

Homework

Week 1

习题1.1. 设 Ω 为 \mathbb{R}^n 上的有界光滑区域, 函数 $f \in L^2(\Omega)$. 称 $u \in H_0^2(\Omega)$ 为双调和边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & x \in \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的弱解, 如果对于 $\forall v \in H_0^2(\Omega)$, 积分等式

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

成立. 证明上述边值问题在 $H_0^2(\Omega)$ 中存在唯一的弱解.

习题1.2. 设 B_1 为 \mathbb{R}^n 上以原点为心的单位球, α 是一个正数. 证明 $|x|^{-\alpha} \in W^{1,p}(B_1)$ 当且仅当 $\alpha < \frac{n-p}{p}$.

习题1.3. 当 $n = 2$ 时, 叙述和证明定理4.2 ($b_i(x) = 0, d^i(x) = 0, i = 1, \dots, n$).

习题1.4. 设 $n \geq 3, f \in L^{2^*}(\Omega)$ ($2^* = \frac{2n}{n-2}$), $f^i \in L^2(\Omega)$ ($i = 1, \dots, n$), $g \in H^1(\Omega)$. 证明Dirichlet问题

$$\begin{cases} -D_j(a^{ij}D_i u) + cu = f - D_i f^i \text{ in } \Omega, \\ u - g \in H_0(\Omega), \end{cases}$$

在 $H^1(\Omega)$ 上存在唯一弱解, 其中 $(a^{ij}(x))$ 满足有界性条件和强制性条件, $c(x) \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ 满足非负性条件.

习题1.5. 设 $1 < p < +\infty, q = \frac{p}{p-1}$. 设 Ω 是 \mathbb{R}^n 上的Lipschitz 区域, 函数 $f \in L^q(\Omega)$. 证明 p -Laplace方程

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上存在唯一弱解.

Week 2

习题1.6. 设函数 $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 具有紧支集且是方程

$$-\Delta u + c(u) = f, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

的弱解, 其中 $f \in L^2(\mathbb{R}^n), c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数且满足 $c(0) = 0, c' \geq 0$. 证明 $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

习题1.7. 设 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑凸函数, $a^{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ ($i, j = 1, \dots, n$)满足椭圆性条件. 函数 $u \in H^1(\Omega)$ 是方程

$$\mathcal{L}u = -D_j(a^{ij}(x)D_i u) = 0, \quad x \in \Omega$$

的有界弱解. 记 $w = \phi(u)$. 证明 w 是一个弱下解, 即

$$\mathcal{L}w \leq 0, \quad x \in \Omega.$$

思考题1. 设 $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$. 设函数 $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$. 证明 p -Laplace 方程

$$-\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

弱解的存在性.

Week 3

习题2.1. 证明对于给定的函数

$$f(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2} \left[\frac{n+2}{(-\ln|x|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(-\ln|x|)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad x \neq 0$$

且 $f(0) = 0$, 位势方程

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in B_{\frac{1}{2}} \subset \mathbb{R}^n$$

不存在古典解.

习题2.2. 设 $0 < \alpha < 1$. 证明 $|x|^\alpha \in C^\alpha(\bar{B}_1)$.

习题2.3. 设 $0 < \alpha < 1$, $f, g \in C^\alpha(\bar{\Omega})$. 证明 $fg \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 且

$$\|fg\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leq \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \|g\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}.$$

习题2.4. 设 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 \mathbb{R}^n 上满足方程 $-\Delta u = f(x)$. 证明: 对 $\forall R > 0$,

$$|D_i u(x)| \leq \frac{n}{R} \text{osc}_{B_R(x)} u + R \text{osc}_{B_R(x)} f.$$

Week 4

习题2.5. 证明下列定理.

定理3.1. 设 $0 < \alpha < 1$. 设 $f \in C^\alpha(\bar{B}_1^+)$ 和 $u \in C^2(\bar{B}_1^+)$ 在 B_1^+ 上满足 $\Delta u = f$ 且 $u|_{x_n=0} = 0$, 则

$$[D^2 u]_{C^\alpha(B_{\frac{1}{2}}^+)} \leq C_0 (\|f\|_{C^\alpha(\bar{B}_1^+)} + \|u\|_{C(\bar{B}_1^+)}), \quad (1)$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}_{\frac{1}{2}}^+)} \leq C_0 (\|f\|_{C^\alpha(\bar{B}_1^+)} + \|u\|_{C(\bar{B}_1^+)}). \quad (2)$$

习题2.6. 证明[CW]的第二章第5节的引理5.1.

Week 5

习题2.7. 选取参数 α , 构造闸函数 $w(x) = \rho^{-\alpha} - |x - y|^{-\alpha}$ 来证明定理7.2.

思考题2: 利用Campanato空间推导边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in B_1, \\ u = 0, & x \in \partial B_1 \end{cases}$$

的Schauder估计, 其中 $f \in C^\alpha(\bar{B}_1)$.

Week 6

习题3.1. (1) 设 $f \in L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$). 利用 $A_t(f)$ 表示积分

$$\int_{A_s(f)} |f(x)|^p dx,$$

其中 $s \geq 0$.

(2) 设 $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是一个 C^1 函数, 且 $\Phi(0) = 0$. 又设 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个可测函数, $\Phi(|f(x)|)$ 在 Ω 上可积. 利用 $A_t(f)$ 表示积分

$$\int_{\Omega} \Phi(|f(x)|) dx.$$

习题3.2. 证明: 对于 $1 < p < \infty$, 存在常数 $C = C(n, p) > 0$ 使得

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

其中 M 为极大算子. (提示: M 是强 (∞, ∞) 型, 和弱 $(1, 1)$ 型.)

习题3.3. 证明: 由(3.4)定义的映射 T 可延拓为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1_w(\mathbb{R}^n)$ 上的映射且

$$\|Tf\|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \leq C(n)\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Week 7

习题3.4. 详细证明定理3.6.

习题3.5. 求出 $q, r \in (1, \infty)$ 使得当 $b_i \in L^q(\Omega)$, $c \in L^r(\Omega)$ 时, 引理4.1的估计仍然成立.

习题3.6. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \in (1, \infty)$), 记Newton位势 $u = Nf$. 求出 $q, r \in (1, \infty)$ 使得 $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\nabla u \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

习题3.7. 证明引理5.1中奇延拓后的 $\tilde{u} \in W^{2,p}_0(B_R)$.

习题3.8. 证明引理5.3

习题3.9. 证明定理5.4.

习题3.10. 设 $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 是方程

$$-\Delta u + u^3 - u = 0$$

的弱解. 证明 $u \in C^\infty(\Omega)$

Week 9

习题4.1. 证明引理1.2 ($n = 2$).

习题4.2. 去掉引理1.2中 u 是有界的假设.

习题4.3. 设 $1 < p < \infty$, $u \in W^{1,p}(B_R)$ 是

$$\nabla \cdot (a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad \text{in } B_R \quad (0 < \lambda \leq a(x) \leq \Lambda)$$

的弱解, 证明相应的局部极值原理.

Week 10

习题4.4. 设 $b^i \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$. 对于方程

$$-D_j(a^{ij}D_i u) + b^i D_i u + cu = f + D_i f^i$$

导出定理2.3的估计.

习题4.5. (i) 设 $u_1(x), u_2(x) \in H^1(\Omega)$ 是方程(1.1)'的弱上解, 证明 $v(x) = \min\{u_1(x), u_2(x)\}$ 是方程(1.1)'的弱上解.

(ii) 设 $u_1(x), u_2(x) \in H^1(\Omega)$ 是方程(1.1)'的弱下解, 证明 $w(x) = \max\{u_1(x), u_2(x)\}$ 是方程(1.1)'的弱下解.

习题4.6. 证明定理3.4.

Week 11

习题5.1. 设 $u \in W^{1,p}(B_R)$ ($1 < p < \infty$) 是拟线性方程

$$-D_i[a_i(x, u, Du)] + b(x, u, Du) = 0 \quad \text{in } B_R$$

的有界弱解, 其中 a_i 和 b 满足结构条件 ($0 < \lambda \leq \Lambda$):

$$\begin{aligned} a_i(x, z, \eta)\eta_i &\geq \lambda|\eta|^p - |g(x)|^p, \\ |a_i(x, z, \eta)| &\leq \Lambda[|\eta|^{p-1} + |g(x)|^{p-1}], \\ |b(x, z, \eta)| &\leq \Lambda[|\eta|^p + |f(x)|] \\ -b(x, z, \eta)\text{sign}z &\leq \Lambda[|\eta|^{p-1} + |f(x)|]. \end{aligned}$$

设 $f(x) \in L^\infty(B_R)$, $g(x) \in L^\infty(B_R)$, 叙述和证明相应的局部极值原理.

习题5.2. 证明定理2.4.

习题5.3. 设 $a_i(x, \tau, \eta) = a^{ij}(x)\eta_j$, $b(x, \tau, \eta) = \Lambda|\eta|^2$ ($\Lambda > 0$), 且 a^{ij} 满足满足结构条件:

$$\begin{aligned} |\eta|^2 &\leq a^{ij}(x)\eta_i\eta_j, & \forall \eta \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, \\ |a^{ij}(x)| + |Da^{ij}(x)| &\leq \Lambda, & \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

重证定理3.2.

Week 12

习题5.4. 设 $a_i(x, \tau, \eta) = a^{ij}(x)\eta_j$, $b(x, \tau, \eta) = \Lambda|\eta|^2$ ($\Lambda > 0$), 且 $a^{ij} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ ($0 < \alpha < 1$). 重证定理5.1.

Week 13

习题6.1. 设 $\Omega = B_d(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, $u(x) = \frac{\lambda}{d^2}(d^2 - |x - x_0|^2)$ ($\lambda > 0$), 求 Γ_u , $\chi(x)$ 和 $\chi(\Omega)$.

习题6.2. 在定理1.9中, 若 $f \leq 0$. 试直接证明

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Week 14

习题6.3. 设 K_1 是 \mathbb{R}^n 上的单位立方体, 有两可测集 $A \subset B \subset K_1$ 满足

(1) $|A| < \delta$, 其中 $\delta \in (0, 1)$;

(2) 对于任意二分分割得到的立方体 K , 如果 $|A \cap K| \geq \delta|K|$, 则 K 的上一层立方体 $\tilde{K} \subset B$.

则有

$$|A| \leq \delta|B|.$$

Week 15

习题6.4. 设定理2.3中的 $Lu = -a^{ij}D_{ij}u + cu$, 其中 $c = c(x) \geq 0$. 给出定理2.3证明的第一步.