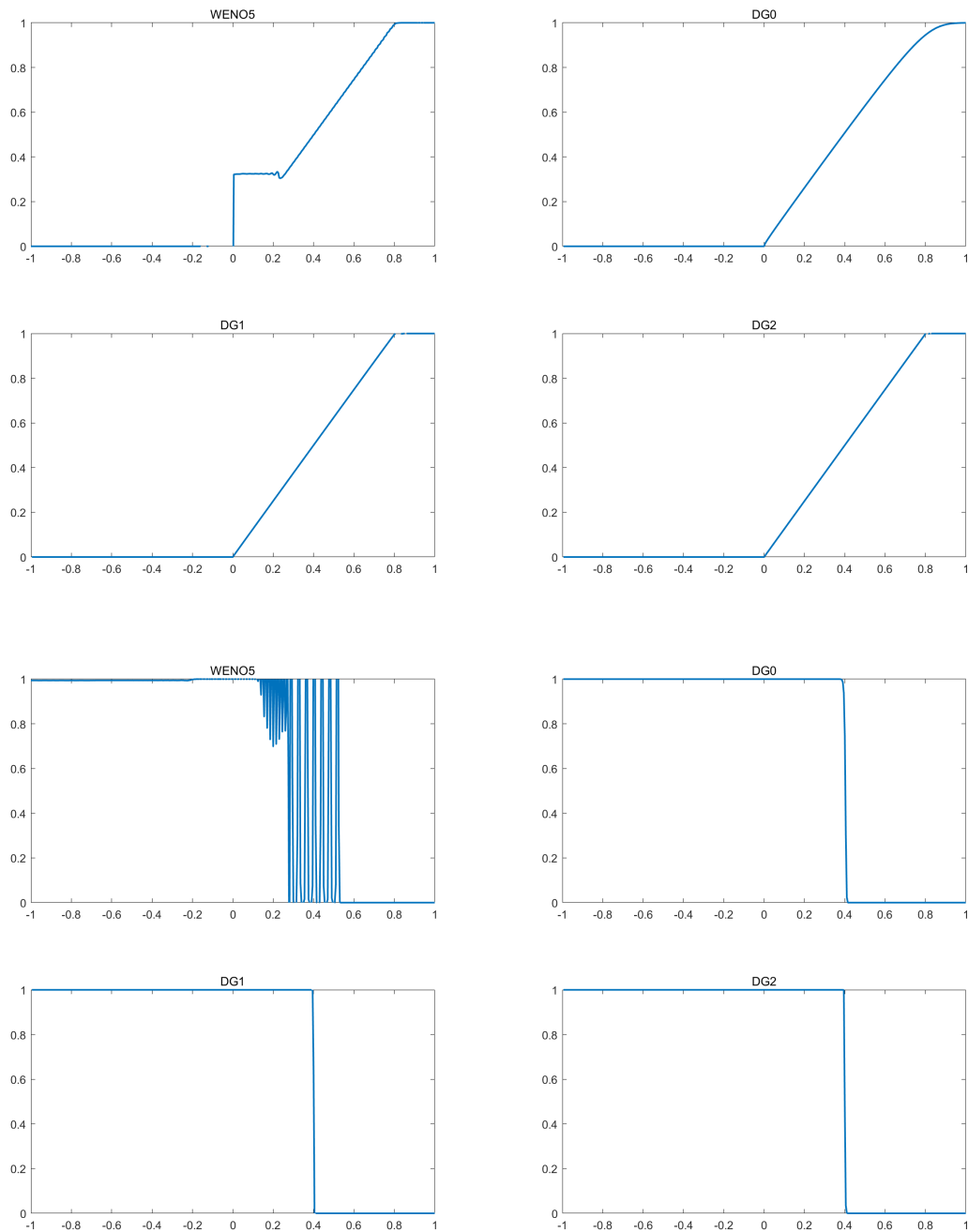


图 21: 稀疏波与激波模拟效果

由此可见，WENO5 方法在间断处确实会产生严重的振荡。在激波例子测试三种方法的精度为：三种 DG 方法均约 0.35 阶，且 DG2 误差最低，DG0 误差最高；WENO5 则无法收敛。由于 Burgers 方程没有太好的连续解，不对连续情况的阶作进一步测试。

10.1.2 二维 Euler

二维完全气体欧拉方程组为

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = 0$$

其中

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T = (\rho, m_1, m_2, E)^T$$

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E + p))^T$$

$$\mathbf{G} = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(E + p))^T$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)$$

取定 $\gamma = 1.4$ ，为方便讨论，我们再设

$$H = \frac{E + p}{\rho}$$

与一维时类似，我们将采用 Roe 均值进行线性化后计算迭代格式，并根据论文实现 1、1C、2 三种版本，我们对 x 方向迭代进行如下的计算过程 (由于所涉及的例子间断不会传播到边界，我们假设边界外 u 、 m 、 E 的值与边界相同，省略每步迭代的上标 n 与共同的第二个下标 k)：

- 根据所有 $\mathbf{U}_j$ 计算出所有 u_j 、 v_j 、 H_j 与 $\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}}$ 。
- 计算 Roe 平均

$$\hat{u}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\rho_j}u_j + \sqrt{\rho_{j+1}}u_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}}$$

$$\hat{v}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\rho_j}v_j + \sqrt{\rho_{j+1}}v_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}}$$

$$\hat{H}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\rho_j}H_j + \sqrt{\rho_{j+1}}H_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}}$$

$$\hat{c}_{j+\frac{1}{2}} = \sqrt{0.4\hat{H}_{j+\frac{1}{2}} - 0.2\hat{u}_{j+\frac{1}{2}}^2 - 0.2\hat{v}_{j+\frac{1}{2}}^2}$$

- 计算所有 $a_{j+\frac{1}{2}}^i$ 、 $(R^i)_{j+\frac{1}{2}}$ ， $i = 1, 2, 3, 4$ ，为 $\mathbf{F}'(\mathbf{U})$ 特征值与特征向量代入 $\mathbf{U}$ 为 Roe 平均的结果。并根据

$$\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j = \sum_{i=1}^4 \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i R_{j+\frac{1}{2}}^i$$

计算出波强度 $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i$ 。

这里波强度的计算公式不再在论文中直接给出，我们采取第十三周作业中已经给出的计算方案。

- 计算 $\nu_{j+\frac{1}{2}}^i = \lambda a_{j+\frac{1}{2}}^i$ 。
- 计算 (仅有此处上标 2 是平方)

$$\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}^i = \frac{1}{2}(Q(\nu_{j+\frac{1}{2}}^i) - (\nu_{j+\frac{1}{2}}^i)^2)\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad s_{j+\frac{1}{2}}^i = \text{sign}(\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}^i)$$

- 根据所选方法计算最终的系数 $\beta_{j+\frac{1}{2}}^i$ ：

– 对于 ULT1 或 UTT1C，构造

$$g_j^i = s_{j+\frac{1}{2}}^i \max(0, \min(|\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}^i|, \tilde{g}_{j-\frac{1}{2}}^i s_{j+\frac{1}{2}}^i))$$

若为 ULT1C 格式，还要额外修正 (这里上标 2, 3 是由于第二、三个特征值对应线性退化场，若 $S_j^{2,3} = 0$ 则设 $\tilde{g}_j^{2,3} = 0$)

$$S_{j+\frac{1}{2}}^{2,3} = \text{sign}(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^{2,3})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{j+\frac{1}{2}}^{2,3} &= \frac{1}{2}(1 - Q(\nu_{j+\frac{1}{2}}^{2,3})) \\ \bar{g}_j^{2,3} &= S_{j+\frac{1}{2}}^{2,3} \max(0, \min(s_{j+\frac{1}{2}}^{2,3} \sigma_{j-\frac{1}{2}}^{2,3} \alpha_{j-\frac{1}{2}}^{2,3}, \sigma_{j+\frac{1}{2}}^{2,3} |\alpha_{j+\frac{1}{2}}^{2,3}|)) \\ g_j^{2,3} &\leftarrow g_j^{2,3} + \frac{|\alpha_{j+\frac{1}{2}}^{2,3} - \alpha_{j-\frac{1}{2}}^{2,3}|}{|\alpha_{j+\frac{1}{2}}^{2,3} + \alpha_{j-\frac{1}{2}}^{2,3}|} \bar{g}_j^{2,3}\end{aligned}$$

并计算 (若分母为 0 则设其为 0)

$$\begin{aligned}\gamma_{j+\frac{1}{2}}^i &= \frac{g_{j+1}^i - g_j^i}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i} \\ \beta_{j+\frac{1}{2}}^i &= Q(\nu_{j+\frac{1}{2}}^i + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^i) \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - g_j^i - g_{j+1}^i\end{aligned}$$

– 对于 ULT2, 计算

$$G_{j+\frac{1}{2}}^i = s_{j+\frac{1}{2}}^i \max(0, \min(\tilde{g}_{j-\frac{1}{2}}^i s_{j+\frac{1}{2}}^i, |\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}^i|, \tilde{g}_{j+2/3}^i s_{j+\frac{1}{2}}^i))$$

并构造

$$\beta_{j+\frac{1}{2}}^i = Q(\nu_{j+\frac{1}{2}}^i) \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - 2G_{j+\frac{1}{2}}^i$$

• 最终进行迭代

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}) - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^4 \beta_{j+\frac{1}{2}}^i R_{j+\frac{1}{2}}^i \right) \\ \mathbf{U}_j^{new} &= \mathbf{U}_j - \lambda(\bar{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

将此迭代过程记为 $L_x \mathbf{U}$, 同理可以构造 $L_y \mathbf{U}$, 实际迭代中轮流进行两步迭代

$$\mathbf{U}^{n+1} = L_x L_y \mathbf{U}^n, \quad \mathbf{U}^{n+1} = L_y L_x \mathbf{U}^n$$

记

$$\mathbf{U}_L = (8, 57.1597, -33.0012, 563.544)^T, \quad \mathbf{U}_R = (1.4, 0, 0, 2.5)^T$$

考虑区域 $[0, 4] \times [0, 1]$, 初值为

$$\mathbf{U}(x, y, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & y \geq \sqrt{3}(x - \frac{1}{6}) \\ \mathbf{U}_R & y < \sqrt{3}(x - \frac{1}{6}) \end{cases}$$

左边界固定为 $\mathbf{U}_L$ 、右边界固定为 $\mathbf{U}_R$ 、上边界为

$$\mathbf{U}(x, 1, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(1 + 20t) + \frac{1}{6} \\ \mathbf{U}_R & x > \frac{\sqrt{3}}{3}(1 + 20t) + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\mathbf{U}(x, 1 - h_y, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - h_y + 20t) + \frac{1}{6} \\ \mathbf{U}_R & x > \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - h_y + 20t) + \frac{1}{6} \end{cases}$$

下边界 $x \leq \frac{1}{6}$ 处固定为 $\mathbf{U}_L$, $x > \frac{1}{6}$ 处为反射边界, 即

$$\begin{aligned}\rho_{j,-k}^n &= \rho_{jk}^n, \quad u_{j,-k}^n = u_{jk}^n, \quad E_{j,-k}^n = E_{jk}^n \\ v_{j,-k}^n &= -v_{jk}^n\end{aligned}$$

由于 ULT 为五点格式, 我们将对下边界用到 $k = 1, 2$ 的情况, 这也是为什么上边界给出了两段的值。事实上, 左、右边界也需要各固定两行, 不过其直接为固定值, 无需特殊处理。此外, 下边界左右侧边界

条件并不一致, 进行 y 方向迭代时, 我们实际上将 L_y 分为两个部分进行, 左侧固定边界进行迭代, 右侧利用反射边界条件扩充后进行迭代。

取 $h_x = h_y = \frac{1}{240}$ 、 $\tau = 0.00005$, 实际计算可发现, 此时 ULT1C 算法在 y 方向会出现数值振荡 (由于反射边界条件本身无法保证 TVD 性), 而 ULT1 与 ULT2 效果基本相同, 用 ULT1 得到的 $t = 0.2$ 时刻 ρ 、 u 、 v 、 E 模拟结果如图 22。

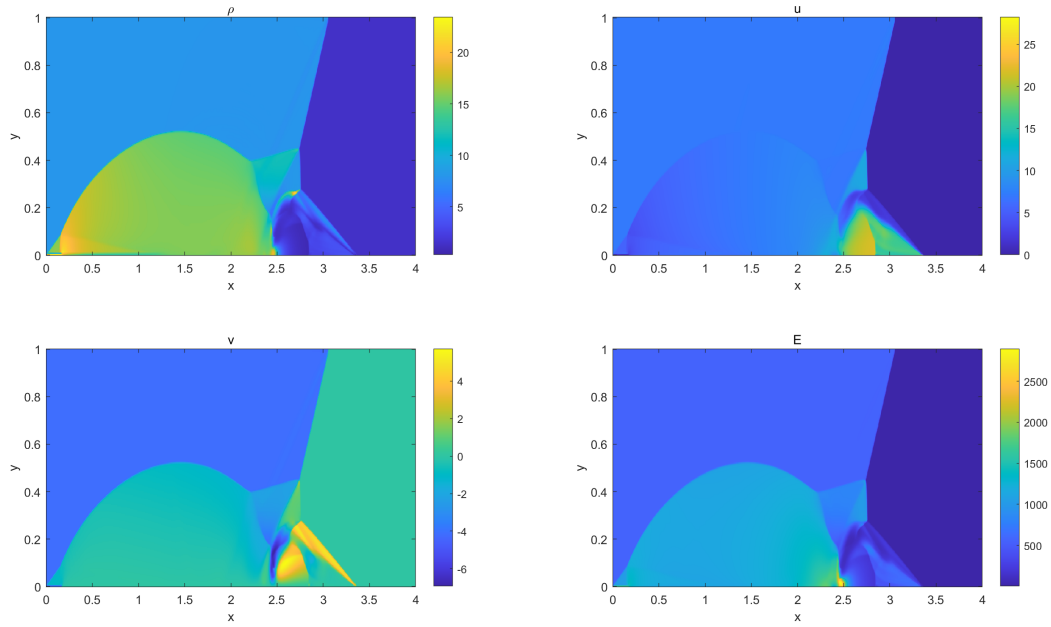


图 22: 二维欧拉方程模拟效果

对比参考解, 可发现效果的确符合, 从而验证了算法的正确性 (出现的一定差异可能来自于反射边界条件的具体处理不同)。

11 第十三周

11.1 书面作业

1. 二维完全气体欧拉方程组为

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = 0$$

其中

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$$

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E + p))^T$$

$$\mathbf{G} = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(E + p))^T$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)$$

为方便讨论，我们再设

$$H = \frac{E + p}{\rho}$$

我们只进行数值通量 $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2},k}$ 与 $\hat{\mathbf{G}}_{j,k+\frac{1}{2}}$ 的构造，此后的格式可采用先 x 分裂再 y 分裂的方式，即

$$\mathbf{U}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{U}_{jk}^n - \frac{\tau}{h_x}(\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2},k}^n - \hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2},k}^n)$$

$$\mathbf{U}_{jk}^{n+1} = \mathbf{U}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{h_x}(\hat{\mathbf{G}}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{G}}_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

或与先 y 分裂再 x 分裂结合。

为方便书写，省略统一的时间上标，在讨论 $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2},k}$ 时用下标 L 表示 $j-1, k$ ，下标 R 表示 $j+1, k$ ；讨论 $\hat{\mathbf{G}}_{j,k+\frac{1}{2}}$ 时用下标 L 表示 $j, k-1$ ，下标 R 表示 $j, k+1$ 。

Roe 线性化后的数值通量可以写为

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\mathbf{R}}^{(i)}$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_L + \mathbf{G}_R) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \tilde{\beta}_i |\tilde{\mu}_i| \tilde{\mathbf{S}}^{(i)}$$

其中 $\tilde{\lambda}_i$ 与 $\tilde{\mathbf{R}}_i$ 为 Roe 矩阵 $\tilde{A}_F(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ 的特征值与相应右特征向量， $\tilde{\alpha}_i$ 为相应波强度； $\tilde{\mu}_i$ 与 $\tilde{\mathbf{S}}_i$ 为 Roe 矩阵 $\tilde{A}_G(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ 的特征值与相应右特征向量， $\tilde{\beta}_i$ 为相应波强度。

- Roe (1981)

先考虑 x 方向。取参数向量

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T = \sqrt{\rho}(1, u, v, H)^T$$

则

$$\mathbf{U} = \left(q_1^2, q_1 q_2, q_1 q_3, \frac{1}{\gamma} q_1 q_4 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} q_2^2 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} q_3^2 \right)^T$$

$$\mathbf{F} = \left(q_1 q_2, \frac{\gamma-1}{\gamma} q_1 q_4 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} q_2^2 + \frac{1-\gamma}{2\gamma} q_3^2, q_2 q_3, q_2 q_4 \right)$$

设 $\tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R)/2$ ，并用 Δ 表示 R 处减 L 处，可发现

$$\Delta \mathbf{U} = \tilde{B} \Delta \mathbf{Q}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{q}_3 & 0 & \tilde{q}_1 & 0 \\ \frac{1}{\gamma}\tilde{q}_4 & \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_3 & \frac{1}{\gamma}\tilde{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{U} = \tilde{C} \Delta \mathbf{Q}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} \tilde{q}_4 & \frac{\gamma+1}{\gamma} \tilde{q}_2 & \frac{1-\gamma}{\gamma} \tilde{q}_3 & \frac{\gamma-1}{\gamma} \tilde{q}_1 \\ 0 & \tilde{q}_3 & \tilde{q}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_4 & 0 & \tilde{q}_2 \end{pmatrix}$$

从而设 $\tilde{A}_F = \tilde{C} \tilde{B}^{-1}$, 可算出

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \tilde{a}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3 = \tilde{u}, \quad \tilde{\lambda}_4 = \tilde{u} + \tilde{a}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(1)} = (1, \tilde{u} - \tilde{a}, \tilde{v}, \tilde{H} - \tilde{u}\tilde{a})^T, \quad \tilde{\mathbf{R}}^{(2)} = \left(1, \tilde{u}, \tilde{v}, \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)\right)^T$$

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(3)} = (0, 0, 1, \tilde{v})^T, \quad \tilde{\mathbf{R}}^{(4)} = (1, \tilde{u} + \tilde{a}, \tilde{v}, \tilde{H} + \tilde{u}\tilde{a})^T$$

这里

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{a} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \right)}$$

进一步由

$$\Delta \mathbf{U} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{R}}^{(i)}$$

解出

$$\tilde{\alpha}_3 = \Delta u_3 - \tilde{v} \Delta u_1$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\gamma - 1}{\tilde{a}^2} (\Delta u_1 (\tilde{H} - \tilde{u}^2) + \tilde{u} \Delta u_2 - \Delta u_4 + \tilde{\alpha}_3 \tilde{v})$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2\tilde{a}} (\Delta u_1 (\tilde{u} + \tilde{a}) - \Delta u_2 - \tilde{a} \tilde{\alpha}_2)$$

$$\tilde{\alpha}_4 = \Delta u_1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2$$

完全对称可得对于 y 方向有 (注意下标 L 、 R 与 Δ 含义将变为 y 方向)

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{v} - \tilde{a}, \quad \tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_3 = \tilde{v}, \quad \tilde{\mu}_4 = \tilde{v} + \tilde{a}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(1)} = (1, \tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{a}, \tilde{H} - \tilde{v}\tilde{a})^T, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(2)} = (0, 1, 0, \tilde{u})^T$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(3)} = \left(1, \tilde{u}, \tilde{v}, \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)\right)^T, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(4)} = (1, \tilde{u}, \tilde{v} + \tilde{a}, \tilde{H} + \tilde{v}\tilde{a})^T$$

这里

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{a} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \right)}$$

且

$$\tilde{\beta}_2 = \Delta u_2 - \tilde{u} \Delta u_1$$

$$\tilde{\beta}_3 = \frac{\gamma - 1}{\tilde{a}^2} (\Delta u_1 (\tilde{H} - \tilde{v}^2) + \tilde{v} \Delta u_3 - \Delta u_4 + \tilde{\beta}_2 \tilde{u})$$

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{1}{2\tilde{a}} (\Delta u_1 (\tilde{v} + \tilde{a}) - \Delta u_3 - \tilde{a} \tilde{\beta}_3)$$

$$\tilde{\beta}_4 = \Delta u_1 - \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_3$$

综合以上即得到数值通量。

- Roe 与 Pike (1984)

先考虑 x 方向。与讲义中三维情况完全类似可发现，取出的 Roe 平均与之前完全相同，并认为 $\mathbf{U}_L$ 、 $\mathbf{U}_R$ 都在我们得到的 $\tilde{\mathbf{U}}$ 附近，则 $\tilde{S}^{(i)}$ 与 $\tilde{\lambda}_i$ 的形式完全相同，只需重新计算 $\tilde{\alpha}_i$ 。为记号清晰，我们这里仍假设 $\tilde{\alpha}_i$ 是前一种方法推导出的 $\tilde{\alpha}_i$ ，以 $\hat{\alpha}_i$ 表示此方法推导出的 $\tilde{\alpha}_i$ 。

根据前一种方法的表达式有

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_3 &= \Delta u_3 - \tilde{v} \Delta u_1 \\ \tilde{\alpha}_2 &= \frac{\gamma-1}{\tilde{a}^2} (\Delta u_1 (\tilde{H} - \tilde{u}^2) + \tilde{u} \Delta u_2 - \Delta u_4 + \tilde{\alpha}_3 \tilde{v}) \\ \tilde{\alpha}_1 &= \frac{1}{2\tilde{a}} (\Delta u_1 (\tilde{u} + \tilde{a}) - \Delta u_2 - \tilde{a} \tilde{\alpha}_2) \\ \tilde{\alpha}_4 &= \Delta u_1 - \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\end{aligned}$$

由于已经假设了 $\mathbf{U}_L$ 、 $\mathbf{U}_R$ 都在 $\tilde{\mathbf{U}}$ 附近，可得

$$\begin{aligned}\Delta u_1 &= \Delta \rho \\ \Delta u_2 &\approx \tilde{u} \Delta \rho + \tilde{\rho} \Delta u \\ \Delta u_3 &\approx \tilde{v} \Delta \rho + \tilde{\rho} \Delta v \\ \Delta u_4 &\approx \frac{1}{\gamma-1} \Delta p + \frac{1}{2} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \Delta \rho + \tilde{\rho} \tilde{u} \Delta u + \tilde{\rho} \tilde{v} \Delta v\end{aligned}$$

由此逐个代入得到近似结果

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \frac{1}{2\tilde{a}^2} (\Delta p - \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta u) \\ \hat{\alpha}_2 &= \Delta \rho - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2} \\ \hat{\alpha}_3 &= \tilde{\rho} \Delta v \\ \hat{\alpha}_4 &= \frac{1}{2\tilde{a}^2} (\Delta p + \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta u)\end{aligned}$$

完全对称可得对于 y 方向有 (注意 Δ 含义将变为 y 方向)

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{1}{2\tilde{a}^2} (\Delta p - \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta v) \\ \hat{\beta}_2 &= \tilde{\rho} \Delta u \\ \hat{\beta}_3 &= \Delta \rho - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2} \\ \hat{\beta}_4 &= \frac{1}{2\tilde{a}^2} (\Delta p + \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta v)\end{aligned}$$

综合以上即得到数值通量。

2. 沿用上题的记号，同样只进行数值通量构造，先考虑 x 方向。

将数值通量写成

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{j+1,k} + \mathbf{F}_{jk}) - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{U}_{jk}}^{\mathbf{U}_{j+1,k}} |A_F(\mathbf{U})| d\mathbf{U}$$

由于 A_F 的特征值 u 为二重，积分路径分为三段，将三段记为 $\mathbf{U}_0$ 到 $\mathbf{U}_{1/3}$ 、 $\mathbf{U}_{1/3}$ 到 $\mathbf{U}_{2/3}$ 、 $\mathbf{U}_{2/3}$ 到 $\mathbf{U}_1$ ，记

$$a = \sqrt{\gamma p} \rho$$

考虑每段的 Riemman 不变量可知

$$u_0 + \frac{2}{\gamma-1} a_0 = u_{1/3} + \frac{2}{\gamma-1} a_{1/3}, \quad p_0 \rho_0^{-\gamma} = p_{1/3} \rho_{1/3}^{-\gamma}, \quad v_0 = v_{1/3}$$

$$u_{1/3} = u_{2/3}, \quad p_{1/3} = p_{2/3}$$

$$u_1 - \frac{2}{\gamma-1}a_1 = u_{2/3} - \frac{2}{\gamma-1}a_{2/3}, \quad p_1\rho_1^{-\gamma} = p_{2/3}\rho_{2/3}^{-\gamma}, \quad v_1 = v_{2/3}$$

利用上述等式可设

$$\alpha = \left(\frac{p_0\rho_0^{-\gamma}}{p_1\rho_1^{-\gamma}} \right)^{1/(2\gamma)} = \left(\frac{p_{1/3}\rho_{1/3}^{-\gamma}}{p_{2/3}\rho_{2/3}^{-\gamma}} \right)^{1/(2\gamma)} = \sqrt{\frac{\rho_{2/3}}{\rho_{1/3}}} = \frac{a_{1/3}}{a_{2/3}}$$

α 可直接利用初末状态算出, 将 $a_{1/3} = \alpha a_{2/3}$ 代入, 并联立前三行的首个等式, 可得到 $a_{2/3}$ 、 $u_{1/3}$ 、 $u_{2/3}$ 的非退化线性方程组, 从而此三变量可以解出, 进而得到 $a_{1/3}$ 。从而再代入 a 的表达式结合第一行第二个等式可解出 $p_{1/3}$ 与 $\rho_{1/3}$, 结合第三行第二个等式可解出 $p_{2/3}$ 与 $\rho_{2/3}$ 。此外, $v_{1/3}$ 与 $v_{2/3}$ 直接已知, 综合上述过程即得到中间状态 $\mathbf{U}_{1/3}$ 与 $\mathbf{U}_{2/3}$ 。

计算三个子路径积分 (0 与正数、负数符号均相同):

- 若 $u_0 - a_0$ 与 $u_{1/3} - a_{1/3}$ 符号不同, 找声速点 $\mathbf{U}_{s_1}$ 满足

$$u_0 + \frac{2}{\gamma-1}a_0 = u_{s_1} + \frac{2}{\gamma-1}a_{s_1}, \quad p_0\rho_0^{-\gamma} = p_{s_1}\rho_{s_1}^{-\gamma}, \quad v_0 = v_{s_1}, \quad u_{s_1} - a_{s_1} = 0$$

声速点两侧不会变号, 于是积分为

$$\int_{\mathbf{U}_0}^{\mathbf{U}_{1/3}} |A_F(\mathbf{U})| d\mathbf{U} = \text{sign}(u_0 - a_0)(2\mathbf{F}(\mathbf{U}_{s_1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_0) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{1/3}))$$

若符号相同, 积分为 (若 $u_0 - a_0 = 0$ 则右侧第一项变为 $u_{1/3} - a_{1/3}$ 的符号)

$$\int_{\mathbf{U}_0}^{\mathbf{U}_{1/3}} |A_F(\mathbf{U})| d\mathbf{U} = \text{sign}(u_0 - a_0)(\mathbf{F}(\mathbf{U}_{1/3}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_0))$$

- 由于此特征场中 u 恒定, 积分为

$$\int_{\mathbf{U}_{1/3}}^{\mathbf{U}_{2/3}} |A_F(\mathbf{U})| d\mathbf{U} = \text{sign}(u_{1/3})(\mathbf{F}(\mathbf{U}_{2/3}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{1/3}))$$

- 若 $u_1 + a_1$ 与 $u_{2/3} + a_{2/3}$ 符号不同, 找声速点 $\mathbf{U}_{s_2}$ 满足

$$u_1 - \frac{2}{\gamma-1}a_1 = u_{s_2} - \frac{2}{\gamma-1}a_{s_2}, \quad p_1\rho_1^{-\gamma} = p_{s_2}\rho_{s_2}^{-\gamma}, \quad v_1 = v_{s_2}, \quad u_{s_2} + a_{s_2} = 0$$

声速点两侧不会变号, 于是积分为

$$\int_{\mathbf{U}_{2/3}}^{\mathbf{U}_1} |A_F(\mathbf{U})| d\mathbf{U} = \text{sign}(u_{2/3} + a_{2/3})(2\mathbf{F}(\mathbf{U}_{s_2}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{2/3}))$$

若符号相同, 积分为 (若 $u_{2/3} + a_{2/3} = 0$ 则右侧第一项变为 $u_1 + a_1$ 的符号)

$$\int_{\mathbf{U}_{2/3}}^{\mathbf{U}_1} |A_F(\mathbf{U})| d\mathbf{U} = \text{sign}(u_{2/3} + a_{2/3})(\mathbf{F}(\mathbf{U}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{2/3}))$$

综合以上即得到 x 方向数值通量。完全对称可得对于 y 方向只要将上述过程中 u 、 v 交换, $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$ 交换, 即得数值通量。

3. 考虑 t^n 时刻 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处的通量, 省略时间上标, 设下标 L 表示 j 处, 下标 R 表示 $j+1$ 处。

设 $\mathbf{U} = (h, hu, hv)^T$, $\mathbf{F} = (hu, hu^2 + gh^2/2, huv)^T$, 直接计算得其 Jacobi 阵为

$$A(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}$$

计算得其特征值为

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + \sqrt{gh}$$

对应右特征向量

$$\mathbf{R}^{(1)} = (1, u - \sqrt{gh}, v)^T, \quad \mathbf{R}^{(2)} = (0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{R}^{(3)} = (1, u + \sqrt{gh}, v)^T$$

由此可进行估算 (此式可保证 $S_L \leq S_R$, 之后的推导以此为基础)

$$S_L = \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u_R - \sqrt{gh_R}), \quad S_R = \max(u_L + \sqrt{gh_L}, u_R + \sqrt{gh_R})$$

由此可直接得到 HLL 通量

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^{hll} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & 0 < S_L < S_R \\ \mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}}^{hll} & S_L \leq 0 \leq S_R, \quad \mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}}^{hll} = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_L S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} \\ \mathbf{F}_R & S_L < S_R < 0 \end{cases}$$

为构造 HLLC 通量, 添加条件

$$S_* = u_{*,L} = u_{*,R} = u_*, \quad v_{*,L} = v_L, \quad v_{*,R} = v_R$$

利用跳跃条件

$$\mathbf{F}_{*,L} = \mathbf{F}_L + S_L \mathbf{U}_{*,L} - S_L \mathbf{U}_L$$

$$\mathbf{F}_{*,R} = \mathbf{F}_R + S_R \mathbf{U}_{*,R} - S_R \mathbf{U}_R$$

$$\mathbf{F}_{*,L} - \mathbf{F}_{*,R} = S_*(\mathbf{U}_{*,R} - \mathbf{U}_{*,L})$$

消去 $\mathbf{F}_{*,L}$ 与 $\mathbf{F}_{*,R}$ 得到

$$\mathbf{F}_L + S_L \mathbf{U}_{*,L} - S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_R - S_R \mathbf{U}_{*,R} + S_R \mathbf{U}_R = S_*(\mathbf{U}_{*,R} - \mathbf{U}_{*,L})$$

记 $\mathbf{D} = \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_R + S_R \mathbf{U}_R$, 其三个分量为 D_1 、 D_2 、 D_3 , 则方程组可写为

$$\begin{cases} D_1 + S_L h_{*,L} - S_R h_{*,R} = S_*(h_{*,L} - h_{*,R}) \\ D_2 + S_*(S_L h_{*,L} - S_R h_{*,R}) = S_*^2(h_{*,L} - h_{*,R}) \\ D_3 + S_L h_{*,L} v_L - S_R h_{*,R} v_R = S_*(h_{*,L} v_L - h_{*,R} v_R) \end{cases}$$

从前两式联立即得

$$S_* = \frac{D_2}{D_1}$$

再从线性方程组解出 $h_{*,L}$ 与 $h_{*,R}$, 即可进一步算出 $\mathbf{U}_{*,L}$ 与 $\mathbf{U}_{*,R}$ 。

由跳跃条件可计算出 $\mathbf{F}_{*,L}$ 与 $\mathbf{F}_{*,R}$, 从而 HLLC 通量

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^{hll} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & 0 < S_L < S_R \\ \mathbf{F}_{*,L} & S_L \leq 0 \leq S_* \\ \mathbf{F}_{*,R} & S_* \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{F}_R & S_L < S_R < 0 \end{cases}$$

12 第十四周

12.1 书面作业

1. • L^2 稳定

代入 $u_j^n = \lambda^n e^{ikjh}$ 可得

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + a \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h} = \nu \frac{e^{ikh} + e^{-ikh} - 2}{h^2}$$

记 $\xi = kh$ 有

$$\lambda = 1 - \sigma i \sin \xi - 4r \sin^2 \frac{\xi}{2}$$

从而进一步计算得

$$|\lambda|^2 = 1 + (4\sigma^2 - 8r) \sin^2 \frac{\xi}{2} + (16r^2 - 4\sigma^2) \sin^4 \frac{\xi}{2}$$

从而稳定性也即保证

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (4\sigma^2 - 8r) \sin^2 \frac{\xi}{2} + (16r^2 - 4\sigma^2) \sin^4 \frac{\xi}{2} \leq 0$$

考虑 $\sin^2(\xi/2)$ 可以在 $[0, 1]$ 任取, 这又等价于

$$\forall t \in [0, 1], \quad (4\sigma^2 - 8r) + (16r^2 - 4\sigma^2)t \leq 0$$

由线性性, 此即等价于 $t = 0$ 、 $t = 1$ 时满足, 前者对应

$$\sigma^2 \leq 2r$$

后者对应

$$r \in [0, \frac{1}{2}]$$

由于 $r > 0$ 已经成立, 这即是要求的 L^2 稳定性条件。

• 局部极值原理

整理可得

$$u_j^{n+1} = (1 - 2r)u_j^n + (r - \sigma/2)u_{j+1}^n + (r + \sigma/2)u_{j-1}^n$$

由于三个系数的和为 1, 局部极值原理满足当且仅当它们都非负: 若它们都非负则直接放缩得结论; 若有系数为负, 另两系数和超过 1, 取负系数对应的 $u_k^n = 0$, 另两为 1 得矛盾。

由此, 局部极值原理成立等价于

$$1 - 2r \geq 0, \quad 2r \geq |\sigma|$$

第一个条件即 $r \leq \frac{1}{2}$, 第二个条件可化为雷诺数限制 $Re_h \leq 2$ 。

2. 根据常微分方程数值解理论, 只要 $\lambda\tau$ 落在绝对稳定性区域中, 解即对模型方程稳定。这里

$$\lambda\tau = -2\sigma \cos(\pi h) \left(\frac{1}{Re_h} \cos(\pi h) + i \sin(\pi h) \right)$$

以此进行分析, 下考虑一般方程 $x' = f(x, t)$, 用 x_n 表示 x 在 $n\tau$ 处的值, 由于实际上只有 $f(x, t) = f(x) = \lambda x$, 可简化推导:

• 一阶

即为欧拉方法

$$x_{n+1} - x_n = \tau \lambda x_n$$

代入模型方程可得

$$x_{n+1} = (1 + \lambda\tau)x_n$$

于是绝对稳定当且仅当

$$|1 + \lambda\tau| < 1$$

当 $h < \frac{1}{2}$ 时, $\lambda\tau$ 实部为负, 从而 τ 取充分小可稳定。

- 二阶

将其写为

$$F_1 = \tau\lambda x_n$$

$$F_2 = \tau\lambda(x_n + F_1)$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$$

代入可得

$$x_{n+1} = \left(1 + \lambda\tau + \frac{1}{2}\lambda^2\tau^2\right)x_n$$

于是绝对稳定当且仅当

$$\left|1 + \lambda\tau + \frac{1}{2}\lambda^2\tau^2\right| < 1$$

当 τ 充分小时只有一次项关键, 由此相同理由可得 $h < \frac{1}{2}$ 时 τ 取充分小可稳定。

- 三阶

将其写为

$$F_1 = \tau\lambda x_n$$

$$F_2 = \tau\lambda\left(x_n + \frac{1}{2}F_1\right)$$

$$F_3 = \tau\lambda\left(x_n + \frac{3}{4}F_2\right)$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{9}(2F_1 + 3F_2 + 4F_3)$$

代入可得

$$x_{n+1} = \left(1 + \lambda\tau + \frac{1}{2}\lambda^2\tau^2 + \frac{1}{6}\lambda^3\tau^3\right)x_n$$

于是绝对稳定当且仅当

$$\left|1 + \lambda\tau + \frac{1}{2}\lambda^2\tau^2 + \frac{1}{6}\lambda^3\tau^3\right| < 1$$

当 τ 充分小时只有一次项关键, 由此相同理由可得 $h < \frac{1}{2}$ 时 τ 取充分小可稳定。

- 四阶

将其写为

$$F_1 = \tau\lambda x_n$$

$$F_2 = \tau\lambda\left(x_n + \frac{1}{2}F_1\right)$$

$$F_3 = \tau\lambda\left(x_n + \frac{1}{2}F_2\right)$$

$$F_4 = \tau\lambda(x_n + F_3)$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

代入可得

$$x_{n+1} = \left(1 + \lambda\tau + \frac{1}{2}\lambda^2\tau^2 + \frac{1}{6}\lambda^3\tau^3 + \frac{1}{24}\lambda^4\tau^4\right)x_n$$

于是绝对稳定当且仅当

$$\left|1 + \lambda\tau + \frac{1}{2}\lambda^2\tau^2 + \frac{1}{6}\lambda^3\tau^3 + \frac{1}{24}\lambda^4\tau^4\right| < 1$$

当 τ 充分小时只有一次项关键, 由此相同理由可得 $h < \frac{1}{2}$ 时 τ 取充分小可稳定。

3. 考虑关于 ψ 的偏微分方程

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} &= \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}\end{aligned}$$

这里 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 外法向。

利用偏微分方程知识, 在区域与 $\mathbf{v}$ 具有适当正则性的情况下, 上述方程解存在唯一 (相差常数意义下)。另一方面, 将 $\mathbf{u}$ 的条件代入分解式可知分解满足要求当且仅当 ψ 满足上述方程, 由此即得正交分解存在唯一。

4. • 弱问题

由于 $\mathbf{u}$ 的空间为 $[H_0^1(\Omega)]^d$ (相当于指定边界条件 $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$)、 p 的空间为 $L_0^2(\Omega)$ (相当于 $L^2(\Omega)$ 在相差常数视为相同的意义, 可通过积分为 0 保证), $\mathbf{v}$ 、 q 的空间亦相同。

分布意义上为 0 即为与任何适当光滑的函数乘积积分为 0, 由此可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\nabla p - \nabla^2 \mathbf{u}) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx, \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \\ - \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega)\end{aligned}$$

分部积分可得

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla(p - \nabla \cdot \mathbf{u}) dx = \int_{\partial\Omega} (p - \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v})(p - \nabla \cdot \mathbf{u}) dx$$

由于已知 $\mathbf{v}$ 在边界上为 0, 将此代入第一式即得

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx, \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$$

这就是所求的弱形式。

• 鞍点问题

我们用 $\nabla \mathbf{u}$ 直接表示 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 以简化书写。直接利用前一部分结果计算可发现

$$\begin{aligned}L(\mathbf{u} + \mathbf{v}, p + q) - L(\mathbf{u}, p) &= J(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - J(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} (p \nabla \mathbf{v} + q \nabla \mathbf{u} + q \nabla \mathbf{v}) dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})(\nabla \mathbf{v}) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^2 dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} (p \nabla \mathbf{v} + q \nabla \mathbf{v}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^2 dx - \int_{\Omega} q \nabla \mathbf{v} dx\end{aligned}$$

由于 q 的积分恒为 0, $\mathbf{v}$ 给定时, 若存在 q 使得 $q \nabla \mathbf{v}$ 积分非零, 可以让 q 乘倍数使得结果任意大, 因此最大值当且仅当

$$\int_{\Omega} q \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega)$$

时存在, 为

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^2 dx$$

而此时其最小值即在 $\mathbf{v} = 0$ 时取到 (由于 $\mathbf{v}$ 边界为 0, 梯度为 0 可知测度意义下为 0), 由此鞍点问题的解的确为 $(\mathbf{u}, p)$ 。

12.2 实验报告

根据文档，其模拟的二维无量纲化 NS 方程为

$$\begin{aligned} u_t + p_x &= -(u^2)_x - (uv)_y + \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t + p_y &= -(uv)_x - (v^2)_y + \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy}) \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned}$$

考虑矩形区域 $[0, l_x] \times [0, l_y]$ 以矩阵网格离散，并设置无滑移边界条件，也即四条边上的 u 、 v 固定为

$$u(x, 0, t) = u_S(x), \quad u(x, l_y, t) = u_N(x), \quad u(0, y, t) = 0, \quad u(l_x, y, t) = 0$$

$$v(x, 0, t) = 0, \quad v(x, l_y, t) = u_S(x), \quad v(0, y, t) = v_W(y), \quad v(l_x, y, t) = v_E(y)$$

在代码中，我们考虑 $u_N = 1$ ，且 $u_S = v_E = v_W = 0$ ，并假定初值 u 、 v 、 p 均为 0。作图时背景的等高线图由流函数 q 绘制，其满足 $-q_y = u$ 、 $q_x = v$ 。流函数的等高线对应流线，即每点方向与流场速度相切的平面曲线，从流线 (图中白线) 的变化即可看出流动过程。

以代码中默认的初始数据 $l_x = l_y = 1$ ，时间步长 $\tau = 0.01$ ，空间方向离散点数 $n_x = n_y = 90$ (采用交错网格离散策略) 为例，在接近初始时刻与 t 为 0.8、1.6、2.4、3.2、4 时刻的速度场与流函数图如图 23。

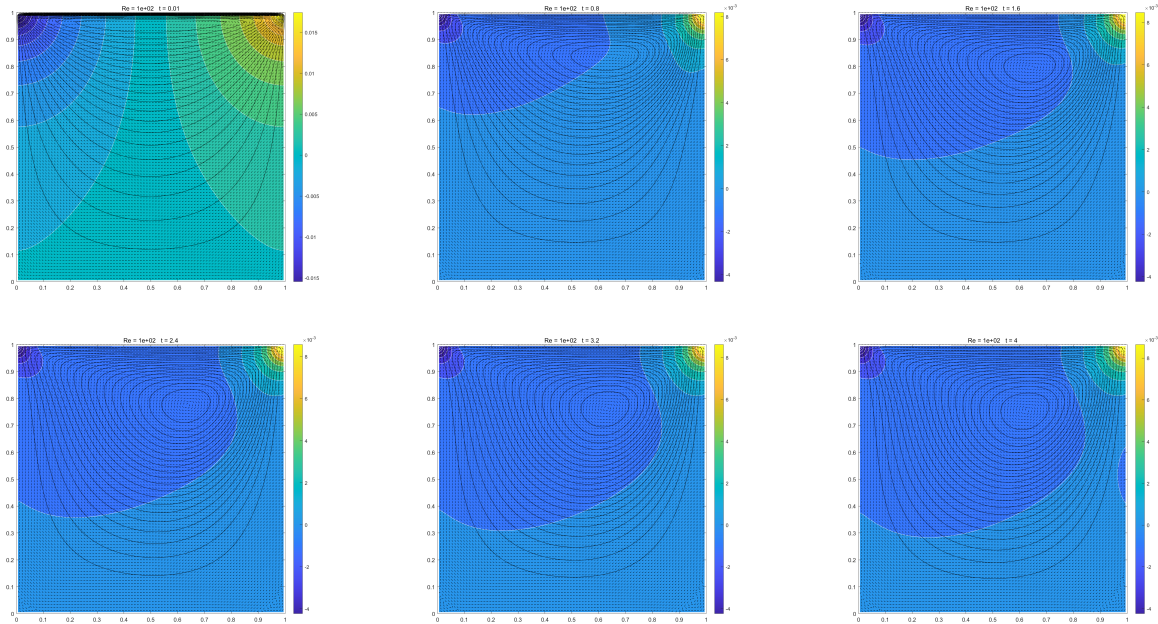


图 23: 二维 NS 方程模拟效果

从图中也可看出方程产生的湍流，由此，湍流中心的捕获可以称为检测算法精确性的重要因素。

接下来，我们测试迭代的稳定性。我们分别取 τ 为 10^{-4} 、 10^{-3} 、 10^{-1} 、1，并考虑 $n_x = n_y = 90$ 与 $n_x = n_y = 45$ 两种情况，模拟到 $t = 4$ 时刻效果如图 24。这里左侧为 $n_x = n_y = 90$ 、右侧为 $n_x = n_y = 45$ 时，从上到下时间步长逐渐增加。可以发现，时空步长越精细，的确能使得对湍流中心的捕获逐渐收敛，绘制的等高线形状也更加接近。另一个有趣的情况是，时间步长越精细，得到的 q 的量级就越低，而空间步长在此情况下精细反而导致了其最大值的提升。这基本是由于此时流场已几乎收敛，而边界处的 q 相对更大，此性质在调整雷诺数时仍然成立。单独更换 n_x 或 n_y 的结果与上述情况类似，这里不再展示得到的图片。

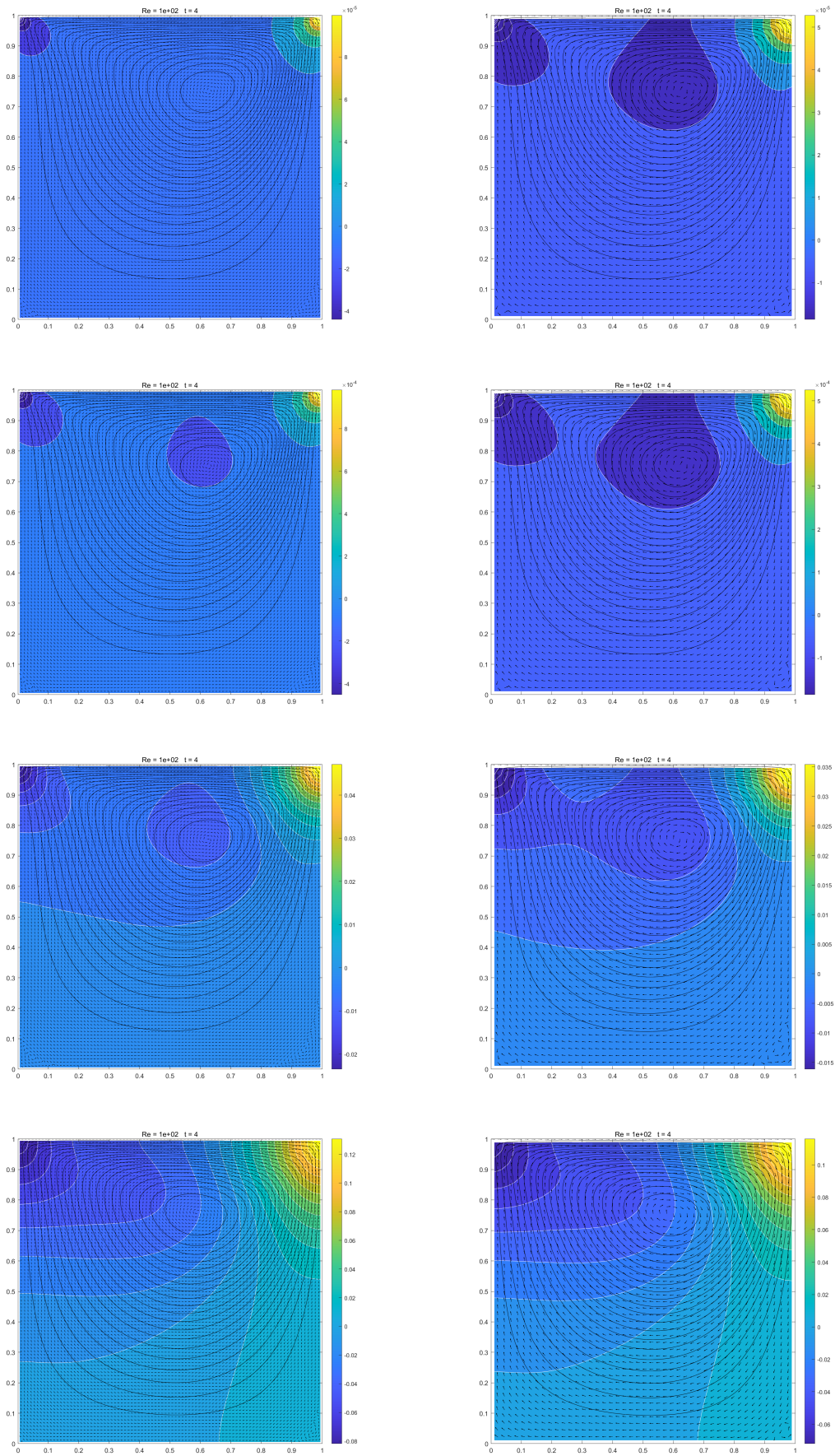


图 24: 二维 NS 方程稳定性测试

此外，算法的稳定性相对很好，取定 $\tau = 0.1$ 时，即是 $n_x = n_y = 600$ 也能计算出收敛的结果，而固定 $n_x = n_y = 45$ 时，即使 τ 很小 (10^{-4})，也能保证结果计算的收敛性。由此，其对网比的上下限制相对宽松，之后调整雷诺数时同样仍然可发现此性质。

最后，我们观察雷诺数调整时的结果。将参数固定为 $n_x = n_y = 90$ 、 $\tau = 0.001$ ，在雷诺数分别为 1、10、100、1000 时 $t = 8$ 的结果如图 25。

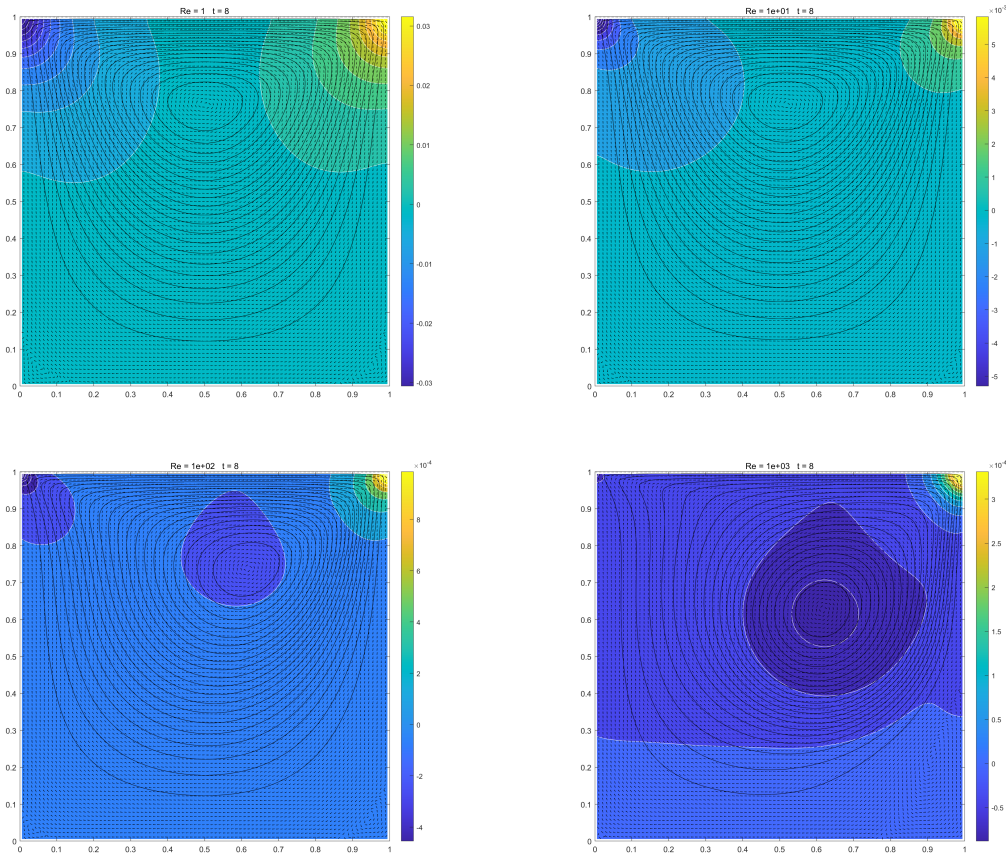


图 25: 二维 NS 方程调整雷诺数效果

可以发现，雷诺数越小时，过程中的湍流中心越靠近中轴，且观察迭代过程可以发现更加容易稳定。当雷诺数很大 (如最后一个例子 $Re = 1000$) 时，迭代将呈现更加不稳定的性态，总体来说，顶端产生的湍流中心将先向右移动，再向左下逐渐收敛。

13 第十五周

13.1 书面作业

1. 先证明等号。

将左侧写为

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dx$$

利用积分、求导可交换与乘积求导法则直接改写为

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t dx$$

于是利用 NS 方程即改写为

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p) dx$$

下面进行一些展开，直接利用乘积求导法则计算可知：

$$\mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} = u(u_{xx} + u_{yy}) + v(v_{xx} + v_{yy}) = (uu_x)_x - u_x^2 + (uu_y)_y - u_y^2 + (vv_x)_x - v_x^2 + (vv_y)_y - v_y^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla p = up_x + vp_y = (up)_x - pu_x + (vp)_y - pv_y$$

利用乘积求导法则与不可压缩条件 $u_x + v_y = 0$ 计算有：

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= u(uu_x + vu_y) + v(uv_x + vv_y) \\ &= \frac{1}{3}(u^3)_x + \frac{1}{2}(u^2v)_y + \frac{1}{2}(uv^2)_x + \frac{1}{3}(v^3)_y - \frac{1}{2}(u^2v_y + v^2u_x) \\ &= \frac{1}{3}(u^3)_x + \frac{1}{2}(u^2v)_y + \frac{1}{2}(uv^2)_x + \frac{1}{3}(v^3)_y + \frac{1}{2}(u^2u_x + v^2v_y) \\ &= \frac{1}{2}(u^3)_x + \frac{1}{2}(u^2v)_y + \frac{1}{2}(uv^2)_x + \frac{1}{2}(v^3)_y \end{aligned}$$

将以上三个式子代入原式即得等号成立。

对于不等号，首先由 $u_x + v_y = 0$ 可消去 $p(u_x + v_y)$ 的积分，由 $\nu \geq 0$ 与 $u_x^2 \geq 0$ 、 $u_y^2 \geq 0$ 、 $v_x^2 \geq 0$ 、 $v_y^2 \geq 0$ 即得到结论。

2. • 全隐式全离散投影格式

直接在对应点离散第一个方程可得

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\tau} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{h} &= \nu \frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+1} + u_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - 4u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{h^2} \\ \frac{v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - v_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\tau} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{h} &= \nu \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+1} + v_{i+\frac{1}{2},j-1}^{n+1} + v_{i+\frac{3}{2},j}^{n+1} + v_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} - 4v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}}{h^2} \end{aligned}$$

此方程的边界条件为边界上 u^{n+1} 、 v^{n+1} 全为 0，从而事实上过程中只会涉及内部的点。

再推导压力离散，设 $D = \nabla \cdot \mathbf{u}$ ，在不考虑其恒零时，第一个方程两端作散度得到

$$D_t + \Delta p = \nu \Delta D$$

在 $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ 离散，并指定 $n + 1$ 时刻 D 为 0，可得

$$\begin{aligned} \frac{p_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} + p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} + p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{n+1} + p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} - 4p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{h^2} \\ = \frac{D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{\tau} + \nu \frac{D_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^n + D_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^n + D_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - 4D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{h^2} \end{aligned}$$

这里 D 可以近似为

$$D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - u_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{h} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - v_{i+\frac{1}{2},j}^n}{h}$$

为保证散度为 0, 边界条件取为

$$D_{N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -D_{N-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad D_{-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -D_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

$$D_{i+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}} = -D_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}, \quad D_{i+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = -D_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

- 涡流函数离散

涡流函数公式为 (边界条件为 ψ 与其法向导数为 0)

$$\omega_t = \nu \Delta \omega, \quad -\Delta \psi = \omega$$

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \omega = v_x - u_y$$

对 ψ 进行中心差分可得

$$-\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - 4\psi_{ij}^n}{h^2} = \omega_{ij}^n$$

直接中心隐式差分 ω 可得

$$\frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^n}{\tau} = \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1} + \omega_{i,j+1}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1} - 4\omega_{ij}^{n+1}}{h^2}$$

由于 ψ 在边界处值与法向导数都为 0, 有

$$\psi_{iN}^n = \psi_{i0}^n = \psi_{Nj}^n = \psi_{0j}^n = 0$$

$$\psi_{i,N+1}^n = \psi_{i,N-1}^n, \quad \psi_{i,-1}^n = \psi_{i,1}^n, \quad \psi_{N+1,j}^n = \psi_{N-1,j}^n, \quad \psi_{-1,j}^n = \psi_{1,j}^n$$

于是进一步计算可得 ω 边界条件

$$\omega_{i0}^{n+1} = -\frac{2}{h^2}\psi_{i1}^{n+1}, \quad \omega_{iN}^{n+1} = -\frac{2}{h^2}\psi_{i,N-1}^{n+1}, \quad \omega_{0j}^{n+1} = -\frac{2}{h^2}\psi_{1j}^{n+1}, \quad \omega_{Nj}^{n+1} = -\frac{2}{h^2}\psi_{N-1,j}^{n+1}$$

3. 这里我们假设 r 方向离散为 N 个区间, θ 方向离散为 M 个区间, 考虑网格

$$\left\{ (r_a, \theta_b) \mid r_a = R_0 + \frac{a}{N}(R_2 - R_0), \theta_b = \frac{2\pi b}{M} \right\}$$

这里 θ 自然具有循环性, 即下标 b 与下标 $b+M$ 相同, 之后只讨论 r 方向的边界条件。记

$$h_r = \frac{R_2 - R_0}{N}, \quad h_\theta = \frac{2\pi}{M}$$

为构造格式, 对涡流函数公式 (边界条件为 ψ 与其法向导数为 0)

$$\omega_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega$$

$$-\Delta \psi = \omega$$

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x$$

$$\omega = v_x - u_y$$

应用极坐标变换

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

我们记算子

$$D_{0r} f_{ab}^n = \frac{f_{a+1,b}^n - f_{a-1,b}^n}{2h_r}$$

$$\delta_{0r}^2 f_{ab}^n = \frac{f_{a+1,b}^n + f_{a-1,b}^n - 2f_{ab}^n}{h_r^2}$$

$$\tilde{D}_{0\theta} f_{ab}^n = \frac{1}{r_a} \frac{f_{a,b+1}^n - f_{a,b-1}^n}{2h_\theta}$$

$$\tilde{\delta}_{0\theta}^2 f_{ab}^n = \frac{1}{r_a^2} \frac{f_{a,b+1}^n + f_{a,b-1}^n - 2f_{ab}^n}{h_\theta^2}$$

由此可写出

$$D_x = \cos \theta D_{0r} - \sin \theta \tilde{D}_{0\theta}$$

$$D_y = \sin \theta D_{0r} + \cos \theta \tilde{D}_{0\theta}$$

$$\bar{\Delta} = \delta_{0r}^2 + \frac{1}{r} D_{0r} + \tilde{\delta}_{0\theta}^2$$

进一步将迭代离散为

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} + D_y \psi^n D_x \omega^n - D_x \psi^n D_y \omega^n = \nu \bar{\Delta} \omega^n$$

$$-\bar{\Delta} \psi^{n+1} = \omega^{n+1}$$

第二个方程的边界条件即为

$$\psi_{0b}^n = \psi_{Nb}^n = 0$$

为给出第一个方程的边界条件, 由法向导数为 0 可得

$$\psi_{-1,b}^n = \psi_{1b}^n, \quad \psi_{N+1,b}^n = \psi_{N-1,b}^n$$

在 0 处代入表达式, 并利用 $\psi_{0b} = 0$ 与上式可得

$$\omega_{0b}^n = -\frac{2\psi_{1,b}^n}{h_r^2}$$

同理

$$\omega_{Nb}^n = -\frac{2\psi_{N-1,b}^n}{h_r^2}$$

每次迭代先计算内部的 ω^n , 再以此与边界点处得到所有的 ψ^n , 最后计算边界处的 ω^n 。由于差分近似均为二阶, 这的确具有二阶空间精度。

4. 由条件可知

$$\xi(a) = 0, \quad \xi(b) = 1, \quad \xi''(x) = P$$

可直接解出二次函数

$$\xi(x) = \frac{x-a}{b-a} + \frac{1}{2}P(x-a)(x-b)$$

为保证其在区间 $[a, b]$ 单调增, 可解出范围

$$|P| \leq \frac{2}{(b-a)^2}$$

为了作图, 我们先证明其放缩不变性。记

$$\tilde{P} = P(b-a)^2, \quad \tilde{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

可发现

$$\xi(x) = \tilde{x} + \frac{1}{2}\tilde{P}\tilde{x}(1 - \tilde{x})$$

形式与 $a = 0$ 、 $b = 1$ 时的 $\xi(x)$ 完全相同。

因此，对一般的 x ，其在 P 改变时的影响相当于对 x 进行平移、放缩，对 P 进行放缩后在 $a = 0$ 、 $b = 1$ 时的影响。我们固定 $a = 0$ 、 $b = 1$ 观察 P 的影响，效果如图 26。

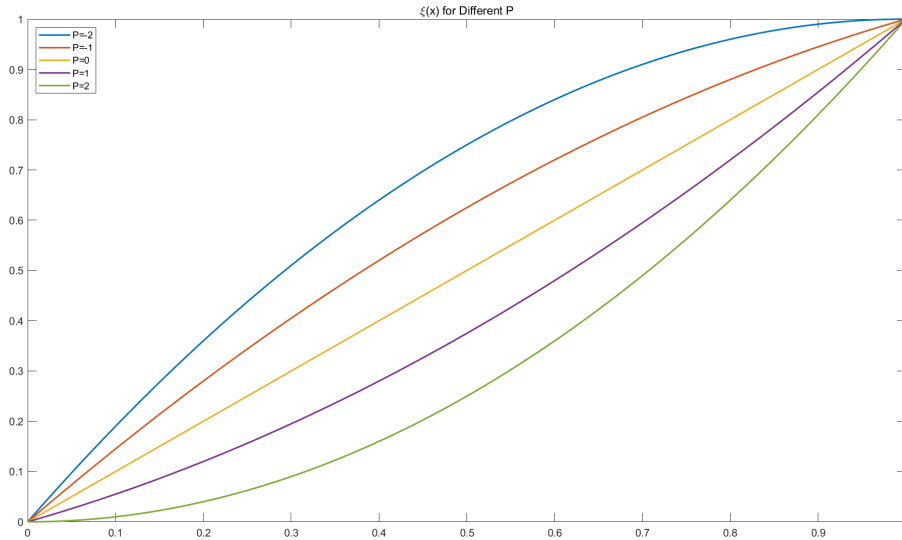


图 26: P 对 $\xi(x)$ 图像的影响

假设 ξ 均匀离散，我们考虑四个网格点的情况，设 $\xi_i = \frac{i}{4}$ ，我们在物理网络上作出不同 P 时 x_i 的位置如图 27。

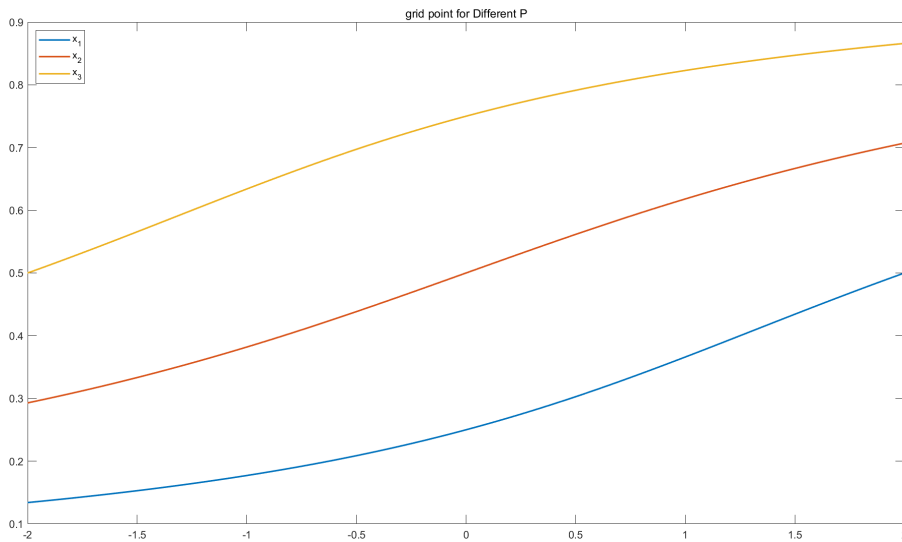


图 27: P 对网格点位置的影响

由此可见 P 取值不同时网格的偏移。当 P 为负时将向前偏移并向 0 处集中，当 P 为正时将向后偏移并向 1 处集中。