偏微分方程 习题解答

原生生物

* 对应教材周蜀林《偏微分方程》。

目录

1 第一次作业

1. 1.4

   (1) 在 Guass-Green 公式中取 $\vec{F}$ 其余分量为 0，第 i 个分量为 uv 可得

   $$\int_{\Omega}(uv)_{x_i}\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}uvn_i\,\mathrm{d}S(x)$$

   将左侧求导写为 $u_{x_i}v+uv_{x_i}$ 并移项即得结论。

   (2) 在 Guass-Green 公式中取 $\vec{F}=Du$，得到

   $$\int_{\Omega}\mathrm{div}(Du)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\vec{n}\cdot(Du)\,\mathrm{d}S(x)$$

   由 $\triangle=\operatorname{div}D$ 与 $\frac{\partial}{\partial\vec{n}}=\vec{n}\cdot D$ 可知结论成立。

   (3) 由于 $u_{x_i}v_{x_i}+uv_{x_ix_i}=(uv_{x_i})x_i$，可知 $\mathrm{div}(uDv)=Du\cdot Dv+u\triangle v$，而

   $$\vec{n}\cdot(uDv)=u\vec{n}\cdot(Dv)=u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}$$

   从而

   $$\int_{\Omega}(Du\cdot Dv+u\triangle v)\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\mathrm{div}(uDv)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\vec{n}\cdot(uDv)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}x$$

   移项得到结论。

   (4) 利用 (3)，代入 u,v 与 v,u 后两式相减移项得到结论。

2. 1.6

   (1) 由于其为 $(D_x+D_y)^2u+D_y^2u=0$，为椭圆型方程，由 $D_v=D_x+D_y$ 与 $D_w=D_y$ 可知 $x=v,y=v+w$，于是 $v=x,w=y-x$，即有 $D_{v,w}u=0$。

   (2) 由于其为 $(D_x+D_y)^2u+D_y^2u=0$，可与 (1) 完全相同换元，得到 $u_{vv}=0$。

   (3) 由于其为 $(D_x+2D_y)^2u-3D_y^2u$，为双曲型方程，由 $D_v=D_x+2D_y$ 与 $D_w=\sqrt{3}D_y$ 可知 $x=v,y=2v+\sqrt{3}w$，于是 $v=x,w=\frac{\sqrt{3}}{3}(y-2x)$，即有 $u_{vv}-u_{ww}=0$。

3. 1.7

   (1) 由于其系数矩阵 A 对角线为 1，其余为 $\frac{1}{2}$，记 N 为所有元素为 1 的矩阵，有 $A=\frac{1}{2}(N+I)$，由于 N 的特征值利用特征方程可计算得为 $n-1$ 重 0 与一重 n，可知 A 特征值全部大于 0，因此为椭圆型方程，标准型即 $\triangle u=0$。

   (2) 由于其系数矩阵 A 对角线为 0，其余为 $\frac{1}{2}$，同上有 $A=\frac{1}{2}(N-I)$，可知 A 特征值除了一个 $\frac{n-1}{2}$ 外全部小于 0，因此为双曲型方程，标准型即 $u_{vv}-\sum_{i=1}^{n-1}u_{w_iw_i}=0$。

4. 4.5 利用偏导可交换可得

   $$\vec{E}_{tt}=(c\,\mathrm{curl}\,B)_t=c\,\mathrm{curl}\,B_t=-c^2\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\vec{E}$$

   由此只需证明 $\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\vec{E}=-\triangle\vec{E}$，这里对向量作用表示对各分量作用，而直接对比分量计算可知

   $$\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\vec{F}=D\,\mathrm{div}\,\vec{F}-\triangle\vec{F}$$

   又由 $\mathrm{div}\,\vec{E}=0$ 得结论，对 $\vec{B}$ 同理。

2 第二次作业

1. 2.1

   考虑
   $$J(v)=\iint_\Omega \sqrt{1+(Dv)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
   记 $f(\varepsilon)=J(u+\varepsilon\varphi)$，若 u 为最优点，求导可得
   $$f'(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\iint_\Omega \sqrt{1+(D(u+\varepsilon\varphi))^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
   由有界区域与光滑性交换求导、积分，进一步计算可得右侧为
   $$\iint_\Omega \frac{Du\cdot D\varphi}{\sqrt{1+(Du)^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
   由其为 0，利用 Green 公式得到
   $$\operatorname{div}\frac{Du}{\sqrt{1+(Du)^2}}=0$$
   这即为区域内部极小曲面所满足的方程。

2. 2.2

   设其为 $Q(x)=\frac{1}{2}x^TAx+d^Tx+c$，则有 $\triangle Q(x)=\mathrm{tr}A$，于是线性空间即对应 $\mathrm{tr}A=0$ 的 (A,d,c)，又由 A 对称可知维数为 $\frac{1}{2}n(n+3)$。

3. 2.4

   记右侧替换 $g(x)=u(x)$、$f(x)=-\triangle u(x)$ 后为 $\phi(r)$。设 $v(x)=|x|^{2-n}-r^{2-n}$，计算可发现 $x\neq 0$ 时
   $$Dv=\frac{(2-n)}{|x|^n}x,\quad \triangle v=0$$
   且 v 在 $|x|=r$ 时为 0，从而任取 $\varepsilon<r$，利用习题 1.4(4) 有
   $$-\int_{B(0,r)-B(0,\varepsilon)}v\triangle u\,\mathrm{d}x=\int_{\partial B(0,r)}(Dv\cdot\vec{n})u\,\mathrm{d}S(x)-\int_{\partial B(0,\varepsilon)}(Dv\cdot\vec{n})u\,\mathrm{d}S(x)-\int_{\partial B(0,\varepsilon)}(Du\cdot\vec{n})v\,\mathrm{d}S(x)$$
   而 $B(0,r)$ 的边界上 $\vec{n}=\frac{x}{r}$，$|x|=r$，记后两项之和为 $F(\varepsilon)$，可得
   $$\frac{(2-n)}{r^{n-1}}\int_{\partial B(0,r)}u(x)\,\mathrm{d}S(x)-F(\varepsilon)$$
   而第一项乘常数 $\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}$ 即为
   $$-\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(0,r)}u(x)\,\mathrm{d}S(x)$$
   也即我们证明了
   $$\phi(r)=-\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}F(\varepsilon)$$
   这与 r 无关，由此 $\phi'(r)=0$，只需计算 $\lim_{r\to 0}\phi(r)$，这时第一项由 u 在 0 处连续性成为 $u(0)$，第二项作换元 $x=rz$ 可发现其为
   $$\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{B(0,1)}r^2\left(\frac{1}{|z|^{n-2}}-1\right)f(rz)\,\mathrm{d}z$$
   利用球坐标换元可知右侧积分收敛，故利用控制收敛定理可知 $r\to 0$ 时其收敛到 0，与第一项极限相加可知 $\phi(r)=u(0)$，得证。

4. 2.6

(1) 仿照平均值公式的证明记

$$\phi(r)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}v(y)\mathrm{d}S(y)$$

则相同计算得

$$\phi'(r)=\frac{1}{n^2\alpha(n)r^{n-2}}\int_{B(x,r)}\triangle v(y)\mathrm{d}y\geq 0$$

再由 $\lim_{r\to 0^+}\phi(r)=v(x)$ 可知 $\phi(r)\geq v(x)$，从而

$$\int_{B(x,r)}v(y)\mathrm{d}y=\int_0^r n\alpha(n)t^{n-1}\phi(t)\mathrm{d}t\geq\int_0^r n\alpha(n)t^{n-1}v(x)\mathrm{d}t=\alpha(n)r^n v(x)$$

即得证。

(2) 与强极值原理 (1) 的证明完全相同，只需说明应用下调和函数的平均值公式能从 $v(x_l)=M$ 得到 $B(x_l,r_l)$ 中对任何 x 有 $v(x)=M$ 即可。

若结论不成立，利用 v 连续性，存在 x 邻域 U 使得 U 上 $v(y)\leq M_0<M$。于是 $B(x_l,r_l)$ 中积分平均值不超过 $M-(M-M_0)\delta$，δ 为 U 与 $B(x_l,r_l)$ 体积之比，与其大于 $M=v(x_l)$ 矛盾。

(3) 直接计算可知

$$\Delta v=\operatorname{div}D\phi(u)=\operatorname{div}\phi'(u)Du=\phi''(u)|Du|^2+\phi'(u)\triangle u=\phi''(u)|Du|^2$$

由光滑凸函数可知 $\phi''\geq 0$，从而得证。

(4) 直接计算可知 (下标表示求导)

$$\Delta v=\sum_i D_i^2|Du|^2=\sum_i D_i^2\sum_j u_j^2=\sum_i D_i\sum_j 2u_ju_{ij}=2\sum_{i,j}(u_{ij}^2+u_ju_{iij})$$

由于 $\sum_i u_ju_{iij}=u_j(\triangle u)_j=0$，可知 $\Delta v=2\sum_{i,j}u_{ij}^2$，得证。

3 第三次作业

1. 2.7

由条件可知

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists N\in\mathbb{N}^*,\quad\forall m,n>N,\quad\forall x\in\partial\Omega,\quad|u_m(x)-u_n(x)|<\varepsilon$$

而由于 u_m-u_n 调和，由极值原理可知

$$\forall x\in\bar{\Omega},\quad-\varepsilon\leq u_m(x)-u_n(x)\leq\varepsilon$$

这即是一致收敛的柯西列版本。

另一方面，对任意 $B(r,x)\subset\Omega$，有

$$u_n(x)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u_n(y)\mathrm{d}S(y)$$

两边令 $n\to\infty$，利用收敛的一致性，右侧为有界区域，积分必然收敛，从而即有

$$u(x)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)$$

于是利用定理 2.3 得成立。

2. 2.11

由定理 2.7，对任何 x，取 $r=1-|x|$ 有

$$|Du(x)|\leq\sqrt{n}\max_{|\alpha|=1}|D^\alpha u(x)|\leq\frac{\sqrt{n}(n+1)}{\alpha(n)}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{B(x,r)}|u(y)|\mathrm{d}y$$

将右侧乘积第一项记为 C_n'，并设 $|u|$ 上界为 M，由此可知

$$r|Du(x)| \le C_n'\frac{1}{r^n}(\alpha(n)r^nM) = C_n'\alpha(n)M$$

从而有界。

3. 2.12

(1) 由于加减常数仍调和，且不影响结果，可不妨设 $\inf_{B(0,R)} u = 0$，由此其成为非负调和函数，取 $r = R/2$，对 $B(0,r)$ 利用 Harnack 不等式得

$$\sup_{B_r} u \le 3^n \inf_{B_r} u$$

而 $\sup_{B_R} u \ge \sup_{B_r} u$，于是可知

$$\omega(R/2) \le \sup_{B_r} u - \frac{1}{3^n}\sup_{B_r} u \le (1-3^{-n})\sup B_R u = (1-3^{-n})\omega(R)$$

从而得证。

(2) 由 (1) 可知

$$\omega(R_0/2^k) \le \eta^k\omega(R_0) \le 2\eta^k M_0$$

设 $R \in R_0(2^{-k}, 2^{-(k+1)})$ 则

$$\omega(R) \le 2\eta^k M_0$$

由 $\eta > 1/2$，可取 α 使得 $2^{-\alpha} = \eta$，则 $\alpha \in (0,1)$，于是

$$\omega(R) \le 2^{-\alpha k+1}M_0$$

再记 $C = 2^{\alpha+1}$，即有

$$\omega(R) \le C2^{-(k+1)\alpha}M_0 \le C(R/R_0)^\alpha M_0$$

于是得证。

4. 2.13

利用定理 2.7 可知任取 $B(x,r)$，利用 $B(x,r)$ 中模长最大为 $|x|+r$ 有

$$|D^\alpha u(x)| \le \frac{C_k}{r^{n+k}}\int_{B(x,r)}|u(y)|\mathrm{d}y \le \frac{C_k}{r^{n+k}}\alpha(n)r^n(C_0(|x|+r)^m + C_1)$$

当 $|\alpha| > m$ 时，分母为 r 的 $n+k$ 次多项式，分子为 $n+m$ 次，令 $r \to \infty$ 可知右端积分为 0，从而 $|D^\alpha u(x)| = 0$，由此即得证。

5. 2.14

换元可知

$$u_r(x) = \frac{1}{N\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(0)} u(y+x)\mathrm{d}S(y)$$

于是利用有界区域积分求导可交换与链式法则 $D_x^\alpha(u(y+x)) = (D^\alpha u)(y+x)$ 可得

$$\triangle u_r(x) = \frac{1}{N\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(0)}\triangle u(y+x)\mathrm{d}S(y) = \frac{1}{N\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)}\triangle u(y)\mathrm{d}S(y) = (\triangle u)_r(x)$$

从而得证。

4 第四次作业

1. 2.9

   注意到
   $$K[K[u]](x) = |x|^{2-n}|x^*|^{2-n}u(x^{**})$$
   而计算可发现 $x^{**} = x$，且 $|x^*| = |x|^{-1}$，于是 $K[K[u]](x) = u(x)$。

   只需证明 u 为调和函数时 $K[u]$ 为调和函数，即可知 $K[u]$ 为调和函数时 u 为调和函数。记 $|x| = r$，可发现 $D_i x = e_i$、$D_i r = x_i/r$，这里 e_i 为单位向量，x_i 为 x 的分量。由此
   $$\sum_i D_{ii}K[u](x) = \sum_i (D_{ii}r^{2-n})u(x^*) + 2\sum_i (D_i r^{2-n})D_i(u(x^*)) + \sum_i r^{2-n}D_{ii}(u(x^*))$$
   直接计算可发现
   $$D_i r^{2-n} = (2-n)x_i r^{-n}$$
   $$D_{ii}r^{2-n} = (2-n)r^{-n} - n(2-n)x_i^2 r^{-n-2}$$
   于是
   $$\sum_i (D_{ii}r^{2-n}) = 0$$
   第一项为 0。

   计算可知
   $$D_i x^* = D_i(x/r^2) = \frac{1}{r^2}e_i - 2\frac{x_i}{r^4}x$$
   从而整理得第二项的求和为 (考察每个 $D_j u$ 前的系数)
   $$2\sum_i (2-n)x_i r^{-n}\sum_j (D_j u)(x^*)\left(\frac{1}{r^2}\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{r^4}\right) = 2(n-2)r^{-n-2}\sum_j (D_j u)(x^*)x_j$$
   进一步计算
   $$D_i\left(\frac{1}{r^2}\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{r^4}\right) = -\frac{2x_i}{r^4}\delta_{ij} - \frac{2x_j}{r^4} - \frac{2x_i}{r^4}\delta_{ij} + \frac{8x_i^2 x_j}{r^6} = -\frac{4x_i}{r^4}\delta_{ij} - \frac{2x_j}{r^4} + \frac{8x_i^2 x_j}{r^6}$$
   于是最后一项为
   $$\sum_i r^{2-n}D_i\left(\sum_j (D_j u)(x^*)\left(\frac{1}{r^2}\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{r^4}\right)\right)$$
   展开得 (省略 u 相关的自变量 x^*)
   $$\sum_i r^{2-n}\sum_j\left(\sum_k (D_{kj}u)\left(\frac{1}{r^2}\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{r^4}\right)\left(\frac{1}{r^2}\delta_{ik} - \frac{2x_i x_k}{r^4}\right) + (D_j u)\left(-\frac{4x_i}{r^4}\delta_{ij} - \frac{2x_j}{r^4} + \frac{8x_i^2 x_j}{r^6}\right)\right)$$
   $D_{kj}u$ 前的系数为
   $$r^{2-n}\sum_i\left(\frac{\delta_{ij}\delta_{ik}}{r^4} - \frac{2x_i(x_j\delta_{ik} + x_k\delta_{ij})}{r^6} + \frac{4x_i^2 x_j x_k}{r^8}\right) = r^{-n-2}\delta_{jk} - r^{-n-4}4x_j x_k + r^{-n-4}4x_j x_k = r^{-n-2}\delta_{jk}$$
   而 $D_j u$ 前的系数为
   $$r^{2-n}\sum_i\left(-\frac{4x_i}{r^4}\delta_{ij} - \frac{2x_j}{r^4} + \frac{8x_i^2 x_j}{r^6}\right) = r^{2-n}\left(-\frac{4x_j}{r^4} - \frac{2nx_j}{r^4} + \frac{8x_j}{r^4}\right) = (4-2n)r^{-n-2}x_j$$
   与第二项的求和对比，可发现所有 $D_j u$ 被消去，而所有 $D_{kj}u$ 当且仅当 $k = j$ 时非零，且其前系数同为 r^{-n-2}，由此即计算得到
   $$\triangle K[u](x) = r^{-n-2}\triangle u(x^*)$$
   u 调和时右端为 0，即有左端为 0，$K[u]$ 调和。

2. 2.17

作换元 $z=(y_1-x_1,y_2-x_2,\dots,y_{n-1}-x_{n-1},0)$ 可发现

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}K(x,y)\mathrm{d}y=\frac{2}{n\alpha(n)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{x_n}{|y-x|^n}\mathrm{d}y=\frac{2}{n\alpha(n)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{x_n}{|z-x_ne_n|^n}\mathrm{d}z$$

对 z 进行极坐标换元，设 $\mathrm{d}z=r^{n-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega$，可发现 $|z-x_ne_n|=\sqrt{r^2+x_n^2}$，于是化为

$$\frac{2}{n\alpha(n)}\int_0^\infty\frac{r^{n-2}x_n}{(r^2+x_n^2)^{n/2}}\mathrm{d}r\int_D\mathrm{d}\Omega$$

这里 D 为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中单位球面，由此其积分结果为表面积 $(n-1)\alpha(n-1)$，整理可知原积分前的系数为

$$\frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)}=\pi^{-1/2}\Gamma(n/2)\Gamma((n-1)/2)^{-1}=\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((n-1)/2)}=\frac{1}{B(1/2,(n-1)/2)}$$

由于 $x_n>0$，换元 $s=r/x_n$ 可发现

$$\int_0^\infty\frac{r^{n-2}x_n}{(r^2+x_n^2)^{n/2}}\mathrm{d}r=\int_0^\infty\frac{s^{n-2}}{(s^2+1)^{n/2}}\mathrm{d}s$$

再令 $s=\tan t$ 可得积分化为

$$\int_0^{\pi/2}\frac{(\tan t)^{n-2}}{(\cos t)^{-n}}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{n-2}\mathrm{d}t=B(1/2,(n-1)/2)$$

从而得证。

5 第五次作业

1. 2.8

根据 v 的定义，可发现在 $x_n>0$ 与 $x_n<0$ 上均有 $\triangle v=0$，且 v 连续。将 $x_n<0$ 的单位球部分记作 B^-。

记

$$\phi(r)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}v(y)\mathrm{d}S(y)$$

则根据测度为 0 的集合不影响积分可知

$$\phi(r)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\left(\int_{\partial B(x,r)\cap B^+}v(y)\mathrm{d}S(y)+\int_{\partial B(x,r)\cap B^-}v(y)\mathrm{d}S(y)\right)$$

与定理 2.2 完全相同过程可推知 (这里的积分将 $x_n=0$ 对应的零测集忽略)

$$\phi'(r)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial v(y)}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S(y)$$

在边界 $x_n=0$ 附近，B^+、B^- 的外法向量方向相反，而利用奇函数导数为偶函数可知 v 对 x_n 的偏导相同，由此两者可互相抵消，从而可得

$$\phi'(r)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\left(\int_{\partial B(x,r)\cap B^+}\frac{\partial v(y)}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S(y)+\int_{\partial B(x,r)\cap B^-}\frac{\partial v(y)}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S(y)\right)$$

对上式运用 Gauss 公式即得到

$$\phi'(r)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\left(\int_{B(x,r)\cap B^+}\triangle v\mathrm{d}S(y)+\int_{B(x,r)\cap B^-}\triangle v\mathrm{d}S(y)\right)$$

而由于 B^+ 与 B^- 上 $\triangle v$ 恒为 0，即可知 $\phi'(r)$ 为常数，再由 v 连续即得 $v(x)$ 满足平均值公式，利用定理 2.3′ 可知其为调和函数。

2. 2.15

(1) 利用 Poisson 公式有

$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{n\alpha(n)R}\int_{\partial B(0,R)}\frac{u(y)}{|x-y|^n}\mathrm{d}S(y)$$

根据定义可知 $R-|x|\le|x-y|\le R+|x|$，由于 u 非负，即得

$$u(x)\ge\frac{R^2-|x|^2}{n\alpha(n)R}\int_{\partial B(0,R)}\frac{u(y)}{(R+|x|)^n}\mathrm{d}S(y)$$

再利用平均值公式可知

$$u(x)\ge\frac{R^2-|x|^2}{n\alpha(n)R}\frac{n\alpha(n)R^{n-1}}{(R+|x|)^n}u(0)=R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0)$$

同理

$$u(x)\le\frac{R^2-|x|^2}{n\alpha(n)R}\frac{n\alpha(n)R^{n-1}}{(R-|x|)^n}u(0)=R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

(2) 利用强极值原理，$\sup_{B_r}u$ 与 $\inf_{B_r}u$ 均在 ∂B_r 达到，分别记为 M 与 m，而根据 (1) 有

$$R^{n-2}\frac{R-r}{(R+r)^{n-1}}u(0)\le m\le M\le R^{n-2}\frac{R+r}{(R-r)^{n-1}}u(0)$$

若 $u(0)>0$，这已经说明了

$$\frac{M}{m}\le\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n$$

从而得证。若 $u(0)=0$，由其非负可知 $u(0)$ 取到了最小值，从而 u 恒为 0，Harnack 不等式仍然成立。

3. 2.18(2)

对 $x=(a,b)$，考虑对 x 轴、y 轴两次反射，可记

$$G(x,y)=\Gamma(y-(a,b))-\Gamma(y-(a,-b))-\Gamma(y-(-a,b))+\Gamma(y+(a,b))$$

此时对应的 $\phi^x(y)=\Gamma(y-(a,-b))+\Gamma(y-(-a,b))-\Gamma(y+(a,b))$。

由于其为若干基本解叠加，且第一象限中 $(a,b)\ne(0,0)$，可知 $\triangle\phi^x(y)=0$，而边界上分 $a=0$ 或 $b=0$ 讨论可发现其等于 $\Gamma(y-(a,b))$，从而得证。

4. 2.19

由书上已证，记 $x^*=x/|x|^2$，则单位球上的 Green 函数为

$$G(x,y)=\Gamma(y-x)-\Gamma(|x|(y-x^*))$$

对一般的球，记 $x^*=\frac{R^2x}{|x|^2}$，考虑类似上方的反射 $\tilde{x}=(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)$，我们下面证明 (注意到 x_n 添加负号不改变 $|x|$，x 的反射的对偶点即为 x 的对偶点的反射)

$$G(x,y)=\Gamma(y-x)-\Gamma(|x/R|(y-x^*))-\Gamma(y-\tilde{x})+\Gamma(|x/R|(y-\tilde{x}^*))$$

此时对应的 $\phi^x(y)=\Gamma(|x/R|(y-x^*))+\Gamma(y-\tilde{x})-\Gamma(|x/R|(y-\tilde{x}^*))$。与球上/半空间上完全同理可知 $\triangle\phi^x(y)=0$。对于边界，若其为 $|x|=R$ 的边界，此时 $\tilde{x}^*=\tilde{x}$、$x^*=x$，因此后两项抵消，第一项成为 $\Gamma(y-x)$；若其为 $x_n=0$ 的边界，此时 $\tilde{x}=x$，一三两项抵消，第二项成为 $\Gamma(y-x)$，从而得证。

5. 2.21

(1) 若 u 的最大/最小值在边界达到，则满足要求。

否则，若 u 在 x_0 达到最大值，有 $-\triangle u(x_0)+c(x_0)u(x_0)=f(x_0)$，而根据 Hessian 阵半负定性，其迹非正，从而 $c(x_0)u(x_0)\le f(x_0)$，即有 $u(x_0)\le\frac{1}{c_0}f(x_0)\le\frac{1}{c_0}\sup_\Omega|f|$，同理最小值处 $u(x_0)\ge\frac{1}{c_0}f(x_0)\ge-\frac{1}{c_0}\sup_\Omega|f|$。

综合上述两种情况可得无论在边界还是内部，均有最大/小值处的 $|u(x_0)|\le\frac{1}{c_0}\sup_\Omega|f|$，由此即得证。

(2) 不妨设 $0 \in \Omega$，记 $w(x) = d^2 - |x|^2 + 1$，并由其在区域内恒正可设 $u(x) = v(x)w(x)$，计算得到

$$\triangle u = w\triangle v + v\triangle w + 2Dv \cdot Dw = w\triangle v - 4x \cdot Dv - 2nv$$

从而

$$-w\triangle v + 4x \cdot Dv + (2n + cw)v = f$$

且 $\partial\Omega$ 上 $v = 0$。

由于内部最大/最小值点处 $Dv = 0$，而 w 恒正，完全类似之前可证明最大值处

$$v(x_0) \leq \frac{1}{2n + c(x_0)w(x_0)} f(x_0) \leq \frac{1}{2n} \sup_{\Omega} |f|$$

最小值处

$$v(x_0) \geq \frac{1}{2n + c(x_0)w(x_0)} f(x_0) \geq -\frac{1}{2n} \sup_{\Omega} |f|$$

从而

$$\max_{\bar{\Omega}} |v| \leq \frac{1}{2n} \sup_{\Omega} |f|$$

而

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\bar{\Omega}} |v| \max_{\bar{\Omega}} |w| \leq \frac{d^2 + 1}{2n} \sup_{\Omega} |f|$$

(3) 考虑单位圆上，$f(x) = 0$，$u(x) = 1 - |x|^2$，则 $c(x) = -\frac{2n}{1-|x|^2}$ 恒负且可使方程满足，但 u 并非恒 0。

6. 2.24

与定理 2.23 的证明完全类似，由于 $w(x_0) = 0$ 已经满足，只需验证 $Lw \leq 0$ 与 $\frac{\partial w}{\partial \nu}\big|_{x=x_0} < 0$ 即可。

对于前者，直接计算可知 $\triangle w = (4a^2|x|^2 - 2na)\mathrm{e}^{-a|x|^2}$，于是利用 $R \geq |x|$ 可知

$$Lw = -(4a^2|x|^2 - 2na - c(x))\mathrm{e}^{-a|x|^2} + c(x)\mathrm{e}^{-aR^2} \leq -(4a^2|x|^2 - 2na - 2c(x))\mathrm{e}^{-a|x|^2}$$

由于 $c(x)$ 有上界，$|x| > \frac{R}{2}$，利用二次函数知识可知一定存在 A 使得 $a > A$ 时 $Lw \leq 0$ 恒成立。

对于后者，与证明过程类似只需验证

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{n}}\bigg|_{x=x_0} < 0$$

即可，而球壳上 $\vec{n}$ 即为 r 方向的向量，由此直接计算可知球壳上有

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{n}}\bigg|_{x=x_0} = -2aR\mathrm{e}^{-aR^2} < 0$$

从而得证。

7. 2.27

若 u 的最大/最小值在边界达到，则满足要求。

否则，若 u 在 x_0 达到最大值，根据 Hessian 阵半负定性，其迹非正，从而 $\triangle u(x_0) \leq 0$，而 $\triangle u(x_0) = u(x_0)|u(x_0)| - f(x_0)$，于是可知 $u(x_0)|u(x_0)| \leq f(x_0)$，分正负讨论可知

$$u(x_0) \leq |f(x_0)|^{1/2} \leq \sup_{\Omega} |f|^{1/2}$$

同理，最小值处有

$$u(x_0) \geq -|f(x_0)|^{1/2} \geq -\sup_{\Omega} |f|^{1/2}$$

综合上述两种情况可得无论在边界还是内部，均有最大/小值处的

$$|u(x_0)| \leq \max\left(\max_{\partial\Omega} |g|, \sup_{\Omega} |f|^{1/2}\right)$$

由此即得证。

8. 2.30

不妨设 $0 \in \Omega$，且要求 $\varepsilon > 0$。

直接计算可知 (e_1 指单位向量)

$$\triangle w = \triangle u - \varepsilon M^2 \mathrm{e}^{Mx_1}$$

$$Dw = Du - \varepsilon M \mathrm{e}^{Mx_1} e_1$$

于是

$$-\triangle w + \mathbf{A} \cdot Dw = \varepsilon M^2 \mathrm{e}^{Mx_1} - \varepsilon M \mathrm{e}^{Mx_1} \mathbf{A} \cdot e_1 + f(x)$$

由于 $M \geq \sup_\Omega |\mathbf{A}| + 1$，可知 $M \geq \sup_\Omega A \cdot e_1 + 1$，再利用 $f(x) \geq 0$ 可知

$$-\triangle w + \mathbf{A} \cdot Dw \geq \varepsilon M \mathrm{e}^{Mx_1}$$

进一步通过 Ω 直径不超过 d 可知 $x_1 \geq -d$，于是

$$-\triangle w + \mathbf{A} \cdot Dw \geq \varepsilon M \mathrm{e}^{-Md} > 0$$

若 w 在内部有最小值点，则根据 Hessian 阵半正定性，其迹非负，且 $Dw = 0$，但这说明左侧 ≤ 0，矛盾，于是最小值点只能在边界取到。

而边界上利用 Ω 直径不超过 d 可知 $x_1 \leq d$，于是

$$w(x) = g(x) + \varepsilon(\mathrm{e}^{Md} - \mathrm{e}^{Mx_1}) \geq 0$$

从而可知 $w(x) \geq 0$ 对任何 ε 成立，令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得 $u(x) \geq 0$。

6 第六次作业

1. 2.40

若 u_1, u_2 满足此方程，其差 v 在边界上为 0 且

$$-\triangle v(x) + \vec{A}(x) \cdot Dv(x) + c(x)v(x) = 0$$

乘 v 后在区域上积分，利用 Gauss-Green 公式计算可得

$$\int_\Omega (|Dv|^2 + v\vec{A} \cdot Dv + cv^2)\mathrm{d}x = 0$$

而通过柯西不等式可知 (注意由条件必然有 $c > 0$ 恒成立) 对任何 x 有

$$|Dv|^2 + cv^2 + v\vec{A} \cdot Dv \geq |Dv|^2 + cv^2 - |v||\vec{A}||Dv| = c\left(v - \frac{|\vec{A}|}{2c}|Dv|\right)^2 + \left(1 - \frac{|\vec{A}|^2}{4c}\right)|Dv|^2$$

利用条件可知 $|Dv|^2$ 前的系数恒正，从而积分中恒大于等于 0，再从积分为 0 即可知 $|Dv| = 0$，因此 v 为常数，再由边界 0 知恒 0，得证。

* 光滑性要求：上述证明在 $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 时可成立。

2. 2.41

若 u_1, u_2 满足此方程，其差 v 满足

$$-\triangle v(x) + c(x)v(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

且仍在 $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 中。

第一式乘 v 后在区域上积分，利用 Gauss-Green 公式计算可得

$$\int_\Omega (|Dv|^2 + cv^2)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}S(x) = 0$$

但由第二式可知只能 $|Dv|^2 + cv^2$ 积分为 0，由 $c \geq 0$ 可知其处处为 0，分类讨论：

- 若任何 x 处 $c(x)=0$，只能推出 $|Dv|=0$，也即 v 为常数，从而解在相差常数意义下唯一；
- 若某个 x_0 处 $c(x_0)>0$，由连续知 $v(x)=0$，但此时仍有 $|Dv|=0$，于是 v 恒为 0，解唯一。

3. 3.1

(1) 利用定义可知

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^a x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x-\int_{-a}^0 x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x\right)$$

直接利用分部积分可知

$$\int x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{i}}{\lambda}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}+\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}+C$$

从而可算得结果为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a\sin(a\lambda)}{\lambda}+\frac{\cos(a\lambda)-1}{\lambda^2}\right)$$

(3) 利用定义与 sin 为奇函数可知

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\sin(\lambda_0x)(\cos\lambda x-\mathrm{i}\sin\lambda x)\,\mathrm{d}x=\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\sin(\lambda_0x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x$$

再由

$$2\sin(\lambda_0x)\sin(\lambda x)=\cos((\lambda-\lambda_0)x)-\cos((\lambda+\lambda_0)x)$$

即可算出积分为

$$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin((\lambda+\lambda_0)a)}{\lambda+\lambda_0}-\frac{\sin((\lambda-\lambda_0)a)}{\lambda-\lambda_0}\right)$$

(5) 利用定义与其为偶函数可知

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}2\mathrm{e}^{-ax}\cos(\lambda x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

利用

$$2\cos(\lambda x)\cos x=\cos((\lambda-1)x)+\cos((\lambda+1)x)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda-1)x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+1)x}\right)$$

即可得到积分为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a-\mathrm{i}(\lambda-1)}+\frac{1}{a-\mathrm{i}(\lambda+1)}\right)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a^2+(\lambda-1)^2}+\frac{1}{a^2+(\lambda+1)^2}\right)$$

7 第七次作业

1. 3.2

(1) 利用 3.1 节例 1 与性质 3.3 即得结果为

$$-\hat{f}_1''(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a^2(\sin a\lambda)}{\lambda}+\frac{2a\cos(a\lambda)}{\lambda^2}-\frac{2\sin(a\lambda)}{\lambda^3}\right)$$

(3) 利用 Fourier 反变换的定义作变量代换可得对常数 μ 有

$$(\hat{f}(\lambda+\mathrm{i}\mu))^{\vee}=\mathrm{e}^{\mu x}f(x)$$

也即利用 3.1 节例 1 可知结果为

$$\hat{f}_1(\lambda+\mathrm{i}\mu)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a(\lambda+\mathrm{i}\mu))}{\lambda+\mathrm{i}\mu}$$

这里 $\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$。

* 这里严格意义上的说明需要利用复变函数的积分。

(5) 与 (3) 完全类似可知结果为

$$\hat{f}_1(\lambda-\lambda_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a(\lambda-\lambda_0))}{\lambda-\lambda_0}$$

(7) 利用 3.1 节例 3 与性质 3.6 可知

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}\right)^{\wedge}=\mathrm{e}^{-|\lambda|}$$

再利用性质 3.5 与 $a>0$ 即得

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2/a^2}\right)^{\wedge}=a\mathrm{e}^{-a|\lambda|}$$

最后由性质 3.1 得结果为

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-a|\lambda|}}{a}$$

(9) 记 (7) 中的函数为 $g(x)$，由性质 3.2 可知

$$(g'(x))^{\wedge}=\mathrm{i}\lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-a|\lambda|}}{a}$$

利用性质 3.1 也即

$$\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^2}\right)^{\wedge}=-\mathrm{i}\lambda\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\mathrm{e}^{-a|\lambda|}}{a}$$

设目标函数为 $\hat{f}(\lambda)$，则利用性质 3.3 并消去 i 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda)=-\lambda\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\mathrm{e}^{-a|\lambda|}}{a}$$

分段，利用分部积分直接计算右侧积分可发现

$$\hat{f}(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{1+a|\lambda|}{a^3}\mathrm{e}^{-a|\lambda|}+C$$

最后，当 $\lambda=0$ 时利用定义有

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}at}{(a^2+a^2t^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

对最右侧的积分利用有理函数拆分积分方式可算出结果为 $\frac{\pi}{2}$，由此即得 $C=0$，最终得到

$$\hat{f}(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{1+a|\lambda|}{a^3}\mathrm{e}^{-a|\lambda|}$$

2. 3.3

(1) 利用 3.1 节例 5，取 $A=\frac{1}{4a^2t}$，再利用性质 3.1 即得结果为

$$\sqrt{2A}\mathrm{e}^{-Ax^2}=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\mathrm{e}^{-x^2/(4a^2t)}$$

(2) 设 (1) 的结果为 $g(x)$，利用性质 3.1、性质 3.4 可得结果为

$$\mathrm{e}^{ct}g(x+bt)=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\mathrm{e}^{-(x+bt)^2/(4a^2t)+ct}$$

(3) 利用 3.1 节例 3 与性质 3.5，由 $y>0$ 可知

$$(\mathrm{e}^{-|x|y})^{\wedge}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{\lambda^2+y^2}$$

再通过性质 3.6 即得

$$(\mathrm{e}^{-|\lambda|y})^{\vee}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}$$

3. 3.4

(1) 方程两边对 x 进行 Fourier 变换得到

$$\hat{u}_t + a^2\lambda^2\hat{u} + \mathrm{i}\lambda b\hat{u} + c\hat{u} = \hat{f}(\lambda, t)$$

$$\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda)$$

直接求解得到

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2+\mathrm{i}b\lambda+c)t} + \mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2+\mathrm{i}b\lambda+c)t}\int_0^t \hat{f}(\lambda, s)\mathrm{e}^{(a^2\lambda^2+\mathrm{i}b\lambda+c)s}\,\mathrm{d}s$$

利用习题 3.3(2) 的结论可知

$$\left(\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2+\mathrm{i}b\lambda+c)t}\right)^\vee = \frac{1}{a\sqrt{2t}}\mathrm{e}^{-(x-bt)^2/(4a^2t)-ct}$$

记上式右侧的函数为 $\sqrt{2\pi}K(x, t)$，通过乘积 Fourier 变换为卷积可发现 (这里卷积均指对第一个分量)

$$u(x, t) = (\varphi * K(\cdot, t))(x) + \int_0^t (f(\cdot, s) * K(\cdot, t-s))(x)\,\mathrm{d}s$$

(2) 方程两边对 x 进行 Fourier 变换得到

$$\hat{u}_{yy} - \lambda^2\hat{u} = 0$$

$$\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda)$$

利用常微分方程知识可知第一个方程的解为

$$\hat{u}(\lambda, y) = C_1(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda y} + C_2(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda y}$$

为了使 Fourier 逆变换存在得到有界解，由 $y > 0$，可知必然能写成

$$\hat{u}(\lambda, y) = C(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}$$

结合初值即为

$$\hat{u}(\lambda, y) = \hat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}$$

由此，利用习题 3.3(3)，设

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

即有

$$u(x, y) = (\varphi * K(\cdot, y))(x)$$

4. 3.5

(1) 直接利用定义计算

$$(F(\lambda))^\vee = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\cos(a\lambda t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\lambda t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\lambda t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda$$

也即其为

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x+at)}\,\mathrm{d}\lambda + \Phi(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-at)}\,\mathrm{d}\lambda\right) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at))$$

(2) 与 (1) 完全类似可知

$$(a\lambda F(\lambda))^\vee = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\varphi(x+at) - \varphi(x-at))$$

从而利用性质 3.1 与性质 3.3 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(\lambda))^\vee = \frac{1}{2a}(\varphi(x+at) - \varphi(x-at))$$

于是

$$(F(\lambda))^\vee = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(y)\mathrm{d}y + C$$

利用定义直接计算其 Fourier 变换，由于 C 不含 x，利用反变换得到的函数可以 Fourier 得到只能 $C=0$，从而

$$(F(\lambda))^\vee = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(y)\mathrm{d}y$$

5. 3.6

方程两边对 x 进行 Fourier 变换得到

$$\hat{u}_{tt} + \lambda^2 a^2 \hat{u} = 0$$

$$\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda)$$

$$\hat{u}_t(\lambda, 0) = \hat{\psi}(\lambda)$$

利用常微分方程知识可知第一个方程的解为

$$\hat{u}(\lambda, y) = C_1(\lambda)\sin(\lambda a t) + C_2(\lambda)\cos(\lambda a t)$$

代入初值条件得到

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda)\cos(\lambda a t) + \frac{1}{a\lambda}\hat{\psi}(\lambda)\sin(\lambda a t)$$

利用习题 3.5 即得

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\mathrm{d}y$$

6. 3.17

设 $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$，并利用 $v(0,t) = 0$，可在 $x<0$ 处定义 $v(x,t) = -v(-x,t)$，可验证其具有全局可微性，且满足方程

$$v_t - v_{xx} = -\mathrm{sgn}(x) g'(t)$$

$$v(x, 0) = 0$$

其中 $t>0, x\in\mathbb{R}$。

直接利用 Poisson 公式可得

$$v(x,t) = -\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi) g'(\tau)\mathrm{d}\xi$$

这里

$$K(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/(4t)}$$

也即

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{0} K(x-\xi, t-\tau) g'(\tau)\mathrm{d}\xi - \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{0}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau) g'(\tau)\mathrm{d}\xi$$

对第一项利用分部积分，估算可知积分、求导可交换，从而

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{0} K(x-\xi, t-\tau) g'(\tau)\mathrm{d}\xi = \left(g(\tau)\int_{-\infty}^{0} K(x-\xi, t-\tau)\mathrm{d}\xi\right)\Big|_0^t - \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{0} K_t(x-\xi, t-\tau)\mathrm{d}\xi$$

$g(t)$ 与 $K(x,t)$ 在 $t=0$ 时均为 0，从而得到

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{0} K(x-\xi, t-\tau) g'(\tau)\mathrm{d}\xi = -\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{0} K_t(x-\xi, t-\tau)\mathrm{d}\xi$$

同理即得

$$v(x,t) = \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\left(\int_0^{\infty} K_t(x-\xi, t-\tau)\mathrm{d}\xi - \int_{-\infty}^{0} K_t(x-\xi, t-\tau)\mathrm{d}\xi\right)$$

利用分部积分可知

$$\int K_t(x,t)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}t^{-3/2}x\mathrm{e}^{-x^2/(4t)} + C$$

其在 x 趋于 $\pm\infty$ 时均为 0，从而即有

$$v(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(t-\tau)^{-3/2}x\mathrm{e}^{-x^2/(4t-4\tau)}g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

最终得到

$$u(x,t) = g(t) + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(t-\tau)^{-3/2}x\mathrm{e}^{-x^2/(4t-4\tau)}g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

这即是显式解。

7. 3.10

直接计算可得

$$u_t = \sum_{j=1}^n (u_j)_t \prod_{k\neq j} u_k$$

而

$$u_{x_jx_j} = (u_j)_{ss}\prod_{k\neq j} u_k$$

由此

$$u_t - a^2\triangle u = \sum_{j=1}^n (u_j)_t \prod_{k\neq j} u_k - a^2\sum_{j=1}^n (u_j)_{ss}\prod_{k\neq j} u_k = \sum_{j=1}^n ((u_j)_t - a^2(u_j)_{ss})\prod_{k\neq j} u_k = 0$$

8. 3.11

(1) 直接计算可得 $(u_\lambda)_t = \lambda^2 u_t$，而 $(u_\lambda)_{xx} = \lambda^2 u_{xx}$，由此即得证。$(u_\lambda)_t = a^2(u_\lambda)_{xx}$。

(2) 直接计算可得

$$v_t = xu_{xt} + 2u_t + 2tu_{tt}$$

$$v_x = u_x + xu_{xx} + 2tu_{xt}$$

$$v_{xx} = u_{xx} + u_{xx} + xu_{xxx} + 2tu_{xxt}$$

利用 $u_t = a^2u_{xx}$ 与偏导可交换可知

$$v_t = a^2xu_{xxx} + 2a^2u_{xx} + 2ta^4u_{xxxx}$$

$$v_{xx} = 2u_{xx} + xu_{xxx} + 2ta^2u_{xxxx}$$

对比系数可发现 $v_t = a^2v_{xx}$。

9. 3.12

设 $K(x,t)$ 在 $t>0$ 时为 $(4\pi a^2t)^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x^2|/(4a^2t)}$，否则为 0。

若 $b=0$，原方程直接化为多维热方程的形式，直接得解为

$$u(x,t) = (K(\cdot,t)*\varphi)(x)$$

否则，设 $w = \mathrm{e}^{-bu/a^2}$，以下标 i 表示对 x_i 求导，计算有

$$w_t = -\frac{b}{a^2}u_tw$$

$$w_i = -\frac{b}{a^2}u_iw$$

$$w_{ii} = -\frac{b}{a^2}u_{ii}w + \frac{b^2}{a^4}u_i^2w$$

从而

$$\triangle w = -\frac{b}{a^2}(\triangle u)w + \frac{b^2}{a^4}|Du|^2 w$$

于是原方程可推出

$$-\frac{a^2}{b}w_t + \frac{a^4}{b}\triangle w = 0$$

也即

$$w_t - a^2\triangle w = 0$$

初始条件变为

$$w(x,0) = \mathrm{e}^{-b\varphi(x)/a^2}$$

由此可得解为

$$w(x,t) = \big(K(\cdot,t) * \mathrm{e}^{-b\varphi/a^2}\big)(x)$$

于是

$$u(x,t) = -\frac{a^2}{b}\ln\big(K(\cdot,t) * \mathrm{e}^{-b\varphi/a^2}\big)(x)$$

10. 3.14

设 $K(x,t)$ 在 $t>0$ 时为 $(4\pi t)^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x^2|/(4t)}$，否则为 0。

设 $v = U(u)$，以下标 i 表示对 x_i 求导，计算有

$$v_t = U'(u)u_t$$

$$v_i = U'(u)u_i$$

$$v_{ii} = U''(u)(u_i)^2 + U'(u)u_{ii}$$

从而

$$\triangle v = U'(u)\triangle u + U''(u)|Du|^2$$

于是原方程可推出

$$\frac{1}{U'(u)}v_t - \frac{1}{U'(u)}\triangle v = 0$$

也即

$$v_t - \triangle v = 0$$

初始条件变为

$$v(x,0) = U(\varphi(x))$$

由此可得解为

$$v(x,t) = (K(\cdot,t) * U(\varphi))(x)$$

由于 $U'>0$ 且其光滑，其必然为单射，从而其像集上的逆存在。利用积分中值定理，由于 K 在对 x 的全空间积分为 1 且恒正，$(K(\cdot,t)*U(\varphi))(x)$ 一定等于某 $U(\varphi(\xi)) \in U(\mathbb{R})$，由此可谈论其逆，得到结果为

$$u(x,t) = U^{-1}\big((K(\cdot,t) * U(\varphi))(x)\big)$$

8 第八次作业

1. 3.18

(1) 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，有

$$T'(t)X(x)-X''(x)T(t)=X(x)T(t)$$

也即

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)-T(t)}{T(t)}$$

与教材中例子完全相同可知对应特征值问题特征值为 n^2，对应特征函数

$$X_n(x)=\sin nx$$

直接求解可知对应的

$$T_n(t)=T_n(0)\mathrm{e}^{(1-n^2)t}$$

而验证得

$$T_n(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

由正交性可知当且仅当 $n=1$ 时结果为 1，否则为 0，从而最终得到

$$u(x,t)=T_1(t)X_1(x)=\sin x$$

(2) 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，有

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}$$

由 $T(t)$ 不恒为 0 可知此时对应的特征值问题为

$$X''+\lambda X=0,\quad X'(0)=X'(\pi)=0$$

利用定理 3.6(3) 第二种情况可知此时特征值为 n^2，对应的

$$X_n(x)=\cos nx$$

即直接有

$$T_n(t)=T_n(0)\mathrm{e}^{-n^2a^2t}$$

与之前完全类似得

$$T_n(0)=\frac{2-\delta_n^0}{\pi}\int_0^\pi \cos x\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

再利用正交性可知当且仅当 $n=1$ 时其为 1，否则为 0，从而最终得到

$$u(x,t)=T_1(t)X_1(x)=\mathrm{e}^{-a^2t}\cos x$$

2. 3.19

(2) 此时与习题 3.18(2) 相同可得特征值为 $(n\pi/l)^2$，计算得归一化的特征函数系为

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2-\delta_n^0}{l}}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

对应的 $T_n(t)$ 即为

$$T_n(t)=\mathrm{e}^{-(n\pi a/l)^2t}$$

从而 Green 函数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\xi)X_n(x)T_n(t-\tau)H(t-\tau)$$

也即

$$\frac{1}{l}\sum_{n=0}^{\infty}(2-\delta_n^0)\cos\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{e}^{-(n\pi a/l)^2(t-\tau)}H(t-\tau)$$

(3) 利用定理 3.6(3) 第二种情况可知特征值方程即

$$\tan\mu l = -\mu$$

有无穷多个 μ_n 满足方程，对应特征值 $\lambda_n = \mu_n^2$，归一化的特征函数

$$X_n(x) = \psi_n\big(\sin\mu_n x + \mu_n\cos\mu_n x\big),\quad \psi_n = \left(\int_0^l (\sin\mu_n x + \mu_n\cos\mu_n x)^2\mathrm{d}x\right)^{-1/2}$$

对应的 $T_n(t)$ 即为

$$T_n(x) = \mathrm{e}^{-\mu_n^2 a^2 t}$$

也即最终 Green 函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^2\big(\sin\mu_n\xi + \mu_n\cos\mu_n\xi\big)\big(\sin\mu_n x + \mu_n\cos\mu_n x\big)\mathrm{e}^{-\mu_n^2 a^2(t-\tau)}H(t-\tau)$$

3. 3.20

(2) 记

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{x^2}{2l}g_2(t) + \frac{(l-x)^2}{2l}g_1(t)$$

则有

$$v_t - a^2 v_{xx} = f(x,t) - \frac{x^2}{2l}g_2'(t) + \frac{(l-x)^2}{2l}g_1'(t) - \frac{1}{l}g_2(t) + \frac{1}{l}g_1(t)$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - \frac{x^2}{2l}g_2(0) + \frac{(l-x)^2}{2l}g_1(0)$$

$$v_x(0,t) = g_1(t) + \frac{0-l}{l}g_1(t) = 0$$

$$v_x(l,t) = g_2(t) - \frac{l}{l}g_2(t) = 0$$

设

$$F(x,t) = f(x,t) - \frac{x^2}{2l}g_2'(t) + \frac{(l-x)^2}{2l}g_1'(t) - \frac{1}{l}g_2(t) + \frac{1}{l}g_1(t)$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \frac{x^2}{2l}g_2(0) + \frac{(l-x)^2}{2l}g_1(0)$$

则有

$$v(x,t) = \int_0^l G(x,t;\xi,0)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

这里 G 的定义见习题 3.19(2)。

最终得到

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,t;\xi,0)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi + \frac{x^2}{2l}g_2(t) - \frac{(l-x)^2}{2l}g_1(t)$$

(3) 记

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{x+1}{l+1}g_2(t) - \frac{l-x}{l+1}g_1(t)$$

则有

$$v_t - a^2 v_{xx} = f(x,t) - \frac{x+1}{l+1}g_2'(t) - \frac{l-x}{l+1}g_1'(t)$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - \frac{x+1}{l+1}g_2(0) - \frac{l-x}{l+1}g_1(0)$$

$$v(0,t) - v_x(0,t) = g_1(t) - \frac{g_2(t)}{l+1} - \frac{lg_1(t)}{l+1} + \frac{g_2(t)}{l+1} - \frac{g_1(t)}{l+1} = 0$$

$$v(l,t) = g_2(t) - \frac{l+1}{l+1}g_2(t) = 0$$

设

$$F(x,t)=f(x,t)-\frac{x+1}{l+1}g_2'(t)-\frac{l-x}{l+1}g_1'(t)$$

$$\Phi(x)=\varphi(x)-\frac{x+1}{l+1}g_2(0)-\frac{l-x}{l+1}g_1(0)$$

则有

$$v(x,t)=\int_0^l G(x,t;\xi,0)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

这里 G 的定义见习题 3.19(3)。

最终得到

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,t;\xi,0)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi+\frac{x+1}{l+1}g_2(t)+\frac{l-x}{l+1}g_1(t)$$

4. 3.21

(1) 方程即为

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0\\u(x,0)=\varphi(x)\\u_x(0,t)=u_x(l,t)=0\end{cases}$$

与习题 3.18(2) 完全相同可知解为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\mathrm{e}^{-(n\pi a/l)^2t}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\quad \varphi_n=\frac{2-\delta_n^0}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x$$

当 $t\to\infty$ 时，由于 φ_n 一致有界，化级数为积分可知所有 $n>0$ 的项求和可被 $\mathrm{e}^{-(\pi a/l)^2x^2t}$ 从 0 到无穷的积分控制，由 Gauss 积分直接算出结果正比于 $t^{-1/2}$，由此可知极限分布

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\varphi_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\mathrm{d}x$$

(2) 方程即为

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=k(u_0-u)\\u(x,0)=\varphi(x)\\u_x(0,t)=u_x(l,t)=0\end{cases}$$

设 $v=u-u_0$ 得到

$$\begin{cases}v_t-a^2v_{xx}+kv=0\\v(x,0)=\varphi(x)-u_0\\v_x(0,t)=v_x(l,t)=0\end{cases}$$

设 $v(x,y)=X(x)T(t)$，可发现

$$X(x)T'(t)-a^2X''(x)T(t)+kX(x)T(t)=0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}+k$$

关于 X 的特征值问题可直接求解出特征值 $(n\pi/l)^2$，对应特征函数

$$X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}$$

即有对应的

$$T_n(t)=T_n(0)\mathrm{e}^{-(k+n^2\pi^2/l^2)a^2t}$$

而记 $\varphi_n = T_n(0)$，有

$$\varphi_n = \frac{2-\delta_n^0}{l}\int_0^l (\varphi(x)-u_0)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

利用正交性可发现第二项只在 $n=0$ 时有影响，也即

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad n\ge 1$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x - u_0$$

由此可知

$$v(x,t) = \left(\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x - u_0\right)\mathrm{e}^{-kt} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{e}^{-(k+n^2\pi^2/l^2)a^2t}$$

于是

$$u(x,t) = (1-\mathrm{e}^{-kt})u_0 + \mathrm{e}^{-kt}\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{e}^{-(k+n^2\pi^2/l^2)a^2t}$$

与 (1) 同理得到

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_0$$

9 第九次作业

1. 3.25

(1) 在 v 的最大值点 (x_0,t_0) 处，若其在内部，由于 Hessian 阵半负定，即可知

$$\triangle u(x_0,t_0)\le 0$$

以此替换定理 3.8 证明中的 $u_{xx}(x_0,t_0)\le 0$，其他过程完全相同。

(2) 直接计算可知

$$v_t - a^2\triangle v = \phi'(u)u_t - a^2\phi''(u)|Du|^2 - a^2\phi'(u)\triangle u = -a^2\phi''(u)|Du|^2$$

由凸函数二阶导非负即可得到右侧小于等于 0，从而得证。

(3) 以 u_i 表示 u_{x_i}，直接计算可知

$$v_t - a^2\triangle v = 2a^2\sum_i u_iu_{it} + 2u_tu_{tt} - 2a^4\sum_j\sum_i(u_iu_{ij})_j - 2a^2\sum_j(u_tu_{tj})_j$$

于是

$$\frac{1}{2}(v_t - a^2\triangle v) = a^2\sum_i u_iu_{it} + u_tu_{tt} - a^4\sum_{i,j}(u_{ij}^2 + u_iu_{ijj}) - a^2\sum_j(u_{tj}^2 + u_tu_{tjj})$$

由条件可知 $a^2\sum_j u_{jj} = u_t$，同对 x_i、t 求导可得上式化为

$$\frac{1}{2}(v_t - a^2\triangle v) = a^2\sum_i u_iu_{it} + u_tu_{tt} - a^4\sum_{i,j}u_{ij}^2 - a^2\sum_i u_iu_{it} - a^2\sum_j u_{tj}^2 - u_tu_{tt}$$

于是

$$v_t - a^2\triangle v = -a^4\sum_{i,j}u_{ij}^2 - a^2\sum_j u_{t,j}^2 \le 0$$

得证。

2. 3.27

由条件可知需要证明若 $u-v$ 在 Γ 上 ≤ 0，且

$$(u-v)_t-(u-v)_{xx}+|u_x|-|v_x|\leq 0$$

则 $u-v\leq 0$ 在 Q_T 恒成立。

由于

$$|u_x|-|v_x|\geq -|u_x-v_x|$$

可知只需证明 w 在 Γ 上 ≤ 0 且 $w_t-w_{xx}-|w_x|\leq 0$ 时有 $w\leq 0$ 恒成立。

与定理 3.8 的证明过程完全相同。先考虑 $w_t-w_{xx}-|w_x|<0$ 的情况，此时不在 Γ 上的极值点满足 $w_t\geq 0$、$w_{xx}\leq 0$、$w_x=0$，从而矛盾；对一般情况构造辅助函数 $v=w-\varepsilon t$，并取 $\varepsilon\to 0^+$ 得到结论。

3. 3.30

(1) 设

$$M=\max_{x\in[0,l]}\varphi'(x)\leq\|\varphi\|_{C^1[0,l]}$$

我们先证明 $u(x,t)\leq Mx$。

考虑定解问题

$$v_t-v_{xx}=0,\quad v(x,0)=Mx,\quad v(0,t)=0,\quad v(l,t)=Ml$$

可发现其以 $v(x,t)=Mx$ 为解。利用 $\varphi(0)=0$ 由微分中值定理可知 $\varphi(x)\leq Mx$，且 $0\leq Ml$ 成立，于是利用比较定理即得结论。

若 $u_x(0,t_0)>M$，由于 $u(0,t_0)=0$，考虑 Taylor 公式利用极限保序性可发现存在 x 使得 $u(x,t_0)>Mx$，矛盾，于是 $\max_{(0,T)}u_x(0,T)\leq M$。

将上方的 M 替换为 $-M$，同理由比较定理 $u(x,t)\geq -Mx$，进一步得到 $\min_{(0,T)}u_x(0,T)\geq -M$。

考虑定解问题

$$v_t-v_{xx}=0,\quad v(x,0)=M(l-x),\quad v(0,t)=Ml,\quad v(l,t)=0$$

对 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(l)$ 利用微分中值定理可知 $\varphi(x)\leq M(l-x)$，从而得到 $u(x,t)\leq M(l-x)$，进一步由 l 处 Taylor 公式有

$$u_x(l,t)\geq -M$$

同理可得 $u_x(l,t)\leq M$，最终综合得到

$$\max_{(0,T)}|u_x(0,T)|\leq M\leq\|\varphi\|_{C^1[0,l]},\quad \max_{(0,T)}|u_x(l,T)|\leq M\leq\|\varphi\|_{C^1[0,l]}$$

(2) 记 $v=u_x$，利用偏导可交换可发现

$$v_t-v_{xx}=0$$

此外，由于 (1) 中已证，在 $x=0$ 或 l 的边界上 $|v(x,t)|\leq\|\varphi\|_{C^1[0,l]}$，而 $t=0$ 时

$$|v(x,0)|=|\varphi'(x)|\leq\|\varphi\|_{C^1[0,l]}$$

利用极值原理即得 $|v(x,t)|\leq\|\varphi\|_{C^1[0,l]}$ 在区域中恒成立。

4. 3.33

(1) 由于 $x=0$ 时 $-u_x+hu=hu_0>0$，利用引理 3.15 可知 $u(x,t)\geq 0$。设 $v=u_0-u$，有

$$v_t-v_{xx}=0,\quad v(x,0)=u_0,\quad (-v_x+hv)\big|_{x=0}=0,\quad v\big|_{x=l}=u_0$$

再次利用引理 3.15 可知 $v(x,t)\geq 0$，从而得证。

(2) 若 $h_1 > h_2$，设 $v = u_{h_1} - u_{h_2}$，$a = h_1 - h_2$，有

$$v_t - v_{xx} = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v\big|_{x=l} = 0$$

且 $x = 0$ 时

$$v_x + a(u_0 - u_{h_2}) + h_1(u_0 - v) = 0$$

上式可以变形成

$$-v_x + h_1 v = h_1 u_0 + a(u_0 - u_{h_2})$$

由于 $u_{h_2} \le u_0$、$a > 0$、$h_1 u_0 > 0$，即可利用引理 3.15 得到 $v(x,t) \ge 0$。

5. 3.35

作差可发现只需证明 $f(x,t) = \varphi(x) = 0$ 时只有零解。设

$$\mathcal{L}v = v_t - av_{xx} + bv_x + cv$$

记 $Q_T^L = (-L, L) \times (0, T]$ 对应的抛物边界 $\partial_p Q_T^L$，先证明若 Q_T^L 上 $\mathcal{L}v \le 0$、$\partial_p Q_T^L$ 上 $v \le 0$，则 Q_L^T 上 $v \le 0$：

- 先说明 $\mathcal{L}v < 0$ 时成立。若 v 最大值在抛物边界上，则已经得证，否则若 v 最大值为正，有此处

  $$v_t \ge 0, \quad v_{xx} \le 0, \quad v_x = 0, \quad v > 0$$

  从而此处

  $$Lv = v_t - av_{xx} + cv \ge 0$$

  于是矛盾。
- 在 $\mathcal{L}v \le 0$ 时，构造辅助函数 $w = v - \varepsilon t$，可发现其符合条件，从而 Q_T^L 上 $v - \varepsilon t \le 0$ 对任何 ε 成立，令 $\varepsilon \to 0$ 即可得到 $v \le 0$。

若 u 为原方程有界解，设

$$A = \sup_{\mathbb{R}_+^2} |a(x,t)|, \quad B = \sup_{\mathbb{R}_+^2} |b(x,t)|, \quad M = \sup_{\mathbb{R}_+^2} |u(x,t)|$$

设

$$w = \frac{M}{L^2} \mathrm{e}^t (x^2 + 2At + B^2)$$

计算可发现

$$\mathcal{L}w = \frac{M}{L^2} \mathrm{e}^t (2A + x^2 + 2At + B^2 - 2a + 2bx + cx^2 + 2Act + B^2 c)$$

整理得

$$\mathcal{L}w = \frac{M}{L^2} \mathrm{e}^t (2(A - a) + (x + b)^2 + 2At + (B^2 - b^2) + cx^2 + 2Act + B^2 c)$$

由每项均正可知内部 $\mathcal{L}w \ge 0$。

在 $\partial_p Q_T^L$ 上，$t = 0$ 时

$$w = \frac{M}{L^2}(x^2 + B^2) \ge 0$$

$x = \pm L$ 时

$$w = \frac{M}{L^2} e^t (L^2 + 2At + B^2) \ge M\mathrm{e}^t \ge M$$

从而考虑 $v = w + u$ 与 $v = w - u$ 可知在 Q_T^L 上

$$|u(x,t)| \le w(x,t)$$

综合也即当 $x \in [-L, L]$、$t \in [0, T]$ 时

$$|u(x,t)| \le \frac{M}{L^2} e^t (x^2 + 2At + B^2)$$

令 $L \to \infty$ 即可得到 $u(x,t) = 0$。

10 第十次作业

1. 3.36

在第一个方程两端同乘 $2u_t$ 并在 Q_τ 上积分得到

$$2\int_0^\tau\int_0^l u_t^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t-2\int_0^\tau\int_0^l u_{xx}u_t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^\tau\int_0^l 2u_tf\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

第二项对 x 分部积分并利用边界条件可得

$$-2\int_0^\tau\int_0^l u_{xx}u_t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=2\int_0^\tau\int_0^l u_xu_{xt}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^\tau\int_0^l (u_x^2)_t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^l u_x^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x-\int_0^l(\varphi')^2\,\mathrm{d}x$$

对第一个等式右侧利用基本不等式即得到

$$2\int_0^\tau\int_0^l u_t^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^l u_x^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\le\int_0^l(\varphi')^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\tau\int_0^l u_t^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^\tau\int_0^l f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

也即

$$\int_0^\tau\int_0^l u_t^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^l u_x^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\le\int_0^l(\varphi')^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\tau\int_0^l f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

取 $\tau=T$ 并去除左侧第二项有

$$\int_0^T\int_0^l u_t^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\int_0^l(\varphi')^2\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^l f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

去除左侧第一项有

$$\int_0^l u_x^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\le\int_0^l(\varphi')^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\tau\int_0^l f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\int_0^l(\varphi')^2\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^l f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

上两式相加并对 τ 取上界得结论。

2. 3.37

在第一个方程两端同乘 $2u$ 并在 Q_τ 上积分，与定理 3.17 证明类似得到

$$\int_0^l u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x-2a^2\int_0^\tau\int_0^l uu_{xx}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\int_0^l\varphi^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\tau\int_0^l u^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^\tau\int_0^l f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

分部计算，利用 $x=0$ 时 $u_x=\alpha u$，$x=l$ 时 $u_x=-\beta u$ 可知

$$\begin{aligned}-\int_0^\tau\int_0^l uu_{xx}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\int_0^\tau\int_0^l u_x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^\tau u(l,t)u_x(l,t)\,\mathrm{d}t+\int_0^\tau u(0,t)u_x(0,t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\tau\int_0^l u_x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\beta\int_0^\tau u^2(l,t)\,\mathrm{d}t+\alpha\int_0^\tau u^2(0,t)\,\mathrm{d}t\ge\int_0^\tau\int_0^l u_x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}$$

代入得

$$\int_0^l u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x+2a^2\int_0^\tau\int_0^l u_x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\int_0^l\varphi^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\tau\int_0^l u^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^\tau\int_0^l f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

此式与定理 3.17 证明中完全相同，由此相同得到结论

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^l u^2(x,t)\,\mathrm{d}x+2a^2\int_0^T\int_0^l u_x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 2\mathrm{e}^T\left(\int_0^l\varphi^2\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^l f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)$$

由此分别考虑左侧的两项，取 $M=2\mathrm{e}^T+a^{-2}\mathrm{e}^T$ 即可得到结论。

3. 3.38

在第一个方程两端同乘 $2u$ 并在 Q_τ 上积分，与定理 3.17 证明类似，并将 b,c 相关的项移到右侧得到

$$\int_0^l u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x+2a^2\int_0^\tau\int_0^l u_x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\le \int_0^l \varphi^2 \mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_0^l u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t - 2\int_0^\tau \int_0^l bu_x u \mathrm{d}x\mathrm{d}t - 2\int_0^\tau \int_0^l cu^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

对最后一项直接逐点放缩可知

$$-2\int_0^\tau \int_0^l cu^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le 2C\int_0^\tau \int_0^l u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

对第二项也使用逐点放缩，利用基本不等式，对任何 $\varepsilon > 0$ 有

$$-2\int_0^\tau \int_0^l bu_x u \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \frac{B}{\varepsilon}\int_0^\tau \int_0^l u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + B\varepsilon \int_0^\tau \int_0^l u_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

取 $\varepsilon = B^{-1}a^2$ 可得 (对 $B = 0$ 的情况可单独讨论发现下式仍成立)

$$-2\int_0^\tau \int_0^l bu_x u \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \frac{B^2}{a^2}\int_0^\tau \int_0^l u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + a^2 \int_0^\tau \int_0^l u_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

代入并整理得到

$$\int_0^l u^2(x,\tau)\mathrm{d}x + a^2\int_0^\tau \int_0^l u_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \int_0^l \varphi^2 \mathrm{d}x + \left(\frac{B^2}{a^2} + 2C + 1\right)\int_0^\tau \int_0^l u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

记 $M_0 = \frac{B^2}{a^2} + 2C + 1$，可发现

$$\int_0^l u^2(x,\tau)\mathrm{d}x \le \int_0^l \varphi^2 \mathrm{d}x + M_0\int_0^\tau \int_0^l u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

与定理 3.17 证明完全类似由 Gronwall 不等式得到

$$\int_0^\tau \int_0^l u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le M_0^{-1}\left(\mathrm{e}^{M_0 t} - 1\right)\left(\int_0^l \varphi^2 \mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)$$

由此

$$\int_0^l u^2(x,\tau)\mathrm{d}x + a^2\int_0^\tau \int_0^l u_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \mathrm{e}^{M_0 t}\left(\int_0^l \varphi^2 \mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)$$

对左侧两项分别估算即有

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x \le \mathrm{e}^{M_0 T}\left(\int_0^l \varphi^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)$$

$$\int_0^T \int_0^l u_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le a^{-2}\mathrm{e}^{M_0 T}\left(\int_0^l \varphi^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)$$

由此取 $M = (1 + a^{-2})\mathrm{e}^{M_0 t}$ 即得证。

11 第十一次作业

1. 4.1

   (1) 由于 $u(x(t),t)_t = u_t + x'(t)u_x$，当 $x'(t) = 2$，即 $x - 2t = c$ 时，u 在其上为常数，由此可得 $u = f(x - 2t)$，再根据初值得到 $u = (x - 2t)^2$。

   (3) 由于 $u'(x(t),t) = u_t + x'(t)u_x$，考虑 $x'(t) = -\frac{1}{2}$，即 $t = -2x + c$。由此考虑 $u(x, -2x + c)$，计算得在此线上有常微分方程 (下方导数指线上对 x)

   $$xu - u' = 0$$

   求解得到

   $$u(x, -2x + c) = C\mathrm{e}^{x^2/2}$$

而由于 $x=\frac{c}{2}$ 时对应的

$$Ce^{c^2/8}=ce^{c^2/8}$$

可得

$$C=c$$

代入得到

$$u(x,t)=u(x,-2x+(t+2x))=(t+2x)e^{x^2/2}$$

若 u 在此线上为常数，仍可从 $u'=0$ 得到方程成立，由此可设 $u=f(2x+t)$，结合初值条件得到

$$u=(2x+t)e^{x^2/2}$$

(5) 与 (3) 同理，由于

$$u'(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t),t)=u_t+x_1'(t)u_{x_1}+\cdots+x_n'(t)u_{x_n}$$

考虑 $x_i'(t)=A_i$，即直线 $x=\vec{A}t+\vec{C}_0$。在此线上有常微分方程 $u'+cu=0$，于是

$$u(\vec{A}t+\vec{C}_0,t)=Ce^{-ct}$$

代入 $t=0$ 时 $u(\vec{C}_0,0)=\varphi(\vec{C}_0)=C$，于是

$$u(x,t)=u(\vec{A}t+(x-\vec{A}t),t)=\varphi(x-\vec{A}t)e^{-ct}$$

2. 4.3

(1) 由其凸连通，其与凸集 $\{(x,y)\mid x=c\}$ 的交为凸集，于是为一个区间，而在此区间上 $(u_x)_y=0$，从而其为常数。由此，u_x 对每个固定的 x 为常数，记为 $f(x)$，同理 u_y 只与 y 有关，记为 $g(y)$。由于 u 可二阶导，f 与 g 均为连续函数。

设 $C=u(x_0,y_0)$，由凸连通性，任何 (x,y) 可与 (x_0,y_0) 用线段连接，而此线段为

$$\gamma(t)=((x-x_0)t+x_0,(y-y_0)t+y_0),\quad t\in[0,1]$$

利用 N-L 公式有

$$u(x,y)=u(\gamma(1))=u(\gamma(0))+\int_0^1\frac{\mathrm{d}u(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=C+\int_0^1\frac{\mathrm{d}u(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

进一步计算得导数为 $(x-x_0)u_x(\gamma(t))+(y-y_0)u_y(\gamma(t))$，由此原式为

$$\begin{aligned}&C+\int_0^1(x-x_0)u_x(\gamma(t))\mathrm{d}t+\int_0^1(y-y_0)u_y(\gamma(t))\mathrm{d}t\\=&C+\int_0^1(x-x_0)f((x-x_0)t)\mathrm{d}t+\int_0^1(y-y_0)g((y-y_0)t)\mathrm{d}t\\=&C+\int_{x_0}^x f(s)\mathrm{d}s+\int_{y_0}^y g(r)\mathrm{d}r\end{aligned}$$

记

$$F(x)=C+\int_{x_0}^x f(s)\mathrm{d}s,\quad G(y)=\int_{y_0}^y g(r)\mathrm{d}r$$

即得到 $u(x,y)=F(x)+G(y)$，且可直接验证这样形式的 u 为解，从而这就是全部解。

(2) 直接计算发现 $\xi=x+at$、$\eta=x-at$ 时 $x=\frac{1}{2}(\eta+\xi)$、$t=\frac{1}{2a}(\eta-\xi)$

$$u_\xi=x_\xi u_x+t_\xi u_t=\frac{1}{2}u_x-\frac{1}{2a}u_t$$

$$u_{\xi\eta}=\frac{1}{2}(x_\eta u_{xx}+t_\eta u_{xt})-\frac{1}{2a}(x_\eta u_{tx}+t_\eta u_{tt})=\frac{1}{4}u_{xx}-\frac{1}{4a^2}u_{tt}$$

由此其为 0 与 $u_{xx}=a^2u_{tt}$ 等价。

(3) 利用 (1) 即得通解为

$$u(x,t)=F(\xi)+G(\eta)=F(x+at)+G(x-at)$$

3. 4.7

将方程组重新分解为

$$u_t-au_x=v,\quad u(x,0)=\varphi(x)$$

$$v_t+av_x=f,\quad v(x,0)=\psi(x)-a\varphi'(x)$$

可以发现分解前后的方程与边界条件都等价。

对第二个方程利用特征线法，其特征线 $x=c+at$，过 (x_0,t_0) 的特征线为

$$x_1(t)=x_0-at_0+at$$

此特征线上

$$\frac{\mathrm{d}v(x_1(t),t)}{\mathrm{d}t}=f(x_1(t),t)$$

由此

$$v(x_0,t_0)=v(x_1(t_0),t_0)=v(x_0-at_0,0)+\int_0^{t_0}f(x_1(t),t)\mathrm{d}t$$

化简得到

$$v(x,t)=\psi(x-at)-a\varphi'(x-at)+\int_0^t f(x-at+a\tau,\tau)\mathrm{d}\tau$$

对第一个方程，由于特征线为 $x=c-at$，完全类似求解得到

$$u(x,t)=\varphi(x+at)+\int_0^t v(x+at-as,s)\mathrm{d}s$$

将积分展开得到

$$\varphi(x+at)+\int_0^t\psi(x+at-2as)\mathrm{d}s-a\int_0^t\varphi'(x+at-2as)\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^s f(x+at-2as+a\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$

第二项与教材完全相同可积分变换为

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s$$

第三项同理变换可发现其为 $-\frac{1}{2}(\varphi(x+at)-\varphi(x-at))$，由此一三两项合并为

$$\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))$$

最后，对第四项进行积分换元 $\xi=x+at-2as+a\tau$、$\tau=\tau$，则有 $\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau=2a\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$，再考虑给定 τ 后 ξ 的范围将区域对应变换即可发现结果成为

$$\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

综合得到结论，与通解公式一致。

4. 4.8

记 $\xi(x,t)=x+at$、$\eta(x,t)=x-at$。

定理 4.2：由变限积分可知 C^k 函数的积分是 C^{k+1} 的，由此 $u\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$。直接计算可知 (注意 $\tau=t$ 时 f 的积分为 0)

$$u_x=\frac{1}{2}(\varphi'(\xi)+\varphi'(\eta))+\frac{1}{2a}(\psi(\xi)-\psi(\eta))+\frac{1}{2a}\int_0^t(f(\xi-a\tau,\tau)-f(\eta+a\tau,\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$u_t = \frac{a}{2}(\varphi'(\xi)-\varphi'(\eta)) + \frac{1}{2}(\psi(\xi)+\psi(\eta)) + \frac{1}{2}\int_0^t (f(\xi-a\tau,\tau)+f(\eta+a\tau,\tau))\mathrm{d}\tau$$

进一步计算得到 (计算 u_{xt} 是为了后续说明 $C^2(\mathbb{R}\times\bar{\mathbb{R}}_+)$)

$$u_{xt} = \frac{a}{2}(\varphi''(\xi)-\varphi''(\eta)) + \frac{1}{2}(\psi'(\xi)+\psi'(\eta)) + \frac{1}{2}\int_0^t (f_x(\xi-a\tau,\tau)+f_x(\eta+a\tau,\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2}(\varphi''(\xi)+\varphi''(\eta)) + \frac{1}{2a}(\psi'(\xi)-\psi'(\eta)) + \frac{1}{2a}\int_0^t (f_x(\xi-a\tau,\tau)-f_x(\eta+a\tau,\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$u_{tt} = \frac{a^2}{2}(\varphi''(\xi)+\varphi''(\eta)) + \frac{a}{2}(\psi'(\xi)-\psi'(\eta)) + f(x,t) + \frac{a}{2}\int_0^t (f_x(\xi-a\tau,\tau)-f_x(\eta+a\tau,\tau))\mathrm{d}\tau$$

于是直接代入可发现 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$，且 $u(x,0)=\varphi(x)$、$u_t(x,0)=\psi(x)$。

此外，由于各一、二阶导均为 φ 至多二阶导、ψ 至多一阶导与 f 至多一阶导积分，它们连续，且在 $t\to 0$ 时均保持连续性，由此得证光滑性要求。

推论 4.3：将 u 的表达式改写为

$$u = \frac{1}{2}(\varphi(\xi)+\varphi(\eta)) + \frac{1}{2a}\int_\eta^\xi \psi(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{\eta+a\tau}^{\xi-a\tau} f(s,\tau)\mathrm{d}s$$

利用 $\eta(-x,t)=-\xi(x,t)$、$\xi(-x,t)=-\eta(x,t)$，代入 $-x$ 可知

$$u(-x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(-\xi)+\varphi(-\eta)) + \frac{1}{2a}\int_{-\xi}^{-\eta} \psi(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-\xi+a\tau}^{-\eta-a\tau} f(s,\tau)\mathrm{d}s$$

将 s 换元为 $-s$ 得到

$$u(-x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(-\xi)+\varphi(-\eta)) + \frac{1}{2a}\int_{\eta}^{\xi} \psi(-s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{\eta+a\tau}^{\xi-a\tau} f(-s,\tau)\mathrm{d}s$$

由此可得奇偶性保持。同理

$$u(x+T,t) = \frac{1}{2}(\varphi(\xi+T)+\varphi(\eta+T)) + \frac{1}{2a}\int_{\eta+T}^{\xi+T} \psi(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{\eta+T+a\tau}^{\xi+T-a\tau} f(s,\tau)\mathrm{d}s$$

换元 s 为 $s-T$ 得到

$$u(x+T,t) = \frac{1}{2}(\varphi(\xi+T)+\varphi(\eta+T)) + \frac{1}{2a}\int_{\eta}^{\xi} \psi(s+T)\mathrm{d}s + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{\eta+a\tau}^{\xi-a\tau} f(s+T,\tau)\mathrm{d}s$$

由此可得周期性保持。

5. 4.14

利用线性叠加原理，设 $u(x,y,z,t)=u_1(x,t)+u_2(y,t)+u_3(z,t)$，代入它们分别满足的一维问题可得到

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+at)+f(x-at))$$

$$u_2(y,t) = \frac{1}{2}(g(y+at)+g(y-at)) + \frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u_3(z,t) = \frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

由此

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{2}(f(x+at)+f(x-at)) + \frac{1}{2}(g(y+at)+g(y-at)) + \frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

为解，再由唯一性得其为唯一解。

6. 4.15

直接计算可得

$$\frac{\partial\Phi(\alpha\cdot x+at)}{\partial x_i}=\alpha_i\Phi'(\alpha\cdot x+at)$$
$$\frac{\partial^2\Phi(\alpha\cdot x+at)}{\partial x_i^2}=\alpha_i^2\Phi''(\alpha\cdot x+at)$$
$$\frac{\partial\Phi(\alpha\cdot x+at)}{\partial t}=a\Phi'(\alpha\cdot x+at)$$
$$\frac{\partial^2\Phi(\alpha\cdot x+at)}{\partial t^2}=a^2\Phi''(\alpha\cdot x+at)$$

从而利用 $\sum_i\alpha_i^2=1$ 可得

$$\frac{\partial^2\Phi(\alpha\cdot x+at)}{\partial t^2}=a^2\triangle_x(\Phi(\alpha\cdot x+at))$$

即得证。

7. 4.17

(1) 先考虑满足 $v(x,y,0)=x^2y$、$v_t(x,y,0)=0$ 的问题 $v_{tt}-a^2(v_{xx}+v_{yy})=0$。由于 $v_{yy}=0$ 在 $t=0$ 时恒成立，假设其在全空间成立可得到解

$$v(x,y,t)=\frac{1}{2}y((x+at)^2+(x-at)^2)$$

代入得此结果的确为解。

根据线性叠加原理，$u-v$ 只与 x 有关，由此可直接根据一维情况得到解，综合可得

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2}y((x+at)^2+(x-at)^2)+\frac{1}{2}((x+at)^3+(x-at)^3)$$

也即

$$u(x,y,t)=x^2(x+y)+a^2t^2(y+3x)$$

(2) 将原方程拆分为 $u=u_1+u_2+u_3$，满足

$$u_1\big|_{t=0}=x^2,\quad u_2\big|_{t=0}=y^2z,\quad u_3\big|_{t=0}=0$$
$$(u_1)_t\big|_{t=0}=0,\quad (u_2)_t\big|_{t=0}=0,\quad (u_3)_t\big|_{t=0}=1+y$$

u_1 与 u_3 均为一维问题，而由 (1) 可知 u_2 的解，综合得到

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{2}((x+at)^2+(x-at)^2)+\frac{1}{2}z((y+at)^2+(y-at)^2)+\frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}(1+\xi)\mathrm{d}\xi$$

也即

$$u(x,y,z,t)=x^2+y^2z+a^2t^2(1+z)+t(1+y)$$

8. 4.19

设 $u(x,t)=v(x,t)+g(t)x$，则有 (条件范围与 u 相同)

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,t)-g''(t)x,\quad v(x,0)=\varphi(x)-g(0)x,\quad v_t(x,0)=\psi(x)-g'(0)x,\quad v_x(0,t)=0$$

将前三个式子的右端分别记作 $h(x,t)$、$\phi(x)$、$\eta(x)$。

进行偶延拓，在半空间定义 $\bar{h}(x,t)=h(|x|,t)$，在实轴定义 $\bar{\phi}(x)=\phi(|x|)$、$\bar{\eta}(x)=\eta(|x|)$，对应解可以写为

$$\bar{v}(x,t)=\frac{1}{2}(\bar{\phi}(x+at)+\bar{\phi}(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\bar{\eta}(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\bar{h}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

由推论 4.3 可知 $\bar{v}$ 是偶函数，从而自然满足 $\bar{v}_x(0,t)=0$，$x>0$ 时其可写为

$$v(x,t)=\frac{1}{2}(\phi(x+at)+\phi(|x-at|))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\eta(|\xi|)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}h(|\xi|,\tau)\mathrm{d}\xi$$

下面考察相容性条件。首先，这样得到的解有

$$v(0,t)=\phi(at)+\frac{1}{a}\int_0^{at}\eta(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_0^{a(t-\tau)}h(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

从而 $t\to 0$ 时其为 $\phi(0)$，连续性条件满足。而

$$v_t(0,t)=a\phi'(at)+\eta(t)+\int_0^t h(a(t-\tau),\tau)\mathrm{d}\tau$$

于是 v_t 连续对应的相容性条件为 $\phi'(0)=0$，也即 $\varphi'(0)=g(0)$。验证得 v_x 连续对应的条件相同。进一步计算得

$$v_{tt}(0,t)=a^2\phi''(at)+\eta'(t)+h(0,t)$$

而 $v_{xx}(x,0)=\phi''(x)$，于是 0 处方程满足对应的条件为 $\eta'(0)=0$，也即 $\psi'(0)=g'(0)$.

综合上述讨论，二阶连续性等价于条件 $f\in C$、$\varphi\in C^2$、$\psi\in C^1$、$g\in C^1$，且

$$\varphi'(0)=g(0),\quad \psi'(0)=g'(0)$$

我们事实上还可以要求更高阶的连续性。假设 $f\in C^1$、$\varphi\in C^3$、$\psi\in C^2$、$g\in C^2$，考虑零点处的 $v_{xtt}-a^2v_{xxx}$，其一方面为 $h_x(x,t)$ 的极限，另一方面考虑 $x=0$ 时的逼近可得三阶连续性还额外要求 $h_x(0,0)=-a^2\phi'''(0)$，也即

$$f_x(0,0)+a^2\varphi'''(x)-g''(0)=0$$

12 第十二次作业

1. 4.22

   $u(x,y,t)=0$ 等价于其特征锥与 xy 平面的交落在 Ω 中，考虑几何也即

   $$|x\pm 2t|\le 1,\quad |y\pm 2t|\le 1$$

   给定 $t>0$ 可得 $x\in[2t-1,1-2t]$、$y\in[2t-1,1-2t]$，即 (x,y,t) 落在 Ω 为底，$(0,0,\frac{1}{2})$ 为顶的锥中。

2. 4.26

   从第一个方程与之前一维情况相同可得

   $$u(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$$

   由初始条件可知 $f(t)+g(-t)=\varphi(t)$、$f(2t)+g(0)=\psi(t)$，不妨设 $g(0)=0$ (对应的常数加到 f 中) 即得

   $$u(x,t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)-\psi\left(\frac{t-x}{2}\right)+\varphi(t-x)$$

   利用 $\varphi(0)=\psi(0)$ 可验证的确为解，从而决定区域为 $\frac{x+t}{2}\in[0,a]$、$\frac{t-x}{2}\in[0,a]$ 与 $t-x\in[0,a]$ 之交，再由 $x\in[0,t]$ 可知区域为

   $$\{(x,t)\mid t>0,x\in(0,t)\}\cap\{(x,t)\mid t-a\le x\le 2a-t\}$$

3. 4.34

(1) 对第二边值问题，作差可知只需证明初边值为 0 时只有零解，也即满足

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

的 u 只能为 0。

第一式两边同乘 $2u_t$ 并对 $x \in [0,l]$、$t \in [0,\tau]$ 积分，计算可知

$$\int_0^\tau \int_0^l \big((u_t^2)_t + a^2(u_x^2)_t - 2a^2(u_t u_x)_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

第三项对 x 积分即得

$$\int_0^\tau \int_0^l \big((u_t^2)_t + a^2(u_x^2)_t\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

先对 t 积分，利用 $t=0$ 时 $u_x = u_t = 0$ 可得

$$\int_0^l \big(u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\big)\,\mathrm{d}x = 0$$

由于此式对任何 l, τ 成立，即有 $u_t = u_x = 0$，而根据 $u(x,0) = 0$ 积分即得 $u(x,t) = 0$。

(2) 对第三边值问题，作差可知只需证明初边值为 0 时只有零解，也即满足

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad (-u_x + \alpha u)\big|_{x=0} = (u_x + \beta u)\big|_{x=l} = 0$$

的 u 只能为 0，这里 α, β 为正常数。

与 (1) 相同有

$$\int_0^\tau \int_0^l \big((u_t^2)_t + a^2(u_x^2)_t - 2a^2(u_t u_x)_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

前两项对 t 积分，第三项对 x 积分得到

$$\int_0^l \big(u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\big)\,\mathrm{d}x = 2a^2 \int_0^\tau \big(u_t u_x(l,t) - u_t u_x(0,t)\big)\,\mathrm{d}t$$

进一步利用边界条件写为

$$\int_0^l \big(u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\big)\,\mathrm{d}x = -2a^2 \int_0^\tau \big(\beta u_t u(l,t) + \alpha u_t u(0,t)\big)\,\mathrm{d}t = -a^2(\beta u^2(l,\tau) + \alpha u^2(0,\tau))$$

而右侧非正，左侧非负，由此只能全为 0，与 (1) 相同得到证明。

4. 4.37

(1) 取

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad t_0 = t + \frac{x_2 - x_1}{2a}, \quad \tau = t$$

代入定理 4.7' 的 $f = 0$ 情况计算可得

$$\int_{x_1}^{x_2} (u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t))\,\mathrm{d}x \le \int_{x_1 - at}^{x_2 + at} |\psi^2 + a^2(\varphi')^2|\,\mathrm{d}x$$

这即是结论。

(2) 在右侧极限存在时，(1) 中取 $x_1 \to -\infty$、$x_2 \to \infty$，左侧利用单调收敛定理可知极限存在，从而得证。

(3) 考虑 $\Omega_t = \{(x,t) \mid t \in [0,\tau], x \in [x_1 - at, x_2 + at]\}$，第一式两端同乘 $2u_t$ 后在 Ω_t 上积分得到

$$\int_{\Omega_t} \big((u_t^2 + a^2 u_x^2)_t - 2a^2(u_t u_x)_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

利用 Gauss-Green 公式将其化为 (这里定向为顺时针)

$$\oint_{\partial\Omega_t} 2a^2 u_t u_x\,\mathrm{d}t + (u_t^2 + a^2 u_x^2)\,\mathrm{d}x = 0$$

进一步写为

$$\int_{x_1-a\tau}^{x_2+a\tau}\left(u_t^2(x,\tau)+a^2u_x^2(x,\tau)\right)\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2}\left(\psi^2+a^2(\varphi')^2\right)\mathrm{d}x+I_3$$

其中 I_3 为侧边 $\Gamma_\tau^1=\{x=x_1-at,t\in[0,\tau]\}$ 与 $\Gamma_\tau^2=\{x=x_1+at,t\in[0,\tau]\}$ 上的积分。两侧边上分别有 $\mathrm{d}x=-a\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}x=a\mathrm{d}t$，于是

$$I_3=a\int_{\Gamma_\tau^1}(u_t-au_x)^2\mathrm{d}t-a\int_{\Gamma_\tau^2}(u_t+au_x)^2\mathrm{d}t$$

利用定向可发现 Γ_τ^1 上 $\mathrm{d}t$ 为负、Γ_τ^2 上 $\mathrm{d}t$ 为正，从而 $I_3\le 0$，由此

$$\int_{x_1-a\tau}^{x_2+a\tau}\left(u_t^2(x,\tau)+a^2u_x^2(x,\tau)\right)\mathrm{d}x\ge\int_{x_1}^{x_2}\left(\psi^2+a^2(\varphi')^2\right)\mathrm{d}x$$

再令 $x_1\to-\infty$、$x_2\to\infty$ 可得与 (2) 相反的不等式，综合得结论。

5. 4.38

(1) 由习题 4.37(2) 即得

$$k(t)+p(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\psi^2+a^2(\varphi')^2\right)\mathrm{d}x$$

从而与 t 无关。

(2) 由 D'Alembert 公式可知

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

直接计算得

$$u_t(x,t)=\frac{a}{2}\big(\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)\big)+\frac{1}{2}\big(\psi(x+at)+\psi(x-at)\big)$$
$$au_x(x,t)=\frac{a}{2}\big(\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)\big)+\frac{1}{2}\big(\psi(x+at)-\psi(x-at)\big)$$
$$u_t^2(x,t)-a^2u_x^2(x,t)=(a\varphi'(x+at)+\psi(x+at))(-a\varphi'(x+at)+\psi(x+at))$$

设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 的支集均在 $[-M,M]$ 中，则 $t>\frac{M}{a}$ 时，$x+at$、$x-at$ 距离超过 $2M$，至少一个不在支集中，于是 $u_t^2(x,t)-a^2u_x^2(x,t)=0$，积分即得 $k(t)=p(t)$。

13 第十三次作业

1. 4.40

(3) 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入得到存在 λ 使得

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$

考虑非零解，边界条件成为

$$X'(0)=X'(l)=0$$

由特征值问题的解的结论可知

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x$$

由此对应解出 $T_n(t)$ 可知解能写为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{na\pi}{l}t+B_n\sin\frac{na\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

结合初值条件即得

$$u(x,t)=\cos\frac{a\pi t}{l}\cos\frac{\pi x}{l}$$

(5) 作函数变换

$$v(x,t) = u(x,t) - \left(A_1 x + \frac{x^2}{2\pi}(A_2 - A_1)\right)t$$

则变换后有

$$v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} + \frac{A_2 - A_1}{\pi}t = \frac{A_2 - A_1}{\pi}t$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = -\left(A_1 x + \frac{x^2}{2\pi}(A_2 - A_1)\right)$$

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0$$

其特征函数系即为 $\cos nx$，设

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos nx$$

记

$$\psi_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(A_1\xi + \frac{\xi^2}{2\pi}(A_2 - A_1)\right)\cos n\xi \mathrm{d}\xi$$

则

$$v_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n \cos nx$$

由此可以得到 $T_0(t)$ 满足方程

$$T_0''(t) = t, \quad T_0(0) = 0, \quad T_0'(0) = \psi_0$$

也即

$$T_0(t) = \frac{1}{6}t^3 + \psi_0 t$$

而当 $n \geq 1$ 时 $T_n(t)$ 满足方程

$$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0, \quad T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = \psi_n$$

即

$$T_n(t) = \frac{\psi_n}{n}\sin nt$$

由此最终结果可写为

$$u(x,t) = \left(A_1 x + \frac{x^2}{2\pi}(A_2 - A_1)\right)t + \frac{1}{6}t^3 + \psi_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n}{n}\sin nt\cos nx$$

进一步计算得到

$$\psi_0 = -\frac{2A_1\pi}{3} - \frac{A_2}{3}\pi, \quad ,\forall n \geq 1, \quad \psi_n = \frac{2(A_1 - (-1)^n A_2)}{n^2\pi}$$

代入即为最终结果。

2. 4.41(4)

设 $v(x,t) = u(x,t) - 1 - A(x-l)\sin\omega t$，则有

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = \omega^2 A(x-l)\sin\omega t$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = -\omega A(x-l)$$

$$v_x(0,t) = v(l,t) = 0$$

其特征值问题的解为

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \quad X_n(x) = \cos\omega_n x, \quad n \in \mathbb{N}$$

由此设

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\omega_n x$$

记

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \omega^2 A(\xi-l)\sin\omega t\cos\omega_n\xi\mathrm{d}\xi=-\frac{2}{l}\frac{\omega^2}{\omega_n^2}A\sin\omega t$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l(-\omega A(\xi-l))\cos\omega_n\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{l}\frac{\omega}{\omega_n^2}A$$

则有

$$T_n(t)=\frac{1}{a\omega_n}\psi_n\sin(\omega_n at)+\frac{1}{a\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin(\omega_n a(t-\tau))\mathrm{d}\tau$$

即

$$T_n(t)=\frac{2\omega A}{al\omega_n^3}\sin(\omega_n at)-\frac{2\omega^2 A}{al\omega_n^3}\int_0^t\sin(\omega\tau)\sin(\omega_n a(t-\tau))\mathrm{d}\tau$$

当 $\omega\neq a\omega_n$ 时，代入计算可得结果为

$$T_n(t)=\frac{2\omega A}{al\omega_n^3}\sin(\omega_n at)-\frac{2\omega^2 A}{al\omega_n^3}\frac{\omega\sin(\omega_n at)-a\omega_n\sin(\omega t)}{\omega^2-a^2\omega_n^2}$$

当 $\omega=a\omega_n$ 时可进一步化简为

$$T_n(t)=\frac{2a^2A}{l\omega^2}\sin(\omega t)-\frac{2a^2A}{l\omega}\frac{\sin(\omega t)-t\omega\cos(\omega t)}{2\omega}=\frac{a^2A}{l\omega^2}\sin(\omega t)+\frac{t}{l\omega}\cos(\omega t)$$

3. 4.44

只需要找辅助函数 v 使得

$$-v_x(0,t)+\alpha v(0,t)=g_1(t),\quad v_x(l,t)+\beta v(l,t)=g_2(t)$$

再取 $\tilde{u}=u-v$ 即可，下面对三种不同情况给出上述的 v。

(1) 设 $v=A(t)x+B(t)$，则条件可化为

$$-A(t)+\alpha B(t)=g_1(t),\quad A(t)+\beta(A(t)l+B(t))=g_2(t)$$

利用系数行列式为 $-\beta-\alpha(1+\beta l)<0$ 可知存唯一解，进一步得到

$$v(x,t)=\frac{1}{\alpha+\beta+l\alpha\beta}\big((g_2(t)\alpha-g_1(t)\beta)x+g_1(t)+g_2(t)+g_1(t)l\beta\big)$$

(2) 设 $v=C(t)x^2+A(t)x$，则条件可化为

$$-A(t)=g_1(t),\quad 2C(t)l+A(t)=g_2(t)$$

从而

$$v(x,t)=\frac{1}{2l}(g_1(t)+g_2(t))x^2-g_1(t)x$$

(3) 设 $v=A(t)x+B(t)$，则条件可化为

$$-A(t)+\alpha B(t)=g_1(t),\quad A(t)=g_2(t)$$

从而

$$v(x,t)=g_2(t)x+\frac{1}{\alpha}(g_1(t)+g_2(t))$$

4. 4.45

第一个方程两端同乘 $2u_t$ 并在 Q_t 上积分，类似教材 4.2.3 计算有

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^l \left((u_t^2 + a^2 u_x^2)_t - 2a^2 (u_t u_x)_x\right) \mathrm{d}x = 2 \int_{Q_t} u_t f \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

调整积分次序计算左侧，并由边界条件可得左侧化为

$$\int_0^l \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right) \mathrm{d}x - \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x - 2a^2 \int_0^t \left(u_t(l,\tau)u_x(l,\tau) - u_t(0,\tau)u_x(0,\tau)\right) \mathrm{d}\tau$$

由条件 x 的边界上 $u_x = 0$，于是

$$\int_0^l \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right) \mathrm{d}x = \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x + 2 \int_{Q_t} u_t f \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

利用基本不等式有

$$2 \int_{Q_t} u_t f \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t \le \varepsilon \int_{Q_t} u_t^2 \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_t} f^2 \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

从而设

$$G(t) = \int_{Q_t} \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

则有

$$G'(t) \le \varepsilon G(t) + \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_t} f^2 \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

进一步放大为

$$G'(t) \le \varepsilon G(t) + \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} f^2 \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

利用 Gronwall 不等式，与教材 4.2.3 相同得到

$$G'(t) \le \mathrm{e}^{\varepsilon T} \left(\int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} f^2 \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t \right)$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{T}$ 可得到一个能量模估计

$$\int_0^l \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right) \mathrm{d}x \le \mathrm{e} \left(\int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x + T \int_{Q_T} f^2 \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t \right)$$

5. 4.46

前两个式子与习题 4.45 相同，而利用边界条件进一步计算左侧得到

$$\int_0^l \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right) \mathrm{d}x - \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x + 2a^2 \int_0^t \left(\beta u_t(l,\tau)u(l,\tau) + \alpha u_t(0,\tau)u(0,\tau)\right) \mathrm{d}\tau$$

再由 $2u_t u = (u^2)_t$，最终有

$$\int_0^l \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right) \mathrm{d}x - \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x + a^2(\alpha u^2(0,t) + \beta u^2(l,t) - \alpha u^2(0,0) - \beta u^2(l,0))$$

将左侧的 $a^2 u^2$ 项去除，并与习题 4.45 相同记 $G(t)$，可得 (相容性无法直接保证 φ 在 0、l 处为 0)

$$G'(t) \le \varepsilon G(t) + \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x + a^2(\alpha \varphi^2(0) + \beta \varphi^2(l)) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} f^2 \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

从而相同利用 Gronwall 不等式得

$$\int_0^l \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right) \mathrm{d}x \le \mathrm{e} \left(\int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2(x)\right) \mathrm{d}x + a^2(\alpha \varphi^2(0) + \beta \varphi^2(l)) + T \int_{Q_T} f^2 \,\mathrm{d}x \mathrm{d}t \right)$$

6. 4.47

前两个式子与习题 4.45 相同，而利用边界条件进一步计算左侧得到

$$\int_0^l \big(u_t^2(x,t)+a^2u_x^2(x,t)\big)\mathrm{d}x-\int_0^l \big(\psi^2(x)+a^2\varphi'^2(x)\big)\mathrm{d}x+2a^2\int_0^t u_t(l,\tau)u(l,\tau)\mathrm{d}\tau$$

再由 $2u_tu=(u^2)_t$，最终有

$$\int_0^l \big(u_t^2(x,t)+a^2u_x^2(x,t)\big)\mathrm{d}x-\int_0^l \big(\psi^2(x)+a^2\varphi'^2(x)\big)\mathrm{d}x+a^2(u^2(l,t)-u^2(l,0))$$

将左侧的 a^2u^2 项去除，并与习题 4.45 相同记 $G(t)$，可得

$$G'(t)\le \varepsilon G(t)+\int_0^l \big(\psi^2(x)+a^2\varphi'^2(x)\big)\mathrm{d}x+a^2\varphi^2(l)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_T} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

从而相同利用 Gronwall 不等式得

$$\int_0^l \big(u_t^2(x,t)+a^2u_x^2(x,t)\big)\mathrm{d}x\le \mathrm{e}\bigg(\int_0^l \big(\psi^2(x)+a^2\varphi'^2(x)\big)\mathrm{d}x+a^2\varphi^2(l)+T\int_{Q_T} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\bigg)$$

14 第十四次作业

1. 4.50

由相容性，均只需证明 $x_0\in(0,l)$ 的情况。

(1) 给定 $x_0\in(0,l)$、$r\in(0,T)$ 且 $x_0-r>0$、$x_0+r<l$，设

$$b(x,t)=\max(r^2-(x-x_0)^2-t^2,0)$$

$$\zeta(x,t)=b^3(x,t)t$$

可验证其在连接处二次连续可微 (二阶以下各导数均为 0)，从而确实是符合要求的试验函数。

代入计算有 (下标表示求导)

$$\int_{(x-x_0)^2+t^2<r^2,t>0} 6tb((a^2-3)r^2-(a^2-7)t^2-(5a^2-3)(x-x_0)^2)u\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{x_0-r}^{x_0+r} b^3(x,0)\varphi\mathrm{d}x=0$$

第二项作积分换元 $y=(x-x_0)/r$ 可得

$$r^7\int_{-1}^1(1-y^2)^3\varphi(ry+x_0)\mathrm{d}y$$

由此，对上式两侧同乘 r^{-7}，并令 $r\to 0$，则第二项最终为

$$\int_{-1}^1(1-y^2)^3\varphi(x_0)\mathrm{d}y=\frac{32}{35}\varphi(x_0)$$

下面计算

$$\lim_{r\to0} r^{-7}\int_{(x-x_0)^2+t^2<r^2,t>0} 6tb((a^2-3)r^2-(a^2-7)t^2-(5a^2-3)(x-x_0)^2)u\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

作换元 $y=(x-x_0)/r$、$s=t/r$ 可得上式化为 (记 $b_0=1-y^2-s^2$)

$$\lim_{r\to0}\int_{y^2+s^2<1,s>0} 6sb_0((a^2-3)-(a^2-7)s^2-(5a^2-3)y^2)u(ry+x_0,rs)\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

也即

$$u(x_0,0)\int_{y^2+s^2<1,s>0} 6sb_0((a^2-3)-(a^2-7)s^2-(5a^2-3)y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

作极坐标换元 $y=\rho\cos\theta$、$s=\rho\sin\theta$，积分区域即 $\rho\in(0,1)$、$\theta\in(0,\pi)$，$b_0=1-\rho^2$，代入计算即得结果中 a^2 项的积分抵消，其余为 $-\frac{32}{35}u(x_0,0)$，从而成立。

(2) 与 (1) 采用相同记号，取 $\zeta(x,t)=b^3(x,t)$，同理计算可发现

$$\int_{(x-x_0)^2+t^2<r^2,t>0}(24bt^2-6b^2-a^2(24b(x-x_0)^2)-6b^2)u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_{x_0-r}^{x_0+r}b^3(x,0)\psi\,\mathrm{d}x=0$$

两侧同乘 r^{-7} 后计算极限，第二项与 (1) 同理为 $-\frac{32}{35}\psi(x_0)$，而第一项同理换元 s,y 得为

$$\lim_{r\to 0}\int_{y^2+s^2<1,s>0}(24b_0s^2-6b_0^2-a^2(24b_0y^2-6b_0^2))\frac{u(x_0+ry,rs)}{r}\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

利用连续可微性与 (1) 可知

$$\lim_{r\to 0}\frac{u(x_0+ry,rs)}{r}=y\varphi'(x_0)+su_t(x_0,0)$$

代入后与 (1) 相同换元计算积分，可发现 $\varphi'(x_0)$ 与 a 的部分消去，最终剩余 $\frac{32}{35}u_t(x_0,0)$，得证。