2021年资格考试试题回忆（计算方向）

2021年10月

目录

1 数值代数

一.（本题满分15分） 写出Gauss–Seidel迭代法的矩阵形式和分量形式，并证明当系数矩阵A对称正定时，G–S迭代法是收敛的。

二.（本题满分15分） 设x是对称矩阵A关于特征值λ的一个特征向量，且$x_0 = x + \mathcal{O}(\varepsilon)$, 证明：

$$\frac{x_0^* A x_0}{x_0^* x_0} = \lambda + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

三.（本题满分10分） 考察Householder重构。对于k, $w_k \in \mathbb{R}^{n-k+1}$是给定向量。定义$\tilde{H}_k = I - 2 w_k w_k^T \in \mathbb{R}^{(n-k+1)\times(n-k+1)}$, 与$H_k = \mathrm{diag}(I_{k-1}, \tilde{H}_k)$. 求出计算$H_n H_{n-1} \cdots H_1$的计算复杂度。

四.（本题满分10分） 已知A对称正定，有LDLT分解$A = LDL^T$, 其中D是对角线，L是单位下三角阵。证明：A的p条件数和Frobenius条件数都大于等于D的p条件数和 Frobenius 条件数。

整理人：林挺

2 最优化理论与算法

一.（本题满分10分） 考虑问题

$$\min \frac{1}{2}\|X-Y\|_F^2$$
$$\text{s.t. } Xe=e, X^Te=e, X\geq 0.$$

其中X,Y是n阶矩阵，e是全为1的列向量, $X\geq 0$是每个分量大于等于0.

(1).（5分) 写出该问题的对偶问题。

(2).（5分) 写出该问题的KKT条件。

二.（本题满分15分） 设$H\in\mathbb{R}^{n\times n}$是一个对称半正定矩阵，$\gamma,\delta\in\mathbb{R}^n$ 是给定向量.

(1).（5分) 证明$H_1=H-\frac{H\gamma\gamma^TH}{\gamma^TH\gamma}$ 奇异而且半正定。

(2).（5分) 当H正定时，给出$H^+=H+\frac{\delta\delta^T}{\gamma^T\delta}-\frac{H\gamma\gamma^TH}{\gamma^TH\gamma}$ 是正定矩阵的充要条件并证明之。

(3).（5分) 若H奇异，证明H^+奇异。

三.（本题满分25分） 考虑问题

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } l\leq x\leq u$$

这里l,x,u是n维向量，$f(x)$可微。

(1).（2分) 给出点x到$[l,u]$的投影算子$P(x)$, 即下列问题的解：

$$\arg\min \|x-y\|_2^2$$
$$\text{s.t. } l\leq y\leq u.$$

(2).（2分) 证明：对任意$x\in\mathbb{R}^n, y\in[l,u]$, 有$(y-P(x))^T(P(x)-x)\geq 0$.

(3).（3分) 证明：对于任意$x,y\in\mathbb{R}^n$，有$\|P(x)-P(y)\|_2^2\leq(P(x)-P(y))^T(x-y)$.

(4).（3分) 证明：原问题的KKT条件等价于$x=P(x-\nabla f(x))$.

(5).（5分) 给出求解原问题的投影梯度法，给出一个全局收敛的结果。要求写出步长的选取方式和假设条件。

(6).（5分) 给出求解原问题的二次罚函数法，写出二次罚函数的梯度。二次罚函数是否二次可微？

(7).（5分) 给出求解原问题的增广拉格朗日法，要求只有一个优化变量x，和具体的乘子更新公式。

整理人：林挺

3 偏微分方程数值解

一.（本题满分10分） 判断并说明理由：

(1). 线性椭圆方程通过差分方法离散得到的是一个线性代数方程组。

(2). 有限元插值理论中$u-\Pi_h u$的L^2误差与H^1误差阶相同。

(3). 在变分形式中，Dirichlet边界条件一般称为强制边界条件，Neumann边界条件一般称为自然边界条件。

(4). 数值格式的稳定性是指解对右端项和边值条件的连续依赖性

(5). Ritz方法和Galerkin方法分别基于最小势能原理和虚功原理，它们对应的解一般不同。

二.（本题满分10分）

(1).写出Ciarlet对于有限元的定义。

(2). 叙述误差估计的一般框架。

(3). $K=(a,a+h), \Pi_h v\in\mathcal{P}_1$ 满足$\Pi_h v(a)=v(a), \Pi_h v(a+h)=v(a+h)$. 利用仿射等价和Sobolev插值理论估计 $\|u-u_h\|_{L^2}$ 和 $|u-u_h|_{H^1}$.

三.（本题满分10分） 写出$-\Delta u=f$在 $\{h_x,h_y\}$网格步长的正方形区域$[0,1]^2$上的离散格式。计算离散矩阵的特征值，估计条件数，利用能量法说明上述方法的稳定性，并进行误差分析。

四.（本题满分10分） 考虑方程

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ \frac{\partial u}{\partial t}+a^2\frac{\partial\rho}{\partial x}=0\end{cases}$$

初值条件为 $\rho(0,x)=\rho^0(x)$, $u(0,x)=u^0(x)$.

(1). 利用特征分解和广义Riemann不变量求解上述方程。

(2). 给出该初值问题的迎风格式。

五.（本题满分10分） 考虑格式

$$U_j^{n+1}=U_j^n-\frac{\lambda}{2}(f(U_{j+1}^n)-f(U_{j-1}^n))+\frac{\rho}{2}(U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n).$$

其中$\lambda|f'(u)|\le\rho<1$.

(1). 证明：这个格式是TVD的，并且是单调格式。

(2). 验证这个格式满足离散熵条件。

整理人：韩如冰

4 随机模拟方法

一.（本题满分15分） 令$b(s) \in L^2(0,1)$,计算如下期望

$$\mathbb{E}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 b^2(s)ds + \int_0^1 b(s)dW_s\right\}$$

二.（本题满分15分） 求以下OU过程的解析解和不变分布

$$\begin{aligned}
dX_t &= (-\gamma X_t + Y_t)dt + \sqrt{2\gamma}dV_t,\\
dY_t &= (-X_t + \beta Y_t)dt + \sqrt{2\beta}dW_t,\\
(X_t, Y_t)_{t=0} &= (X_0, Y_0)
\end{aligned}$$

其中$\gamma > 0, \beta > 0$,V_t, W_t是相互独立的标准布朗运动。

三.（本题满分20分） 对于SDE

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t,$$

在b全局Lipschitz和$\mathbb{E}X_0^2 < \infty$条件下证明Euler-Maruyama格式的强1/2阶收敛性。

整理人：豆旭桉

5 常微分方程

一.（本题满分20分） 考虑系统

$$\frac{dx}{dt} = p(t)\cos^2 x - \sin^2 x.$$

(1)．(5分) 说明解的存在唯一性，每个解的最大存在区间都是$(-\infty, \infty)$.

(2)．(5分) 证明每个解都是有界的。

(3)．(5分) 将$x(0) = x$为初值的解记为$\phi(t, x)$，记$f(x) = \phi(1, x)$. 证明：$f(x+\pi) = f(x) + \pi$.

(4)．(5分) 证明f在$[0, \pi]$上恰有两个不动点x_1, x_2，并且满足$f'(x_i) \neq 1$.

二.（本题满分10分） 考虑n维空间中的线性系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t).$$

其中$A(t)$是矩阵值连续函数, f是向量值连续函数。对于每一个有界连续的f，方程都存在一个有界连续解。证明：对每一个有界连续的f，这个有界解是唯一的。

三.（本题满分20分） 考虑系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sin x + \varepsilon y^3 \end{cases}$$

(1)．(5分) 求出系统的所有奇点，判断Lyapunov稳定性。

(2)．(5分) 画出$\varepsilon = 0$时系统的相图。

(3)．(5分) 证明并否定：当$\varepsilon = 0$时系统是否存在周期任意小的闭轨。

(4)．(5分) 证明当$\varepsilon \neq 0$时系统无闭轨。

整理人：林挺

6 椭圆方程

一.（本题满分15分） 设u在$\mathbb{R}^n$上调和，且$|u(x)| \leq C|x|\ln(|x|+1)$。证明$u(x) \equiv 0$。

二.（本题满分20分） 考虑方程

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = f \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$u \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, f \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, f的支集远离$t = 0$.

(1).（10分) 利用Fourier变换求解该方程。

(2).（10分) 验证（1）中得到的解是古典解。

三.（本题满分15分）

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ 是有界光滑区域，考虑以下方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

这里$f(u) = 1 - u^2$, $u \in H_0^1(\Omega)$.

(1).（5分) 给出该方程弱解的定义

(2).（10分) 证明$u \in C^\infty(\Omega)$.

整理人：豆旭桉

7 泛函分析

一.（本题满分15分） 考虑$C[0,1]$上线性算子$T : f \mapsto \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$。

(1).（5分) 证明T是紧算子。

(2).（5分) 求$\sigma(T)$。

(3).（5分) 求T的一个非平凡不变子空间。

二.（本题满分15分） 考虑$L^2(\mathbb{R}^n)$上算子$T = -\Delta$，$D(T) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$。

(1).（5分) 证明T不闭。

(2).（5分) 证明T可闭化，并求$\overline{T}$。

(3).（5分)求T^*。

三.（本题满分10分） 设H是希尔伯特空间，T是H上的自伴算子。证明$\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$当且仅当存在一列$\{u_n\} \subseteq H$使得$\|u_n\| = 1$，$u_n$弱收敛到0且$\|(\lambda - T)u_n\| \to 0$。

四.（本题满分10分） 设A是压缩半群$\{T(t) : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$的生成元，$\lambda \in \mathbb{C}$且$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$。证明$\lambda \in \rho(A)$且：

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\mathrm{d}t$$

整理人：欧阳铭晖

2022 年资格考试计算方向试题

回忆版

2022 年 10 月

目录

1 泛函分析

1. （本题满分 10 分）定义 ℓ^p 上的线性算子

$$U : x \longmapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right).$$

   (a) 求 U 的算子范数.

   (b) 证明 U 是紧算子.

2. （本题满分 10 分）设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$是闭子空间, 证明 $\mathscr{G}$ 上有界线性泛函的 Hahn-Banach 延拓是唯一的.

3. （本题满分 10 分）Ω 是边界光滑的有界区域, $T_0 = -\Delta$, $\mathcal{D}(T_0) = H_0^2(\Omega)$, 求 T_0 的 Friedrichs 扩张.

4. （本题满分 10 分）A 是 Hilbert 空间上的自伴算子. 证明

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b [R_A(\lambda + \varepsilon \mathrm{i}) - R_A(\lambda - \varepsilon \mathrm{i})] \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}(E_{(a,b)} + E_{[a,b]}),$$

   其中$R_A(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}$, E_U $(U \subset \mathbb{C})$ 是谱族.

5. （本题满分 10 分）Δ 是 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上的 Laplace 算子, $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$, 证明 $\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta + V) = [0, \infty)$.

整理人：吴大维

2 常微分方程定性理论

1. （本题满分 20 分）考虑平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-\varepsilon y-x^3.\end{cases}$$

   (a) 求出系统的所有奇点, 判断奇点的 Lyapunov 稳定性.

   (b) 证明 $\varepsilon>0$ 时该系统没有周期轨.

2. （本题满分 10 分）考虑平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(a+\varepsilon\cos t)x.\end{cases}$$

   其中 $a>0$ 为给定常数, $a\notin\{\frac{n^2}{4}:\ n\in\mathbb{Z}\}$, 证明存在 $\varepsilon_0>0$, 使得 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时, 该系统在原点 Lyapunov 稳定.

3. （本题满分 10 分）证明在平面 $\mathbb{R}^2$ 上, 向量场 $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ 与任一不过原点的 C^1 简单闭曲线相切.

4. （本题满分 10 分）设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为严格递增的连续函数, 并且满足对任意 $x\in\mathbb{R}$, $f(x+1)=f(x)+1$, $g(x+1)=g(x)+1$, $f(x)<g(x)$. 证明: 若 f 的旋转数 $\rho(f)$ 为无理数, 则 $\rho(f)<\rho(g)$.

整理人：吴清玉

3 椭圆方程

1. （本题满分 20 分）

   (a) 记 $B_R=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<R\}$. 设 $u\in C^2(B_R)$ 是非负调和函数, 证明对任意 $r<R$,

   $$\sup_{B_r}u\le\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n\inf_{B_r}u.$$

   (b) 设 u 是全空间的有界调和函数, 证明 u 是常数.

   (c) 设 u 是全空间的上有界调和函数, 即 $u\le M,\forall x\in\mathbb{R}^n$, 证明 u 是常数.

2. （本题满分 15 分）已知$u\in C(\overline{Q_T})\cap C^{2,1}(Q_T)$是下列方程的解.

   $$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t), & (x,t)\in Q_T,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in[0,l],\\ (-u_x+u)|_{x=0}=g_1(t), & t\in[0,T],\\ (u_x+u)|_{x=l}=g_2(t), & t\in[0,T].\end{cases}$$

   其中 $Q_T=(0,l)\times(0,T]$. 证明

   $$\sup_{Q_T}|u(x,t)|\le C(F+B).$$

   其中

   $$F=\sup_{(x,t)\in Q_T}|f(x,t)|,\quad B=\max\{\sup_{x\in[0,l]}|\varphi(x)|,\sup_{t\in[0,T]}|g_1(t)|,\sup_{t\in[0,T]}|g_2(t)|\},$$

   常数 C 仅由 a,l,T 决定.

3. （本题满分 15 分）设 $u\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 满足方程

   $$\begin{cases}-\triangle u+u^3=f(x), & x\in\Omega,\\ u=\varphi(x), & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

   其中 $f\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),\varphi\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

   (a) 证明

   $$\sup_{\Omega}|u|\le\max\{\sup_{\partial\Omega}|\varphi|,\sup_{\Omega}|f|^{\frac{1}{3}}\}.$$

   (b) 证明 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

整理人：吴大维

4 数值代数

1. （本题满分 20 分）对于矩阵

$$A=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}21&2&3&1&1&2\\2&24&6&2&2&4\\3&6&29&3&3&6\\1&2&3&21&1&2\\1&2&3&1&21&2\\2&4&6&2&2&24\end{bmatrix}.$$

   求 A 的谱半径, 并说明存在矩阵 δA, 使得 $\|A^{-1}\|_2\|\delta A\|_2=1$ 且 $A+\delta A$ 奇异.

2. （本题满分 15 分）提出最速下降法的改进算法, 并证明收敛性.

3. （本题满分 15 分）叙述实对称矩阵特征值问题的 Jacobi 方法, 并证明收敛性.

整理人：吴大维

5 最优化理论与算法

1. （本题满分 10 分）$\{x_k\}$ 为迭代点列, 记 $y_k = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})$, $s_k = x_k - x_{k-1}$.

   (a) （6 分）分别写出以下无约束优化问题的显式解:

   $$\min_{\alpha\in\mathbb{R}} \|\alpha y_k - s_k\|_2^2, \tag{1}$$

   $$\min_{\alpha\in\mathbb{R}} \|y_k - \alpha^{-1} s_k\|_2^2. \tag{2}$$

   (b) （4 分）分别写出对优化问题 (1) 和 (2) 的理解, 再根据理解设计一个梯度优化算法求解最优化无约束问题 $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$, 并解释该算法的合理性.

2. （本题满分 40 分）设 $C \in \mathbb{S}^n$, p 为满足 $1 \le p \le n$ 的正整数, 考虑问题

   $$\begin{aligned} \max_{Y\in\mathbb{R}^{n\times p}} \ & f(Y) = \mathrm{Tr}(CYY^T), \\ \text{s.t.} \ & \mathrm{diag}(YY^T) = \mathbf{1}_n. \end{aligned} \tag{3}$$

   符号约定: 对于 $X \in \mathbb{S}^n$, 定义 $\mathrm{diag}(X) = (X_{11}, X_{22}, \ldots, X_{nn})^T$, 可令 $Y = (y_1^T, y_2^T, \ldots, y_n^T)^T$, $y_i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 考虑向量导数.

   (a) （5 分）判断问题 (3) 是否满足线性无关约束品性 (LICQ).

   (b) （5 分）计算 $f(Y)$ 的导数, 并估计其 Lipschitz 常数.

   (c) （5 分）写出问题 (3) 的一阶最优性条件 (KKT 条件).

   (d) （5 分）设当前点是局部最优点, 写出拉格朗日乘子的显式表达式 (用 C 和 Y 表达).

   (e) （5 分）考虑二阶最优性条件 (后面说了一堆定义), 请写出拉格朗日函数的海瑟矩阵 (可以写成算子形式).

   (f) （5 分）求解投影梯度法子问题:

   $$\begin{aligned} \max_{Y\in\mathbb{R}^{n\times p}} \ & \|B - Y\|_F^2, \\ \text{s.t.} \ & \mathrm{diag}(YY^T) = \mathbf{1}_n. \end{aligned}$$

   要求显示写出最优解.

   (g) （5 分）写出求解问题 (3) 的投影梯度方法, 简述步长的选取策略，以及算法收敛的条件.

   (h) （5 分）写出求解问题 (3) 的序列二次规划方法, 要求写出二次规划子问题以及 Newton 法的迭代算法.

整理人：武朔南

6 偏微分方程数值解

1. （本题满分 10 分）考虑二维热方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy}$.

   (a) 分别写出该方程的经典显式格式和 Crank-Nicolson 格式, 分别使用能量法和 Fourier 方法分析两种格式的稳定性条件.

   (b) 给出该方程的时空二阶精度的交替方向隐式格式, 并分析格式的稳定性. 能否该格式推广至三维, 并保持该格式的时空二阶精度, 请予以说明.

2. （本题满分 10 分）

   (a) 请写出 Ciarlet 对有限元的定义.

   (b) 请给出一种基于仿射变换的有限元先验误差估计框架.

   (c) 对于单元 $K = (a, a+h)$ 和线性插值算子 $\Pi_h : C(\overline{K}) \to \mathcal{P}_1(\overline{K})$, $\Pi_h v(a) = v(a), \Pi_h v(a+h) = v(a+h)$. 利用仿射等价和 Sobolev 空间的等价商范数理论估计 $\|u - \Pi_h u\|_{L^2}$ 和 $|u - \Pi_h u|_{H^1}$.

3. （本题满分 10 分）对于二维 Poisson 方程的 Dirichlet 边值问题, 请分别给出基于 Ritz 方法和 Galerkin 方法的弱解的提法. 请说明数值离散解的存在唯一性, 并分析数值离散解和真解的误差. 有限元解的插值误差在 L^2 和 H^1 范数下的阶是否相同? 请予以说明.

4. （本题满分 10 分）考虑对流方程 $u_t + f(u)_x = 0$.

   (a) $f(u) = au$, a 为常数. 请问 Godunov 格式何时为单调的, 何时为 TVD 的.

   (b) $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. 请分别写出方程的 Courant-Isaacson-Rees 格式, Godunov格式, Lax-Friedrichs格式, Lax-Wendroff 格式, MacCormack 格式.

   (c) 给定凸熵对 $(\eta(u), q(u))$, 请问是否存在格式
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_j^n = \frac{1}{h}(\hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n, u_j^n)),$$
   满足以下的半离散熵条件
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(u_j^n) = \frac{1}{h}(\hat{F}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{F}(u_{j-1}^n, u_j^n)),$$
   其中 $\hat{F}$ 为数值熵通量.

5. （本题满分 10 分）

   (a) 方程组 $\vec{u}_t + \vec{f}(\vec{u})_x = 0$, 何时为双曲型方程组, 特征场何时被称为真正非线性的, 何时被称为线性退化的? 请分别给出方程组的通量差分分裂格式和通量向量分裂格式.

   (b) $\vec{u} = (\rho, u)^T, \vec{f}(\vec{u}) = (a^2 u, \rho)^T$, 其中 a 为正常数. 说明方程组是严格双曲的, 特征场是线性退化的. 并分别使用特征分解, Rankine-Hugoniot 条件和广义 Reimann 不变量求解方程组对应的 Riemann 问题.

整理人：张之奕

7 随机模拟方法

1. （本题满分 15 分）设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是带权无向图 G 的权重矩阵, 对称不可约. 在 G 上定义离散时间 Markov 链, 转移概率正比于点的连接权重. 记 $D = \mathrm{diag}(A\cdot \mathbf{1})$, 即 $d_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

   (a) 求出概率转移矩阵 P 以及不变分布 μ, 证明 μ 满足细致平衡条件.

   (b) 刻画 D 和 A 的特征值和特征向量的结构, 描述其关系.

2. （本题满分 15 分）定义右端点随机积分

$$\int f(t,\omega) * \mathrm{d}W_t = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_{j+1},\omega)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

   假设随机过程 X_t 在该随机积分意义下满足方程

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t,t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t,t) * \mathrm{d}W_t,$$

   其中 X_t, W_t 均为一维. 写出 X_t 的概率密度函数满足的 Fokker-Planck 方程.

3. （本题满分 20 分）有下列随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = -X_t\,\mathrm{d}t + \sqrt{2}\,\mathrm{d}W_t, \quad t \in (0,1).$$

   初值 $X_0 \sim \mathscr{N}(0,1)$, 而且和 $\{W_t\}$ 独立.

   (a) 求出 X_t 的均值函数 $m(t) = \mathbb{E}X_t$ 和协方差函数 $K(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$.

   (b) 写出 $K(s,t)$ 作为算子的特征值问题的微分方程形式及其边界条件.

   (c) 写出 X_t 的 Karhunen-Loève 展开.

整理人：吴大维

2023 资格考

2023 年 10 月

几何与拓扑

代数拓扑

每题 10 分，共 50 分.

问题 1. M 为 $S^1 \times S^1 \times [0,1]$ 商掉 $(p,q,0) \sim (q,p,1)$ 得到的三维流形. 对于 $P_0 = (x_0, x_0, 0)$，这里 $x_0 \in S^1$，试计算 $\pi_1(M, P_0)$.

问题 2. U, V 为 X 中开集，$U \cup V = M, U \cap V = A \neq \varnothing$. 求证：$H_*(X,A) \cong H_*(U,A) \oplus H_*(V,A)$.

问题 3. X 为有限胞腔复形. 已知 $H_0(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_1(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4, H_2(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$，并且 $\forall k > 2, H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$. 试求出所有 X 的整系数上同调群.

问题 4. 若 M 的万有覆叠为 $\mathbb{R}^n$，求证：映射 $f: S^2 \to M$ 为零伦的.

问题 5. M 为光滑闭流形. 若 $H_1(M;\mathbb{Z}_2) = 0$，求证：M 可定向.

微分拓扑

每题 10 分，共 50 分.

问题 6. M 为 n 维微分流形. 求证：TM 为 $2n$ 维微分流形.

问题 7. M 为 n 维可定向带边流形. 求证：∂M 为 $n-1$ 维可定向流形.

问题 8. (M,g) 为 *Riemann* 流形，$N \subset M$ 为紧无边子流形. 求证：对于充分小的 $\varepsilon > 0$，N 在 M 中存在 ε-管状邻域.

问题 9. M, N 为同维数光滑流形，$f: M \to N$ 为同伦. 求证：$\deg f = \pm 1$.

问题 10. M 为闭光滑流形，求证:$\forall x \neq y \in M$，存在微分同胚 $f: M \to M$，使得 $f \simeq id_M$，且 $f(x) = y$.

示性类

问题 11. *(a)* 求证：S^3 上 $1,2,3$ 维的实丛平凡，进而证明所有实丛均平凡;

(b) 求证：S^3 上复线丛平凡，进而证明所有复丛平凡.

问题 12. $E \to B$ 为秩为 n 的复向量丛.

(a) 用 $c_1(E), c_2(E)$ 表示出 $c_1(E^* \otimes E), c_2(E^* \otimes E)$;

(b) 设 $H^*(B;\mathbb{Z})$ 是无挠的，且存在 $k \geq 1$ 使得 $c(E^{\otimes k}) = 1$. 求证：$c(E) = 1$.

问题 13. *(a)* 求 $\#_r\mathbb{R}P^2$ 的 *Stiefel-Whitney* 类;

(b) 求证：$\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ 不可嵌入 $\mathbb{R}^3$.

问题 14. 设 M 为 k 维光滑闭流形，求证：M 上存在唯一的实线丛 L 使得 L 为可定向 $k+1$ 维流形.

黎曼几何

问题 15. S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中单位球，求证它的测地线是大圆.

问题 16. 求证:S^3 上存在处处非零的切向量场 e_1, e_2, e_3，使得 $[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2$.

Hint: 在 $\mathbb{R}^4$ 中定义 $X_1 = (-x^2, x^1, x^4, -x^3), X_2 = (-x^3, -x^4, x^1, x^2), X_3 = (-x^4, x^3, -x^2, x^1)$.

问题 17. 设 $M, \tilde{M}$ 为完备 *Riemann* 流形，$f : M \to \tilde{M}$ 局部等距，且 $\forall \tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{M}$，存在唯一测地线连接它们. 求证：$f$ 是一个等距映射.

问题 18. 求证：n 维环面 T^n 上不存在正 *Ricci* 曲率的度量.

问题 19. M 是完备 *Riemann* 流形，且存在常数 $\kappa > 0$，使得 $K \geq \kappa$, 这里 K 为 M 的截面曲率. γ 是 M 上的闭测地线. 求证：$\forall p \in M, d(p, \gamma) \leq \dfrac{\pi}{2\sqrt{k}}$.

微分几何

问题 20. $\vec{r}(t) = (\dfrac{1}{3}t^3, t^2, 2t), \Sigma : 3x - 4y + 2z = 0$.

(a) 求 $\vec{r}$ 与 Σ 交点，以及交点之间曲线的长度;

(b) 求 $\vec{r}$ 上一切与 Σ 平行的切向量所在的点，及对应点处的切线方程，并计算这些点到 Σ 的距离;

(c) 从 $\vec{r}$ 向 Σ 作投影生成一个曲面，求出曲面的方程，并且回答该曲面是否是可展的.

问题 21. 环面由 $((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$ 给出坐标.

(a) 求它的第一基本形式、第二基本形式、平均曲率、*Gauss* 曲率;

(b) 求一个共形映射，将它映到一个 *Gauss* 曲率为 0 的环面上.

问题 22. 球面由 $(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$ 给出坐标.

(a)（与球面无关）求证：对任一正则曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 及 Σ 上的曲线 $c(t)$, 求证：$c(t)$ 在 Σ 上的测地曲率 κ_g 仅依赖于 Σ 的第一基本形式;

(b) 求 $\theta \equiv \theta_0$ 在 S^2 上的测地曲率;

(c) 若球面上的闭凸曲线 γ 将球面面积等分，求证：它为大圆.

分析与方程

复分析

前两题 15 分，第三题 20 分.

问题 23. *(a)* 试给出球面 $\mathbb{S}^2$ 的共形结构（我也不知道共形结构定义是啥，题目上就是这么写的）;

(b) 试用 *Riemann* 映射定理、以及亏格 *0* 的紧黎曼曲面结构唯一性证明单连通 *Riemann* 曲面的单值化定理.

问题 24. $f : S \to S'$ 是紧连通 *Riemann* 曲面间全纯映射. 求证：$\forall q \in S'$, $f^{-1}(q)$ 中点的个数 *(*在分歧点处计重数*)* 不依赖于 q 的选取.

问题 25. 记 $\rho_\Delta = \dfrac{2}{1-|z|^2}$，则 $g_\Delta = \rho_\Delta^2|dz|^2$ 为单位圆盘 Δ 上的 *Poincare* 度量.

(a) 求证：$K_{g_\Delta} = -1$;

(b) 设 $g = \rho^2|dz|^2$ 为 Δ 上的一个共形度量，试用最大值原理证明 *Ahlfors* 定理：$g \leq g_\Delta$;

(c) 设紧 *Riemann* 曲面 M 上有两个共形度量 g_0, g，满足 $0 \geq K_{g_0} \geq K_g$, 试推广 *(b)* 问的结果，求证：$g_0 \geq g$.

*(*我也不知道这里的共形度量是啥意思，题目上就这么写的. 个人猜测是书上 *2.4* 节的那个 *Ahlfors* 的定理.*)*

泛函分析

问题 26. 设 H 为 *Hilbert* 空间，$\{e_i\}$ 为标准正交基，且 $\{\rho_i\}$ 为标准正交集.

(a) 若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ||e_i - \rho_i||^2 < 1$, 求证：$\{\rho_i\}$ 为正交基;

(b) 若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ||e_i - \rho_i||^2 < \infty$, 求证：$\{\rho_i\}$ 为正交基.

问题 27. 设 X 为赋范线性空间，且 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset X$ 满足 $\forall f \in X^*$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty$. 求证：

$$\sup_{||f|| \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty.$$

问题 28. 设 H 为 *Hilbert* 空间，A 为 H 上自伴算子，E 为 A 的谱族. 求证：$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} | \forall \varepsilon > 0, E(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0\}$.

问题 29. 设 $H = L^2(\mathbb{R}^3)$, 求证：$A = -\Delta + \dfrac{1}{|x|}$ 在定义域 $D(A) = H^2(\mathbb{R}^3)$ 上是自伴算子.

问题 30. A 为 *Hilbert* 空间 H 上的算子. 求证：算子 A 为强连续算子压缩半群生成元当且仅当 A 耗散，且 $\exists \lambda_0 > 0, \mathrm{Ran}(\lambda_0 I - A) = H$.

椭圆方程

问题 31. u 是 $\mathbb{R}^n$ 上调和函数，满足 $\exists A \in \mathbb{R}^+, |u(x)| \leq A(1+|x|)^N, \forall x \in \mathbb{R}^n$. 这里 N 是正整数. 求证：u 是多项式.

问题 32. $f \in C(\mathbb{R} \times [0,T)), \varphi \in C(\mathbb{R})$. f, φ 有界. 设 u 是

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

在 $\mathbb{R} \times [0,T)$ 上的有界解. 求证：

$$|u(x,t)| \leq T \sup |f(x,t)| + \sup |\varphi(x)|.$$

问题 33. Ω 是有界光滑区域. $\lambda = \inf\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x : u \in W_0^{1,2}(\Omega), ||u||_{L^2} = 1\}$. 求证：

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & \textit{in } \Omega \\ u = 0, & \textit{on } \partial\Omega \end{cases}$$

存在非平凡弱解.

ODE 定性理论

问题 34. 记 $x' = f(x,t)$ 的从 $t = 0$ 处 $x = x_0$ 出发的解为 $\phi(t, x_0)$, 这里 f 为 C^1 函数. 请举例一个 f 以及一个 t_0 使得映射 $x_0 \mapsto \phi(t_0, x_0)$ 不是一致连续的.

问题 35. $x' = Ax + f(t)$，这里 $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) 求证：$x' = Ax$ 没有非零有界（指在 $\mathbb{R}$ 上有界）解等价于 0 是双曲奇点;

(b) 若 f 有界，A 双曲，求证：存在唯一一个有界解. 进一步如果 f 范数随 t 趋于无穷而趋于 0，求证这个解的范数也随 t 趋于无穷而趋于 0.

问题 36. $x' = q(t)\cos^2(x) - \sin^2(x)$，这里 q 连续且有周期 1. 假设系统有一个正向有界解.

(a) 求证：所有解在 $\mathbb{R}$ 上有界;

(b) 求证：映射

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \phi(1,p) \end{aligned}$$

有不动点.

问题 37. 平面上的 C^1 系统 $x' = f(x)$ 只有一个奇点 0，并且有一族周期点 q_n 的周期趋于 0. 求证：任何解的存在区间都是 $\mathbb{R}$.

调和分析

问题 38. $1 \le p, q \le \infty$. 求证：若存在常数 $C > 0$ 使得 $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), ||\hat{f}||_q \le C||f||_p$, 则有 $q = p'$ 且 $1 \le p \le 2$.

问题 39. 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $||f||_1 > 0$. 求证：$Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$，并且 $||f||_1 \le ||Mf||_{1,\infty}$.

问题 40. 计算 $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ 的 *Fourier* 变换以及 *Hilbert* 变换.

问题 41. 若 $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \le 1$. 求证：$|f|^\alpha \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

问题 42. 设 $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \notin \mathrm{supp}(\zeta)$，且 $\{a_j\}$ 为有界数列. 求证：$m(\xi) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} a_j \zeta(2^{-j}\xi)$ 是一个 L^p 乘子，其中 $1 < p < \infty$.

代数与数论

抽象代数

第三、四题 15 分，第一、二题 10 分.

问题 43. 试计算下面交换群的阶数：

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{36}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{15}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{24}$;

(b) $Z \oplus Z/A$, 这里 A 为 $(m, 0), (n, 1)$ 生成的子模.

问题 44. 试判断下面的命题正确与否, 并给出依据:

(a) 不存在 G 的正规子群 H, K, N，使得 $G \cong H \times K$, 并且 $H \cap N$ 与 $K \cap N$ 均为平凡子群;

(b) F 为有限域，$F[x]$ 上的素理想只有有限多个.

问题 45. R 为主理想整环.

(a) 若 M 为自由 R 模，N 为 M 的子模. 求证：M/N 是无挠的当且仅当任何一组 N 的基都可以延拓为一组 M 的基;

(b) 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为 M 的一组生成元, 设 $y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, a_i \in R$. 若 $\gcd(a_1, \cdots, a_n) = 1$，求证：存在 $y_2, \cdots y_n$，使得 $y_1, \cdots, y_n$ 是 M 的一组生成元.

问题 46. 记 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-3}, \sqrt[3]{5})$.

(a) 求证：$K/\mathbb{Q}$ 是 *Galois* 扩张;

(b) 求 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$;

(c) 求 $K/\mathbb{Q}$ 的所有中间域.

同调代数

问题 47. A 是 *PID*, $0 \ne a \in A$ 不是单位元素. $B = A/(a)$. 求证：B 是内射以及投射 B 模, 并且 B 作为 A 模既不内射也不投射.

问题 48. G 是非交换有限单群. 求证:$H_1(G;\mathbb{Z}) = H^1(G;\mathbb{Z}) = H^2(G;\mathbb{Z}) = 0$, 这里 G 在 $\mathbb{Z}$ 上平凡作用.

问题 49. $\mathbb{H}$ 为四元数，$G =< i, j, k >$ 为八阶群. 求证：$\{\pm 1\} \to G \to \mathrm{coker}$ 不分裂，并将这个扩张对应的群上同调 $H^2(T, \pm 1)$ 中的元素，以 $T \times T \to \{\pm 1\}$ 的形式写出, 这里 $T = \mathrm{coker}$.

问题 50. 求证：$\mathrm{cone}(B \to (\mathrm{cone}A \to B))$ 和 $A[1]$ 是 qis 的.

问题 51. k 是域. 求证: $k[x]$ 不是平坦的 $k[x^2, x^3]$ 模.

代数几何

问题 52. 代数簇是域上分离有限型整概形. 求代数簇的仿射开子集的补集的余维数的可能值.

问题 53. 对诺特正则概形 X，计算结构层乘法群 $O_X^\times$ 的各阶 *Zariski* 上同调.

问题 54. 对任何复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限型仿射概形 X，任何嵌入 $X \to A^n$，在闭点集 $X(\mathbb{C})$ 上赋予 $A_n(\mathbb{C})$ 上的欧氏拓扑的子空间拓扑，称为 X 的解析化.

(a) 求证：X 的解析化的拓扑和嵌入的选取无关;

(b) 对任何有限型概形 X，求证：X 的闭点集上能赋予拓扑得到解析化 X_{an}，使得限制在任何仿射开子集 U 的闭点集上即为上面定义的解析化;

(c) 求证：有限型概形 X 是分离的当且仅当 X_{an} 是 *Hausdorff* 的.

代数数论

问题 55. 求正整数 n 和非零整数 a, b 使得 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{n}$ 是代数整数.

问题 56. 设 p 为素数，$n \in \mathbb{N}$ 满足 $p \nmid n$. 已知数域 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 的代数整数环是 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$.

(a) 求证：$\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ 在 p 处非分歧;

(b) 设 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 的在 p 上方的素理想. 令 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 的自同构 σ 将 ζ_n 映为 ζ_n^p. 求证：σ 是 $D_\mathfrak{p}$ 的生成元.

问题 57. $K \subset L$ 是数域. 求证：$\mathbb{A}_K \otimes_K L = \mathbb{A}_L$ 是作为拓扑环的同构.

问题 58. 求证：对任何素数 p，$(x^2-2)(x^2-17)(x^2-34)$ 在 p 进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 中有根.

问题 59. 求证：对数域 K，$\zeta_K(s) = \sum\limits_{\mathfrak{a}\text{是}\mathcal{O}_K\text{的非零理想}} (N\mathfrak{a})^{-s}$ 在 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时绝对收敛.

有限域

第一、四题 10 分，第二、三题 15 分. 题目中的 p 为素数，q 为素数幂.

问题 60. $f(x)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 次不可约多项式. 求证：$f(x)$ 在 $\mathbb{F}_{q^m}$ 上不可约当且仅当 $\gcd(m, n) = 1$.

问题 61. 给定元素 $\alpha, \theta \in \mathbb{F}_{q^n}$. 定义

$$\beta = \theta + \alpha\theta^q + \cdots + \alpha^{1+q+\cdots+q^{n-2}}\theta^{q^{n-1}}.$$

(a) 求证：$\alpha\beta^q + \theta = \beta + \mathrm{N}(\alpha) \cdot \theta$;

(b) 求证：$\forall\alpha, \exists\theta$ 使得 $\beta \neq 0$;

(c) 求证：若 $\mathrm{N}(\alpha) = 1$, 则 $\exists\beta$ 使得 $\alpha = \beta^{1-q}$.

问题 62. 将 $x^{27} - x$ 在有限域 $\mathbb{F}_3$ 上分解为不可约多项式的成绩.

问题 63. 设 $q = p^m$，$\mathrm{Tr} : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$ 是迹映射. $\zeta \in \mathbb{F}_p$ 是本原元. 对于 $u \in \mathbb{F}_p$，定义:

$$\Omega = \sum_{w \in \mathbb{F}_p^*} \sum_{x,y \in \mathbb{F}_q} \zeta^{w(\mathrm{Tr}(x^2+xy)-u)}.$$

(a) 求证：

$$\Omega = \begin{cases} q(p-1), & u = 0, \\ -q, & u \neq 0. \end{cases}$$

(b) 求 $\#\{(x,y) \in \mathbb{F}_q^2 : \mathrm{Tr}(x^2+xy) = u\}$.

2023 年资格考试计算方向试题

回忆版

2023 年 10 月

目录

1 泛函分析

1. (本题满分 10 分) 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基，$\{f_n\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交族，证明:

   (a) 若 $\sum_n \|e_n - f_n\|^2 < 1$，则 $\{f_n\}$ 是一组标准正交基，

   (b) 若 $\sum_n \|e_n - f_n\|^2 < \infty$，则 $\{f_n\}$ 也是一组标准正交基。

2. (本题满分 10 分) 设 $\mathcal{X}$ 是赋范线性空间, $\{x_n\}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一列点, 若对任意的 $f \in \mathcal{X}^*$, 有 $\sum_n |f(x_n)| < \infty$，证明:
$$\sup_{\|f\| \le 1} \sum_n |f(x_n)| < \infty.$$

3. (本题满分 10 分) 设 A 是 Hilbert 空间上的自伴算子，E 为 A 的谱族，证明：$\lambda \in \sigma(A)$ 的充分必要条件是，$\forall \epsilon > 0$，有 $E(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \neq 0$。

4. (本题满分 10 分) 证明：$L^2(\mathbb{R}^3)$ 中，$-\Delta + \frac{1}{|x|}$ 是 $H^2(\mathbb{R}^3)$ 上的自伴算子。

5. (本题满分 10 分) 证明：Hilbert 空间上稠定闭算子 A 是强连续压缩半群的无穷小生成元当且仅当 A 为耗散算子，且存在 $\lambda_0 > 0$，$\mathcal{R}(A - \lambda_0) = \mathcal{H}$。

整理人：朱志涛

2 常微分方程定性理论

1. （本题满分 10 分）构造 $f \in C^1(\mathbb{R}, [0,1])$ 和 $t_0 > 0$，假设 $\dot{x} = f(x)$ 的解曲线是 $\phi(t, x_0)$，使得 $\phi(t_0, x_0)$ 关于 x_0 不一致连续。

2. （本题满分 20 分）$X \in \mathbb{R}^2$ 满足
$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX + F(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
   (a) （10 分）证明：齐次方程的任何非零解在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界，当且仅当 A 的所有特征值实部非零。
   (b) （10 分）在 (a) 的条件下，证明对任何有界的 $F \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$，关于 X 的方程存在唯一的有界解。进一步地，若 $\|F(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$，则 $\|X(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$.

3. （本题满分 10 分）$q(t)$ 是周期为 1 的连续函数，方程 $\dot{x}(t) = q(t)\cos^2 x - \sin^2 x$ 对应初值问题的解记为 $\phi(t, x_0)$。假设存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\phi(t, x_0)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界，证明对任意 $x \in \mathbb{R}$，$\phi(t, x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，并且存在 $p \in \mathbb{R}$ 使得 $\phi(1, p) = p$.

4. （本题满分 10 分）$f \in C^1$，平面动力系统 $\dot{X} = f(X)$ 的唯一奇点是原点 O。已知存在一列 $q_n \in \mathbb{R}^2$，其轨道是周期轨，且周期趋于零。证明：任意解的存在区间是 $(-\infty, +\infty)$。

整理人：苏华

3 椭圆方程

1.（本题满分 15 分）设 $u(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的调和函数，且存在常数 A 和正整数 N 满足

$$|u(\mathbf{x})| \leq |A| \cdot (|\mathbf{x}|+1)^{N+1}.$$

证明：$u(\mathbf{x})$ 是多项式。

2.（本题满分 15 分）在区域 $Q_T = \mathbf{R} \times (0,T]$ 上考虑初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

证明：若 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C\left(\bar{Q}_T\right)$ 是上述初值问题的有界解，则

$$\sup_{\bar{Q}_T} |u(x,t)| \leq T \sup_{Q_T} |f(x,t)| + \sup_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|.$$

3.（本题满分 20 分）设

$$\lambda = \inf\left\{ \int_\Omega \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} \mid u \in W_0^{1,2}(\Omega),\ \|u\|_{L^2} = 1 \right\}.$$

证明：存在 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$，$\|u\|_{L^2} = 1$，且 u 是

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的弱解.

整理人：邵约翰

4 数值代数

1.（本题满分 20 分）考虑用迭代法解方程 $AX=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1+\varepsilon & -1 & 0\\ -1 & 2+\varepsilon & -1\\ 0 & -1 & 1+\varepsilon\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$\varepsilon>0$ 为小量。

(a) 求 Gauss-Seidel 迭代矩阵的谱半径。

(b) 设计一种迭代法，使其收敛速度与 ε 无关。

2.（本题满分 10 分）设 $D=\operatorname{diag}\{3,1,2,1,2\}\in M_5(\mathbb{R}), z=(1,1,1,1,1)^T$，求正交变换 V 和 $\{1,\ldots,5\}$ 的一个排列 π，使得：

(a) $V^Tz=(\xi_1,\ldots,\xi_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-r\text{ 个}})^T$ 满足 $\xi_i\neq 0(i=1,\ldots,r)$；

(b) $V^TDV=\operatorname{diag}\left\{d_{\pi(1)},d_{\pi(2)},\ldots,d_{\pi(n)}\right\}$ 满足

$$d_{\pi(1)}\leq d_{\pi(2)}\leq\cdots\leq d_{\pi(n)}.$$

3.（本题满分 10 分）考虑预优的共轭梯度法，设

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

取预优矩阵 M^{-1}，满足

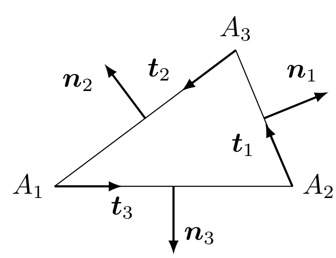
$$z=M^{-1}r=(D-L)^{-1}r+(D-U)^{-1}(r-A(D-L)^{-1}r).$$

记真解为 x_*，预优共轭梯度法第 k 步得到 x_k，试估计

$$\frac{\|x_k-x_*\|_A}{\|x_0-x_*\|_A},\quad k=1,2.$$

（不能直接抄书上结论）

4.（本题满分 10 分）考虑三角形 $A_1A_2A_3$，$A_i=(x_i,y_i)^T$，分别记每条边上的法向单位向量和切向单位向量为 $\{\mathbf{n}_i\},\{\mathbf{t}_i\}$，如图所示。



定义 $a_{ij} = \mathbf{t_i}^T A_j^{\perp}$，$A_j^{\perp} = (-y_i, x_i)^T$，考虑 $M = (M_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$，其中

$$M_{ij} = a_{ii}a_{jj} + \sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{jk}.$$

(a) 证明 M 可以 Cholesky 分解；

(b) 写出 M 的 Cholesky 分解。

整理人：熊穗宁

5 最优化理论与算法

1. （本题满分 10 分）函数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x) = x_{[1]} + \cdots + x_{[r]},$$

其中 $x_{[k]}$ 是 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 中第 k 大的分量，$r \leq n$。

   (a)（5 分）证明 f 是凸函数；

   (b)（5 分）计算 f 的次梯度。

2. （本题满分 40 分）考虑半定规划

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathcal{S}^n} & \langle C, X\rangle, \\ \text{s.t. } & \langle A_i, X\rangle = b_i, i = 1, 2, \cdots, m, \\ & X \succeq 0, \end{aligned}$$

   (a)（5 分）求原问题的对偶问题；

   (b)（5 分）写出 KKT 条件，需要分别说明假设条件；

   (c) 求解原问题

      i.（5 分）写出增广拉格朗日法，给出变量和乘子的更新方式；

      ii.（5 分）计算增广拉格朗日函数的梯度和 Hessian 矩阵，估计梯度的 Lipschitz 常数；

      iii.（5 分）写出求解子问题的投影梯度法，给出步长的选取方法并简要讨论其收敛性（收敛阶）；

   (d) 求解对偶问题

      i.（10 分）写出 ADMM 给出子问题的显式解和乘子的更新方式；

      ii.（5 分）消去松弛变量，得到的增广拉格朗日函数，求出其梯度，并验证是否二阶可微？

整理人：罗逸凡

6 偏微分方程数值解

1.（本题满分 8 分）判断下列命题是否正确。

(a) 利用差分法离散线性椭圆方程得到的方程组为线性方程组。

(b) 椭圆方程差分格式的稳定性是指数值解对边界条件的连续依赖。

(c) 一般来讲，有限元解的插值误差在 H^1 和 L^2 范数意义下具有相同的阶。

(d) 考虑 Hilbert 空间 W 和 Banach 空间 V, 对于双线性泛函 $a : W \times V \to \mathbb{R}$ 和线性泛函 $f : V \to R$, 变分问题 $a(u, v) = f(v), \forall v \in V$ 存在唯一解 $u \in W$ 的充分必要条件是：双线性泛函 $a(\cdot, \cdot)$ 连续，关于 W 满足强制性条件，线性泛函 $f(\cdot)$ 连续，Banach 空间 V 自反。

2.（本题满分 14 分）

(a) 给出三维热方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + cu_{zz}$ 的两时间层加权格式，并分析该格式的局部截断误差及 L^2 稳定性。

(b) 对于二维区域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ 上的椭圆边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = u_D(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

给出其在网格 $\{(ih_x, jh_y) : i = 0, 1, \ldots, M, j = 0, 1, \ldots, N\}$ 上的五点差分格式，其中空间步长 $h_x = 1/M, h_y = 1/N$。计算离散矩阵的特征值，并估计离散矩阵的条件数。讨论该格式下数值解的存在性，并给出数值解的 L^∞ 误差估计。

3.（本题满分 14 分）考虑一维守恒律 $u_t + f(u)_x = 0$。

(a) 叙述 Lax-Wendroff 定理，给出单调格式的定义，并解释什么是凸熵，什么是激波的可容许条件。方程的特征场何时被称为真正非线性的，何时被称为线性退化的?

(b) 当 $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ 时，请分别写出方程的 Courant-Isaacson-Rees 格式，Godunov 格式，Lax-Friedrichs 格式，Lax-Wendroff 格式，MacCormack 格式，并说明哪些是单调格式，哪些是 TVD 格式。

4.（本题满分 14 分）考虑二维 Poisson 方程 (6.1)，其中 $u_D(x, y) = 0$。请给出该方程的三种不同的弱解提法，并给出求解相应问题的有限元离散。该方程有限元解的插值误差在 H^1 和 L^2 范数意义下是否具有相同的阶？请予以说明。请写出有限元解误差估计的抽象框架。

整理人：吴清玉

7 随机模拟方法

1. （本题满分 10 分）设 X_t 是参数为 λ 的泊松过程，τ 满足参数为 μ 的指数分布。证明：

$$P(X_\tau = m) = (1-p)^m p,$$

其中 $p = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$。

2. （本题满分 20 分）记三对角矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 如下：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

考虑随机微分方程组

$$\mathrm{d}\mathbf{X}_t = A\mathbf{X}_t + \sqrt{2}\,\mathrm{d}\mathbf{B}_t,$$

其中 $\mathbf{X}_0 \sim N(0, \mathbf{I}_n)$。

(a) 写出方程组的解 $\mathbf{X}_t$，并求出 $\mathbb{E}\mathbf{X}_t$ 与 $\mathbf{X}_t$ 的不变分布 π。

(b) 当 $\mathbf{X}_0 \sim \pi$ 时，计算 $\mathbb{E}|X_t^k|^2$ 的值，其中 X_t^k 为 $\mathbf{X}_t$ 的第 k 个分量。

3. （本题满分 20 分）对于 SDE

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t,$$

在 b 全局 Lipschitz 和 $\mathbb{E}X_0^2 < \infty$ 条件下证明 Euler-Maruyama 格式的强 1/2 阶收敛性。

整理人：熊穗宁

8 高等概率论

1. (本题满分 9 分) 已知随机变量 X_n 依分布收敛到 X，随机变量 Y_n 依分布收敛到常数 c。证明:

   (a) Y_n 依概率收敛到 c。

   (b) $X_n + Y_n$ 依分布收敛到 $X + c$。

   (c) $X_n Y_n$ 依分布收敛到 cX。

2. (本题满分 8 分)假设对任意正整数 n, $(X_{n,i})_{i=1}^n$ 是一列独立同分布的随机变量,服从正态分布 $N(0, n^2)$。设 $a < b$ 为固定常数,令 $Y_{n,i} = 1_{\{X_{n,i} \in (a,b)\}}$, $S_n = \sum_{i=1}^n Y_{n,i}$。对任意非负整数 k,求 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k)$。

3. (本题满分 8 分) 假设 X_n 是一列独立同分布的标准正态变量。证明

$$\mathbb{P}[\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} = 1] = 1.$$

4. (本题满分 8 分) 设 f 为特征函数，$\lambda \geq 0$ 为非负实数。

   (a) 证明 $e^{\lambda(f-1)}$ 也为特征函数。

   (b) 假设 f 是正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的特征函数，构造随机变量 X 使得 X 的特征函数为 $e^{\lambda(f-1)}$。

5. (本题满分 8 分) 设 X_n 为一列独立的正态随机变量，且 $X_n \sim N(0, \sigma_n^2)$。其中 $\sigma_n > 0$，$\sum_{n=1}^\infty \sigma_n^2 = \infty$。证明

$$\mathbb{P}[\sum_{n=1}^\infty X_n^2 = \infty] = 1.$$

6. (本题满分 9 分) 设 X 为对称伯努利随机变量，即 $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[X = -1] = \frac{1}{2}$。设 U 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，记 $Y = X/\sqrt{U}$。假设 $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ 独立且和 Y 同分布。

   (a) 求 Y 的分布函数。

   (b) 求一列 $a_n \uparrow \infty$ 使得 $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{a_n}$ 依分布收敛到 $N(0,1)$。

整理人：范哲睿

9 随机过程

1. （本题满分 8 分）$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ 是离散时间时齐的马氏链，转移矩阵 $\mathbb{P}=(p_{i,j})_{1\leq i,j\leq 7}$ 为

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

求该马氏链所有不变分布。

2. （本题满分 8 分）设 $\lambda\in(0,1)$。$(X_t)_{t\geq 0}$ 是取值于 $\mathbb{Z}$ 的连续时间马氏链，其转移速率矩阵为：

$$q_i>0,\quad q_{i,i+1}=\lambda q_i,\quad q_{i,i-1}=(1-\lambda)q_i,\quad q_{i,j}=0(|i-j|>1).$$

   (a) 假设 $\lambda=\frac{1}{2}$。证明该马氏链非爆炸。

   (b) 假设 $\lambda\in(\frac{1}{2},1)$。证明该马氏链非爆炸当且仅当 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_i}=\infty$。

3. （本题满分 8 分）假设 X_n 取值于 $(0,1)$，记 $\mathcal{F}_n=\sigma(X_0,\ldots,X_n)$。$X_0=a\in(0,1)$ 为常数。已知

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=\frac{X_n}{2}|\mathcal{F}_n]=1-X_n,\qquad \mathbb{P}[X_{n+1}=\frac{X_n+1}{2}|\mathcal{F}_n]=X_n.$$

   (a) 证明 $(X_n)_{n\geq 0}$ 关于域流 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 是鞅。

   (b) 证明 X_n 几乎处处且 L^2 收敛到一个随机变量 Y。

   (c) 求 Y 的分布函数。

4. （本题满分 8 分）假设 $(X_n)_{n\geq 0}$ 是离散时间不可约、非周期、正常返的马氏链，状态空间 $S=\mathbb{Z}$，记唯一的不变分布为 π。证明对任意整数 k,i，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=k|X_0=i)=\pi(k).$$

5. （本题满分 8 分）假设 B_t 为一维标准布朗运动，设 $X_t=B_t+\mu t$ 是一维漂移布朗运动，记 $\tau=\inf\{t>0:X_t\notin(a,b)\}$，其中 $a<0<b$。求 $\mathbb{E}\tau$ 和 $\mathbb{E}e^{X_{\tau+t}}$。

6. （本题满分 10 分）假设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是平稳、高斯、轨道连续的马氏过程，有平稳分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\sigma>0$。设对任意 $t>0,h>0$，协方差函数 $\mathrm{cov}(X_t,X_{t+h})=c(h)$。设 $c(h)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数。

   (a) 求该过程的转移概率密度。

   (b) 求该过程的生成元。

   (c) 构造一个 SDE 使得该 SDE 的解和 $(X_t)_{t\geq 0}$ 同分布，并求解这个 SDE。

整理人：范哲睿

2024 年博士生资格考试

基础数学方向回忆版

2024.10

几何与拓扑

代数拓扑

1. 证明莫比乌斯带不以边界为收缩核.

2. 设 $X = A \cup B \cup C$, A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$ 都是可缩空间, $B \cap C$ 是两个可缩空间的无交并. 求 X 的所有整系数下同调群. (题目有问题?)

3. 考虑三维欧氏空间中的立方体 $C = [0,1]^3$, 将 $(0, y, z)$ 和 $(1, y, z)$ 粘合, $(x, 0, z)$ 和 $(z, 1, x)$ 粘合, $(x, y, 0)$ 和 $(y, x, 1)$ 粘合得到空间 X, 求 X 的所有整系数下同调群.

4. 设 X 是拓扑空间, 满足

$$H_0(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},\ H_1(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/6,\ H_2(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2,$$

且 $k \geq 3$ 时 $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$. 求 X 的所有 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调群.

5. 证明一点并 $S^2 \vee S^2 \vee S^4$ 和 $S^2 \times S^4$ 不同伦等价.

微分拓扑

1. ω 是 S^1 上的 1-形式, $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ 定义为 $f(x) = e^{inx}$. 给出 $\displaystyle\int_0^{2\pi} h^*\omega$ 和 $\displaystyle\int_{S^1} \omega$ 的关系.

2. 证明映射 $S^{k+l} \to S^k \times S^l$ 的映射度总是 0, 并说明存在映射度为 1 的映射 $S^k \times S^l \to S^{k+l}$.

3. 设 M 是光滑带边流形. 证明存在非负光滑函数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 使得 $\partial M = f^{-1}(0)$.

4. 设 M 是 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的余 1 维子流形. 证明使得光滑映射 $M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, p)$ 不是 Morse 函数的点 $p \in \mathbb{R}^{k+1}$ 构成 $\mathbb{R}^{k+1}$ 中的零测集.

5. 设 M 是光滑流形, $W \subset \mathbb{R}^k$, $f\colon M \times W \to \mathbb{R}$ 是光滑函数, 记 $P = \left(\dfrac{\partial f}{\partial w^i}\right)\colon M \times W \to \mathbb{R}^k$.

(1) 计算 $P^{-1}(0)$ 的维数和切空间.

(2) 设 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 是一条光滑曲线. ($\cdots$ 题目有问题)

示性类

1. 设 $E \to B$ 是秩为 3 的复向量丛. 用 E 的陈类表示 Sym^2E 和 Λ^2E 的所有陈类.

2. 计算 $\mathbb{C}P^2$ 切丛的陈类并证明它无法分解为复线丛的直和.

3. 求 $\mathbb{C}P^4$ 切丛的所有 Pontryagin 类, 并证明 $\mathbb{C}P^4$ 不能浸入 $\mathbb{R}^{11}$.

4. (1) 证明: 对任何 $a \in H^1(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}/2)$, $b \in H^2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}/2)$, 存在 $\mathbb{R}P^2$ 上秩为 2 的实向量丛 E 满足 $w_1(E) = a$, $w_2(E) = b$.

(2) 证明: 若两个 $\mathbb{R}P^2$ 上秩为 2 的实向量丛的 Stiefel-Whitney 类相同, 则它们同构. (题目有问题?)

微分几何

1. 判断题, 需要说明理由.

(1) 圆锥和圆柱之间是否存在局部保长对应, 是否存在整体保长对应.

(2) 圆锥和圆柱之间是否存在整体保角对应.

(3) 是否存在曲面满足其第一基本形式 $I = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$, 第二基本形式 $II = \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2$.

(4) 若卵形面与一张平面的交线是测地线, 则该曲面和平面处处正交.

(5) 一张被夹在两个平面之间的高斯曲率处处非负的完备曲面的全曲率只能是 0 或 4π.

2. (1) 证明悬链面是极小曲面.

(2) 证明若一个旋转曲面是极小曲面, 则它是悬链面.

(3) 证明悬链面上的闭测地线只有一条.

3. 求所有两个主曲率都是常数的曲面.

黎曼几何

1. (1) 证明 S^2 上不存在 Ricci 曲率恒为 0 的度量.

(2) 证明 S^3 上不存在 Ricci 曲率恒为 0 的度量.

2. 设 M 是完备黎曼流形, K 是 M 的紧子集, 满足在 $M\backslash K$ 上 Ricci 曲率有正下界 $c_0 > 0$. 证明 M 是紧致的.

3. 设 M 是紧无边流形, 满足 $\mathrm{Ric}(g) \geq (n-1)g$, 且 M 上有非零函数 u 和非负常数 λ 满足 $\Delta u + \lambda u = 0$. 证明 $\lambda \geq n$.

分析与方程

椭圆方程

1. 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数且 $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 请对于 $p=1$, $1<p<\infty$, $0<p<1$ 的情形分别证明 $u=0$.

2. 考虑以下问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 有界连续.

(1) 用 Fourier 变换求形式解.

(2) 证明求得的形式解是古典解.

(3) 论述解的唯一性定理.

3. 考虑以下问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 + u = f, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有界区域, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. 设 $u \in H^1(\Omega)$ 是以上问题的弱解.

(1) 叙述弱解的定义.

(2) 证明 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

(3) 证明

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| \leq \max\left\{ \max_{x\in\partial\Omega} |\varphi(x)|, \sup_{x\in\Omega} |f(x)|, \sup_{x\in\Omega} |f(x)|^{1/3} \right\}.$$

常微分方程

1. 考虑常微分方程

$$\dot{x} = \frac{t^2-1}{t^2+1}x - \cos x^2.$$

(1) 证明若存在 $t_0 > 0$ 使得 $|x(t_0)| > 100$, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty$.

(2) 对任意 $t_0 > 0$, 证明存在 $[t_0, +\infty)$ 上有界的解.

2. 设 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是平面上 C^1 向量场, 生成流 $\phi(t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. 证明: 若 $p \in \omega(p)$, 则 p 是奇点或周期点.

3. 考虑平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = sy - \sin x. \end{cases}$$

(1) 当 $s < 0$ 时, 证明原点是 Lyapunov 稳定的.

(2) 当 $s = 0$ 时, 作出系统的相图.

(3) 当 $s=-1$ 时, 证明原点是 Lyapunov 渐近稳定的.

4. 考虑平面线性系统 $\dot{X}=(A+F(t))X$. 其中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix},\ F(t)=\varepsilon\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & \sin(\sqrt{2}t)-\cos t \\ \sin(\sqrt{2}t)+\cos t & -\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

(1) 证明存在 $\theta_0\in(0,2\pi)$, 使得 $F(t+2\pi)=Q(\theta_0)^{-1}F(t)Q(\theta_0)$, 其中

$$Q(\theta_0)=\begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $\Phi(t)$ 是原方程的基解矩阵, 满足 $\Phi(0)=I$. 证明存在 $P(t)$ 和实数常值矩阵 D 使得

$$\Phi(t)=P(t)e^{tD},$$

其中 $P(t)$ 满足 $P(t+4\pi)=Q(-2\theta_0)P(t)$.

(3) 证明存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意 $\varepsilon<\varepsilon_0$, 方程的所有解都有界.

泛函分析

1. 设 H_1 和 H_2 是 $\mathbb{R}$ 上的 Hilbert 空间, $A\colon H_1\to H_2$ 满足 $A(0)=0$, 且 $\|Ax-Ay\|_{H_2}=\|x-y\|_{H_1}$.

(1) 证明 A 是连续的线性映射.

(2) 若数域换成 $\mathbb{C}$, 判断 (1) 中的结论是否还成立.

2. 设 H 是复数域上的 Hilbert 空间, $A\in\mathcal{L}(H)$ 是对称算子. 证明以下四条等价.

(1) $\|A\|\le 1$ 且 $(Ax,x)\ge 0$;

(2) $0\le (Ax,x)\le \|x\|^2$;

(3) $\sigma(A)\subset[0,1]$;

(4) $(Ax,x)\ge\|Ax\|^2$.

3. 设 $H=L^2[0,1]$. 考虑 H 上的算子 K:

$$(Kf)(t)\colon=\int_0^1 k(s,t)f(s)\mathrm{d}s,\ k(s,t)=\min\{s,t\}.$$

证明 K 是 H 上的紧算子. 求 $\|K\|$. 分析 K 的谱 $\sigma_r(K)$, $\sigma_c(K)$, $\sigma_p(K)$, 并求出 K 的所有特征值.

4. 设 $H=L^2(\mathbb{R}^3)$, $V(x)=\dfrac{1}{\sinh^2|x|}-\dfrac{1}{|x|^2}$. 考虑 H 上的算子 $-\Delta$, $D(-\Delta)=H^2(\mathbb{R}^3)$.

(1) 证明 $-\Delta+V$ 自伴.

(2) 证明 $\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta+V)=[0,+\infty)$.

复分析

1. (1) 构造一个 S^2 上的复结构, 证明它是 S^2 上唯一的复结构.

(2) 描述 $T^2 = S^1 \times S^1$ 上的所有复结构, 并证明任何一个复结构可以被上半平面中一个模长不小于 1 的复数 ω 表示.

2. 设 S 和 S' 是两个紧黎曼曲面, $f\colon S \to S'$ 是非退化的全纯映射.

(1) 证明对 $q \in S'$, $f^{-1}(q)$ 的元素个数 (计重数) 与 q 无关.

(2) 证明 Riemann-Hurwitz 定理.

3. $\Delta = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ 是单位圆盘. $\mathrm{d}s_\Delta = \dfrac{2|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$. $g_\Delta = \mathrm{d}s_\Delta^2$ 是 Δ 上的 Poincaré 度量.

(1) 证明 $K_{g_\Delta} = -1$.

(2) 证明 Ahlfors 定理: 设 g 是 Δ 上的共形度量, $g \in C^2$, $K_g \le -1$, 则 $g \le g_\Delta$.

(3) 证明: 设 S 是紧黎曼曲面, g 和 g_0 是 S 上的两个共形度量且 $K_g \le K_{g_0} \le 0$, 则 $g \le g_0$. (回忆者的评注: 取 $S = T^2 = \mathbb{C}/\Gamma$, Γ 是格群, 再取 $g_0 = |\mathrm{d}z|^2$, $g = 4|\mathrm{d}z|^2$, 则 $K_g = K_{g_0} = 0$ 是反例. 条件改为 $K_g \le K_{g_0} < 0$ 是可做的, 据说还可以改为 K_{g_0} 不全为 0.)

调和分析

1. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\hat{f} \ge 0$. 证明 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

2. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}$ 是二进极大函数. 证明 $\mathcal{M}f \notin L^1$ 且 $\|\mathcal{M}f\|_{1,\infty} \ge \|f\|_1$.

3. 设 $f(x) = x(1+x^2)^{-2}$. 求 f 的 Hilbert 变换和 Fourier 变换.

4. 设 $f = \chi_{(-1,2)} - 3\chi_{(0,1)}$. 求 $\|f\|_{\mathcal{H}^1_{\mathrm{at}}}$ 和 $\|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

5. 设 $m(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \zeta(2^{-j}\xi)$, 其中 $\sup_j |a_j| < \infty$, $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $0 \notin \operatorname{supp}(\zeta)$. 证明对任意 $1 < p < \infty$, $m(\xi)$ 是一个 L^p 乘子.

双曲方程

代数与数论

抽象代数

1. (1) 设 G 是由 x, y, z 生成的 Abel 群, 且满足关系

$$2x - y + 5z = 0,\ y - 3z = 0,\ 3x - 7z = 0.$$

将 G 表示为循环群的直和.

(2) 视 Abel 群为 $\mathbb{Z}$-模, 考虑

$$A = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/72, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/84) \oplus \mathbb{Z}/12 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/30.$$

求 A 作为 Abel 群的阶数.

2. 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中考虑理想 $I = (3, x^3 + 2x^2 + 2x - 1)$.

(1) 判断 I 是否是 $\mathbb{Z}[x]$ 的主理想.

(2) 判断 I 是否是 $\mathbb{Z}[x]$ 的极大理想.

3. (1) 求多项式 $x^3 - x - 1$ 在域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ 上的 Galois 群.

(2) 是否存在 Galois 扩张 $K/\mathbb{Q}$ 满足 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ 是 K 的中间域, 且 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

4. 设 $\mathbb{F}$ 是 9 个元素的有限域, $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$ 上二阶一般线性群.

(1) 具体写出 G 的一个 Sylow 3-子群 P, 计算 P 的阶数, 并计算 G 中 Sylow 3-子群的个数.

(2) 计算 G 中 Sylow 2-子群的个数.

同调代数

七选五

1. 用主理想整环上有限生成模的结构定理证明复数域上 Jordan 标准型的分解定理.

2. 设 M 是有限生成 R-模, 证明以下三条等价:

(1) M 是投射模;

(2) 对任意 R-模 N, $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$;

(3) 对任意 R-模 N 和任意 $n \geq 1$, $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$.

3. 证明 R 和 $M_n(R)$ 是 Morita 等价.

4. 追图.

5. 设 k 是特征为 $p > 0$ 的域, $A = k[x]/(x^{p^n})$. 求 k 作为 A-模的极小投射消解, 并在 $p = 2$ 时求 $H^*(\mathbb{Z}/2, k)$.

6. 对复形间的同态 $f \colon X \to Y$, 证明 f 是 qis 当且仅当 $C(f)$ 是 ayclic 的.

7. 记 $\bullet^G \colon \mathrm{Mod}_{kG} \to \mathrm{Mod}_k$ 为 G-不动点函子, $\bullet_G \colon \mathrm{Mod}_{kG} \to \mathrm{Mod}_k$ 为 G-余不动点函子, $U \colon \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_{kG}$ 为平凡作用. 证明伴随对 $(U, \bullet^G)$, $(\bullet_G, U)$.

代数几何

以下均在代数闭域 k 上.

1. (1) 设 $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 是由 $\sum_i x_i y_i = 0$ 定义的超曲面. 证明存在 $\mathbb{P}^n$ 上的局部自由层 E 使得 $X = \mathbb{P}(E)$.

(2) 对于 $\mathbb{P}^2$ 上的局部自由层 F, 若 F 是线丛的直和, 考虑 F 的上同调, 以此证明 $\Omega(\mathbb{P}^2)$ 不是线丛的直和.

(3) 证明 $n > 1$ 时 (1) 中的 E 不是线丛的直和.

2. (1) 令 $A = k[t]/(t^2)$, 对任何 k-概形 Y, 求 $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(A), Y)$.

(2) 设 $X = \mathbb{A}^{n^2}$ 中由 $(x_{i,j})$ 的 $(n-m+1)$-子式生成的理想为 I_m, X_m 是 X 中由 I_m 定义的闭子概形. 证明 X_m 不可约, 且 $X_{m+1} \subset X_m$ 是 X_m 的 singular locus.

3. 设 $X = \mathrm{Spec}\, k[x,y]/(xy(x+y+1))$, $f\colon Y \to X$ 正规化. 考虑 $f^*\colon \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y)$, 求 $\ker(f^*)$ 和 $\mathrm{coker}(f^*)$.

代数数论

1. 求 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$ 的类数.

2. 对数域 K, 求证存在扩张 L/K, 使得对于 $\mathcal{O}_K$ 的理想 I, 有 $I\mathcal{O}_L$ 是主理想.

3. 对数域 K, v 是 K 的有限位, L/K 是扩张, w_i 是 L 中所有整除 v 的位. 证明

$$\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_v} = \prod \mathcal{O}_{L_{w_i}}.$$

4. h 和 h' 是两个高度函数, 对 $x \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$:

$$h(x) = \frac{1}{\deg(f)}\left(\log|a_0(f)| + \sum_{\substack{y\in\mathbb{C}\\ f(y)=0}} \log^+|y|\right).$$

这里 f 是 x 的极小多项式, $\log^+(t) = \log|\max\{t,1\}|$, $a_0(f)$ 是 f 的首项系数.

$$h'(x) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\sum \log^+|x|_v\right).$$

这里 $K = \mathbb{Q}(x)$, v 取遍 K 的全部位.

(1) 证明 $h = h'$.

(2) 证明 $\{x\colon \deg(x) < A,\ h(x) < B\}$ 对任何正数 A, B 都是有限集.

(3) 证明 $h(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 或 x 是单位根.

有限域

2024 年资格考试计算方向试题

回忆版

2024 年 10 月

目录

1 椭圆方程

1. (本题满分 15 分) 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数，满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p \mathbf{dx} < +\infty,$$

其中 $p > 0$ 为常数，请证明 $u \equiv 0$. （请按照 $p = 1$, $p > 1$ 和 $0 < p < 1$ 分别证明）

2.（本题满分 20 分）考虑下面方程，其中 ϕ 为一个有界连续函数

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \\ u|_{t=0} = \varphi. \end{cases}$$

(a) 利用 Fourier 变换求解该方程，需要写出详细过程。

(b) 验证 (a) 中求得的解是上述初值问题的解。

(c) 论述上述初值问题的解的唯一性。

3. (本题满分 15 分) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有界光滑的区域，$f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $u \in H^1(\Omega)$ 是下述方程的弱解

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 + u = f, & x \in \Omega, \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) 叙述弱解的定义

(b) 证明 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$

(c) 证明

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max\{\sup_{\partial\Omega} |\varphi|, \sup_{\Omega} |f|, \sup_{\Omega} |f|^{\frac{1}{3}}\}.$$

整理人：李晨毅

2 泛函分析 II

1. (本题满分 10 分) $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 是数域为 $\mathbb{R}$ 上的希尔伯特空间. $A : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2$ 是一个映射, 满足 $A(0) = 0$, $\|Ax - Ay\| = \|x - y\|$ ($\|\cdot\|$ 分别表示 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是 $\mathbb{R}$ 上的范数).

   (a) 证明 A 是连续线性映射.

   (b) 设 X, Y 是数域为 $\mathbb{C}$ 上的希尔伯特空间, 结论还对吗?

2. (本题满分 10 分) H 是复数域上的希尔伯特空间, $A \in \mathcal{L}(H)$ 是对称算子, 证明以下四条等价:

   (a) $\|A\| \le 1$ 且 $(Ax, x) \ge 0$;

   (b) $0 \le (Ax, x) \le \|x\|^2$;

   (c) $\sigma(A) \subset [0, 1]$;

   (d) $(Ax, x) \ge \|Ax\|^2$.

3. (本题满分 15 分) $H = L^2[0, 1]$, 考虑 H 上的算子 K:

$$(Kf)(t) := \int_0^1 k(s,t) f(s) \mathrm{d}s \ , \quad k(s,t) = \min\{s, t\} \ .$$

   证明 K 是 H 上的紧算子, 求 $\|K\|$, 分析 K 的谱 $\sigma_r(K)$, $\sigma_c(K)$, $\sigma_p(K)$, 并求出 K 的所有特征值.

4. (本题满分 15 分) $H = L^2(\mathbb{R}^3)$, $V(x) = \frac{1}{\sinh^2 |x|} - \frac{1}{|x|^2}$, 其中 $\sinh r = \frac{e^r - e^{-r}}{2}$. 考虑 H 上的算子 $-\Delta$, 其中

$$D(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3) \ .$$

   (a) 证明 $-\Delta + V$ 自伴.

   (b) 证明 $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = [0, +\infty)$.

整理人： 周书涵

3 常微分方程定性理论

1. (本题满分 10 分) 考虑常微分方程

$$\dot{x} = \frac{t^2-1}{t^2+1}x - \cos x^2$$

   (a) 证明若存在 $t_0 > 0$, 使得 $|x(t_0)| > 100$，则 $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty$.

   (b) 对任意的 $t_0 > 0$, 证明存在 $[t_0, +\infty)$ 上有界的解.

2. (本题满分 10 分) 设 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为平面上 C^1 的向量场, 生成流 $\phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 证明：若 $p \in \omega(p)$，则 p 为奇点或周期点.

3. (本题满分 15 分) 考虑平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = sy - \sin(x) \end{cases}$$

   (a) 当 $s < 0$ 时, 证明原点是 Lyapunov 稳定的.

   (b) 当 $s = 0$ 时, 画出相图.

   (c) 当 $s = -1$ 时, 证明原点是 Lyapunov 渐近稳定的.

4. (本题满分 15 分) 考虑平面线性系统 $\dot{X} = (A + F(t))X$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \epsilon \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & \sin(\sqrt{2}t) - \cos t \\ \sin(\sqrt{2}t) + \cos t & -\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

   (a) 证明存在 $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, 使得 $F(t + 2\pi) = Q(\theta_0)^{-1}F(t)Q(\theta_0)$, 其中

$$Q(\theta_0) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}$$

   (b) 设 $\Phi(t)$ 是原方程的基本解矩阵, 满足 $\Phi(0) = I$, 证明存在 $P(t)$ 和为实数常值矩阵 D, 使得

$$\Phi(t) = P(t)\mathrm{e}^{tD}$$

   其中 $P(t)$ 满足 $P(t + 4\pi) = Q(-2\theta_0)P(t)$.

   (c) 证明存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对任意 $\epsilon < |\epsilon_0|$, 方程的所有解都有界.

整理人：王梓麟

4 最优化方法

1. (本题满分 15 分) 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 向量 $b \in \mathbb{R}^m$. 证明下面两点不可能同时发生:

   (a) 存在 $x \geq 0$ 满足 $Ax = b$.

   (b) 存在某一个 p 使得 $A^T p \geq 0$ 和 $p^T b < 0$.

2. (本题满分 35 分) 设 $f(x)$ 是适当且闭的强凸函数，其强凸参数为正常数 $\mu > 0$，$h(x)$ 是一个适当且闭的凸函数，给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$。考虑如下的优化问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) + h(Ax). \tag{1}$$

   (a) (10 分) $f^*(y)$ 是 $f(x)$ 的共轭函数，证明 $f^*(y)$ 在全空间上存在，且 $f^*(y)$ 是梯度 $\frac{1}{\mu}$ 利普希兹的可微函数.

   (b) (5 分) 请给出(1)的对偶问题，请使用 f^* 和 h^* 表示，且只包含一个对偶变量。

   (c) (10 分) 给出对偶问题的近似点梯度法，给出步长 t 的选取方法并简要讨论其收敛性（收敛阶）.

   (d) (10 分) 对原问题可以引入一个辅助变量 $y = Ax$, 原问题可以转化为

$$\begin{aligned} \min_{x,y\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) + h(y), \\ s.t. \quad & Ax = y. \end{aligned} \tag{2}$$

   可以对原问题(1)写出拉格朗日函数和增广拉格函数如下

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x) + h(y) + \lambda^T(Ax - y), \\ L_t(x, y, \lambda) &= f(x) + h(y) + \lambda^T(Ax - y) + \frac{t}{2}\|Ax - y\|^2. \end{aligned}$$

   给出如下的更新算法

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \arg\min_x L(x, y^k, \lambda^k), \\ y^{k+1} &= \arg\min_y L_t(x^{k+1}, y, \lambda^k), \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + t(Ax^{k+1} - y^{k+1}). \end{aligned}$$

   证明这个算法和你在 (c) 问中给出的算法是等价的。

整理人：李晨毅

5 随机模拟方法

1. (本题满分 10 分) 考虑有限状态、连续时间的不可约马氏链 $\{X_t\}_{t\geq 0}$, Q-矩阵为 (q_{ij})，有不变分布 $\boldsymbol{\mu}$, 约定 X_t 右连续. 令

$$T_0 = 0, \quad T_n = \inf\{t > T_{n-1} | X_t \neq X_{T_{n-1}}\}, \quad n \geq 1$$

定义马氏链 $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ 为 $Y_n := X_{T_n}$. 证明 Y_n 同样不可约, 并求出 Y_n 的概率转移矩阵 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ 和不变分布 $\boldsymbol{\pi}$.

2. (本题满分 20 分) $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，随机过程 $\mathcal{E}_t$ 满足

$$\mathcal{E}_t = \exp\left\{\int_0^t b(W_s, s)\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(W_s, s)\mathrm{d}s\right\}$$

其中 W_t 是标准布朗运动, $0 \leq t \leq 1$.

   (a) 求 $\mathbb{E}\mathcal{E}_t$.

   (b) $b(x, t) = x + 1$，求 $\mathbb{E}(W_t\mathcal{E}_1)$.

3. (本题满分 20 分) $\boldsymbol{X}_t = (X_t, Y_t)$ 是二维随机过程, 函数 $V(\boldsymbol{x}) = U(|\boldsymbol{x}|)$, $|\boldsymbol{x}|$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的模长, $U(r)$ 光滑且关于 r 单调, 对应的 Gibbs 分布存在, $\boldsymbol{X}_t$ 满足随机微分方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = -\nabla V(\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t, \quad \boldsymbol{X}_0 = (1, 0)$$

其中 $\boldsymbol{W}_t$ 是二维标准布朗运动.

   (a) 设 $\boldsymbol{X}_t = (R_t\cos\Theta_t, R_t\sin\Theta_t)$，求 (R_t, Θ_t) 满足的随机微分方程，并给出其概率密度函数满足的 Fokker-Planck 方程和初边值条件.

   (b) 求出 Θ_t 的分布 $p(\theta, t)$, 求 (R_t, Θ_t) 在 $t \to \infty$ 时不变测度, 并计算 $\mathbb{E}U'(R_\infty)$ 和 $\mathbb{E}\sin^2\Theta_\infty$.

整理人：王梓麟

6 数值代数

1. (20)

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 求最小二乘问题 $\min \|Ax - b\|_2$ 的所有解.

   (b) 计算 c, s, 使得 $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (10) 给定矩阵 A 的三角分解, B 是秩一矩阵, 设计求解问题 $(A+B)x = b$ 的算法. (A 应该是非奇异的...)

3. (10) A 是对称矩阵, 证明

$$D_i = \{z \in \mathbb{R} \,:\, |z - a_{ii}| \leq \sqrt{\sum_{i \neq i} |a|_{ij}^2)}\}$$

   中至少含有 A 的一个特征值.

4. (10) $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12}^T & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{23}^T & 0 \end{pmatrix}$. A_{11} 正定, A_{22} 负定, A_{23} 列满秩. $\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} A_{12} & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23}^T & 0 \end{pmatrix}$. $\tilde{A} = A_{11} - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{12}^T$. 证明 $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ 的 G-S 迭代收敛.

整理人：null

7 偏微分方程数值解

1. (10) 给出对流扩散方程中心差商格式的误差估计、L^∞ 和 L^2 稳定性条件.
2. (10) 2021 年第四题
3. (10) 2021 年第五题
4. (20) 2020 年第三题

整理人：null

8 高等概率论

1. (20) 回答下列问题. 前三小问直接写出答案, 后两题简述理由.

   (a) (4) $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是 [0,1] 上的的独立同分布的随机变量, 并且有概率密度函数 $f(x) = 1 + cos(2\pi x)$. 记 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n(mod1)$, 求 S_n 的概率密度函数以及 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 的分布.

   (b) (4) X_1 和 X_2 是独立的标准正态分布, 求 $\mathbb{E}\big[X_1\big|X_1 - X_2\big]$ 和 $\mathbb{E}\big[X_1\big|X_1 - 2X_2\big]$.

   (c) (4) X_1 和 X_2 是独立的参数为 1 的指数分布, 求 $\frac{X_1}{X_1+X_2}$ 的分布和 $\mathbb{E}\big[X_1\big|\frac{X_1}{X_1+X_2}\big]$.

   (d) (4) 论述一列随机变量 L^p 有界和一致可积的定义并证明 L^p 有界可以推出一致可积.

   (e) (4) X_n 是在 $\mathcal{F}_n$ 上适应的一列随机变量, 并且 $X_0 = x_0$. 如果 α 和 β 是两个正实数满足 $\alpha + \beta = 1$，并且

   $$\mathbb{P}\big(X_{n+1} = \alpha + \beta X_n \big| \mathcal{F}_n\big) = X_n \ , \ \ \mathbb{P}\big(X_{n+1} = \beta X_n \big| \mathcal{F}_n\big) = 1 - X_n \ .$$

   求 $\lim_{n\to\infty} X_n$ 以何种意义收敛，并求其极限分布.

2. (10) $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是独立的标准正态分布.

   (a) (5) 求 $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{\log(n)}}$.

   (b) (5) 求证对任意的正整数 n, 都有

   $$\mathbb{E}(\max_{1\le k\le n} |X_k|) \le 10^{10}(1 + \sqrt{\log(n)}) \ .$$

3. (10) $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是独立同分布的随机变量，并且有概率密度函数

   $$f(x) = \frac{c}{(1+x^2)(\ln(1+x^2))^\alpha} \ .$$

   记 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

   $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 密度函数在 $x = 0$ 处不可积, 可以按照 $(1 + \ln(1 + x^2))^\alpha$ 理解.

   (a) (3) 如果 $\alpha = 0$, 则 X_1 满足 Cauchy 分布，其特征函数是 $e^{-|t|}$. 证明 $\frac{S_n}{n}$ 不依概率收敛到 0.

   (b) (2) 如果 $\alpha > 1$, 证明 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛到 0.

   (c) (5) 如果 $\alpha = 1$, 问 $\frac{S_n}{n}$ 是否依概率收敛到 0?

4. (10) 设 ξ 是一个不恒为常数的随机变量且满足 $\mathbb{P}(|\xi| \le 2^{10}) = 1$. 对于 $\lambda > 0$ 定义 $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda\xi}$. 令 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是独立且与 ξ 同分布的随机变量, 记 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. 定义 $Z_n^{(\lambda)} = \frac{e^{\lambda S_n}}{(\varphi(\lambda))^n}$.

(a) (4) 问 $Z_n^{(\lambda)}$ 以何种意义收敛，并求极限分布.

(b) (6) 设 $a < \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$, $b > 0$, 令

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : S_n > an + b\} ,$$

求证: $\mathbb{E} Z_\tau^{(\lambda)} 1_{\{\tau < +\infty\}} = 1$.

整理人：黄凤麟

9 随机过程论

1. (20) 回答下列问题. 前三小问直接写出答案, 后两题简述理由.

   (a) (3) 叙述有限状态马氏链的强马氏性的定义.

   (b) (3) 设 B_t 是标准布朗运动, 求 $\mathbb{E}[B_1 B_3^2 B_4]$.

   (c) (4) 设 B_t 是标准布朗运动, $p_t(x)$ 是其转移概率密度. 令 $D_t = B_t - tB_1$ 是布朗桥, 对 $0 < t_1 < t_2 < 1$, 求 D_t 的联合转移概率密度.

   (d) (5) 有一枚正四面体骰子, 四面分别写着 "阿", "里", "巴", "巴", 求连续四次掷出 "**阿巴巴巴**" 的次数的期望.

   (e) (5) X_n 是一列独立同分布的**非负整数**值随机变量, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. 令 $G = \{S_j < j\ , \forall 1 \le j \le n\}$, 求 $\mathbb{P}\big(G \big| S_n\big)$. 提示: 考虑 $M_{-j} = \frac{S_j}{j}$, $T = \inf\{k \ge -n : M_k \ge 1\}$.

2. (8) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间, τ 是保测变换. $X_0 \in L^2(\mathbb{P})$, 定义 $X_n = X_0 \circ \tau^n$, 求 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{X_k}{n}$ 在 $L^2(\mathbb{P})$ 中的极限.

3. (10) B_t 是一维标准布朗运动, 对 $x \in \mathbb{R}$, 定义 $\tau_x = \inf\{t \ge 0 : B_t = x\}$. 证明:

$$\lim_{y \to x} \tau_y = \tau_x\ , \quad a.s.$$

4. (12) W_t 是二**维**标准布朗运动, $W[a,b]$ 表示 $(W_t)_{a \le t \le b}$ 的轨迹, $\mathcal{L}$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度.

   卷子上写的就是 $4+4+3$.

   (a) (4) 求证 $\mathcal{L}(W[0,1])$ 几乎必然有限. 提示: 考虑逃逸概率.

   (b) (4) 求证 $\mathcal{L}(W[0,1] \cap W[2,3])$ 几乎必然为 0. 提示: 考虑布朗运动的尺度变换.

   (c) (3) 求证 $\mathcal{L}(W[0,1])$ 几乎必然为 0.

整理人：周书涵