PART 1 - 引入

先来考虑这样一些有趣的问题：
一条始终水平的绳子剪三刀，最多能剪成多少个部分？
一块煎饼切五刀，最多能切成多少块？
一个蛋糕切四刀，最多能切成多少部分？
这些问题都指向了同样的一个主题：切割。
第一个问题可以这么看：在一条直线上画三个点，最多能分成几个部分？
第二个问题可以这么看：在一个平面上画五条直线，最多能分成几个部分？
第三个问题可以这么看：在一个空间上画四个平面，最多能分成几个部分？
因此这些问题似乎可以统一成一个问题：
在一个 r 维的东西上作 n 次分割（Division），最多可以分成多少个部分？
不妨将这个问题的答案记为$D(n,r)$，直线就是 r 为 1 的情况，平面 r 为 2，空间 r 则为 3，同时可以注意到，用于分割的“刀”是一个$r-1$维的东西。
由此转化，上面三个问题便是求$D(3,1),D(5,2),D(4,3)$的值。
更加一般的，我们试着想象高维的分割：
一个三维空间，是否也会将四维空间分为两部分？
同样的，更高维情况下的“分割”会是怎样的情况？
为此，我们需要研究一切$D(n,r)$，其中 n 为非负整数，r 为正整数。
当$r=1$时，情况十分简单，n 个点将直线分为了$n+1$个部分，故显然有$D(n,1)=n+1$。
但是，当$r=2$时，情况就没有那么显然了。

PART 2 - 平面的分割

我们先计算一些 n 较小时的情况：

$$D(0.2)=1,D(1,2)=2,D(2,2)=4,D(3,2)=7$$

当再加一条直线时，如果你愿意仔细数一数，则会发现$D(4,2)=11$。

$$1\ 2\ 4\ 7\ 11\ \ldots$$

在这里停一下，给自己一点时间，你发现这个数列的规律了吗？
也许直接看不那么明显，但是我们作出相邻两项的差，便能得到一个十分和谐的数列：

$$1\ 2\ 4\ 7\ 11\ \ldots$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ \ldots$$

按照这个规律，我们似乎可以继续写下去：

$$1\ 2\ 4\ 7\ 11\ 16\ 22\ \ldots$$

那么，规律是否真的如我们猜测的一样简洁呢？
为此，我们需要找到增加一条直线时增添的区域数。
设平面上已有 k 条直线，作图可以发现，当增添区域最多时，第$k+1$条直线需要与前面每条都相交，这时，它一共经过了$k+1$个区域，也就将这么多个区域每个划分为两块，增添的区域数就是$k+1$
可喜可贺，我们的规律是正确的。由此便可以知道，$D(n,2)=1+2+\cdots+n+1$，等差数列求和后便成了$D(n,2)=\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n^2+n+2}{2}$。
但是这样一维一维得做下去，始终无法达到我们想要的任意维度的效果。更何况，三维时的情况已经十分难以直观看出了。不过，从刚才的做法中，我们似乎得到了一点思路：新增直线经过的区域数等于其增添的区域数。利用这个，也许我们可以推出一些结论。

为了更明显地揭示结论，我们来看一个具体例子。

PART 3 - $\boldsymbol{D(4,3)}$与递推的出现

当维度为 3 时，一些较小的情况仍然可以直观得到：

$$D(0.3)=1, D(1,3)=2, D(2,3)=4, D(3,3)=8$$

但是，当来到$D(4,3)$，就算我们画出图，也很难数清区域数，为此，我们必须寻求别的方法。

由划分平面时的启发，我们只需要知道增添的区域数就够了，而这意味着，我们需要知道这个新增的平面经过了多少个区域。

我们采取一种十分特殊的思路：

将第四个平面放进去，再取出来，看看这个平面会怎么被已有的三个平面切割。

再次给自己一点时间，看看能不能自己画出这个平面上的情况。

由于这个平面必须与其他三个平面都相交成一条直线，这个平面上留下的“刀痕”必然是三条不同的直线。又因为另外三个平面也需要以最多区域的方式进行划分，这三条直线必然两两相交于三个不同点。

有趣的是，这些直线将平面划分为的区域数，恰好就是平面经过的不同区域数。这个判断成立依赖以下两点：

同一个区域内，平面不可能被切分开；

平面的每一个被切分的部分，一定属于一个区域。

于是，这些直线将平面划分的区域数，就是新增的区域数！

那么直线究竟将平面划成了几个区域呢？

很显然，这是上一部分已经解决的问题，这里我们直接给出结果：

$$D(4,3)=D(3,3)+D(3,2)=8+7=15$$

更巧妙的是，用同样的道理，我们似乎还可以把这个式子继续写下去：

$$D(5,3)=D(4,3)+D(4,2)=15+11=26$$

$$D(6,3)=D(5,3)+D(5,2)=26+16=42$$

我们甚至可以发现，这个规律的适用不只是在三维空间。运用这样考虑切割部分的方法，我们可以在更高维的情况实现一摸一样的操作，于是我们有了关键的递推公式：

$$D(n+1,r+1)=D(n,r+1)+D(n,r)$$

我们将所有的$D(n,r)$这样列成一个表格：

r \ n	0	1	2	3	4	……
1	1	2	3	4	5	……
2	1	2	4	7	11	……
3	1	2	4	8	15	……
……	……	……	……	……	……	……

这个递推也就是说，表格中的每个元素等于它左侧的元素与左上的元素之和。

由于表格的第一行$D(n,1)=n+1$，而第一列显然有$D(0,r)=1$，用递推我们已经可以得到任意元素的值。

例如求$D(6,4)$，可以由这样的路径：

$$D(1,4)=2, D(2,4)=4, D(3,4)=8, D(4,4)=16, D(5,4)=31, D(5,3)=26, D(6,4)=57$$

于是，问题在此已经变成了单纯的计算问题!
不过，为了算出最终结果，我们还要做一些知识的储备。

PART 4 - 组合数

我们再把递推公式放在这里:

$$D(n+1,r+1)=D(n,r+1)+D(n,r)$$

有的观众可能会意识到,有一类数有着和这个极为相似的递推,它们就是大名鼎鼎的组合数。所谓组合数是指这么一类数，它们被记为C_n^k，代表从 n 个元素中不重复地选出 k 个元素的方法种数。举个例子，C_4^2就代表从 1234 里选出两个数，可以是 12，13，14，23，24，34，一共六种选择，因此$C_4^2=6$。
事实上，C_n^k有着精确的公式:

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

其中的感叹号表示阶乘，$n!=1\times 2\times 3\times \ldots \times n$，特别地，规定$0!=1$。
不过为了今天的推导，我们不妨只记住它的原始意义：从 n 个元素中不重复地选出 k 个元素的方法种数。
这里值得注意的是，n 是正整数，而 k 是非负整数。当 k 为 0 时，也就是“什么都不取”的取法，我们认为是一种。而当 k 大于 n 时，显然是不可能取出的，因此我们将它规定为 0。
我们接下来就用定义来证明两个式子:
第一个，$C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k$。
想象这样的场景:
我们需要从$n+1$个不同的球中取出$k+1$个球。我们将其中一个球涂红，那么，如果取出这个球，则需要在剩下的 n 个球中取 k 个（C_n^k），如果不取，则需要在剩下的 n 个球中取$k+1$个（C_n^{k+1}）。因为这个红球要么取要么不取，两种情况的种类相加便是全部情况（C_{n+1}^{k+1}），这便得到了公式的证明。
这里值得第三次停顿下来，自己去验证 k 大于等于 n 时的情况，最终便能发现，这个式子可以对所有合理的 n 与 k 成立。
第二个，$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$。
左侧包含了从 n 个小球中取出任意多个数的情况，因此最后的结果，应该为从 n 个小球中取出一部分的情况数。
从另一个角度来看，既然是取出一部分，每个小球都有取与不取两种情况，一共 n 个小球，全部相乘恰好是2^n。
由这两个组合数公式，我们终于可以得出结果了。

PART 5 - 结果的计算与探索

自然，$D(n,r)$是由递推唯一确定的值，所以对于我们猜测出的结果，只要验证它满足首行、首列与递推，就一定是一个正确的结果。
事实上，这个结果并没有那么容易猜测。首先，能联想到组合数就利用了下面两个式子的相似性:

$$D(n+1,r+1)=D(n,r+1)+D(n,r)$$

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k$$

紧接着,我们还要利用已经算出的一些结果,进一步猜测它究竟是怎样由组合数表示出来的。完成这两步后，我们还需要代回原本的递推验证，才能最终确信我们的答案。
这三步在猜测的过程中缺一不可，而当你终于完成后，你将得到一个美妙的式子:

$$D(n,r)=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^r$$

首行与首列的情况请观众自己试着验证，我们这里简单验证一下它符合递推:

$$D(n,r)+D(n,r+1)$$
$$=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^r$$
$$+C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{r+1}$$
$$=C_n^0+C_{n+1}^1+\cdots+C_{n+1}^r+C_{n+1}^{r+1}$$
$$=1+C_{n+1}^1+\cdots+C_{n+1}^r+C_{n+1}^{r+1}$$
$$=C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+\cdots+C_{n+1}^r+C_{n+1}^{r+1}$$
$$=D(n+1,r+1)$$

到这里, 题目似乎就做完了, 不过如果你是个有心人, 也许能在表格中发现一些其他的规律, 比如:

$$n\le r\Rightarrow D(n,r)=2^n$$

那么，最后一次停下来，试着自己用组合数时推导的第二个公式证明这个结论吧。

同样，这里给一个简单的证明:

$$D(n,r)$$
$$=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^r$$
$$=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n+0+0+\cdots+0$$
$$=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$$
$$=2^n$$

最后的最后，关于这道题其实还能有些其他的思考，例如:

高维空间中这样的分割究竟是如何被严谨定义的?

是否一定可以实现这样的分割来达到理论最大值?

达到最大值的条件怎样抽象表述?

限于视频时长，这里不能一一解答，但只要能一直带着探索的好奇心，相信总有一天你将能够自己解决这些疑问。

感谢观看!