二阶椭圆型方程 笔记

原生生物

* 陈亚浙、吴兰成《二阶椭圆型方程与椭圆型方程组》第一部分笔记
* 默认使用爱因斯坦求和约定，重复指标代表求和；以 C_n 代表常数，估算中出现时省略“存在 C_n 使得”，若不提及 C_n 与何相关则代表与它相关的量和定理中的最终 C 相关的量相同；χ_A 代表 $x \in A$ 时为 1，否则为 0 的特征函数；$B_r(x)$ 表示 x 为中心、r 为半径的球，B_r 表示 $B_r(0)$；$\|D^k u\|$ 一般表示 $\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|$；$W_0^{k,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}$ 中的闭包。
* 感谢杨泽萱同学为部分证明的完成提供的帮助。

目录

一 L^2 理论

* 研究**弱解**相关的 H^k 估计。

多项的 Hölder 不等式：若 $\alpha_i > 1$，且 $\sum_i \alpha_i^{-1} = 1$，则有

$$\left\|\prod_i f_i\right\|_{L^1} \le \prod_i \|f_i\|_{L^{\alpha_i}}$$

- **证明：**

  两项时自然成立，多项时利用 Hölder 不等式可拆分为低阶情况。

§1.1 Lax-Milgram 定理

Lax-Milgram 定理：设 $a(u,v)$ 为范数为 $\|\cdot\|$、内积为 $(\cdot,\cdot)$ 的 Hilbert 空间 V 上双线性型，若满足：

- 有界性：存在 M 使得 $|a(u,v)| \le M\|u\|\|v\|$ 对一切 $u,v \in V$ 成立；
- 强制性 [ellipticity]：存在 $\alpha > 0$ 使得 $a(v,v) \ge \alpha\|v\|^2$ 对一切 $v \in V$ 成立；

则对某 $f \in V$，存在唯一 $u \in V$ 使得 $a(u,v) = (f,v)$ 对任何 $v \in V$ 成立。

* 利用泛函分析知识，Hilbert 空间之间线性算子的**有界性与连续性等价**，类似可以证明 $a(u,v)$ 的有界性条件等价于其对 u,v 连续。

- **证明：**

  固定 u，则映射 $v \to a(u,v)$ 可看作 V 上的线性函数。由有界性可知 $|a(u,v)| \le (M\|u\|)\|v\|$，于是其有界，利用泛函分析知识可知连续，从而通过 Riesz 表示定理，存在 $A(u) \in V$ 使得 $a(u,v) = (A(u),v)$ 对任何 $v \in V$ 成立，将 $A(u)$ 记为 Au。

  只需证明 A 是双射，其存在 A^{-1}，而 $A^{-1}f$ 即为所需的唯一解。我们说明更强的结论，即 A 为连续线性双射，且其逆连续。

  1. 线性：利用 a 的双线性性直接验证即可。
  2. 连续：由定义 $(Au,Au) = a(u,Au) \le M\|Au\|\|u\|$，从而 $\|Au\| \le M\|u\|$，有界，因此连续。
  3. 单射：若 $Au = Aw$，则 $A(u-w) = 0$，于是 $a(u-w,v) = 0$ 对任何 v 成立，但若 $u-w \ne 0$，取 $v = u-w$ 由强制性可知矛盾。

     记 $A\big|_{V\to A(V)}$ 为限制映射，由单射可知 $A\big|_{V\to A(V)}$ 为双射，其存在逆，记为 $\hat{A}^{-1}$。继续说明其性质。
  4. $\hat{A}^{-1}$ 连续：由强制性可知 $\|Au\|\|u\| \ge (Au,u) = a(u,u) \ge \alpha\|u\|^2$，从而 $\|Au\| \ge \alpha\|u\|$，得到 $\|\hat{A}^{-1}u\| \le \alpha\|u\|$，有界，从而连续。
  5. $A(V)$ 是闭集：考虑 $A(V)$ 中的柯西列 $\{Au_n\}$，由 V 完备可知有极限 v。利用上方证明，$\|u_n - u_m\| \le \alpha^{-1}\|Au_n - Au_m\|$，因此 $\{u_n\}$ 亦构成柯西列，存在极限 u，由 A 连续性可知 $v = Au \in A(V)$，得证。
  6. $A(V) = V$：利用正交分解定理，若 $A(V) \ne V$，由其为闭子空间可知存在非零 $w \in V$ 使得 $(w,v) = 0$ 对任意 $v \in V$ 成立，但取 $v = Aw$ 可知 $a(w,w) = 0$，由强制性 $\|w\| = 0$，矛盾。

  综合以上可知 $\hat{A}^{-1}$ 即为 A 的逆 A^{-1}，从而原命题得证。

* 由于 Hilbert 空间中对偶的存在唯一性，当 $f \in V'$，$a(u,v) = f(v)$ 时，存在唯一性仍成立。

§1.2 椭圆型方程的弱解

考虑 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开区域，并假定 $n \ge 3$，本章考虑散度型椭圆方程 (D_i 表示对第 i 个分量偏导，上标为分量，式中出现的均为函数)

$$Lu = f + D_i f^i, \quad L = -D_j(a^{ij}D_i + d^j) + b^i D_i + c$$

* 以下无特殊说明时**省略函数空间对应的区域** Ω，且假设其上 Sobolev 嵌入定理成立。
并假设：

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$$

$$\exists \lambda > 0, \Lambda > 0, \quad \lambda|\xi|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega$$

$$\exists \Lambda > 0, \quad \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^n} + \sum_{i=1}^n \|d^i\|_{L^n} + \|c\|_{L^{n/2}} \le \Lambda$$

记 Sobolev 空间 $W^{k,p}$ 为至 k 次可导且导数 p 次可积的函数空间，将 $W^{k,2}$ 记为 H^k，且 H_0^k 表示 C_0^∞ 在 H^k 中的闭包，H^{-k} 表示 H_0^k 的对偶。
* 这里 C_0^∞ 表紧支，即存在紧集 $K \subset \Omega$，K 外函数值为 0 的光滑函数集合。
对 $u, v \in H^1$，记

$$a(u,v) = \int_\Omega \big((a^{ij}D_iu + d^ju)D_jv + (b^iD_iu + cu)v\big)\,\mathrm{d}x$$

弱解：对 $T \in H_0^1$，$g \in H^1$，称 $u \in H^1$ 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = T & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

的弱解，若其满足

$$\forall v \in H_0^1, \quad a(u,v) = (T,v)$$

$$u - g \in H_0^1$$

* 由于 L 可等效为 $H^1 \to H^{-1}$ 的算子 $\tilde{L}$，条件也可变为 $T \in H^{-1}$，这时默认内积 (T,v) 表示对偶积 $T(v)$。
* 这里 H_0^1 中的范数为

$$\|u\|_{H_0^1} = \sqrt{\int_\Omega \sum_i |D_iu|^2}$$

有界性：满足之前的假定时，$a(u,v)$ 是 H_0^1 上的有界双线性型。
* 此定理证明中，书上的界需要 $a^{ij}(x)$ **对称**才成立，因此下方假定了 $a^{ij} = a^{ji}$。若否，利用 $a^{ij}(x)D_iuD_jv \le |a_{ij}(x)||D_iuD_jv|$，再利用有界性将 $|a_{ij}(x)|$ 放大为某对称正定阵 (先将非对角放大至 $\max(\|a^{ij}\|_\infty, \|a^{ji}\|_\infty)$，再将对角放到充分大使得主角占优) 即可类似得到结论。

- **证明：**

  分为四部分进行估计。

  1. $a^{ij}(x)D_iuD_jv$：由于 $a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2$ 与对称可知 a^{ij} 正定，从而将 $a_{ij}(x)$ 看作矩阵 $A(x)$，利用正定可知存在可逆阵 P 使得 $A = P^TP$，进一步由 Cauchy 不等式得 $(\xi^TA\eta)^2 \le (\xi^TA\xi)(\eta^TA\eta)$，由此

  $$a^{ij}(x)D_iu(x)D_jv(x) \le \sqrt{(a^{ij}(x)D_iu(x)D_ju(x))(a^{ij}(x)D_iv(x)D_jv(x))}$$

  处处成立。于是再利用积分 Cauchy 不等式可知

  $$\left|\int_\Omega a^{ij}D_iuD_jv\,\mathrm{d}x\right| \le \sqrt{\int_\Omega a^{ij}(x)D_iu(x)D_ju(x)\,\mathrm{d}x \int_\Omega a^{ij}(x)D_iv(x)D_jv(x)\,\mathrm{d}x}$$

  由第二个条件即得右侧不超过

  $$\Lambda\sqrt{\sum_i \int |D_iu|^2\,\mathrm{d}x \sum_j \int |D_jv|^2\,\mathrm{d}x} \le \Lambda\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$$

2. $d^j u D_j v$：记 $m=\frac{2n}{n-2}$，利用推广的 Hölder 不等式可知

$$\left|\int_\Omega d^j u D_j v \mathrm{d}x\right| \le \|d^j u D_j v\|_{L^1} \le \|d^j\|_{L^n}\|u\|_{L^m}\|D_j v\|_{L^2}$$

利用 Sobolev 空间的嵌入定理可得 $\|u\|_{L^m} \le C_1\|u\|_{H_0^1}$，于是再由条件可知

$$\|d^j\|_{L^n}\|u\|_{L^m}\|D_j v\|_{L^2} \le C_1\|u\|_{H_0^1}\Lambda\sum_j \|D_j v\|_{L^2}$$

将 $\|D_j v\|_{L^2}$ 的平均放大至平方平均可得其最终

$$\le C_2\Lambda\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$$

3. $b^i v D_i u$：与上一种情况相同得到 (注意 C_2 与 u, v 具体形式无关)

$$\left|\int_\Omega b^i v D_i u \mathrm{d}x\right| \le C_2\Lambda\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$$

4. cuv：利用推广的 Hölder 不等式可知

$$\left|\int_\Omega cuv \mathrm{d}x\right| \le \|c\|_{L^{n/2}}\|u\|_{L^m}\|v\|_{L^m}$$

再由嵌入定理即得

$$\left|\int_\Omega cuv \mathrm{d}x\right| \le C_3\Lambda\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$$

最终得到

$$|a(u,v)| \le C_4\Lambda\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$$

这里 C_4 只与 Ω 与 n 有关，从而得证有界性。

强制性-补充条件：满足之前的假定时，存在 $\bar{\mu} \ge 0$，使得 $\mu \ge \bar{\mu}$ 时 $a(u,v)+\mu(u,v)_0$ 在 H_0^1 上是强制的，这里下标 0 表示 L^2 中的内积。

- **证明：**

  引理：对任何 $f \in L^p$，任意给定 $\varepsilon > 0$，存在 K 使得能将 f 分解为 f_1+f_2，使得 $\|f_2\|_{L^p} < \varepsilon$ 且 $\|f_1\|_\infty < K$。

  引理证明：考虑 $f_1(x)=\chi_{\{|f(x)|\le K\}}f(x)$,则其必然满足第二个条件,而利用单调收敛定理可知 $K\to\infty$ 时 $\|f_1(x)\|_{L^p} \to \|f(x)\|_{L^p}$，从而存在充分大的 K 使得 $\|f-f_1\|_{L^p} < \varepsilon$，得证。

  定理证明：重复利用引理知存在 $K(\varepsilon)$ 使得能将 b^i、d^i、c 分解为两部分，使得

$$\sum_{i=1}^n \|b_2^i\|_{L^n} + \sum_{i=1}^n \|d_2^i\|_{L^n} + \|c_2\|_{L^{n/2}} \le \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^n \|b_1^i\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^n \|d_1^i\|_{L^\infty} + \|c_1\|_{L^\infty} \le K(\varepsilon)$$

  将 $a(u,v)$ 中 b, c, d 改为 b_2, c_2, d_2 后记为 $a_2(u,v)$，并记 $a_1 = a - a_2$。与有界性计算完全类似可知

$$a_2(u,u) - \int_\Omega a^{ij} D_i u D_j u \mathrm{d}x \le C_1\varepsilon\|u\|_{H_0^1}^2$$

  而由第二个条件即得

$$a^{ij} D_i u D_j u \ge \lambda \sum_i |D_i u|^2$$

于是积分放缩后得到

$$a_2(u,u) \geq (\lambda - C_1\varepsilon)\|u\|_{H_0^1}^2$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{4}C_1\lambda$，则有

$$a_2(u,u) \geq \frac{3}{4}\|u\|_{H_0^1}^2$$

对 $a_1(u,u)$，考虑积分中值定理可知

$$a_1(u,u) \leq \int_\Omega (|b_1^i| + |d_1^i|)|D_iu||u|\mathrm{d}x + \int_\Omega |c_1||u|^2\mathrm{d}x \leq K(\varepsilon)\left(\sum_i \|uD_iu\|_{L^1} + \|u\|_{L^2}^2\right)$$

由于 $K(\varepsilon)|u||D_iu| \leq \frac{\lambda}{4}|D_iu|^2 + \frac{K^2(\varepsilon)}{\lambda}|u|^2$，放大得到

$$|a_1(u,u)| \leq \frac{\lambda}{4}\|u\|_{H_0^1}^2 + \frac{K^2(\varepsilon)}{\lambda}\|u\|_{L^2}^2 + K(\varepsilon)\|u\|_{L^2}^2$$

由此整理得到

$$a(u,u) \geq \frac{\lambda}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \left(\frac{K^2(\varepsilon)}{\lambda} + K(\varepsilon)\right)\|u\|_{L^2}^2$$

取 $\bar{\mu} = \frac{K^2(\varepsilon)}{\lambda} + K(\varepsilon)$ 即为所求，这里 $\varepsilon = \frac{1}{4}C_1\lambda$。

弱解存在唯一性：满足之前的假定，且 Ω 是 Sobolev 嵌入定理成立的开区域时，存在 $\bar{\mu} \geq 0$ 使得 $\mu \geq \bar{\mu}$ 时 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu + \mu u = T & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

存在唯一弱解。

- **证明**：

  上述问题对应的双线性型 $a_0(u,v)$ 为 $a(u,v) + \mu(u,v)_0$，由于 $a(u,v)$ 有界，类似有界性最后一种情况的估算可知 $\mu(u,v)_0$ 有界，从而其在 H_0^1 上有界。此外，上方已证明了其在 H_0^1 上的强制性。

  另一方面，记 $w = u - g$，则其属于 $H_0^1(\Omega)$，弱解存在性等价于

  $$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a_0(w,v) = (T,v) - a(g,v) - \mu(g,v)_0$$

  可验证右侧为 H_0^1 上的有界线性泛函，从而由 Riesz 表示定理可知存在 f 使得其为 (f,v)，再利用 Lax-Milgram 定理可得 w 存唯一解，于是 u 存唯一弱解。

§1.3　Fredholm 二择一定理

Banach 空间上：V 为 Banach 空间，A 是 V 上紧线性算子，I 是恒同算子，则以下两种可能恰发生一种：

- 存在非零 $x \in V$ 使得 $x - Ax = 0$。
- 对任何 $y \in V$，存在唯一 $x \in V$ 使得 $x - Ax = y$；此时 $(I-A)^{-1}$ 是有界线性算子。

此外，A 的谱是离散的、除 0 以外不存在其他极限点，且每一特征值重数有限。

* 证明见泛函分析课程。

仍考虑 L 符合之前假定时的问题

$$\begin{cases} Lu + \mu u = T & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

对一般的 μ，以下两种可能恰发生一种：

1. 该问题对任何 $T \in H^{-1}, g \in H^1$ 存唯一弱解；

2. 存在非零 $u_0 \in H_0^1$ 使得 $\forall v \in H_0^1, a(u,v)+\mu(u,v)_0=0$，于是对任意 $T \in H^{-1}, g \in H^1$，或无解、或存在无穷多解 (考虑某个解加上 λu_0)。

此外，满足第二种情况的 μ 是离散的，除 ∞ 外不存在其他极限点 (由上节，事实上只能以 $-\infty$ 为极限)，且每个 μ 对应的 u_0 构成的空间维数有限。

- **证明：**

类似上节，记 $w=u-g$ 并对应更改 T 即可不妨设 $g=0$，此时问题变为求 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\forall v \in H_0^1, \quad a(u,v)+\mu(u,v)_0=(T,v)$$

利用嵌入定理可知 L^2 内积是 H_0^1 上的有界线性泛函，从而存在 H_0^1 算子 P 使得

$$(u,v)_0=(Pu,v)$$

从而方程可改写为

$$(Lu+\mu Pu-T,v)=0$$

也即弱解等价于 H_0^1 上的 (导数看作弱导数)

$$Lu+\mu Pu=T$$

由上节，存在 $\bar{\mu}>0$ 使得 $\mu>\bar{\mu}$ 时 $L+\mu P$ 可逆，取定 μ_0 满足要求，两边同时作 $G=(L+\mu_0 P)^{-1}$ 得到

$$u-(\mu_0-\mu)GPu=GT$$

由于 P 可看成 H_0^1 嵌入 L^2 后与 L^2 上某有界线性算子的复合，且根据紧嵌入定理，该嵌入是紧的，利用紧算子复合仍紧可知 $(\mu_0-\mu)GP$ 是紧算子，于是对其利用 Fredholm 二择一定理可知，此方程或对任意 GT (由可逆知即为任意 T) 存唯一解，或有非零 u 为 $Lu+\mu Pu=0$ 解，第一部分得证。另一方面，GP 亦为紧算子，而考虑 $\mu \neq \mu_0$ 时的方程

$$GPu=\frac{1}{\mu-\mu_0}u$$

此即为 GP 的特征方程，由特征值离散知解离散 (假设已经保证了 μ_0 时原方程不存非零解，于是不影响)；而特征值除 0 以外无极限点则得到除无穷以外无极限点；每一特征值重数有界即对应解空间维数有限。

§1.4 弱解的极值原理

* 采用 **De Giorgi 迭代**的思路证明。

引理：设 $\varphi(t)$ 是 $[k_0,+\infty)$ 上的非负减函数，若当 $h>k \geq k_0$ 时有

$$\varphi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^\alpha}\varphi^\beta(k)$$

其中 $\alpha>0, \beta>1$，则有

$$\varphi(k_0+d)=0, \quad d=C^{1/\alpha}\varphi^{(\beta-1)/\alpha}(k_0)2^{\beta/(\beta-1)}$$

- **证明：**

定义 $k_s=k_0+d-\frac{d}{2^s}$，利用 d 的范围可归纳得到

$$\varphi(k_s) \leq \frac{\varphi(k_0)}{r^s}, \quad r=2^{\alpha/(\beta-1)}$$

由此令 $s \to \infty$ 得证。

考虑第二节开头的方程与对应的 $a(u,v)$，若

$$\forall\varphi\in C_0^\infty,\varphi\ge 0,\quad a(u,\varphi)\le(f,\varphi)_0-(f^i,D_i\varphi)_0$$

则称 u 为该方程的**弱下解**，将 $\le$ 改为 $\ge$ 则为**弱上解**，改为等号为**弱解**。

对任何 $u\in H^1$，定义 (与通常 sup 区别为若边界附近不连续，可能受边界周围影响)

$$\sup_{\partial\Omega}u=\inf\{l\mid(u-l)^+\in H_0^1(\Omega)\}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}u=\inf\{l\mid(u-l)^+=0,\ a.e.\ \Omega\}$$

若 L 的系数满足第二节假设，且

$$\forall\varphi\in C_0^\infty,\varphi\ge 0,\quad\int_\Omega(c\varphi+d^iD_i\varphi)\mathrm{d}x\ge 0$$

则弱下解 u 满足对任何 $p>n$ 有 (记 $u^+=\max(u,0)$)

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}u\le\sup_{\partial\Omega}u^++C\left(\|f\|_{L^{np/(n+p)}}+\sum_i\|f^i\|_{L^p}\right)|\Omega|^{(p-n)/(np)}$$

这里 C 依赖 $n,p,\lambda,\Lambda,\Omega$ 与 b^i,d^i,c。
* 书上称 C 与 $|\Omega|$ 的下界无关，但证明过程其需要由嵌入定理得到，实质应当是有关的。
* 这称为**弱极值原理**。

- **证明：**

  证明中的“基本不等式”指 $2ab\le a^2+b^2$，一般使用为 $2ab\le\frac{1}{\epsilon}a^2+\epsilon b^2$ 以控制单侧系数。

  截取估算

  记 $l=\sup_{\partial\Omega}u^+$，若 $\sup_\Omega u^+=l$，则 $\|u\|_\infty$ 不超过 l，已经得证，只需考虑 $\sup_\Omega u^+>l$ 的情况。对任何 $k>l$，取 $\varphi=(u-k)^+$，则有 ($\varphi>0$ 的部分 $u=\varphi+k$，而 $\varphi\le 0$ 的部分 $a(u,\varphi)=0$，改变 u 的值不影响)

$$a(u,\varphi)=\int_\Omega\big((a^{ij}D_i\varphi+d^j\varphi)D_j\varphi+(b^iD_i\varphi+c\varphi)\varphi\big)\mathrm{d}x+k\int_\Omega(d^jD_j\varphi+c\varphi)\mathrm{d}x$$

  初步估计

  仿照第二节的计算，由于根据假设，第二项非负，可知 (这里 $\|D\varphi\|_{L^2}=\|\varphi\|_{H_0^1}$)

$$a(u,\varphi)\ge\frac{\lambda}{2}\|D\varphi\|_{L^2}^2-C_1\lambda\|\varphi\|_{L^2}^2$$

  这里 C_1 由于和拆分的 $K(\varepsilon)$ 有关，会受 b^i,d^i,c 影响，还关乎 n,λ,Λ 与 $|\Omega|$。
  利用弱下解的定义即知

$$\frac{\lambda}{2}\|D\varphi\|_{L^2}^2-C_1\lambda\|\varphi\|_{L^2}^2\le(f,\varphi)_0-(f^i,D_i\varphi)_0$$

  而右侧的两项内积对应的积分事实上只在 $u>k$ 时非零，记 $A(k)=\{x\in\Omega\mid u(x)>k\}$，利用推广的 Hölder 不等式可知

$$|(f,\varphi)_0|\le\|f\varphi\|_{L^1}=\|f\cdot\varphi\cdot 1\|_{L^1(A(k))}\le\|f\|_{L^{np/(n+p)}}\|\varphi\|_{L^{2n/(n-2)}}\|1\|_{L^{1/(1/2-1/p)}(A(k))}$$

  对 $(f^i,D_i\varphi)_0$ 类似处理 (采用不同范数进行推广的 Hölder 不等式)，最终得到

$$(f,\varphi)_0-(f^i,D_i\varphi)_0\le\|f^i\|_{L^p}\|D_i\varphi\|_{L^2}|A(k)|^{1/2-1/p}+\|f\|_{L^{np/(n+p)}}\|\varphi\|_{L^{2n/(n-2)}}|A(k)|^{1/2-1/p}$$

进一步将每个 $\|D_i\varphi\|_{L^2}$ 放大为 $\|D\varphi\|_{L^2}$，结合之前的估算可知，记 $q = np/(n+p)$，$m = 2n/(n-2)$，有

$$\frac{\lambda}{2}\|D\varphi\|_{L^2}^2 - C_1\lambda\|\varphi\|_{L^2}^2 \le \sum_i \|f^i\|_{L^p}\|D\varphi\|_{L^2}|A(k)|^{1/2-1/p} + \|f\|_{L^q}\|\varphi\|_{L^m}|A(k)|^{1/2-1/p}$$

$\|\varphi\|_{L^m}$ 控制

利用嵌入定理可将 $\|\varphi\|_{L^m}$ 放为 $C_2\|D\varphi\|_{L^2}$，这里 C_2 只与 Ω, n 有关，由此对每项利用基本不等式放缩，再取 $\|f^i\|_{L^p}$ 与 $\|f\|_{L^q}$ 前的系数最大值可知右侧

$$\le \frac{\lambda}{4}\|D\varphi\|_{L^2}^2 + C_3F_0^2|A(k)|^{1-2/p}, \quad F_0 = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_i \|f^i\|_{L^p} + \|f\|_{L^q}\right)$$

这里 C_3 与 Ω、λ、n 有关。移项并同乘 $2/\lambda$ 进一步得到

$$\|D\varphi\|_{L^2}^2 \le 2C_1\|\varphi\|_{L^2}^2 + C_4F_0^2|A(k)|^{1-2/p}$$

这里 C_4 与 Ω、λ、n 有关。

再次应用 Hölder 不等式可得

$$\|\varphi\|_{L_2} = \|\varphi^2 \cdot 1\|_{L^1(A(k))} \le \|\varphi\|_{L^m}|A(k)|^{1/n}$$

于是通过 Sobolev 嵌入定理可得

$$\|D\varphi\|_{L^2}^2 \le C_5|A(k)|^{2/n}\|D\varphi\|_{L^2}^2 + C_4F_0^2|A(k)|^{1-2/p}$$

这里 C_5 只与 C_1、Ω、n 相关。

由定义与可积性，$A(k)$ 在 $k \to \infty$ 时趋于 0，从而存在 k_0 使得 $k \ge k_0$ 时 $C_5|A(k)|^{2/n} \le \frac{1}{2}$，也即此时有

$$\|D\varphi\|_{L^2} \le \sqrt{2C_4}F_0|A(k)|^{1/2-1/p}$$

再次利用 Sobolev 嵌入定理得

$$\|\varphi\|_{L^m} \le C_6F_0|A(k)|^{1/2-1/p}$$

这里 C_6 只与 Ω、λ、n 相关。

引理使用

设 $h > k$，由于 φ 在 $u > h$ 时至少为 $h-k$，考虑 $A(h)$ 上的积分可知

$$\|\varphi\|_{L^m} \ge (h-k)|A(h)|^{1/m}$$

结合上方的上界即知 $h > k \ge k_0$ 时有

$$|A(h)| \le \frac{(C_6F_0)^m}{(h-k)^m}|A(k)|^{n(p-2)/(pn-2p)}$$

又由其为非负减函数，可验证符合条件，利用 De Giorgi 迭代引理可知

$$|A(k_0+d)| = 0, \quad d = C_6F_0|A(k_0)|^{1/n-1/p}2^{n(p-2)/(pn-2p)}$$

由此将 $|A(k_0)|$ 放大为 $|\Omega|$ 即得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \le k_0 + d \le k_0 + C_7F_0|\Omega|^{1/2-1/p}$$

这里 C_7 只与 Ω、λ、n 相关。

k_0 初步估计

考虑 $A(k)$ 上的积分可发现 $\|u\|_{L^2}\geq k|A(k)|^{1/2}$，由此在

$$k_0\geq(2C_5)^{n/4}\|u\|_{L^2}$$

时即有

$$C_5|A(k_0)|^{2/n}\leq\frac{1}{2}$$

这就满足了前述的条件。注意到基本要求为 $k_0>l$ (为保证 φ 能进行之前的估算)，知最终可取

$$k_0=(2C_5)^{n/4}\|u\|_{L^2}+l$$

也即

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}u\leq\sup_{\partial\Omega}u^++C_8\|u\|_{L^2}+C_7F_0|\Omega|^{1/n-1/p}$$

这里 C_8 只与 C_1、Ω、n 相关。

对比结论，可发现只要能去掉 $\|u\|_{L^2}$ 项，即可得到最终结果。

重取检验函数

* 书中在重取检验函数时额外增加了 ε 以保证分母非零，但后方证明中又出现了分母上的 F_0，ε 并未一直生效，由此我们选择单独讨论 F_0 是否为 0。对 $F_0=0$ 情况的分析见证明最后一部分。

由于上方估计已知 $\operatorname{ess\,sup}_\Omega u$ 必然有限，设 $M=\operatorname{ess\,sup}_\Omega u-l$、$v=(u-l)^+$，在 $F_0>0$ 时，我们研究以下函数的性质：

$$w(x)=\ln\frac{M+\tilde{F}_0}{M+\tilde{F}_0-v(x)},\quad\tilde{F}_0=F_0|\Omega|^{1/n-1/p}$$

取新的检验函数

$$\varphi(x)=\frac{v(x)}{M+\tilde{F}_0-v(x)}=\mathrm{e}^{w(x)}-1\in H_0^1(\Omega)$$

由前假设可知 $\varphi\geq0$、$v\geq0$，与证明第一部分相同，利用 $u<l$ 时 $\varphi=0$ 得到等式，并舍弃 $l(c+d^iD_i,\varphi)$ 的部分得

$$a(u,\varphi)\geq\int_\Omega\big((a^{ij}D_iv+d^jv)D_j\varphi+(b^iD^iv+cv)\varphi\big)\,\mathrm{d}x$$

计算可知右端等于

$$\int_\Omega\big(a^{ij}D_ivD_j\varphi+(b^i-d^i)\varphi D_iv\big)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega(d^jD_j(v\varphi)+cv\varphi)\,\mathrm{d}x$$

再次利用 $c+d^jD_j$ 的非负性舍去第二项，代入 φ 与 w 的表达式即可进一步计算得

$$a(u,\varphi)\geq\int_\Omega\big((M+\tilde{F}_0)a^{ij}D_iwD_jw-(b^i-d^i)vD_iw\big)\,\mathrm{d}x$$

对第一项利用 a^{ij} 的假设，第二项利用基本不等式并将 v 放大为 M，可知

$$a(u,\varphi)\geq(M+\tilde{F}_0)\lambda\|Dw\|_{L^2}^2-\frac{M}{\lambda}\sum_i(\|b^i\|_{L^2}^2+\|d^i\|_{L^2}^2)-\frac{M\lambda}{4}\|Dw\|_{L^2}^2$$

于是

$$a(u,\varphi)\geq\frac{3}{4}(M+\tilde{F}_0)\lambda\|Dw\|_{L^2}^2-\frac{M}{\lambda}\sum_i(\|b^i\|_{L^2}^2+\|d^i\|_{L^2}^2)\geq\frac{3}{4}(M+\tilde{F}_0)\lambda\|Dw\|_{L^2}^2-C_9\frac{M\Lambda^2}{\lambda}$$

这里最后一步利用了 Hölder 不等式放大二范数为 n 范数，C_9 只与 n、Ω 相关。

另一方面，由弱下解性可知 (直接代入 φ 后在积分中取绝对值)

$$a(u,\varphi)\le(f,\varphi)_0-(f^i,D_i\varphi)_0\le\int_\Omega\frac{|f|v}{M+\tilde{F}_0-v}\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{(M+\tilde{F}_0)|f^i||D_iw|}{M+\tilde{F}_0-v}\mathrm{d}x$$

第一项利用 $v\le M$ 即可放大，第二项亦将 v 放大至 M 后利用基本不等式放大，得到

$$a(u,\varphi)\le\frac{M}{\tilde{F}_0}\|f\|_{L^1}+\frac{\lambda}{4}(M+\tilde{F}_0)\|Dw\|_{L^2}^2+\frac{M+\tilde{F}_0}{\lambda\tilde{F}_0^2}\sum_i\|f^i\|_{L^2}^2$$

最终估算

整理 $a(u,\varphi)$ 的两边估算可得

$$\frac{3}{4}(M+\tilde{F}_0)\lambda\|Dw\|_{L^2}^2-C_9\frac{M\Lambda^2}{\lambda}\le\frac{M}{\tilde{F}_0}\|f\|_1+\frac{\lambda}{4}(M+\tilde{F}_0)\|Dw\|_{L^2}^2+\frac{M+\tilde{F}_0}{\lambda\tilde{F}_0^2}\sum_i\|f_i\|_{L^2}^2$$

移项、同除以 $\lambda(M+\tilde{F}_0)/2$，并将 $M/(M+\tilde{F}_0)$ 放大为 1 可得

$$\|Dw\|_{L^2}^2\le C_{10},\quad C_{10}\ge\frac{2}{\lambda\tilde{F}_0}\|f\|_{L^1}+2C_9\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2\tilde{F}_0^2}\sum_i\|f^i\|_{L^2}^2$$

由于关于 f 与 f^i 的范数不超过 $\tilde{F}_0$ 中的对应范数，利用 Hölder 不等式可知 C_{10} 可选取为只与 $n,p,\Omega,\Lambda,\lambda$ 相关的常数。再次利用嵌入定理可知

$$\|w\|_{L^m}\le C_{11}$$

其中 C_{11} 只与 $n,p,\Omega,\Lambda,\lambda$ 相关。

对于 $k>l$，考虑上式的积分，将 v 在 $u>k$ 的部分缩小为 $k-l$，可知

$$|A(k)|^{1/m}\ln\frac{M+\tilde{F}_0}{M+\tilde{F}_0-(k-l)}\le\|w\|_{L^m}\le C_{11}$$

取 $k_0=(1-\eta)(M+\tilde{F}_0)+l$，其中 $\eta\in(0,1)$ 待定，则由上方可知

$$|A(k_0)|^{1/m}\le C_{11}(-\ln\eta)^{-1}$$

于是可取合适的 η 使得

$$C_5|A(k_0)|^{2/n}\le\frac{1}{2}$$

成立，由此有

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u\le\sup_{\partial\Omega}u^++(1-\eta)(M+\tilde{F}_0)+C_7F_0|\Omega|^{1/n-1/p}$$

这里 η 与 $n,p,\Omega,\Lambda,\lambda,C_1$ 相关。

而 $M=\operatorname{ess\,sup}_\Omega u-\sup_{\partial\Omega}u^+$、$\tilde{F}_0=F_0|\Omega|^{1/n-1/p}$，移项并同乘 $1/\eta$ 即得

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u\le\sup_{\partial\Omega}u^++C_{12}F_0|\Omega|^{1/n-1/p}$$

这里 C_{12} 与 $n,p,\Omega,\Lambda,\lambda,C_1$ 相关。

临界情况讨论

最后，我们处理 $F_0=0$ 的情况。，此时意味着 $f=f^i=0$，也即 $a(u,\varphi)\le0$ 对任何 $\varphi\ge0$ 成立。注意到，取 $\varepsilon>0$，有

$$a(u,\varphi)\le(f,\varphi)_0,\quad f(x)=\varepsilon$$

对任何 $\varphi\ge0$ 成立，利用 $F_0\ne0$ 的情况直接计算对应 F_0 即可知

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u\le\sup_{\partial\Omega}u^++C_{12}\varepsilon|\Omega|^{2/n}$$

由于 ε 可任意减小，即得 $F_0=0$ 时原命题仍正确。

* 事实上，按书中增加额外增加 ε 的做法亦可以得到正确结果。在“重取检验函数”部分中将所有 $\tilde{F}_0$ 替换为 $\tilde{F}_0+\varepsilon$，则“最终估算”部分的开头可得到 $\|Dw\|_{L^2}^2$ 与 ε 无关的界 (放大分子后利用 $F_0/(F_0+\varepsilon)\le 1$)。

加强命题：若将第二节假定中的

$$\exists\Lambda>0,\quad \sum_{i=1}^n\|b^i\|_{L^n}+\sum_{i=1}^n\|d^i\|_{L^n}+\|c\|_{L^{n/2}}\le\Lambda$$

更换为

$$\exists\Lambda>0,\quad \sum_{i=1}^n\|b^i\|_{L^p}+\sum_{i=1}^n\|d^i\|_{L^p}+\|c\|_{L^{p/2}}\le\Lambda$$

则上述弱极值原理中的常数 C 可只与 $n,p,\Omega,\Lambda,\lambda$ 相关。

- **证明：**

  引理：若 $a>b>c\ge 1$，则对任何 $\varepsilon>0$，存在只与 a,b,c 相关的 C_ε 使得

$$\|u\|_{L^b}\le\varepsilon\|u\|_{L^a}+C_\varepsilon\|u\|_{L^c}$$

  引理证明：待定系数，设 $p\lambda=a$、$p(b-\lambda)/(p-1)=c$，可解出 $p=(a-c)/(b-c)$、$\lambda=a(b-c)/(a-c)$，由此利用 Hölder 不等式，将 u^b 拆分为 u^λ 与 $u^{b-\lambda}$，并作 p 与 $p/(p-1)$ 次方，可知

$$\|u\|_{L^b}^b\le\|u\|_{L^c}^{c(a-b)/(a-c)}\|u\|_{L^a}^{a(b-c)/(a-c)}$$

  由此可得

$$\|u\|_{L^b}\le\|u\|_{L^c}^{c(a-b)/(b(a-c))}\|u\|_{L^a}^{a(b-c)/(b(a-c))}$$

  注意两个次方均小于 1 且和为 1，利用 Young 不等式知右侧

$$\le\varepsilon\|u\|_{L^a}+C_\varepsilon\|u\|_{L^c}$$

  其中

$$C_\varepsilon=\frac{(p_0\varepsilon)^{-q_0/p_0}}{q_0},\quad p_0=\frac{ab-bc}{ab-ac},\quad q_0=\frac{ab-bc}{ac-bc}$$

  定理证明：沿用上个定理证明中的记号。注意到，最终的 C_{12} 只与 $n,p,\Omega,\Lambda,\lambda$ 与 C_1 相关，只要能改进 C_1 为只与 $n,p,\Omega,\Lambda,\lambda$ 相关的 C'，结论即成立。而为完成此估计，仿照之前可发现只需证明存在符合上述要求的 C' 使得

$$\int_\Omega\big((d^j\varphi)D_j\varphi+(b^iD_i\varphi+c\varphi)\varphi\big)\,\mathrm{d}x\le\frac{\lambda}{2}\|D\varphi\|_{L^2}^2+\lambda C'\|\varphi\|_{L^2}^2$$

  利用 Hölder 不等式可知

$$\|d^j\varphi D_j\varphi\|_{L^1}\le\|d^j\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^{2p/(p-2)}}\|D_j\varphi\|_{L^2}$$

  利用引理可知对任何 ε 存在 C_ε 使得

$$\|\varphi\|_{L^{2p(p-2)}}\le\varepsilon\|\varphi\|_{L^m}+C_\varepsilon\|\varphi\|_{L^2}$$

  将 $\|D_j\varphi\|_{L^2}$ 放为 $\|D\varphi\|_{L^2}$，利用嵌入定理可知

$$\|d^j\varphi D_j\varphi\|_{L^1}\le\sum_j\|d^j\|_{L^p}\big(\varepsilon C_{13}\|D\varphi\|_{L^2}^2+C_\varepsilon\|D\varphi\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\big)$$

  这里 C_{13} 只与 n,Ω 相关。

对最后一项乘积应用基本不等式，使 $\|D_j\varphi\|_{L^2}^2$ 前系数充分小，并取合适的 ε 可使

$$\|d^j\varphi D_j\varphi\|_{L^1} \leq \sum_j \|d^j\|_{L^p}\left(\frac{\lambda}{6\Lambda}\|D\varphi\|_{L^2}^2 + C_{14}\|\varphi\|_{L^2}^2\right)$$

这里 C_{14} 只与 $n, p, \Omega, \Lambda, \lambda$ 相关。

利用条件将求和放为 Λ 即得

$$\|d^j\varphi D_j\varphi\|_{L^1} \leq \Lambda\left(\frac{\lambda}{6\Lambda}\|D\varphi\|_{L^2}^2 + C_{14}\|\varphi\|_{L^2}^2\right)$$

同理

$$\|b^j\varphi D_j\varphi\|_{L^1} \leq \Lambda\left(\frac{\lambda}{6\Lambda}\|D\varphi\|_{L^2}^2 + C_{14}\|\varphi\|_{L^2}^2\right)$$

而

$$\|c\varphi^2\|_1 \leq \|c\|_{L^{p/2}}\|\varphi^2\|_{L^{p/(p-2)}} = \|c\|_{L^{p/2}}\|\varphi\|_{L^{2p/(p-2)}}^2$$

同样利用引理与嵌入不等式，可知

$$\|c\varphi^2\|_1 \leq \|c\|_{L^{p/2}}\left(\varepsilon^2 C_{13}^2\|D\varphi\|_{L^2}^2 + 2\varepsilon C_\varepsilon C_{13}\|D\varphi\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + C_\varepsilon^2\|\varphi\|_{L^2}^2\right)$$

先取定 ε 使第一项充分小，再对第二项用基本不等式放缩使得其 $\|D_j\varphi\|_{L^2}^2$ 前的系数合适，即可得到

$$\|c\varphi^2\|_1 \leq \|c\|_{L^{p/2}}\left(\frac{\lambda}{6\Lambda}\|D\varphi\|_{L^2}^2 + C_{15}\|\varphi\|_{L^2}^2\right)$$

这里 C_{15} 只与 $n, p, \Omega, \Lambda, \lambda$ 相关。

将 $\|c\|_{L^{p/2}}$ 放为 Λ 后求和即得到可取 $C' = 2\Lambda C_{14} + \Lambda C_{15}$，符合要求。

弱解存在唯一性

若弱极值原理的条件成立，则原问题弱解存在唯一，且存在 C 使得

$$\|u\|_{H^1} \leq C(\|T\|_{H^{-1}} + \|g\|_{H^1})$$

- **证明：**

考虑 $T = 0, g = 0$ 的情况，由于弱解为弱下解，利用 $u \in H_0^1$，通过弱极值原理得到

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ = 0$$

于是 u 只能为 0。利用 Fredholm 二择一定理，对任何 T，弱解均存在唯一，于是算子 L 限制在 $H_0^1 \to H^{-1}$ 上具有有界逆，记为 $\hat{L}^{-1}$，并设范数为 M。

由此，记 $w = u - g$，可知

$$\|u\|_{H^1} \leq \|w\|_{H^1} + \|g\|_{H^1} = \|\hat{L}^{-1}(T - Lg)\|_{H^1} + \|g\|_{H^1} \leq M\|T - Lg\|_{H^{-1}} + \|g\|_{H^1}$$

进一步放大可知

$$\|u\|_{H^1} \leq M\|T\|_{H^{-1}} + M\|Lg\|_{H^{-1}} + \|g\|_{H^1}$$

由 $a(u, v)$ 的有界性可知 L 亦有界，设范数为 M' 即得

$$\|u\|_{H^1} \leq M\|T\|_{H^{-1}} + (MM' + 1)\|g\|_{H^1}$$

从而得证。

§1.5 弱解的正则性

先声明两个 Sobolev 空间的定理。记

$$\Delta_{h,s}u = \frac{1}{h}\big(u(x+he_s) - u(x)\big)$$

则有：

- 设 $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 < p < \infty$，对 Ω 中某紧集 Ω'，存在只与 Ω, Ω', n 相关的 C 使得在 $|h|$ 充分小时

$$\|\Delta_{h,s}u\|_{L^p(\Omega')} \le C\|D_s u\|_{L^p}$$

- 设 $u \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$，并假定存在常数 K，使得对任意 Ω 中紧集 Ω'、当 $|h|$ 充分小时

$$\|\Delta_{h,s}u\|_{L^p(\Omega')} \le K$$

  则对任何 Ω 中紧集 Ω' 有

$$\|D_s u\|_{L^p(\Omega')} \le K$$

为方便起见讨论

$$Lu = f, \quad L = -D_j a^{ij} D_i + b^i D_i + c$$

并假定 $a^{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega), b^i, c \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega)$，且

$$\exists \lambda > 0, \Lambda > 0, \quad \lambda|\xi|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega$$

内部正则性

若上述方程存在弱解 $u \in H^1$，则对任何 Ω 列紧子集 Ω'，有 $u \in H^2(\Omega')$，且存在 C 使得

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le C(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{L^2})$$

其中 C 依赖 $n, \lambda, \|a^{ij}\|_{W^{1,\infty}}, \|b^i\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty}$ 与 Ω'、Ω。
* 除了本节开始的假定以外，证明中需要控制 a 的差商，因此额外要求 a **连续**，这可以通过 Ω **边界适当光滑** (从而 $W^{1,\infty}$ 可嵌入 $C(\bar{\Omega})$) 或直接**假定** a **连续**得到，书中缺乏此假定。

- **证明：**

  对一般 v 估计

  记 $q = f - b^i D_i u - cu$，则由弱解定义 $a(u,\varphi) = (f,\varphi)_0$ 知

$$\forall \varphi \in H_0^1, \quad \int_\Omega a^{ij} D_i u D_j \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega q\varphi \mathrm{d}x$$

  记 $\Delta_h = \Delta_{h,1}$ 为 e_1 方向的差分算子，$\tau_h u(x) = u(x+he_1)$ 为平移算子。

  对任何 $v \in H_0^1$，由于其支集在 Ω 中紧，设同 $\partial\Omega$ 距离为 r，取 $h < r/2$，检验函数 $\varphi = \Delta_{-h}v$，可验证其仍在 H_0^1 中，代入计算即得

$$\int_\Omega \Delta_h(a^{ij}D_i u)D_j v \mathrm{d}x = -\int_\Omega q\Delta_{-h}v \mathrm{d}x$$

  进一步计算可得 $\Delta_h(a^{ij}D_i u) = \tau_h a^{ij}\Delta_h D_i u + D_i u \Delta_h a^{ij}$，由此利用 q 定义有

$$\int_\Omega \tau_h a^{ij} D_i \Delta_h u D_j v \mathrm{d}x = -\int_\Omega (\Delta_h a^{ij} D_i u D_j v + q\Delta_{-h}v)\mathrm{d}x$$

  假定 a 连续时，根据弱导数的定义可知牛顿莱布尼茨公式成立，即

$$\Delta_h a^{ij}(x) = \frac{1}{h}\int_0^h D_1 a^{ij}(x+te_1)\mathrm{d}t$$

由此将 D_1 放至上界即可知 $\Delta_h a^{ij}(x)\leq\|a^{ij}\|_{W^{1,\infty}}$，进一步利用 Hölder 不等式可控制第一项为

$$C_1\|Du\|_{L^2}\|Dv\|_{L^2}$$

且 C_1 只与 a 有关。
对第二项，利用本节开头的定理可知 $|h|$ 充分小时有 (记 v 的支集为 Ω'')

$$\|\Delta_{-h}v\|_{L^2}\leq C_2\|Dv\|_{L^2}$$

利用 Hölder 不等式后，对 $\|q\|_{L^2}$ 采用 Minkowski 不等式放缩，即得到第二项可控制为

$$C_3(\|f\|_{L^2}+\|Du\|_{L^2}+\|u\|_{L^2})\|Dv\|_{L^2}$$

这里 C_3 与 n,b^i,c,Ω'',Ω 有关。
利用 $\|u\|_{H^1}$ 的定义，可以最终得到

$$\int_\Omega\tau_h a^{ij}D_i\Delta_h uD_jv\mathrm{d}x\leq(C_1+C_3)(\|f\|_{L^2}+\|u\|_{H^1})\|Dv\|_{L^2}$$

利用 η 构造 v
对某紧集 Ω''，取定其内点的列紧子集 Ω'，考虑 $\eta\in C_0^\infty$ 使得 $x\in\Omega'$ 时 $\eta(x)=1$，而 $x\notin\Omega''$ 时 $\eta(x)=0$，且其恒不超过 1 (通过 Uryson 引理类似思路可构造)，则 $v=\eta^2\Delta_h u$ 即满足支集为 Ω''，记 $C_4=C_1+C_3$，代入计算并利用 Minkowski 不等式得 $|h|$ 充分小时

$$\begin{aligned}\int_\Omega\tau_h a^{ij}D_i\Delta_h uD_j\Delta_h u\mathrm{d}x\leq&-2\int_\Omega\eta\tau_h a^{ij}D_i\Delta_h u(D_j\eta)\Delta_h u\mathrm{d}x\\&+C_4(\|u\|_{H^1}+\|f\|_{L^2})(\|\eta^2D\Delta_h u\|_{L^2}+2\|\eta\Delta_h uD\eta\|_{L^2})\end{aligned}$$

利用 a^{ij} 的条件可发现左侧大于等于 (计算有 $\Delta_h D=D\Delta_h$)

$$\lambda\int_\Omega|\eta\Delta_h Du|^2=\lambda\|\eta\Delta_h Du\|_{L^2}^2$$

对右侧第一项，将 $\tau_h a^{ij}$ 放至上界，利用 Cauchy 不等式得到其不超过

$$C_5\|\eta\Delta_h Du\|_{L^2}\|D\eta\Delta_h u\|_{L^2}$$

进一步利用基本不等式得到其不超过

$$\frac{\lambda}{4}\|\eta\Delta_h Du\|_{L^2}^2+C_6\|D\eta\Delta_h u\|_{L^2}^2$$

这里 C_6 与 a^{ij},λ 相关。
对右侧第二项，利用基本不等式进行放缩可使得其不超过

$$C_7\|u\|_{H^1}^2+C_8\|f\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{4}\|\eta^2D\Delta_h u\|_{L^2}^2+C_9\|\eta\Delta_h uD\eta\|_{L^2}^2$$

再利用 η 不超过 1，放缩为

$$C_7\|u\|_{H^1}^2+C_8\|f\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{4}\|\eta D\Delta_h u\|_{L^2}^2+C_9\|\Delta_h uD\eta\|_{L^2}^2$$

最终整理得到

$$\lambda\|\eta\Delta_h Du\|_{L^2}^2\leq\frac{\lambda}{4}\|\eta\Delta_h Du\|_{L^2}^2+C_6\|D\eta\Delta_h u\|_{L^2}^2+C_7\|u\|_{H^1}^2+C_8\|f\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{4}\|\eta D\Delta_h u\|_{L^2}^2+C_9\|\Delta_h uD\eta\|_{L^2}^2$$

即得

$$\frac{\lambda}{2}\|\eta\Delta_h Du\|_{L^2}^2\leq(C_6+C_9)\|D\eta\Delta_h u\|_{L^2}^2+(C_7+C_8)(\|u\|_{H^1}^2+\|f\|_{L^2}^2)$$

利用 η 光滑紧支，可知 $D\eta$ 有上界，而上文的 η 只与 Ω',Ω'' 相关，由此可将右侧第一项放为

$$C_{10}\|\Delta_h u\|^2_{L^2(\Omega'')}$$

而这即可以利用本节开头定理放缩为 $C_{11}\|u\|^2_{L^2}\le C_{11}\|u\|^2_{H^1}$，由此最终得到

$$\|\eta\Delta_h Du\|^2_{L^2}\le C_{12}(\|u\|^2_{H^1}+\|f\|^2_{L^2})$$

消去 η

根据 η 在 Ω' 为 1 即可知

$$\|\Delta_h Du\|^2_{L^2(\Omega')}\le C_{12}(\|u\|^2_{H^1}+\|f\|^2_{L^2})$$

这里 C_{12} 依赖 $n,\lambda,\|a^{ij}\|_{W^{1,\infty}},\|b^i\|_{L^\infty},\|c\|_{L^\infty}$ 与 Ω,Ω',Ω''。但由于最终结果式已经不存在 η，可以对给定的 Ω' 取出 Ω''，再构造某个对应的 η，此时则只与 Ω' 相关，

利用本节开头定理，上式可以说明对任何 i 有 ($i\ne 1$ 时完全类似)

$$\|D_iDu\|^2_{L^2(\Omega')}\le C_{12}(\|u\|^2_{H^1}+\|f\|^2_{L^2})$$

而这又说明了 (H_0^2 表示所有二阶导数平方求和后积分的平方根)

$$\|u\|^2_{H_0^2(\Omega')}\le nC_{12}(\|u\|^2_{H^1}+\|f\|^2_{L^2})$$

再利用 $\|u\|^2_{H^2}=\|u\|^2_{H^1}+\|u\|^2_{H_0^2}$ 即得

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega')}\le (nC_{12}+1)(\|u\|^2_{H^1}+\|f\|^2_{L^2})$$

将两边开平方根后利用 $\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|$ 就是要证的结论。

当**边界适当光滑**时，可以得到**全局正则性**结论，即 $u\in H^2(\Omega)$。

定义一个 n 维空间中的区域 Ω 有 C^k 边界，若对任何 $x^0\in\partial\Omega$，存在其邻域 V 与 C^k 同胚 (即其与其逆均 C^k，且要求能延拓到边界) $\psi:V\to\mathbb{R}^n$ 使得

$$B^+=\psi(V\cap\Omega),\quad \partial B^+\cap B=\psi(V\cap\partial\Omega)$$

这里 B 为 $\mathbb{R}^n$ 单位球，设其中向量为 y，则 B^+ 为 $y^n>0$ 的部分，即上半球，$\partial B^+\cap B$ 即单位球中 $y^n=0$ 的部分。

在内部正则性假定下，若额外要求 $\partial\Omega$ 是 C^2 的，且 $g\in H^2(\Omega)$，则 $Lu=f$ 满足 $u-g\in H_0^1$ 的弱解 u 有估计

$$\|u\|_{H^2}\le C(\|u\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}+\|g\|_{H^2})$$

其中 C 依赖 $n,\lambda,\|a^{ij}\|_{W^{1,\infty}},\|b^i\|_{L^\infty},\|c\|_{L^\infty}$ 与 $\partial\Omega$ (实质上给定边界自然也依赖 Ω，这里强调与边界相关)。

- **证明：**

  特殊情况-坐标变换

  先考虑 $g=0$ 的情况。任取 $x^0\in\partial\Omega$，并取出对应的 V 与 ψ。设 $y=\psi(x)$，并记 ψ^{-1} 的 Jacobi 行列式为 J，对任何 $\varphi\in C_0^\infty(V\cap\Omega)$，类似上个证明开头并将 x 变量替换为 y，可得

$$\int_{B^+}\tilde a^{kl}\tilde D_k u\tilde D_l\varphi\,\mathrm{d}y=\int_{B^+}\tilde q\varphi\,\mathrm{d}y,\quad \tilde D_k=\frac{\partial}{\partial y_k},\quad \tilde a^{kl}=Ja^{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j},\quad \tilde q=Jq$$

  由于 ψ 的光滑性要求，可知 J、$D_i(y_k)$ 均有界。记 $M\subset\mathbb{R}^n$ 为原点中心、半径 1/2 球中 $y^n>0$ 的部分，其闭包在 B^+ 中除第 n 个分量外不会触及边界，与上个定理类似得，对 $1\le k\le n-1$ 有估计 (这里 u 看作 $u(y)=u(\psi(x))$)

$$\|\tilde D_k\tilde Du\|_{L^2(M)}\le C_1\big(\|u\|_{H^1}+\|f\|_{L^2}\big)$$

这里 C_1 依赖 $n,\lambda,\|a^{ij}\|_{W^{1,\infty}},\|b^i\|_{L^\infty},\|c\|_{L^\infty}$ 与 x^0,V,ψ。
由此已经控制了除了 $\tilde{D}_{nn}$ 外所有的二阶导数。对 $\tilde{D}_{nn}$，考虑以 y 为变量的 $\varphi\in C_0^\infty(M)$,，利用弱导数可分部积分可得在 M 中

$$\tilde{D}_l(\tilde{a}^{kl}\tilde{D}_k u)=\tilde{q}$$

于是

$$\tilde{a}^{nn}\tilde{D}_{nn}u=\tilde{q}-\sum_{k+l<2n}(\tilde{D}_l\tilde{a}^{kl}\tilde{D}_k u+\tilde{a}^{kl}\tilde{D}_{kl}u)-\tilde{D}_n\tilde{a}^{nn}\tilde{D}_n u$$

利用 a 的性质与 J 非零可知 $\tilde{a}^{nn}$ 有非零下界，而右侧每一项的 L^2 范数都可以被 $\|u\|_{H^1}+\|f\|_{L^2}$ 控制，因此左侧的 L^2 范数也必然可以被 $\|u\|_{H^1}+\|f\|_{L^2}$ 控制，也即最终得到

$$\|u\|_{H_0^2(M)}\le C_2(\|u\|_{H^1}+\|f\|_{L^2})$$

C_2 依赖 $n,\lambda,\|a^{ij}\|_{W^{1,\infty}},\|b^i\|_{L^\infty},\|c\|_{L^\infty}$ 与 x^0,V,ψ。

特殊情况-拼接整体

坐标变换回到 Ω 中，设 $V'=\psi^{-1}(M)$，仍利用映射光滑性可知变换产生的项均有界，因此

$$\|u\|_{H_0^2(V')}\le C_2(\|u\|_{H^1}+\|f\|_{L^2})$$

从而有

$$\|u\|_{H^2(V')}\le (C_2+1)(\|u\|_{H^1}+\|f\|_{L^2})$$

C_2 依赖 $n,\lambda,\|a^{ij}\|_{W^{1,\infty}},\|b^i\|_{L^\infty},\|c\|_{L^\infty}$ 与 x^0,V,ψ。
对所有 x^0，可取出有限个 V' 覆盖 $\partial\Omega$，而 Ω 去除这些 V' 的剩下部分 Ω' 与边界距离非零，因此闭包为紧，其上利用上个定理可控制，将上个定理的 C 与有限个 C_2+1 相加成为 C_3，可得到

$$\|u\|_{H^2}\le C_3(\|u\|_{H^1}+\|f\|_{L^2})$$

由于区域边界给定时有限覆盖的 x^0 即给定，去除所有 V' 后的 Ω' 也给定，对于 x^0,V',ψ 的依赖均变为对区域边界的依赖，即得 C_3 依赖 $n,\lambda,\|a^{ij}\|_{W^{1,\infty}},\|b^i\|_{L^\infty},\|c\|_{L^\infty}$ 与 $\partial\Omega$，符合要求。

一般情况

对一般的 g，考虑 $u-g$ 满足的方程，根据已证有

$$\|u-g\|_{H^2}\le C_3\big(\|u-g\|_{H^1}+\|f-Lg\|_{L^2}\big)$$

从而利用 Minkowski 不等式

$$\|u\|_{H^2}\le\|g\|_{H^2}+C_3\|u\|_{H^1}+C_3\|g\|_{H^1}+C_3\|f\|_{L^2}+C_3\|Lg\|_{L^2}$$

注意到 $\|g\|_{H^1}\le\|g\|_{H^2}$，且由于 L 为至多二阶的微分算子，每个微分前的分量有界，即得 $\|Lg\|_{L^2}$ 也能被 $C_4\|g\|_{H^2}$ 控制，这里 C_4 与 a^{ij},b^i,c 相关，综合得

$$\|u\|_{H^2}\le C_5(\|u\|_{H^1}+\|f\|_{L^1}+\|g\|_{H^2})$$

最后我们证明，对任何 $\varepsilon>0$，存在与 n,Ω 相关的 C_ε 使得

$$\|u\|_{H^1}\le\varepsilon\|u\|_{H^2}+C_\varepsilon\|u\|_{L^2}$$

再取 $\varepsilon=1/(2C_5)$ 得到最终结论。
利用泛函分析中的结论与 Sobolev 空间的紧嵌入关系，由 H^2 到 H^1 的嵌入紧、H^1 到 L^2 的嵌入连续可得成立。
* 上述结论需要区域边界满足一定的基本条件，如一致内锥条件。

更高阶正则性
若开头对 a^{ij} 的假设成立，且额外有 $a^{ij} \in W^{k+1,\infty}, b^i, c \in W^{k,\infty}$，则原方程弱解满足 (可类似之前估计证明)

$$u \in W^{k+2,2}_{loc}(\Omega)$$

这里 loc 代表内部任何列紧子集中，k 为非负整数。
进一步地，若还有 $\partial\Omega$ 为 C^{k+2}，$g \in W^{k+2,2}$，则 $Lu = f$ 满足 $u - g \in H^1_0$ 的弱解 u 有 $u \in W^{k+2,2}$。
当 a^{ij}, b^i, c 无穷次可微时，对任意 k 有 $u \in W^{k+2,2}_{loc}(\Omega)$，利用嵌入定理即可知 $u \in C^\infty(\Omega)$。

二 Schauder 理论

* 研究**古典解**相关的估计。

§2.1 Hölder 空间

设法定义某种意义下的**分数次微商**：设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，$u$ 定义在 Ω 上，取 $0 < \alpha < 1$，记

$$H^\alpha_{x_0}[u;\Omega] = \sup_{x\in\Omega} \frac{\|u(x) - u(x_0)\|}{\|x - x_0\|^\alpha}$$

若其小于 ∞，称 u 在 x_0 有指数为 α 的 **Hölder 连续性**，该值称为 u 在 x_0 关于 Ω 的 α 次 Hölder 系数。
若 $\alpha = 1$，则成为 Lipschitz 连续，对应为 Lipschitz 系数。

Hölder 空间：考虑 $0 < \alpha \le 1$，定义

$$[u]_{0;\Omega} = [u]_{0,0;\Omega} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

$$[u]_{\alpha;\Omega} = [u]_{0,\alpha;\Omega} = \sup_{x\in\Omega} H^\alpha_x[u;\Omega]$$

$$[u]_{k,0;\Omega} = \sum_{|v|=k} [D^v u]_{0;\Omega}$$

$$[u]_{k,\alpha;\Omega} = \sum_{|v|=k} [D^v u]_{\alpha;\Omega}$$

这里 v 为多重指标，即 n 重自然数向量，$|v|$ 为一范数，$D^v u$ 代表对第 i 个分量求导 v_i 次。
* 将 $\sum_{|v|=k} |D^v u|_{\alpha;\Omega}$ **简记**为 $[D^k u]_{\alpha;\Omega}$。
记 $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ 为 $C^k(\bar\Omega)$ 中 $[u]_{k,\alpha;\Omega} < \infty$ 的所有函数，在 $C^k(\bar\Omega)$ 中可定义范数

$$|u|_{k;\Omega} = \sum_{m=0}^{k} [u]_{m,0;\Omega}$$

在 $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ 中可定义范数

$$|u|_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [u]_{k,\alpha;\Omega}$$

也可将 $|u|_{0,\alpha;\Omega}$ 记为 $|u|_{\alpha;\Omega}$，由于 k 与 α 范围不同，一般无歧义。
可验证其均为 Banach 空间。下在无歧义时省略 Ω，且默认 $0 < \alpha \le 1$。

乘积 Hölder 模运算：设 $u, v \in C^{0,\alpha}$ (或记为 C^α)，则

$$[uv]_\alpha \le [u]_0[v]_\alpha + [u]_\alpha[v]_0 \le |u|_\alpha |v|_\alpha$$

- **证明：**

第二个不等号直接利用定义展开可得，从而只需证明第一个不等号，而利用 Minkowski 不等式

$$\|u(x)v(x)-u(y)v(y)\| \le \|u(x)\|\|v(x)-v(y)\| + \|v(y)\|\|u(x)-u(y)\|$$

并将 $\|u(x)\|$、$\|v(y)\|$ 放为 $[u]_0$、$[v]_0$ 即得证。

* 由此利用 $[uv]_0 \le [u]_0[v]_0$ 可知 $|uv|_\alpha \le |u|_\alpha |v|_\alpha$。

内插不等式：设 Ω 有界，$u \in C^{2,\alpha}$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在依赖 n, α, Ω 的 C_ε 使得

$$[u]_{2,0} \le \varepsilon [u]_{2,\alpha} + C_\varepsilon |u|_0$$

$$[u]_{1,0} \le \varepsilon [u]_{2,\alpha} + C_\varepsilon |u|_0$$

- **证明**：

  只证明第一个不等式，第二个类似即得。

  若结论不成立，存在某 ε，对任何 N 都存在 u_N 满足

$$[u_N]_{2,0} > \varepsilon [u_N]_{2,\alpha} + N|u_N|_0$$

  由于齐次，可不妨除以倍数使得 $|u_N|_2 = 1$，由此左侧不超过 1，从而

$$[u_N]_{2,\alpha} < \frac{1}{\varepsilon}, \quad |u_N|_0 < \frac{1}{N}$$

  由第一条可知 u_N 在 $C^{2,\alpha}$ 中一致有界 (由区域有界，高阶导数可控制低阶导数)，利用 Arzelà-Asgoli 引理可取出 $|\cdot|_{2,\alpha}$ 下收敛子列，其也在 $|\cdot|_2$ 下收敛，但第二条则表明其一致收敛于 0，与 $|u_N|_2 = 1$ 矛盾。

  * 此证明事实上与泛函分析上利用紧嵌入证明本质完全相同。

有限锥：对非空集合 $V \subset \mathbb{R}^n$，若存在 $x, c \in \mathbb{R}^n$、$d > c^T x$、$\mathbb{R}^n$ 的一组基 b^i，使得

$$V = \left\{x + \mu_i b^i \mid \forall i = 1, \dots, m, \quad \mu_i \ge 0\right\} \cap \{y \mid c^T y \le d\}$$

则称其为一个有限锥。其中 x 称为锥的顶，$V \cap \{y \mid c^T y = d\}$ 称为锥的底，x 到平面 $c^T y \ge d$ 的距离称为锥的高，而考虑以 x 为球心 1 为半径的球 $B_1(x)$，$\partial B_1(x) \cap V$ 的面积 (可发现 V 球对称，以体积比例等定义均可) 称为其立体角。

区域 Ω 有**锥性质**：存在有限锥 V 使得对任何 $x \in \Omega$，存在全等于 V 且以 x 为顶的锥包含在 Ω 内。

更好的内插不等式：设 Ω 具有锥性质，对应的 V 高为 h，则对于任何 $0 < \varepsilon \le h$，存在只依赖 n, α 与锥的立体角的 C 使得

$$[u]_{2,0} \le \varepsilon^\alpha [u]_{2,\alpha} + \frac{C}{\varepsilon^2}|u|_0$$

$$[u]_{1,0} \le \varepsilon^{1+\alpha} [u]_{2,\alpha} + \frac{C}{\varepsilon}|u|_0$$

- **证明**：

  引理：设 $\tilde{u}(x) = u(\varepsilon x)$，并对应变换定义域，则 $[\tilde{u}]_{k,\alpha} = \varepsilon^{k+\alpha}[u]_{k,\alpha}$。

  引理证明：直接由定义计算即可。

  第一个不等式：设某个高为 1、顶为原点的锥为 V_1，若 $u \in C^{2,\alpha}(V_1)$，利用内插不等式可知存在依赖 n, α, V_1 的 C 使得

$$[u]_{2,0;V_1} \le [u]_{2,\alpha;V_1} + C|u|_{0;V_1}$$

  考虑 V_1 关于原点位似，位似比为 ε 的锥 V_ε，作变量替换 $y = x/\varepsilon$，且 $\tilde{u}(y) = u(\varepsilon y)$，则若 $u \in C^{2,\alpha}(V_\varepsilon)$，对 $\tilde{u}$ 应用上述不等式得到

$$[u]_{2,0;V_\varepsilon} \le \varepsilon^\alpha [u]_{2,\alpha;V_\varepsilon} + \frac{C}{\varepsilon^2}|u|_{0;V_\varepsilon}$$

回到原问题，对任何 $x\in\Omega$ 与 $\varepsilon<h$ 可找到某个以 x 为顶的锥 V_ε，注意平移不影响上式，因此顶是否是原点并不重要，从而

$$[u]_{2,0;V_\varepsilon}\le\varepsilon^\alpha[u]_{2,\alpha;V_\varepsilon}+\frac{C}{\varepsilon^2}|u|_{0;V_\varepsilon}\le\varepsilon^\alpha[u]_{2,\alpha}+\frac{C}{\varepsilon^2}|u|_0$$

再注意 $[u]_2$ 是以上界定义的，而任何 x 都可取出相应的 V_ε，从而即有

$$[u]_{2,0}\le\varepsilon^\alpha[u]_{2,\alpha;V_\varepsilon}+\frac{C}{\varepsilon^2}|u|_{0;V_\varepsilon}\le\varepsilon^\alpha[u]_{2,\alpha}+\frac{C}{\varepsilon^2}|u|_0$$

而上述过程中的 C 除了 n,α 外只与对应锥 V 位似到高为 1 情况相关，即只与立体角相关。

第二个不等式：完全类似作代换，利用引理得证。

* 从引理也可看出其能看作分数次微商的原因，也可直接将 $[u]_{k,\alpha}$ 看作 $[u]_{k+\alpha}$，计算可发现当 $u\in C^1$ 时 $[u]_{1,0}=[u]_{0,1}$。

§2.2 磨光核

由于 Hölder 模本身难以估算，考虑磨光核 [mollifier] 以提供其**等价范数**。

对非负且支集在 $B_1(0)$ 中的 $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，若其在全空间积分为 1，则称为磨光核，如可取合适的 k 使得

$$\rho(x)=\begin{cases}k\exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right) & \|x\|<1\\ 0 & \|x\|\ge 1\end{cases}$$

为磨光核。

磨光函数：对 $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 与磨光核 ρ，u 的磨光函数定义为

$$\tilde u(x,\tau)=\tau^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\rho((x-y)/\tau)u(y)\mathrm{d}y$$

连续时的估计：若 $u\in C(\mathbb{R}^n)$，则 $\tau\to0^+$ 时 $\tilde u(x,\tau)$ 内闭一致收敛于 u，且

$$\sup|\tilde u|\le\sup|u|$$

$$\forall|v|=k,\quad|D^v\tilde u(x,\tau)|\le C\tau^{-k}\sup_{B_\tau(x)}u$$

这里 C 与 n,k,ρ 相关，D^v 可以对 x 的任何分量或 τ 求导。

- **证明：**

利用 ρ 积分为 1 直接计算并换元可知

$$\tilde u(x,\tau)-u(x)=\int_{B_1(0)}\rho(z)(u(x-\tau z)-u(x))\mathrm{d}z$$

由此利用紧集一致连续性即可发现 $\tau\to0^+$ 时在紧集上有一致收敛。

利用归纳法可证明

$$D^v(x,\tau)=\tau^{-n-k}\int_{\mathbb{R}^n}P_v\left(\frac{x-y}{\tau}\right)u(y)\mathrm{d}y$$

其中 $P(v)$ 为某支集在 $\overline{B_1(0)}$ 中的光滑函数，换元可得

$$|D^v\tilde u(x,\tau)|\le\tau^{-k}\left|\int_{\mathbb{R}^n}P_v(z)u(x-\tau z)\mathrm{d}z\right|\le\tau^{-k}\sup_{B_\tau(x)}|u|\int_{\mathbb{R}^n}|P_v(z)|\mathrm{d}z$$

而最后的积分可对任何 v 求上界，从而得到只与 n,k,ρ 相关的界。

C^α 时的估计：若 $u\in C^\alpha_{loc}(\mathbb{R}^n)$，则

$$|\tilde{u}(x,\tau)|\le \tau^\alpha H^\alpha_x[u;B_\tau(x)]$$

$$\forall |v|=k,\quad |D^v\tilde{u}(x,\tau)|\le C\tau^{\alpha-k}H^\alpha_x[u;B_\tau(x)]$$

这里 C 与 n,α,k,ρ 相关。

- **证明：**

仍利用

$$\tilde{u}(x,\tau)-u(x)=\int_{B_1(0)}\rho(z)(u(x-\tau z)-u(x))\mathrm{d}z$$

直接由定义可估算得第一个不等式成立，下证第二个不等式。

将指标 v 分为对 τ 求导的部分 β_0 与对 x 求导的 n 重指标 β，于是 $D^v=D^{\beta_0}_\tau D^\beta_x$，先考虑 $\beta=0$ 时，则 $\beta_0=k>0$，对上式微商，类似之前的归纳可发现

$$D^v\tilde{u}(x,\tau)=\tau^{-k}\int_{\mathbb{R}^n}P_v(z)(u(x-\tau z)-u(x))\mathrm{d}z$$

这里 P_v 支集在 $B_1(0)$ 中，由此再次利用定义可知第二个不等式成立。

最后，当 $\beta\ne 0$ 时，直接由定义计算可知

$$D^v\tilde{u}(x,\tau)=\tau^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}D^v\left(\rho\left(\frac{x-y}{\tau}\right)\right)u(y)\mathrm{d}y$$

在积分中减去 $u(x)$ 再增加它，并将第二项中利用 $\rho((x-y)/\tau)$ 对 x 每求一次导，相当于其对 y 求一次导并加负号，可得其为

$$\tau^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}D^v\left(\rho\left(\frac{x-y}{\tau}\right)\right)(u(y)-u(x))\mathrm{d}y+(-1)^{|\beta|}\tau^{-n}u(x)\int_{\mathbb{R}^n}D^{\beta_0}_\tau D^\beta_y\rho\left(\frac{x-y}{\tau}\right)\mathrm{d}y$$

由 ρ 紧支，由 $\beta\ne 0$，利用 Gauss 公式即可知第二项一定为 0，再对第一项与之前类似用归纳法计算可得其为

$$\tau^{-n-k}\int_{\mathbb{R}^n}P_v\left(\frac{x-y}{\tau}\right)(u(y)-u(x))\mathrm{d}y=\tau^{-k}\int_{B_1(0)}P_v(z)(u(x-\tau z)-u(x))\mathrm{d}z$$

从而由定义估算可知成立。

反向估计：若 $u\in C(\mathbb{R}^n)$ 且对某 $0<\alpha\le 1$、$R>0$ 有 (这里 D 为对 y 与 τ 的梯度)

$$\sup_{y\in B_R(x),0<\tau<R}\tau^{1-\alpha}\|D\tilde{u}(y,\tau)\|<\infty$$

则有

$$H^\alpha_x[u;B_R(x)]\le C\sup_{y\in B_R(x),0<\tau<R}\tau^{1-\alpha}\|D\tilde{u}(y,\tau)\|$$

这里 C 与 n,α,ρ 相关。

- **证明：**

对 $\|x-y\|<R$，取 $\tau=\|x-y\|$，有

$$|u(x)-u(y)|\le|\tilde{u}(x,\tau)-u(x)|+|\tilde{u}(x,\tau)-\tilde{u}(y,\tau)|+|\tilde{u}(y,\tau)-u(y)|$$

直接估算可知

$$|\tilde{u}(x,\tau)-u(x)|=\left|\tau\int_0^1 D_\tau\tilde{u}(x,\eta\tau)\mathrm{d}\eta\right|\le\tau^\alpha\int_0^1\frac{(\tau\eta)^{1-\alpha}|D_\tau\tilde{u}(x,\eta\tau)|}{\eta^{1-\alpha}}\mathrm{d}\eta$$

再直接放大分子可知

$$|\tilde{u}(x,\tau)-u(x)| \le \sup_{0<\tau<R}\left\{\tau^{1-\alpha}|D_\tau(x,\tau)|\right\}\tau^\alpha\int_0^1\eta^{\alpha-1}\mathrm{d}\eta = \frac{\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{0<\tau<R}\left\{\tau^{1-\alpha}|D_\tau(x,\tau)|\right\}$$

而利用微分中值定理可知存在 x,y 连线上的 x^* 使得

$$|\tilde{u}(x,\tau)-\tilde{u}(y,\tau)| = \|D_x\tilde{u}(x^*,\tau)\||x-y| = \|D_x\tilde{u}(x^*,\tau)\|\tau \le \tau^\alpha \sup_{z\in B_R(x),0<\tau<R}\tau^{1-\alpha}\|D_x\tilde{u}(z,\tau)\|$$

由此整理即得到

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{\|x-y\|^\alpha} \le \left(\frac{2}{\alpha}+1\right)\sup_{z\in B_R(x),0<\tau<R}\tau^{1-\alpha}\|D\tilde{u}(z,\tau)\|$$

从而得证。

最终结论

1. 假设 $u\in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$，则存在仅依赖 n,α,ρ 的常数 C 使得

$$\frac{1}{C}[u]_\alpha \le \sup_{\tau>0,x}\tau^{1-\alpha}\|D\tilde{u}(x,\tau)\| \le C[u]_\alpha$$

- **证明：**

  利用 C^α 时的估计与反向估计可直接得到结论，取 C 为 C^α 时的估计中 $k=1$ 时的 C 与反向估计的 C 中较大者即可。

2. 假设 $u\in C^{k+1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$，设 β 为 n 重指标，且 $|\beta|=k$，则对任何指标 i，存在仅依赖 n,α,ρ 的常数 C 使得 (这里 D^β 与 Hölder 半模都仅针对 x，D 代表对所有可能分量求导，中间这项包扩 τ，$[Dv]_\alpha$ 含义见前文简记)

$$[DD^\beta u]_\alpha \le \sup_{\tau>0}[DD^\beta\tilde{u}(x,\tau)]_\alpha \le C[DD^\beta u]_\alpha$$

- **证明：**

  记 D_iD^β 为 D^v (D_i 为对 x_i 求导)，第一个不等号直接利用定义可知 $\lambda>0$ 时对任何 x,y 有

$$\frac{|D^v\tilde{u}(x,\lambda)-D^v\tilde{u}(y,\lambda)|}{|x-y|^\alpha} \le \sup_{\tau>0}[D^v\tilde{u}(x,\tau)]_\alpha$$

  再令 $\lambda\to0$ 利用收敛性即可知 $[D^vu]_\alpha \le \sup_{\tau>0}[D^v\tilde{u}(x,\tau)]_\alpha$，而左侧的每一项不超过中间的对应项，中间还多出一项对 τ 求导，可知求和不超过中间。

  记 $\tau_hu(x)=u(x+h)$，并记设 $h=y-x$，$w=u-\tau_hu$，则利用磨光变换线性性可知对任何 D_j，其中 j 可能为 x_i 或 τ 有

$$|D_jD^\beta\tilde{u}(x,\tau)-D_jD^\beta\tilde{u}(y,\tau)| = |D_jD^\beta\tilde{w}(x,\tau)|$$

  利用分部积分可发现，记 $U=D^\beta w$，有

$$|D_jD^\beta\tilde{w}(x,\tau)| = |D_j\tilde{U}(x,\tau)|$$

  在 C^α 时的估计的第二个不等式中取 $\alpha=k=1$，可得

$$|D_jD^\beta\tilde{u}(x,\tau)-D_jD^\beta\tilde{u}(y,\tau)| \le CH_x^1[U;B_\tau(x)] \le CH_x^1[U;\mathbb{R}^n]$$

  而利用微分中值定理即可发现

$$H_x^1[U;\mathbb{R}^n] \le [\|DU\|]_0 = [\|DD^\beta(u-\tau_hu)\|]_0$$

从而

$$|D_jD^\beta\tilde{u}(x,\tau)-D_jD^\beta\tilde{u}(y,\tau)|\le C[\|DD^\beta(u-\tau_hu)\|]_0$$

利用 $h=x-y$，两侧同除以 $\|x-y\|^\alpha$，若右侧上界在 x_0 处取到，由定义即有

$$\begin{aligned}[D_jD^\beta\tilde{u}(x,\tau)]_\alpha&\le C\frac{[\|DD^\beta(u-\tau_hu)\|]_0}{\|x-y\|^\alpha}=C\left\|\frac{DD^\beta u(x_0)-DD^\beta u(x_0+h)}{\|x-y\|^\alpha}\right\|\\&=C\left\|\frac{DD^\beta u(x_0)-DD^\beta u(x_0+h)}{\|x_0+h-x_0\|^\alpha}\right\|\le C\left(\sum_j[D_jD^\beta u]_\alpha^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

若存一列 x_n 使得右侧趋于上界，由于对每个都满足估算，利用极限可知仍然满足。由于对每个分量都有估计，再利用有限维空间范数等价性，取 $C'=(n+1)^2C$ 即得对向量范数也有估计，从而得证。

§2.3 位势方程解的 $C^{2,\alpha}$ 估计

由上述内容可知对 Hölder 模的估计只需要估计其磨光函数的微商，由此需要先进行**微商估计**。本节中 $\triangle$ 为 Laplace 算子。

位势方程导数估计：设 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $-\triangle u=f$，则对任何 $R>0$ 有

$$|D_iu(x)|\le\frac{n}{R}\operatorname*{osc}_{B_R(x)}u+R\sup_{B_R(x)}|f|$$

其中 osc 表示振幅，即上下确界相减。

- **证明：**

  可不妨设 x 为原点，记 $F_0=\sup_{B_r}f$，对任何 ρ，由 $\triangle=\nabla\cdot\nabla$，利用 Gauss 公式并极坐标换元可知 (第二部分中的 r 为边界处单位外法向量)

$$\int_{B_\rho(0)}\triangle(D_iu)\mathrm{d}x=\int_{\partial B_\rho(0)}\frac{\partial D_iu}{\partial r}\mathrm{d}S=\rho^{n-1}\int_{|\omega|=1}\frac{\partial D_iu}{\partial\rho}(\rho\omega)\mathrm{d}\omega=\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho(0)}D_iu\mathrm{d}S\right)$$

  最后一个等号先将对 ρ 求导移到积分外，再利用 $\mathrm{d}S=\rho^{n-1}\mathrm{d}\omega$ (每个分量乘 ρ) 的换元。另一方面利用 $\triangle D_i=D_i\triangle$，考虑第 i 个分量为 $\triangle u$，其他分量为 0 的函数，则其散度恰为 $D_i\triangle u$，利用 Gauss 公式得

$$\int_{B_\rho(0)}\triangle(D_iu)\mathrm{d}x=\int_{\partial B_\rho(0)}\triangle u\cos(r,x_i)\mathrm{d}S=-\int_{\partial B_\rho(0)}f\cos(r,x_i)\mathrm{d}S$$

  由此将 f 放至 F_0，$|\cos(r,x_i)|$ 放成 1，利用 n 维球表面积为 $n\omega_n\rho^{n-1}$ (ω_n 为 n 维单位球体积) 即可知

$$\left|\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho(0)}D_iu\mathrm{d}S\right)\right|\le n\omega_nF_0$$

  将其改写为

$$\pm\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho(0)}D_iu\mathrm{d}S\right)\le n\omega_nF_0$$

  左右对 ρ 从 0 到 r 积分 (注意由连续性，0 处左侧偏导中极限为 $n\omega_nD_iu(0)$)，再同乘 r^{n-1} 后对 r 从 0 到 R 积分 (这时所有对半径 r 球面的累计会变为球体积分)，得到

$$\pm\left(\int_{B_r}D_iu\mathrm{d}x-\omega_nR^nD_iu(0)\right)\le\frac{n}{n+1}\omega_nR^{n+1}F_0\le\omega_nR^{n+1}F_0$$

  整理得

$$|D_iu(0)|\le RF_0+\frac{1}{\omega_nR^n}\left|\int_{B_r}D_iu\mathrm{d}x\right|$$

由于 $u(x)-u(0)$ 对第 i 个分量求导与 $u(x)$ 相同，对 $u(x)-u(0)$ 类似之前对 $D_i\triangle u$ 使用 Gauss 公式可知

$$\left|\int_{B_r} D_i u\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\partial B_r}(u(x)-u(0))\cos(r,x_i)\mathrm{d}S\right| \le n\omega_n R^{n-1}\operatorname*{osc}_{B_r} u$$

从而可代入得证。

位势方程 $C^{2,\alpha}$ **估计**：若 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $-\triangle u=f$，对 $\alpha\in(0,1)$，存在只与 n,α 相关的 C 使得对任何 i,j 有

$$[D_{ij}u]_\alpha \le C[f]_\alpha$$

- **证明：**

磨光变换

对任意球 $B_R(x_0)$，记 $g(x)=f(x)-f(x_0)$，则根据 $[f]_\alpha$ 定义类似上节最后估算可知

$$\sup_{B_R(x_0)}|g(x)|\le R^\alpha[f]_\alpha$$

将 $f(x)$ 写为 $g(x)+f(x_0)$，方程两边磨光后得到 (利用分部积分与 u 紧支，由于 $\triangle$ 均为二阶导可知 $\triangle u$ 的磨光即等于 $\triangle\tilde{u}$)

$$-\triangle\tilde{u}(x,\tau)-f(x_0)=\tilde{g}(x,\tau)$$

* 此处的磨光核已经取定，因此常数不再与 ρ 相关。

求导即得

$$-\triangle D_{ij}\tilde{u}(x,\tau)=D_{ij}\tilde{g}(x,\tau)$$

这成为了关于 $D_{ij}\tilde{u}$ 的新的位势方程，应用导数估计 (并放大第二项) 可得

$$|D_{kij}\tilde{u}(x_0,\tau)|\le n\left(\frac{1}{R}\operatorname*{osc}_{B_R(x_0)} D_{ij}\tilde{u}(x,\tau)+R\sup_{B_R(x_0)}|D_{ij}\tilde{g}|\right)$$

再次利用类似上节最后的估算可将 osc 放大，得到存在与 n,α 相关的 C_2 使得 (由于这里距离上界为 $2R$，C_2 比起 n 需要多乘 2^α)

$$|D_{kij}\tilde{u}(x_0,\tau)|\le C_2\left(\frac{1}{R^{1-\alpha}}[D_{ij}\tilde{u}]_\alpha+R\sup_{B_R(x_0)}|D_{ij}\tilde{g}|\right)$$

还原估算

利用上节的连续时估计的到每个 $x\in B_R(x_0)$ 可知存在只依赖 n 的 C_3 使得

$$\sup_{B_R(x_0)}|D_{ij}\tilde{g}|\le C_3\tau^{-2}\sup_{B_{R+\tau}(x_0)}|g|$$

利用上节最终结论 2 可知存在只与 n,α 相关的 C_4 使得

$$[D_{ij}\tilde{u}]_\alpha\le C_4[DD_ju]_\alpha$$

将常数合为只与 n,α 相关的 C_5，并设 $R=N\tau$，其中 $N>1$，两边同乘 $\tau^{1-\alpha}$ 可得

$$\tau^{1-\alpha}|D_{kij}\tilde{u}(x_0,\tau)|\le C_5\big(N^{\alpha-1}[DD_ju]_\alpha+N\tau^{-\alpha}\sup_{B_{R+r}(x_0)}|g|\big)$$

再利用证明开始的估计，即可知

$$\tau^{1-\alpha}|D_{kij}\tilde{u}(x_0,\tau)|\le C_5\big(N^{\alpha-1}[DD_ju]_\alpha+N(N+1)^\alpha[f]_\alpha\big)$$

由于对每个 k 都可被控制，控制向量范数可知

$$\tau^{1-\alpha}\|DD_{ij}\tilde{u}(x_0,\tau)\|\le C_6\big(N^{\alpha-1}[DD_ju]_\alpha+N(N+1)^\alpha[f]_\alpha\big)$$

而利用上节最终结论 1 可知存在只与 n, α 相关的常数 C_7 使得 (再次利用分部积分，$D_{ij}u$ 的磨光与 $D_{ij}\tilde{u}$ 相同)

$$[D_{ij}u]_\alpha \le C_7 \sup_{\tau>0,x_0} \tau^{1-\alpha}\|DD_{ij}\tilde{u}(x_0,\tau)\| \le C_6C_7\big(N^{\alpha-1}[DD_ju]_\alpha + N(N+1)^\alpha[f]_\alpha\big)$$

同样，控制向量可得存在只与 n, α 相关的 C_8 使

$$[DD_ju]_\alpha \le C_8\big(N^{\alpha-1}[DD_ju]_\alpha + N(N+1)^\alpha[f]_\alpha\big)$$

取 N 使得 $N^{\alpha-1} = C_8/2$，即可移项得到

$$[DD_ju]_\alpha \le C_9[f]_\alpha$$

而左侧向量模长大于等于任何分量模长 $|D_{ij}u|_\alpha$，从而得证。

常系数椭圆型方程：考虑方程

$$-a^{ij}D_{ij}u = f$$

其中常数矩阵 a^{ij} (由偏导可交换不妨设其对称) 满足存在 $\lambda, \Lambda > 0$ 使得

$$\lambda\|\xi\|^2 \le a^{ij}\xi_i\xi_j \le \Lambda\|\xi\|^2$$

其解 u 若在 $C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ 中，则存在只与 $n, \alpha, \Lambda/\lambda$ 相关的 C 使得对任何 i, j 有

$$[D_{ij}u]_\alpha \le C\lambda^{-1}[f]_\alpha$$

- **证明：**

  由条件 $A = (a^{ij})$ 正定，从而存在可逆矩阵 $B = (b^{ij})$ 使得 $B^TAB = I$，作变量代换 $y = Bx$，并设 $\bar{u}(y) = u(x) = u(B^{-1}y)$、$\bar{f}(y) = f(x)$，进行线性代数计算：由 $D_i = b^{ij}D_j^{(y)}$ 可知

  $$D_{ij} = b^{ik}b^{jl}D_{kl}^{(y)}$$

  从而利用 $B^TAB = 1$ 可得

  $$a^{ij}D_{ij} = b^{ik}a^{ij}b^{jl}D_{kl}^{(y)} = \sum_k D_{kk}^{(y)} = \triangle_y$$

  因此原方程化为

  $$-\triangle_y\bar{u}(y) = \bar{f}(y)$$

  从而根据位势方程的情况有对 y 的估计

  $$[D_{ij}\bar{u}]_\alpha \le C_1[\bar{f}]_\alpha$$

  计算可发现

  $$\|B\beta - B\gamma\|^2 = (\beta-\gamma)^TB^TB(\beta-\gamma)$$

  而利用 $\det(\lambda I - BB^T) = \det(\lambda I - B^TB)$ 可知两者特征值相同，而 $BB^T = A^{-1}$，其特征值在 $[\Lambda^{-1}, \lambda^{-1}]$，由此

  $$\Lambda^{-1}\|\beta-\gamma\|^2 \le \|B\beta - B\gamma\|^2 \le \lambda^{-1}\|\beta-\gamma\|^2$$

  于是利用定义可得 (中间两项即构成上方对 y 的估计)

  $$\begin{aligned}\lambda^{\alpha/2}\sup_{\beta,\gamma}\frac{|D_{ij}^{(y)}u(\beta) - D_{ij}^{(y)}u(\gamma)|}{\|\beta-\gamma\|^\alpha} &\le \sup_{\beta,\gamma}\frac{|D_{ij}^{(y)}u(\beta) - D_{ij}^{(y)}u(\gamma)|}{\|B\beta-B\gamma\|^\alpha} \\ &\le C_1\sup_{\alpha,\beta}\frac{|f(\beta)-f(\gamma)|}{\|B\beta-B\gamma\|^\alpha} \le C_1\Lambda^{\alpha/2}\sup_{\beta,\gamma}\frac{|f(\beta)-f(\gamma)|}{\|\beta-\gamma\|^\alpha}\end{aligned}$$

即存在与 $n,\alpha,\Lambda/\lambda$ 相关的 C_2 使得

$$[D_{ij}^{(y)}u(x)]_\alpha\le C_2[f]_\alpha$$

利用之前的等式，利用半模的 Hölder 不等式与向量的范数等价性可知存在与 $n,\alpha,\Lambda/\lambda$ 相关的 C_3 使得

$$[D_{ij}u(x)]_\alpha\le|b^{ik}b^{jl}|[D_{kl}^{(y)}u(x)]_\alpha\le C_2\sum_{k,l}|b^{ik}b^{jl}|[f]_\alpha=C_2\sum_{k}|b^{ik}|\sum_{l}|b^{jl}|[f]_\alpha\le C_3\|b^i\|\|b^j\|[f]_\alpha$$

这里 b^i 代表 b 的第 i 个行向量，只需说明能取出合适的 B 使得 $\|b^i\|\|b^j\|\le\lambda^{-1}$ 即可。

由于 A 正定，考虑正交相似对角化 $Q^TAQ=D$，D 为元素均正的对角阵。取 $B=Q\sqrt{D^{-1}}$，由于 A 的最小特征值至少为 λ，B 的每个位置不超过 Q 的 $\lambda^{-1/2}$ 倍，而 Q 每行二范数为 1，从而得证。

边界估计

记 $\mathbb{R}_+^n$ 为 $\mathbb{R}^n\cap\{x_n>0\}$，若 $u\in C_0^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ 满足

$$-\triangle u(x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}_+^n$$

$$u(x)=0,\quad x\in\partial\mathbb{R}_+^n$$

则对 $\alpha\in(0,1)$，存在只与 n,α 相关的 C 使得对任何 i,j 有

$$[D_{ij}u]_\alpha\le C[f]_\alpha$$

- **证明：**

  奇延拓

  对 $x_0\in\mathbb{R}_+^n$，定义 $g(x)=f(x)-f(x_0)$，记 $x=(x',x_n)$，利用奇延拓扩充定义 $\mathbb{R}^n$ 中的函数

$$v(x)=\begin{cases}u(x) & x_n\ge0\\ -u(x',-x_n) & x_n<0\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}g(x) & x_n>0\\ -g(x',-x_n) & x_n<0\end{cases}$$

$$f_0(x)=\begin{cases}f(x_0) & x_n>0\\ -f(x_0) & x_n<0\end{cases}$$

  由 u 在边界为 0 可发现 $v\in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$，且其对 x' 的任何分量求导后在 $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ 中。延拓后满足方程

$$-\triangle v(x)-f_0(x)=h(x),\quad x_n\ne0$$

  而由于磨光变换由积分定义，可忽略 $x_n=0$ 时未定义的部分，由此得到 (与之前类似利用分部积分)

$$-\triangle\tilde v(x,\tau)-\tilde f_0(x,\tau)=\tilde h(x,\tau)$$

  边界处理

  与位势方程的 $C^{2,\alpha}$ 估计完全类似，只要 $j\ne n$，利用光滑性可以得到存在只与 n,α 相关的 C 使得

$$[DD_jv]_\alpha\le C[h+f_0]_\alpha$$

注意到 $D_jv \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$，$DD_jv$ 将 C^α 跨过边界，而根据 u 的紧支性可知 f 在边界上会趋于 0，从而 $h+f_0$ 也将 C^α 跨过边界，于是延拓前后半模必然相等 (若取上下半空间各一点，将其中一点对称回上半后，距离变短、相差不变)，从而即得

$$[DD_ju]_\alpha \le C[f]_\alpha$$

由上式可知对任何 $i+j \ne 2n$ 有

$$[D_{ij}u]_\alpha \le C[f]_\alpha$$

而再通过 $D_{nn}u = -\sum_{i<n} D_{ii}u - f$ 即可得到

$$[D_{ij}u]_\alpha \le (nC+1)[f]_\alpha$$

对任何 i,j 成立，原命题得证。

完全类似地，考虑本节中的常系数椭圆型方程，若 $u \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ 在内点上满足方程，且在边界上为 0，则存在只与 $n, \alpha, \Lambda/\lambda$ 相关的 C 使得对任何 i,j 有

$$[D_{ij}u]_\alpha \le C\lambda^{-1}[f]_\alpha$$

§2.4 Schauder 内估计

* 此处内估计指估计内闭的范数。

引理：设 $\varphi(t)$ 是 $[T_0,T_1]$ 上的有界非负函数，且 $T_1 > T_0 \ge 0$，存在非负的 θ, A, B, α 对任何满足 $T_0 \le t < s \le T_1$ 的 s,t 有

$$\varphi(t) \le \theta\varphi(s) + \frac{A}{(s-t)^\alpha} + B$$

则存在只与 α, θ 相关的 ρ 使得

$$\forall T_0 \le \rho < R \le T_1, \quad \varphi(\rho) \le C\left(\frac{A}{(R-\rho)^\alpha} + B\right)$$

- **证明：**

  考虑迭代 $t_0 = \rho$、$t_{i+1} = t_i + (1-\tau)\tau^i(R-\rho)$，其中 $\tau \in (0,1)$ 待定，直接递推可发现

$$\varphi(t_0) \le \theta^k\varphi(t_k) + \left(\frac{A}{(1-\tau)^\alpha(R-\rho)^\alpha} + B\right)\sum_{i=0}^{k-1}\theta^i\tau^{-i\alpha}$$

  选接近 1 的 τ 使 $\theta\tau^{-\alpha} < 1$，再令 $k \to \infty$ 得结论。

* 其作用大致为从条件中去除 $\theta\varphi(s)$ 项。

我们再证明几个简单的估算性质 (均假设充分光滑使得不等式右端可以定义)：

1. 对 $\beta \ge \alpha$，$[a]_\alpha \le [a]_\beta + \mathrm{osc}(a) \le [a]_\beta + 2|a|_0$。

   - **证明：**

     第一个不等号分 x 与 x_0 距离是否大于 1 讨论，大于等于 1 放为 osc，小于 1 放为 β。第二个不等号直接利用三角不等式。

2. 对常数 c，$[a-c]_\alpha = [a]_\alpha$。

   - **证明：**

     直接由定义。

3. $[a]_\alpha \le (n+2)|a|_{1,0}$。

 - **证明：**

   利用与第一个性质相同的思路可发现

$$[a]_\alpha \le 2|a|_0 + \sup_{x,x_0} \frac{|a(x)-a(x_0)|}{\|x-x_0\|}$$

   后者利用微分中值定理与方向导数不超过梯度模长可知

$$[a]_\alpha \le 2|a|_0 + |\|Da\||_0$$

   再利用有限维空间的范数等价性即得

$$[a]_\alpha \le 2|a|_0 + n|Da|_0 \le (n+2)|a|_1$$

回到内估计问题，设 Ω 为有界开区域，考虑 Ω 内的二阶线性椭圆型方程

$$Lu = f, \quad L = -a^{ij}D_{ij} + b^i D_i + c$$

这时利用偏导可交换可不妨假设 $a^{ij}(x)$ 对称，且满足存在 $\lambda, \Lambda > 0$ 使得

$$\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda|\xi|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2$$

更进一步假设对某 $\alpha \in (0,1)$，存在 Λ_α 满足

$$a^{ij}, b^i, c \in C^\alpha(\bar\Omega), \quad \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i,j}|a^{ij}|_\alpha + \sum_i |b^i|_\alpha + |c|_\alpha\right) \le \Lambda_\alpha$$

球域版本：若方程系数满足上方条件，则存在只与 $n, \alpha, \Lambda/\lambda$ 与 Λ_α 相关的正数 $R_0 \le 1$ 与 C，使得对任何 $R \in (0, R_0]$，若 $B_R \subset \Omega$，且方程解 $u \in C_0^{2,\alpha}(B_R)$，则

$$[D^2u]_{\alpha;B_R} \le C\left(\frac{1}{\lambda}[f]_{a;B_R} + R^{-2-\alpha}|u|_{0;B_R}\right)$$

- **证明：**

  对系数乘比例可不妨设 $\lambda = 1$。由于方程可以改写为

$$-a^{ij}(0)D_{ij}u = \bar f, \quad \bar f = f + (a^{ij}(x) - a^{ij}(0))D_{ij}u - b^iD_iu - cu$$

  利用上节对常系数椭圆型方程的定理可知有只与 n, α, Λ 相关的 C_1 使得 (此后的半范数均为 B_R 上)

$$[D_{ij}u]_\alpha \le C_1[\bar f]_\alpha$$

  进一步由三角不等式与乘积的 Hölder 模运算进行放缩可知 (加 $a^{ij}(0)$ 不影响 α 半模)

$$[\bar f]_\alpha \le [f]_\alpha + [a^{ij}(x) - a^{ij}(0)]_0[D_{ij}u]_\alpha + [a^{ij}(x)]_\alpha[D_{ij}u]_0 + |b^i|_\alpha|D_iu|_\alpha + |c|_\alpha|u|_\alpha$$

  利用条件与上节位势方程 $C^{2,\alpha}$ 估计中将 $f(x) - f(x_0)$ 上界放缩为 $R^\alpha[f]_\alpha$ 可将 $[D_{ij}]_\alpha$ 前的系数改为 $[a^{ij}]_\alpha R^\alpha$，此外，利用之前证明的性质可将 $|D_iu|_\alpha$、$|u|_\alpha$ 与 $|D_{ij}u|_\alpha$ 都放至 $|u|_2$，由此存在只与 n 相关的 C_2 使得

$$[\bar f]_\alpha \le [f]_\alpha + [a^{ij}]_\alpha R^\alpha[D_{ij}u]_\alpha + C_2\Lambda_\alpha|u|_2$$

  再对 $[a^{ij}]_\alpha$ 进行放缩可知存在只与 $n, \alpha, \Lambda_\alpha$ 相关的 C_3 使得

$$[\bar f]_\alpha \le C_3([f]_\alpha + R^\alpha[D^2u]_\alpha + |u|_2)$$

从而得到估计

$$[D^2u]_\alpha \le C_1C_3([f]_\alpha + R^\alpha[D^2u]_\alpha + |u|_2)$$

由于球域具有锥性质，且 $h > R/2$，利用内插不等式 (对二阶导、一阶导直接使用，$|u|_0$ 放到右侧，取系数前的较大者) 可知对任何 $\varepsilon < 1$，存在常数 C 使得 (注意 $1 < 1/\varepsilon$)

$$|u|_2 \le 2\varepsilon^\alpha[D^2u]_\alpha + \frac{C}{\varepsilon^2}|u|_0$$

由于 $R_0 \le 1$, 可知 $R \le 1$, 从而可取 $\varepsilon = R/2$, 得到存在与 $n, \alpha, \Lambda, \Lambda_\alpha$ 相关的 C_4 使得 (注意 $1 < R^{-2}$)

$$[D^2u]_\alpha \le C_4\big([f]_\alpha + R^\alpha[D^2u]_\alpha + R^{-2}|u|_0\big)$$

只要 R_0 充分小，可使 $C_4R^\alpha < 1$，由此即可得到对 $[D^2u]_\alpha$ 的估算，得证 (当 $\lambda \ne 1$ 时，还原比例即可发现)。

一般版本：在系数满足如前条件下，若方程解 $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$，则对任何 Ω 的列紧子集 Ω' 有

$$|u|_{2,\alpha;\Omega'} \le C\left(\frac{1}{\lambda}|f|_\alpha + |u|_0\right)$$

这里 C 依赖 $n, \alpha, \Lambda/\lambda, \Lambda_\alpha$ 与 Ω' 到 $\partial\Omega$ 的距离 (记为 d)。

- **证明：**

与前同理，只需证明 $\lambda = 1$ 时。

构造估算

对上题中的常数 R_0 取 $\bar{R}_0 = \min(R_0, d/2)$。对任何 $x_0 \in \Omega'$ 与 $0 < R \le \bar{R}_0$，记 $B = B_R(x_0)$，$\bar{B} = B_{\bar{R}_0}(x_0)$。

对任何 $\tau \in (0,1)$，存在只与 n, k 有关的 C 使得可构造函数 $\zeta(x)$ 满足

$$\zeta \in C_0^\infty(B)$$

$$\forall x \in B_{\tau R}(x_0), \quad \zeta(x) = 1$$

$$\forall k, \quad [D^k\zeta]_0 + (1-\tau)^\alpha R^\alpha[D^k\zeta]_\alpha \le \frac{C}{(1-\tau)^k R^k}$$

* 书上表示可利用磨光核构造，基本思路为给定 τR 后用磨光核连接 $B_{\tau R}(x_0)$ 内外使得变化幅度可控。

设 $v = \zeta u$，则 $v \in C_0^{2,\alpha}(B)$，且计算得

$$Lv = \zeta f + (-a^{ij}D_{ij}\zeta + b^iD_i\zeta)u - 2a^{ij}D_i\zeta D_ju$$

估计可得 (球域版本的中心 0 可以换为任何点) 存在与 $n, \alpha, \Lambda, \Lambda_\alpha, d$ 相关的 C_1 使得

$$[D^2v]_{\alpha;B} \le C_1\big(|\zeta f + (-a^{ij}D_{ij}\zeta + b^iD_i\zeta)u - 2a^{ij}D_i\zeta D_ju|_{\alpha;B} + |v|_{0;\Omega}\big)$$

与之前的估算类似，利用三角的不等式与乘积 Hölder 模运算可拆分出左侧 α 半模的每一项。接着，把 ζ 与 a^{ij}, b^i 利用上方假设放缩，将 $D\zeta$ 相关的界也放缩为 $[D^2\zeta]$ 相关的界。最后，将 u 相关的先控制为 $|u|_{2;B}$ 与 $[D^2u]_{\alpha;B}$，再将 $|u|_2$ 利用内插不等式放缩，最终得到对任何 ε，存在与 n 相关的 C_ε 使得

$$[D^2v]_{\alpha;B} \le C_2\left(\frac{1}{(1-\tau)^\alpha R^\alpha}[f]_{0;B} + [f]_{\alpha;B} + \varepsilon[D^2u]_{\alpha;B} + \frac{C_\varepsilon}{(1-\tau)^{2+\alpha}R^{2+\alpha}}|u|_{0;B}\right)$$

由于子集上的 Hölder 半模一定不超过原集合上的，而 $B_{\tau R}(x_0)$ 上 $v = u$，即得到

$$[D^2u]_{\alpha;B_{\tau R}(x_0)} \le C_2\left(\frac{1}{(1-\tau)^\alpha R^\alpha}[f]_{0;B} + [f]_{\alpha;B} + \varepsilon[D^2u]_{\alpha;B} + \frac{C_\varepsilon}{(1-\tau)^{2+\alpha}R^{2+\alpha}}|u|_{0;B}\right)$$

引理控制

设 $\varphi(s)=[D^2u]_{\alpha;B_s(x_0)}$，根据上式，再次利用子集 Hölder 半模不超过原集合即可知

$$\varphi(s)\le C_2\left(\varepsilon\varphi(t)+[f]_{\alpha;\bar{B}}+\frac{1}{(t-s)^\alpha}[f]_{0;\bar{B}}+\frac{C_\varepsilon}{(t-s)^{2+\alpha}}|u|_0\right)$$

取 ε 使得 $C\varepsilon<1$，利用本节开头的引理即可知对任何 $\rho\in(0,R),R\le\bar{R}_0$ 有

$$[D^2u]_{\alpha;B_\rho(x_0)}\le C_3\left([f]_{\alpha;\bar{B}}+\frac{1}{(R-\rho)^\alpha}[f]_{0;\bar{B}}+\frac{1}{(R-\rho)^{2+\alpha}}|u|_0\right)$$

取 $\rho=\frac{\bar{R}_0}{2}$、$R=\bar{R}_0$，可得

$$[D^2u]_{\alpha;B_\rho(x_0)}\le C_4(|f|_\alpha+|u|_0)$$

通过内插不等式，将 $[D^2u]_0$ 与 $[Du]_0$ 放为左侧与 $|u|_0$ 的和，最终有

$$|u|_{2,\alpha;B_\rho(x_0)}\le C_5(|f|_\alpha+|u|_0)$$

最终合并

由于 ρ 固定，对任何 x_0 的邻域存在相同的 C_5，下面证明

$$|u|_{2,\alpha;\Omega'}\le C_6(|f|_\alpha+|u|_0)$$

由于 $|u|_{2;\Omega'}$ 对应为各个导数的逐点上界，而紧集任何列有收敛子列，且其在任何一点附近都可取出区间 $B_\rho(x_0)$ 使得被某个 $C_5(|f|_\alpha+|u|_0)$ 控制，因此

$$|u|_{2;\Omega}\le C_5(|f|_\alpha+|u|_0)$$

对于 $[D^2u]_{\alpha;\Omega}$，设 $v=D_{ij}u$，考虑

$$\frac{|v(x_0)-v(x_1)|}{\|x_0-x_1\|^\alpha}$$

对任何 x_0,x_1，若 $\|x_0-x_1\|\le\rho$，则由之前假设可知其不超过 $C_5(|f|_\alpha+|u|_0)$，若否，可知

$$\frac{|v(x_0)-v(x_1)|}{\|x_0-x_1\|^\alpha}\le 2\rho^{-\alpha}|v|_0\le 2\rho^{-\alpha}C_5(|f|_\alpha+|u|_0)$$

由此取 $C_6=(2+2\rho^{-\alpha})n^2C_5$，即可得证。

事实上，若系数在满足之前条件时还要求 $a^{ij},b^i,c,f\in C^{k,\alpha}(\Omega)$，则 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ 为解时利用差商技巧可以证明

$$u\in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$$

且对任何 Ω' 为 Ω'' 列紧子集、Ω'' 为 Ω 列紧子集，有

$$|u|_{k+2,\alpha;\Omega'}\le C(|f|_{k,\alpha;\Omega''}+|u|_{0;\Omega''})$$

这里 C 只与 $n,k,\Lambda/\lambda$、各系数的范数与 Ω' 到 $\partial\Omega''$ 的距离相关。

§2.5 Schauder 全局估计

* 全局估计需要在内估计之外再得到边界估计，一般先用半球代替球证明，再由边界光滑性定义推广到边界。

半球版本：设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n_+$，且 $\partial\Omega$ 有子集 $S\subset\partial\mathbb{R}^n_+$，且构成 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 中的闭区域 (开区域闭包)。仍设系数满足之前条件，则存在只依赖 $n,\alpha,\Lambda/\lambda$ 与 Λ_α 的正常数 R_0,C，使得对任何 $R\in(0,R_0]$，若球心 $0\in S$ 的半球 $B_R^+\subset\Omega$ 满足解 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{B}_R^+)$ 在 $\partial B_R^+\cap\mathbb{R}^+$ 附近为 0，且在 $S\cap\partial B_R^+$ 上为 0，则

$$[D^2u]_{\alpha;B_R^+}\le C\left(\frac{1}{\lambda}[f]_{\alpha;B_R^+}+R^{-2-\alpha}|u|_{0;B_R^+}\right)$$

* 条件与在半球紧支相比，在 $\{x_n=0\}$ 的边界**附近**无需为 0。与之前类似，对半球情况可考虑奇延拓，且需要单独控制 $D_{nn}u$ 外的二阶导数，再用其他二阶导数控制 $D_{nn}u$ 得到估计。

- **证明：**

  与 2.3 节边界估计的方式完全类似。利用 2.4 节球域情况可控制一切 D_{nn} 外的导数，而 D_{nn} 前的系数利用 a^{ij} 正定可知恒非零，从而可写为

$$D_{nn}(x)=\frac{1}{a^{nn}}\left(-\sum_{i+j<2n}a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu+cu-f\right)$$

  在条件中取 $\xi=e_n$ 可知 $a_{nn}\ge\lambda$，从而右侧均可放缩，再将 $[D_iu]_\alpha$ 利用内插不等式，并缩小 R_0 以提升 $|u|_0$ 前的系数即可。

平边界版本：在上个定理的条件下，若 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup S)$ 在 Ω 内满足方程且 S 上 $u=0$，则对任何 $\Omega\cup S$ 的列紧子集 Ω'，有

$$|u|_{2,\alpha;\Omega'}\le C\left(\frac{1}{\lambda}|f|_\alpha+|u|_0\right)$$

这里 C 只依赖 $n,\alpha,\Lambda/\lambda,\Lambda_\alpha$ 与 Ω' 到 $\partial\Omega\backslash S$ 的距离 (记为 d)。

- **证明：**

  与前同理，只需证明 $\lambda=1$ 时。

  同样设半球版本的常数为 R_0，$\bar{R}_0=\min\{R_0,d/2\}$，并记

$$\Omega''=\Omega'\cap\{x_n>\bar{R}_0/4\}$$

  由于其为 Ω 中紧集，由内估计可知有

$$|u|_{2,\alpha;\Omega''}\le C_1(|f|_\alpha+|u|_0)$$

  另一方面，若 $B_{\bar{R}_0}(x_0)$ 是某个球心在 $\bar{\Omega}'\cap S$ 中的球，利用半球版本，完全类似一般版本内估计的证明过程可知 (同样球心可从 0 移到任何 x_0)

$$|u|_{2,\alpha;B^+_{\bar{R}_0/2}(x_0)}\le C_2(|f|_\alpha+|u|_0)$$

  由于所有 $B^+_{\bar{R}_0/2}(x_0)$ 与 $\bar{\Omega}''$ 可覆盖 Ω'，与一般版本内估计的合并过程完全相同 (注意到两点只要距离小于 $\bar{R}_0/8$，一定同落在某个半球或 Ω'' 中) 可得到最终估计

$$|u|_{2,\alpha;\Omega'}\le C_3(|f|_\alpha+|u|_0)$$

全局估计：若系数满足边界条件，区域 $\partial\Omega$ 是 $C^{2,\alpha}$ 的 (定义与 1.5 节中完全类似)，$u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 为解且在边界上为 0，则

$$|u|_{2,\alpha}\le C\left(\frac{1}{\lambda}|f|_\alpha+|u|_0\right)$$

这里 C 只依赖 $n,\alpha,\Lambda/\lambda,\Lambda_\alpha$ 与 Ω。

- **证明：**

不妨设 $\lambda=1$，与 1.5 节的做法类似，假设 ψ 是 x^0 处光滑边界定义中的映射，条件事实上是 ψ 与 ψ^{-1} 均 $C^{2,\alpha}$。

作代换 $y=\psi(x)$，设 $\tilde{u}(y)=u(x)$，则有

$$-\tilde{a}^{rs}\tilde{D}_{rs}\tilde{u}+\tilde{b}^r\tilde{D}_r\tilde{u}+\tilde{c}\tilde{u}=\tilde{f}$$

这里 $\tilde{D}$ 为对 y 求导，且

$$\tilde{a}^{rs}=a^{ij}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}\frac{\partial y_s}{x_j},\quad \tilde{b}^r=b^i\frac{\partial y_r}{\partial x_i}-a^{ij}\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i\partial y_j},\quad \tilde{c}(y)=c(x),\quad \tilde{f}(y)=f(x)$$

对其应用平边界情况可知 (这里模均对 y) 存在 C 使得 (由 ψ 充分光滑，$\tilde{a}$、$\tilde{b}$、$\tilde{c}$ 仍能被 Λ 与 Λ_α 控制)

$$|\tilde{u}|_{2,\alpha;B_{1/2}^+}\le C\big(|\tilde{u}|_{0;B_1^+}+|\tilde{f}|_{\alpha;B_1^+}\big)=C\big(|u|_{0;B_1^+}+|\tilde{f}|_{\alpha;B_1^+}\big)$$

再由 ψ^{-1} 充分光滑，类似 1.5 节中可知 $|\tilde{v}|_{2,\alpha}$ 与 $|v|_{2,\alpha}$ 等价、$|\tilde{v}|_\alpha$ 与 $|v|_\alpha$ 等价，于是有

$$|u|_{2,\alpha;\psi^{-1}(B_{1/2}^+)}\le C\big(|u|_0+|f|_\alpha\big)$$

利用有限覆盖定理，可选出有限个 x^0 使得 $\psi^{-1}(B_{1/2}^+)$ 覆盖边界，再取出某闭包在 Ω 中紧的开集 Ω' 覆盖剩余部分，且存在 r 使得距离不超过 r 的两点一定落在其中某个中 (将 Ω' 取得足够接近边界)，由此可与之前完全类似得到全局估计

$$|u|_{2,\alpha}\le C\big(|u|_0+|f|_\alpha\big)$$

若 u 在边界上为 φ 而非 0，且 $\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$，则将原定理应用在 $u-\varphi$ 上即可知 (C 依赖对象与之前相同)

$$|u|_{2,\alpha}\le C(|f|_\alpha+|\varphi|_{2,\alpha}+|u|_0)$$

更进一步地，上述假定下，若 $a^{ij},b^i,c,f\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$，且 $\partial\Omega$ 是 $C^{k+2,\alpha}$ 的，$\varphi\in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$，应用差商可估计得

$$|u|_{k+2,\alpha}\le C(|f|_{k,\alpha}+|\varphi|_{k+2,\alpha}+|u|_0)$$

这里 C 只依赖 $n,\alpha,k,\Lambda/\lambda,\Omega$ 与各系数的范数。

§2.6 古典解的极值原理

弱极值原理：若算子 L 如 2.4 节定义，且 a^{ij} 满足存在 $\lambda,\Lambda>0$ 使得

$$\forall x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^n,\quad \lambda|\xi|^2\le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\Lambda|\xi|^2$$

b^i 有界、c 非负。若 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，且在 Ω 上满足 $Lu\le f$，则

$$\sup_\Omega u\le\sup_{\partial\Omega}u^++C|f|_0$$

其中 C 依赖 n、$\frac{1}{\lambda}\sum_i|b_i|_0$ 与 Ω 上两点距离的上界 d。

- **证明：**

非零下界

先解决 $c(x)\ge c_0>0$ 时的情况。令 $v=u-\sup_{\partial\Omega}u^+$，则直接代入可发现

$$\forall x\in\Omega,\quad Lv(x)\le f(x)$$

$$\forall x\in\partial\Omega,\quad v(x)\le 0$$

若 Ω 内某点 x_0 为 v 的最大值 (由定义其必然非负), 则 $D^2v(x_0)$ 半负定 (D^2 表示 Hesse 阵), $Dv(x_0)=0$, 再由 a^{ij} 正定可验证

$$\left.(-a^{ij}D_{ij}v+b^iD_iv)\right|_{x_0}\geq 0$$

* 这里事实上用了线性代数结论: 两个半正定阵逐元素乘积仍然为半正定阵 (设 $A=P^TP,B=Q^TQ$, 则记 $(R_k)_{ij}=p_{kj}q_{ij}$ 可知逐元素乘积为 $\sum_k R_k^TR_k$), 由此第 i 行第 j 列为 $a^{ij}D_{ij}v$ 的矩阵为半负定阵, 再利用半负定阵所有元素和非正 (考虑全 1 的向量左右乘) 可知结论。

于是计算 Lv 可知 $c(x_0)v(x_0)\leq|f|_0$, 从而即得

$$\sup_\Omega v\leq\frac{|f|_0}{c_0}$$

还原回 u 得证。

一般情况

我们希望能构造辅助函数回到非零下界情况。仍如上定义 v, 设 $v=zw$, 其中 z 为恒正的待定函数, 由 v 性质计算并按 w 整理可知

$$-a^{ij}D_{ij}w+\left(b^i-\frac{2}{z}a^{ij}D_jz\right)D_iw+\left(c+\frac{1}{z}(b^iD_iz-a^{ij}D_{ij}z)\right)w\leq\frac{f}{z}$$

由于我们希望第三项前系数有非零下界, 由 Ω 有界, 可通过平移、旋转使 Ω 中 $x_1\in(0,d)$, 并对充分大的 α 记

$$z=\mathrm{e}^{2\tau d}-\mathrm{e}^{\tau x_1}$$

可发现 $z>0$ 且由区域有界有非零上界, 且

$$-a^{ij}D_{ij}z+b^iD_iz=(a^{11}\tau^2-b^1\tau)\mathrm{e}^{\tau x_1}\geq\lambda\left(\tau^2-\frac{|b_1|_0}{\lambda}\tau\right)>0$$

由此符合要求, 再通过 w 边界上 ≤ 0, 对 w 用前一种情况可知

$$\sup_\Omega w\leq C|f|_0$$

再由 $z>0$ 有只与 Ω 相关的上界得 $\sup_\Omega v$ 也能被控制, 从而得证。

由此，上述条件下若 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ 且 $Lu=f$，对 $u,-u$ 应用定理可知

$$\sup_\Omega|u|\leq\sup_{\partial\Omega}|u|+C|f|_0$$

* 弱极值原理在 $f=0$ 时只说明边界一定取到最大值，不能保证非常数时内部无法取到。

§2.7 Dirichlet 问题的可解性

本节考虑 Dirichlet 问题 (L 如之前定义)

$$\forall x\in\Omega,\quad Lu(x)=f(x)$$

$$\forall x\in\partial\Omega,\quad u(x)=\varphi(x)$$

* 记 $M=[n/2]+4$。

光滑边界版本：设 $\partial\Omega$ 为 C^M，方程系数满足 2.4 节条件，且 $c\geq 0$，$f\in C^\alpha(\bar\Omega)$，$\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$，则 Dirichlet 问题存在唯一解 $u\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$。

- **证明：**

对 $u-\varphi$ 考虑可知 $f+L\varphi$ 仍然为 $C^\alpha(\bar\Omega)$，由此可不妨设 $\varphi=0$。作函数列 a_N^{ij}、b_N^i、c_N、f_N 使它们 $\in C^M(\bar\Omega)$ 且一致收敛到各系数，且

$$\frac{\lambda}{2}|\xi|^2 \le a_N^{ij}\xi_i\xi_j \le 2\Lambda|\xi|^2$$

$$c_N \ge 0, \quad \|f_N\|_\alpha \le 2\|f\|_\alpha$$

$$\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i,j}|a_N^{ij}|_\alpha + \sum_i |b_N^i|_\alpha + |c_N|_\alpha\right) \le 2\Lambda_\alpha$$

* 上述取法中一致收敛事实上要求在 $|\cdot|_\alpha$ 下收敛才可满足要求，因此事实上用到了 C^M 在 C^α 中嵌入的相关结论，书中省略了相关细节。

考虑近似问题 (L_N 为 L 的系数对应替换为 a^N, b^N, c^N)

$$\forall x\in\Omega, \quad L_N u_N(x) = f_N(x)$$

$$\forall x\in\partial\Omega, \quad u_N(x) = 0$$

其满足 1.2 节开头的假定，因此符合 Fredholm 二择一定理，只要证明解唯一即可知存在唯一。假设存在解 u_N，可发现其符合 1.5 节更高阶正则性条件，从而得其为 $H^M(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，于是再利用 Sobolev 嵌入定理可知 $u_N\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$。通过古典解极值原理，若有两个解满足，作差可发现只能为 0，由此必然唯一，从而 u_N 存在唯一。

利用 Schauder 全局估计与古典解极值原理，由 u_N 在边界上为 0 可知 (这里常数只要与 u, N 无关即可，而通过公共界可得到成立)

$$|u_N|_{2,\alpha} \le C_1|f_N|_\alpha + C_2|u|_0 \le C_1|f_N|_\alpha + C_4|f_N|_0 \le (C_1+C_4)|f_N|_\alpha \le 2(C_1+C_4)|f|_\alpha$$

利用 Arzelà-Ascoli 引理,u_N 可存在子序列在 $C^2(\bar\Omega)$ 中收敛,再由所有 α 范数可控制可知 $u\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$，且满足方程。

外球性质：若对任何 $x_0\in\partial\Omega$，存在球 $B_\rho(y)\subset\mathbb{R}^n\backslash\bar\Omega$ 使得 $\overline{B_\rho(y)}\cap\bar\Omega=\{x_0\}$，则称 Ω 有外球性质。

连续版本：若区域有外球性质，方程系数满足 2.4 节条件，且 $c\ge 0$，$f\in C^\alpha(\bar\Omega)$，$\varphi\in C(\bar\Omega)$，则 Dirichelet 问题存在唯一解 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$。

- **证明：**

子序列

作区域列 Ω_N 使得 $\Omega_N\subset\Omega$，$\partial\Omega_N$ 为 C^M，且 $\partial\Omega_N$ 上任何一点到 $\partial\Omega$ 的距离不超过 $\frac{1}{N}$。

* 大致可以先缩小再光滑化，但严谨说明非常困难。

取函数列 $\varphi_N\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$，使得 $|\varphi_N-\varphi|_0\le\frac{1}{N}$，考虑近似问题

$$\forall x\in\Omega_N, \quad Lu_N(x) = f(x)$$

$$\forall x\in\partial\Omega_N, \quad u_N(x) = \varphi_N(x)$$

利用光滑边界版本的情况，存在 $u_N\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega_N)$ 为此问题解。对 Ω 列紧子集 Ω'，由于其必然包含在某个 Ω_N 中，利用 Schauder 内估计与上个定理类似可知 N 充分大时

$$|u_N|_{2,\alpha;\Omega'} \le C\big(|f|_\alpha + |u_N|_{0;\Omega_N}\big) \le C\left(|f|_\alpha + |\varphi_0| + \frac{1}{N}\right)$$

这里 C 依赖 Ω' 与 Ω 距离，但并不依赖 N (N 充分大时 Ω' 与 Ω_N 距离有下界)，第二个不等号利用古典解极值原理得到。

仍然利用 Arzelà-Ascoli 引理，u_N 可存在子序列在 $C^2(\bar\Omega_1)$ 中收敛 (取 $\Omega'=\bar\Omega_1$)，再在其中取子序列在 $C^2(\bar\Omega_2)$ 中收敛...... 最后利用对角线法即可得到在任何 Ω_N 上收敛的子序列，也即在任何列紧子

集 Ω' 上收敛于某个 u。由于 Ω 内部任何一点可被某列紧子集包含，知 u 在 Ω 内满足方程，只需证明其在边界上连续且符合边界条件。

闸函数

对 $x_0 \in \partial\Omega$，设 $B_\rho(y)$ 是外球性质定义中所述的外球，闸函数指满足如下三条性质的函数 $\omega \in C^2(\bar{\Omega})$：

$$L\omega > 0$$

$$\omega(x_0) = 0$$

$$\forall x \in \bar{\Omega}\backslash\{x_0\}, \quad \omega(x) > 0$$

考虑 $\omega(x) = \mathrm{e}^{-\beta\rho^2} - \mathrm{e}^{-\beta\|x-y\|^2}$，$\beta$ 为待定正数，则后两条性质满足，而计算可知 $L\omega$ 中 $\mathrm{e}^{-\beta\|x-y\|^2}$ 前的最高 β 次数为二次，二次项

$$4a^{ij}\beta^2(x_i - y_i)(x_j - y_j)\mathrm{e}^{-\beta\|x-y\|^2} \geq 4\lambda\beta^2\rho^2\mathrm{e}^{-\beta(d+\rho)^2}$$

这里 d 指 Ω 上两点距离的上界。

另一方面，$c \geq 0$，因此 $L\mathrm{e}^{-\beta\rho^2} \geq 0$，从而取 β 充分大即能得到存在正下界的 $L\omega$，记正下界为 θ。

由连续性，对任何 ε 存在 x_0 在 Ω 中邻域 U 使得其中 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$，由于 ω 在 $\Omega\backslash U$ 有正下界，取 C_ε 充分大可使

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) + \varepsilon > \varphi(x) > -C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) - \varepsilon$$

利用 $|\varphi_N(x) - \varphi(x)| \leq |\varphi_N(x_0) - \varphi_N(x)| + |\varphi(x_0) - \varphi(x)| + |\varphi(x_0) - \varphi_N(x_0)|$，取 U 为使得其中 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)|$ 与 $|\varphi_N(x) - \varphi_N(x_0)|$ 均小于 $\varepsilon/3$ 的邻域，与上方类似考虑 $\Omega\backslash U$ 上 ω 的下界可知 N 充分大时

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) + \varepsilon > \varphi_N(x) > -C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) - \varepsilon$$

另一方面，由于 $L\omega$ 有正下界，对某个 N，当 C_ε 充分大时有

$$\forall x \in \Omega_N, \quad L(C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) + \varepsilon) \geq Lu_N(x) \geq L(-C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) - \varepsilon)$$

对 $u_N - (C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) + \varepsilon)$ 利用弱极值原理，由对 φ_N 的估算可知其在 Ω_N 边界上为 0，而对应的 $f = 0$，由此即得 N 充分大时

$$u_N(x) \leq C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) + \varepsilon$$

同理

$$u_N(x) \geq -C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) - \varepsilon$$

由于 C_ε 与 N 无关，考虑 $N \to \infty$ 知

$$C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) + \varepsilon \geq u(x) \geq -C_\varepsilon\omega(x) + \varphi(x_0) - \varepsilon$$

利用 $\omega(x_0) = 0$ 且连续，对任何 ε，存在 x_0 邻域 U 使得其中

$$\varphi(x_0) + 2\varepsilon \geq u(x) \geq \varphi(x_0) - 2\varepsilon$$

这对任何 x_0 成立，即得到 u 在边界连续，且为 φ。

* 这里的内估计运用与闸函数技巧都是重要的。

弱光滑版本：设 $\partial\Omega$ 为 $C^{2,\alpha}$，方程系数满足 2.4 节条件，且 $c \geq 0$，$f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$，$\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$，则 Dirichelet 问题存在唯一解 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$。

- **证明：**

边界转化

与光滑边界版本相同理由可设 $\varphi=0$。考虑边界 $C^{2,\alpha}$ 的定义，设 x_0 处对应映射为 ψ，对应邻域 V，则 $\psi(V)$ 满足外球性质 (取与 $\{x_n=0\}$ 交点唯一的某个球即可)，再利用二阶光滑性可在其原像中取出某个球满足要求，由此 Ω 有外球性质，利用外球版本已经可知存在唯一解 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$。

为证其在 $\partial\Omega$ 上亦为 $C^{2,\alpha}$，只需证明对边界每点邻域成立。

由于 $\psi\in C^{2,\alpha}(\bar V),\psi^{-1}\in C^{2,\alpha}(\bar B_1^+)$，可将 x_0 附近的方程与边界条件看作 $\bar B_1^+$ 上的方程与对应边界条件，且不改变连续性。

* 具体来说，令 $\tilde u(y)=u(\psi^{-1}(y))$，并对应重新计算系数，与之前坐标变换时完全类似可发现系数仍然符合要求。

由此，只需证明，当 $u\in C^{2,\alpha}(B_1^+)\cap C(\bar B_1^+)$ 时满足方程，则 $u\in C^{2,\alpha}(\bar B_{1/2}^+)$，即能推出 u 在边界每点有邻域为 $C^{2,\alpha}$，再通过有限覆盖得到整体结论。

由于 $\bar B_{1/2}^+$ 为 B_1^+ 中紧集，我们适当缩小 B_1^+ 使得其具有光滑边界，且保证其包含 $B_{1/2}^+$，得到的区域记为 B，只需证明在 B 上满足方程的 $u\in C^{2,\alpha}(B)\cap C(\bar B)$ 有 $u\in C^{2,\alpha}(\bar B_{1/2}^+)$。

序列构造

以下均考虑 B 上，半模与模也默认为 B 上的。

作函数列 $\varphi_N\in C^{2,\alpha}(\bar B)$ 使得 φ_N 在 $\partial B\cap\{x_n=0\}$ 上为 0，且 $N\to\infty$ 时 $|\varphi_N-u|_0\to 0$，考虑近似问题

$$\forall x\in D,\quad Lu_N(x)=f(x)$$

$$\forall x\in\partial D,\quad u_N(x)=\varphi_N(x)$$

利用光滑版本的结论，解 $u_N\in C^{2,\alpha}(\bar B)$，类似光滑版本的证明，根据 Schauder 内估计可证明对任何 B 中紧集 Ω'，u_N 存在 $C^2(\bar\Omega')$ 上收敛于某函数 $\tilde u$ 的子序列，类似连续版本的证明中构造 Ω_N，可利用对角线法取出 B 上任何紧集 Ω' 中 $C^2(\bar\Omega')$ 收敛于某 $\tilde u$ 的子序列，仍记为 u_N。

类似连续版本最后的操作，利用极值原理可证明 u_N 事实上一致收敛到 B 上某函数 $\tilde u$，由此利用 φ_N 定义令 $N\to\infty$ 有

$$\forall x\in D,\quad L\tilde u(x)=f(x)$$

$$\forall x\in\partial D,\quad \tilde u(x)=u(x)$$

利用弱极值原理，这即说明了 D 上 $\tilde u=u$，即 u_N 一致收敛于 u。进一步通过 u_N 为 C^2，可知收敛是 C^2 的，再与光滑情况相同可知收敛是 $C^{2,\alpha}$ 的。由于已知 $u\in C(\bar D)$，$|u|_0$ 存在，利用内插不等式可知只需证明 $[D^2u]_{\alpha;B_{1/2}^+}$ 存在。

对 u_N 满足的方程利用平边界版本的全局估计与极值原理，可知存在与 N 无关的 C、C' 使得

$$[D^2u_N]_{\alpha;B_{1/2}^+}\le C(|f|_\alpha+|u_N|_\alpha)\le C'(|f|_\alpha+|\varphi_N|_0)$$

令 $N\to\infty$，右侧通过定义收敛到 $C'(|f|_\alpha+|u|_0)$，而由于 B 上的 $C^{2,\alpha}$ 收敛性，可验证左侧收敛到 $[D^2u]_{\alpha;B_{1/2}^+}$，从而得证。

* 这事实上证明了边界为 $C^{2,\alpha}$ 的点处有邻域中 u 为 $C^{2,\alpha}$。

三　L^p 理论

* 研究方程**几乎处处**满足时的 L^p 估计，需要用到一些调和分析结论进行处理，最终说明 $W^{2,p}$ 解的性质。

§3.1　Marcinkiewicz 内插定理

设 $f \in L^1(\Omega)$，$t \geq 0$，记集合

$$A_t(f) = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > t\}$$

并设 $\lambda_f(t) = |A_t(f)|$，这里对集合取模代表**测度**。
Lebesgue 积分的展开：若 $f \in L^p(\Omega)$，其中 $1 \leq p < \infty$，则

$$\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}x = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)\mathrm{d}t$$

- **证明：**

  记 $\chi_{\{|f(x)|>t\}}$ 为在 $f(x) > t$ 的点为 1，否则为 0 的特征函数，则

  $$|f|^p = \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1}\mathrm{d}t = \int_0^{\mathbb{R}} pt^{p-1}\chi_{|f(x)|>t}\mathrm{d}t$$

  再由

  $$\int_\Omega \chi_{|f(x)|>t}\mathrm{d}x = \lambda_f(t)$$

  即可交换积分次序得结论。

Ω 上的 **Marcinkiewicz 空间**：定义 (下标 w 代表 weak)

$$\|f\|_{L^p_w(\Omega)} = \inf\{A \mid \forall t > 0, \lambda_f(t) \leq t^{-p}A^p\}$$

若 $\|f\|_{L^p_w(\Omega)} < \infty$，则称其属于 $L^p_w(\Omega)$。
* 其一般并不符合三角不等式，在 $p \neq \infty$ 时不为范数，但将定义写为 $(\lambda_f(t))^{1/p} \leq A/t$ 可验证 $L^\infty_w = L^\infty$。
嵌入关系 (无歧义时省略 Ω)：对有界区域 Ω，有

$$\forall 1 \leq q < p < \infty, \quad L^p \subsetneq L^p_w \subset L^q$$

- **证明：**

  左侧利用

  $$t^p\lambda_t(f) \leq \int_{A_t(f)} |f(x)|^p \mathrm{d}x \leq \|f\|^p_{L^p}$$

  即可得证，考虑 $\lambda_f(t) = C/t^p$ 的情况 (设 $f(x) = g(\|x\|)$ 可以构造出)，利用 Lebesgue 积分的展开即可知 p 范数不存在。
  右侧可展开得

  $$\int_\Omega |f|^q \mathrm{d}x = q\int_0^1 t^{q-1}\lambda_f(t)\mathrm{d}t + q\int_1^\infty t^{q-1}\lambda_f(t)$$

  第一项中 t 不超过 1，$\lambda_f(t)$ 不超过 $|\Omega|$，由此不超过 $q|\Omega|$，第二项将 $\lambda_f(t)$ 放大为 $\|f\|^p_{L^p_w}t^{-p}$ 计算积分即可知收敛，从而得证。

拟线性映射：$T : L^p \to L^q$ 满足存在 $Q > 0$ 使得

$$\forall f, g \in L^p, \quad |T(f+g)(x)| \leq Q(|Tf(x)| + |Tg(x)|), \quad a.e.$$

这里 $a.e.$ 代表对 Ω 中几乎处处的 x 成立。
强 (p, q) 型：存在 $C > 0$ 使得

$$\forall f \in L^p, \quad \|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

此时可记 C 的下界为算子范数 $\|T\|_{(p,q)}$。

弱 (p,q) 型：存在 $C>0$ 使得

$$\forall f\in L^p,\quad \|Tf\|_{L^q_w}\le C\|f\|_{L^p}$$

* 利用嵌入关系，强 (p,q) 型一定为弱 (p,q) 型。

Marcinkiewicz 内插定理：设 $1\le p<q\le\infty$，定义在 L^p+L^q 上的拟线性映射 T 是弱 (p,p) 型与弱 (q,q) 型的，对应界分别记为 B_p 与 B_q，则对任何 $r\in(p,q)$，T 是强 (r,r) 型的，且存在与 p,q,r 与拟线性映射定义中的 Q 相关的 C 使得

$$\|T\|_{(r,r)}\le CB_p^{\theta}B_q^{1-\theta},\quad \theta=\frac{p(q-r)}{r(q-p)}$$

- **证明：**

  对 $f\in L^r$，给定某 $s>0$，待定 $\gamma>0$，并以 γs 为界将 f 拆分为 $f=f_1+f_2$，满足

$$f_1(x)=f(x)\chi_{|f(x)|>\gamma s},\quad f_2(x)=f(x)\chi_{|f(x)|\le\gamma s}$$

  由于 f_2 只保留了小的部分，通过定义放缩可知其为 L^q，同理 f_1 为 L^p，由此即得 $L_r\subset L_p+L_q$，T 在 L^r 上有定义。

  利用拟线性映射的定义，若 $|Tf_1(x)|\le s/(2Q)$ 且 $|Tf_2(x)|\le s/(2Q)$，必有 $|Tf(x)|\le s$，由此

$$\lambda_{Tf}(s)\le\lambda_{Tf_1}\left(\frac{s}{2Q}\right)+\lambda_{Tf_2}\left(\frac{s}{2Q}\right)$$

  根据 T 的弱 (p,p) 与弱 (q,q) 性质即可知

$$\lambda_{Tf}(s)\le\frac{(2QB_p)^p\|f_1\|_p^p}{s^p}+\frac{(2QB_q)^q\|f_2\|_q^q}{s^q}$$

  若 $q<\infty$，展开 Lebesgue 积分后利用上式估算可得到 (第二行到第三行的等号类似 Lebesgue 积分展开中的交换积分次序)

$$\begin{aligned}\int_\Omega|Tf|^r\,\mathrm{d}x&=\int_0^\infty rs^{r-1}\lambda_{Tf}(s)\,\mathrm{d}s\\&\le(2QB_p)^p\int_0^\infty rs^{r-p-1}\,\mathrm{d}s\int_{|f|>\gamma s}|f|^p\,\mathrm{d}x+(2QB_q)^q\int_0^\infty rs^{r-q-1}\,\mathrm{d}s\int_{|f|\le\gamma s}|f|^q\,\mathrm{d}x\\&=(2QB_p)^pr\int_\Omega|f|^p\,\mathrm{d}x\int_0^{|f|/\gamma}s^{r-p-1}\,\mathrm{d}s+(2QB_q)^qr\int_\Omega|f|^q\,\mathrm{d}x\int_{|f|/\gamma}^\infty s^{r-q-1}\,\mathrm{d}s\\&=\left(\frac{(2QB_p)^pr}{r-p}\gamma^{p-r}+\frac{(2QB_q)^qr}{q-r}\gamma^{q-r}\right)\int_\Omega|f|^r\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

  取 $\gamma=(B_p^pB_q^{-q})^{1/(q-p)}$ 即可代入验证成立。

  若 $q=\infty$，可取 $\gamma=\frac{1}{2QB_\infty}$，利用 $L_w^\infty=L^\infty$ 即有 $\lambda_{Tf_2}(s/(2Q))=0$，仍然代入上方计算可发现成立。

* 由证明过程知此定理事实上无需区域有界。

§3.2 分解引理

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 非负，则对任何 $\alpha>0$，存在两个集合 F 与 Ω 使得：

1. $F\cup\Omega=\mathbb{R}^n$，$F\cap\Omega=\varnothing$；

2. $f(x)\le\alpha$ 在 F 上几乎处处成立；

3. Ω 可以分解为一列两两不重叠且边平行于坐标轴的立方体 Q_k 之并，且满足

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \alpha<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}f(x)\,\mathrm{d}x\le2^n\alpha$$

- **证明：**

剖分构造

由于 $\int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}x$ 有限，取 $m > \sqrt[n]{\|f\|_{L^1}/\alpha}$ 即可将 $\mathbb{R}^n$ 分解为边长 m 的立方体使得每个立方体 Q' 上有

$$\frac{1}{m^n}\int_{Q'} f\mathrm{d}x \le \alpha$$

将每个 Q' 等分为 2^n 个立方体 Q''，每个的边长 $m/2$，若 Q'' 上的积分平均 (即积分除以测度) 超过 α，则选取其为某个 Q_k，此时

$$\alpha < \frac{2^n}{m^n}\int_{Q''} f\mathrm{d}x \le \frac{2^n}{m^n}\int_{Q'} f\mathrm{d}x \le 2^n\alpha$$

对剩下 Q'' 的进一步剖分，并将所有剖分过程中得到的积分平均大于 α 的立方体作为 Q_k，由于每次剖分后均可数，至多进行可数次，可知最终所有 Q_k 可数。此时条件 1、3 已经满足，下证条件 2。

剩余验证

根据上述定义，对任何 $x \in F$，一定存在包含 x 的立方体列 $\tilde{Q}_l$ 使得 $|\tilde{Q}_l| \to 0$，且每个 $\tilde{Q}_l$ 上积分平均不超过 α。

利用 Lebesgue 点定义可验证 x 为 Lebesgue 点时

$$\alpha \ge \lim_{l\to\infty} \frac{1}{|\tilde{Q}_l|}\int_{\tilde{Q}_l} f(y)\mathrm{d}y = f(x)$$

再通过 L^1 可积函数几乎处处为 Lebesgue 点即成立。

* 可发现

$$|\Omega| = \sum_{k=1}^{\infty}|Q_k| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\int_{Q_k} f\mathrm{d}x \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

* 这个分解引理对起义积分算子的研究十分重要，且已成为**测度论证**的基本方法。

§3.3 位势方程的估计

定义 Laplace 方程的**基本解**为 (ω_n 仍表示 n 维单位球体积)

$$\Gamma(x) = \begin{cases} (n(n-2)\omega_n)^{-1}\|x\|^{2-n} & n > 2 \\ (2\pi)^{-1}\ln\|x\| & n = 2 \end{cases}$$

其符合估计

$$\sup_{\xi\ne 0, 1\le i,j\le n}\int_{|x|\ge 2|\xi|}|D_{ij}\Gamma(x-\xi) - D_{ij}\Gamma(x)| < \infty$$

记左侧值为 J，根据定义其只与 n 有关。

- **证明：**

利用微分中值定理可知存在 $\lambda(x) \in (0,1)$ 使得

$$\int_{|x|\ge 2|\xi|}|D_{ij}\Gamma(x-\xi) - D_{ij}\Gamma(x)| \le \int_{|x|\ge 2|\xi|}\sum_k |(D_{ijk}\Gamma)(x-\lambda(x)\xi)||\xi_k|\mathrm{d}x$$

再利用 $\Gamma(x)$ 表达式可得到 $D_{ijk}\Gamma(x)$ 可被 $\|x\|^{-n-1}$ 的某倍数控制，进一步利用有限维空间范数等价可知存在只 n 有关的 $C > 0$ 使得

$$\int_{|x|\ge 2|\xi|}|D_{ij}\Gamma(x-\xi) - D_{ij}\Gamma(x)| \le \int_{|x|\ge 2|\xi|}\frac{C}{\|x-\lambda(x)\xi\|^{n+1}}\|\xi\|\mathrm{d}x$$

再利用 $\lambda(x)\in(0,1)$ 与 $\|x\|\geq 2\|\xi\|$ 可知 $\|x-\lambda(x)\xi\|\geq\|x\|/2$，从而存在与 n 相关的 C' 使得

$$\int_{|x|\geq 2|\xi|}|D_{ij}\Gamma(x-\xi)-D_{ij}\Gamma(x)|\leq C'\int_{|x|\geq 2|\xi|}\frac{\|\xi\|}{\|x\|^{n+1}}\mathrm{d}x$$

利用球坐标换元可验证此积分为 n 维单位球表面积乘

$$\int_{2\|\xi\|}^{\infty}\frac{\|\xi\|}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}$$

从而得证。

对 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，定义相应的 Newton 位势

$$w(x)=(\Gamma*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

位势方程的解：上述 $w\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad -\triangle w(x)=f(x)$$

- **证明：**

光滑性利用定义与 $\Gamma(\xi)$ 局部 L^1 可积 (放到某个原点为中心的球上后球坐标换元) 即可验证。

将卷积改写后，利用积分、求导可交换 (积分事实上是在有界区域上进行的) 与分部积分可知

$$\triangle w(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\xi)\triangle f(x-\xi)\mathrm{d}\xi=-\sum_i\int_{\mathbb{R}^n}D_i\Gamma(\xi)D_if(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

将右侧看作 $B_\varepsilon(0)$ 外的积分在 0 处的极限，利用分部积分公式在第 i 项中将 D_if 放入 $\mathrm{d}\xi_i$ 分部积分可进一步改写为 (计算得 $\triangle\Gamma$ 在非零处为 0，由此所有 Γ 二阶导项可相加消去)

$$\triangle w(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sum_i\int_{|\xi|=\varepsilon}D_i\Gamma(\xi)f(x-\xi)\frac{\xi_i}{\|\xi\|}\mathrm{d}S$$

直接计算 $D_i\Gamma(\xi)$ 的表达式，利用表面积公式可发现极限中即 f 在 $B_\varepsilon(\xi)$ 上的积分平均，趋于 $f(x)$。

将上述的 $w=\Gamma*f$ 记作 $w=Nf$，N 为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的算子。固定 i,j，进一步定义

$$Tf=D_{ij}Nf=D_{ij}(\Gamma*f)$$

可发现其亦为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的算子。

由于 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在任何 $L^p,1<p<\infty$ 中稠密，T 可以看作 L^p 上的线性算子。进一步地，利用稠密性，下方的强/弱 (p,p) 相关命题**只需对光滑紧支情况验证**即可。

T **为强** $(2,2)$ **型**：$\|T\|_{(2,2)}\leq 1$。

- **证明：**

设 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，对任何原点中心的球 B_R 有

$$\int_{B_R}f^2\mathrm{d}x=\int_{B_R}(\triangle w)^2\mathrm{d}x=\sum_{i,j}\int_{B_R}D_{ii}wD_{jj}w\mathrm{d}x$$

对右端利用两次分部积分公式，在第 i,j 项中将 $D_{ii}w$ 放入 $\mathrm{d}x_i$，再将 $D_{jji}w$ 放入 $\mathrm{d}x_j$ 可得到

$$\int_{B_R}f^2\mathrm{d}x=\int_{B_R}\sum_{i,j}(D_{ij}w)^2\mathrm{d}x+\int_{\partial B_R}\sum_{i,j}D_iw\left(D_{jj}w\frac{x_i}{R}-D_{ij}w\frac{x_j}{R}\right)\mathrm{d}x$$

与基本解的估计类似可知 $D_i\Gamma(x)$ 可被 $\|x\|^{-n+1}$ 的某倍数控制，而 $D_{st}\Gamma(x)$ 可被 $\|x\|^{-n}$ 的某倍数控制。设 f 的支集在 B_{R_0} 中，取 $R>2R_0$，则 $\|x\|=R$ 时 B_{R_0} 中 $\|x-\xi\|\geq R/2$，从而进一步利用 f 有界可知存在与 R 无关的 C 使得

$$|D_iw(x)|\leq\int_{B_{R_0}}|D_i\Gamma(x-\xi)||f(\xi)|\mathrm{d}\xi\leq\frac{C}{R^{n-1}}$$

$$|D_{st}w(x)|\leq\int_{B_{R_0}}|D_{st}\Gamma(x-\xi)||f(\xi)|\mathrm{d}\xi\leq\frac{C'}{R^n}$$

由此 (利用 n 维单位球表面积 $n\omega_n$)

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\partial B_R}\sum_{i,j}D_iw\left(D_{jj}w\frac{x_i}{R}-D_{ij}w\frac{x_j}{R}\right)\mathrm{d}x\right|\leq\lim_{R\to\infty}2n^2\cdot n\omega_nR^{n-1}\frac{C}{R^{n-1}}\frac{C'}{R^n}=0$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}^n}f^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i,j}(D_{ij}w)^2\mathrm{d}x$$

而 $\|Tf\|_{L^2}^2$ 为右侧一项的积分，于是 $\|Tf\|_{L^2}^2\leq\|f\|_{L^2}^2$，得证。

T 为弱 $(1,1)$ 型。

- **证明：**

空间分解

设 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，对 $|f(x)|$ 利用分解引理，取出对应 α 的 F 与 $\Omega=\cup_{k=1}^\infty Q_k$。定义

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\in F\\ \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}f(\xi)\mathrm{d}\xi & x\in Q_k\end{cases}$$

并记 $b(x)=f(x)-g(x)$，利用分解的性质可知 (第二行左侧为将积分绝对值放为绝对值积分，右侧利用 Minkowski 不等式)

$$|g(x)|\leq 2^n\alpha,\quad a.e.$$

$$\|g\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^1},\quad\|b\|_{L^1}\leq 2\|f\|_{L^1}$$

$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}b(x)\mathrm{d}x=0$$

由前两条性质可知 $g\in L^1\cap L^\infty$，由此分解其大于 1、小于 1 的部分可知其 L^2 可积。而由于 f 光滑紧支即可知 $b=f-g$ 亦 L^2 可积。

拆分放缩

与内插定理证明类似，由于 T 线性可知 $Tf=Tg+Tb$，从而由定义

$$\lambda_{Tf}(\alpha)\leq\lambda_{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\lambda_{Tb}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

由于 L_w^2 可被 L^2 控制，再由 $\|T\|_{(2,2)}\leq 1$ 即得

$$\lambda_{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq\frac{4}{\alpha^2}\|g\|_{L^2}^2$$

利用 Hölder 不等式放缩 $\|g\|_{L^2}^2$ 为 $\|g\|_\infty\|g\|_{L^1}$，即得到

$$\lambda_{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq\frac{2^{n+2}}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

双重序列

为估计 $\lambda_{Tb}(\alpha/2)$，将 Q_k 边长放大 $2\sqrt{n}$ 得到的同心立方体记为 Q_k^*，设 Ω^* 为 Q_k^* 并集，$F^* = \mathbb{R}^n\backslash\Omega^*$，则

$$|\Omega^*| \leq (2\sqrt{n})^n|\Omega| \leq \frac{(2\sqrt{n})^n}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

记 $b_k(x) = b(x)\chi_{Q_k}$。对每个 b_k，由于其积分为 0，存在一列函数 $b_{k,l} \in C_0^\infty(Q_k)$ 使得它们在 $L^2(Q_k)$ 下趋于 b_k，且

$$\forall l, \quad \int_{Q_k} b_{k,l}(x)\mathrm{d}x = 0$$

根据 T 的定义，当 $x \in \mathbb{R}\backslash Q_k^*$ 时

$$Tb_{k,l}(x) = D_{ij}\int_{Q_k}\Gamma(x-\xi)b_{k,l}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

利用 $b_{k,l}$ 积分为 0，设 x_k 为 Q_k 中心，有

$$Tb_{k,l}(x) = \int_{Q_k}\big(D_{ij}\Gamma(x-\xi) - D_{ij}\Gamma(x-x^k)\big)b_{k,l}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

在 $P_k = \mathbb{R}\backslash Q_k^*$ 上积分，利用本节开头的基本解的估计可知

$$\int_{P_k}|Tb_{k,l}(x)|\mathrm{d}x \leq \sup_{\xi\in Q_k}\int_{P_k}\big|D_{ij}\Gamma(x-\xi) - D_{ij}\Gamma(x-x^k)\big|\mathrm{d}\xi\int_{Q_k}|b_{k,l}(\xi)|\mathrm{d}\xi \leq J\int_{Q_k}|b_{k,l}(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

由于 T 为强 $(2,2)$，$b_{k,l}$ 收敛时 $Tb_{k,l}$ 也应收敛，于是利用 Fatou 定理可知

$$\int_{P_k}|Tb_k(x)|\mathrm{d}x \leq J\int_{Q_k}|b_k(\xi)|\mathrm{d}\xi = J\int_{Q_k}|b(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

整合估计

利用 $b = \sum_k b_k$，放缩可知

$$\int_{F^*}|Tb(x)|\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^\infty\int_{P_k}|Tb_k(x)|\mathrm{d}x \leq J\|b\|_{L^1} \leq 2J\|f\|_{L^1}$$

由此可得到

$$|\{x\in F^* \mid |Tb(x)| > \alpha/2\}| \leq \frac{4}{\alpha}J\|f\|_{L^1}$$

而 $x \in \Omega^*$ 的部分测度有限，从而

$$\lambda_{Tb}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq (4J + (2\sqrt{n})^n)\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}$$

由此结合对 Tb 与 Tg 的估计可得

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \leq (2^{n+2} + 4J + (2\sqrt{n})^n)\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}$$

这就得到了紧支光滑函数中 T 的弱 $(1,1)$ 型，从而得证。

T **为强** (p,p) **型**：对 $1 < p < \infty$，T 为强 (p,p) 型。

- **证明：**

利用 Marcinkiewicz 内插定理，已经得到对 $1 < p \leq 2$，T 是强 (p,p) 型的。

若 $p > 2$，记其对偶 $p' = \frac{p}{p-1}$，对任何 $f, h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，将求导分部积分到 h 上，并改变积分次序可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}Tf(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-\xi)D_{ij}h(x)\mathrm{d}x$$

对第二项再次运用分部积分，将 D_{ij} 转移到 $\Gamma(x-\xi)$ 上对 x 求导，而利用复合函数求导可知这与对 ξ 求 D_{ij} 结果相同，即可最终由 Hölder 不等式得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)Th(\xi)\mathrm{d}\xi \le \|f\|_{L^p}\|Th\|_{L^{p'}}$$

利用 $p' \in (1,2)$ 可知存在与 f,h 无关的 C 使得

$$\forall f,h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\quad \int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)h(x)\mathrm{d}x \le C\|f\|_{L^p}\|h\|_{L^{p'}}$$

由于 $Tf \in C^\infty$，可取一列 h 依范数逼近 $(Tf)^{p-1}$，则左侧接近 $\|Tf\|_{L^p}^p$，右侧接近

$$C\|f\|_{L^p}\|(Tf)^{p-1}\|_{L^{p'}} = C\|f\|_{L^p}\|Tf\|_{L^p}^{p-1}$$

从而得证其强 (p,p) 型。

位势方程 L^p 估计：设 $u \in W_0^{2,p}(B_R)$ 且满足

$$-\triangle u = f,\quad a.e.$$

则对 $1<p<\infty$，存在只与 n,p 相关的 C 使得 (这里 D^2 的范数代表所有可能二阶导的范数求和)

$$\|D^2u\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}$$

- **证明：**

  由于 B_R 边界充分光滑，嵌入定理成立，只需对 $u \in C_0^\infty(B_R)$ 证明成立，而将其零延拓到 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 即由位势方程的解知

  $$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

  于是 $D_{ij}u = Tf$，再由 T 为强 (p,p) 型即得得证。

§3.4 $W^{2,p}$ 内估计

设 Ω 为有界开区域，考虑 Ω 内的二阶线性椭圆型方程

$$Lu = f,\quad L = -a^{ij}D_{ij} + b^iD_i + c$$

且满足边界上 $u=0$。这时利用偏导可交换可不妨假设 $a^{ij}(x) \in C(\bar{\Omega})$ 对称，且满足存在 $\lambda,\Lambda > 0$ 使得

$$\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n,\quad \lambda|\xi|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

$$\sum_{i,j}\|a^{ij}\|_{L^\infty} + \sum_i \|b^i\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty} \le \Lambda$$

* 由于考虑的并非古典解，边界上 $u=0$ 事实上指的是 u 在某 $W_0^{k,p}$ 中，$u=\varphi$ 则对应 $u-\varphi$ 在某 $W_0^{k,p}$ 中。本节考虑的情况为 $k=2$。

* 估计思路与 Schauder 内估计非常类似。

记 a^{ij} 的**连续模**为

$$\omega(R) = \sup_{|x-y|\le R,\ 1\le i,j\le n} |a^{ij}(x) - a^{ij}(y)|$$

由 a^{ij} 在紧集连续可知此上界必然存在。

球域版本：若方程系数满足上方条件，则存在只依赖 $n,p,\Lambda/\lambda$ 与函数 ω 的正数 $R_0 \le 1$ 与只依赖 $n,p,\Lambda/\lambda$ 的 C 使得对任何 $R \in (0,R_0]$，若 $B_R \subset \Omega$，且 $u \in W_0^{2,p}(B_R)$ 几乎处处满足方程 (称为**强解**)，则

$$\|D^2u\|_{L^p} \le C\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p} + R^{-2}\|u\|_{L^p}\right)$$

- **证明：**

与第二章完全类似，只需说明 $\lambda = 1$ 时成立即可，原方程可以改写为

$$-a^{ij}(0)D_{ij}u = f + (a^{ij}(x) - a^{ij}(0))D_{ij}u - b^iD_iu - cu$$

类似 2.3 节进行换元可以从位势方程的估计得到常系数情况的估计，也即存在只与 $n, p, \Lambda/\lambda$ 相关的 C_1 使得

$$\|D^2u\|_{L^p} \leq C_1\|\bar{f}\|_{L^p}$$

利用连续模的定义与 Minkowski 不等式，可知存在只与 $n, p, \Lambda/\lambda$ 相关的 C_2 使得

$$\|D^2u\|_{L^p} \leq C_2\big(\|f\|_{L^p} + \omega(R)\|D^2u\|_{L^p} + \|u\|_{W^{1,p}}\big)$$

由此只需要取 R_0 使得 $C_2\omega(R_0) \leq \frac{1}{2}$ (由一致连续性，$\omega(R)$ 在 0 处趋于 0，因此一定可取到)，即保证 $0 < R \leq R_0$ 时有只与 $n, p, \Lambda/\lambda$ 相关的 C_3 使得

$$\|D^2u\|_{L^p} \leq C_3\big(\|f\|_{L^p} + \|u\|_{W^{1,p}}\big)$$

而 Sobolev 空间上有类似 2.1 节中的 Hölder 模的内插不等式，从而可得最终结论。

一般版本：若方程系数满足上方条件，$u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ 为强解，则对 Ω 任何列紧子集 Ω'，存在 C 使得

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p} + \|u\|_{L^p}\right)$$

这里 C 只与 $n, p, \Lambda/\lambda$，函数 ω，Ω' 到 $\partial\Omega$ 的距离 (记为 d) 与 Ω' 相关。

- **证明：**

仍只需说明 $\lambda = 1$ 时成立即可。对上题中的常数 R_0 取 $\bar{R}_0 = \min(R_0, d/2)$，设 $\bar{R}_0/2 \leq \rho < R \leq \bar{R}_0$，$x_0 \in \Omega'$，记 $B = B_R(x_0)$，仍可利用磨光核构造截断函数 $\zeta \in C_0^\infty(B)$ 满足存在只与 n 有关的 C_1 使得

$$\forall x \in B_\rho(x_0), \quad \zeta(x) = 1$$
$$\forall k \in \{0,1,2\}, |\alpha| = k, \quad |D^\alpha\zeta| \leq \frac{C_1}{(R-\rho)^k}$$

考虑 $v = \zeta u$，可发现

$$Lv = \tilde{f}, \quad \tilde{f} = \zeta f + (-a^{ij}D_{ij}\zeta + b^iD_i\zeta u) - 2a^{ij}D_i\zeta D_ju$$

利用球域版本结论 (由平移不影响结论，对任何球均成立) 可知存在只与 $n, p, \Lambda/\lambda$ 相关的 C_2 使得

$$\|D^2v\|_{L^p(B)} \leq C_2\big(\|\tilde{f}\|_{L^p(B)} + R^{-2}\|v\|_{L^p(B)}\big)$$

左侧缩小区域，只保留 $B_\rho(x_0)$ 中的部分，右侧将 ζ 各阶导数的界代入并按 u 整理系数 (由于 $\bar{R}_0 \leq 1$，只需保留分母次数最高的系数) 可发现存在只与 $n, p, \Lambda/\lambda$ 相关的 C_3 使得

$$\|D^2u\|_{L^p(B_\rho(x_0))} \leq C_3\left(\|f\|_{L^p(B)} + \frac{1}{R-\rho}\|Du\|_{L^p(B)} + \frac{1}{(R-\rho)^2}\|u\|_{L^p(B)}\right)$$

利用 Sobolev 空间的内插不等式可知对任何 ε 存在与 $n, p, \Lambda/\lambda$ 相关的 C_ε 使得

$$\|D^2u\|_{L^p(B_\rho(x_0))} \leq \varepsilon\|D^2u\|_{L^p(B)} + C_\varepsilon\left(\|f\|_{L^p(B)} + \frac{1}{(R-\rho)^2}\|u\|_{L^p(B)}\right)$$

取 $\varepsilon = 1/2$，利用 2.4 节引理得到存在只与 $n, p, \Lambda/\lambda$ 相关的 C_4 使得

$$\|D^2u\|_{L^p(B_\rho(x_0))} \leq C_4\left(\|f\|_{L^p(B)} + \frac{1}{(R-\rho)^2}\|u\|_{L^p(B)}\right)$$

取 $R=\bar{R}_0$、$\rho=\bar{R}_0/2$，可得

$$\|D^2u\|_{L^p(B_\rho(x_0))}\le C_5\big(\|f\|_{L^p(B)}+\|u\|_{L^p(B)}\big)\le C_5\big(\|f\|_{L^p}+\|u\|_{L^p}\big)$$

由于 ρ 已经固定，考虑 Ω' 每点附近半径 ρ 的球，利用紧性可知存在有限个覆盖 $\bar{\Omega}'$，选出个数 N 只与 ρ,Ω' 相关，从而最后有

$$\|D^2u\|_{L^p(\Omega')}\le NC_5\big(\|f\|_{L^p}+\|u\|_{L^p}\big)$$

得证。

§3.5 $W^{2,p}$ 全局估计

由于估计方式与 Schauder 估计完全类似，只给出主要步骤与结论。

位势方程-半球版本：设 $u\in W^{2,p}(B_R^+)\cap W_0^{1,p}(B_R^+)$，其中 $B_R^+=B_R(0)\cap\{x_n>0\}$，且 u 在 $x_n>0$ 的边界附近为零。若其为 $-\triangle u=f$ 在 B_R^+ 上的强解，则存在只与 n,p 相关的 C 使得

$$\|D^2u\|_{L^p(B_R^+)}\le C\|f\|_{L^p(B_R^+)}$$

* 注意 $W_0^{1,p}$ 代表 C_0^∞ 在 $W^{1,p}$ 中的闭包，因此 $W^{2,p}\cap W_0^{1,p}\ne W_0^{2,p}$。

- **证明：**

考虑 u 对 $\{x_n=0\}$ 作奇延拓成为 B_R 上的函数 $\tilde{u}$，f 对应奇延拓成为 $\tilde{f}$，则可发现 $\tilde{u}\in W_0^{2,p}(B_R)$ 且为 B_R 上 $-\triangle\tilde{u}=\tilde{f}$ 的强解。(由于此处取的是弱导数，边界的控制更加简单。)

由此，通过第三节位势方程 L^p 估计可直接得到

$$\|D^2\tilde{u}\|_{L^p(B_R)}\le C\|\tilde{f}\|_{L^p(B_R)}$$

而利用奇延拓定义可发现奇延拓后 p 范数为原本的 $2^{1/p}$ 倍，由此得证。

半球版本：若方程系数满足第四节条件，Ω 包含部分平边界 S，满足 $\Omega\subset\mathbb{R}^n_+$，$S\subset\partial\mathbb{R}^n_+$，且 $0\in S$，则存在仅依赖 $n,p,\Lambda/\lambda$ 与函数 ω 的正数 R_0 与 C 使得对任意 $0<R\le R_0$ 与 S 上的半球 $B_R^+\subset\Omega$，若 $u\in W^{2,p}(B_R^+)\cap W_0^{1,p}(B_R^+)$，在 $\partial B_R^+\cap\{x_n>0\}$ 附近为 0 且为 B_R^+ 上 $Lu=f$ 的强解，则 B_R^+ 上

$$\|D^2u\|_{L^p}\le C\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p}+R^{-2}\|u\|_{L^proo}\right)$$

平边界版本：在半球版本的系数与区域条件下，若 $u\in W^{2,p}(\Omega)$，在 S 上 $u=0$ 且为 Ω 上 $Lu=f$ 的强解，则对于任意 $\Omega\cup S$ 的列紧子集 Ω' 有

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')}\le C\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p}+\|u\|_{L^p}\right)$$

这里 C 依赖 $n,p,\Lambda/\lambda$，函数 ω，Ω' 到 $\partial\Omega\backslash S$ 的距离与 Ω'。

* 若区域边界具有一定的正则性，本节与上节中均可控制有限覆盖的重叠次数，从而可与 Ω' 无关。

全局估计：设 $\partial\Omega$ 为 $C^{1,1}$ ($\alpha=1$ 的 Hölder 连续)，方程系数满足第四节条件，$u\in W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$ 为 Ω 上 $Lu=f$ 的强解，则

$$\|u\|_{W^{2,p}}\le C\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p}+\|u\|_{L^p}\right)$$

这里 C 依赖 $n,p,\Lambda/\lambda$，函数 ω 与 Ω。

非齐次边值：考虑边界条件变为 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$，且 $\varphi\in W^{2,p}(\Omega)$ 的情况。若 $u\in W^{2,p}$ 使得 $u-\varphi\in W_0^{1,p}$ 且 $Lu=f$ 几乎处处成立，则称其为对应的强解。若记

$$\|\varphi\|_{W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)}=\inf\big\{\|\Phi\|_{W^{2,p}}\mid\Phi\in W^{2,p},\Phi-\phi\in W_0^{1,p}\big\}$$

则有估计

$$\|u\|_{W^{2,p}} \le C\big(\|f\|_{L^p} + \|\varphi\|_{W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^p}\big)$$

§3.6　$W^{2,p}$ 解的存在性

强解极值原理：设方程系数满足 (无需假设 $a^{ij} \in C(\bar{\Omega})$)

$$\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda|\xi|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

$$\sum_{i,j}\|a^{ij}\|_{L^\infty} + \sum_i \|b^i\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty} \le \Lambda$$

且 $c \ge 0$。若 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ 为 $Lu = f$ 的强解，则

$$\sup_{\Omega}|u| \le \sup_{\partial\Omega}|u| + C\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^n}$$

其中 C 依赖 $n, \Lambda/\lambda$ 与 Ω 中两点距离上界。
* 详细证明在第六章中，需要利用法映射，这里只进行叙述。

局部存在性：设 $\partial\Omega$ 为 $C^{2,\alpha}$，方程系数满足第四节条件且 $c \ge 0$。若 $\partial\Omega$ 的某子集 S 为 $\partial\Omega$ 中的开集，$\varphi \in C(\bar{\Omega})$ 且在 S 上为 0，对某 $p \ge n$，若 $f \in L^p$，则存在 $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足其为

$$\forall x \in \Omega, \quad Lu(x) = f(x)$$

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad u(x) = \varphi(x)$$

的强解，且对于任何 $\Omega \cup S$ 的列紧子集 Ω' 有

$$u \in W^{2,p}(\Omega')$$

- **证明：**

  $\varphi = 0$ 情况

  此时即 $S = \partial\Omega$。考虑近似序列 $a^{ij}_N, b^{ij}_N, c_N, f_N \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ 使得它们仍满足条件中的估计式 (或类似 2.7 节光滑边界版本证明进行适当放宽)，且 f_N 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于 f；a^{ij}_N 在 $C(\bar{\Omega})$ 中收敛于 a^{ij}，且 a^{ij}_N 的连续模能被一致的 $\omega(R)$ 控制；b^i_N、c_N 在 $L^\infty(\Omega)$ 中弱 * 收敛于 b^i、c。

  * 这类子列的取法依赖一些嵌入与稠密性质，书上基本都跳过了说明。

  考虑近似问题 (L_N 为 L 的系数对应替换为 a^N, b^N, c^N)

  $$\forall x \in \Omega, \quad L_N u_N(x) = f_N(x)$$

  $$\forall x \in \partial\Omega, \quad u_N(x) = 0$$

  利用 2.7 节可知其必然存在解 $u_N \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$，因此 $u_N \in W^{2,p} \cap W^{1,p}_0$，再通过 $W^{2,p}$ 全局估计可知

  $$\|u\|_{W^{2,p}} \le C\left(\frac{1}{\lambda}\|f_N\|_{L^p} + \|u\|_{L^p}\right)$$

  由于区域有界，$\|u\|_{L^p}$ 可被 $\|u\|_{L^\infty}$ 控制，而又通过强极值原理可知 $\|u\|_{L^\infty}$ 可被 $\|f_N\|_{L^n}$ 控制，再由 Hölder 不等式知其被 $\|f_N\|_{L^p}$ 控制，最终即得到

  $$\|u\|_{W^{2,p}} \le C'\frac{1}{\lambda}\|f_N\|_{L^p} \le C'\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^p}$$

  这里 C' 与 N 无关。

由此，u_N 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 中有界，因此可取出子序列弱收敛到 $u\in W^{2,p}(\Omega)$，可验证 u 为符合要求的强解。

真子集情况

S 为 $\partial\Omega$ 的真子集时，构造函数列 $\varphi_N\in C^2(\bar{\Omega})$ 使得 S 上 $\varphi_N=0$，且 φ_N 在 $C^2(\bar{\Omega})$ 中收敛于 φ。将边界条件从 $u=\varphi$ 改为 $u=\varphi_N$，利用第一种情况可知其存在解 $u_N\in W^{2,p}(\Omega)$ 且 $u_N-\varphi_N\in W_0^{1,p}(\Omega)$ (考虑 $u_N-\varphi_N$，注意 $C^2(\bar{\Omega})\subset W^{2,p}(\Omega)$)。利用平边界版本的全局估计，考虑边界点对应的 ψ，可发现对 $\Omega\cup S$ 的列紧子集 Ω' 有

$$\|u_N\|_{W^{2,p}(\Omega')}\le C(\|f\|_{L^p}+\|u_N\|_{L^p})$$

这里 C 与 N 无关。

利用强解的极值原理，对任何 N,N' 有

$$\|u_N-u_{N'}\|_{L^\infty}\le\|\varphi_N-\varphi_{N'}\|_{L^\infty}$$

因此利用柯西列定义，从 φ_N 一致收敛可推出 u_N 一致收敛，通过 $W^{2,p}$ 内部估计，可利用对角线法取出 $W^{2,p}_{loc}$ 意义下弱收敛到 u 的子列，可验证其满足要求。

唯一性下的估计：考虑 $\mathcal{L}$ 为所有满足存在 $\lambda,\Lambda>0$ 使得

$$\forall x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^n,\quad \lambda|\xi|^2\le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

$$\sum_{i,j}\|a^{ij}\|_{L^\infty}+\sum_i\|b^i\|_{L^\infty}+\|c\|_{L^\infty}\le\Lambda$$

且 $\omega(R)$ 存在并在 0 处趋于 0 的椭圆算子 L 构成的集合。

设 $1<p<\infty$。若某 $\partial\Omega$ 为 $C^{1,1}$ 的区域 Ω 中，对任何 $L\in\mathcal{L}$、$f\in L^p$，满足 $Lu=f$ 的 $u\in W^{2,p}\cap W_0^{1,p}$ 至多唯一，则解存在时对任何 f 有估计

$$\|u\|_{W^{2,p}}\le\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p}$$

其中 C 依赖 $n,p,\Lambda/\lambda$，函数 ω 与 Ω。

- **证明：**

与之前类似，可不妨设 $\lambda=1$，若此估计不成立，考虑归一化 u 的 L^p 模长可知存在一列 a_N^{ij}、b_N^i、c_N、f_N、u_N 使得

$$L_N=-a_N^{ij}D_{ij}+b_N^iD_i+c_N\in\mathcal{L}$$

$$u_N\in W^{2,p}\cap W_0^{1,p},\quad \|u_N\|_{L^p}=1$$

$$\forall x\in\Omega,\quad L_Nu_N=f_N$$

$$\|u_N\|_{W^{2,p}}\ge N\|f_N\|_{L^p}$$

利用 $W^{2,p}$ 全局估计的结果并放缩 $\|f\|_{L^p}$ 有

$$\|u_N\|_{W^{2,p}}\le\frac{C}{N}\|u_N\|_{W^{2,p}}+C$$

于是当 $N\ge 2C$ 时有

$$\|u_N\|_{W^{2,p}}\le 2C$$

由此，存在 u_N 的子序列弱收敛于 $u\in W^{2,p}$，进一步取出 a_N^{ij}、b_N^i、c_N、f_N 的子序列满足局部存在性 $\varphi=0$ 情况证明中的收敛性，由此可验证 $u\in W^{2,p}\cap W_0^{1,p}$ 且 $Lu=0$、$\|u\|_{L^p}=1$，但由唯一性可知只能 $u=0$ 符合要求，与 $\|u\|_{L^p}=1$ 矛盾。

唯一性下的存在性

在上述条件下，对任何 $L\in\mathcal{L}$，$f\in L^p$，存在解 $u\in W^{2,p}\cap W_0^{1,p}$。

- **证明：**

与局部存在性 $\varphi=0$ 情况相同考虑对应的近似问题，可验证 $\partial\Omega$ 为 $C^{1,1}$ 时区域具有外球性质，利用 2.7 节结论可知有解

$$u_N\in C^{2,\alpha}\cap C(\bar\Omega)$$

下面证明其在 $W^{2,p}$ 中，由此利用唯一性下的估计可知能取出弱收敛子列，即能验证收敛结果为符合要求的解。

由于其在内部为 C^2，对内部任何紧集一定 $W^{2,p}$，只需证明对每个边界点，存在邻域使得其在邻域中 $W^{2,p}$，即可通过有限覆盖定理得到全局的 $W^{2,p}$ 性。设边界 $C^{1,1}$ 定义中边界点 x_0 处对应映射为 ψ，对应邻域 V。

类似 2.7 节中弱光滑版本的的证明，适当缩小 B_1^+ 使得其具有光滑边界，且保证其包含 $\overline{B_{1/2}^+}$，得到的区域记为 B。

考虑 $y=\psi(x)$，$\tilde u_N(y)=u_N(x)$，可得到关于 y 的方程

$$-\tilde a_N^{rs}\tilde D_{rs}\tilde u_N+\tilde b_N^r\tilde D_r\tilde u_N+\tilde c_N\tilde u_N=\tilde f_N$$

其中 $\tilde D$ 代表对 y 求导，且

$$\tilde a_N^{rs}=a_N^{ij}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}\frac{\partial y_s}{\partial x_j},\quad \tilde b_N^r=a_N^{ij}\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i\partial x_j}+b_N^i\frac{\partial y_r}{\partial x_i},\quad \tilde c_N(y)=c_N(x),\quad \tilde f_N(y)=f_N(x)$$

取 $q=\max\{n,p\}$，由 f_N 与 ψ 的光滑性条件可知 $\tilde f_N\in L^q(B)$，从而根据局部存在性结论可知 $\tilde u_N\in W^{2,q}(B)$，由 ψ 光滑性可知 u_N 在 x_0 附近某邻域为 $W^{2,q}$，而 $q\ge p$，这就得到了证明。

* 我们已经证明了唯一性推存在性，于是只要证明至多唯一即有存在唯一。

一般情况唯一性：对某 $\partial\Omega$ 为 $C^{1,1}$ 的区域 Ω，任何 $L\in\mathcal{L}$，取定 $1<p<\infty$，若 $f\in L^p$，则满足 $Lu=f$ 的 $u\in W^{2,p}\cap W_0^{1,p}$ 至多唯一。

- **证明：**

考虑不同 u 作差可知只需证明 $f=0$ 的情况只有零解。

若 $p\ge n$，利用嵌入定理可知 u 符合本节开头的强解极值原理的条件，从而可直接得到唯一性成立，只需考虑 $p<n$ 的情况。

正定加强

我们先证明弱化的结论，即存在 $\sigma>0$ 使得

$$Lu+\sigma u=0$$

在 $W^{2,p}\cap W_0^{1,p}$ 中只有零解 (这里 $1<p<\infty$ 均可)。

考虑区域 $\tilde\Omega=\Omega\times(-1,1)$，其上的点为 $(x_1,\dots,x_n,t)$，并考虑算子 $\tilde L=L-D_{tt}$。直接计算验证可得，若 u 满足上述方程，记 $v(x,t)=\cos(\sigma^{1/2}t)u(x)$，有

$$\tilde Lv=0$$

记 $\tilde\Omega'=\Omega\in(-1/2,1/2)$，利用几何关系可发现它是 $\tilde\Omega$ 与其平边界 S 并集中闭包为紧的集合，于是由平边界本版本的全局估计可知存在与 σ 无关的 C 使得

$$\|v\|_{W^{2,p}(\tilde\Omega')}\le C\|v\|_{L^p(\tilde\Omega)}\le C\|u\|_{L^p}$$

第二个不等号直接利用 $|v| \le |u|$ 计算可得。
只保留左侧对 t 的两阶导项，计算 $D_{tt}v$ 可发现

$$\sigma\|u\|_{L^p}\left(\int_{-1/2}^{1/2}|\cos(\sigma^{1/2}t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \le C\|u\|_{L^p}$$

积分换元，假设 $\sigma \ge 1$，则积分限将缩短，将其放回 $(-1/2, 1/2)$ 即得

$$\sigma^{1-1/(2p)}\|u\|_{L^p}\left(\int_{-1/2}^{1/2}|\cos\tau|^p \mathrm{d}\tau\right)^{1/p} \le C\|u\|_{L^p}$$

于是取 σ 充分大即可得到 $\|u\|_{L^p} = 0$，将此时的 σ 记为 σ_p。

迭代回溯

首先，由于证明了解至多唯一，且根据定义 $L + \sigma_p \in \mathcal{L}$，与唯一性条件下的存在性完全类似可证明 $Lu + \sigma_p u = f$ 对任何 $f \in L^p$ 一定存在解 $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$，也即解事实上是存在唯一的。
若 $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$ 为 $Lu = 0$ 的解，可发现其满足

$$Lu + \sigma u = f, \quad f = \sigma u$$

设 $1/q = 1/p - 1/n$，利用 Sobolev 嵌入定理可发现 $u \in L^q$，于是 $f \in L^q$，根据存在唯一性可发现 $u \in W^{2,q} \cap W_0^{1,q}$：若否，还有其他 $W^{2,q} \cap W_0^{1,q}$ 中的解 u'，而由有界区域可知 $u' \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$，从而 $u - u'$ 是 $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$ 中 $Lu + \sigma u = 0$ 的解，只能为 0，矛盾。
由此，从 $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$ 可推出 $u \in W^{2,q} \cap W_0^{1,q}$，且 $1/q = 1/p - 1/n$，若 $p < n$，总可通过有限次减 $1/n$ 使得 $1/p - k/n < 1/n$，此时的 $q > n$，即通过 $q > n$ 的情况得到了 $Lu = 0$ 在 $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$ 中只有零解，得证。

综合以上，对一般的 p，只要 $\partial\Omega$ 为 $C^{1,1}$，对任何 $L \in \mathcal{L}$ 与 $f \in L^p$，满足 $Lu = f$ 的 $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$ 存在唯一，且有估计

$$\|u\|_{W^{2,p}} \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p}$$

其中 C 依赖 $n, p, \Lambda/\lambda$，函数 ω 与 Ω。

四 De Giorgi-Nash 估计

* 希望去除 a^{ij} 连续的条件得到弱解的估计，这里弱解即与第一章中完全相同定义。

§4.1 弱解的局部性质

考虑 $n \ge 3$ 维空间中的方程

$$-D_j(a^{ij}(x)D_i u(x)) = 0$$

其中 $a^{ij} \in L^\infty$，且

$$\exists\lambda > 0, \Lambda > 0, \quad \sum_{i,j}\|a^{ij}\|_{L^\infty} \le \Lambda, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, \quad \lambda|\xi|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2$$

* 事实上之后的讨论可以推广到 $-D_j(a^{ij}D_i u) + b^i D_i u + cu = 0$ 上，只要 b^i 与 c 也为 L^∞。此外，$n = 2$ 时也可以类似讨论。这里只考虑基础情况以简化计算。记

$$a(u, v) = \int_\Omega a^{ij} D_i u D_j v \mathrm{d}x$$

对应的弱解、弱下解、弱上解定义为对任何非负函数 $\varphi\in C_0^\infty$ 有 $a(u,\varphi)=0$ / $a(u,\varphi)\le 0$ / $a(u,\varphi)\ge 0$。
* 与 1.2 节中的有界性证明中类似，我们假设 a^{ij} 对称进行后续讨论。不对称时可放大为对称阵仍得到类似结论。

凸函数性质：若 $\Phi\in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R})$ 为凸函数：

- u 为此方程弱下解且 $\Phi'\ge 0$ 时，$v=\Phi(u)$ 为此方程弱下解；
- u 为此方程弱下解且 $\Phi'\ge 0$ 时，$v=\Phi(u)$ 为此方程弱上解；

- **证明：**

  对第一条性质，先设 $\Phi\in C_{loc}^2(\mathbb{R})$，直接计算可知对任何非负函数 $\varphi\in C_0^\infty$ 有

$$a(v,\varphi)=\int_\Omega a^{ij}D_iuD_j(\Phi'(u)\varphi)\mathrm{d}x-\int_\Omega a^{ij}D_iuD_ju\Phi''(u)\varphi\mathrm{d}x$$

  第一项由条件可知 $\Phi'(u)\varphi\ge 0$，从而根据弱下解可知整体非正，第二项由 a^{ij} 的性质可知 $a^{ij}D_iuD_ju$ 处处非负，而 $\Phi''(u)$ 由凸性非负、φ 非负，从而整体处处非负，积分非负，由此即得到 $a(v,\varphi)\le 0$。对一般的凸函数，考虑其 2.2 节中定义的磨光函数 $\tilde{\Phi}(s,\tau)$，直接由定义可验证其仍凸且导数仍非负，从而 $\tilde{\Phi}(u,\tau)$ 均为弱下解，再利用控制收敛定理令 $\tau\to 0$ 得证 $\Phi(u)$ 为弱下解。

  第二条性质的证明完全类似，利用弱上解与 $\Phi'(u)<0$ (从而考虑 $-\Phi'(u)\varphi$) 仍能得到第一项整体非正。

* 由此，u 为弱下解时 $u^+=\max(u,0)$ 为弱下解。

局部极值原理：弱 $v\in W^{1,2}(B_R)$ 是原方程的**有界弱下解**，且 a^{ij} 符合对应条件，则对 $p>0$，$\theta\in(0,1)$ 有

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{\theta R}} v\le C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}(v^+)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

其中 C 依赖 $n,\Lambda/\lambda,p$ 与 $(1-\theta)^{-1}$。
* 本性上确界 $\operatorname{ess\,sup}$ 定义见 1.4 节，对应可定义 $\operatorname{ess\,inf} u=-\operatorname{ess\,sup}(-u)$。

- **证明：**

  高指数情况-辅助函数

  先考虑 $p\ge 2$ 时，由上方性质已知 v^+ 为弱下解，而将 v 改为 v^+ 只会增大左侧本性上界，右侧不变，从而可不妨设 $v\ge 0$。

  利用逼近性质可知对任何非负的 $\varphi\in W_0^{1,2}$ 有 $a(v,\varphi)\le 0$，设 $\zeta\in C_0^\infty$，取 $\varphi=\zeta^2v^{p-1}$，计算导数可得

$$(p-1)\int_{B_R}(a^{ij}D_ivD_jv)v^{p-2}\zeta^2\mathrm{d}x\le -2\int_{B_R}a^{ij}v^{p-1}\zeta D_ivD_j\zeta\mathrm{d}x$$

  将负号放大为绝对值并放入积分，与 1.2 节有界性证明相同，通过非负性可将右侧放大为

$$2\int_{B_R}v^{p-1}\zeta\sqrt{(a^{ij}D_ivD_jv)(a^{ij}D_i\zeta D_j\zeta)}\mathrm{d}x$$

  再由 Cauchy 不等式即可放为

$$2\sqrt{\int_{B_R}v^{p-2}\zeta^2(a^{ij}D_ivD_jv)\mathrm{d}x\int_{B_R}v^p(a^{ij}D_i\zeta D_j\zeta)\mathrm{d}x}$$

  从而将 $a^{ij}D_ivD_jv$ 相关的部分除到左侧，利用非负性两边同平方可发现

$$(p-1)^2\int_{B_R}(a^{ij}D_ivD_jv)v^{p-2}\zeta^2\mathrm{d}x\le 4\int_{B_R}v^p(a^{ij}D_i\zeta D_j\zeta)\mathrm{d}x$$

  于是利用 a^{ij} 的性质得到

$$(p-1)^2\int_{B_R}\zeta^2v^{p-2}|Dv|^2\mathrm{d}x\le\frac{4\Lambda}{\lambda}\int_{B_R}v^p|D\zeta|^2\mathrm{d}x$$

计算可发现 $p^2 v^{p-2}|Dv|^2/4 = |Dv^{p/2}|^2$，从而利用 $p \geq 2$ 将 $(p-1)^2$ 缩小为 $p^2/4$ 即得

$$\int_{B_R} \zeta^2 |Dv^{p/2}|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{4\Lambda}{\lambda} \int_{B_R} v^p |D\zeta|^2 \mathrm{d}x$$

再利用

$$\sum_i D_i(\zeta v^{p/2})^2 = \sum_i (v^{p/2} D_i\zeta + \zeta D_i v^{p/2})^2 \leq 2\sum_i v^p (D_i\zeta)^2 + 2\sum_i \zeta^2 (D_i v^{p/2})^2$$

可得

$$\int_{B_R} |D(\zeta v^{p/2})|^2 \mathrm{d}x \leq \left(\frac{8\Lambda}{\lambda} + 2\right) \int_{B_R} |D\zeta|^2 v^p \mathrm{d}x$$

利用 Sobolev 嵌入定理可得存在只与 $n, \Lambda/\lambda$ 相关的 C_1 使得

$$\left(\int_{B_R} (\zeta v^{p/2})^m \mathrm{d}x\right)^{2/m} \leq C_1 \int_{B_R} |D\zeta^2| v^p \mathrm{d}x$$

这里 $m = 2n/(n-2)$。

高指数情况-迭代

记 $R_k = R\big(\theta + \frac{1-\theta}{2^k}\big)$，$\theta \in (0,1)$ 任取，设 $\zeta_k \in C_0^\infty(B_{R_k})$ 使得

$$\forall x \in B_{R_k}, \quad \zeta_k(x) \in [0,1]$$

$$\forall x \in B_{R_{k+1}}, \quad \zeta_k(x) = 1$$

$$\forall x \in B_{R_k}, \quad |D\zeta_k(x)| \leq \frac{2}{R_k - R_{k+1}} = \frac{2^{k+1}}{(1-\theta)R}$$

* 可考虑利用磨光核拼接的构造思路。

将原估算中的 B_R 变为 B_{R_k}，ζ 变为 ζ_k，由非负性，只保留左侧在 $B_{R_{k+1}}$ 内的积分缩小了左侧，从而再放大右侧有

$$\left(\int_{B_{R_{k+1}}} v^{np/(n-2)} \mathrm{d}x\right)^{(n-2)/n} \leq \frac{C_1 4^k}{(1-\theta)^2 R^2} \int_{B_{R_k}} v^p \mathrm{d}x$$

记 $p_k = p\big(\frac{n}{n-2}\big)^k$，上式中取定 $p = p_k$ 并两边开 p_k 次方可发现

$$\|v\|_{L^{p_{k+1}}(B_{R_{k+1}})} \leq \left(\frac{C4^k}{(1-\theta)^2 R^2}\right)^{1/p_k} \|v\|_{L^{p_k}(B_{R_k})}$$

迭代至 $k = 0$ 得到

$$\|v\|_{L^{p_{k+1}}(B_{R_{k+1}})} \leq \left(\frac{C}{(1-\theta)^2 R^2}\right)^{\sum_j p_j^{-1}} 4^{\sum_j j p_j^{-1}} \|v\|_{L^p(B_R)}$$

由 p_k 为指数量级下降，指数上的求和在 $k \to \infty$ 时均收敛，计算可知第一个求和为 $\frac{n}{2p}$，再将 $B_{R_{k+1}}$ 缩小到 $B_{\theta R}$ 可得

$$\|v\|_{L^{p_{k+1}}(B_{\theta R})} \leq \frac{C_2}{((1-\theta)R)^{n/p}} \|v\|_{L^p(B_R)}$$

这里 C_2 与 $n, \Lambda/\lambda, p$ 相关。再令 $k \to \infty$，由非负知左侧即为 v 在 $B_{\theta R}$ 的本性上界，而右侧由于 $|B_R| = C_3 R^n$，将 $(1-\theta)^{-n/p}$ 合并到 C_2 中即得符合要证明的右侧。

低指数情况

与高指数同理设 $v \geq 0$，则 $\operatorname{ess\,sup} v = \|v\|_{L^\infty}$。之前的估算中取 $p = 2$ 可得

$$\|v\|_{L^\infty(B_{\theta R})} \leq \frac{C_2}{((1-\theta)R)^{n/2}} \|v\|_{L^2(B_R)}$$

将右侧积分中的 v^2 拆成 v^pv^{2-p}，再将 v^{2-p} 放至 $\|v\|_{L^\infty(B_R)}^{1-p}$，即可得到

$$\|v\|_{L^\infty(B_{\theta R})} \le \frac{C_2}{((1-\theta)R)^{n/2}}\|v\|_{L^\infty(B_R)}^{1-p/2}\left(\int_{B_R} v^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

利用 Young 不等式可知 (拆分左右分别做 $1/(1-p/2)$ 与 $2/p$ 次方，满足倒数和为 1)

$$\|v\|_{L^\infty(B_{\theta R})} \le \frac{1}{2}\|v\|_{L^\infty(B_R)} + \frac{C_4}{((1-\theta)R)^{n/p}}\left(\int_{B_R} v^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

记 $\varphi(s) = \|v\|_{L^\infty(B_s)}$，则由上式可发现对任何 $0 < s < t \le R$ 有

$$\varphi(s) \le \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{C_4}{(t-s)^{n/p}}\left(\int_{B_R} v^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

利用 2.4 节开头引理即可知

$$\varphi(\theta R) \le \frac{C_4}{((1-\theta)R)^{n/p}}\left(\int_{B_R} v^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

与高指数情况同理得最终结论。

* 中间部分的证明思路称为 **Moser 迭代**。

* 弱解有界性的假定事实上可以去除，不过证明将变得更加复杂。

弱 Harnack 不等式：给定 $\sigma > 1$，若 $v \in W^{1,2}(B_{\sigma R})$ 是原方程在 $B_{\sigma R}$ 的**有界非负弱上解**，且对于 a 的约束在 $B_{\sigma R}$ 上成立，则存在 $p_0 > 0$、$C > 0$ 使得对任何 $\theta \in (0,1)$ 有

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_{\theta R}} v \ge \frac{1}{C}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} v^{p_0}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p_0}$$

其中 p_0 与 C 依赖 $n, \Lambda/\lambda$ 与 $(\sigma-1)^{-1}, (1-\theta)^{-1}$。

* 结合局部极值原理即能说明下界可以控制上界，从而构成 Harnack 不等式的形式。

* 这里所谓的依赖 $(\sigma-1)^{-1}, (1-\theta)^{-1}$ 在下方证明中直接表述成依赖 σ, θ，这里写成这样的形式是为了说明依赖的指数关系。

- **证明：**

问题转化

考虑 $\tilde{v}(x) = v(x/R)$，对应 $\tilde{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x/R)$，即将区域从 B_R 伸缩至了 B_1，且直接换元计算可发现不改变条件与结论，因此只需对 $R = 1$ 说明成立，记 $B = B_1$，这时 $1/|B|$ 为常数，可以直接去除。

进一步地，只要对 $\operatorname{ess\,inf}_B v > 0$ 的情况说明成立：由于 v 为弱上解时对任何 ε 有 $a(v+\varepsilon,\varphi) = a(v,\varphi)$，因此 $v+\varepsilon$ 也为弱上解，于是 $\operatorname{ess\,sup}_B v = 0$ 的情况先对 $\varepsilon > 0$ 估算 $\operatorname{ess\,sup}_{B_\theta}(v+\varepsilon)$，再令 $\varepsilon \to 0^+$ 即可。

此时，利用凸函数性质可知 v^{-1} 是非负有界弱下解，于是利用局部极值原理得到

$$\forall p > 0, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{B_\theta} v^{-1} \le C_1\left(\int_B v^{-p}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

其中 C_1 依赖 $n, \Lambda/\lambda, p$ 与 $(1-\theta)^{-1}$。

而左侧即为 $\left(\operatorname{ess\,inf}_{B_\theta} v\right)^{-1}$，于是

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_\theta} v \ge \frac{1}{C_1}\left(\int_B v^{-p}\,\mathrm{d}x\right)^{-1/p} = \frac{1}{C_1}\left(\int_B v^{-p}\,\mathrm{d}x\int_B v^p\,\mathrm{d}x\right)^{-1/p}\left(\int_B v^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

于是只要存在 $p_0 > 0$ 与 $C_2 > 0$ 使得

$$\int_B v^{-p_0}\,\mathrm{d}x\int_B v^{p_0}\,\mathrm{d}x \le C_2$$

结论即能成立 (注意 C_2 上的指数是负数，于是须反号)。
记 $w = \ln v - \beta$，常数 β 待定，则只需存在 $p_0 > 0$ 与 $C_3 > 0$ 使得

$$\int_B \mathrm{e}^{p_0|w|}\mathrm{d}x \le C_3$$

将指数中取为 w 与 $-w$ (由单调性，它们都不会超过指数中为 $|w|$ 的情况) 并相乘即可直接验算成立。

初步估算

考虑 v 为原方程在 B_σ 中的弱上解，与上个定理同理可取 $W_0^{1,2}(B_\sigma)$ 中任何非负函数作为检验函数。取定 $\varphi \in W_0^{1,2}(B_\sigma)$，则可发现 $v^{-1}\varphi \in W_0^{1,2}(B_\sigma)$ 且非负，以后者作为检验函数直接计算 $a(v, v^{-1}\varphi)$，并代入 w 表达式可得

$$\int_{B_\sigma} a^{ij}D_iwD_j\varphi\mathrm{d}x - \int_{B_\sigma}(a^{ij}D_iwD_jw)\varphi\mathrm{d}x \ge 0$$

进一步设 $\varphi = \zeta^2$，且 $\zeta \in W_0^{1,2}(B_\sigma)$ 满足 $B_{\bar\sigma}$ 上为 1，$\bar\sigma = (\sigma+1)/2$，则有

$$\int_{B_\sigma} 2\zeta a^{ij}D_iwD_j\zeta\mathrm{d}x - \int_{B_\sigma}(a^{ij}D_iwD_jw)\zeta^2\mathrm{d}x \ge 0$$

与局部极值原理类似利用正定性与 Cauchy 不等式放缩可知第一项不超过

$$2\int_{B_\sigma}\zeta\sqrt{(a^{ij}D_iwD_jw)(a^{ij}D_i\zeta D_j\zeta)}\mathrm{d}x \le 2\sqrt{\int_{B_\sigma}(a^{ij}D_iwD_jw)\zeta^2\mathrm{d}x\int_{B_\sigma}a^{ij}D_i\zeta D_j\zeta\mathrm{d}x}$$

消去共同部分后同平方得到

$$\int_{B_\sigma}\zeta^2 a^{ij}D_iwD_jw\mathrm{d}x \le 4\int_{B_\sigma}a^{ij}D_i\zeta D_j\zeta\mathrm{d}x$$

将左侧缩小到 $B_{\bar\sigma}$ 上使得 ζ^2 为 1，并放为下界 $\lambda|Dw|^2$，右侧放为上界 $\Lambda|D\zeta|^2$，且可使 ζ 有局部极值原理高指数情况迭代过程的类似梯度条件，即得存在只与 $n, \Lambda/\lambda$ 与 $(\sigma-1)^{-1}$ 有关的 C_4 使得

$$\int_{B_{\bar\sigma}}|Dw|^2\mathrm{d}x \le C_4$$

从此梯度结果出发，令 $\beta = \int_{B_{\bar\sigma}}\ln v\mathrm{d}x$ (由 v 有非零上下界积分一定收敛) 通过 Poincaré 不等式可得存在只与 $n, \Lambda/\lambda$ 与 $(\sigma-1)^{-1}$ 有关的 C_4' 使得

$$\int_{B_{\bar\sigma}}w^2\mathrm{d}x \le C_4'$$

Moser 迭代-放缩

类似之前的高指数情况，下面希望估算 q 为 ≥ 2 **整数**时的 $\|w\|_{L^q(B)}$。
在初步估算开头的式子中取检验函数 $\varphi = \zeta^2|w|^{2q}$ (这里加绝对值是为了下方中间一项的形式)，且 $\zeta \in C_0^\infty(B_{\bar\sigma})$，可得

$$\int_{B_\sigma}\zeta^2w^{2q}a^{ij}D_iwD_jw\mathrm{d}x \le 2q\int_{B_\sigma}\zeta^2|w|^{2q-1}a^{ij}D_iwD_j|w|\mathrm{d}x + \int_{B_\sigma}2\zeta w^{2q}a^{ij}D_iwD_j\zeta\mathrm{d}x$$

利用 Young 不等式有

$$2q|w|^{2q-1} \le \frac{2q-1}{2q}w^{2q} + (2q)^{2q-1}$$

进一步由正定性可知

$$a^{ij}D_iwD_j|w| = \pm a^{ij}D_iwD_jw \le a^{ij}D_iwD_jw$$

从而得到

$$\frac{1}{2q}\int_{B_\sigma}\zeta^2 w^{2q}a^{ij}D_iwD_jw\,\mathrm{d}x\leq(2q)^{2q-1}\int_{B_\sigma}a^{ij}D_iwD_jw\,\mathrm{d}x+\int_{B_\sigma}2\zeta w^{2q}a^{ij}D_iwD_j\zeta\,\mathrm{d}x$$

利用正定阵的内积性，配方可发现

$$2a^{ij}\alpha_i\beta_j\leq a^{ij}\alpha_i\alpha_j+a^{ij}\beta_i\beta_j$$

代入

$$\alpha_i=\frac{1}{2\sqrt{q}}|w|^q\zeta Dw_i,\quad \beta_i=2\sqrt{q}|w|^qD\zeta_i$$

即可知

$$\int_{B_\sigma}2\zeta w^{2q}a^{ij}D_iwD_j\zeta\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{4q}\int_{B_\sigma}\zeta^2w^{2q}a^{ij}D_iwD_jw\,\mathrm{d}x+4q\int_{B_\sigma}w^{2q}a^{ij}D_i\zeta D_j\zeta\,\mathrm{d}x$$

综合可得

$$\frac{1}{4q}\int_{B_\sigma}\zeta^2w^{2q}a^{ij}D_iwD_jw\,\mathrm{d}x\leq(2q)^{2q-1}\int_{B_\sigma}a^{ij}D_iwD_jw\,\mathrm{d}x+4q\int_{B_\sigma}w^{2q}a^{ij}D_i\zeta D_j\zeta\,\mathrm{d}x$$

利用条件与初步估算的梯度结果可知

$$\lambda\int_{B_\sigma}\zeta^2w^{2q}|Dw|^2\,\mathrm{d}x\leq 2C_4\Lambda(2q)^{2q}+16\Lambda q^2\int_{B_\sigma}|w|^{2q}|D\zeta|^2\,\mathrm{d}x$$

Moser 迭代-截断函数

对 $\delta\geq1$、$\tau>0$、$\delta+\tau\leq\bar\sigma$，取 $\zeta\in C_0^\infty(B_{\delta+\tau})$ 使得其值域 $[0,1]$，在 B_δ 上为 1，且 $|D\zeta|\leq2/\tau$ (类似之前可取到)，利用向量二范数的 Minkowski 不等式有

$$|D(\zeta^2w^{2q})|\leq 2q\zeta^2|w|^{2q-1}|D|w||+2\zeta|D\zeta||w|^{2q}$$

对第一项用 Cauchy 不等式放缩 (注意 $|D|w||=|Dw|$)，第二项代入 ζ 条件可得

$$|D(\zeta^2w^{2q})|\leq\zeta^2w^{2q}|Dw|^2+q^2\zeta^2w^{2q-2}+4\tau^{-1}w^{2q}$$

最终利用 Young 不等式得到

$$|D(\zeta^2w^{2q})|\leq\zeta^2w^{2q}|Dw|^2+\zeta^2w^{2q}+\zeta^2q^{2q}+4\tau^{-1}w^{2q}$$

两端在 $B_{\delta+\tau}$ 上积分 (注意由 ζ 的支集，含 ζ 的项相当于在 $B_{\bar\sigma}$ 或 B_σ 积分)，利用之前的放缩结果控制 $\zeta^2w^{2q}|Dw|^2$ 项可得

$$\int_{B_{\bar\sigma}}|D(\zeta^2w^{2q})|\,\mathrm{d}x\leq C_5\left((2q)^{2q}+q^2\int_{B_{\delta+\tau}}w^{2q}|D\zeta|^2\,\mathrm{d}x+\int_{B_{\delta+\tau}}w^{2q}\zeta^2\,\mathrm{d}x+q^{2q}|B_{\delta+\tau}|+\frac{1}{\tau}\int_{B_{\delta+\tau}}w^{2q}\,\mathrm{d}x\right)$$

这里 C_5 只与 n、Λ/λ 相关。

右侧五项中，第四项的 $|B_{\sigma+\tau}|$ 可以放大为 $|B_{\bar\sigma}|$，成为只与 n,σ 相关的常数，吸收进第一项。第二、三、五项利用 ζ 的假设可被 w^{2q} 积分乘 $q^2\tau^{-2}+\tau^{-1}+1$ 的倍数控制。由于 $\tau<\sigma$、$q\geq2$，可知 $\tau^{-1}<\sigma\tau^{-2}<\sigma q^2\tau^{-2}$、$1<\sigma^2q^2\tau^{-2}$，最终吸收为

$$\int_{B_{\bar\sigma}}|D(\zeta^2w^{2q})|\,\mathrm{d}x\leq C_6\left((2q)^{2q}+\tau^{-2}q^2\int_{B_{\delta+\tau}}w^{2q}\,\mathrm{d}x\right)$$

这里 C_6 只与 $n,\Lambda/\lambda,\sigma$ 相关。

由 ζ 性质将左侧积分只保留 B_δ 中部分可得

$$\int_{B_\delta}|D(w^{2q})|\mathrm{d}x \le C_6\Big((2q)^{2q}+\tau^{-2}q^2\int_{B_{\delta+\tau}}w^{2q}\mathrm{d}x\Big)$$

Moser 迭代-迭代

记 $\kappa=\frac{n}{n-1}$，利用 Sobolev 嵌入定理可将上式左侧进一步改写，得到

$$\Big(\int_{B_\delta}|w|^{2q\kappa}\mathrm{d}x\Big)^{1/\kappa} \le C_6\Big((2q)^{2q}+\tau^{-2}q^2\int_{B_{\delta+\tau}}w^{2q}\mathrm{d}x\Big)$$

取

$$q_i=\kappa^{i-1},\quad \delta_0=\bar\sigma,\quad \delta_i=\delta_{i-1}-\frac{\bar\sigma-1}{2^i}$$

代入 $q=q_i$、$\delta=\delta_i$、$\delta+\tau=\delta_{i-1}$，即可得到估算

$$\Big(\int_{B_{\delta_i}}|w|^{2\kappa^i}\mathrm{d}x\Big)^{1/\kappa} \le C_6 2^{2\kappa^{i-1}}\kappa^{2(i-1)\kappa^{i-1}}+C_6(4\kappa)^i\int_{B_{\delta_{i-1}}}|w|^{2\kappa^{i-1}}\mathrm{d}x$$

两侧开 $2\kappa^{i-1}$ 次方，记 $I_i=\|w\|_{L^{2\kappa^i}(B_{\delta_i})}$，$C_7=\sqrt{C_6}$，利用 Minkowski 不等式可得到

$$I_i\le C_7^{1/\kappa^{i-1}}\big(2\kappa^{i-1}+(4\kappa)^{i/(2\kappa^{i-1})}I_{i-1}\big)$$

迭代可得

$$I_j\le I_0\prod_{i=1}^j C_7^{1/\kappa^{i-1}}(4\kappa)^{i/(2\kappa^{i-1})}+\sum_{t=1}^j C_7^{1/\kappa^{t-1}}2\kappa^{t-1}\prod_{i=t+1}^j(4\kappa)^{i/(2\kappa^{i-1})}$$

由于 $\sum_i\frac{i}{2\kappa^{i-1}}$ 是收敛的且只与 n 有关，I_0 后的项可被控制，而第二项将所有的乘积与 C_7 次方控制后，$\sum_{t=1}^j\kappa^{t-1}$ 利用等比数列求和知能被 κ^j 控制 (注意 $\kappa>1$，1 也可被控制)，从而最终得到

$$I_j\le C_8(\kappa^j+I_0)$$

对任何整数 $q\ge 2$，取 j 使得 $2\kappa^{j-1}\le q\le 2\kappa^j$，利用 Hölder 不等式可知 (注意 $\delta_i>1$)

$$\|w\|_{L^q(B)}\le C_9I_j\le C_8C_9(\kappa^j+I_0)\le\frac{C_8C_9\kappa}{2}q+C_8C_9I_0$$

根据初步估算的结果，I_0 为常数，因此由 $q\ge 2$ 其可吸收到 q 中，最终得到

$$\|w\|_{L^q(B)}\le C_{11}q$$

这里 C_8 到 C_{11} 都至多与 $n,\Lambda/\lambda,\sigma$ 相关。由此，利用 q 为整数，两侧同作 q 次方，由 Stirling 公式可知 $q^q\le \mathrm{e}^q q!$，从而得到

$$\int_B\frac{|w|^q}{q!}\mathrm{d}x\le (C_{11}\mathrm{e})^{-q}$$

取 $p_0=(2C_{11}\mathrm{e})^{-1}$，即得到

$$\int_B\frac{(p_0|w|)^q}{q!}\mathrm{d}x\le 2^{-q}$$

求和即得

$$\int_B\mathrm{e}^{p_0|w|}\mathrm{d}x\le\int_B 1\mathrm{d}x+p_0\int_B|w|\mathrm{d}x+\frac{1}{2}$$

这里一三两项已经为常数，而中间项直接利用 $|w|\le\frac{|w|^2+1}{2}$ 即可通过初步估算控制为常数，由此得到最终结论。

Harnack 不等式：设 $u \in W^{1,2}(B_R)$ 为原方程在 B_R 上的**有界非负弱解**，则对任何 $\theta \in (0,1)$，存在依赖 $n, \Gamma/\gamma$ 与 $(1-\theta)^{-1}$ 的 C 使得

$$\operatorname{ess}\sup_{B_{\theta R}} u \le C \operatorname{ess}\inf_{B_{\theta R}} u$$

- **证明**：

设 $R_1 = \frac{1}{2}(R + \theta R)$，则取 $\sigma = \frac{2}{1+\theta}$ 可由弱 Harnack 不等式说明 $\operatorname{ess}\inf_{B_{\theta R}} u$ 至少为

$$\left(\frac{1}{|B_{R_1}|} \int_{B_{R_1}} u^{p_0} \, \mathrm{d}x \right)^{1/p_0}$$

的非零倍数，再由局部极值原理可知 $\operatorname{ess}\sup_{B_{\theta R}} u$ 可被其倍数控制，从而得证。

* 事实上，本节的证明过程中并没有用到 a^{ij} 均 L^∞ 的假定，因此 Harnack 不等式是一个非常一般化的结论，只要一致椭圆条件能够满足即成立。