2023 资格考

2023 年 10 月

几何与拓扑

代数拓扑

每题 10 分，共 50 分.

问题 1. M 为 $S^1 \times S^1 \times [0,1]$ 商掉 $(p,q,0) \sim (q,p,1)$ 得到的三维流形. 对于 $P_0 = (x_0, x_0, 0)$，这里 $x_0 \in S^1$，试计算 $\pi_1(M, P_0)$.

问题 2. U, V 为 X 中开集，$U \cup V = M$, $U \cap V = A \neq \varnothing$. 求证：$H_*(X, A) \cong H_*(U, A) \oplus H_*(V, A)$.

问题 3. X 为有限胞腔复形. 已知 $H_0(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_1(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4, H_2(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$，并且 $\forall k > 2, H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$. 试求出所有 X 的整系数上同调群.

问题 4. 若 M 的万有覆叠为 $\mathbb{R}^n$，求证：映射 $f : S^2 \to M$ 为零伦的.

问题 5. M 为光滑闭流形. 若 $H_1(M;\mathbb{Z}_2) = 0$，求证：M 可定向.

微分拓扑

每题 10 分，共 50 分.

问题 6. M 为 n 维微分流形. 求证：TM 为 $2n$ 维微分流形.

问题 7. M 为 n 维可定向带边流形. 求证：∂M 为 $n-1$ 维可定向流形.

问题 8. (M, g) 为 *Riemann* 流形, $N \subset M$ 为紧无边子流形. 求证：对于充分小的 $\varepsilon > 0$, N 在 M 中存在 ε-管状邻域.

问题 9. M, N 为同维数光滑流形, $f : M \to N$ 为同伦. 求证：$\deg f = \pm 1$.

问题 10. M 为闭光滑流形，求证:$\forall x \neq y \in M$，存在微分同胚 $f : M \to M$，使得 $f \simeq id_M$，且 $f(x) = y$.

示性类

问题 11. *(a)* 求证：S^3 上 $1,2,3$ 维的实丛平凡，进而证明所有实丛均平凡*;*

(b) 求证：S^3 上复线丛平凡，进而证明所有复丛平凡.

问题 12. $E \to B$ 为秩为 n 的复向量丛.

(a) 用 $c_1(E), c_2(E)$ 表示出 $c_1(E^* \otimes E), c_2(E^* \otimes E)$*;*

(b) 设 $H^*(B;\mathbb{Z})$ 是无挠的，且存在 $k \geq 1$ 使得 $c(E^{\otimes k}) = 1$. 求证：$c(E) = 1$.

问题 13. *(a)* 求 $\#_r \mathbb{R}P^2$ 的 *Stiefel-Whitney* 类*;*

(b) 求证：$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ 不可嵌入 $\mathbb{R}^3$.

问题 14. 设 M 为 k 维光滑闭流形，求证：M 上存在唯一的实线丛 L 使得 L 为可定向 $k+1$ 维流形.

黎曼几何

问题 15. S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中单位球，求证它的测地线是大圆.

问题 16. 求证*:*S^3 上存在处处非零的切向量场 e_1, e_2, e_3，使得 $[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2$.

Hint: 在 $\mathbb{R}^4$ 中定义 $X_1 = (-x^2, x^1, x^4, -x^3), X_2 = (-x^3, -x^4, x^1, x^2), X_3 = (-x^4, x^3, -x^2, x^1)$.

问题 17. 设 $M, \tilde{M}$ 为完备 *Riemann* 流形，$f: M \to \tilde{M}$ 局部等距，且 $\forall \tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{M}$，存在唯一测地线连接它们. 求证：$f$ 是一个等距映射.

问题 18. 求证：n 维环面 T^n 上不存在正 *Ricci* 曲率的度量.

问题 19. M 是完备 *Riemann* 流形，且存在常数 $\kappa > 0$，使得 $K \geq \kappa$*,* 这里 K 为 M 的截面曲率. γ 是 M 上的闭测地线. 求证：$\forall p \in M, d(p, \gamma) \leq \dfrac{\pi}{2\sqrt{k}}$.

微分几何

问题 20. $\vec{r}(t) = (\frac{1}{3}t^3, t^2, 2t), \Sigma : 3x - 4y + 2z = 0$.

(a) 求 $\vec{r}$ 与 Σ 交点，以及交点之间曲线的长度*;*

(b) 求 $\vec{r}$ 上一切与 Σ 平行的切向量所在的点，及对应点处的切线方程，并计算这些点到 Σ 的距离*;*

(c) 从 $\vec{r}$ 向 Σ 作投影生成一个曲面，求出曲面的方程，并且回答该曲面是否是可展的.

问题 21. 环面由 $((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$ 给出坐标.

(a) 求它的第一基本形式、第二基本形式、平均曲率、*Gauss* 曲率*;*

(b) 求一个共形映射，将它映到一个 *Gauss* 曲率为 0 的环面上.

问题 22. 球面由 $(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$ 给出坐标.

(a)（与球面无关）求证：对任一正则曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 及 Σ 上的曲线 $c(t)$*,* 求证：$c(t)$ 在 Σ 上的测地曲率 κ_g 仅依赖于 Σ 的第一基本形式*;*

(b) 求 $\theta \equiv \theta_0$ 在 S^2 上的测地曲率*;*

(c) 若球面上的闭凸曲线 γ 将球面面积等分，求证：它为大圆.

分析与方程

复分析

前两题 15 分，第三题 20 分.

问题 23. *(a)* 试给出球面 $\mathbb{S}^2$ 的共形结构（我也不知道共形结构定义是啥，题目上就是这么写的）*;*

(b) 试用 *Riemann* 映射定理、以及亏格 *0* 的紧黎曼曲面结构唯一性证明单连通 *Riemann* 曲面的单值化定理.

问题 24. $f: S \to S'$ 是紧连通 *Riemann* 曲面间全纯映射. 求证：$\forall q \in S'$, $f^{-1}(q)$ 中点的个数 *(*在分歧点处计重数*)* 不依赖于 q 的选取.

问题 25. 记 $\rho_\Delta = \dfrac{2}{1-|z|^2}$，则 $g_\Delta = \rho_\Delta^2|dz|^2$ 为单位圆盘 Δ 上的 *Poincare* 度量.

(a) 求证：$K_{g_\Delta} = -1$*;*

(b) 设 $g = \rho^2|dz|^2$ 为 Δ 上的一个共形度量，试用最大值原理证明 *Ahlfors* 定理：$g \le g_\Delta$*;*

(c) 设紧 *Riemann* 曲面 M 上有两个共形度量 g_0, g，满足 $0 \ge K_{g_0} \ge K_g$, 试推广 *(b)* 问的结果，求证：$g_0 \ge g$.

*(*我也不知道这里的共形度量是啥意思，题目上就这么写的. 个人猜测是书上 *2.4* 节的那个 *Ahlfors* 的定理.*)*

泛函分析

问题 26. 设 H 为 *Hilbert* 空间，$\{e_i\}$ 为标准正交基，且 $\{\rho_i\}$ 为标准正交集.

(a) 若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ||e_i - \rho_i||^2 < 1$, 求证：$\{\rho_i\}$ 为正交基*;*

(b) 若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ||e_i - \rho_i||^2 < \infty$, 求证：$\{\rho_i\}$ 为正交基.

问题 27. 设 X 为赋范线性空间，且 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset X$ 满足 $\forall f \in X^*$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty$. 求证：

$$\sup_{||f|| \le 1} \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty.$$

问题 28. 设 H 为 *Hilbert* 空间，A 为 H 上自伴算子，E 为 A 的谱族. 求证：$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} | \forall \varepsilon > 0, E(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0\}$.

问题 29. 设 $H = L^2(\mathbb{R}^3)$, 求证：$A = -\Delta + \dfrac{1}{|x|}$ 在定义域 $D(A) = H^2(\mathbb{R}^3)$ 上是自伴算子.

问题 30. A 为 *Hilbert* 空间 H 上的算子. 求证：算子 A 为强连续算子压缩半群生成元当且仅当 A 耗散，且 $\exists \lambda_0 > 0, \mathrm{Ran}(\lambda_0 I - A) = H$.

椭圆方程

问题 31. u 是 $\mathbb{R}^n$ 上调和函数，满足 $\exists A \in \mathbb{R}^+, |u(x)| \le A(1+|x|)^N, \forall x \in \mathbb{R}^n$. 这里 N 是正整数. 求证：u 是多项式.

问题 32. $f \in C(\mathbb{R} \times [0,T)), \varphi \in C(\mathbb{R})$. f, φ 有界. 设 u 是

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

在 $\mathbb{R} \times [0,T)$ 上的有界解. 求证：

$$|u(x,t)| \le T \sup |f(x,t)| + \sup |\varphi(x)|.$$

问题 33. Ω 是有界光滑区域. $\lambda = \inf\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x : u \in W_0^{1,2}(\Omega), ||u||_{L^2} = 1\}$. 求证：

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & in\ \Omega \\ u = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

存在非平凡弱解.

ODE 定性理论

问题 34. 记 $x' = f(x,t)$ 的从 $t=0$ 处 $x = x_0$ 出发的解为 $\phi(t, x_0)$, 这里 f 为 C^1 函数. 请举例一个 f 以及一个 t_0 使得映射 $x_0 \mapsto \phi(t_0, x_0)$ 不是一致连续的.

问题 35. $x' = Ax + f(t)$，这里 $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) 求证：$x' = Ax$ 没有非零有界（指在 $\mathbb{R}$ 上有界）解等价于 0 是双曲奇点;

(b) 若 f 有界，A 双曲，求证：存在唯一一个有界解. 进一步如果 f 范数随 t 趋于无穷而趋于 0，求证这个解的范数也随 t 趋于无穷而趋于 0.

问题 36. $x' = q(t)\cos^2(x) - \sin^2(x)$，这里 q 连续且有周期 1. 假设系统有一个正向有界解.

(a) 求证：所有解在 $\mathbb{R}$ 上有界;

(b) 求证：映射

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \phi(1,p) \end{aligned}$$

有不动点.

问题 37. 平面上的 C^1 系统 $x' = f(x)$ 只有一个奇点 0，并且有一族周期点 q_n 的周期趋于 0. 求证：任何解的存在区间都是 $\mathbb{R}$.

调和分析

问题 38. $1\le p,q\le\infty$. 求证：若存在常数 $C>0$ 使得 $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), ||\hat{f}||_q\le C||f||_p$, 则有 $q=p'$ 且 $1\le p\le 2$.

问题 39. 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $||f||_1>0$. 求证：$Mf\notin L^1(\mathbb{R}^n)$，并且 $||f||_1\le ||Mf||_{1,\infty}$.

问题 40. 计算 $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ 的 *Fourier* 变换以及 *Hilbert* 变换.

问题 41. 若 $f\in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0<\alpha\le 1$. 求证：$|f|^\alpha\in BMO(\mathbb{R}^n)$.

问题 42. 设 $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0\notin \mathrm{supp}(\zeta)$，且 $\{a_j\}$ 为有界数列. 求证：$m(\xi)=\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} a_j\zeta(2^{-j}\xi)$ 是一个 L^p 乘子，其中 $1<p<\infty$.

代数与数论

抽象代数

第三、四题 15 分，第一、二题 10 分.

问题 43. 试计算下面交换群的阶数：

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{36},\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{15})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{24}$;

(b) $Z\oplus Z/A$, 这里 A 为 $(m,0),(n,1)$ 生成的子模.

问题 44. 试判断下面的命题正确与否, 并给出依据:

(a) 不存在 G 的正规子群 H,K,N，使得 $G\cong H\times K$, 并且 $H\cap N$ 与 $K\cap N$ 均为平凡子群;

(b) F 为有限域，$F[x]$ 上的素理想只有有限多个.

问题 45. R 为主理想整环.

(a) 若 M 为自由 R 模，N 为 M 的子模. 求证：M/N 是无挠的当且仅当任何一组 N 的基都可以延拓为一组 M 的基;

(b) 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为 M 的一组生成元,设 $y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n, a_i\in R$. 若 $\gcd(a_1,\cdots,a_n)=1$, 求证：存在 $y_2,\cdots y_n$，使得 $y_1,\cdots,y_n$ 是 M 的一组生成元.

问题 46. 记 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-3},\sqrt[3]{5})$.

(a) 求证：$K/\mathbb{Q}$ 是 *Galois* 扩张;

(b) 求 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$;

(c) 求 $K/\mathbb{Q}$ 的所有中间域.

同调代数

问题 47. A 是 *PID*, $0\ne a\in A$ 不是单位元素. $B=A/(a)$. 求证：B 是内射以及投射 B 模, 并且 B 作为 A 模既不内射也不投射.

问题 48. G 是非交换有限单群. 求证:$H_1(G;\mathbb{Z})=H^1(G;\mathbb{Z})=H^2(G;\mathbb{Z})=0$, 这里 G 在 $\mathbb{Z}$ 上平凡作用.

问题 49. $\mathbb{H}$ 为四元数，$G=<i,j,k>$ 为八阶群. 求证：$\{\pm 1\}\to G\to \mathrm{coker}$ 不分裂，并将这个扩张对应的群上同调 $H^2(T,\pm 1)$ 中的元素，以 $T\times T\to\{\pm 1\}$ 的形式写出, 这里 $T=\mathrm{coker}$.

问题 50. 求证：$\mathrm{cone}(B\to(\mathrm{cone}A\to B))$ 和 $A[1]$ 是 qis 的.

问题 51. k 是域. 求证: $k[x]$ 不是平坦的 $k[x^2,x^3]$ 模.

代数几何

问题 52. 代数簇是域上分离有限型整概形. 求代数簇的仿射开子集的补集的余维数的可能值.

问题 53. 对诺特正则概形 X，计算结构层乘法群 $O_X^\times$ 的各阶 *Zariski* 上同调.

问题 54. 对任何复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限型仿射概形 X，任何嵌入 $X\to A^n$，在闭点集 $X(\mathbb{C})$ 上赋予 $A_n(\mathbb{C})$ 上的欧氏拓扑的子空间拓扑，称为 X 的解析化.

(a) 求证：X 的解析化的拓扑和嵌入的选取无关*;*

(b) 对任何有限型概形 X，求证：X 的闭点集上能赋予拓扑得到解析化 X_{an}，使得限制在任何仿射开子集 U 的闭点集上即为上面定义的解析化*;*

(c) 求证：有限型概形 X 是分离的当且仅当 X_{an} 是 *Hausdorff* 的.

代数数论

问题 55. 求正整数 n 和非零整数 a,b 使得 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{n}$ 是代数整数.

问题 56. 设 p 为素数，$n\in\mathbb{N}$ 满足 $p\nmid n$. 已知数域 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 的代数整数环是 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$.

(a) 求证：$\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ 在 p 处非分歧*;*

(b) 设 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 的在 p 上方的素理想. 令 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 的自同构 σ 将 ζ_n 映为 ζ_n^p. 求证：σ 是 $D_{\mathfrak{p}}$ 的生成元.

问题 57. $K\subset L$ 是数域. 求证：$\mathbb{A}_K\otimes_K L=\mathbb{A}_L$ 是作为拓扑环的同构.

问题 58. 求证：对任何素数 p，$(x^2-2)(x^2-17)(x^2-34)$ 在 p 进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 中有根.

问题 59. 求证：对数域 K，$\zeta_K(s)=\sum\limits_{\mathfrak{a}\text{是}\mathcal{O}_K\text{的非零理想}}(N\mathfrak{a})^{-s}$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时绝对收敛.

有限域

第一、四题 10 分，第二、三题 15 分. 题目中的 p 为素数，q 为素数幂.

问题 60. $f(x)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 次不可约多项式. 求证：$f(x)$ 在 $\mathbb{F}_{q^m}$ 上不可约当且仅当 $\gcd(m,n)=1$.

问题 61. 给定元素 $\alpha, \theta \in \mathbb{F}_{q^n}$. 定义

$$\beta = \theta + \alpha\theta^q + \cdots + \alpha^{1+q+\cdots+q^{n-2}}\theta^{q^{n-1}}.$$

(a) 求证：$\alpha\beta^q + \theta = \beta + \mathrm{N}(\alpha) \cdot \theta$;

(b) 求证：$\forall\alpha, \exists\theta$ 使得 $\beta \neq 0$;

(c) 求证：若 $\mathrm{N}(\alpha) = 1$, 则 $\exists\beta$ 使得 $\alpha = \beta^{1-q}$.

问题 62. 将 $x^{27} - x$ 在有限域 $\mathbb{F}_3$ 上分解为不可约多项式的成绩.

问题 63. 设 $q = p^m$，$\mathrm{Tr} : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$ 是迹映射. $\zeta \in \mathbb{F}_p$ 是本原元. 对于 $u \in \mathbb{F}_p$，定义:

$$\Omega = \sum_{w\in\mathbb{F}_p^*} \sum_{x,y\in\mathbb{F}_q} \zeta^{w(\mathrm{Tr}(x^2+xy)-u)}.$$

(a) 求证：

$$\Omega = \begin{cases} q(p-1), & u = 0, \\ -q, & u \neq 0. \end{cases}$$

(b) 求 $\#\{(x,y) \in \mathbb{F}_q^2 : \mathrm{Tr}(x^2 + xy) = u\}$.