组合最优化算法 笔记

原生生物

* 邵嗣烘老师《组合最优化算法》课程笔记，练习解答见对应的作业文件。
* 对集合以绝对值符号表集合大小。

目录

一 背包问题

§1.1 组合优化绪论

§ **练习** (1.1)：描述 P 与 NP 问题。

组合优化：**有限**个对象集合 (可行解集，或所有可能解) 中找到最优的 (有清晰的数学表示)；该集合**元素数目巨大**，往往随问题规模 (用某种编码方式输入问题所需要的存储空间) 指数提升，不可能遍历。

§ **练习** (1.2)：找三个组合优化问题 (NP 问题) 使用遍历法，记录规模与计算时间。

1960 年代：认为算法能被问题规模的多项式出发控制住，则称为有效。所有存在有效算法的问题可以称为一类，即 P 类。

1970 年代，发现一些“最难”的问题，称为 NPC 问题，它们具有等价性：只要某一个存在有效算法，则其他所有均存在有效算法。

* 目前为止，几乎任何组合优化问题 (NP 问题) 要么是 P 的，要么是 NPC 的，或不知道属于哪类。

组合优化主要讨论**有效算法**，也即讨论 P 问题，而计算复杂性理论会讨论 NPC 问题。

* 对 P 问题主要讨论最低复杂度的有效算法，而对 NPC 问题主要讨论有近似比保证的算法，两者共同目标为**避免穷举**找到最好 (或较好) 的解。

下面以背包问题为例进行说明。

§1.2 背包问题精确解

任给 n 个物品 $I_1,\dots,I_n$，每个物品 I_i 体积 s_i、价值 c_i，要求 s_i、c_i 为正整数。另有容积 S 的背包，需要挑选物品集合 A，使得其中物品体积和不超过 S，且价值最高。

整数规划：考虑 x_i 为 0-1 变量，为 1 代表放入，为 0 代表不放入，则问题变为 n 维 0-1 变量寻找可行的最优解，输入为 $2n+1$ 个正整数，输出为 n 位，进一步变为求 (下标默认为 1 到 n)：

$$\max c(\vec{x}) = \sum_i c_i x_i$$

使得

$$\sum_i s_i x_i \le S, \quad x_i \in \{0,1\}$$

用 opt 表示上述问题的最优值，并进一步假定 $s_i \le S$ 均成立，则至少有 $\text{opt} \ge c_i$ 均成立。

精确算法 [动态规划]

对编号集合 A，令 s_A 表示其中物品体积和，c_A 表示价值和。定义二元组 (i,j)，其中 i 为 1 到 n，j 为 0 到 $\sum_i c_i$ 间的整数。

若存在 $A \subset [1,i]$ 使得 $c_A = j$ 且 $s_A \le S$，则定义 $c(i,j)$ 为使 s_A 最小的 A，否则认为 $c(i,j)$ 为 nil，由此有

$$\text{opt} = \max_{c(n,j)\ne\text{nil}} j$$

初始化：$c(1,j)$ 当且仅当 $j=0$ 时为 $\varnothing$，$j=c_1$ 时为 $\{1\}$，否则为 nil。

循环计算：对 i 从 2 到 n、j 从 0 到 $\sum_i c_i$，若

$$c(i-1, j-c_i) \ne \text{nil}$$

$$S_{c(i-1,j-c_i)} \le S - s_i$$

且 $c(i-1,j) = \text{nil}$ 或非空时 $S_{c(i-1,j)} > S_{c(i-1,j-c_i)} + s_i$，则 $c(i,j) = c(i-1,j-c_i) \cup \{i\}$，否则 $c(i,j) = c(i-1,j)$。

§ **练习** (1.3)：证明此算法可以求出最优结果。

问题：复杂度为 $O(n^3 M)$，其中 M 为 c_i 中最大值，其为**伪多项式时间**算法，与输出内容有关。

§1.3 性能比与贪婪算法

近似算法 [贪婪算法]

考虑价容比 c_i/s_i，按大小递减排列，不妨设编号小的价容比更大，则直接按照从 1 到 n 的顺序放入 A。若能全部放入则直接输出。否则设第 $k+1$ 个加入时体积超过 S，输出可行选择

$$c_G = \max\left\{\sum_{i=1}^{k} c_k, c_{k+1}\right\}$$

* 只需要 $O(n\ln n)$ 复杂度，远比精确算法快。贪婪算法可行的原因：模型可以排列出某种**单调性**结构。

* 这门课研究的主题是**有理论保障的近似算法**，此处性能比即为所需的理论保障 [近似算法主要指最优值接近，可能与最优解相差甚远]。

* 并非所有离散算法中都存在可以满足需求的近似解，有时必须寻找最优解，例如密码学中，也不在这门课讨论的范畴内。

性能比：$\mathrm{opt} < 2c_G$，意味着结果不会太差。

● 证明：

若能全部放入则 $\mathrm{opt} = c_G$，得证。否则，至少有

$$\mathrm{opt} \geq \sum_{i=1}^{k} c_i$$

考虑松弛后的连续线性规划问题，求

$$\max c(\vec{x}) = \sum_i c_i x_i$$

使得

$$\sum_i s_i x_i \leq S, \quad x_i \in [0,1]$$

求出最优值 $\hat{c}$ (见下方练习) 后，由定义有 $\mathrm{opt} \leq \hat{c}$，直接计算可知 (不等号由无法放入第 $k+1$ 个即得)

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^{k} c_i + c_{k+1}\frac{S - \sum_{i=1}^{k} s_i}{s_{k+1}} < \sum_{i=1}^{k} c_i + c_{k+1}$$

由此即有 $\hat{c} < 2c_G$，从而 $\mathrm{opt} < 2c_G$，得证。

§ **练习** (1.4)：证明上述线性规划问题最优解为

$$x_j = \begin{cases} 1 & j = 1, \ldots, k \\ \frac{1}{s_{k+1}}\left(S - \sum_{i=1}^{k} s_i\right) & j = k+1 \\ 0 & j > k+1 \end{cases}$$

* 希望进一步提升性能比 (即希望比 2 更小的倍数)。

想法：**按价值分组**之后再按贪婪方法选择。

将物品按照价值阈值 α 分为两组，价值不超过 α 的物品集合记为 A_α，其余为价值大于 α 的物品，记为 B_α。

为总价值大，应尽量多选出价值大于 α 的物品，而最优解中最多能选择 $\frac{\mathrm{opt}}{\alpha} \leq \frac{2c_G}{\alpha}$ 个 B_α 中的物品。

§1.4 更好的近似算法

分组贪婪

做法：对某 α，先利用贪婪找到 c_G，并分出 A_α、B_α，设 $|A_\alpha| = m$，且按照价容比排序，计算出 $\varepsilon = \frac{\alpha}{c_G}$。

对满足 $|I| \le 2/\varepsilon$ 的集合 $I \subset \{m+1,\dots,n\}$，若 $\sum_{i\in I} s_i > S$ 则置 $c(I)$ 为 0，否则记 $c_0(I)$ 为将体积去除 $S-\sum_{i\in I} s_i$ 后对 A_α 应用贪婪算法得到的结果，记

$$c(I) = c_0(I) + \sum_{i\in I} c_i$$

对所有 I 取最大值作为此算法最优结果 c_{GG}。
* 分析可知计算代价最高的步骤为遍历过程，也即 $O(n^{1+\varepsilon/2})$。
性能比：$\mathrm{opt} \le (1+\varepsilon)c_{GG}$。

- 证明：

  设最优解包含编号集合为 I^*，设 $\bar{I} = I^* \cap A_\alpha$，则根据之前分析可知 $|\bar{I}| \le \frac{2}{\varepsilon}$，且满足 (右侧因 A_α 中所有物品价值不超过 α)

  $$C(\bar{I}) \le \mathrm{opt} \le C(\bar{I}) + \alpha$$

  而 $c_{GG} \ge C(\bar{I})$，于是即得

  $$\mathrm{opt} \le c_{GG} + \varepsilon c_G$$

  只需证明 $c_{GG} \ge c_G$ 即得结论，而通过考虑 c_G 中选择的 A_α 中物品集合 I_G，则 $|I_G| \le \frac{c_G}{\alpha}$，于是 I_G 被遍历了，从而 $c_G = C(\bar{I}_G) \le c_{GG}$，得证。

另一种近似思路：**权衡算法** [复杂度出发改进]。
设 $M = \max_i c_i$，并令 $c'_k = \lfloor \frac{nc_k(1+h)}{M} \rfloor$，这里 h 为某给定正整数。考虑价值变为 c'_k 后，用精确法求解最优解，利用精确算法复杂度可知其复杂度为 $O(n^4 h)$，记此最优解对应的原问题结果为 c_{GGG}。
性能比：$\mathrm{opt} \le \left(1+\frac{1}{h}\right)c_{GGG}$。
§ **练习** (2.1)：证明权衡算法的性能比结论。

§1.5　背包问题等价形式

* 组合问题一般都有三种形式：**整数规划**形式、**判定**形式与**图**形式。
背包问题判定形式：任给 $2n+2$ 个正整数 S、$s_1,\dots,s_n$、$c_1,\dots,c_n$ 与 K，判定是否存在 $x_1,\dots,x_n \in [0,1]$ 使得

$$\sum_{i=1}^n x_i s_i \le S, \quad \sum_{i=1}^n x_i c_i \ge K$$

§ **练习** (2.2)：证明背包问题存在有效算法，当且仅当其判定形式存在有效算法。

背包问题图形式：构造网格所有顶点为 (i,j)，其中 $0 \le i \le n+1$，$0 \le j \le S$。
当 $i < n$ 时，连接 $(i-1,j) \to (i,k)$ 当且仅当 $j=k$，此时边权为 0；或 $k = j + s_i$，此时边权为 $-c_i$。
当 $i = n$ 时，将所有 (n,j) 连接至 $(n+1,S)$，边权为 0。
等价性：从 $(0,0)$ 到 $(n+1,S)$ 的最短路径即对应背包问题最优解的相反数。
§ **练习** (2.3)：验证图形式的等价性结论。
* 非负权重最短路为 P 问题，但可能为负时为 NPC 问题。不过，由于此图为无环图，事实上仍然为 P 问题，但由于出现了 S，算法事实上是伪多项式时间的。

二　最短路径问题

§2.1　定义与基础版本

基本定义

考虑有向图 $D=(V,A)$，其中 V 为顶点集，A 为边集，每边可写为 (u,v) 或 $u\to v$。
途 [walk]：顶点、边相间的序列 $(v_0,a_1,v_1,a_2,v_2,\dots,a_m,v_m)$，其中 a_i 为 $v_{i-1}\to v_i$ 的边 (m 可以等于 0)。
路 [pass]：顶点不重复的途。
长度：给定每边 a 的权 $l(a)$，途/路的长度定义为 $\sum_i l(a_i)$。
s-t 图：固定某两点为源点 s 与汇点 t 后的图。

最短路问题-基础版本
假设所有边权均为 1，求 s 为起点 t 为终点的最短 (长度最小) 路，定义长度为 s 与 t 间的**距离**，若不存在这样的路则称距离为 ∞。
广度优先遍历：记 V_i 为到 s 距离为 i 的节点集合，通过

$$V_{i+1}=\left\{v\in V\setminus\bigcup_{k=0}^{i}V_i\ \middle|\ \exists u\in V_i,(u,v)\in A\right\}$$

由 $V_0=\{s\}$ 开始遍历，直到找到 $V_{i+1}=\varnothing$，可找到最短路径，且为多项式量级。
s-t 割：称 $A'\subset A$ 为 s-t 割，若存 $U\subset V$ 使得 $s\in U,t\notin U$，且 A' 为所有以 U 为起点，U 外的点为终点的边的集合 (可记为 $\delta^{out}(U)$)。
§ **练习** (2.4)：证明基础版本最短路问题的最优值等于不相交 s-t 割的最大个数。

§2.2 一般情况

最短路问题-正权版本
若所有边权均为正，则可以通过 $O(|V|^2)$ 量级的算法得到 s 为起点 t 为终点的最短路。
Dijkstra 最短路径算法：

1. 取 U，$f(s)=0$，其余点处 $f(s)=\infty$。
2. 令 u 为满足 $f(u)$ 最低的 u；
3. 对每条边 $a=(u,v)\in A$，若 $f(v)>f(u)+l(a)$，则 $f(v)=f(u)+l(a)$；
4. 从 U 中去除 u，回到第二步，直到 U 为空集或其中所有点 $f(u)=\infty$。

命题：这样的迭代给出的 $f(v)$ 即为 v 到 s 距离。
• 证明：
　　记实际距离为 $d(v)$，根据计算过程可发现 $f(v)\geq d(v)$，只需证明 $v\in V\backslash U$ 时一直有 $f(v)=d(v)$ 即可。
　　利用归纳，只要证明每步去除的 u 满足 $f(u)=d(u)$ 即可。若否，考虑实际最短路中 U 中节点最小下标 i，可发现 s 到 v_i 的路径长度已经 $\geq f(u)$，矛盾。

* 对稠密图，上述复杂度可以接受，但对稀疏图 ($|E|\ll|V|^2$)，希望有更快算法。
优化：考虑到主要复杂度在于求解最小顶点，算法可以达到 $O((|E|+|V|)\log|V|)$ 量级。
§ **练习** (2.5)：利用合适的数据结构构造 $O((|E|+|V|)\log|V|)$ 复杂度的正权最短路径算法。

最短路问题-无负环版本
若边权可以为负，一般无 P 算法，但不存在负长度 [所有边权和为负] 的有向环时，存在 P 算法。
* 满足上述条件的有向环，若存在 s-t 途，则最短 s-t 路存在。
• 证明：
　　由于不存在负长度有向环，有重复顶点时一定长度超过无重复顶点时，由此考虑所有途中长度最短的即为最短路。

§ **练习** (2.6)：构造无负环最短路的 Bellman-Ford 算法并证明其正确性。

§2.3　优化问题算法设计概述

考虑可行域 Ω 上函数 $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ 的最小/最大值问题，其取值范围离散。
若原问题难以处理 [可由**图灵机**严谨定义]，设计近似算法一般分为三步：

1. 将原始问题输入参数、目标函数或可行域作一定**扰动** [实质上是更换问题，如背包问题时将离散取值修改为连续取值]，得到容易处理的问题。

2. 设计求解新问题的有精度 [性能比] 保证的算法。若所得解不是原问题的可行解，需要处理为某个接近的可行解。

3. 估计性能并得到保证。以值域为正的最小值问题为例，假设 $f(x^*)$ 为 $f(x)$ 在 Ω 中的最优值，对应最优解 x^*，在第一步中讲可行域限制到子集 Γ 上，且限制后的最优解为 y^*，可认为 y^* 是 x^* 的近似。对 x^* 作一定变换成为 Γ 上的元素 y，则有

$$\frac{f(y^*)}{f(x^*)}\le\frac{f(y)}{f(x^*)}$$

   得到性能比的一个上界。

三　贪婪算法

§3.1　相关定义

贪婪算法一般流程：

1. 定义**可能解集** [一般比可行域更大] 上的**势函数** f；

   * 这里假定可能解集是一些集合的集合。

2. 从 $A=\varnothing$ 开始，每次添加元素 x_0，使得 $f(A\cup\{x_0\})$ 为所有 $A\cup\{x\}$ 中的最优。

3. 当 $f(A)$ 不能再改变时停止。

边际效应：随着 A 中元素越来越多，增加单个元素带来的势函数增量在减小 [数学上称为**次模性质**]。
* 问题：如何刻画 A 不断增加元素的过程？

独立系统 [世袭系统]：考虑元素个数有限的底集 E，其子集族 $\mathcal{I}$ 构成独立系统，若对任何 $I\in\mathcal{I}$，有 $I'\subset I\Rightarrow\in\mathcal{I}$。并称其中元素为独立集。
* 如图上无环子集构成的子集族。
基：**个数最多**的独立子集。
环：个数最少的**依赖集** [不独立的集合]。
秩：独立集的最大元素个数。
最大独立子集问题：设非负函数 $c:E\to\mathbb{R}^+$，记

$$c(I)=\sum_{e\in I}c(e)$$

任给独立系统 $(E,\mathcal{I})$ 与权函数 c，求 $\max_{I\in\mathcal{I}}c(I)$。

通过最大独立子集设计贪婪算法：

- **最长哈密顿圈**问题：对某完全图，给定每边正整数权值，求权值最大的哈密顿圈。

- 转化为最大独立子集问题。E 为完全图边集，$\mathcal{I}$ 为 E 的某子集，其或构成哈密顿圈，或为若干不相交路的并，c 即为边权。
- 贪婪算法：势函数 f 即为此处的 $c(I)$。将所有边按权值从大到小排序，从 $A=\varnothing$ 开始，每次选出 $c(x)$ 最大的满足 $A\cup\{x\}\subset\mathcal{I}$ 的 x 加入，直到无法加入。

设这样选出的边为 I_G，真实最优哈密顿圈为 I^*。

性能比：

$$1\le\frac{c(I^*)}{c(I_G)}\le\max_{F\subset E}\frac{v(F)}{u(F)}$$

这里 $u(F)$ 为 F 的极大独立子集 (不存在真包含它的独立子集) 的个数最小值，$v(F)$ 为 F 的独立子集个数最大值 (利用定义等价于极大独立子集个数最大值)。将不等号最右端记为 ρ，其只依赖独立系统，与权函数无关。

● 证明：

不妨设 $c(e_1)\ge c(e_2)\ge\cdots\ge c(e_n)$，记 E_i 为 E 中前 i 条边构成的集合，则 $E_i\cap I_G$ 一定是 E_i 的极大独立子集，否则能添入的边一定会被贪婪算法选到，矛盾。从而有 $|E_i\cap I_G|\ge u(E_i)$。

另一方面，由 I^* 为极大独立子集，$E_i\cap I^*$ 也应为 E_i 的独立子集，从而 $|E_i\cap I^*|\le v(E_i)$。

注意到，当 $e_i\in I_G$ 时 $|E_i\cap I_G|-|E_{i-1}\cap I_G|=1$，否则为 0，因此 $c(I_G)$ 为

$$c(e_1)|E_1\cap I_G|+\sum_{i=2}^{n}e_i(|E_2\cap I_G|-|E_{i-1}\cap I_G|)=\sum_{i=1}^{n-1}|E_i\cap I_G|(c(e_i)-c(e_{i+1}))+|E_n\cap I_G|c(e_n)$$

同理

$$c(I^*)=\sum_{i=1}^{n-1}|E_i\cap I^*|(c(e_i)-c(e_{i+1}))+|E_n\cap I^*|c(e_n)$$

由于已经假设了 $c(e_i)\ge c(e_{i+1})$，且 $c(e_n)\ge 0$，有

$$c(I^*)\le\sum_{i=1}^{n-1}v(E_i)(c(e_i)-c(e_{i+1}))+v(E_n)c(e_n)\le\sum_{i=1}^{n-1}\rho u(E_i)(c(e_i)-c(e_{i+1}))+\rho u(E_n)c(e_n)$$

而右侧即不超过 $\rho c(I_G)$。

上述证明对任何最大独立子集问题的非负权函数贪婪算法均成立。事实上，最长哈密顿圈问题中必然有 $\rho\le 2$，从而性能比可以控制。

● 证明：

利用 u,v 定义，只需证明若 I,J 为 F 的两个极大独立子集，则 $|J|\le 2|I|$。

若 F 中有哈密顿圈，或无哈密顿圈但有哈密顿路，则由定义则已经相等，同为顶点数/顶点数减一。

记 V_i 为 I 中度数为 i 的顶点集合，则 i 只能为 1,2，V_1 为端点集合，V_2 为中间点集合，于是

$$|I|=|V_2|+\frac{1}{2}|V_1|$$

由于 I 为 F 的极大独立子集，F 中每条边或至少有一个端点在 V_2 中，或连接 I 中同一条路的两个端点。

记 $J_2\subset J$ 为满足至少有一个端点在 V_2 中的边集合，$J_1=J\backslash J_2$，利用 J 为极大独立集合，J_2 最多只有两条边与 V_2 中的每一个顶点相连，因此 $|J_2|\le 2|V_2|$。另一方面，J_1 中每条边最多与 V_1 中两个端点相连，于是 $|J_1|\le\frac{1}{2}|V_1|$，由此求和可知

$$|J|=|J_1|+|J_2|\le\frac{1}{2}|V_1|+2|V_2|\le 2|I|$$

§ **练习** (3.1)：将最长有向哈密顿路问题转化为最大独立子集问题，并对应定义贪婪算法，计算性能比。

§ **练习** (3.2)：设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个独立系统，且假设 E 的所有极大独立集都含有 k 个元素。考虑非负权函数 c，仍类似前文定义 ρ，并考虑权和最小的极大独立子集问题，设真实最优解 I'，对应的贪婪算法选出的集合为 I_G，证明

$$c(I')\le c(I_G)\le\frac{1}{\rho}c(I')+\frac{\rho-1}{\rho}kM,\quad M=\max_e c(e)$$

§3.2　拟阵

对于任何独立系统，都可以定义相应的 ρ，$\rho = 1$ 时的独立系统称为**拟阵**。根据定义即可知拟阵等价于其任何子集的极大独立子集个数均相等。

* 上节所说的图上无环子集构成的子集族事实上构成拟阵，称为**图拟阵**。若图连通，则拟阵的基为图的生成树，结点个数 $|V|-1$。

§ **练习** (3.3)：验证图拟阵构成拟阵。

* 有限向量组的线性无关组构成拟阵，称为**线性拟阵**。

利用拟阵的定义，若权函数**非负**，贪婪算法可以给出最大独立子集问题的最优解 (设计方法类似最长哈密顿圈问题中)。

反之，只要独立系统不为拟阵，对某个权函数，贪婪算法无法给出最优解。

● 证明：

存在子集合 $F \subset E$ 使得 F 有两个大小不同的极大独立子集 I、I'，不妨设 $|I| > |I'|$，由此可定义如下的非负权函数

$$c(e) = \begin{cases} 1+\varepsilon & e \in I' \\ 1 & e \in I \backslash I' \\ 0 & e \in E \backslash (I \cap I') \end{cases}$$

且 $0 < \varepsilon < \frac{1}{|I'|}$。进一步计算即得贪婪算法会取出 I'，但 $c(I) > c(I')$，并非最优解。

若 E 的子集族 $\mathcal{I}$ 构成独立系统，则 E 上存在 k 个拟阵 $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k$，使得

$$\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{G}_i$$

● 证明：

记 $c_1, \dots, c_k$ 是 $\mathcal{I}$ 的全部极小相关集 (也即极小的非独立子集的集合)，下面构造对应的 $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k$。对每个 $i = 1, \dots, k$ 定义

$$\mathcal{G}_i = \{F \subset E \mid c_i \not\subset F\}$$

利用它们为全部极小相关集可验证 $\mathcal{G}_i$ 为独立系统且交为 $\mathcal{G}$，只需证明 $\mathcal{G}_i$ 为拟阵。

考虑 $\mathcal{G}_i$ 中，对任何 $F \subset E$，若 $c_1 \not\subset F$，则 F 自身 (且只有自身) 为极大独立子集，否则，其每一个极大独立子集为去掉 c_i 中任一个元素，由此个数均为 $|F|-1$。

§ **练习** (3.4)：验证证明中构造的 $\mathcal{G}_i$ 为独立系统，且交为 $\mathcal{G}$。

反之，设 $\mathcal{I} = \cap_{i=1}^{k} \mathcal{G}_i$，且 $\mathcal{G}_i$ 为拟阵，则 $\mathcal{I}$ 为独立系统，且 $\rho \le k$。

● 证明：

可验证独立系统的交仍为独立系统，从而得证其为独立系统。

对任何 E 的子集 F，只需证明 $v(F) \le ku(F)$，也即 F 的两个极大独立子集 I, J 大小至多相差 k 倍 ($|J| \le k|I|$)。

设 I_i 为 $\mathcal{G}_i$ 中 $I \cup J$ 的极大独立子集，且其包含 I (考虑从 $\mathcal{G}_i$ 的独立子集 I 开始添加元素，直到极大)。任给元素 $e \in J \backslash I$，下证其最多出现在 $k-1$ 个 $I_i \backslash I$ 中。若否，其出现在全部 k 个 I_i 中，则 $e \cup \{I\}$ 为 $\mathcal{G}$ 的独立子集，与 I 的极大性矛盾。

由此即得

$$\sum_{i=1}^{k} |I_i| - k|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i \backslash I| \le (k-1)|J \backslash I| \le (k-1)|J|$$

同理构造 J_i 可知 (等号利用了拟阵的性质)

$$k|J| \le \sum_{i=1}^{k} |J_i| = \sum_{i=1}^{k} |I_i| \le k|I| + (k-1)|J|$$

从而得证。

* **最大三维匹配问题**：任给三个不相交的集合 X, Y, Z，给定 $X \times Y \times Z$ 上的非负权函数 c，求 $X \times Y \times Z$ 的一个子集，使得任意两三元组无共同元素，且三元组权和最大。

给定拟阵 $(E, \mathcal{G})$，对任何 $A \subset E$，定义 A 的**秩** $r(A)$ 为其中极大独立子集的最大个数。

§3.3　次模函数

次模函数：函数 $f : 2^E \to \mathbb{R}$ (或要求值域非负) 满足对 E 任意两子集 A, B 有

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \le f(A) + f(B)$$

§ **练习** (3.5)：证明 $r(A)$ 是次模函数。

* 直接定义 $f(A) = |A|$ 可发现其也为次模函数。

单调增函数：满足 $A \subset B$ 时 $f(A) \le f(B)$ 的函数 $f : 2^E \to \mathbb{R}$。

边际效应：对 2^E 上的次模函数 f，则对任何 $A, C \subset E$，有

$$\Delta_C f(A) \le \sum_{x \in C} \Delta_x f(A), \quad \Delta_C f(A) = f(A \cup C) - f(A), \quad \Delta_x f(A) = f(A \cup \{x\}) - f(A)$$

- 证明：

　　引理：f 为次模函数等价于对任何 $A \subset B \subset E, x \notin B$ 有

$$\Delta_x f(A) \ge \Delta_x f(B)$$

　　左推右：上式即为 $f(A \cup \{x\}) - f(A) \ge f(B \cup \{x\}) - f(B)$，而

$$B \cup \{x\} = (A \cup \{x\}) \cup B, \quad A = (A \cup \{x\}) \cap B$$

　　从而由次模函数定义得证。

　　右推左：从 $\Delta_x f(A) \ge \Delta_x f(B)$ 可以归纳得到对任何 $C \cap B = \varnothing$ 有 $\Delta_C f(A) \ge \Delta_C f(B)$，也即

$$f(A \cup C) - f(A) \ge f(B \cup C) - f(B)$$

　　对任何集合 D, E 考虑

$$A = D \cap E, \quad B = E, \quad C = D \backslash E$$

　　即可发现

$$f(D) + f(E) \ge f(D \cup E) + f(D \cap E)$$

　　原命题证明：由于交集部分不影响可不妨设 $A \cap C = \varnothing$。设 $C = \{x_1, \dots, x_n\}$，则利用引理可知

$$\Delta_C f(A) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i} f(A \cup \{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \ge \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i} f(A)$$

　　从而得证。

最小集合覆盖

任给集合 S 与 S 的子集构成的子集族 $\mathcal{C}$，满足其中所有子集并为 c，求 $\mathcal{C}$ 中个数最少的并为 S 的子集。

对 $\mathcal{C}$ 的一个子集族，定义函数

$$f(\mathcal{A}) = \left| \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right|$$

由于 $f(\mathcal{A})+f(\mathcal{B})-f(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$ 表示既在 $\cup_{A\in\mathcal{A}}A$ 中又在 $\cup_{B\in\mathcal{B}}B$ 中的元素个数，由此利用定义其为次模函数，

贪婪算法构造：输入 S 与 $\mathcal{C}$，初始化 $\mathcal{A}=\varnothing$，只要 $f(\mathcal{A})<|S|$，选取 $C\in\mathcal{C}$ 使得 $\Delta_C f(\mathcal{A})$ 最大，并加入 $\mathcal{A}$，在 $f(\mathcal{A})=|S|$ 时输出。

性能比：若上述算法选出的集合个数为 g，真实最优中元素个数为 m，设 γ 为 $\mathcal{C}$ 中最大子集的元素个数，则

$$1\le\frac{g}{m}\le 1+\ln\gamma$$

- 证明：

  设 $\mathcal{A}_G=\{A_1,\dots,A_g\}$ 为贪婪法给出的解，且按照选出顺序排列，也即 A_{i+1} 可以覆盖最多未被 A_i 覆盖的元素，将后者构成的集合记为 U_i,，并记 $\mathcal{A}_i=\{A_1,\dots,A_i\}$，则 $|U_i|=|S|-f(\mathcal{A}_i)$。

  设最优解为 $\mathcal{A}^*=\{C_1,\dots,C_m\}$。由于 U_i 一定可被最优解覆盖，一定存在 C_j 至少覆盖了 U_i 中 $\frac{|S|-f(\mathcal{A}_i)}{m}$ 个元素。

  由此，利用定义可知

$$f(\mathcal{A}_{i+1})-f(\mathcal{A}_i)\ge\frac{|S|-f(\mathcal{A}_i)}{m}$$

  也即

$$|S|-f(\mathcal{A}_{i+1})\le(|S|-f(\mathcal{A}_i))\left(1-\frac{1}{m}\right)$$

  利用 e 的定义归纳得

$$|U_i|\le|S|\mathrm{e}^{-i/m}$$

  由于 $|U_i|$ 从 $|S|$ 递减到 0，一定存在 $i_0\le g$ 使得 $|U_{i_0+1}|<m\le|U_{i_0}|$，之后最多迭代 $m-1$ 次，由此

$$g\le i_0+m\le m\left(1+\ln\frac{|S|}{m}\right)\le m(1+\ln\gamma)$$

* 事实上 $f(\mathcal{A}_{i+1})-f(\mathcal{A}_i)$ 的估算可以由次模性推出，规避更具体的抽屉原理运用。● 证明：

  利用贪婪算法定义可知

$$f(\mathcal{A}_{i+1})-f(\mathcal{A}_i)=\Delta_{\mathcal{A}_{i+1}}f(\mathcal{A}_i)\ge\Delta_{C_j}f(\mathcal{A}_i)$$

  对 j 求和即得

$$m\big(f(\mathcal{A}_{i+1})-f(\mathcal{A}_i)\big)\ge\sum_{j=1}^m\Delta_{C_j}f(\mathcal{A}_i)$$

  而

$$|S|-f(\mathcal{A}_i)=f(\mathcal{A}_i\cup\mathcal{A}^*)-f(\mathcal{A}_i)=\sum_{j=1}^m\Delta_{C_j}f(\mathcal{A}_i\cup\mathcal{A}^*_{j-1})$$

  再通过次模性可得成立。

最小次模覆盖：给定 E，定义 2^E 上单调增非负正规 (即 $f(\varnothing)=0$) 次模函数 f，求

$$\min c(A)=\sum_{x\in A}c(x)$$

这里 $A\in\Omega_f=\{A\subset E\mid\forall x\in E,\Delta_x f(A)=0\}$。

§ **练习** (4.1)：给出能化为最小次模覆盖问题的实例，并结合实例解释下方性能比结论的含义。

贪婪算法构造：只要存在 $x\in E$ 使得 $\Delta_x f(A)>0$，就选取 $\frac{\Delta_x f(A)}{c(x)}$ 最大的 x，并置 $A=A\cup\{x\}$。

性能比：

$$\frac{c(A_G)}{c(A^*)}\le H(\gamma),\quad\gamma=\max_{x\in E}f(\{x\}),\quad H(t)=\sum_{i=1}^t\frac{1}{i}\le 1+\ln t$$

- 证明：

引理：f 为单调增次模函数的充要条件为

$$\forall A \subset B \subset E, \quad \forall x \in E, \quad \Delta_x f(A) \geq \Delta_x f(B)$$

引理证明：考虑一个一个添入元素可知单调增等价于

$$\forall A \subset E, \quad \forall x \in E, \quad \Delta_x f(A) \geq 0$$

由此结合次模函数的等价定义 (见之前证明中引理) 即得证。

引理 2：f 为单调增次模函数，则

$$\Omega_f = \{A \subset E \mid f(A) = f(E)\}$$

证明：留作习题。

命题证明：记

$$A^* = \{y_1, \ldots, y_h\}, \quad r_i = \Delta_{x_i} f(A_{i-1}), \quad \zeta_{y,i} = \Delta_y f(A_{i-1}), \quad \zeta_{y,k+1} = \Delta_y f(A_G) = 0$$

定义 A^* 上的权函数 w，希望将 A_G 的权分配给 A^* 中元素，且其中每个 y 得到的权不超过 $H(\gamma)c(y)$，也即想要

$$c(A_G) \leq \sum_{y \in A^*} w(y), \quad w(y) \leq c(y)H(\gamma)$$

将上方条件称为第一式与第二式，我们验证如下的定义符合要求：

$$w(y) = \sum_{i=1}^{k} (\zeta_{y,i} - \zeta_{y,i+1}) \frac{c(x_i)}{\gamma_i}$$

利用次模性与正规性计算可发现

$$\sum_{y \in A_*} \sum_{i=1}^{k} (\zeta_{y,i} - \zeta_{y,i+1}) = \sum_{y \in A^*} f(\{y\}) \geq \sum_{j=1}^{n} \Delta_{y_j} f(A^*_{j-1}) = f(A^*) = f(A_G) = \sum_{i=1}^{k} r_i$$

第一式：配凑得

$$w(y) = \frac{c(x_1)}{r_1} \zeta_{y,1} + \sum_{i=2}^{k} \left(\frac{c(x_i)}{r_i} - \frac{c(x_{i-1})}{r_{i-1}} \right) \zeta_{y,i}$$

$$c(A_G) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=i}^{k} r_j - \sum_{j=i+1}^{k} r_j \right) \frac{c(x_i)}{r_i} = \frac{c(x_1)}{r_1} \sum_{j=1}^{k} r_j + \sum_{i=2}^{k} \left(\frac{c(x_i)}{r_i} - \frac{c(x_{i-1})}{r_{i-1}} \right) \sum_{j=i}^{k} r_j$$

因此只需证

$$\sum_{j=i}^{k} r_j \leq \sum_{y \in A^*} \zeta_{y,i}$$

而左侧为

$$f(A_G) - f(A_{i-1}) = f(A^*) - f(A_{i-1}) = f(A^* \cup A_{i-1}) - f(A_{i-1}) = \Delta_{A^*}(A_{i-1}) \leq \sum_{y \in A_k} \Delta_y f(A_{i-1})$$

从而得证。

第二式：对 $\zeta_{y,i}$ 进行讨论。若其大于 0，利用贪婪算法定义可知

$$\frac{c(x_i)}{r_i} \leq \frac{c(y)}{\zeta_{y,i}}$$

再由定义可知 $\zeta_{y,i} \geq \zeta_{y,i+1}$，于是可记 l_y 为使得 $\zeta_{y,i} > 0$ 的最大 i，有

$$w(y) = \sum_{i=1}^{l_y} (\zeta_{y,i} - \zeta_{y,i+1}) \frac{c(x_i)}{r_i} \leq \sum_{i=1}^{l_y} (\zeta_{y,i} - \zeta_{y,i+1}) \frac{c(y)}{\zeta_{y,i}}$$

利用放缩可估算出前方系数不超过 $H(f(\{y\})) \leq c(y)H(\gamma)$。

* 这里的证明思路为微调法，通过权重分配估计出结果。

§ **练习** (4.2)：证明 f 为单调增次模函数时

$$\Omega_f = \{A \subset E \mid f(A) = f(E)\}$$

* 练习 (4.3) 见附录。

* 记 $A_G = \{x_1, \ldots, x_k\}$，$A_0 = \varnothing$，$A_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$，若对每个 $i = 1, \ldots, k$ 有 $\Delta_{x_i} f(A_{i-1}) \geq c(x_i)$，则

$$c(A_G) \leq \left(1 + \ln \frac{f(A^*)}{c(A^*)}\right) c(A^*)$$

● 证明：

仍设 $A^* = \{y_1, \ldots, y_h\}$，记 $a_i = f(A^*) - f(A_i)$，且 $a_0 = f(A^*)$，则有

$$\Delta_{x_i} f(A_{i-1}) = a_{i-1} - a_i$$

由选择 x_j 时的策略并放缩可得

$$\frac{a_{j-1} - a_j}{c(x_j)} \geq \max_{1 \leq i \leq h} \frac{\Delta_{y_i} f(A_{j-1})}{c(y_i)} \geq \frac{\sum_{i=1}^{h} \Delta_{y_i} f(A_{j-1})}{c(A^*)} \geq \frac{\Delta_{A^*} f(A_{j-1})}{c(A^*)} = \frac{f(A^*) - f(A_{j-1})}{c(A^*)}$$

倒数第二个等号是由于真解在 Ω_f 中。由于分母即为 a_{j-1}，整理即得对任何 $j = 1, \ldots, k$ 有

$$a_j \leq a_{j-1} \left(1 - \frac{c(x_j)}{c(A^*)}\right)$$

另一方面，对 a_0，利用假设有

$$a_0 = f(A^*) = f(A_k) \geq \sum_{i=1}^{k} c(x_i) = c(A_k) \geq c(A^*)$$

且 $a_k = 0$，

由于 f 单调增，a_i 单调减，由此一定存在某个非负整数 $r \leq k$ 使得

$$a_{r+1} < c(A^*) \leq a_r$$

而通过之前的估算可知

$$\frac{a_r - a_{r+1}}{c(A_{r+1})} \geq \frac{a_r}{c(A^*)}$$

为了结合以上两式，设 $a'' = a_r - c(A^*) \geq 0$、$a' = c(A^*) - a_{r+1} > 0$，且将 $c(A_{r+1})$ 拆分成 c' 与 c'' 的和，使得 $c'a'' = a'c''$ (即比例相同)，则有

$$\frac{a'}{c'} = \frac{a_r - a_{r+1}}{c(A_{r+1})} \geq \frac{a_r}{c(A^*)}$$

于是再利用 $c' = c(A_{r+1}) - c''$ 可计算得放缩

$$c(A^*) = a_{r+1} + a' \leq a_r \left(1 - \frac{c''}{c(A^*)}\right)$$

进一步，反复利用之前估算放缩 a_r 可知

$$c(A^*) \leq a_0 \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{c(x_1)}{c(A^*)}\right) \left(1 - \frac{c''}{c(A^*)}\right)$$

再由 $1+x\le \mathrm{e}^x$ 可知

$$\frac{c(A^*)}{a_0}\le \exp\left(-\frac{c''+\sum_{i=1}^r c(x_i)}{c(A^*)}\right)$$

取 ln 即

$$c''+\sum_{i=1}^r c(x_i)\le c(A^*)\ln\frac{a_0}{c(A^*)}$$

而

$$\sum_{i=r+2}^k c(x_i)\le \sum_{i=r+2}^k \Delta_{x_i} f(A_{i-1})=a_{r+1}$$

将上两式的左侧求和加 c'，并将 c' 放大为 a' (利用之前得到的估计与 $a_r\ge c(A^*)$)，即可得到最终估算

$$c(A_k)\le c(A^*)\ln\frac{a_0}{c(A^*)}+a'+a_{r+1}$$

这就是结论。

§3.4　最大割问题

最大割问题：对无向无权图 $G=(V,E)$，对于 $A,B\subset V$，用 $E(A,B)$ 表示所有连接 A,B 中顶点的边集，最大割即为要找

$$\max_{A\subset V}|E(A,A^c)|$$

* 利用蒙特卡洛方法可以做到期望意义下近似比 $\alpha_{GW}\approx 0.878$。

§ **练习** (4.4)：设计近似比 $\ge 1/2$ 的最大割贪婪算法。

另一个近似比：$\alpha_T\approx 0.531$，人类历史上第一个大于 0.5 下界的最大割贪婪算法，称为**递归谱分解**。

思路：给图上的顶点赋予 $\{-1,0,1\}$ 中的取值以逐步确定 (某种**松弛**想法)，总体想法即，给定每点处 $-1,0,1$ 中的某个值，记 $G_0=G$，以某种规则定义 G 上每个顶点的取值，L_1、U_1、R_1 表示 G_0 中取值为 $-1,0,1$ 的顶点集合，取 $G_1=G_0[U_1]$ 代表 U_1 在 G 上的**诱导子图** (只保留 U_1 中的顶点与连接 U_1 两点的边)，并重新按规则定义取值、作分解，直到某次分解后不再存在 U_N，设此次对应的为 G_{N-1}，其分解出 L_N 与 R_N。

从后往前，得到全图划分为一系列的顶点子集

$$(L_N,R_N),\quad (L_{N-1},R_{N-1}),\quad \dots,\quad (L_1,R_1)$$

我们只需要定义合适的**划分规则**与**拼合规则**即可。

- **拼合规则**

  希望每次拼出来的是 G_N 中的较大割。

  记第 t 轮中

  $$C_t=|E(L_t,R_t)|,\quad X_t=|E(L_t\cup R_t,U_t)|,\quad M_t=C_t+X_t+|E(L_t,L_t)|+|E(R_t,R_t)|$$

  这里 M_t 即为总边数。

  第一步，考虑 G_{N-1} 的分割，有 $(L_{N-1}\cup L_N,R_{N-1}\cup R_N)$ 与 $(R_{N-1}\cup L_N,L_{N-1}\cup R_N)$ 两种备选，前者的割值为

  $$C_N+C_{N-1}+|E(L_N,R_{N-1})|+|E(L_{N-1},R_N)|$$

  后者为

  $$C_N+C_{N-1}+|E(L_N,L_{N-1})|+|E(R_{N-1},R_N)|$$

  而又注意到

  $$X_{N-1}=|E(L_N,R_{N-1})|+|E(L_{N-1},R_N)|+|E(L_N,L_{N-1})|+|E(R_N,R_{N-1})|$$

由此选取较大的结果必然满足割值至少为

$$C_N + C_{N-1} + \frac{1}{2}X_{N-1}$$

不断重复上述方法合并可以得到最终的两分割。

* 由此，只要分的某一步

$$C_t + \frac{1}{2}X_t \le \frac{1}{2}M_t$$

新产生的割值过小，可直接采用近似比 1/2 的贪婪算法，会有更好的效果。

- **划分规则**

0.531 近似比对应方案：每步最大化

$$\frac{C_t}{M_t - X_t/2}$$

0.614 近似比对应方案：每步最大化

$$\frac{C_t + X_t/2}{M_t}$$

* 后者更符合之前的割值估算，而事实上计算有

$$1 \ge \frac{C_t + X_t/2}{M_t} \ge \frac{C_t}{M_t - X_t/2}$$

这也是后者相较前者更好的原因。

前者的理由：计算可发现

$$\frac{C_t}{M_t - X_t/2} = \frac{2|E(L_t, R_t)|}{\mathrm{vol}(L_t \cup R_t)}$$

这里 vol 指度数之和，也即其在选择

$$\max\left\{\frac{2|E(A,B)|}{\mathrm{vol}(A\cup B)},\quad A\cap B = \varnothing, \mathrm{vol}(A\cup B) \ne 0\right\}$$

* 相当于寻找某个子图中的最大割，称为对偶 Cheeger 问题。虽然直接求解此问题比最大割问题更难，但其更易于估算。

针对图 G 中的对偶 Cheeger 问题，将其写为三值向量形式，也即找

$$\max\left\{1 - \frac{\sum_{\{i,j\}\in E}|y_i + y_j|}{\sum_{i\in V} d_i|y_i|},\quad \vec{y}\in\{-1,0,1\}^n, \sum_{i\in V} d_i|y_i| \ne 0\right\}$$

§ **练习** (4.5)：验证对偶 Cheeger 问题可以等价为三值向量形式。

将其写成

$$\min\left\{\frac{\sum_{\{i,j\}\in E}|y_i + y_j|}{\sum_{i\in V} d_i|y_i|},\quad \vec{y}\in\{-1,0,1\}^n, \sum_{i\in V} d_i|y_i| \ne 0\right\}$$

只需对此问题进行近似算法设计即可。

* 不妨假设**所有点的度数均非零** (否则其不会在此问题中有影响)，这样 $\vec{y}$ 只要所有分量不全为 0 即可。

为进行近似比分析，设 $G_N = G[U_t] = (V_t, E_t)$，并记 $\rho_t = |E_t|/|E|$，其应随 t 单调下降，且 $\rho_0 = 1$，记 $\rho_N = 0$。可发现根据定义有

$$M_t = (\rho_t - \rho_{t+1})|E|$$

设并图的最大割值为 (最大割一定超过原图一半的证明见贪婪算法)

$$(1-\varepsilon)|E|,\quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

待解决问题：给出三值向量化后的**对偶 Cheeger 问题**的近似算法。

思路：谱方法 [Spectral]，从比较好的连续解 $\vec{x}$ 产生离散解 $\vec{y}$，并保证近似比 (这里 r 为 ε 某函数)

$$\frac{\sum_{\{i,j\}\in E}|y_i+y_j|}{\sum_{i\in V}d_i|y_i|}\le r(\varepsilon)$$

连续解构造：取 $\vec{x}$ 为图的 Laplace 矩阵 $L=D-A$ 的广义特征值问题 $L\vec{x}=\lambda D\vec{x}$ 属于最大特征值的特征向量 (这里 D 为各点度数排成的对角阵，A 为邻接矩阵，在无向图中对称)，下先证明有

$$\vec{x}^T(D+A)\vec{x}\le 2\varepsilon\vec{x}^TD\vec{x}$$

- 证明：

省略向量符号。原式可等价于

$$x^T(D-A)x\le 2(1-\varepsilon)x^TDx$$

其即等价于

$$\frac{x^T(D-A)x}{x^TDx}\ge 2(2-\varepsilon)$$

利用矩阵特征值理论可知

$$x=\arg\max_{x\neq\mathbf{0}}\frac{x^T(D-A)x}{x^TDx}$$

于是有 (中间的等号是由于可验证 $y^T(D-A)y$ 即是最大割问题的矩阵表示)

$$\frac{x^T(D-A)x}{x^TDx}\ge\max_{y_i\in\{-1,1\}}\frac{y^T(D-A)y}{y^TDy}=\frac{4(1-\varepsilon)|E|}{2|E|}=2(1-\varepsilon)$$

§ **练习** (5.1)：证明 L 对应的广义特征值问题 $L\vec{x}=\lambda D\vec{x}$ 属于最大特征值的特征向量 $\vec{x}$ 满足

$$\vec{x}=\arg\max_{\vec{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\vec{x}^TL\vec{x}}{\vec{x}^TD\vec{x}}$$

由上方结论，变形可发现有

$$\frac{\sum_{\{i,j\}\in E}(x_i+x_j)^2}{\sum_{i\in V}d_ix_i^2}\le 2\varepsilon$$

离散解构造：产生 n 个三值向量 $\vec{y}^k\in\{-1,0,1\}^n$，满足

$$y_i^k=\begin{cases}-1 & x_i<-|x_k|\\ 1 & x_i>|x_k|\\ 0 & |x_i|\le|x_k|\end{cases}$$

并取使得结果最小者为 $\vec{y}$，则应有

$$\frac{\sum_{\{i,j\}\in E}|y_i+y_j|}{\sum_{i\in V}d_i|y_i|}\le 2\sqrt{\varepsilon}$$

* 称为双阈值谱分解 [2TSC]，这里双阈值即为 $\pm|x_k|$。

- 证明：

不妨设 $|x_1|\le|x_2|\le\cdots\le|x_n|=1$ (所有过程均齐次，乘比例不影响)。考虑如下随机：

1. 按均匀分布取 $t\in[0,1]$；
2. 向量 $\vec{Y}\in\{-1,0,1\}^n$ 定义为

$$Y_i=\begin{cases}-1 & x_i<-\sqrt{t}\\ 1 & x_i>\sqrt{t}\\ 0 & |x_i|\le\sqrt{t}\end{cases}$$

下证

$$\frac{\sum_{\{i,j\}\in E}|y_i+y_j|}{\sum_{i\in V}d_i|y_i|}\le\frac{\mathbb{E}\big(\sum_{\{i,j\}\in E}|Y_i+Y_j|\big)}{\mathbb{E}\big(\sum_{i\in V}d_i|Y_i|\big)}$$

左侧为 (讨论 $t\in[|x_i|,|x_{i+1}|]$ 的情况，这时 $\vec{Y}=\vec{y}^i$)

$$\min_{1\le k\le n}\frac{\sum_{\{i,j\}\in E}|y_i^k+y_j^k|}{\sum_{i\in V}d_i|y_i^k|}=\min_{t\in[0,1]}\frac{\sum_{\{i,j\}\in E}|Y_i+Y_j|}{\sum_{i\in V}d_i|Y_i|}$$

根据上方讨论，将期望展开为求和，利用

$$\min_i\frac{a_i}{b_i}\le\frac{\sum_i a_i}{\sum_i b_i}$$

即可发现成立。

直接计算可知

$$\mathbb{E}(|Y_i|)=\int_0^{x_i^2}1\mathrm{d}t=x_i^2$$

为计算 $\mathbb{E}(|Y_i+Y_j|)$，按 x_i、x_j 是否同号讨论，即可得到

$$\mathbb{E}(|Y_i+Y_j|)=\begin{cases}|x_i^2-x_j^2| & x_ix_j<0\\ x_i^2+x_j^2 & x_ix_j>0\end{cases}$$

无论何种情况均有

$$\mathbb{E}(|Y_i+Y_j|)\le|x_i+x_j|(|x_i|+|x_j|)$$

最终得到 (利用 Cauchy 不等式后将 $(|x_i|+|x_j|)^2$ 放为 $2x_i^2+2x_j^2$)

$$\frac{\sum_{\{i,j\}\in E}|y_i+y_j|}{\sum_{i\in V}d_i|y_i|}\le\frac{\sum_{\{i,j\}\in E}|x_i+x_j|(|x_i|+|x_j|)}{\sum_i d_ix_i^2}\le\frac{\sqrt{\sum_{\{i,j\}\in E}(x_i+x_j)^2\sum_{\{i,j\}\in E}(2x_i^2+2x_j^2)}}{\sum_i d_ix_i^2}$$

注意到分母第二项即为 $2d_ix_i^2$ 即可得结论。

最终近似比：在 $0<\varepsilon<\frac{1}{16}$ 时，设上述递归谱分解得到的割值为 c，有

$$c\ge(1-4\sqrt{\varepsilon}+8\varepsilon)|E|$$

* 这里 $\frac{1}{16}$ 来自 $\frac{1}{2}=2\sqrt{\varepsilon}$，若 $\varepsilon>\frac{1}{16}$，求解对偶 Cheeger 问题得到的近似比不如直接使用贪婪算法，此时计算可得近似比至少

$$\frac{1/2|E|}{(1-\varepsilon)|E|}>0.533$$

否则有近似比至少

$$\frac{1-4\sqrt{\varepsilon}+8\varepsilon}{1-\varepsilon}\ge\frac{1}{2}(\sqrt{65}-7)\approx0.531$$

§ **练习** (5.2)：从割值的估算出发验算最终的近似比结论。

● 证明：

先证明 G_t 的最大割值至少为 $\big(1-\frac{\varepsilon}{\rho_t}\big)|E_t|$。

由于 $\varepsilon|E|$ 的边不在 G 的最大割中，对最大割在 G_t 上诱导的而分割，进行二分割后剩余的边至多 $\varepsilon|E|$，也即 G_t 的割值至少为

$$\rho_t|E|-\varepsilon|E|=\left(1-\frac{\varepsilon}{\rho_t}\right)|E_t|$$

对 G_t 进行递归谱分解后，至少会得到 $C_t+\frac{1}{2}X_t$ 的边，因此所得比例至少为

$$\frac{C_t+X_t/2}{M_t}\ge\frac{C_t}{M_t-X_t/2}=\frac{2|E(L_t,R_t)|}{\mathrm{vol}(L_t\cup R_t)}\ge1-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho_t}}$$

由此 RSC 算法至少得到边数为

$$\left(1-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho_t}}\right)(\rho_t-\rho_{t+1})|E|$$

若 $\rho_t \geq 16\varepsilon$ 且 $\rho_{t+1} \geq 16\varepsilon$，使用双阈值方法生成分割，此时数量即为

$$|E|\int_{\rho_{t+1}}^{\rho_t}\left(1-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho_t}}\right)\mathrm{d}r \geq |E|\int_{\rho_{t+1}}^{\rho_t}\left(1-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{r}}\right)\mathrm{d}r$$

若 $\rho_t \geq 16\varepsilon \geq \rho_{t+1}$，则部分用双阈值方法，部分采用贪婪，分界点在 $r=16\varepsilon$，此时界为

$$|E|(\rho_t-16\varepsilon)\left(1-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho_t}}\right)+|E|(16\varepsilon-\rho_{t+1})\frac{1}{2}$$

与上类似积分放缩为

$$|E|\int_{16\varepsilon}^{\rho_t}\left(1-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{r}}\right)\mathrm{d}r+|E|\int_{\rho_{t+1}}^{16\varepsilon}\frac{1}{2}\mathrm{d}r$$

若 $\rho_t < 16\varepsilon$ 且 $\rho_{t+1} < 16\varepsilon$，全部使用贪婪算法，界放为

$$|E|\int_{\rho_{t+1}}^{\rho_t}\frac{1}{2}\mathrm{d}r$$

综上，全部拼接后可得最终切割后至少得到的边数为

$$|E|\left(\int_{16\varepsilon}^{1}\left(1-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{r}}\right)\mathrm{d}r+\int_{0}^{16\varepsilon}\frac{1}{2}\mathrm{d}r\right)$$

直接积分得到结果。

四 图与线性规划

§4.1 图论问题

团：即完全子图，图中最大团的大小称为**团数** $\omega(G)$。
独立集：两两互不相邻的顶点构成的集合，图中最大独立集的大小称为**独立数** $\alpha(G)$。
Ramsey 数：任意正整数 r,s，存在最小正整数 n，使得 n 阶完全图二染色必然出现颜色 A 的 r 阶团或颜色 B 的 s 阶团，记为 $R(r,s)$。
* 可以构造出 $R(3,3)>5$，讨论可进一步证明 $R(3,3)=6$。
* 求解精确值非常困难，相关工作基本为上下界估计。

minor：H 可以通过原图 G 进行若干次删点、删边、收缩边 (将一条边与相邻两顶点合为一个) 得到。
着色：使得相邻顶点不同色的对顶点的染色，至少需要的颜色数称为图的**色数** $\chi(G)$。k-染色为使用 k 种颜色的满足条件的染色方法。
Hadwiger 猜想：若 G 的是无环图且不包含 K_t-minor，则其色数小于 t。
* 其 $t=5$ 的情况可以推出四色定理。
* 由于判断是否存在指定 minor 的算法是低复杂度的，其被彻底解决可以带来图染色算法的飞跃发展。

顶点覆盖：与图中所有边都相交的顶点集。最小顶点覆盖的大小称为**顶点覆盖数** $\tau(G)$。
团覆盖：一组团 $C_1,\ldots,C_K$ 使得每个 C_i 是图的一个团，且它们的并集覆盖了 V。最少的团覆盖的大小称为图的**团覆盖数** $\bar{\chi}(G)$。

补图：顶点集与 G 相同，与 G 的边之并为完全图，且与 G 无公共边的图，记为 $\bar{G}$。
基本关系：

- $\alpha(G)=\omega(\bar{G})$；
- $\bar{\chi}(G)=\chi(\bar{G})$；
- $\omega(G)\le\chi(G)$；
- $\alpha(G)\le\bar{\chi}(G)$；
- $\tau(G)=|V|-\alpha(G)$。

§ **练习** (5.3)：证明上述图的基本量间的关系。
k-部图：能将 n 个顶点划分为 k 个非空子集，使得仅当顶点属于不同子集时存在边。
Turán 图：能将 n 个顶点划分为 k 个非空子集，使得当且仅当属于不同子集时存在边。这样的图记作 $T_{k,n}$。
Turán 定理：若 G 是简单图且其中不包含大于等于 2 阶的完全图，则 $e(G)\le e(T_{k-1,n})$，这里 e 代表边的个数。

一些 P 问题
* **独立数计算**是 NPC 问题 (可以约化为 SAT 问题)。此外，判断 $\alpha(G)\ge k$ 是否成立或 $\alpha(G)\le 4$ 是否成立仍为 NPC 问题；对 3-正则 (每个顶点度数为 3) 平面图 G，计算独立数仍为 NPC 问题。
* 根据之前基本关系，团数与顶点覆盖数也为 NPC 问题。
* 独立集问题可以约化为点染色问题，由此色数也为 NPC 问题。对 3-正则平面图 G，计算色数为 NPC 问题；判定 3-正则图是否色数为 3 是 NPC 问题。但**判定色数是否为 2 是 P 问题**。

平面图：一个图是平面图当且仅当 K_5 和 $K_{3,3}$ 不为其 minor(这里 $K_{3,3}$ 代表两部分均三个顶点且互相完全连接的二部图)。
* 也可描述为不包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分，剖分指任何边上可以随便加点。
* **四色定理**：平面图色数至多为 4。
AGC 问题：找到色数不超过 c 的图的 d-染色，其中 $3\le c\le d$。
* 即使对 $c=3$、$d=6$ 的情况，复杂度仍然未知。

§4.2　线性规划

* 本节及之后主要讨论线性规划问题 [Linear Programing, LP] 与利用线性规划构造的近似算法。

标准形式

$$\min_{\Omega} cx,\quad \Omega=\{x\in\mathbb{R}^n\mid Ax=b,\ x\ge 0\}\quad A\in\mathbb{R}^{m\times n},\quad c\in\mathbb{R}^{1\times n},\quad b\in\mathbb{R}^{m\times 1}$$

* 几何：可行域 Ω 为多面体，称**顶点** (只要 x 为 y,z 的中点，且 $x,y,z\in\Omega$，则必须 $x=y=z$ 的 x) 为极点。
若最优解存在，则**至少一个最优解在顶点上**。
● 证明：

设最优解中含有零分量最多的一个 (未必唯一) 为 x^*，下证 x^* 为顶点。若否，存在 y、z 使得 $x^*=\frac{y+z}{2}$，且三者互不相同。
由于 x^* 为最优解，从 $cx^*=\frac{1}{2}(cy+cz)$ 可知只能 $cy=cz=cx^*$，从而三者均为最优解，于是 x^* 与 y 连线上的任何点 $x^*+\alpha(y-x^*),\alpha\in\mathbb{R}$ 直接计算可知均为最优解，记此集合为 l。
验证可知 l 上任何点满足 $Ax=b$，其参数方程为

$$(x_1^*+\alpha(y_1-x_1^*),x_2^*+\alpha(y_2-x_2^*),\dots,x_2^*+\alpha(y_n-x_n^*))$$

对 x^* 为 0 的分量，若 y 大于 0 则 z 小于 0，反之亦然，于是从 $y,z\in\Omega$ 可知 y 对应分量为 0，由此直线上任何点在 x^* 为 0 的分量为 0。但是，由于 $y\neq x^*$，一定存在 $y_j-x_j^*\neq 0$。对所有满足此

条件的分量 $j_1,\dots,j_r$，选取出其中 $\frac{x_j^*}{|y_j-x_j^*|}$ 最小的一个，记为 j_0，并取 $\alpha=-\frac{x_{j_0}^*}{y_{j_0}-x_{j_0}^*}$。计算可发现这样的 α 可以保证结果仍在 Ω 中，且第 j_0 个分量为 0，而 x^* 的第 j_0 个分量为 0，又已知 x^* 为 0 的分量在 l 中均为 0，即与为 0 分量最多矛盾。

设 A 第 i 列为 a_i，若 $x\in\Omega$，则 x 是顶点当且仅当满足 $x_j\neq 0$ 的 x_j (记为 $J=\{j_1,\dots,j_k\}$) 对应的 a_j 线性无关。

- 证明：

  右推左：仍然反证，若结论不成立，设 $x=\frac{y+z}{2}$，且 $y\neq x\neq z$，与上个证明相同得 x 为 0 的分量 y,z 亦为 0，因此用 x_J 表示 x 在 J 中的分量构成的向量，代入可知 x_J、y_J、z_J 均满足关于 u 的方程

$$a_{j_1}u_1+a_{j_2}u_2+\dots+a_{j_k}u_k=b$$

  但根据线性无关性，此方程组的解应至多唯一，矛盾。

  左推右：若线性相关可发现上述方程组的解不止一个，由于 x_J 必然为解，且 $x_J>0$，由解空间连续性必然存在解 x'_J 使得其各分量与 x_J 的差距小于 x_J 的分量，由此即可验证 x'_J、$2x_J-2x'_J$ 扩充而成的向量 y,z 满足 $x=\frac{y+z}{2}$，且 $y,z\in\Omega$，$y\neq z\neq x$，矛盾。

对偶理论

标准形的对偶问题为

$$\min_{\Omega'} yb,\quad \Omega'=\{y\in\mathbb{R}^{1\times n}\mid yA\leq c\}$$

有如下结论：

1. 对 $x\in\Omega$、$y\in\Omega'$ 有 $cx\geq yb$。
2. 原问题与对偶问题的解一定属于如下四种情况之一：
   - $\Omega=\Omega'=\varnothing$；
   - $\Omega\neq\varnothing$，但无最优解，$\Omega'=\varnothing$；
   - $\Omega'\neq\varnothing$，但无最优解，$\Omega=\varnothing$；
   - 两问题均有最优解。
3. 若**互补松弛条件** $cx=yb$ 成立，则 x,y 分别为原问题、对偶问题的最优解。
4. 若 x,y 分别为原问题、对偶问题的最优解，则 $cx=yb$，从而两问题最优值相同。

* 标准形对偶问题的结论事实上来自一般的线性规划对偶定义，也即下方练习题。

§ **练习** (5.4)：设 $c\in\mathbb{R}^n$、$b\in\mathbb{R}^m$、$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，定义原始问题与对偶问题分别为

$$\min_{\Omega} c^Tx,\quad \Omega=\{x\in\mathbb{R}^n\mid Ax\geq b,\ x\geq 0\}$$

$$\min_{\Omega'} b^Tw,\quad \Omega'=\{w\in\mathbb{R}^m\mid w^TA\geq c^T,\ w\geq 0\}$$

考察它们的解的性质。

应用：最小顶点覆盖

* 也即给定每点权重，寻找顶点覆盖中权和最小的一个。

设顶点为 1 到 n，原问题转化为优化问题：求 $c^Tx=c_1x_1+\dots+c_nx_n$ 最小值，满足

$$x_i+x_j\geq 1,\quad \forall\{i,j\}\in E$$

$$x_i\in\{0,1\},\quad \forall i=1,\dots,n$$

将其松弛为，求 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$ 最小值，满足

$$x_i+x_j\geq 1,\quad \forall\{i,j\}\in E$$

$$x_i\in[0,1],\quad \forall i=1,\dots,n$$

成为线性规划问题。

* 此问题的可行域形式为 $Ax\geq b$、$x\in[0,1]$，设辅助变量 $y=Ax-b$、$z=1-x$，即有

$$Ax-y=b,\quad x+z=1,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0$$

成为标准形式，从而此的确为线性规划。

为设计近似算法，已知线性规划可以求解，并设最优解 x^*。对 x^* 进行四舍五入，即大于等于 1/2 时输出 1，否则为 0，成为原问题的一个近似解 x^A。

此近似算法可以达到 2 的近似比，也即 c^Tx^A 不超过真实最优解的两倍。

- 证明：

  对任何一条边 $\{i,j\}\in E$，有 $x_i^*+x_j^*\geq 1$，于是至少一个 $\geq 1/2$，四舍五入后 $x_i^A+x_j^A\geq 1$，由此可知 x^A 为可行解。

  记 $\sum_i c_ix_i=c^Tx$，由于 $x_i^A\leq 2x_i^*$，可知 $c^Tx^A\leq 2c^Tx^*$。然而，松弛后的问题的最优解一定比原问题最优解更小，从而得到结论。

由于只需要四舍五入的结果，我们希望对线性规划也可采用充分快的近似算法求解。

简单起见，考虑 c 所有分量为 1 的情况，此时即为计算 $\tau(G)$。我们考虑另一种松弛思路：求 $\sum_i x_i$ 最小值，使得

$$x_i+x_j\geq 1,\quad \forall\{i,j\}\in E$$

$$x_i\geq 0,\quad \forall i=1,\dots,n$$

分析可知，此问题的对偶问题为，求 $\sum_{\{i,j\}\in E}y_{ij}$ 的最大值，使得

$$\sum_{j\mid\{i,j\}\in E}y_{ij}\leq 1,\quad \forall i=1,\dots,n$$

$$y_{ij}\geq 0,\quad \forall\{i,j\}\in E$$

将原始问题称为问题 I、线性规划原问题称为问题 II、对偶问题称为问题 III。

对问题 III 的任何一个可行解，假设其有 0-1 形式，则第一个约束表示每个顶点连接的边中至多能选取一条，此时的最优问题即称为**最大匹配**问题 (每个顶点至多与一条相连的边集合称为图的**匹配**，由此每个 0-1 可行解为一个匹配)。

从匹配出发给出问题 I 的可行解：若与顶点 i 连接的边有在匹配中的，则令 $x_i=1$，否则为 0。

* 若找到某个**极大匹配**作为 y 的近似解，可证明其对应的 x 构成原问题的一个 2-近似解。

§4.3　舍入方法

* 都只能针对某类问题，一般没有通用性。

基础可行解

不妨设 $m<n$ 且 $\text{rank}(A)=m$ 以保证可行域非空。由已证，x 为 Ω 的顶点当且仅当 A 的对应列向量线性无关。由此，顶点 x 最多有 m 个非零分量。

设 A 的列的某极大线性无关组 $a_{j_1},\dots,a_{j_m}$，指标集称为**可行基** J，当 $j\neq J$ 时 $x_j=0$ 的解称为**基础可行解**。直接利用线性方程组知识计算可知可行基 J 对应的唯一基础可行解为 $x_J=A_J^{-1}b$、其余分量为 0。

* 若 x_J 所有分量非零，称为**非退化**的，否则称为退化的。对于退化的基础可行解，其可能成为不同基对应的基础可行解。
若一个线性规划问题所有基础可行解都非退化，称其满足**非退化假设**。
* 可证明基础可行解与极点等价，一定存在基础可行解为最优解。
§ **练习** (6.1)：给出一个不满足非退化假设的线性规划问题，使其存在基础可行解到可行基的双射。

管道舍入：最大权命中集
给定有限集 E 与其子集族 $\mathcal{C}$，w 是定义在 $\mathcal{C}$ 上的非负权函数，任给正整数 p，求含有 E 中 p 个元素的子集 A 使得 $\mathcal{C}$ 中与 A 有交的子集的权值之和最大。
整数规划形式：元素为 1 到 n，$\mathcal{C}=\{S_1,\dots,S_m\}$，$w(S_i)=w_i$，求最大值

$$L(x)=\sum_{j=1}^m w_j\min\left\{1,\sum_{i\in S_j}x_i\right\}$$

使得 $\sum_{i=1}^n x_i=p$，且 $x_i\in\{0,1\}$。
* 最大值可等价于

$$F(x)=\sum_{j=1}^m w_j\left(1-\prod_{i\in S_j}(1-x_i)\right)$$

$L(x)$ 松弛到 $x_i\in[0,1]$ 后实际上是线性规划 (见下方)，而 $F(x)$ 并非线性规划，但 $F(x)$ 事实上是更易于设计舍入算法。
松弛问题比较：$x_i\in[0,1]$ 时 $F(x)\geq\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)L(x)$。
- 证明：

  考虑某 $\mathcal{C}$ 中子集 S_j，且 $|S_j|=k$。
  将几何平均数放大为算术平均数可知

$$1-\prod_{i\in S_j}(1-x_i)\geq 1-\left(1-\frac{\sum_{i\in S_j}x_i}{k}\right)^k$$

  对 $f(z)=1-\left(1-\frac{z}{k}\right)^k$，求导估算可发现其为单调增凹函数，且 $f(0)=0$，当 $z\in[0,1]$ 时，有 $f(z)/z\geq f(1)$，即 $f(z)\geq zf(1)$，而 $z>1$ 时 $f(z)>f(1)$，于是 $f(z)\geq f(1)\min(1,z)$。由此再利用 e 的极限形式得证。

为将原问题松弛为线性规划，引入 $z_1,\dots,z_m$，并将问题变为求 $\sum_j w_jz_j$ 最大值使得

$$\sum_{i\in S_j}x_i\geq z_j,\quad\forall j=1,\dots,m$$

$$0\leq z_j\leq 1,\quad\forall j=1,\dots,m$$

$$0\leq x_i\leq 1,\quad\forall i=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^n x_i=p$$

此问题的解 x^* 中若有不属于 $\{0,1\}$ 分量，至少有两个 (否则和不可能为整数)，将 x^* 赋值给 x，重复执行，对两个 $x_k,x_j\in(0,1)$，定义

$$x(\varepsilon)=\begin{cases}x_i & i\notin\{j,k\}\\ x_j+\varepsilon & i=j\\ x_k-\varepsilon & i=k\end{cases}$$

将 ε 分别取为 $\varepsilon_1=-\min\{x_j,1-x_k\}$ 与 $\varepsilon_2=\min\{1-x_j,x_k\}$，比较 $F(x(\varepsilon_1))$ 与 $F(x(\varepsilon_2))$，以较大者进行这两个分量的舍入，直到所有分量被舍入。

* 由于舍入过程保证了和不变，结果恒为可行解。

近似比：舍入过程中 F 不下降，设舍入结果为 x^A，从而有

$$L(x^A) = F(x^A) \geq F(x^*) \geq \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) L(x^*) \geq \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \mathrm{opt}$$

• 证明：

只需证明 $F(x(\varepsilon))$ 关于 ε 是凸函数 (可发现其事实上是二次函数) 即可。

由于 x, j, k 已固定，对每个 $l = 1, \ldots, m$，只需考虑三种情况，分类讨论。S_l 不含 j, k 时对应的求和中为常数，凸；S_l 含 j, k 中一个时对应的求和中为线性函数，凸；S_l 含 j, k 时对应的求和中为二次函数，观察二次项系数可知凸。

* 由此管道舍入的核心为某种将乘积放为求和进行估算，并通过乘积进行舍入。

§ **练习** (6.2)：用管道舍入给出最大可满足性问题的 $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ 近似算法。

迭代舍入：广义生成网络问题

* 基本方案，通过多次求解线性规划问题进行更好的舍入。

给定图 $G = (V, E)$、边上的非负权函数 c 与正整数 $k > 0$，求一个 k-边连通的子图，使得其中边权值之和最小。

先给出基本的求解方法：

- **连通性质**

  F 为 k-边连通的当且仅当对图的顶点集合任何划分 S, S^c (要求它们均非空)，其中都至少存在 F 中的 k 条边。

- **整数规划**

  对 $x_e \in \{0, 1\}, \forall e$，求

  $$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

  使得

  $$\forall S \subset V, S \notin \{\varnothing, V\}, \quad \sum_{e \in \delta_G(S)} x_e \geq k$$

  这里 $\delta_G(S)$ 为 G 中恰有一个端点在 S 中的所有边组成的集合。

  * 可验证其符合要求，但此时不等式约束为指数量级个，看似线性规划也无法方便求解。

- **连续松弛**

  若线性规划问题具有性质：对任何不可行解 x，可以在多项式时间找到其不满足的约束条件 (称为**分离神谕** [separation oracle])，则即使约束条件个数为指数个，也能用**椭球法**在多项式时间找到其最优解 (省略过程细节)。

  于是，将 x_e 松弛到 $[0, 1]$ 后，我们希望找到上述的分离神谕。

- **网络流转化**

  将松弛问题的可行域设为 Ω，给定 x_e 事实上相当于给 G 的每条边赋予 $[0, 1]$ 中的值，将其看作每边的流量上界。

  由此，约束条件事实上可以转化为，对任何顶点对 s 与 t，s 到 t 的最大流至少是 k，由此只需要计算 s 到 t 的最大流。

  • 证明：

  根据网络流的知识，最大流问题与最小割问题互为对偶，于是等价。也即，任两点 s, t 之间的最大流值等于 $s \in S$、$t \in S^c$ 的最小割值 $\min E(S, S^c)$。

  原问题条件可以看作对任何图割，割值 $E(S, S^c)$ 至少为 k，而任两点最大流为图割最多为 k；反之，若存在 $E(S, S^c) < k$，任取 $s \in S$、$t \in S^c$ 可得矛盾。

由于最大流/最小割问题是 P 问题，对任何 $x \notin \Omega$，若有某个分量不在 $[0,1]$ 中则已经在 $|E|$ 量级找到其不满足的条件，否则只需对任何两点 (这是 $|V|^2$ 量级的) 求解最大流问题，若发现最大流低于 k，将其对应的最小割找到即得到不满足的条件。

* 上述算法也是判断一个子图是否 k-边连通的多项式算法。

迭代舍入的算法为：

1. 输入 G、k 与 c，初始 $F=\varnothing$ (可将其看作边集合)；

2. 构造对应的迭代 LP 问题

$$\min \sum_{e\in E\setminus F} c_e x_e$$

$$\forall e\in E,\quad x_e\in[0,1]$$

$$\forall S\subset V,\quad \sum_{e\in\delta_{G\setminus F}(S)} x_e \ge f_0(S)-|\delta_F(S)|$$

$$f_0(S)=\begin{cases}0 & S\in\{\varnothing,V\}\\ k & S\notin\{\varnothing,V\}\end{cases}$$

   并求最优解 x^*；

3. 将 F 扩充为 $F\cup\{e \mid x_e^*\ge 1/3\}$；

4. 若 F 已经 k-边连通，输出，否则回到第二步。

我们需要先证明算法的有效性。

弱超模函数：f 为 V 的子集到 $\mathbb{Z}$ 的函数，满足 $f(V)=0$，且对任何 $A,B\subset V$，以下两式至少一个成立 (这里 $A-B$ 表示属于 A 不属于 B 的函数)：

$$f(A)+f(B)\le f(A-B)+f(B-A),\quad f(A)+f(B)\le f(A\cap B)+f(A\cup B)$$

* **超模函数**：其相反数是次模函数，也即第二式恒成立。

* **强超模函数**：两式均恒成立。

引理：对弱超模函数 f，线性规划问题

$$\min\sum_{e\in E} c_e x_e$$

$$\forall e\in E,\quad x_e\in[0,1]$$

$$\forall S\subset V,\quad \sum_{e\in\delta_G(S)} x_e\ge f(S)$$

的每个基础可行解都包含至少一个 $x_e\ge\frac{1}{3}$ 的分量。

- 证明：

  若 $A,B\subset V$ 满足互不为子集且交非空，则称它们是公平相交的。若 V 的一个子集族不包含两个公平相交的集合，则称它是层状的。

  用 a_S 表示 $S\subset V$ 对应的不等式约束的行向量，也即将每个约束写为 $a_Sx\ge f(S)$。若某个约束 $a_Sx=f(S)$ 对 x 取等，称其对 x 是积极的，也称对应的 S 对 x 是积极的。

  设 x 的基础可行解非零分量为 k (也即存在 k 条边 e 使得 $x_e>0$)，则利用线性规划理论可知至少存在 k 个积极约束，对应的 a_S 线性无关。

  引理：若 x 为一个基础可行解，且每个 $x_e\in(0,1)$，则图 G 中存在一个 V 的层状积极子集族 $\mathcal{F}$，满足：

1. $|\mathcal{F}| = |E|$；
2. $\{a_S \mid S \in \mathcal{F}\}$ 线性无关；
3. 任何 $S \in \mathcal{F}$ 有 $f(S) \geq 1$；
4. 存在 $S \in \mathcal{F}$ 使得 $\delta_G(S) \leq 3$。

引理证明：

1. 秩性质

   考虑任何一个 V 的极大的层状积极子集族 $\mathcal{L}$，先证明 $\{a_S \mid S \in \mathcal{L}\}$ 的秩为 $|E|$。

   若否，根据列数可知其秩应小于 $|E|$，用 $\mathrm{span}\{L\}$ 表示 $\{a_S \mid S \in \mathcal{L}\}$ 生成的线性空间。利用线性规划基础可行解的结论，所有积极约束对应的 a_S 集合秩应为 $|E|$，于是存在积极集 A 满足 $a_A \notin \mathrm{span}\{L\}$。

   由极大性，A 无法添进 $\mathcal{L}$，于是其与 $\mathcal{L}$ 中某个集合公平相交。取所有符合要求的 A 中，与 $\mathcal{L}$ 中公平相交个数最少的集合，仍记为 A，并设 $B \in \mathcal{L}$ 与 A 公平相交。利用 f 为弱超模函数可知

   $$f(A) + f(B) \leq f(A - B) + f(B - A), \quad f(A) + f(B) \leq f(A \cap B) + f(A \cup B)$$

   至少成立一个。

   若第一式成立，记 $S_1 = A - B$、$S_2 = B \cap A$、$S_3 = B - A$、$S_4 = (A \cup B)^c$，第一式可写为

   $$f(A) + f(B) \leq f(S_1) + f(S_3)$$

   再记

   $$m_{ij} = \sum_{e \in E(S_i, S_j)} x_e$$

   由 A, B 积极可知

   $$f(A) = a_A x = m_{13} + m_{14} + m_{23} + m_{24}, \quad f(B) = m_{31} + m_{34} + m_{21} + m_{24}$$

   $$f(S_1) \leq a_{S_1} x = m_{12} + m_{13} + m_{14}, \quad f(S_3) \leq m_{31} + m_{32} + m_{34}$$

   由无向图，$m_{ij} = m_{ji}$，对比即可得到

   $$f(S_1) + f(S_3) + 2m_{24} \leq f(A) + f(B)$$

   由此第一式成立只能 $m_{24} = 0$ (根据 $x_e > 0$ 知只能 $E(S_2, S_4) = \varnothing$)，且 S_1, S_3 积极。

   然而，由 $a_A \notin \mathrm{span}(\mathcal{L})$ 可知 a_{S_1}, a_{S_3} 至少有一个不在 $\mathrm{span}(\mathcal{L})$ 中：

   - 若 $a_{S_1} \notin \mathrm{span}(\mathcal{L})$，由于 B 与 A 公平相交但 B 不与 S_1 公平相交，只需证明 $C \in \mathcal{L}$ 且 C 与 S_1 公平相交则 A 与 C 公平相交，即与个数最少性矛盾，而这只需要证明 C 不包含于 A，即 $C - A$ 非空。

     利用公平相交性，$S_1 \cap C \neq \varnothing$，于是 $C - B$ 非空，但由它们都在 $\mathcal{L}$ 中可知 C 包含 B (此时 $B - A \subset C - A$ 非空) 或 $C \cap B = \varnothing$ (此时 $C - A = C - S_1$)，均矛盾。
   - 若 $a_{S_3} \notin \mathrm{span}(\mathcal{L})$ 同上可证。

   若第二式成立可完全类似考虑 $S_1, \ldots, S_4$ 证明矛盾，从而推出原结论成立。

2. 前三条件存在性

   由上述，考虑 $\{a_S \mid S \in \mathcal{L}\}$ 的极大线性无关组，即可满足前两个条件。

   此外，由积极集定义可知 $f(S) = a_S x$，根据 a_S 非负且有 1 分量、每个 $x_e \in (0, 1)$ 可知 $f(S) > 0$，而由 $f(S)$ 为整数，其至少为 1。

3. 森林转化

   下面证明条件 4 成立。反证，若这样的 S 不存在，也即对任何 $S \in \mathcal{F}$ 有 $|\delta_G(S)| \geq 4$。

   由 $\mathcal{F}$ 为层状积极子集族，根据定义可发现 $\mathcal{F}$ 中的集合以包含关系连边 (A, B 有边当且仅当 $A \supset B$ 且不存在 C 使得 $A \supset C \supset B$) 可以构造一个森林 T，设其顶点 V'、边 E'。

   对每个 G 中顶点 $u \in V$、$e \in E$，且 u 为 e 的一个端点，称 (u, e) 为 G 中一个端点。若 (u, e) 对 $S \in \mathcal{F}$ 满足，$u \in S$ 且对任何 S 的真子集 $S' \in \mathcal{F}$ 有 $u \notin S'$，则记 $(u, e) \in P(S)$，下面利用此映射计数。

   对 T 的子树 T'，记

   $$P(T') = \bigcup_{S \in V'(T')} P(S)$$

   下面证明 $|P(T')| \geq 2|V(T')| + 2$，则 $|P(T)| \geq 2|\mathcal{F}| + 2 = 2|E| + 2$，但总端点数至多 $2|E|$，矛盾。

4. 端点计数

   利用归纳法。首先，由假设，T 的每个叶子结点 S 应有 $|P(S)| \geq 4$。

   对任何森林 T'，只需说明其为子树的情况成立，利用层状子集族特性可知不交子树对应的端点集合不交，从而求和得证。下假设对 T' 的任何孩子结论均成立。

   若 T' 的根 R 至少有两个孩子节点，其每个孩子对应的子树 T_i，利用层状子集族性质可知不同子树对应的端点不会重复，因此

   $$|P(T')| \geq |P(T_1)| + \cdots + |P(T_k)| \geq 2(|V(T_1)| + \cdots + |V(T_k)|) + 2k = 2|V(T')| + 2k - 2$$

   从而成立。

   若 R 只包含一个孩子节点 S，记 T_1 为以 S 为根的子树，由归纳假设

   $$|P(T_1)| \geq 2|V(T_1)| + 2$$

   若 $P(R \backslash S)$ 中至少有两个端点，则由定义可知 $|P(T)| - |P(T_1)| \geq 2$，已经得证。否则，只要证明 $\delta_G(R)$ 与 $\delta_G(S)$ 恰好相差一条边 e，即可从 $a_R x = f(R)$、$a_S x = f(S)$ 得到 $x_e = |f(R) - f(S)|$。但左侧不为整数，右侧为整数，矛盾。

   由线性无关性，$\delta_G(R)$ 与 $\delta_G(S)$ 不可能完全相同 (否则 $a_R = a_S$)，从而也可得到 $P(R \backslash S)$ 不可能为空。由此，$P(R \backslash S)$ 中恰包含一个端点 (u, e)，讨论可发现 $\delta_G(R)$ 与 $\delta_G(S)$ 至多相差 e，得证。

利用此引理，解中 $x_e = 0$ 的边可以直接去掉，只考虑子图，而 $x_e = 1$ 的边已经符合 $\geq \frac{1}{3}$ 的要求。又由于 $\mathcal{F}$ 中一定有 S 使得 $|\delta_G(S)| \leq 3$，利用

$$\sum_{e \in \delta_G(S)} x_e = f(S) \geq 1$$

即可得到结论。

§ **练习** (6.3)：证明对弱超模函数 f 与 G 的子图 F，$f(S) - |\delta_F(S)|$ 仍为弱超模函数。

* 可验证 $f_0(S)$ 是弱超模函数，由此根据上方练习 (本质上是由于 $\delta_F(S)$ 是强次模函数) 可知算法的确可以在多项式次迭代后结束。

§ **练习** (6.4)：证明迭代舍入算法给出了原问题的一个 3-近似解。

§4.4　最小顶点覆盖

* 继续研究**无需求解线性规划问题**的近似算法。
回顾之前对非加权的最小顶点覆盖问题的讨论，考虑其加权形式：求 $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ 最小值，满足

$$x_i + x_j \geq 1, \quad \forall \{i,j\} \in E$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

- 对偶构造
  如之前，对应的 LP 为将 x_i 松弛到 $[0,1]$。其对偶问题 DP 为

$$\max \sum_{\{i,j\}\in E} y_{ij}$$

$$\sum_{j|\{i,j\}\in E} y_{ij} \leq c_i, \quad y_{ij} \geq 0$$

- 对偶问题近似求解
  从全 0 出发，不断选择 $\{i,j\} \in E$，将 y_{ij} 增加到不超过约束的最大可能值，直到不能再选择边 (对于非加权形式，这样即得到一个极大匹配)。
- 原问题近似解构造
  $x_i = 1$ 当且仅当 x_i 对应的约束是积极的，即

$$\sum_{j|\{i,j\}\in E} y_{ij} = c_i$$

  将此解称为 x_A。
  * 若某条边两端点的约束均不积极，可以增加这条边的 y_{ij} 的值，矛盾，因此 x^A 确为可行解。

近似比结论：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^A \leq 2\,\mathrm{opt}$$

- 证明：
  将 x^A 中 $x_i^A = 1$ 的下标集合记为 S，即有 (每条边最多被求和了两次)

$$\sum_{i\in S} c_i = \sum_{i\in S}\sum_{j|\{i,j\}\in E} y_{ij} \leq 2 \sum_{j|\{i,j\}\in E} y_{ij}$$

  由线性规划问题与对偶问题最优值相同，右侧求和不超过 $2\,\mathrm{opt}$，从而得证。

§4.5　多胞体理论

想法：考虑**多胞体**，即线性规划问题的可行域。既然可以将整数规划后松弛为线性规划在对应可行域找解后舍入，是否能利用多胞体中直接寻找整数规划近似解？

二部图最优匹配：给定二部图 $G = (V,E)$，每边存在权重。若边集的子集 M 互相无公共顶点，则称其为 G 的一个匹配。求使权值和最大的匹配。
记边集的权和

$$\omega(E') = \sum_{e\in E'} \omega_e$$

问题即变为求匹配 $M \subset E$ 使得 $\omega(M)$ 最大。

记示性向量

$$x_e^{E'}=\begin{cases}1 & e\in E'\\ 0 & e\notin E'\end{cases}$$

则可得到整数规划形式为 (这里 $e\ni v$ 表示 v 是 e 的一个端点)

$$\max\ \omega\cdot x$$

$$x\in\{0,1\}^{|E|},\quad \sum_{e\ni v}x_e\le 1,\quad \forall v\in V$$

将 $\{0,1\}$ 松弛为 $[0,1]$ 即对应线性规划问题。由于第二个条件可保证任何 $x_e\le 1$，事实上只需要 $x\ge 0$ 即可，其对偶问题为

$$\min\sum_v y_v$$

$$y\ge 0,\quad y_{v_1}+y_{v_2}\ge\omega_e,\quad \forall e=(v_1,v_2)$$

利用对偶理论可发现原问题对偶问题最优解相同，且计算可发现**原问题最优解可在 0-1 向量取到**。
考虑 ω 全为 1 的情况，此时同样可计算证明**对偶问题的最优解在 0-1 向量取到**，此时其对偶问题的最优解可以取为最小顶点覆盖问题的解。
König 定理：二部图最大匹配数等于其最小顶点覆盖数 (一般图未必成立)。
* 多胞体理论的发展即来源于二部图最大匹配的特殊性。

仍回到整数规划问题，考虑另一种松弛方式：将可行域**松弛到凸包**。利用目标函数是线性函数，其必然是凸函数，由此松弛到凸包后解不变。
由此，若原问题凸包恰好为松弛后线性规划问题的可行域，则两者解等价，二部图恰好满足此性质，从而成立。
* 多胞体理论：通过别的途径得到多胞体，判断和松弛后的线性规划可行域是否吻合。

A 报告

1. 组合优化的硬件应用
2. 半定规划与蒙特卡洛方法

   § **练习** (4.3)：证明半定规划的原问题与对偶问题都有内点可行解时，原问题与对偶问题必存最优解，且满足互补条件。
3. 后量子密码的数学基础
4. 基本图割问题的等价谱定理
5. 组合优化与博弈论